Morgan Stanley

Introdução

Matéria prima: séries temporais financeiras

principal característica deste tipo de série temporal:

VOLATILIDADE
- não é diretamente observável
- pode ser definida de várias maneiras
- agrupamentos (clusters)

Estes últimos levam aos modelos heteroscedásticos condicionais: nos quais a variância (volatilidade) de um retorno num dado instante de tempo, depende de ~~de~~ retornos passados e de outras informações disponíveis até aquele instante ~~de tempo~~

$\Longrightarrow$ variância condicional (não constante) $\Rightarrow \neq$ variância global

- É possível também que a média varie com o tempo
- Outros momentos também podem variar

- Outra característica marcante é a ausência de correlação serial: ARMA $\longrightarrow$ ARCH
volatilidade estocástica

Morgan Stanley

Tipos de Dados

1ª categoria: observações igualmente espaçadas; intervalo Δt entre duas observações é constante, uma semana, um dia, um mês.

dados diários: em geral tomamos o último valor observado no dia (preço de fechamento)

Em alguns casos temos um valor agregado durante um certo período bem definido (volume financeiro)

2ª categoria: observações irregularmente espaçadas

dados intradiários: intervalos entre observações são variáveis aleatórias (durações) e podem existir observações ocorrendo num mesmo instante de tempo (negócios,

dados de alta-frequência

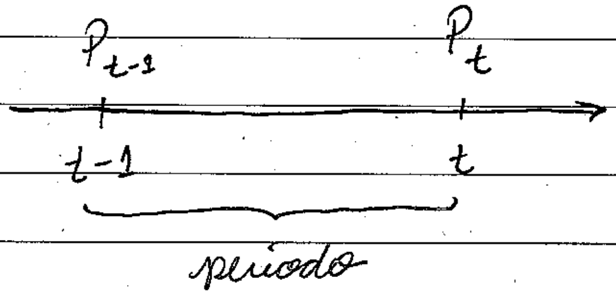
Morgan Stanley

Retornos e sua aritmética

Apesar de usarmos como matéria prima séries temporais de preços seu principal derivado, os retornos, são em geral o objeto de atenção.

Risco é medido em termos dos retornos os quais são, por sua vez, as variações dos preços

Denotaremos por P_t o preço de um particular ativo num instante t e assumindo que não haja nenhum pagamento de dividendos no intervalo de tempo (período) anterior a t:



$\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$
"variação absoluta"

ΔP_t : variação de preço entre os instantes t e $t-1$

Retorno: variação relativa do preço

Retorno líquido simples: $R_t = \dfrac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \dfrac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \dfrac{\Delta P_t}{P_{t-1}}$
(entre os instantes $t-1$ e t)

"taxa de retorno financeiro" resultante da posse do ativo durante o período $(t-1, t)$

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \Longrightarrow (1+R_t) = \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

retorno bruto simples

Se denotarmos $p_t = \ln P_t$ definimos

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(1+R_t) = p_t - p_{t-1}$$

retorno composto continuamente ou log-retorno

$$r_t = \ln(1+R_t) \Rightarrow R_t = e^{r_t} - 1$$

Pequena digressão:

expansão de Taylor: $f(x_0+\delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left.\frac{d^k f}{dx^k}\right|_{x=x_0} \delta^k$

$f(x)=\ln(x), \quad x_0 = 1$

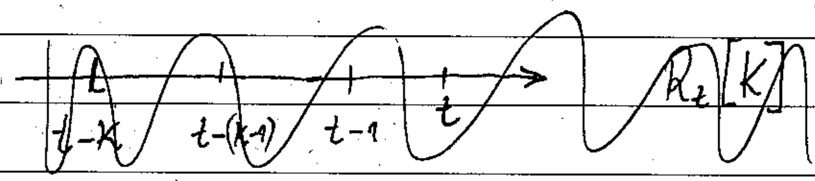
$$\Rightarrow \ln(1+\delta) = \ln(1) + \delta + \frac{1}{2!}\left(\frac{-1}{1}\right)\delta^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{2}{1}\right)\delta^3 + \dots = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} + \dots \approx \delta$$

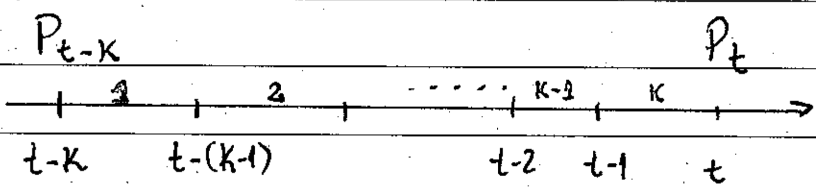
$$\Longrightarrow \Delta t \to 0 \Rightarrow P_t \to P_{t-1} \Rightarrow R_t \to 0 \Longrightarrow r_t \approx R_t$$

ou, em geral, para R_t "pequeno" $r_t \approx R_t$

Retornos multiperíodo:

Retorno simples de período k : $R_t[K]$





$$R_t[K] = \frac{P_t - P_{t-K}}{P_{t-K}}$$

$R_t[K] = \frac{P_t}{P_{t-K}} - 1 \Rightarrow$ retorno bruto de período k : $1 + R_t[K]$

$$1 + R_t[K] = \frac{P_t}{P_{t-K}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \frac{P_{t-2}}{P_{t-3}} \cdots \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} = (1+R_t)(1+R_{t-1}) \cdots (1+R_{t-k+1})$$

$$= \prod_{j=0}^{K-1} (1 + R_{t-j})$$

Anualização: facilitando comparações

Se o período considerado é anual e temos um período de K anos

Retorno bruto anualizado: $\left(1+R_t[K]\right)^{1/K}$

Retorno líquido anualizado (simples): $\left(1+R_t[K]\right)^{1/K}-1 \doteq R_t^A[K]$

Exercício: mostrar que o retorno simples anualizado pode ser aproximado por uma média aritmética dos retornos simples em cada período:

$$R_t^A[K] \approx \frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} R_{t-j} \qquad \left(e^x = 1 + x + x^2/2 + \cdots\right)$$

Já para os retornos contínuos:

$$r_t[K] = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-k}}\right) = \ln\left(1+R_t[K]\right)$$

$$= \ln\left(\prod_{j=0}^{K-1}\left(1+R_{t-j}\right)\right) = \sum_{j=0}^{K-1} \ln\left(1+R_{t-j}\right) = \sum_{j=0}^{K-1} r_{t-j}$$

"o log retorno de K períodos é a soma dos log retornos individuais em cada período"

Ajustando para o caso de pagamento de dividendos

• D_t : dividendo pago entre os instantes $t-1$ e t

retorno total : $R_t = \dfrac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \underbrace{\dfrac{P_t - P_{t-1}}{P_t}}_{\text{retorno de ganho de capital}} + \underbrace{\dfrac{D_t}{P_{t-1}}}_{\text{dividend yield (bruto}}$

log-retorno : $r_t = \ln(1+R_t) = \ln(P_t + D_t) - \ln(P_{t-1})$

multiperíodo:

$$r_t[K] = \ln\left(\prod_{j=0}^{K-1} \frac{P_{t-j} + D_{t-j}}{P_{t-j-1}}\right) = \sum_{j=0}^{K-1} \ln\left(\frac{P_{t-j} + D_t}{P_{t-j-1}}\right)$$

Retorno em excesso (retorno excessivo)

Diferença entre o log retorno do ativo (r_t) e o log retorno de um ativo de referência (r_t^*)

Em geral o ativo de referência é um "ativo livre de risco".

Ajustando pela Inflação (Retornos Reais)

O cálculo de retornos reais envolve 2 passos:

1) deflacionar o preço nominal do ativo por um índice geral de preços (IPCA)
2) calcular os retornos utilizando os preços deflacionados.

$$P_t^R = \frac{P_t}{IPCA_t} \Rightarrow R_t^{real} = \frac{P_t^R - P_{t-1}^R}{P_{t-1}^R} = \frac{P_t/IPCA_t - P_{t-1}/IPCA_{t-1}}{P_{t-1}/IPCA_{t-1}}$$

$$= \frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{IPCA_{t-1}}{IPCA_t} - 1$$

Alternativamente, definindo a inflação $\pi_t = \frac{IPCA_t}{IPCA_{t-1}} - 1$

$$\Rightarrow R_t^{Real} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{1}{(1+\pi_t)} - 1 = \left(\frac{1+R_t}{1+\pi_t}\right) - 1$$

Agregação de retornos

A equação $r_t[K] = \sum_{j=0}^{K-1} r_{t-j}$ mostra a chamada agregação temporal dos retornos

Podemos definir também a uma agregação transversal (cross-section) para os retornos de diferentes ativos componentes de uma carteira (portfolio) p.

Seja p composto de N ativos $A_1, \ldots, A_N$ com pesos individuais $w_1, \ldots, w_N$ $\left[\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \right]$

R_i : retornos simples } dos ativos P_t : valor da carteira
r_i : log retornos }

~~Se, num instante inicial $t=0$, o valor (preço) da carteira é P_0 após um período~~

- para o ativo i : $P_t^i = w_i P_t = w_i P_{t-1}(1+R_t^i)$