Itaú BBA

# Teoria de Carteira de Markowitz

Para um portfolio com: • $p$ ativos (pesos $w_i$)

o retorno para um período será:

$$R = \sum_{i=1}^{p} w_i R^i$$

A média e a variância de $R$ são dadas, respectivamente, por:

$$\mu = E[R] = E\left[\sum_{i=1}^{p} w_i R^i\right] = \sum_{i=1}^{p} w_i E[R^i]$$

$$\cancel{\sigma^2 = Var[R] = Var\left[\sum_{i=1}^{p} w_i R^i\right] = \sum_{i=1}^{p} w_i^2 Var[R^i] +}$$

$$\sigma^2 = Var[R] = Cov[R,R] = \sum_{i,j=1}^{p} w_i w_j Cov[R_i, R_j]$$

Os pesos $w_i$ satisfazem os seguintes vínculos:

$$\sum_{i=1}^{p} w_i = 1 \quad (*) \qquad\qquad 0 \leq w_i \leq 1 \quad (**)$$

Diversificação: risco $\approx$ desvio padrão do retorno do portfolio

Itaú BBA

Se ~~existirem~~ $i, j$ $(i \neq j)$ tais que tivermos $\begin{cases} Cov[R_i, R_j] = 0 \\ \text{ou} \\ Cov[R_i, R_j] < 0 \end{cases}$

e $\{w^i\}$ satisfizer (*) e (**) teremos:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{p} w_i^2 \sigma^2 + \sum_{i \neq j=1}^{p} w_i w_j Cov[R_i, R_j] \leq \sum_{i=1}^{p} w_i^2 \sigma_i^2 \leq \sum_{i=1}^{p} w_i \sigma_i^2$$

Em particular, para $w_i = 1/p$ [equally weighted portfolio]

e $\sigma_i^2 = v \ \forall i$ teríamos:

$\sigma^2 \leq \dfrac{v}{p}$ o que é apenas uma fração da variância individual dos ativos

- para reduzir o risco através da diversificação um investidor deve abrir mão de parte do retorno esperado dos ativos que possuem risco

- a teoria de portfólio ótimo de Markowitz diz respeito à este trade-off ótimo entre o retorno médio do portfolio e sua variância (volatilidade)

- A condição (**) pode ser relaxada (short-selling) e tornar a teoria mais simples.

# Geometria dos Conjuntos Eficientes

Consideremos o caso simples em que:

$$p = 2 \begin{cases} (\mu_1, \sigma_1) \\ (\mu_2, \sigma_2) \end{cases} \text{ média e desvio dos retornos}$$

$$\text{e} \quad \rho = \frac{Cov(R_1, R_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$$

Construímos um portfolio definido:

$$w_1 = \alpha \quad \longrightarrow \quad w_2 = (1-\alpha)$$

$$(0 \leq \alpha \leq 1)$$

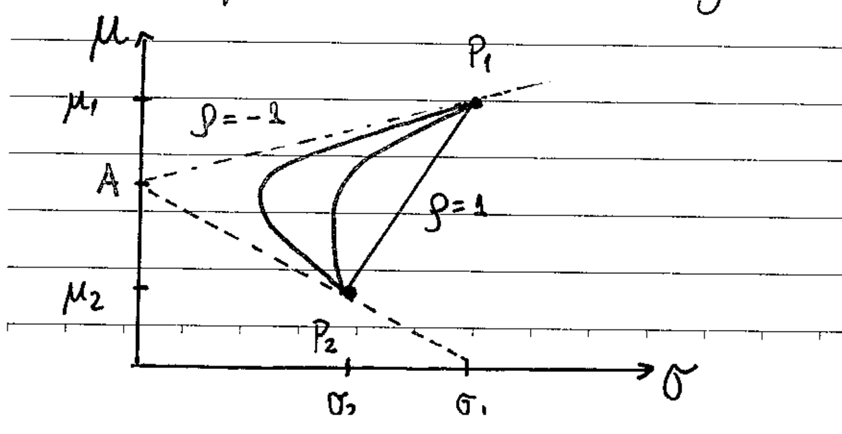
O retorno médio do portfolio será:

$$\mu(\alpha) = \alpha \mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$$

Já a volatilidade do portfolio será:

$$\sigma^2(\alpha) = \alpha^2 \sigma_1^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_2^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1 \sigma_2 \rho$$

Vamos analisar a curva $\{(\sigma(\alpha), \mu(\alpha));\ 0 \leq \alpha \leq 1\}$ para diferentes valores de $\rho$:




$\alpha = 0 \Rightarrow P_2$

$\alpha = 1 \Rightarrow P_1$

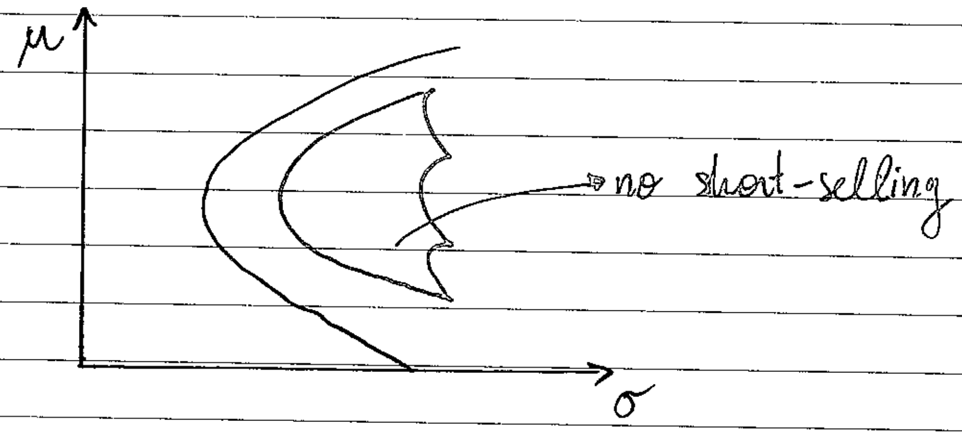
(4)

Itaú BBA

Generalizando para p ativos: o cjto de pontos no plano $(\sigma,\mu)$ que corresponde aos retornos do portfolio é chamado região factível (feasible).

Para $p \geq 3$ a região é um conjunto conexo bi-dimensional. A região também é convexa a esquerda

(dados quaisquer dois pontos na região uma linha que os une não cruza a fronteira esquerda da região)

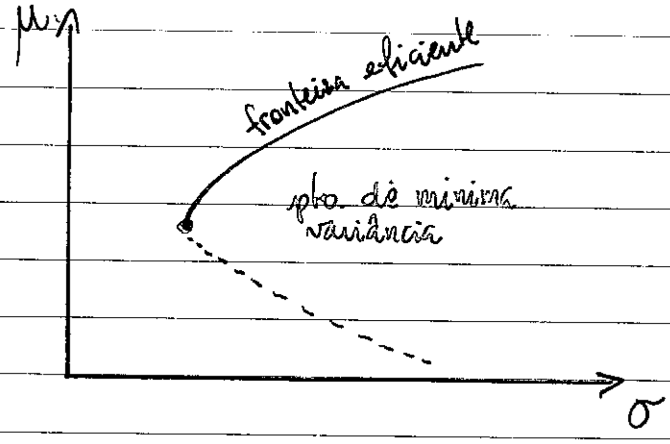



Minima Variância e Fronteira Eficiente

- A fronteira esquerda da região é chamada conjunto de mínima variância.

- Para um dado valor do retorno médio $\mu$ o ponto factível com menor $\sigma$ está sobre o conjunto de mínima variância. Este corresponde ao MVP p/ o dado $\mu$

- Para um dado valor de volatilidade $\sigma$ investidores preferem o portfolio c/ maior retorno, o qual é obtido pelo ponto superior do conjunto realizável




front. eficiente $\subset$ conj. de min. variância

## Cálculo dos Portfólios Eficientes

Consideremos novamente p ativos c/ retornos:

$\vec{r} = (R_1, \dots, R_p)^T$

e sejam $\vec{w} = (w_1, \dots, w_p)^T$ e $\vec{\imath} = (1, \dots, 1)^T$

podemos então escrever:

$$\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)^T = (E[R_1], \dots, E[R_p])^T \quad \text{e}$$

$$\vec{\Sigma}_{ij} = \Sigma_{ij} = Cov[R_i, R_j]$$

Nesta notação teremos, para o portfolio:

$$\mu_\pi = \vec{\mu}^T \vec{w} \quad \text{e} \quad \sigma_\pi^2 = \vec{w}^T \Sigma w$$

- No caso em que short-selling é permitido existe uma solução explícita para os pesos do portfolio eficiente.

Itaú BBA

Dado um retorno alvo $\mu_*$ para o retorno médio do portfolio o vetor de pesos de um portfolio efficiente pode ser caracterizado como:

$$\vec{w}_* = \arg\min_{\vec{w}} \vec{w}^T \vec{\Sigma} \vec{w}$$

sujeito a $\vec{w}^T \vec{\mu} = \mu_*$

$\vec{w}^T \vec{1} = 1$ (short-selling permitido!)

Método dos multiplicadores de Lagrange:

Problemas gerais de otimização:

$$\min_{\vec{x}} \; f(\vec{x}) = f(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{variáveis de decisão}})$$

↳ função objetivo a qual queremos optimizar (minimizar)

sujeito a $\begin{cases} g_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}) \end{cases} \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \begin{cases} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{cases}$

restrições (vínculos)

desigualdades ou igualdades

Alguns problemas são mais tratáveis como minimização outros como maximização

De um tipo p/ o outro:

$$\max f(x) = -\min(-f(x))$$

$$\min f(x) = -\max(-f(x))$$

Itaú BBA

<u>transformação afim</u>: $f(x) \longrightarrow b f(x) + a$

não modifica o valor ótimo de $x$:

$$\max (a + b f(x)) = a + b \max f(x)$$

[não esquecer de reverter a transf. p/ obter o valor correto da função objetivo]

<u>Otimização Irrestrita</u>: $\min_{\vec{x}} f(x_1, \dots, x_n)$

(cálculo plain-vanilla!)

o valor mínimo de $f(\vec{x})$ é um extremo da função:

se $\vec{x}_* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ é tal que $f(\vec{x}_*)$ é um mínimo global então:

1st order condition

- $\vec{\nabla} f \Big|_{\vec{x}_*} = 0$ (necessária mas não suficiente)
- hessiano de $f$ em $\vec{x}^*$ deve ser positiva definida (negativa definida p/ maximização)

2nd order condition

(condição suficiente)

<u>Otimização c/ restrições de igualdade</u>:

$\min_{\vec{x}} f(\vec{x})$ sujeita a $g_1(\vec{x}) = b_1$

$\vdots$

$g_m(\vec{x}) = b_m$

<u>Solução</u>: método de Lagrange

Itaú BBA

Escrevendo a função lagrangeana $L(\vec{x}, \vec{\lambda})$

Esta nada mais é do que a função objetivo inicial aumentada pelas funções de vínculo multiplicadas por uma variável "chamada multiplicador de lagrange

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(\vec{x}) - b_j) = f(\vec{x}) + \vec{\lambda} \cdot (\vec{g} - \vec{b})$$

[n variáveis + m vínculos] $\longrightarrow$ (m+n) variáveis sem vínculos

$(x_1, \ldots, x_n)$ $\qquad$ $(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$

Problema reformulado: $\min_{\vec{x}, \vec{\lambda}} L(\vec{x}, \vec{\lambda})$

Utilizando a condição de 1ª ordem:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\vec{x}) = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

otimização irrestrita de f penalizada por uma soma de funções parametrizada por $\lambda$.

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(\vec{x}) = g_j(\vec{x}) - b_j = 0 \qquad j = 1, \ldots, m$$

vínculos originais

Resolve-se o sistema e verifica-se se o hessiano obedece (satisfaz a condição de 2ª ordem)

Aplicação: maximizando a área de um retângulo.

Gostaríamos de encontrar as dimensões $x$ e $y$ dos lados de um retângulo tal que sua área é maximizada mantendo um perímetro constante $p$.

$$A(x,y) = xy \quad \text{e} \quad P(x,y) = (x+y)\cdot 2 = p$$

Problema de otimização: $\max_{x,y} A(x,y) = xy$

sujeito a $P(x,y) - p = 2(x+y) - p = 0$

Apenas uma restrição $\Rightarrow$ um multiplicador de Lagrange

$$L(x,y) = xy - \lambda(2(x+y) - p)$$

Cond. de 1ª ordem:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x + 2y - p = 0$$

Cuja solução é:

$$\begin{cases} x = p/4 \\ y = p/4 \\ \lambda = p/8 \end{cases} \Rightarrow A(x,y) = \frac{p^2}{16}$$

Cond. de 2ª ordem:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Itaú BBA

H não é ~~...~~ nem positiva nem negativa definida.

E agora José?? Obtivemos um máximo, um mínimo ou nenhum dos dois?

Seja $x$ o lado menor e $y$ o menor do retângulo.
Seja agora $\varepsilon \in (0, P/4)$ tal que definindo:

$$\begin{cases} x = \frac{P}{4} - \varepsilon \\ y = \frac{P}{4} + \varepsilon \end{cases}$$ respeitamos a restrição do perímetro

$$\Rightarrow A(x,y) = (P/4 - \varepsilon)(P/4 + \varepsilon) = P^2/16 - \varepsilon^2 < P^2/16$$

$\Rightarrow$ result. de $x$ e $y$ pelo mét. de Lagrange maximiza a área e resolve o problema.

Otimização com restrições de desigualdade:

$$\min_{\vec{x}} f(\vec{x}) \quad \text{sujeito a} \quad g_1(\vec{x}) \leq b_1$$
$$\vdots$$
$$g_m(\vec{x}) \leq b_m$$

Condições necessárias (teorema de Kuhn-Tucker) p/ a existência de soluções:

mult. dicados de Lagrange entra

1º $$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial (g_j(\vec{x}) - b_j)}{\partial x_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

$$\lambda_j (g_j(\vec{x}) - b_j) = 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, m$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad ; \quad j = 0, \dots, m$$

Itaú BBA

As condições de Kuhn-Tucker são necessárias e suficientes para a existência de solução apenas qdo a função objetivo é convexa e as restrições são lineares.

Voltando ao portfolio...

$$\left.\begin{array}{l} \vec{w}^* = \arg \min_{\vec{w}} \frac{1}{2}\sigma_\pi^2 = \frac{1}{2}\vec{w}^T \Sigma \vec{w} \\ \text{sujeito a} \quad \mu^* = \vec{w}^T \vec{\mu} \\ \qquad\qquad 1 = \vec{w}^T \vec{\imath} \end{array}\right\} \text{otimização com restrições de igual//.}$$

$$L(\vec{w}, \lambda, \gamma) = \frac{1}{2}\vec{w}^T \Sigma \vec{w} + \lambda(\mu^* - \vec{\mu}^T \vec{w}) + \gamma(1 - \vec{\imath}^T \vec{w})$$

Condições de 1ª ordem: derivando c/ respeito ao vetor $\vec{w}$

$$\frac{\partial L}{\partial w} = \vec{w}^T \Sigma - \lambda \mu^T - \gamma \vec{\imath}^T = 0 \quad (***)$$

Calculando a matriz hessiana encontramos $\Sigma$ a qual é positiva definida.

(***) tem solução explícita:

$$\begin{cases} \vec{w}^T \Sigma = \lambda \vec{\mu}^T - \gamma \vec{\imath}^T \\ \Sigma \vec{w} = \lambda \mu - \gamma \vec{\imath} \end{cases}$$

$$\vec{w}^* = \Sigma^{-1}(\lambda \vec{\mu} + \gamma \vec{\imath})$$

Das derivadas c/ relação a $\lambda$ e $\gamma$ temos:

$\vec{\mu}^T \vec{w} = \mu^*$ e $\vec{w}^T \vec{1} = 1$

substituindo a solução $\vec{w}^*$:

$$\vec{\mu}^T \vec{\Sigma}^{-1}(\lambda\vec{\mu} + \gamma\vec{1}) = \lambda\vec{\mu}^T\vec{\Sigma}^{-1}\mu + \gamma\mu^T\vec{\Sigma}^{-1}\vec{1} = \mu^*$$

$$1^T \vec{\Sigma}^{-1}(\lambda\vec{\mu} + \gamma\vec{1}) = \lambda\vec{1}^T\vec{\Sigma}^{-1}\mu + \gamma\vec{1}^T\vec{\Sigma}^{-1}\vec{1} = 1$$

Reescrevendo: $C\ \cancel{A} = \vec{1}^T\vec{\Sigma}^{-1}\vec{1}$

$A\ \cancel{B} = \vec{\mu}^T\vec{\Sigma}^{-1}\vec{1} = \vec{1}^T\vec{\Sigma}^{-1}\vec{\mu}$

$B\ \cancel{C} = \vec{\mu}^T\vec{\Sigma}^{-1}\mu$

C A B A

temos então: $\lambda = \dfrac{A\mu^* - B}{AC - B^2}$ e $\gamma = \dfrac{C - B\mu^*}{AC - B^2}$

CB A CB A CB A

C A B $(AC - B^2 > 0) = D$

$$\Rightarrow \vec{w}^* = \frac{\vec{\Sigma}^{-1}(\mu^* A\vec{\mu}^T - B\vec{\mu}^T + C\vec{1} - \mu^* B\vec{1})}{AC - B^2}$$

A

$CB - A^2 = D$

e a variância do portfolio eficiente será:

$$\sigma_*^2 = (B - 2\mu_* A + \mu^2 C)/D$$

Itaú BBA

O retorno alvo que minimiza $\sigma_*^2$ é:

$$\mu_{mv} = \frac{A}{C} \quad \text{(MVP global)}$$

$$\Rightarrow \sigma_{mv}^2 = \frac{1}{C} \quad e \quad \vec{w}_{mv} = \frac{\overrightarrow{\Sigma}^{-1}\vec{\imath}}{C}$$

Verifique!