

# Superfície de Volatilidade GARCH com incrementos Gram-Charlier

*Wilson Freitas*

*18 de abril de 2018*

## Resumo

A estimação da assimetria e da curtose em séries de retornos é explorada neste artigo com o objetivo de prover uma alternativa aos estimadores amostrais comumente utilizados. Os estimadores amostrais para assimetria e curtose apresentam grande sensibilidade a novas ocorrências nas séries temporais. Esta sensibilidade é inerente a estes estimadores, sendo difícil de ser explicada pela dinâmica observada nos dados. O objetivo deste texto é apresentar estimadores de assimetria e curtose menos sensíveis, que consideram uma expansão em série de momentos, a expansão Gram-Charlier. A expansão de Gram-Charlier é aplicada a distribuição Gaussiana na construção de uma função de densidade de probabilidade paramétrica com relação a assimetria e curtose. Utilizamos o método de máxima verossimilhança (MV) para obter a assimetria e curtose na expansão de Gram-Charlier. Observamos mais estabilidade nestes estimadores do que nos amostrais. Esta estabilidade é importante na aplicação da expansão de Gram-Charlier a problemas de finanças, por exemplo o apreamento de opções.

## Introdução

Qualquer função de densidade de probabilidade (FDP) pode ser aproximada por uma expansão em série de outra FDP que pertence a um grupo especial, como a distribuição Gaussiana, por exemplo. Dada uma amostra, é difícil identificar a melhor distribuição para descrevê-la, logo, a utilização expansões em séries permite associar uma FDP aproximada aos dados. A FDP aproximada é uma expansão em série de uma distribuição conhecida e em geral padronizada, esta é a distribuição base. Esta aproximação permite lidar com momentos que não estão presentes na distribuição base. Por exemplo, a distribuição Gaussiana não possui os momentos de assimetria e curtose, entretanto, na expansão em série da Gaussiana estes momentos são parâmetros. Portanto, se os dados apresentam assimetria e curtose, a distribuição Gaussiana não é uma candidata, contudo, a sua expansão é. As expansões de FDPs em séries têm aplicações em diversos campos da ciência como a Física e Finanças. Este texto explora o uso da expansão de Gram-Charlier [1] que é a expansão da distribuição Gaussiana em uma base de polinômios de Hermite.

## Assimetria e curtose

Seja uma amostra aleatória  $\{x_i\}_{i=1\dots N}$ , de média amostral  $\mu$  e variância amostral  $\sigma^2$ . Os estimadores amostrais de assimetria  $\mu_3$  e curtose  $\mu_4$  são definidos como:

$$\mu_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu)^3}{\sigma^3}$$

$$\mu_4 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu)^4}{\sigma^4}$$

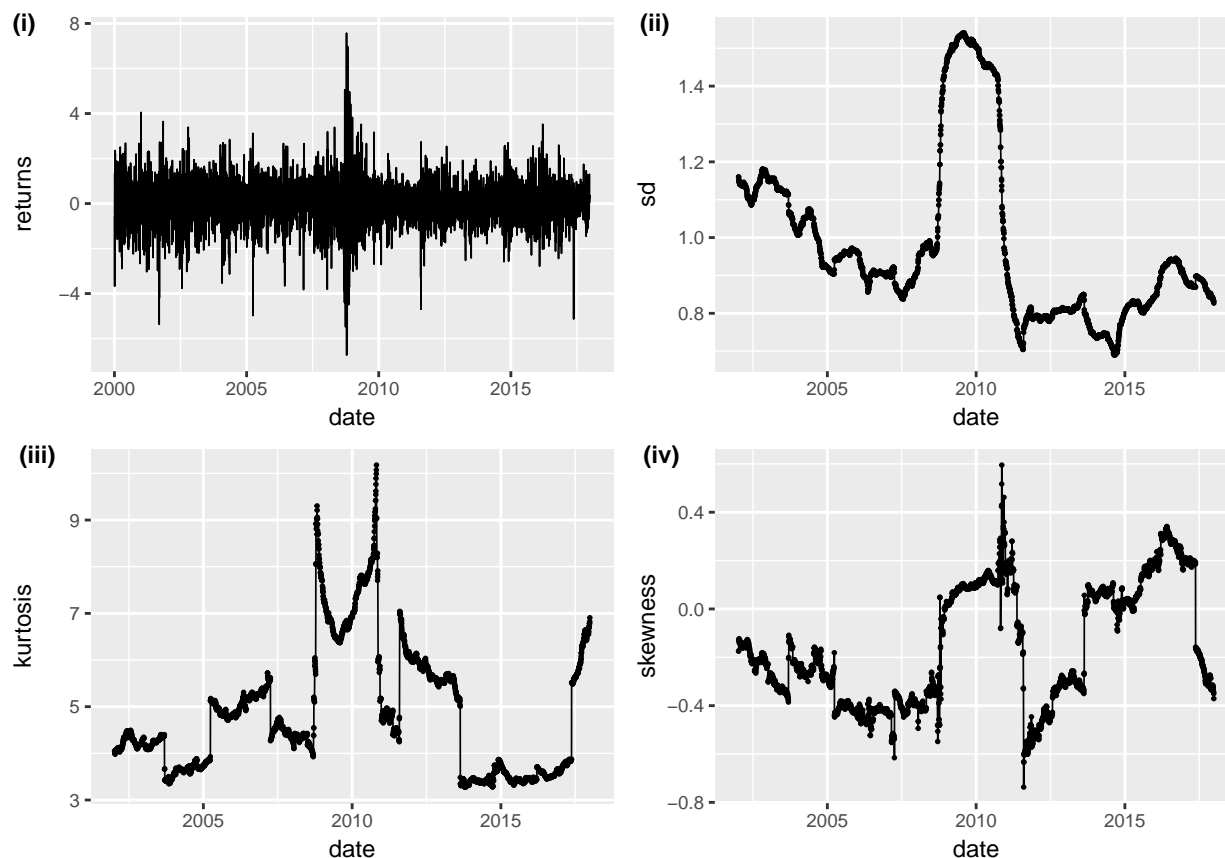


Figure 1: Os gráficos de retornos padronizados do IBOVESPA (i) e suas médias móveis de dois anos: (ii) desvio padrão, (iii) curtose e (iv) assimetria.

Estes estimadores apresentam grande sensibilidade a pequenas mudanças na amostra. Em séries de retornos diários observam-se mudanças de nível devido a presença retornos atípicos causados por fortes oscilações no mercado. Há casos onde apenas um retorno atípico causa uma variação significativa. Estas fortes mudanças podem ser notadas ao se calcular a assimetria e curtose em uma janela móvel aplicada a série de retorno. Observam-se fortes mudanças de regime em períodos de aumento volatilidade no mercado. A Figura 1 apresenta os gráficos da série de retornos padronizados do IBOVESPA e os estimadores de assimetria, curtose e do desvio padrão em janela móvel. A série de retornos do IBOVESPA é referente ao período de janeiro de 2000 a dezembro de 2017 (17 anos) e os retornos são contínuos. A janela móvel de dois anos (504 dias úteis) é utilizada para o cálculo das médias móveis.

Nos gráficos de média móvel de assimetria e curtose, na Figura 1, é possível observar que em diversos momentos há mudanças de nível significativas, relacionadas a períodos de maior volatilidade nos retornos. Entretanto, o gráfico com a média móvel do desvio padrão, apresenta um comportamento mais suave, nos mesmos períodos.

A expansão de Gram-Charlier é apresentada na próxima sessão. Através desta expansão chega-se a uma distribuição paramétrica na assimetria e na curtose. A partir desta distribuição é possível obter estimadores de máxima verossimilhança para estas grandezas relacionadas a esta distribuição.

## Expansão de Gram-Charlier

Sob certas condições uma função de distribuição de probabilidade (FDP)  $p(x)$ , padronizada, pode ser expandida em uma série de derivadas da distribuição Gaussiana padronizada  $Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ . A expansão em série

$$p(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{d^n Z(x)}{dx^n}$$

é uma série de Gram-Charlier (de tipo-A) e de acordo com a fórmula de Rodriguez

$$He_n(x) = (-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

são polinômios de Chebyshev-Hermite de ordem  $n$ . Substituindo a fórmula de Rodriguez na equação de  $p(x)$  obtem-se uma expansão em série de polinômios de Chebyshev-Hermite e da distribuição Gaussiana.

$$p(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n (-1)^n He_n(x) Z(x)$$

onde os coeficientes

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) He_n(t) dt$$

são valores esperados dos polinômios de Chebyshev-Hermite com relação a FDP  $p(x)$ . Os coeficientes  $c_n$  são funções dos momentos da distribuição  $p(x)$ , logo, a expansão de Gram-Charlier é uma expansão em momentos da distribuição  $p(x)$ .

Assumindo uma abordagem parsimoniosa e a dificuldade em se trabalhar com séries infinitas, é razoável truncar a expansão  $p(x)$  em uma quantidade finita de termos,  $n < \infty$ . Uma boa escolha é  $n = 4$ , pois, a expansão vai até os polinômios de ordem 4 gerando assim os momentos de assimetria e curtose. Esta escolha produz a seguinte aproximação para  $p(x)$

$$p(x) \sim Z(x) \left[ 1 + \frac{\mu_3}{3!} (x^3 - 3x) + \frac{\mu_4 - 3}{4!} (x^4 - 6x^2 + 3) \right]$$

Note que além da distribuição Gaussiana  $Z(x)$ ,  $p(x)$  é função dos terceiro e quarto momentos,  $\mu_3 = E[x^3]$  e  $\mu_4 = E[x^4]$  da variável aleatória  $x$  padronizada. Logo, estes momentos centralizados são assimetria e curtose, respectivamente. O truncamento da expansão de Gram-Charlier em termos até a ordem  $n = 4$  produz uma função paramétrica na assimetria e na curtose, logo,  $p(x) \equiv p(x; \mu_3, \mu_4)$ . Esta função é uma extensão da distribuição Gaussiana que incorpora assimetria e curtose, entretanto, para que  $p(x)$  seja considerada uma FDP é necessário que as seguintes restrições sejam atendidas:

- $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$
- $p(x)$  seja contínua em todo suporte
- $p(x)$  seja não negativa, para todo  $x$

Os dois primeiros pontos são fáceis de comprovar, integrando e derivando  $p(x)$ . Contudo, o terceiro ponto não é direto. Há de fato, valores de assimetria e curtose para os quais a função  $p(x)$  é negativa. Na próxima sessão serão apresentadas as restrições de positividade para  $p(x)$ , nas quais os momentos podem assumir valores onde esta função seja sempre não negativa. Uma vez atendida a restrição de positividade, podemos considerar  $p(x)$

uma FDP e ela poderá ser utilizada para descrever variáveis aleatórias como séries de retornos. Estas séries comumente apresentam desvios da normalidade, como retornos extremos e oscilações assimétricas.

## Restrições de positividade para $p(x)$

Seja a função  $p(x; \mu_3, \mu_4)$  definida na sessão anterior

$$p(x; \mu_3, \mu_4) = Z(x) \left[ 1 + \frac{\mu_3}{3!}(x^3 - 3x) + \frac{\mu_4 - 3}{4!}(x^4 - 6x^2 + 3) \right]$$

Esta função apresenta valores negativos de  $p(x)$  para alguns valores de assimetria e curtose. Isso pode ser observado escrevendo esta função com uma função de log-verossimilhança  $l(\mu_3, \mu_4; \mathbf{x})$ , que é função dos momentos e é paramétrica em  $\mathbf{x} \equiv \{x_i\}_{i=1 \dots N}$ , uma amostra aleatória. Logo, a função

$$l(\mu_3, \mu_4; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N -\log p(x_i; \mu_3, \mu_4)$$

seria uma função *pseudo* log-verossimilhança, onde *pseudo* quer dizer que esta função diverge para alguns valores dos momentos. Isso acontece porque a função log possui apenas suporte positivo e valores negativos de  $p(x)$  apresentarão descontinuidades quando calculados numericamente.

Para observar a região de *validade* dos momentos na função  $p(x)$  será gerado um *grid* com possíveis valores de  $\mu_3$  e  $\mu_4$  e para cada par será calculada a função  $l(\mu_3, \mu_4; \mathbf{x})$  para uma amostra aleatória. O resultado será visualizado em um gráfico 2D onde o eixo y é a assimetria e o eixo x a curtose. Os pontos no gráfico são os valores obtidos da função  $l(\mu_3, \mu_4; \mathbf{x})$  referente ao par de assimetria e curtose. Os valores da função  $l(\mu_3, \mu_4; \mathbf{x})$  serão segmentados de maneira que possamos observar a região do espaço paramétrico onde a função apresenta o seu máximo. Nesta simulação considera-se uma amostra aleatória normal com 1000 elementos e os momentos gerados de acordo com os seguintes intervalos:  $\mu_3 \in [-1.2, 1.2]$  e  $\mu_4 \in [2, 7]$ .

Observando a Figura 2 fica claro que há uma região bem definida para a qual os valores de assimetria e curtose produzem uma função  $p(x)$  não negativa e portanto, nesta região,  $p(x)$  pode ser considerada uma FDP.

A título de ilustração a Figura 3 mostra o *heatmap* onde a série de retornos padronizados do IBOVESPA é utilizada como amostra aleatória.

Para utilizarmos a função de log-verossimilhança em um processo numérico para estimar a assimetria e a curtose, é necessário encontrar uma forma funcional para  $p(x)$  na qual seja possível tratar as restrições de  $\mu_3$  e  $\mu_4$  de forma analítica e de preferência, sem condicionais. Como observa-se nas Figuras 2 e 3 há um plano de coordenadas  $(\mu_3, \mu_4)$  onde a região definida por uma figura oval nos gráficos é a região de validade para os parâmetros  $\mu_3$  e  $\mu_4$ . Vamos começar determinando a borda dessa região.

Queremos valores para  $\mu_3$  e  $\mu_4$  tais que  $p(x)$  seja positivo definido para qualquer  $x$ . Observando  $p(x)$  temos que o seguinte polinômio deve ser sempre positivo para qualquer  $x$ .

$$f(x) = 1 + \frac{\mu_3}{6}He_3(x) + \frac{(\mu_4 - 3)}{24}He_4(x) \geq 0$$

onde  $He_3(x) = x^3 - 3x$  e  $He_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$  são polinômios de Chebyshev-Hermite. A borda dessa região é definida por

$$f(x) = 1 + \frac{\mu_3}{6}He_3(x) + \frac{(\mu_4 - 3)}{24}He_4(x) = 0$$

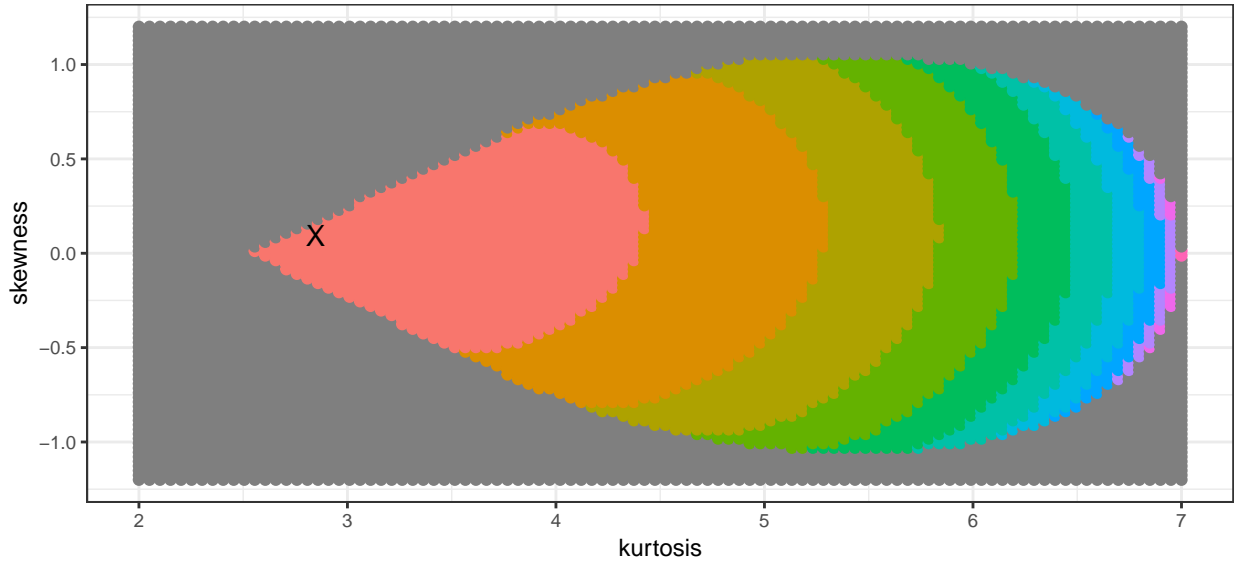


Figure 2: O gráfico acima é um *heatmap* da função  $l(\mu_3, \mu_4; \mathbf{x})$  para uma amostra aleatória normal. Os valores da função de log-verossimilhança são segmentados de forma que é possível identificar que a região em torno dos momentos populacionais,  $\mu_3 = 0$  e  $\mu_4 = 3$ , apresenta a maior verossimilhança. O ponto marcado com X indica os valores amostrais de assimetria e curtose. Os pontos escuros onde a função de log-verossimilhança é NA indicam que houve divergência no cálculo. Portanto, na região definida por estes pontos a função  $p(x)$  apresenta valores negativos, assim como na região de pontos coloridos  $p(x)$  apresenta valores não negativos.

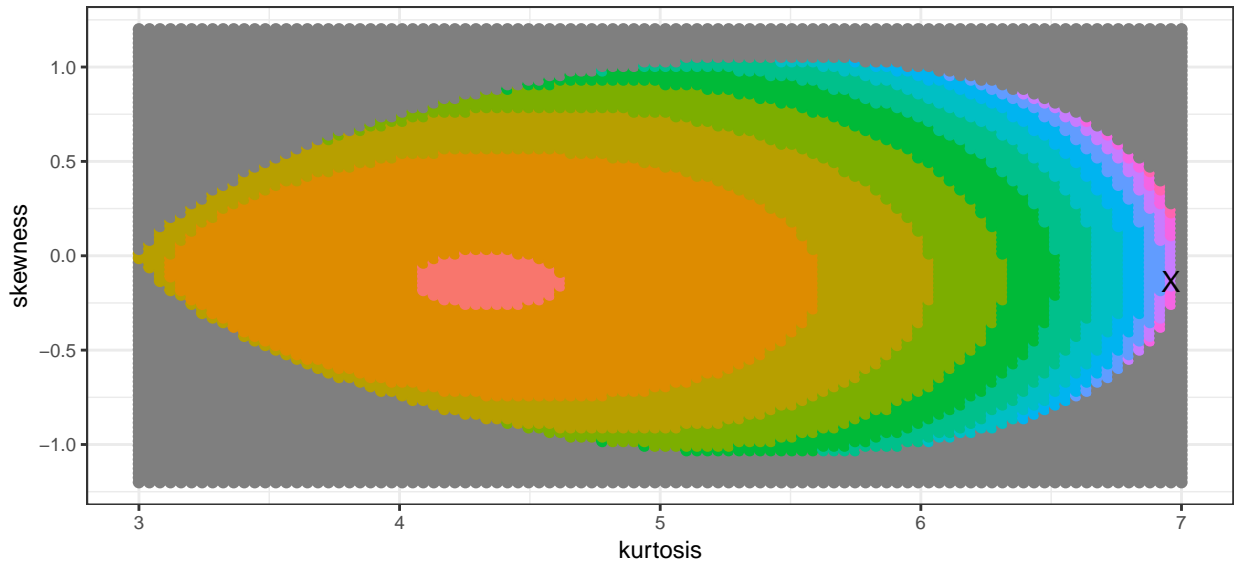


Figure 3: O gráfico mostra o *heatmap* da função de log-verossimilhança aplicada a série de retornos padrinizados do IBOVESPA no período de jan/2000 a dez/2017. Nota-se que a região de máxima verossimilhança desloca-se para onde a assimetria é negativa e a curtose é um pouco acima de 4, indicando uma distribuição assimétrica e com caudas pesadas. Entretanto, os estimadores amostrais ficam próximos a borda da região válida, muito distantes da região de máxima verossimilhança.

que define uma linha no plano  $(\mu_3, \mu_4)$  para cada valor de  $x$ . Derivando  $f(x)$  e igualando a zero temos uma função que é independente de  $x$ , no sentido que para qualquer valor de  $x$  essa derivada é nula.

$$f'(x) = \frac{\mu_3}{2} He_2(x) + \frac{(\mu_4 - 3)}{6} He_3(x) = 0$$

Com isso podemos construir um sistema linear para encontrar  $\mu_3$  e  $\mu_4$  como funções de  $x$ , pois na primeira equação definimos a restrição em relação a  $x$  e na segunda temos uma restrição mais geral para qualquer valor de  $x$ . As soluções  $\mu_3$  e  $\mu_4$  para este sistema determinam a borda da região oval observada nas Figuras 2 e 3. A solução do sistema é dada por:

$$\begin{aligned}\mu_3(x) &= -24 \frac{He_3(x)}{d(x)} \\ \mu_4(x) &= 72 \frac{He_2(x)}{d(x)} + 3\end{aligned}$$

onde  $d(x) = 4He_3^2(x) - 3He_2(x)He_4(x)$ .

Agora é necessário analisar estas equações para determinar as regiões em  $x$  para que  $\mu_3(x)$  e  $\mu_4(x)$  tenham valores válidos. A Tabela 1 apresenta as regiões de  $x$  que atendem as restrições para as equações de  $\mu_3(x)$  e  $\mu_4(x)$ , sabendo que  $\mu_3(x) \geq 0$  ou  $\mu_3(x) < 0$  e que  $\mu_4(x) \geq 3$ .

Table 1: Regiões de  $x$  que atendem as restrições de  $\mu_3(x)$  e  $\mu_4(x)$ .

| Restrições     | Regiões de $x$                           |
|----------------|--|
| $\mu_3 < 0$    | $x > \sqrt{3} \cup -\sqrt{3} < x < 0$    |
| $\mu_3 \geq 0$ | $x \leq -\sqrt{3} \cup 0 < x < \sqrt{3}$ |
| $\mu_4 < 3$    | $-1 < x < 1$                             |
| $\mu_4 \geq 3$ | $x \geq 1 \cup x \leq -1$                |

Tomando a intersecção das restrições válidas chegamos a 2 conjuntos para  $x$

- $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$  (menor)
- $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  (maior — admite valores inválidos para  $\mu_4$ )

Note que estes conjuntos definem regiões de  $x$  onde o polinômio  $f(x)$  da expansão de Gram-Charlier é igual a zero e consequentemente, os valores de  $\mu_3$  e  $\mu_4$  são válidos dentro dessa restrição.

Como observa-se na Figura 4, a busca de parâmetros  $(\mu_3, \mu_4)$  deve ser restrita a região oval em que  $\mu_4 \in [3, 7]$  e  $\mu_3 \equiv \mu_3(\mu_4)$ . Na borda dessa região tem-se que  $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ . Estas restrições colocadas para  $\mu_3$  e  $\mu_4$  não são desejáveis para a utilização de  $p(x)$  como uma FDP em um processo de estimação por máxima-verossimilhança. Para realizar a estimação destes parâmetros por máxima-verossimilhança seria necessário introduzir uma restrição funcional aos parâmetros. Para contornar este problema vamos aplicar uma transformação a  $\mu_3$  e  $\mu_4$  de maneira que seja possível eliminar essa restrição criando novas variáveis  $\mu'_3$  e  $\mu'_4$  irrestritas.

Considerando  $\mu_4 = g(\mu'_4, \mu_{4,inf}, \mu_{4,sup})$  onde  $g(x, l_{inf}, l_{sup}) = l_{inf} + \frac{(l_{sup} - l_{inf})}{1 - e^{-x}}$ . Dessa maneira, a partir de  $\mu'_4$  (irrestrito) encontramos  $\mu_4$  e com isso aplicamos a função que delimita a região oval para encontrar os limites de  $\mu_3$  ( $\mu_{3,inf}$  e  $\mu_{3,sup}$  como função de  $\mu_4$ ). Utilizamos a função  $\mu_3 = g(\mu'_3, \mu_{3,inf}, \mu_{3,sup})$  para a partir de  $\mu'_3$  encontrar  $\mu_3$ . Com essa transformação analítica elimina-se o problema de restrição da busca por  $\mu_3$  e  $\mu_4$  pois o problema passa a ser posto em termos de  $\mu'_3$  e  $\mu'_4$ . A Figura 5 mostra o gráfico da função  $g(x)$  aplicada a curtose  $\mu_4 = g(\mu'_4, \mu_{4,inf} = 3, \mu_{4,sup} = 7)$ .

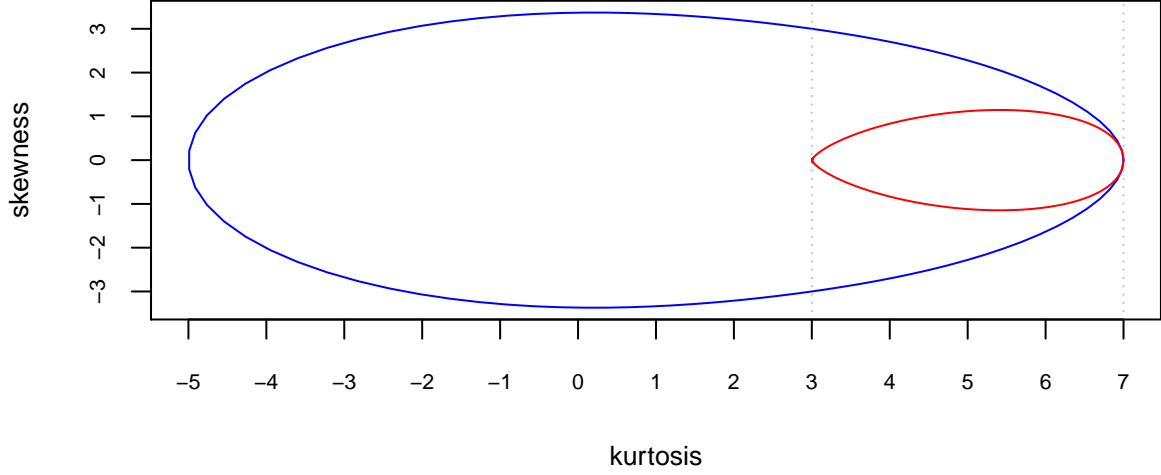


Figure 4: Regiões de assimetria e curtose para que a expansão de Gram-Charlier seja não negativa. A região maior (azul), onde  $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ , admite valores negativos para curtose, o que não é permitido, pois este momento é positivo. A menor região (vermelho) admite valores válidos para assimetria e curtose e  $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ .

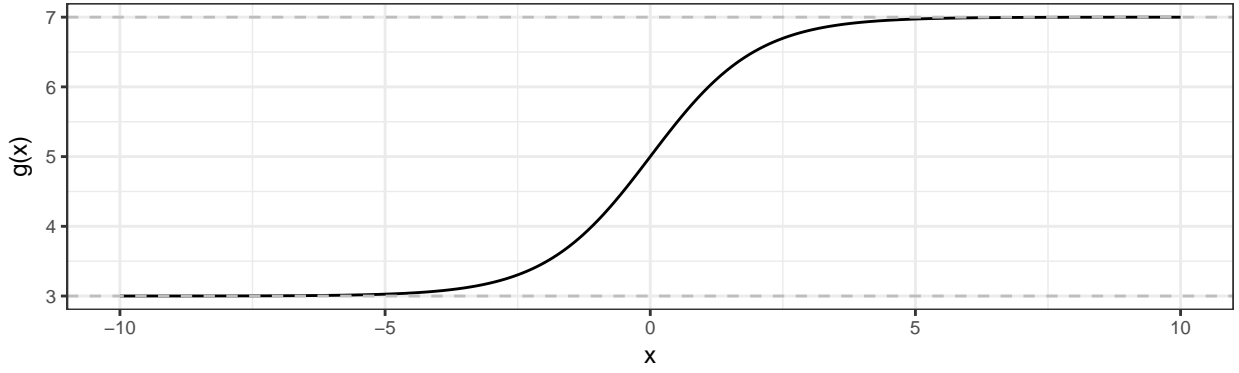


Figure 5: Função  $g(x)$  para realizar uma transformação analítica em  $\mu_3$  e  $\mu_4$  de maneira tornar um problema de busca restrito em um problema irrestrito. Aqui tem-se  $g(\mu'_4, 3, 7)$ .

Desta forma, a função de log-verossimilhança pode ser reescrita como  $l(\mu_3(\mu'_3), \mu_4(\mu'_4); \mathbf{x}) \equiv l(\mu'_3, \mu'_4; \mathbf{x})$ . A função  $p(x)$  gerada a partir da expansão de Gram-Charlier passa a atender a restrição de positividade e portanto pode ser considerada uma FDP. Esta função pode ser utilizada para encontrar os estimadores de máxima-verossimilhança para assimetria e curtose em um processo de otimização sem restrições funcionais. Na próxima sessão será realizada a estimação dos parâmetros para uma amostra aleatória normal e para a série de retornos padronizados do IBOVESPA. Será possível notar as diferenças entre esta abordagem e os estimadores amostrais.

## Estimação da assimetria e curtose com a expansão de Gram-Charlier

Para realizar a estimação de assimetria e curtose via maximização da função de verossimilhança, é necessário ter uma função de verossimilhança e, para defini-la, precisamos de uma FDP que descreva a amostra aleatória de interesse. Na sessão anterior foi demonstrado que, para uma região do espaço paramétrico de assimetria e curtose, a expansão de Gram-Charlier,  $p(x)$ , é atende às condições para que seja caracterizada como

Table 2: Resultados do cálculo dos estimadores de assimetria e curtose: máxima-verossimilhança e amostral, para a amostra aleatória normal e para a série de retornos padronizados do IBOVESPA.

|            | Amostra aleatória |          | IBOVESPA   |            |
|------------|-------------------|----------|------------|------------|
|            | MLE               | Amostra  | MLE        | Amostra    |
| Assimetria | 0.0000274         | 0.091725 | -0.1230408 | -0.1353708 |
| Curtose    | 3.0000166         | 2.847665 | 4.3409819  | 6.9598507  |

uma FDP. A limitação do espaço paramétrico torna o processo de busca pelos parâmetros restrito. Para contornar esta restrição, foi realizada a transformação de variáveis de  $(\mu_3, \mu_4) \rightarrow (\mu'_3, \mu'_4)$ , tornando o problema restrito em  $(\mu_3, \mu_4)$  em um problema irrestrito em  $(\mu'_3, \mu'_4)$ . Foi definida a função de log-verossimilhança  $l(\mu'_3, \mu'_4; \mathbf{x})$  irrestrita, onde  $\mu_3 \equiv \mu_3(\mu'_3)$  e  $\mu_4 \equiv \mu_4(\mu'_4)$ . O processo de otimização para encontrar a máxima verossimilhança pode ser realizado sem maiores problemas no espaço  $(\mu'_3, \mu'_4)$ . Os valores ótimos de  $\mu'_3$  e  $\mu'_4$  são encontrados e a partir destes são obtidos os valores de assimetria e curtose.

A Tabela 2 apresenta uma comparação entre os estimadores amostrais e os de MV para a amostra normal aleatória e a série de retornos padronizados do IBOVESPA. Para a amostra aleatória, a curtose via MV é praticamente igual a 3 enquanto o estimador amostral é menor que 3. A assimetria via MV é próxima de zero e o estimador amostral tem duas casas decimais. A avaliação com a amostra aleatória é interessante porque os parâmetros, de assimetria e curtos, são conhecidos a priori, e os estimadores de MV são mais próximos dos valores populacionais que os estimadores amostrais. Os resultados para a série do IBOVESPA são mais interessantes porque neles a assimetria não apresenta uma grande divergência, entretanto, as curtoses são bastante diferentes. Contudo, a curtose amostral está dentro da região de validade do estimador, logo, a FDP gerada com estes parâmetros é válida.

Ambos estimadores, amostrais e MV, apresentam valores válidos, contudo, é importante avaliar distribuição produzida por estes estimadores. A Figura 6 apresenta as funções de densidade geradas com os parâmetros amostrais e com os de MV. No gráfico referente a amostra aleatória, que é normal, observa-se um pequeno desvio entre as distribuições geradas pelos dois estimadores (vermelha é MV e azul é amostral). Entretanto, para a série do IBOVESPA as distribuições geradas apresentam comportamentos bastante distintos. A distribuição com os estimadores amostrais (azul) é multimodal de uma forma que não representa os dados observados. Portanto, mesmo apresentando valores válidos de assimetria e curtose para que  $p(x)$  seja uma FDP, o resultado não gera uma distribuição que condiz com o comportamento observado da variável.

Outra avaliação importante é a evolução dos estimadores ao longo do tempo. Na Figura 1 observamos o comportamento dos estimadores amostrais ao longo do tempo em uma janela móvel. A Figura 7 reproduz os resultados da Figura 1 utilizando os estimadores de MV. Observa-se a estabilidade dos estimadores de MV, pois, eles não apresentam grandes variações causadas por novas entradas de retornos extremos na amostra.

## Conclusão

Os estimadores de MV para assimetria e curtose usando a expansão de Gram-Charlier são calculados para uma amostra aleatória e para a série de retornos padronizados do IBOVESPA em um intervalo de 17 anos. Observa-se que, tanto para a série completa, como para sub-intervalos de 2 anos, os estimadores de MV são bem comportados. A assimetria e a curtose estimados via máxima verossimilhança produzem uma distribuição coerente com os dados observados, diferente dos estimadores amostrais. Os resultados dos estimadores de MV aplicados a uma janela móvel também mostram a estabilidade destes estimadores. As séries em janela móvel não apresentam mudanças de nível abruptas semelhantes às séries dos estimadores amostrais. Esta estabilidade é relevante pois permite avaliar mudanças de regime mais fundamentais no comportamento das séries. Por exemplo, na Figura 7 observa-se que a assimetria dos retornos do IBOVESPA muda de sinal entre 2010 e 2013, deixando de ser negativa. Este comportamento também está presente no estimador amostral,



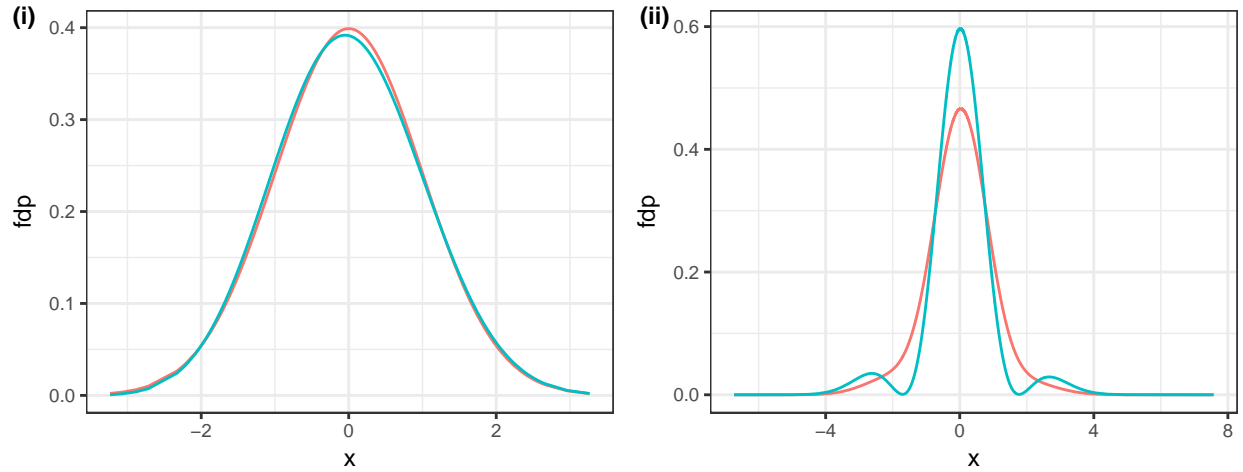


Figure 6: Os gráficos das funções de densidade de probabilidade da expansão de Gram-Charlier, em vermelho temos os estimadores de MV e em azul os estimadores amostrais. O gráfico (i) traz a FDP que representa da amostra aleatória e (ii) representa a série de retornos padronizados do IBOVESPA. Note a distribuição multimodal para os retornos do IBOVESPA com os parâmetros amostrais.

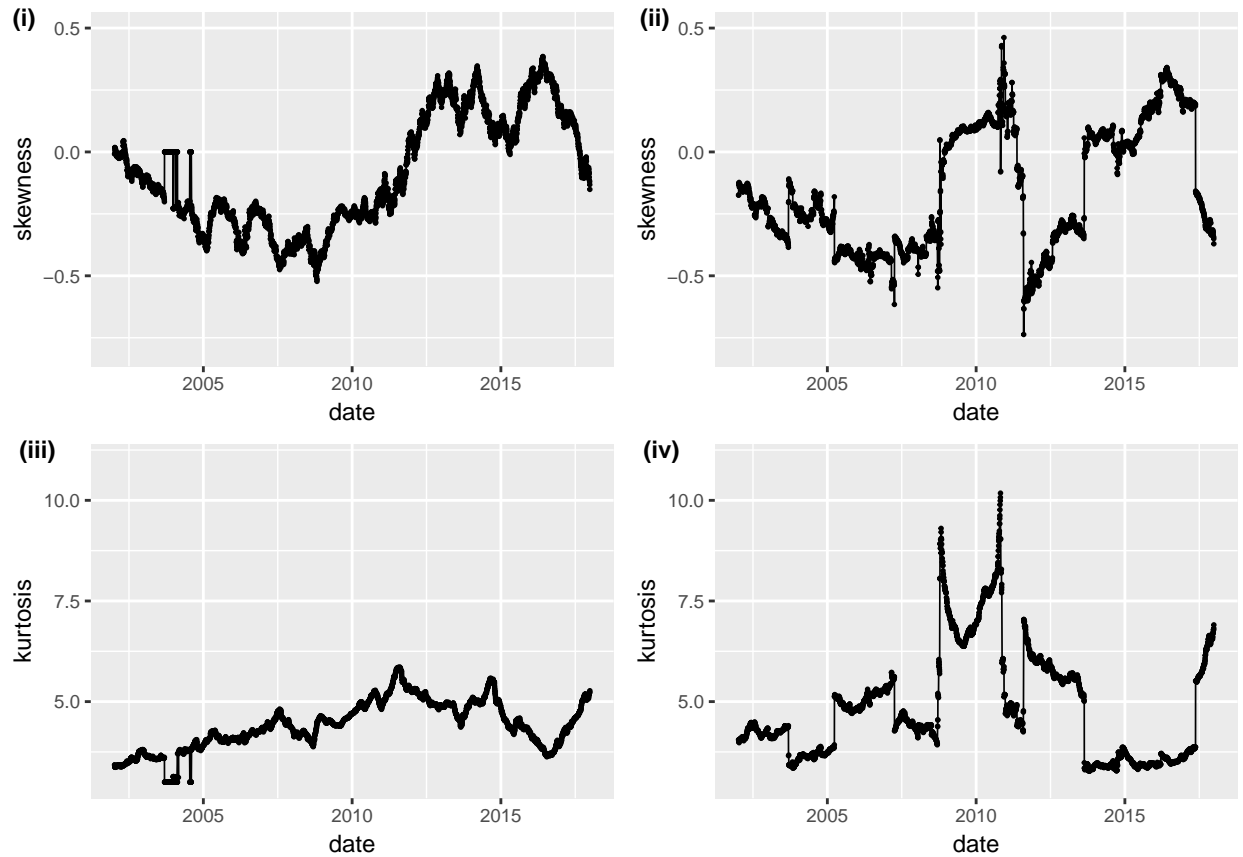


Figure 7: O gráfico mostra, na primeira coluna, os estimadores de máxima verossimilhança de assimetria e curtose em janela móvel de 504 dias úteis para a série de retornos padronizados do IBOVESPA. Na segunda coluna, temos os estimadores amostrais. Observa-se claramente a mudança no comportamento dos estimadores. Os estimadores de máxima-verossimilhança são mais estáveis, principalmente a curtose.

entretanto, com um caráter mais errático, tornando difícil caracterizar a mudança de regime. Na mesma figura também é possível observar a curtose, que apresenta um comportamento difícil de caracterizar nos estimadores amostrais, enquanto nos estimadores de MV observa-se um crescimento suave entre 2005 e 2015.

A expansão de Gram-Charlier também é aplicada a formulações fechadas para o apreçamento de opções, e desta forma, assimetria e curtose são parâmetros do modelo, e portanto, a robustez na estimação é fator determinante na aplicação do modelo.

A estabilidade dos parâmetros estimados via máxima verossimilhança e os resultados coerentes quando se aplica estes parâmetros a expansão de Gram-Charlier confirmam que estes estimadores são mais indicados para medir assimetria e curtose do que os estimadores amostrais. Principalmente quando aplicados ativos financeiros, como retorno de ações. A utilização da expansão de Gram-Charlier é conveniente por ser uma extensão da distribuição normal e por prover parâmetros claros para avaliar a simetria da distribuição dos dados, assim como a presença de eventos extremos, distantes da média.

## Referências

- [1] S. Blinnikov and R. Moessner, *Astronomy and Astrophysics Supplement Series* **130**, 193 (1998).