

# Estimadores de Máxima Verossimilhança para Assimetria e Curtose usando a expansão de Gram-Charlier

*Wilson Freitas*

*18 de abril de 2018*

## Resumo

A estimação da assimetria e da curtose em séries de retornos é explorada neste artigo com o objetivo de prover uma alternativa aos estimadores amostrais comumente utilizados. Os estimadores amostrais para assimetria e curtose apresentam grande sensibilidade a novas ocorrências nas séries temporais. Esta sensibilidade é inerente a estes estimadores, sendo difícil de ser explicada pela dinâmica observada nos dados. O objetivo deste texto é apresentar estimadores de assimetria e curtose menos sensíveis, que consideram uma expansão em série de momentos, a expansão Gram-Charlier. A expansão de Gram-Charlier é aplicada a distribuição Gaussiana na construção de uma função de densidade de probabilidade paramétrica com relação a assimetria e curtose. Utilizamos o método de máxima verossimilhança (MV) para obter a assimetria e curtose na expansão de Gram-Charlier. Observamos mais estabilidade nestes estimadores do que nos amostrais. Esta estabilidade é importante na aplicação da expansão de Gram-Charlier a problemas de finanças, por exemplo o apereçamento de opções.

## Introdução

Qualquer função de densidade de probabilidade (FDP) pode ser aproximada por uma expansão em série de outra FDP que pertence a um grupo especial, como a distribuição Gaussiana, por exemplo. Dada uma amostra, é difícil identificar a melhor distribuição para descrevê-la, logo, a utilização expansões em séries permite associar uma FDP aproximada aos dados. A FDP aproximada é uma expansão em série de uma distribuição conhecida e em geral padronizada, esta é a distribuição base. Esta aproximação permite lidar com momentos que não estão presentes na distribuição base. Por exemplo, a distribuição Gaussiana não possui os momentos de assimetria e curtose, entretanto, na expansão em série da Gaussiana estes momentos são parâmetros. Portanto, se os dados apresentam assimetria e curtose, a distribuição Gaussiana não é uma candidata, contudo, a sua expansão é. As expansões de FDPs em séries têm aplicações em diversos campos da ciência como a Física e Finanças. Este texto explora o uso da expansão de Gram-Charlier [1] que é a expansão da distribuição Gaussiana em uma base de polinômios de Hermite.

- Sessão 1: assimetria e curtose
- Sessão 2: expansão de Gram-Charlier
- Sessão 3: estimação da assimetria e curtose com a expansão de Gram-Charlier
- Sessão 4: resultados
- Sessão 5: conclusão

## Assimetria e curtose

Seja uma amostra aleatória  $\{x_i\}_{i=1\dots N}$ , de média amostral  $\mu$  e variância amostral  $\sigma^2$ . Os estimadores amostrais de assimetria  $\mu_3$  e curtose  $\mu_4$  são definidos como:

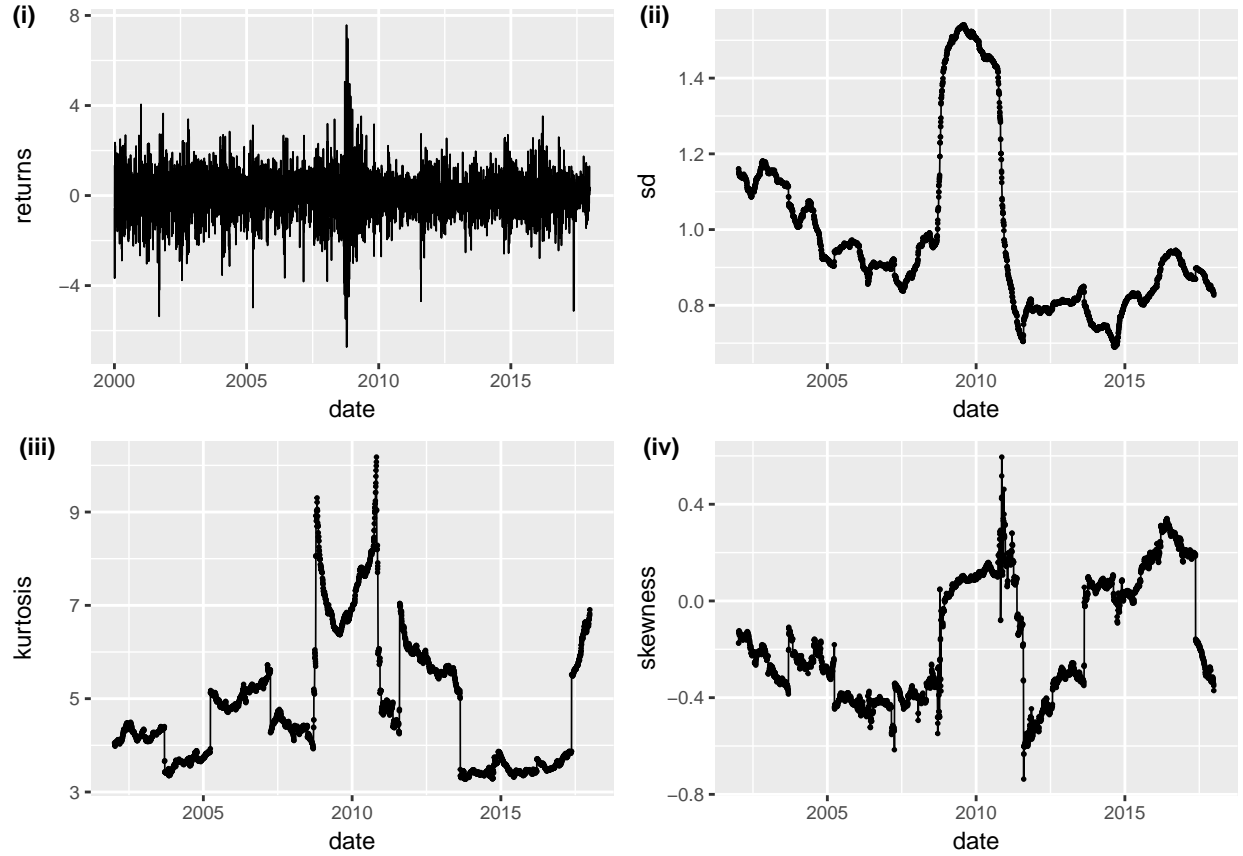


Figure 1: Os gráficos de retornos padronizados do IBOVESPA (i) e suas médias móveis de dois anos: (ii) desvio padrão, (iii) curtose e (iv) assimetria.

$$\mu_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu)^3}{\sigma^3}$$

$$\mu_4 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu)^4}{\sigma^4}$$

Estes estimadores apresentam grande sensibilidade a pequenas mudanças na amostra. Em séries de retornos diários observam-se mudanças de nível devido a presença retornos atípicos causados por fortes oscilações no mercado. Há casos onde apenas um retorno atípico causa uma variação significativa. Estas fortes mudanças podem ser notadas ao se calcular a assimetria e curtose em uma janela móvel aplicada a série de retorno. Observam-se fortes mudanças de regime em períodos de aumento volatilidade no mercado. A Figura 1 apresenta os gráficos da série de retornos padronizados do IBOVESPA e os estimadores de assimetria, curtose e do desvio padrão em janela móvel. A série de retornos do IBOVESPA é referente ao período de janeiro de 2000 a dezembro de 2017 (17 anos) e os retornos são contínuos. A janela móvel de dois anos (504 dias úteis) é utilizada para o cálculo das médias móveis.

Nos gráficos de média móvel de assimetria e curtose, na Figura 1, é possível observar que em diversos momentos há mudanças de nível significativas, relacionadas a períodos de maior volatilidade nos retornos. Entretanto, o gráfico com a média móvel do desvio padrão, apresenta um comportamento mais suave, nos mesmos períodos.

A expansão de Gram-Charlier é apresentada na próxima sessão. Através desta expansão chega-se a uma distribuição paramétrica na assimetria e na curtose. A partir desta distribuição é possível obter estimadores de máxima verossimilhança para estas grandezas relacionadas a esta distribuição.

## Expansão de Gram-Charlier

Sob certas condições uma função de distribuição de probabilidade (FDP)  $p(x)$ , padronizada, pode ser expandida em uma série de derivadas da distribuição Gaussiana padronizada  $Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ . A expansão em série

$$p(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{d^n Z(x)}{dx^n}$$

é uma série de Gram-Charlier (de tipo-A) [REF] e de acordo com a fórmula de Rodriguez [REF]

$$He_n(x) = (-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

são polinômios de Chebyshev-Hermite de ordem  $n$ . Substituindo a fórmula de Rodriguez na equação de  $p(x)$  obtém-se uma expansão em série de polinômios de Chebyshev-Hermite e da distribuição Gaussiana.

$$p(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n (-1)^n He_n(x) Z(x)$$

onde os coeficientes

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) He_n(t) dt$$

são valores esperados dos polinômios de Chebyshev-Hermite com relação a FDP  $p(x)$ . Os coeficientes  $c_n$  são funções dos momentos da distribuição  $p(x)$ , logo, a expansão de Gram-Charlier é uma expansão em momentos da distribuição  $p(x)$ .

Assumindo uma abordagem parsimoniosa e a dificuldade em se trabalhar com séries infinitas, é razoável truncar a expansão  $p(x)$  em uma quantidade finita de termos,  $n < \infty$ . Uma boa escolha é  $n = 4$ , pois, a expansão vai até os polinômios de ordem 4 gerando assim os momentos de assimetria e curtose. Esta escolha produz a seguinte aproximação para  $p(x)$

$$p(x) \sim Z(x) \left[ 1 + \frac{\mu_3}{3!}(x^3 - 3x) + \frac{\mu_4 - 3}{4!}(x^4 - 6x^2 + 3) \right]$$

Note que além da distribuição Gaussiana  $Z(x)$ ,  $p(x)$  é função dos terceiro e quarto momentos,  $\mu_3 = E[x^3]$  e  $\mu_4 = E[x^4]$  da variável aleatória  $x$  padronizada. Logo, estes momentos centralizados são assimetria e curtose, respectivamente. O truncamento da expansão de Gram-Charlier em termos até a ordem  $n = 4$  produz uma função paramétrica na assimetria e na curtose, logo,  $p(x) \equiv p(x; \mu_3, \mu_4)$ . Esta função é uma extensão da distribuição Gaussiana que incorpora assimetria e curtose, entretanto, para que  $p(x)$  seja considerada uma FDP é necessário que as seguintes restrições sejam atendidas:

- $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$
- $p(x)$  seja contínua em todo suporte
- $p(x)$  seja não negativa, para todo  $x$

Os dois primeiros pontos são fáceis de comprovar, integrando e derivando  $p(x)$ . Contudo, o terceiro ponto não é direto. Há de fato, valores de assimetria e curtose para os quais a função  $p(x)$  é negativa. Na próxima sessão serão apresentadas as restrições de positividade para  $p(x)$ , nas quais os momentos podem assumir valores onde esta função seja sempre não negativa. Uma vez atendida a restrição de positividade, podemos considerar  $p(x)$  uma FDP e ela poderá ser utilizada para descrever variáveis aleatórias como séries de retornos. Estas séries comumente apresentam desvios da normalidade, como retornos extremos e oscilações assimétricas.

## Restrições de positividade para $p(x)$

Seja a função  $p(x; \mu_3, \mu_4)$  definida na sessão anterior

$$p(x; \mu_3, \mu_4) = Z(x) \left[ 1 + \frac{\mu_3}{3!}(x^3 - 3x) + \frac{\mu_4 - 3}{4!}(x^4 - 6x^2 + 3) \right]$$

Esta função apresenta valores negativos de  $p(x)$  para alguns valores de assimetria e curtose. Isso pode ser observado escrevendo esta função com uma função de log-verossimilhança  $l(\mu_3, \mu_4; \mathbf{x})$ , que é função dos momentos e é paramétrica em  $\mathbf{x} \equiv \{x_i\}_{i=1 \dots N}$ , uma amostra aleatória. Logo, a função

$$l(\mu_3, \mu_4; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N -\log p(x_i; \mu_3, \mu_4)$$

seria uma função *pseudo* log-verossimilhança, onde *pseudo* quer dizer que esta função diverge para alguns valores dos momentos. Isso acontece porque a função log possui apenas suporte positivo e valores negativos de  $p(x)$  apresentarão descontinuidades quando calculados numericamente.

Para observar a região de *validade* dos momentos na função  $p(x)$  será gerado um *grid* com possíveis valores de  $\mu_3$  e  $\mu_4$  e para cada par será calculada a função  $l(\mu_3, \mu_4; \mathbf{x})$  para uma amostra aleatória. O resultado será visualizado em um gráfico 2D onde o eixo y é a assimetria e o eixo x a curtose. Os pontos no gráfico são os valores obtidos da função  $l(\mu_3, \mu_4; \mathbf{x})$  referente ao par de assimetria e curtose. Os valores da função  $l(\mu_3, \mu_4; \mathbf{x})$  serão segmentados de maneira que possamos observar a região do espaço paramétrico onde a função apresenta o seu máximo. Nesta simulação considera-se uma amostra aleatória normal com 1000 elementos e os momentos gerados de acordo com os seguintes intervalos:  $\mu_3 \in [-1.2, 1.2]$  e  $\mu_4 \in [2, 7]$ .

Observando a Figura 2 fica claro que há uma região bem definida para a qual os valores de assimetria e curtose produzem uma função  $p(x)$  não negativa e portanto, nesta região,  $p(x)$  pode ser considerada uma FDP.

A título de ilustração a Figura 3 mostra o *heatmap* onde a série de retornos padronizados do IBOVESPA é utilizada como amostra aleatória.

Para utilizarmos a função de log-verossimilhança em um processo numérico para estimar a assimetria e a curtose, é necessário encontrar uma forma funcional para  $p(x)$  na qual seja possível tratar as restrições de  $\mu_3$  e  $\mu_4$  de forma analítica e de preferência, sem condicionais. Como observa-se nas Figuras 2 e 3 há um plano de coordenadas  $(\mu_3, \mu_4)$  onde a região definida por uma figura oval nos gráficos é a região de validade para os parâmetros  $\mu_3$  e  $\mu_4$ . Vamos começar determinando a borda dessa região.

Queremos valores para  $\mu_3$  e  $\mu_4$  tais que  $p(x)$  seja positivo definido para qualquer  $x$ . Observando  $p(x)$  temos que o seguinte polinômio deve ser sempre positivo para qualquer  $x$ .

$$f(x) = 1 + \frac{\mu_3}{6}He_3(x) + \frac{(\mu_4 - 3)}{24}He_4(x) \geq 0$$

onde  $He_3(x) = x^3 - 3x$  e  $He_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$  são polinômios de Chebyshev-Hermite. A borda dessa região é definida por

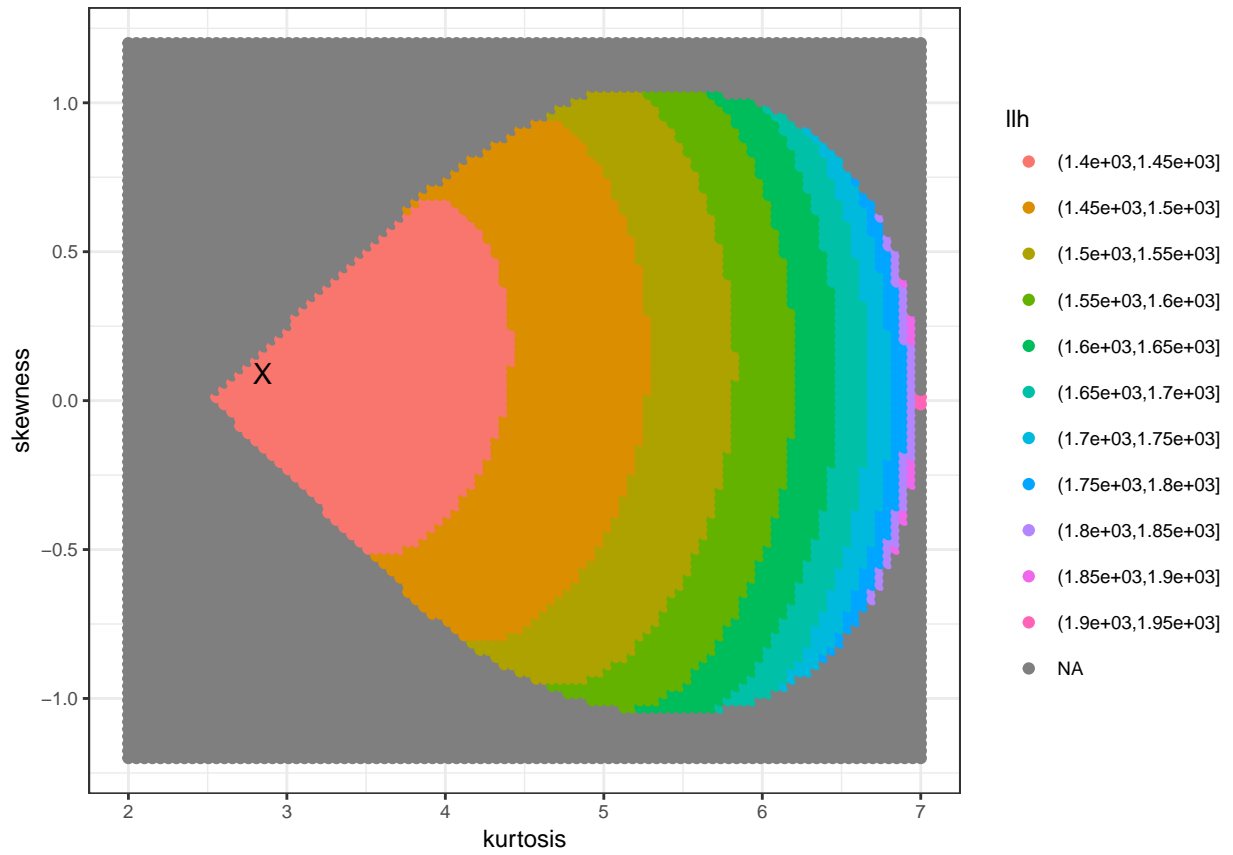


Figure 2: O gráfico acima é um *heatmap* da função  $l(\mu_3, \mu_4; \mathbf{x})$  para uma amostra aleatória normal. Os valores da função de log-verossimilhança são segmentados de forma que é possível identificar que a região em torno dos momentos populacionais,  $\mu_3 = 0$  e  $\mu_4 = 3$ , apresenta a maior verossimilhança. O ponto marcado com X indica os valores amostrais de assimetria e curtose. Os pontos escuros onde a função de log-verossimilhança é NA indicam que houve divergência no cálculo. Portanto, na região definida por estes pontos a função  $p(x)$  apresenta valores negativos, assim como na região de pontos coloridos  $p(x)$  apresenta valores não negativos.

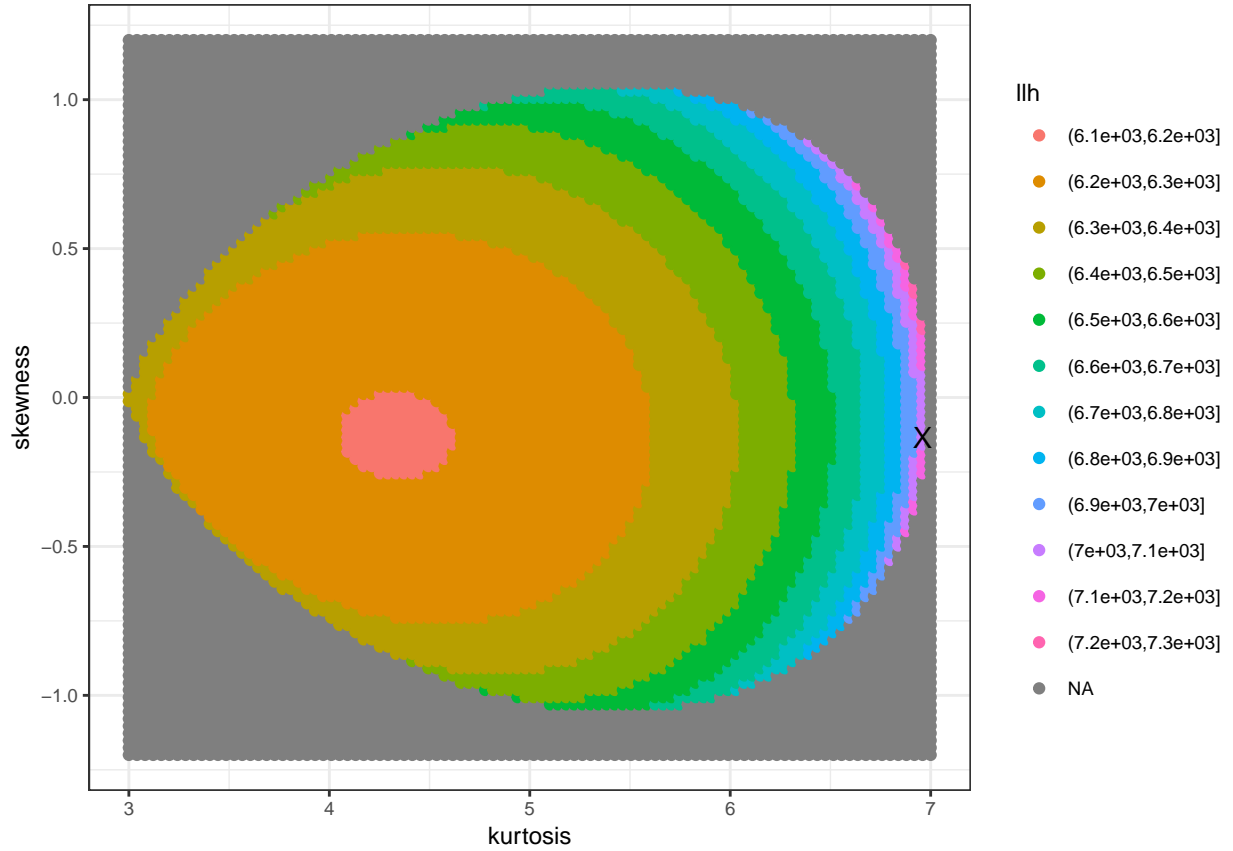


Figure 3: O gráfico mostra o extit{heatmap} da função de log-verossimilhança aplicada a série de retornos padrinizados do IBOVESPA no período de jan/2000 a dez/2017. Nota-se que a região de máxima verossimilhança desloca-se para onde a assimetria é negativa e a curtose é um pouco acima de 4, indicando uma distribuição assimétrica e com caudas pesadas. Entretanto, os estimadores amostrais ficam próximos a borda da região válida, muito distantes da região de máxima verossimilhança.

$$f(x) = 1 + \frac{\mu_3}{6} He_3(x) + \frac{(\mu_4 - 3)}{24} He_4(x) = 0$$

que define uma linha no plano  $(\mu_3, \mu_4)$  para cada valor de  $x$ . Derivando  $f(x)$  e igualando a zero temos uma função que é independente de  $x$ , no sentido que para qualquer valor de  $x$  essa derivada é nula.

$$f'(x) = \frac{\mu_3}{2} He_2(x) + \frac{(\mu_4 - 3)}{6} He_3(x) = 0$$

Com isso podemos construir um sistema linear para encontrar  $\mu_3$  e  $\mu_4$  como funções de  $x$ , pois na primeira equação definimos a restrição em relação a  $x$  e na segunda temos uma restrição mais geral para qualquer valor de  $x$ . As soluções  $\mu_3$  e  $\mu_4$  para este sistema determinam a borda da região oval observada nas Figuras 2 e 3. A solução do sistema é dada por:

$$\begin{aligned}\mu_3(x) &= -24 \frac{He_3(x)}{d(x)} \\ \mu_4(x) &= 72 \frac{He_2(x)}{d(x)} + 3\end{aligned}$$

onde  $d(x) = 4He_3^2(x) - 3He_2(x)He_4(x)$ .

Agora é necessário analisar estas equações para determinar as regiões em  $x$  para que  $\mu_3(x)$  e  $\mu_4(x)$  tenham valores válidos. A Tabela 1 apresenta as regiões de  $x$  que atendem as restrições para as equações de  $\mu_3(x)$  e  $\mu_4(x)$ , sabendo que  $\mu_3(x) \geq 0$  ou  $\mu_3(x) < 0$  e que  $\mu_4(x) \geq 3$ .

Table 1: Regiões de  $x$  que atendem as restrições de  $\mu_3(x)$  e  $\mu_4(x)$ .

Restrições	Regiões de $x$
$\mu_3 < 0$	$x > \sqrt{3} \cup -\sqrt{3} < x < 0$
$\mu_3 \geq 0$	$x \leq -\sqrt{3} \cup 0 < x < \sqrt{3}$
$\mu_4 < 3$	$-1 < x < 1$
$\mu_4 \geq 3$	$x \geq 1 \cup x \leq -1$

Tomando a intersecção das restrições válidas chegamos a 2 conjuntos para  $x$

- $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$  (menor)
- $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  (maior — admite valores inválidos para  $\mu_4$ )

Note que estes conjuntos definem regiões de  $x$  onde o polinômio  $f(x)$  da expansão de Gram-Charlier é igual a zero e consequentemente, os valores de  $\mu_3$  e  $\mu_4$  são válidos dentro dessa restrição.

Como observa-se na Figura 4, a busca de parâmetros  $(\mu_3, \mu_4)$  deve ser restrita a região oval em que  $\mu_4 \in [3, 7]$  e  $\mu_3 \equiv \mu_3(\mu_4)$ . Na borda dessa região tem-se que  $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ . Estas restrições colocadas para  $\mu_3$  e  $\mu_4$  não são desejáveis para a utilização de  $p(x)$  como uma FDP em um processo de estimação por máxima-verossimilhança. Para realizar a estimação destes parâmetros por máxima-verossimilhança seria necessário introduzir uma restrição funcional aos parâmetros. Para contornar este problema vamos aplicar uma transformação a  $\mu_3$  e  $\mu_4$  de maneira que seja possível eliminar essa restrição criando novas variáveis  $\mu'_3$  e  $\mu'_4$  irrestritas.

Considerando  $\mu_4 = g(\mu'_4, \mu_{4,inf}, \mu_{4,sup})$  onde  $g(x, l_{inf}, l_{sup}) = l_{inf} + \frac{(l_{sup} - l_{inf})}{1 - e^{-x}}$ . Dessa maneira, a partir de  $\mu'_4$  (irrestrito) encontramos  $\mu_4$  e com isso aplicamos a função que delimita a região oval para encontrar os limites de  $\mu_3$  ( $\mu_{3,inf}$  e  $\mu_{3,sup}$  como função de  $\mu_4$ ). Utilizamos a função  $\mu_3 = g(\mu'_3, \mu_{3,inf}, \mu_{3,sup})$  para a partir

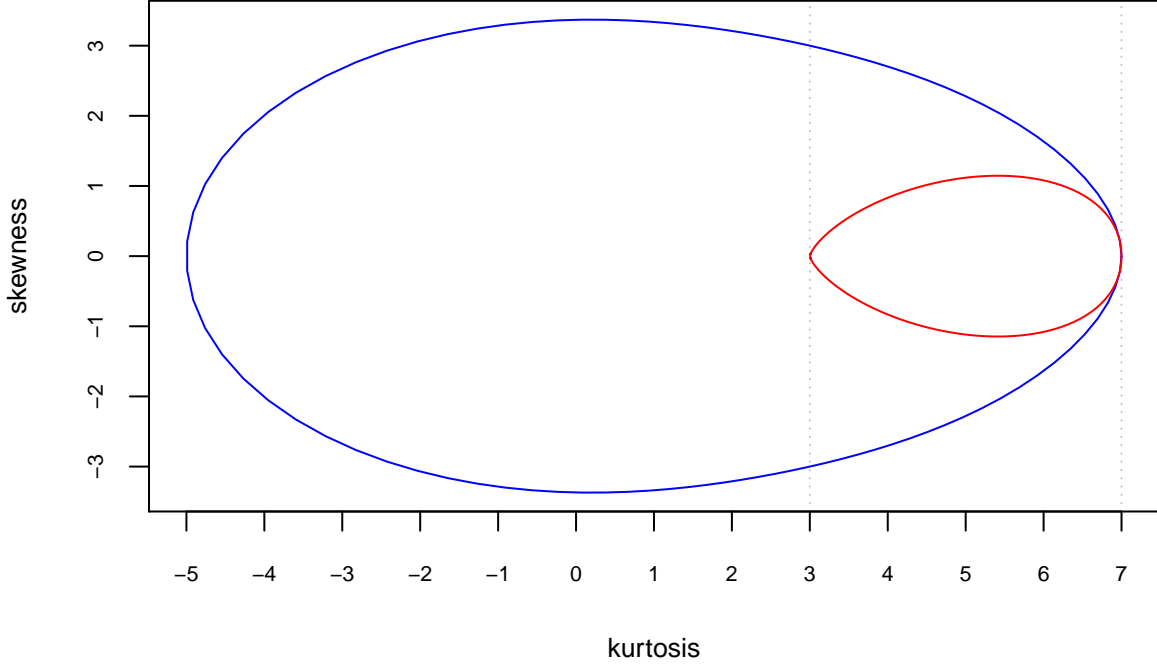


Figure 4: Regiões de assimetria e curtose para que a expansão de Gram-Charlier seja não negativa. A região maior (azul), onde  $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ , admite valores negativos para curtose, o que não é permitido, pois este momento é positivo. A menor região (vermelho) admite valores válidos para assimetria e curtose e  $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ .

de  $\mu'_3$  encontrar  $\mu_3$ . Com essa transformação analítica elimina-se o problema de restrição da busca por  $\mu_3$  e  $\mu_4$  pois o problema passa a ser posto em termos de  $\mu'_3$  e  $\mu'_4$ . A Figura 5 mostra o gráfico da função  $g(x)$  aplicada a curtose  $\mu_4 = g(\mu'_4, \mu_{4,inf} = 3, \mu_{4,sup} = 7)$ .

Desta forma, a função de log-verossimilhança pode ser reescrita como  $l(\mu_3(\mu'_3), \mu_4(\mu'_4); \mathbf{x}) \equiv l(\mu'_3, \mu'_4; \mathbf{x})$ . A função  $p(x)$  gerada a partir da expansão de Gram-Charlier passa a atender a restrição de positividade e portanto pode ser considerada uma FDP. Esta função pode ser utilizada para encontrar os estimadores de máxima-verossimilhança para assimetria e curtose em um processo de otimização sem restrições funcionais. Na próxima sessão será realizada a estimação dos parâmetros para uma amostra aleatória normal e para a série de retornos padronizados do IBOVESPA. Será possível notar as diferenças entre esta abordagem e os estimadores amostrais.

## Estimação da assimetria e curtose com a expansão de Gram-Charlier

Para realizar a estimação de assimetria e curtose via maximização da função de verossimilhança, é necessário ter uma função de verossimilhança, e para defini-la precisamos de uma FDP para descrever a amostra aleatória de interesse. Na sessão demostramos que para uma região do espaço paramétrico de assimetria e curtose, a expansão de Gram-Charlier,  $p(x)$ , é atende às restrições para que seja caracterizada uma FDP. Posto isto, definimos a função de log-verossimilhança  $l(\mu'_3, \mu'_4; \mathbf{x})$ , onde  $\mu_3 \equiv \mu_3(\mu'_3)$  e  $\mu_4 \equiv \mu_4(\mu'_4)$ . A função de log-verossimilhança definida em função de  $\mu'_3$  e  $\mu'_4$  é irrestrita e portanto, o processo de otimização para encontrar o seu máximo pode ser realizado sem maiores problemas. No processo de otimização são encontrados valores ótimos de  $\mu'_3$  e  $\mu'_4$  e a partir destes encontramos os valores de assimetria e curtose.



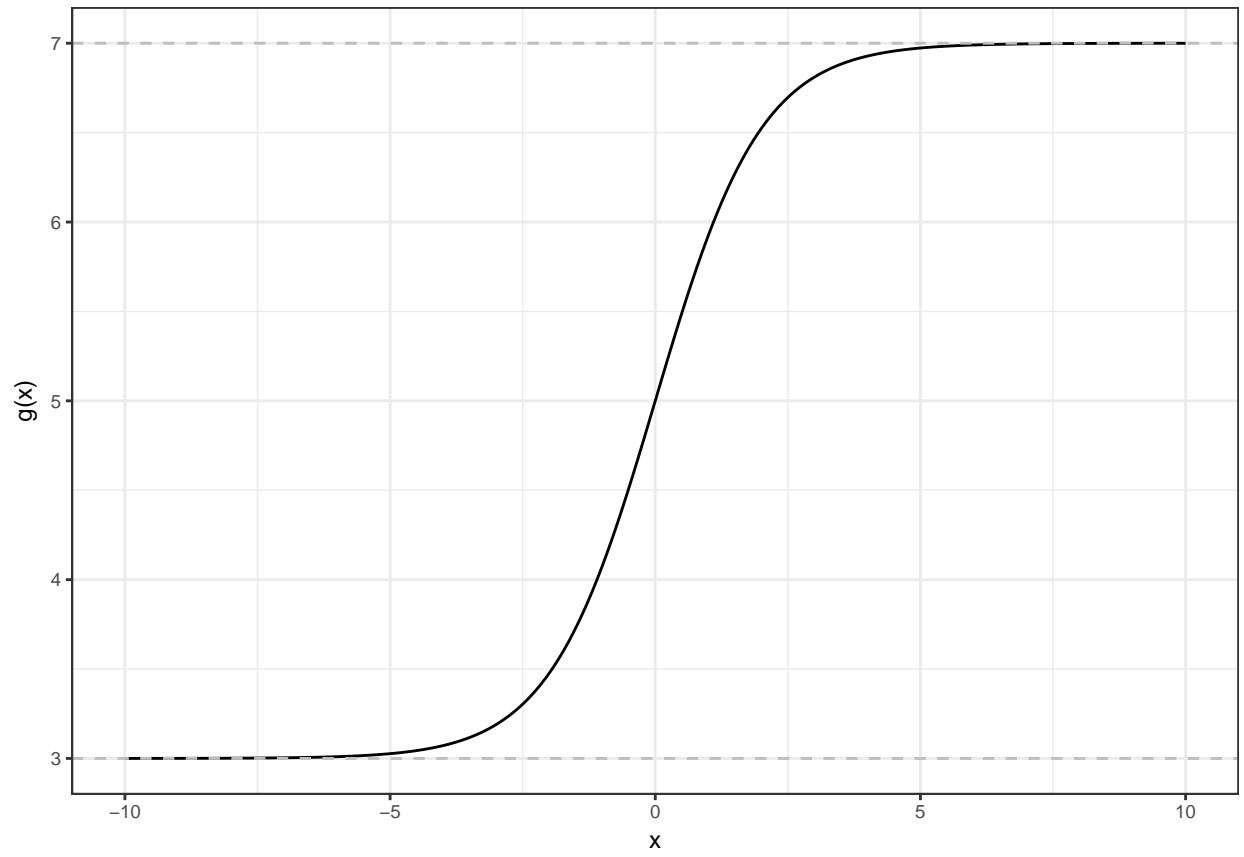


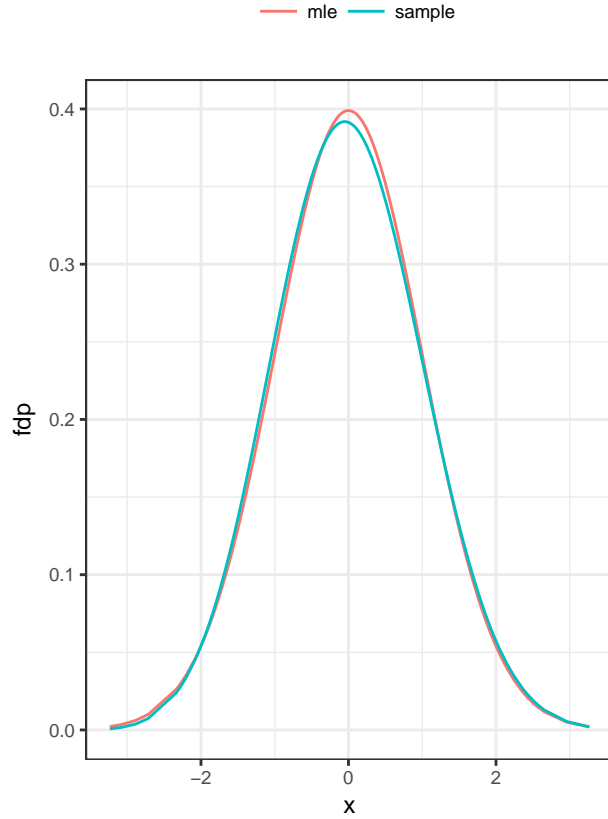
Figure 5: Função  $g(x)$  para realizar uma transformação analítica em  $\mu_3$  e  $\mu_4$  de maneira tornar um problema de busca restrito em um problema irrestrito. Aqui tem-se  $g(\mu'_4, 3, 7)$ .

Table 2: Resultados do cálculo dos estimadores de assimetria e curtose: máxima-verossimilhança e amostral, para a amostra aleatória normal e para a série de retornos padronizados do IBOVESPA.

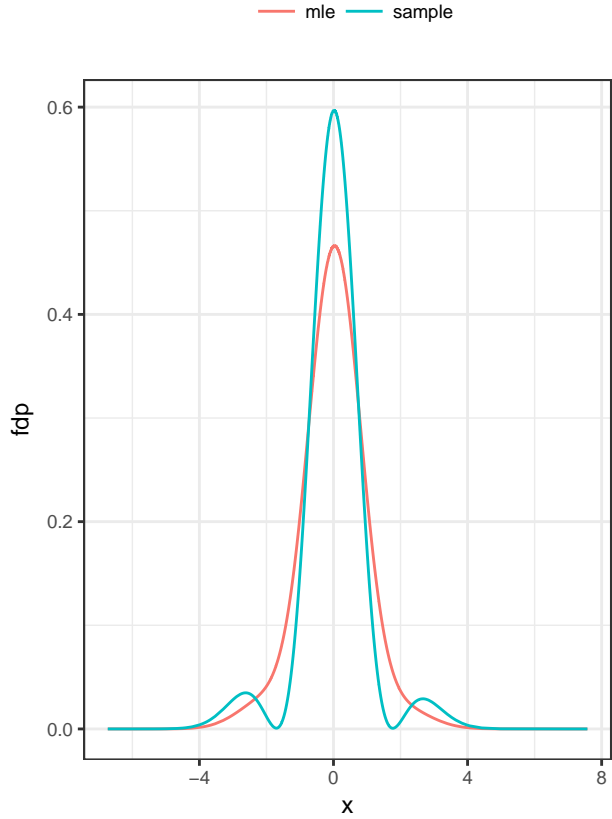
	Amostra aleatória		IBOVESPA	
	MLE	Amostra	MLE	Amostra
Assimetria	0.0000274	0.091725	-0.1230408	-0.1353708
Curtose	3.0000166	2.847665	4.3409819	6.9598507

## Conclusão

(i)



(ii)



```
theme_set(theme_grey(base_size = 9))
p1 = qplot(tail(rIBOV$date, dim(r2)[1]), r2[,1], geom=c("line", "point"), xlab = "date", ylab = "skewness")
p2 = qplot(tail(rIBOV$date, dim(r2)[1]), r2[,2], geom=c("line", "point"), xlab = "date", ylab = "kurtosis")
r_ = zoo::rollapply(rIBOV$value, width = 504, timeDate::kurtosis, method = "moment")
p3 = qplot(tail(rIBOV$date, length(r_)), r_, geom=c("line", "point"), xlab = "date", ylab = "kurtosis")
r__ = zoo::rollapply(rIBOV$value, width = 504, timeDate::skewness, method = "moment")
p4 = qplot(tail(rIBOV$date, length(r__)), r__, geom=c("line", "point"), xlab = "date", ylab = "skewness")
plot_grid(p1, p4, p2, p3, align = "v", labels = c("(i)", "(ii)", "(iii)", "(iv)"), label_size = 9)
```

## Referências

[1] S. Blinnikov and R. Moessner, Astronomy and Astrophysics Supplement Series **130**, 193 (1998).

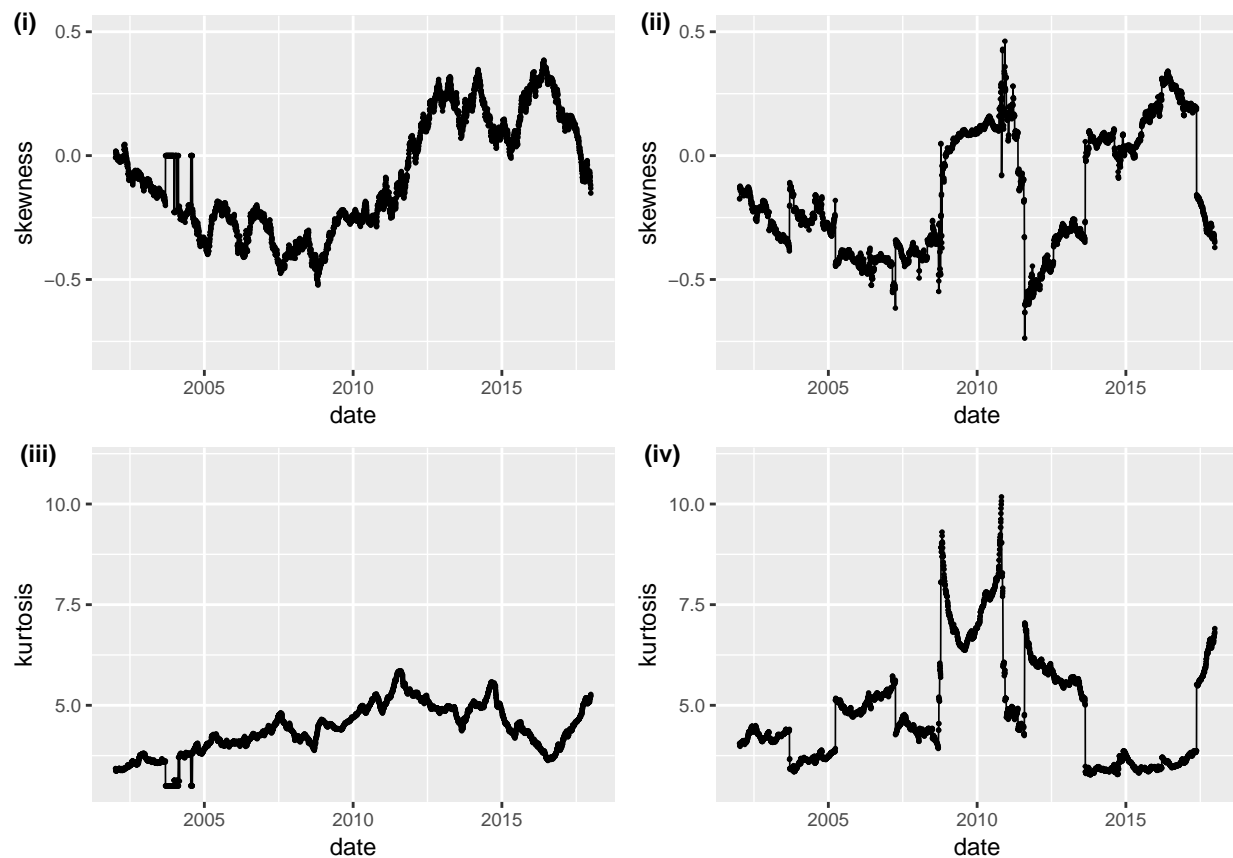


Figure 6: O gráfico mostra, na primeira coluna, os estimadores de máxima verossimilhança de assimetria e curtose em janela móvel de 504 dias úteis para a série de retornos padronizados do IBOVESPA. Na segunda coluna, temos os estimadores amostrais. Observa-se claramente a mudança no comportamento dos estimadores. Os estimadores de máxima-verossimilhança são mais estáveis, principalmente a curtose.