a função de verossimilhança dos dados é dada por

$$f(r_1,\ldots,r_T;\theta) = f(r_1;\theta)\prod_{t=2}^{T}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[\frac{-(r_t-\mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right]$$

na qual $f(r_1,\theta)$ é a função densidade marginal da primeira observação r_1.

O valor de θ que maximiza a função de verossimilhança é o estimador de máxima verossimilhança de θ (MLE).

O MLE pode ser obtido maximizando-se a função log verossimilhança

$$\ln f(r_1,\ldots,r_T;\theta) = \ln f(r_1;\theta) - \frac{1}{2}\sum_{t=2}^{T}\left\{\ln(2\pi)+\ln(\sigma_t^2)+\frac{(r_t-\mu_t)^2}{\sigma_t^2}\right\}$$

Análise de Séries Temporais Lineares

Retornos ~ coleção de v.a.s através do tempo

⇒ $\{r_t\}$ é uma série temporal cujo tratamento/estudo cai "naturalmente" no arcabouço das teorias de séries temporais lineares.

Tal arcabouço envolve:
- estacionariedade
- dependência dinâmica
- funções de autocorrelação
- modelagem
- forecasting

Para tal são utilizados os seguintes modelos econométricos:

1) modelos autoregressivos simples (AR)
2) modelos de médias móveis simples (MA)
3) modelos misturados (ARMA)
4) modelos sazonais
5) não estacionariedade e raízes unitárias
6) modelos de regressão c/ séries temporais de erros
7) etc, etc, etc...

Informação utilizada: · histórico: $\{r_t\}$

· ambiente econômico: Y (vetor aleat.)

Papel importante é desempenhado pela correlação

A correlação entre a variável de interesse (r_t) e seus valores passados $\{r_{t-1}, r_{t-2}, \dots\}$ é o foco da análise.

Itaú BBA

Autocorrelações ou correlações seriais são a ferramenta básica para o estudo de séries temporais estacionárias.

Estacionariedade

Estacionariedade estrita (ou forte): $\{r_t\}$ é dita estritamente estacionária se

$$f(r_{t_1}, \ldots, r_{t_k}) \stackrel{d}{=} f(r_{t_1+t}, \ldots, r_{t_k+t}) \quad \forall t$$

na qual k é um inteiro positivo arb. e $(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{N}_+^k$

$\Rightarrow f(r_1, \ldots, r_{t_k})$ é invariante sob deslocamento temporal

Esta é uma condição muito forte e difícil de ser verificada na prática.

Enfraquecendo ....

Estacionariedade fraca: $\{r_t\}$ é dita fracamente estacionária se tanto a média de r_t quanto a covariância entre r_t e r_{t-l} são invariantes c/ o tempo p/ um inteiro arbitrário l.

$E[r_t] = \mu$ constante

$Cov[r_t, r_{t-l}] = \gamma_l$ a qual só depende de l.

Na prática, dadas T observações $\{r_t \mid t = 1, \ldots, T\}$, a estacionariedade fraca implica que as T observações tem valores flutuando c/ variação constante em torno de um certo nível.

A estacionariedade fraca permite inferência de observações futuras (predição)

Implícita na condição de estacionariedade fraca está o pressuposto de que os dois primeiros momentos da distribuição são finitos.

estac. forte $\Rightarrow$ estac. fraca (one way!)

- se $r_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ estac. forte $\Leftrightarrow$ estac. fraca

$\gamma_\ell = Cov[r_t, r_{t-\ell}]$ autocovariância de lag ℓ

propriedades importantes:

1) $\gamma_0 = Var[r_t]$

2) $\gamma_{-\ell} = \gamma_\ell$

Em finanças geralmente assume-se que séries de retorno são fracamente estac.

Correlação e Função de autocorrelação

O coeficiente de correlação entre duas v.a.s X e Y é definido como:

$$\rho_{x,y} = \frac{Cov[X,Y]}{(Var[X]\,Var[Y])^{1/2}} = \frac{E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]}{(E[(X-\mu_x)^2]\,E[(Y-\mu_y)^2])^{1/2}}$$

μ_x, μ_y médias de X e Y respec. e assume-se que as variâncias existam

Interpretação: força da dependência linear

$-1 \leq \rho_{xy} < 1$

$\rho_{xy} = \rho_{yx}$

Itaú BBA

- X e Y são não correlacionadas se $\rho_{xy} = 0$
- Se X e Y são gaussianas $\rho_{xy} = 0 \Leftrightarrow$ X, Y são indep.

Correlação amostral: $\{(x_t, y_t)\}_{t=1}^{T}$

estimador consistente:

$$\hat{\rho}_{xy} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{x})}{\left[\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2 \sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2\right]^{1/2}}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t$$

$$\bar{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$$

Seja uma série de retornos $\{r_t\}$ (fracamente) estacionária.

Qdo estamos interessados na dependência linear entre r_t e seus valores passados r_{t-i} devemos generalizar o conceito de correlação para autocorrelação.

O coeficiente de correlação entre r_t e $r_{t-\ell}$ é chamado de autocorrelação de lag-ℓ de r_t e é denotado por ρ_ℓ.

[Sob o pressuposto de estacionariedade fraca ρ_ℓ é função apenas do lag ℓ]

Explicitamente:

estac. fraca: $Var[r_t] = Var[r_{t-\ell}]$

$$\rho_\ell = \frac{Cov[r_t, r_{t-\ell}]}{\sqrt{Var[r_t]\,Var[r_{t-\ell}]}} = \frac{Cov[r_t, r_{t-\ell}]}{Var[r_t]} = \frac{\gamma_\ell}{\gamma_0}$$

Itaú BBA

Da definição mesma de ρ_ℓ: $\begin{cases} \rho_0 = 1 \\ \rho_\ell = \rho_{-\ell} \\ -1 \leq \rho_\ell \leq 1 \end{cases}$

- A série estacionária r_t não é ~~serial~~ serialmente correlacionada se e só se $\rho_\ell = 0 \ \forall \ell > 0$

Dada uma amostra $\{r_t\}_{t=1}^{T}$ e a média amostral $\bar{r}$, a autocorrelação amostral de lag 1 é

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{T} (r_t - \bar{r})(r_{t-1} - \bar{r})}{\sum_{t=1}^{T} (r_t - \bar{r})^2}$$

Sob algumas condições gerais $\hat{\rho}_1$ é um estimador consistente de ρ_1.

Por exemplo: $\{r_t\}$ i.i.d. c/ $E[r_t^2] < \infty$

$\Rightarrow \hat{\rho}_1$ é assintoticamente normal c/ média zero e variância $1/T$

Este resultado, na prática, pode ser usado p/ testar

$H_0: \rho_1 = 0$
$H_a: \rho_1 \neq 0$

estatística:

$$t = \frac{\hat{\rho}_1}{\sqrt{1/T}} = \sqrt{T}\,\hat{\rho}_1 \quad \text{(assintot. normal } N(0,1))$$

Regra de decisão: rejeita H_0 se $|t| > z_{\alpha/2}$ ou p-valor $< \alpha$.

Generalizando p/ lag l:

$$\hat{\rho}_l = \frac{\sum_{t=l+1}^{T} (r_t - \bar{r})(r_{t-l} - \bar{r})}{\sum_{t=1}^{T} (r_t - \bar{r})^2}, \quad 0 \leq l < T-1$$

· se $\{r_t\}$ é i.i.d. c/ $E[r_t^2] < \infty$, $\hat{\rho}_l$ é assint. $N(0, 1/T)$ $\forall l$ fixo.

De uma forma geral: r_t fracamente estacionária e da forma

$$r_t = \mu + \sum_{i=0}^{q} \psi_i a_{t-i} \quad \begin{cases} \psi_0 = 1 \\ \{a_i\} \text{ i.i.d. c/ média zero} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{\rho}_l \xrightarrow{a} N(0, \sigma_q^2)$$

$$\sigma_q^2 = \frac{\left(1 + 2\sum_{i=1}^{q} \rho_i^2\right)}{T} \quad \text{para } l > q$$

Fórmula de Bartlet

Testando as ACFs

Para um dado $l \in \mathbb{N}_+$ queremos testar $\begin{cases} H_0: \rho_l = 0 \\ H_a: \rho_l \neq 0 \end{cases}$

estat. $t = \dfrac{\hat{\rho}_l}{\sigma_{l-1}}$ se $\{r_t\}$ é gaussiana, estacionária e satisfaz $\rho_j = 0$ p/ $j > l$

$$t \xrightarrow{a} N(0,1)$$

Itaú BBA

Regra de decisão: rejeitar H_0 se $|t| > Z_{\alpha/2}$

Observações: 1) pacotes estatísticos costumam usar $1/T$ como variância assintótica p/ $\hat{\rho}_\ell$ $\forall \ell \neq 0$. Neste caso implicitamente estão assumindo a série como sendo uma sequência i.i.d.

2) para amostras finitas, $\hat{\rho}_\ell$ é viesado, e este viés é tão maior qto menor a amostra.

Teste conjunto (Portmanteau)

Testando conjuntamente que várias autocorrelações são nulas:

estatística:

$$Q^*(m) = T \sum_{\ell=1}^{m} \hat{\rho}_\ell^2 \qquad \begin{cases} H_0: \rho_1, \dots, \rho_m = 0 \\ H_a: \rho_i \neq 0 \text{ p/ algum } i \in \{1, \dots, m\} \end{cases}$$

Se: $\{r_t\}$ é i.i.d. (mais condições sobre momentos) $Q^*(m) \xrightarrow{a} \chi^2_m$

Modificação proposta por Ljung & Box (aumenta poder do teste em amostras finitas)

$$Q(m) = T(T+2) \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\hat{\rho}_\ell^2}{T-\ell}$$

(percentil $100(1-\alpha)$ de χ^2_m

Decisão: rejeitar H_0 se $Q(m) > \chi^2_m(\alpha)$

Na prática: a escolha de m afeta o poder do teste. Simulações mostram que uma escolha "ótima" é

$$m \approx \ln(T)$$

Itaú BBA

Ruído Branco e Séries Temporais Lineares

<u>Ruído Branco</u>: $\{r_t\}$ sequência de v.a.s i.i.d. com média e variância finitas

Se $\{r_t\} \sim N(0, \sigma^2)$: ruído branco gaussiano

Para uma série de ruído branco: $\rho_\ell = 0 \quad \forall \ell \neq 0$

<u>Na prática</u>: se $\rho_\ell \approx 0 \ \forall \ell \neq 0$ a série é considerada ruído branco.

[Retornos IBM são próximos de um ruído branco]
[Já o índice value-weighted não.]

→ a dependência serial precisa ser modelada antes de análises mais profundas.

<u>Séries temporais lineares</u>

Uma série temporal r_t é dita linear se puder ser escrita como:

$$r_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i} \qquad (4)$$

- μ: média de r_t
- $\psi_0 = 1$
- $\{a_t\}$: i.i.d. c/ média zero e distrib. bem definida

· nova informação
· inovação
· choque

<u>Observação</u>: nem toda série financeira é linear.

Itaú BBA

No caso das séries lineares da forma (4) a dinâmica é dada pelos coeficientes ψ_i (pesos de r_t)

Quando r_t é fracamente estacionária, usamos a independência dos $\{a_t\}$ e podemos calcular

$$E[r_t] = \mu \quad e \quad Var[r_t] = \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2$$

$\sigma_a^2 = Var[a_t]$

$Var[r_t] < \infty \Rightarrow \{\psi_i^2\}$ deve ser convergente: $\psi_i^2 \to 0$ qdo $i \to \infty$

$\Rightarrow$ qdo i cresce o impacto dos choques remotos desaparece.

Autocovariância de lag-l de r_t:

$$\gamma_l = Cov[r_t, r_{t-l}] = E\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-l-j}\right)\right]$$

$$= E\left[\sum_{i,j=0}^{\infty} \psi_i \psi_j a_{t-i} a_{t-l-j}\right] = \sum_{j,i=0}^{\infty} \psi_i \psi_j \delta_{l+j}^{i} E[a_{t-i} a_{t-l-j}]$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{l+j} \psi_j E[a_{t-l-j}^2] = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+l}$$