Modelos GARCH

Wilson Freitas

Introdução

O objetivo é apresentar os modelos da família GARCH demonstrando a formulação básica e chegando até a estimação de parâmetros. Na prática estes modelos tem origem no modelo ARCH proposto por [1], onde GARCH é uma evolução proposta por [2]. Neste documento todos estes modelos serão chamados de GARCH por simplificação.

Um ponto sobre estes modelos é que eles são citados como modelos de volatilidade, no entanto, a volatilidade de uma série temporal não é observada. Na prática os modelos GARCH são aplicados a séries retornos financeiros (tipicamente estacionárias de primeira ordem) onde a volatilidade da série tem um componente autoregressivo e daí é que vem a referência a modelagem de volatilidade para estes modelos. Dessa forma, ao longo do texto os modelos serão aplicados a séries r_t que tipicamente são séries de retorno.

Modelo ARCH

O modelo ARCH segue

$$r_t = \sqrt{h_t} e_t$$

e

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i r_{t-i}^2$$

onde h_t é a variância de r_t e e_t são os incrementos aleatórios com

- $\mathrm{E}[e_t] = 0$
- $\mathrm{E}[e_t^2] = 1$
- $\mathrm{E}[e_s e_t] = 0$ para qualquer $s \neq t$

que como veremos podem assumir diferentes distribuições. A variância em h_t depende de retornos em $t-1, t-2, t-3, ...$, por isso este modelo é dito autoregressivo na variância. Esta é a definição de um modelo ARCH de ordem p que considera p termos autoregressivos de r_t na variância, de forma simplificada denomina-se ARCH(p).

Nota: não está sendo considerada a forma mais geral do modelo ARCH(p) em que se tem ainda um termo de média do processo.

Esperanças incondicionais

Dada a definição de ARCH temos as esperanças incondicionais

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\, r_t &= \mathrm{E}\, \sqrt{h_t} e_t \\
&= \mathrm{E}\, \sqrt{h_t}\, \mathrm{E}\, e_t \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\, r_t^2 &= \mathrm{E}\, h_t e_t^2 \\
&= \mathrm{E}\, h_t \mathrm{E}\, e_t^2 \\
&= \mathrm{E}\, h_t \\
&= \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathrm{E}\, r_{t-i}^2
\end{aligned}$$

Com $\mathrm{E}\, r_t = 0$ podemos escrever

$$\mathrm{Var}\, r_t = \mathrm{E}\, r_t^2$$

Assim o resultado acima pode ser escrito como

$$\mathrm{Var}\, r_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathrm{Var}\, r_{t-i}$$

e como r_t é um processo estacionário $\mathrm{Var}\, r_t = \mathrm{Var}\, r_s$ para qualquer s. Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\, r_t &= \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathrm{Var}\, r_t \\
&= \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i}
\end{aligned}$$

É importante notar que para chegar a estes resultados estamos assumindo que

- $\mathrm{E}[\sqrt{h_t} e_t] = \mathrm{E}[\sqrt{h_t}]\mathrm{E}[e_t]$ e
- $\mathrm{E}[h_t e_t^2] = \mathrm{E}[h_t]\mathrm{E}[e_t^2]$

ou seja, $\sqrt{h_t}$ é independente de e_t e h_t é independente de e_t^2. Talvez devesse desenvolver melhor este argumento.

Esperanças condicionais

Se considerarmos as esperanças condicionadas à informação até o instante $t-1$ temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{t-1}[r_t] &= \mathrm{E}[r_t | I_{t-1}] \\
&= \mathrm{E}[\sqrt{h_t} e_t | I_{t-1}] \\
&= \mathrm{E}[\sqrt{h_t} | I_{t-1}]\, \mathrm{E}[e_t | I_{t-1}] \\
&= \sqrt{h_t}\, \mathrm{E}[e_t | I_{t-1}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_{t-1}[r_t^2] &= \mathrm{E}[r_t^2|I_{t-1}] \\
&= \mathrm{E}[h_t e_t^2|I_{t-1}] \\
&= \mathrm{E}[h_t|I_{t-1}]\,\mathrm{E}[e_t^2|I_{t-1}] \\
&= h_t|I_{t-1}
\end{aligned}
$$

Note que $h_t|I_{t-1}$ não tem componente aleatória, é dado pelas realizações passadas de r_t, ou seja, é um escalar.

Escrevendo ARCH com um AR

Nas seções anteriores demonstrou-se que $\mathrm{E}_{t-1}[r_t^2] = h_t|I_{t-1}$. Usando este resultado define-se a variável u_t como:

$$
\begin{aligned}
u_t &= r_t^2 - \mathrm{E}_{t-1}[r_t^2] \\
&= r_t^2 - h_t
\end{aligned}
$$

onde u_t é o erro na esperança condicional. Note que na equação acima foi colocado $h_t|I_t \equiv h_t$ para não carregar a notação e que u_t tem esperança condicional zero $\mathrm{E}_{t-1}\,u_t = 0$.

Reescrevendo a equação de u_t como

$$
\begin{aligned}
r_t^2 &= h_t + u_t \\
&= \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i r_{t-1}^2 + u_t
\end{aligned}
$$

obtem-se uma equação de r_t^2 como um processo AR(p).

Modelo GARCH

O GARCH é uma estensão do ARCH proposta por [2], onde uma componente autoregressiva da variância é introduzida na equação da variância. Dessa forma, a variância h_t passa a ter termos com retornos e variância passados.

$$
r_t = \mu_t + \sqrt{h_t} e_t
$$

e

$$
h_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i h_{t-i}
$$

Esperança incondicional

$$\mathrm{E}\, r_t = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\, r_t^2 &= \mathrm{E}\, h_t \\
&= \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathrm{E}\, r_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \mathrm{E}\, h_{t-i} \\
&= \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathrm{E}\, r_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \mathrm{E}\, r_{t-i}^2 \\
&= \omega + \mathrm{E}\, r_t^2 \left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \right) \\
&= \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i - \sum_{i=1}^{q} \beta_i} \\
&\equiv \mathrm{Var}\, r_t
\end{aligned}$$

Esta formulação é uma generalização porque permite que para $\beta_i = 0$ se retorne a formulação ARCH(p).

Da mesma forma que um modelo ARMA(1,1) pode ser escrito como um modelo AR(∞), um modelo GARCH(1,1) pode ser escrito como um modelo ARCH(∞),

$$\begin{aligned}
h_t &= \omega + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \\
&= \omega + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 (\omega + \alpha_1 r_{t-2}^2 + \beta_1 h_{t-2}) \\
&= \omega(1 + \beta_1) + \alpha_1 (r_{t-1}^2 + \beta_1 r_{t-2}^2) + \beta_1^2 h_{t-2} \\
&= \omega(1 + \beta_1 + \beta_1^2) + \alpha_1 (r_{t-1}^2 + \beta_1 r_{t-2}^2 + \beta_1^2 r_{t-2}^2) + \beta_1^3 h_{t-3} \\
&\vdots \\
&= \frac{\omega}{1 - \beta_1} + \alpha_1 \sum_{i=0}^{\infty} r_{t-1-i}^2 \beta_1^i
\end{aligned}$$

Assim, um modelo GARCH de baixa ordem deve ter propriedades similares a modelos ARCH de alta ordem, com isso evitando os problemas inerentes a estimação de parâmetros sujeitos a restrições de não-negatividade.

Alguns trabalhos sugerem a utilização de um decaimento linear para os coeficientes do modelo ARCH, de forma que os únicos parâmetros sejam a ordem p do modelo e a somatória dos coeficientes. Mesmo assim o modelo GARCH é uma solução mais parsimoniosa e natural ao modelo ARCH uma vez que a estimação de parâmetros ainda é mais simples e produz resultados melhores.

Esperança condicional

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{t-1}\, r_t &= 0 \\
\mathrm{Var}_{t-1}\, r_t &= h_t \\
&= \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i} \\
&= \omega + \alpha(L) r_t^2 + \beta(L) h_t
\end{aligned}$$

Escrevendo GARCH com um ARMA

Seja

$$\begin{aligned}
u_t &= r_t^2 - \mathrm{E}_{t-1}\, r_t^2 \\
&= r_t^2 - h_t \\
&= r_t^2 - \omega - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i r_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^{q} \beta_i h_{t-i} \\
&= r_t^2 - \omega - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i r_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^{q} \beta_i (r_{t-i}^2 - u_{t-i}) \\
&= r_t^2 - \omega - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i r_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^{q} \beta_i r_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i u_{t-i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i r_{t-i}^2 + u_t - \sum_{i=1}^{q} \beta_i u_{t-i} \\
&= \omega + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i)\, r_{t-i}^2 + u_t - \sum_{i=1}^{q} \beta_i u_{t-i}
\end{aligned}$$

onde tem-se um ARMA(p,q) e $p \equiv \max(p, q)$.

Modelo EWMA ou IGARCH(1,1)

Considere um processo GARCH(1,1) onde

$$h_t = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}$$

Foi visto anteriormente que a variância incondicional de r_t^2 nesse processo é dada por

$$\mathrm{Var}\, r_t^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$$

onde surge como restrição a equação: $1 - \alpha - \beta \geq 0$. Ao considerar o limite dessa restrição chega-se a $\alpha + \beta = 1$ onde pode-se reduzir a uma única variável assumindo $\alpha = 1 - \lambda$ e $\beta = \lambda$. Neste contexto a variância incondicional de r_t^2 diverge e o processo passa a ser não estacionário.

A equação da variância condicional

$$h_t = \omega + (1 - \lambda) r_{t-1}^2 + \lambda h_{t-1}$$

é denominada IGARCH(1,1) ou EWMA (Exponentially Weighted Moving Average)

Esperança incondicional

$$\mathrm{E}\, r_t = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\, r_t^2 &= \mathrm{E}\, h_t \\
&= \omega + (1-\lambda)\mathrm{E}\, r_{t-1}^2 + \lambda \mathrm{E}\, h_{t-1} \\
&= \omega + (1-\lambda)\mathrm{E}\, r_{t-1}^2 + \lambda \mathrm{E}\, r_{t-1}^2 \\
&= \omega + \mathrm{E}\, r_{t-1}^2
\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}\, r_t^2 - \mathrm{E}\, r_{t-1}^2 = \omega$$

Dado que r_t^2 é não estacionário essa análise não me diz muito nesse momento.

Esperança condicional

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{t-1}[r_t] &= \mathrm{E}[r_t|I_{t-1}] \\
&= \mathrm{E}[\sqrt{h_t} e_t|I_{t-1}] \\
&= \mathrm{E}[\sqrt{h_t}|I_{t-1}]\, \mathrm{E}[e_t|I_{t-1}] \\
&= \sqrt{h_t}\, \mathrm{E}[e_t|I_{t-1}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{t-1}[r_t^2] &= h_t|I_{t-1} \\
&= \omega + (1-\lambda)r_{t-1}^2 + \lambda h_{t-1}|I_{t-1}
\end{aligned}$$

Análise com o erro da esperança condicional

$$\begin{aligned}
u_t &= r_t^2 - \mathrm{E}_{t-1}\, r_t^2 \\
&= r_t^2 - h_t \\
&= r_t^2 - \omega - (1-\lambda)r_{t-1}^2 - \lambda h_{t-1} \\
&= r_t^2 - \omega - (1-\lambda)r_{t-1}^2 - \lambda(r_{t-1}^2 - u_{t-1}) \\
&= r_t^2 - r_{t-1}^2 - \omega - \lambda u_{t-1}
\end{aligned}$$

$$r_t^2 - r_{t-1}^2 = \omega + u_t - \lambda u_{t-1}$$

Posto dessa forma, o processo de r_t^2 não é estacionário, como já mencionado anteriormente. r_t^2 é um processo integrado de orderm 1 pois a sua primeira diferença gera um processo estacionário. O processo de r_t^2 tem características de um *random walk*. Assumindo r_0^2 constante o processo pode ser reescrito como:

$$r_t^2 = r_0^2 + \sum_{i=1}^{t}(u_i - \lambda u_{i-1})$$

assim

$$\mathrm{E}\, r_t^2 = r_t^2$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var} r_t^2 &= \sum_{i=1}^{t} \operatorname{Var}(u_i - \lambda u_{i-1}) \\
&= (1+\lambda^2) t \operatorname{Var} u_i
\end{aligned}
$$

que é claramente dependente de t e portanto o processo r_t^2 é não estacionário.

Processos Integrados

x_t é um processo integrado de ordem 1, notado por $x_t \sim I(1)$, se tem a forma

$$x_t = x_{t-1} + u_t$$

onde u_t é uma série temporal estacionária. Claramente tem-se que:

$$\Delta x_t = u_t$$

é estacionário (seguindo definição de u_t).

Acumulando processo x_t desde a origem x_0 tem-se

$$y_t = y_0 + \sum_{i=1}^{t} u_i$$

e o somatório de u_i representa a tendência estocástica do processo.

Se $u_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ então x_t é chamado de *random walk* (RW). Se x_t é RW e assumindo x_0 constante tem-se:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{E} x_t &= x_0 \\
\operatorname{Var} x_t &= \sigma^2 t \\
\operatorname{Cov}(x_t, x_{t-s}) &= (t-s)\sigma^2 \\
\operatorname{Cor}(x_t, x_{t-s}) &= \sqrt{\frac{t-s}{t}}
\end{aligned}
$$

Referências

[1] R. F. Engle, Econometrica: Journal of the Econometric Society (1982).

[2] T. Bollerslev, Journal of Econometrics **31**, 307 (1986).