Ativos : N

pesos : w_i

preços : $P_0^i \quad (t=0) \qquad P_t^i$

Valor da carteira em $t=0$: $P_0 = \sum_i P_0^i$

retornos $R_1^i = \dfrac{P_1^i}{P_0^i} - 1$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{N} P_t^i = \sum_{i=1}^{N} P_0^i (1 + R_1^i)$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_0} = \sum_{i=1}^{N} \frac{P_0^i}{P_0} (1 + R_1^i) = \sum_{i=1}^{N} w^i (1 + R_1^i)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} w^i + \sum_{i=1}^{N} w_i R_1^i = 1 + \sum_{i=1}^{N} w_i R_1^i$$

$$\therefore R_1 = \frac{P_1}{P_0} - 1 = \sum_{i=1}^{N} w_i R_1^i$$

$$r_1 = \ln(1 + R_1) = \ln\left(1 + \sum_{i=1}^{N} w_i R_1^i\right) \approx \sum_{i=1}^{N} w_i R_1^i$$

- agregação transversal de retornos é mais simples para retorno simples

- agregação temporal é mais fácil c/ log retornos.

Itaú BBA

Assimetria e Curtose

Suposição comum: r_t i.i.d. e gaussianos

$r_t \sim N(\mu, \sigma^2) \implies 1+R_t \sim$ log-normal

$$E(R_t) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} - 1$$

$$Var(R_t) = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

Distribuição amostral é aproximadamente simétrica mas apresenta excesso de curtose.

Definições: X é uma v.a. qualquer c/ média μ e variância σ^2.

assimetria:
$$A(X) = E\left[\frac{(X-\mu)^3}{\sigma^3}\right]$$

curtose:
$$K(X) = E\left[\frac{(X-\mu)^4}{\sigma^4}\right]$$

p/ uma distribuição normal: $A(X) = 0$, $K(X) = 3$

$e(X) = K(X) - 3$ excesso de curtose

caudas pesadas $K > 3$ (pode até mesmo ser infinita)

Itaú BBA

Com uma amostra $X_1, \ldots, X_T$ de X consideremos o r-ésimo momento amostral:

$$m_r = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^r \qquad \text{onde } \hat{\mu} = \bar{X}$$

Substituindo os momentos verdadeiros de X pelos respectivos momentos amostrais, obtemos os estimadores

$$\hat{A}(X) = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{X_t - \bar{X}}{\hat{\sigma}}\right)^3$$

$$\text{onde } \hat{\sigma}^2 = \sum_{t=1}^{T}\frac{(X_t - \bar{X})^2}{T}$$

$$\hat{K}(X) = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{X_t - \bar{X}}{\hat{\sigma}}\right)^4$$

$$\Rightarrow \hat{e}(X) = \hat{K}(X) - 3$$

Se tivermos uma amostra de uma distribuição normal e T for grande, então

$$\hat{A} \sim N(0, 6/T) \qquad \hat{K} \sim N(3, 24/T)$$

(momentos amostrais são estimadores viesados!)

Testando a normalidade: $H_0: A = 0 \Rightarrow \sqrt{T/6}\,\hat{A} \longrightarrow N(0,1)$

$H_0: K = 3 \Rightarrow \sqrt{T/24}(\hat{K} - 3) \longrightarrow N(0,1)$

Itaú BBA

Combinando as duas coisas:

estatística $S = \left(\frac{T}{6}\right)\hat{A}^2 + \left(\frac{T}{24}\right)(\hat{K}-3)^2$ (Jarque & Bera)

H_0: série é normal $S \sim \chi^2_{(2)}$

Fatos Estilizados sobre Retornos

Assim como muitas outras séries temporais as séries financeiras apresentam características como:

- tendências
- sazonalidade
- pontos atípicos
- heterocedasticidade condicional
- não linearidade ← mais complicada de se definir

↳ resposta diferente a grandes ou pequenos choques ou choques positivos ou negativos.

Características peculiares:

- retornos raramente apresentam tendências ou sazonalids. (intradiários talvez)

- câmbio e juros: tendências que variam c/ o tempo.

Principais fatos estilizados de séries financeiras:

- retornos não são, em geral, autocorrelacionados
- os quadrados dos retornos são autocorrelacionados
- séries de retornos apresentam agrupados de volatilid.
- distrib. (incondicional) dos retornos apresenta caudas mais pesadas do que a distrib. normal; além disso é "ligeiramente" leptocúrtica
- algumas séries de retornos são não lineares.

Itaú BBA

Propriedades das Distribuições de Retornos

- primeiro passo no estudo de retornos de ativos
- objetivo: entender o comportamento dos retornos através do tempo

Consideremos um conjunto de N ativos cuja posse é mantida por T períodos, $t = 1, \ldots, T$

Para cada ativo i, seja r_{it} seu log-retorno no período t.

$$\{ r_{it} ;\ i = 1, \ldots, N;\ t = 1, \ldots, T \}$$

Alternativas: $\{ R_{it} ; \quad \}$ (retornos simples)
$\{ z_{it} ; \quad \}$ (log-retornos excessivos)

$Z_t = R_t - R_{0t}$ $\qquad$ $z_t = r_t - \cancel{\ } r_{0t}$

↳ ativo de referência (em geral "livre de risco")

Distribuições estatísticas e seus momentos

Seja $\mathbb{R}^k$ (euclideano) $\quad x \in \mathbb{R}^k$

$X = (X_1, \ldots, X_k)'$ vetores aleatórios
$Y = (Y_1, \ldots, Y_q)'$

$P[X \in A, Y \in B]$: prob. de que $X \in A \subset \mathbb{R}^k$ e $Y \in B \subset \mathbb{R}^q$.

(vamos em geral assumir que ~~A~~ X e Y são contínuos)

Itaú BBA

Distribuição Conjunta

A função $F_{X,Y}(x, y; \theta) = \mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y; \theta]$

$x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$ ($\leq$ é definida componente a componente)

é a chamada função de distribuição conjunta de X e Y com parâmetros θ

O comportamento de X e Y é caracterizado por esta função.

Se a função densidade de probabilidade conjunta existe ela é denotada por

$f_{X,Y}(x, y; \theta)$

e então

$$F_{X,Y}(x, y; \theta) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(w, z, \theta)\, dw\, dz$$

(neste caso X e Y são contínuos)

Distribuição Marginal

A distribuição marginal de X é dada por

$F_X(x; \theta) = F_{X,Y}(x, (\infty, \dots, \infty); \theta)$ (integra Y)

e, similarmente

$F_Y(y; \theta) = F_{X,Y}((\infty, \dots, \infty), y; \theta)$ (integra X)

Se $K=1$, X é uma v.a. escalar e a função distrib. torna-se

$$F_X(x) = P[X \leq x; \theta]$$

↳ função distribuição acumulada (CDF)

- não decrescente: $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ se $x_1 \leq x_2$

- $F_X(-\infty) = 0$
  $F_X(\infty) = 1$

- para uma dada probabilidade p, o menor número real x_p tal que $p \leq F_X(x_p)$ é chamado percentil $(100p)\%$ da variável aleatória X

$$x_p = \inf_x \{x \mid p \leq F_X(x)\}$$

<u>Distribuição condicional</u>

$$F_{X|Y \leq y}(x;\theta) = \frac{P[X \leq x, Y \leq y; \theta]}{P[Y \leq y; \theta]}$$

distrib. cond. de X dado $Y \leq y$

Se as p.d.f.s envolvidas existem

(1) $$f_{x|y}(x;\theta) = \frac{f_{x,y}(x,y;\theta)}{f_y(y;\theta)}$$

densid. condicional de X dado $Y=y$

na qual a densidade marginal é obtida de

$$f_y(y;\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y;\theta)\,dx$$

Da ~~difk~~ equação (1) temos a relação entre as distribuições conjunta, marginal e condicional:

$$f_{x,y}(x,y;\theta) = f_{x|y}(x;\theta) \times f_y(y,\theta)$$

Por último, X e Y são vetores aleatórios independentes se e somente se

$$f_{x|y}(x,y;\theta) = f_x(x,\theta)$$

e, consequentemente,

$$f_{x,y}(x,y;\theta) = f_x(x;\theta) \times f_y(y;\theta)$$

Momentos de uma variável aleatória

O K-ésimo <u>momento</u> de uma v.a. contínua X é definido como:

$$m'_K = E[X^K] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \overbrace{f(x)}^{\text{p.d.f. de } X} dx$$

<u>primeiro momento</u>: média ou valor esperado de X
mede a localização central da distrib.

<u>Notação</u>: $E[X] = \mu_x$

Já o K-ésimo <u>momento</u> <u>central</u> de uma v.a. contínua X é definido como:

$$m_k = E\left[(X-\mu_x)^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^k f(x)\,dx$$

(desde que a integral exista)

segundo momento central: variância de X, mede a variabilidade de X

Notação: $E\left[(X-\mu_x)^2\right] = \sigma_x^2$

desvio padrão: σ_x

Os dois primeiros momentos de uma variável aleatória normal determinam univocamente sua distribuição.

Para outras distribuições são importantes também os momentos de ordem superior.

Terceiro momento central: mede a simetria de X com respeito à sua média

Quarto momento central: mede o "comportamento de cauda" de X

As medidas utilizadas para resumir a quantidade de assimetria e o "peso das caudas" de uma distribuição são as versões ~~~~ normalizadas dos terceiro e quarto momentos centrais:

assimetria: $S(x) = E\left[\dfrac{(X-\mu_x)^3}{\sigma_x^3}\right]$

curtose: $K(x) = E\left[\dfrac{(X-\mu_x)^4}{\sigma_x^4}\right]$ $\qquad K(x)-3$: excesso de curtose

Itaú BBA

Uma distribuição com excesso de curtose positiva é dita possuir caudas pesadas. Na prática tal distribuição tende a conter mais valores extremos.

$K(x) > 0$: distribuição leptocúrtica
$K(x) < 0$: " platicúrtica.

Estimadores amostrais:

Dada uma amostra aleatória da v.a. X $\{x_1, \dots, x_T\}$

média amostral: $\hat{\mu}_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t$

variância amostral: $\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \hat{\mu}_x)^2$

assimetria amostral: $\hat{S}(x) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_x^3} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \hat{\mu}_x)^3$

curtose amostral: $\hat{K}(x) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_x^4} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \hat{\mu}_x)^4$

Se assumirmos normalidade temos, assintoticamente:

$\hat{S}(x) \sim N(0, 6/T)$

$\hat{K}(x) - 3 \sim N(0, 24/T)$

Estas propriedades assintóticas podem ser usadas para se testar a normalidade dos retornos de ativos.