Resultados Básicos Sobre Matrizes

Alessandro Martim Marques

Finanças Quantitativas - MPFE - EESP - FGV

22 de novembro de 2012

Matrizes (Conceitos Básicos) I

Notação:

- $\mathbf{A} = [a_{ij}]$: matriz de ordem $m \times n$
- $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$: matriz transposta $n \times m$
- A matriz identidade de ordem n será indicada por $\mathbb{1}_{\mathrm{n}}$

Dadas: $\mathbf{A}_{(m\times n)}$ e $\mathbf{B}_{(n\times r)}$, o produto $\mathbf{AB}$ é a matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ de ordem $m \times r$, cujos elementos c_{ij} são dados por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

Em geral:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \quad \text{mas} \quad \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{ABC}$$

Uma matriz $\mathbf{A}_{m\times n}$ é:

- **ortogonal** se $m = n$ e $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A} = \mathbb{1}_{\mathrm{n}}$

Matrizes (Conceitos Básicos) II

- **simétrica** se $m = n$ e $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$
- **não negativa definida** ($\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$) se for **simétrica** e se, para todo vetor $\mathbf{x}$ de ordem $m \times 1$:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j \geq 0$$

- **positiva definida** ($\mathbf{A} > \mathbf{0}$) se $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Observação: a expressão $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{x}$ é dita uma **forma quadrática** nas variáveis $x_1, \ldots, x_m$ e à elas aplicam-se as nomenclaturas definidas acima.

Matrizes (Traço) I

Se $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada de ordem m, seu **traço** é definido por:

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}$$

Se $\mathbf{A}_{(m\times n)}$ e $\mathbf{B}_{(n\times m)}$:

- $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{A})$
- $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{Tr}(\mathbf{B})$
- $\mathrm{Tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{BA})$

Matrizes (Determinante) I

Se $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada de ordem m, **real**, seu **determinante**, denotado por por $|\mathbf{A}|$ é a única função real dos elementos de $\mathbf{A}$ tal que

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$$

para toda matriz $\mathbf{B}$ de ordem m. $|\boldsymbol{\Gamma}| = \gamma$, $\forall \gamma$, se

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes (Posto) I

O **posto** de uma matriz $\mathbf{A}$, denotado por $\rho(\mathbf{A})$ é o número de linhas (ou colunas) linearmente independentes de $\mathbf{A}$; ou é a ordem da maior submatriz de $\mathbf{A}$ com determinante não nulo.

Uma matriz quadrada $\mathbf{A}$, de ordem m, é dita **não singular** se

$$\rho(\mathbf{A}) = m \quad \textit{i.e.}, \text{ se } |\mathbf{A}| \neq 0$$

Neste caso,

$$\exists!\, \mathbf{A}^{-1}, \text{ tal que } \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbb{1}_{\mathrm{m}}$$

$\mathbf{A}^{-1}$ é chamada de **inversa** de $\mathbf{A}$.

Propriedades I

1. Se $\mathbf{A}$ for ortogonal então $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$
3. $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
4. $|\alpha\mathbf{A}| = \alpha^m|\mathbf{A}|$
5. $|\mathbf{A}^{-1}| = (|\mathbf{A}|)^{-1}$, se $\mathbf{A}$ for não singular
6. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
7. $\rho(\mathbf{AB}) = \rho(\mathbf{A})$, se $\mathbf{B}$ for não singular
8. $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})$
9. $\rho(\mathbf{AB}) \leq \min(\rho(\mathbf{A}), \rho(\mathbf{B}))$

Produto de Kronecker I

Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $r \times s$. O **produto de Kronecker** (ou produto tensorial) é definido como:

$$\mathbf{A} \otimes \mathrm{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\,\mathbf{B} & a_{11}\,\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\,\mathbf{B} \\ a_{21}\,\mathbf{B} & a_{22}\,\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\,\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\,\mathbf{B} & a_{m2}\,\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\,\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha & a\beta & b\alpha & b\beta \\ a\gamma & a\delta & b\gamma & b\delta \\ c\alpha & c\beta & d\alpha & d\beta \\ c\gamma & c\delta & d\gamma & d\delta \end{bmatrix}$$

Propriedades do Produto de Kronecker I

1. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$
2. $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C}$
3. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \otimes B^{\mathrm{T}}$
4. Se **A** e **B** são matrizes quadradas:

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{A})\ \mathrm{Tr}(\mathbf{B})$$

5. $\rho(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \rho(\mathbf{A})\, \rho(\mathbf{B})$
6. Se **A** e **B** são matrizes inversíveis:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$$

7. Se **A** e **B** são matrizes quadradas de ordem m e n, respectivamente:

$$|\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}| = |\mathbf{A}|^{n} \mathbf{B}|^{m}$$

Propriedades do Produto de Kronecker II

8. Se **A** e **B** são matrizes quadradas, com autovalores λ_A e λ_B, respectivamente, e correspondentes autovetores $\mathbf{x}_A$ e $\mathbf{x}_B$, então $\lambda_A \lambda_B$ é um autovalor de $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ com autovetor $\mathbf{x}_A \otimes \mathbf{x}_B$.

Vetorização I

Seja A uma matriz $m \times n$. A operação de **vetorização**, $\text{vec}(A)$ denota o seguinte vetor de ordem $(nm) \times 1$:

$$\text{vec}(A) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_j := \text{j-ésima coluna de } \mathbf{A}$$

Exemplo:

$$\text{vec}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Propriedades da Vetorização I

1. $\mathrm{vec}\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)=\mathrm{vec}\left(\mathbf{A}\right)+\mathrm{vec}\left(\mathbf{B}\right)$
2. $\mathrm{vec}\left(\mathbf{A}\mathbf{B}\right)=\left(\mathbb{1}\otimes\mathbf{A}\right)\mathrm{vec}\left(\mathbf{B}\right)=\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\otimes\mathbb{1}\right)\mathrm{vec}\left(\mathbf{A}\right)$
3. $\mathrm{vec}\left(\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)=\left(\mathbf{B}\otimes\mathbf{A}\right)\mathrm{vec}\left(\mathbf{X}\right)$
4. $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C})=\mathrm{vec}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\otimes\mathbb{1}\right)\mathrm{vec}\left(\mathbf{B}\right)$

Decomposição de Matrizes I

Seja A uma matriz quadrada de ordem m. As **raízes características** ou **autovalores** de **A** são as raízes complexas

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$$

do polinômio de ordem m em λ

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbb{1}|$$

Como $\mathbf{A} - \lambda_j \mathbb{1}$ é singular, $j = 1, \ldots, m$, existe um vetor $\mathbf{a}_j$, cujas componentes não são todas nulas, tal que

$$(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbb{1})\, \mathbf{a}_j = \mathbf{0} \implies \mathbf{A}\, \mathbf{a}_j = \lambda_j \mathbf{a}_j, \;\; j = 1, \ldots, m$$

Os vetores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ são chamados **vetores característicos** ou **autovetores** de **A**.

Decomposição de Matrizes II

Temos:

1. $\rho(\mathbf{A})$ dá o número de autovalores não nulos de $\mathbf{A}$
2. $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j$
3. $|\mathbf{A}| = \prod_{j=1}^{m} \lambda_j$
4. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz simétrica, real, todos os seus autovalores são reais e para cada um deles existe um autovetor real.
5. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz simétrica, real, os autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.
6. Se $\mathbf{A}$ é não negativa definida, então $\lambda_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, m$

Decomposição de Matrizes III

7. Se $\mathbf{A}$ é simétrica, de ordem $m \times m$, existe uma matriz ortogonal $\mathbf{X}$, tal que

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} = \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$$

ou

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$$

onde os λ_j são os autovalores de $\mathbf{A}$ e as colunas de $\mathbf{X}$ são os correspondentes autovetores.

Este último resultado é o chamado **teorema espectral** para matrizes simétricas.

Segue-se que a **decomposição espectral** de $\mathbf{A}$ é dada por

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{x}_j \mathbf{x}^{\mathrm{T}}{}_j$$

onde $\mathbf{x}_j$ é o autovetor correspondente ao autovalor λ_j.

Decomposição de Matrizes IV

Se **A** é uma matriz quadrada de ordem m, positiva definida, existe uma matriz triangular inferior **T**, com elementos da diagonal principal positivos, tal que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}(T^{\mathrm{T}})^{-1} = \mathbb{1}_{\mathrm{m}}\,, \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{T}\,\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$$

Esta é a chamada **decomposição de Cholesky** da matriz **A**.