Itaú BBA

$$\Rightarrow \rho_\ell = \frac{\gamma_\ell}{\gamma_0} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+\ell}}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2}, \quad \ell \geq 0$$

$$\gamma_0 = \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 = \sigma_a^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2\right)$$

Modelos econométricos e estatísticos de séries temporais lineares são utilizados p/ descrever os padrões dos pesos ψ de r_t

Para uma série fracamente estacionária: $\psi_i \to 0$ p/ $i \to \infty$

$\Rightarrow \rho_\ell \to 0$ p/ $\ell \to \infty$

$\Rightarrow$ Retornos: a dep. linear do retorno corrente r_t com o retorno passado $r_{t-\ell}$ diminui p/ ℓ grande.

Modelos AR

P/ CRSP o fato de os retornos mensais r_t terem autocorrelação de lag-1 estatisticamente significante indica que o retorno r_{t-1} pode ser útil na predição de r_t.

Um modelo simples p/ usar esta característica é:

(5) $\quad r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t \qquad \{a_t\}$ ruído branco $\begin{cases} \mu = 0 \\ \sigma_a^2 \end{cases}$

[regressão linear r_t dependente
r_{t-1} explanatória]

Modelo autoregressivo de ordem 1: AR(1)

P/ um modelo AR(1), condicionados ao retorno r_{t-1} temos

$$E[r_t | r_{t-1}] = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} \qquad Var[r_t | r_{t-1}] = Var[a_t] = \sigma_a^2 ,$$

ou seja, dado o retorno passado r_{t-1}, o retorno atual é centrado em torno de $\phi_0 + \phi_1 r_{t-1}$ c/ desvio padrão σ_a.

Propriedade Markoviana: condicionado a r_{t-1}, r_t não é correlacionado com r_{t-i} p/ $i > 1$.

Nos casos em que r_{t-1} não é suficiente p/ determinar o valor esperado condicional de r_t precisamos buscar um modelo mais flexível.

Generalização: AR(1) $\rightarrow$ AR(p)

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \cdots + \phi_p r_{t-p} + a_t \qquad p \in \mathbb{N}_+$$

$\{a_t\}$ mesmo de (5)

$\Rightarrow$ os p valores r_{t-i} passados $(i = 1, \ldots, p)$ conjuntamente determinam a esperança condicional de r_t dados os retornos passados.

[AR(p) é da mesma forma que uma regressão múltipla c/ os valores laggeados ~~de~~ desempenhando o papel de variáveis explanatórias]

Propriedades dos Modelos AR(1)

Assumindo que a série é fracamente estacionária temos:

$E[r_t]=\mu$, $Var[r_t]=\gamma_0$, $Cov[r_t, r_{t-j}]=\gamma_j$

nas quais μ e γ_0 são constantes e γ_j é função apenas de j

Tomando o valor esperado de (5) : $E[a_t]=0$!

$$E[r_t] = E[\phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t] = \phi_0 + \phi_1 E[r_{t-1}]$$

condição de estacionariedade: $E[r_t] = E[r_{t-1}] = \mu$

$$\Rightarrow \mu = \phi_0 + \phi_1 \mu \quad \text{ou} \quad E[r_t] = \mu = \frac{\phi_0}{1-\phi_1}$$

Duas conseqüências:

1) a média de r_t existe se $\phi_1 \neq 1$
2) a média de r_t é zero se, e somente se, $\phi_0 = 0$

$\therefore$ p/ um processo AR(1) estacionário o termo constante ϕ_0 está relacionado c/ a média de r_t via $\underbrace{\phi_0 = (1-\phi_1)\mu}_{(6)}$ e $\phi_0 = 0 \Rightarrow E[r_t] = 0$

Usando (6) podemos reescrever o modelo como:

$$r_t - \mu = \phi_1(r_{t-1} - \mu) + a_t \qquad (7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} r_t &= \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t = (1-\phi_1)\mu + \phi_1 r_{t-1} + a_t \\ &= \mu - \phi_1 \mu + \phi_1 r_{t-1} + a_t \Rightarrow r_t - \mu = \phi_1(r_{t-1} - \mu) + a_t \end{aligned} \right\}$$

Substituindo repetidamente :

$$r_t - \mu = a_t + \phi_1\left(\phi_1(r_{t-2}-\mu) + a_{t-1}\right)$$

$$= a_t + a_{t-1}\phi_1 + \phi_1^2(r_{t-2}-\mu)$$

$$= a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2\left(\phi_1(r_{t-3}-\mu) + a_{t-2}\right)$$

$$= a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 a_{t-2} + \phi_1^3(r_{t-3}-\mu)$$

$$\vdots$$

$$\Longrightarrow \boxed{r_t - \mu = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_1^k a_{t-k}} \qquad (8)$$

Lembrando (4): $r_t - \mu = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k a_{t-k}$

$\psi_k = \phi_1^k \Longrightarrow r_t - \mu$ é uma função linear de a_{t-k} p/ $k \geq 0$

$\{a_t\}$ iid

$$\Longrightarrow E\left[(r_t-\mu)a_{t+1}\right] = 0$$

estacionário

$$\Longrightarrow Cov\left[r_{t-1}, a_t\right] = E\left[(r_{t-1}-\mu)a_t\right] = 0$$

Tomando o quadrado de (7):

$$r_t^2 = \left(\mu + \phi_1(r_{t-1}-\mu) + a_t\right)^2$$

$$= \mu^2 + 2\mu\phi_1(r_{t-1}-\mu) + 2\mu a_t + \phi_1^2(r_{t-1}-\mu)^2 + 2a_t\phi_1(r_{t-1}-\mu)^2$$

$$+ a_t^2 \qquad \boxed{+2\phi_1^2\mu E[r_{t-1}]}$$

$$\Rightarrow E[r_t^2] = 2\mu\phi_1 E[r_{t-1}] + \phi_1^2 E[r_{t-1}^2] + 2\phi_1 E[a_t r_{t-1}^2] - 4\mu\phi_1 E[a_t r_{t-1}]$$

$$+ 2\mu\phi_1 E[a_t] + E[a_t^2]$$

$$(r_t-\mu)^2 = \phi_1^2(r_{t-1}-\mu)^2 + 2\phi_1(r_{t-1}-\mu)a_t + a_t^2$$

$$\mathrm{Var}[r_t] = E\left[(r_t-\mu)^2\right] = \phi_1^2 E\left[(r_{t-1}-\mu)^2\right] + 2\phi_1 \cancelto{0}{E\left[(r_{t-1}-\mu)a_t\right]} + E\left[a_t^2\right]$$

$$= \phi_1^2 \mathrm{Var}[r_{t-1}] + \mathrm{Var}[a_t^2] = \phi_1^2 \mathrm{Var}[r_{t-1}] + \sigma_a^2$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Var}[r_t] = \phi_1^2 \mathrm{Var}[r_{t-1}] + \sigma_a^2$$

Sob a condição de estacionariedade; $\mathrm{Var}[r_t] = \mathrm{Var}[r_{t-1}]$, temos

$$\mathrm{Var}[r_t] = \phi_1^2 \mathrm{Var}[r_t] + \sigma_a^2$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Var}[r_t] = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi_1^2}$$

desde que $\phi_1^2 < 1$. [variância é finita e não negativa]

$\therefore$ a estacionariedade fraca de AR(1) implica em

$$-1 < \phi_1 < 1 \iff |\phi_1| < 1$$

$|\phi_1| < 1$ e $r_t = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} \phi_1^k a_{t-k} \Rightarrow E[r_t] < \infty$ e indep. de t

e $\gamma_\ell = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+\ell} = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \phi_1^{j+\ell} \Rightarrow \gamma_\ell < \infty$

$\therefore$ $|\phi_1| < 1$ é condição necessária e suficiente para que o modelo AR(1)

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t$$

seja fracamente estacionário.

Usando $\phi_0 = (1-\phi_1)\mu$ reescrevemos

$$r_t = (1-\phi_1)\mu + \phi_1 r_{t-1} + a_t$$

Este modelo é usado c/ freq. em finanças com ϕ_1 medindo a persistência da dependência dinâmica de uma série AR(1)

ACF de um modelo AR(1)

$$r_t - \mu = \phi_1 (r_{t-1} - \mu) + a_t \implies a_t(r_t - \mu) = \phi_1 (r_{t-1} - \mu) a_t + a_t^2$$

$$E[a_t(r_t - \mu)] = \phi_1 E[(r_{t-1} - \mu) a_t] + E[a_t^2] = E[a_t^2] = \sigma_a^2$$

$$(r_t - \mu)(r_{t-\ell} - \mu) = \phi_1 (r_{t-1} - \mu)(r_{t-\ell} - \mu) + (r_{t-\ell} - \mu) a_t$$

$$\underbrace{E[(r_t - \mu)(r_{t-\ell} - \mu)]}_{\gamma_\ell} = E[\phi_1 (r_{t-1} - \mu)(r_{t-\ell} - \mu)] + E[(r_{t-\ell} - \mu) a_t]$$

p/ $l = 0$

$$\gamma_0 = \phi_1 E\left[(r_{t-1}-\mu)(r_t-\mu)\right] + E\left[(r_t-\mu)a_t\right] = \phi_1 \gamma_1 + \sigma_a^2$$

p/ $l > 0$ $\cancel{\gamma_l = \phi_1 \gamma_{l-1}}$

$$\boxed{\gamma_l = \gamma_{-l} \qquad \tilde{t} = t-1}$$

$$\gamma_l = \phi_1 E\left[(r_{t-1}-\mu)(r_{t-l}-\mu)\right] + E\left[(r_{t-l}-\mu)a_t\right]$$

$$= \phi_1 E\left[(r_{\tilde{t}}-\mu)(r_{\tilde{t}-l+1})\right] + E\left[(r_{t-l}-\mu)a_t\right]$$

$$= \phi_1 \gamma_{l-1}$$

$\therefore$ p/ um modelo AR(1) fracamente estacionário

$$Var(r_t) = \gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi_1^2} \quad e \quad \gamma_l = \phi_1 \gamma_{l-1} \quad p/\ l > 0$$

$$\Rightarrow \rho_l = \phi_1 \rho_{l-1} \quad p/\ l > 0$$

$$\rho_0 = 1 \Rightarrow \rho_1 = \phi_1, \ \rho_2 = \phi_1^2, \ \rho_3 = \phi_1^3 \ \ldots$$

$$\boxed{\rho_l = \phi_1^l}$$ $\Rightarrow$ ACF de um AR(1) fracamente estacionário decai exponencialmente c/ taxa ϕ_1 iniciando de 1.

Itaú BBA

Modelo AR(2)

Um modelo AR(2) tem a forma:

$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + a_t$

Usando a mesma técnica de substituição:

$$E[r_t] = \mu = \frac{\phi_0}{1-\phi_1-\phi_2} \qquad (\text{desde que } \phi_1+\phi_2 \neq 1)$$

Usando $\phi_0 = (1-\phi_1-\phi_2)\mu$ podemos reescrever o AR(2):

$$(r_t-\mu) = \phi_1(r_{t-1}-\mu) + \phi_2(r_{t-2}-\mu) + a_t$$

Multiplicando por $(r_{t-\ell}-\mu)$; tomando o valor esperado e usando

$$E[(r_{t-\ell}-\mu)a_t] = 0 \quad p/\ \ell > 0$$

obtemos:

$$\gamma_\ell = \phi_1\gamma_{\ell-1} + \phi_2\gamma_{\ell-2} \quad p/\ \ell > 0$$

equação de momento de um modelo AR(2) estacionário

Dividindo por γ_0: $\rho_\ell = \phi_1\rho_{\ell-1} + \phi_2\rho_{\ell-2}$ p/ $\ell > 0$ (9.

(ACF de r_t)

ACF lag 1: $\rho_1 = \phi_1\rho_0 + \phi_2\rho_{-1} = \phi_1 + \phi_2\rho_1$

ae

Itaú BBA

Resumindo: p/ uma série r_t AR(2) estacionária:

$$\rho_0 = 1 \; ; \; \rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \; ; \; \rho_\ell = \phi_1 \rho_{\ell-1} + \phi_2 \rho_{\ell-2} \quad \ell \geq 2$$

A equação (9) nos diz que a ACF de um AR(2) estacionário satisfaz a seguinte equação de diferenças de segunda ordem:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)\rho_\ell = 0$$

B: "back-shift operator" $\quad B\rho_\ell = \rho_{\ell-1}$

Esta equação de diferenças dita as propriedades da ACF de um AR(2) estacionário

Corresp. à equação de diferenças existe um polinômio de segunda ordem

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0 \implies x = \frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2}$$

Inversas das soluções são chamadas de raízes características do modelo AR(2). Denotaremos estas raízes por ω_1 e ω_2.

A condição de estacionariedade p/ um modelo AR(2) é que os valores absolutos de suas duas raízes características sejam menores do que 1.

P/ AR(1) $\omega = \frac{1}{x} = \phi_1 \quad |\phi_1| < 1 \implies$ estacionariedade.

Modelo AR(p)

Generalizando os resultados p/

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \dots + \phi_p r_{t-p} + a_t$$

$$E[r_t] = \frac{\phi_0}{1-\phi_1-\dots-\phi_p}$$ (desde que o denominador não seja nulo)

A equação característica associada ao modelo é

$$1-\phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p = 0$$

Se todas as soluções desta equação forem maiores que 1 em módulo a série r_t será estacionária.