UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRADE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E APLICADA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

ANDRÉA MARIA FERREIRA MOURA

A REJEIÇÃO INGLESA AOS NÚMEROS NEGATIVOS: UMA ANÁLISE DAS OBRAS DOS PRINCIPAIS OPOSITORES DE 1750-1830

NATAL

2015

ANDRÉA MARIA FERREIRA MOURA

A REJEIÇÃO INGLESA AOS NÚMEROS NEGATIVOS: UMA ANÁLISE DAS OBRAS DOS PRINCIPAIS OPOSITORES DE 1750-1830

Tese a ser apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como um dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Educação.

Orientador: Prof. Dr. John Andrew Fossa

NATAL

2015

Divisão de Serviços Técnicos.
Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / Biblioteca Setorial do NEPSA / CCSA

Moura, Andréa Maria Ferreira.
A rejeição inglesa aos números negativos: uma análise das obras dos principais opositores de 1750 - 1830 / Andréa Maria Ferreira Moura. – Natal, RN, 2015.
144 f.

Orientador: Prof. Dr. John Andrew Fossa.

Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Educação. Programa de Pós-graduação em Educação.

1. Educação matemática - Tese. 2. Números negativos – Rejeição inglesa – Tese. 3. Matemática – História – Tese. I. Fossa, John Andrew. II. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. III. Título.

RN/UF/BS CDU 37:51(091)

ANDRÉA MARIA FERREIRA MOURA

A REJEIÇÃO INGLESA AOS NÚMEROS NEGATIVOS: UMA ANÁLISE DAS OBRAS DOS PRINCIPAIS OPOSITORES DE 1750-1830

Aprovada em 27/ 03 / 2015.

Banca examinadora

Prof. Dr. John Andrew Fossa / UFRN (Orientador)

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá / UEPA (Examinador Externo)

Prof. Dr. Miguel Chaquiam / UEPA (Examinador Externo)

Prof. Dr. Iran Mendes Abreu/ UFRN (Examinado Interno)

Profª. Drª. Giselle Costa de Sousa/ UFRN (Examinadora Interna)

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, que sempre tiveram como meta primeira para a família deixar como herança o maior bem que eles poderiam, uma boa educação, fosse esta formal ou não.

AGRADECIMENTOS

Para a realização desta pesquisa tive o apoio e a colaboração direta e indireta de algumas pessoas, as quais desejo prestar-lhe os meus sinceros agradecimentos.

Aos meus pais, José Orismilde de Moura e Eva Maria de Fátima Moura, que mesmo à distância viabilizaram, material e espiritualmente, para que esse sonho se concretizasse.

Ao meu professor orientador Dr. John Andrew Fossa, pela paciência, sabedoria, competência e humanidade com que guiou a construção desse trabalho.

Ao meu companheiro, André Teixeira Gurgel, pela positividade desde a seleção, e por toda força, compreensão, paciência, disponibilidade e companheirismo no decorrer do percurso.

A uma amiga especial, Maria Aparecida da Silva Soares, pela generosidade, atenção, apoio, e em especial pela sua hospitalidade, já que sua casa virou uma extensão da minha e em decorrência disto acabei ganhando de presente o aconchego de toda a sua família.

Ao professor Iran Abreu Mendes, pelo apoio, orientações e ensinamentos, elementos decisivos para que obtivesse êxito no processo seletivo.

A todos os professores e colegas do curso pelo conhecimento e experiência compartilhada.

A todos os meus familiares, em especial meus quatro irmãos, por cada gesto de apoio e força.

Aos colegas e amigos da UFERSA-Universidade Federal Rural do Semiárido, pelo espírito de grupo, tornando viável o afastamento de minhas funções, para dedicar-me exclusivamente a este sonho.

Não há ramo da matemática, por abstrato que seja que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.

(Lobachevsky)

R E S U M O

A rica história em torno da legitimação dos negativos como números é o fio condutor desta pesquisa. Nessa história é importante ressaltarmos que mesmo os negativos tendo seu nascedouro na Antiguidade, sua aceitação como números só ocorreu plenamente no século XIX. Neste embate, que durou quase 2 mil anos, a matemática inglesa, em especial a desenvolvida na segunda metade do século XVIII e início do século XIX têm papel de destaque como um dos cenário, onde a rejeição aos negativos ocorreu de forma mais acirrada. Diante do exposto, o objetivo geral da presente pesquisa é compreender a dura rejeição inglesa aos negativos, ocorrida entre 1750 e 1830. Para tanto, realizamos a análise das obras *A Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra*, publicada em 1758, *Tracts on the Resolution of Affected Algebräick Equations*, publicada em 1800, de Francis Maseres, e *Principles of Algebra*, publicada em 1796, de William Frend, pois essas obras foram consideradas por nós como as bases teóricas aos que resistiam a aceitar a existência dos negativos na Inglaterra do fim do século XVIII. Além delas, consideramos relevante estudar também a primeira obra inglesa sobre Teoria dos Números, *An Elementary Investigation of the Theory of Numbers*, publicada em 1811, que é de autoria de Peter Barlow, um dos últimos a assumir a postura rejeitadora na Inglaterra. Nesta tarefa de compreender rejeição inglesa aos negativos traçamos como objetivos específicos: identificar a fundamentação teórica da corrente rejeitadora, analisar as principais implicações que a postura rejeitadora acarretava na matemática que estava em desenvolvimento no fim do século XVIII e estudar como a teoria rejeitadora interferiu na produção da primeira obra inglesa sobre Teoria dos Números. Como resultado das análises feitas nas obras de Maseres e Frend, concluímos que, a rejeição aos negativos se alicerçava na impossibilidade de uma definição clara e rigorosa para esses números nos moldes da concepção de matemática vigente. Observamos também que a postura rejeitadora dos matemáticos ingleses, por um lado alertava para a necessidade de uma fundamentação matemática mais coerente com as teorias em desenvolvimento, mas, por outro lado, as ideias rejeitadoras acarretavam limitações e restrições na matemática em desenvolvimento no fim do século XVIII. Dentre essas limitações destacamos as limitações impostas às operações algébricas e a impossibilidade de um número negativo ser raiz de uma equação. Quanto à obra de Barlow, a investigação evidenciou que a postura rejeitadora do autor acarretava a necessidade da adoção de estratégias para adequar a teoria desenvolvida por ele com as limitações impostas pelo seu posicionamento de rejeitador dos negativos. Com o intuito de enriquecer o conhecimento sobre o tema, apresentamos no início deste trabalho um apanhado histórico, focado no uso, aceitação, rejeição e concepção dos números negativos desde a Antiguidade até o século XIX, quando finalmente toda a polêmica foi resolvida, com a ampliação do conceito de número, a axiomatização da Álgebra e a adoção da atual concepção de matemática como ciência formal.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática, Números Negativos. Inglaterra.

A B S T R A C T

The main purpose of this research is to review the rich history around the legitimization of negative numbers. It is important to highlight that although negatives were born in Ancient times, their full acceptance as numbers only happened in the XIX century. During this struggle, that lasted almost 2 thousand years, English mathematics, especially the one developed in the second half of the XVIII century and the early XIX century, played a key role as a scenario in which the rejection to negative numbers was fiercer. Therefore, the general purpose of this research is to understand the strong English rejection to negatives that occurred between 1750 and 1830. Consequently, we analyzed the works *A Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra*, published in 1758 and *Tracts on the Resolution of Affected Algebräick Equations*, published in 1800 by Francis Maseres, and *Principles of Algebra*, published in 1796 by William Frend, as we consider these works as the theoretical basis for those who refused to accept the existence of negative numbers in England by the end of the XVIII century. Besides these two works, we also consider relevant to study the first English work on the Theory of Numbers, *An Elementary Investigation of the Theory of Numbers*, published in 1811 by Peter Barlow, one of the last ones to adopt a position against negatives in England. Seeking to understand the English rejection to negatives, we set the following specific goals: to identify the theoretical basis of the rejecting stream, analyze the main implications that this rejection posture provoked in the mathematics under development by the end of the XVIII century and study how the rejection theory affected the production of the first English work on the Theory of Numbers. As a result of the analysis developed on Maseres' and Frend's works, we concluded that the rejection to negatives was based on the impossibility to clearly and strictly define these numbers within the mathematical concepts that existed in those days. We also noticed that the rejection defended by English mathematicians, on the one hand alerted on the need for a more coherent mathematical substantiation with regards to the theories that were being developed and on the other hand, rejection ideas provoked limitations and restrictions in the mathematics under development by the end of the XVIII century. Among these limitations we highlight those imposed to algebraic operations and the impossibility of having a negative number as an equation root. As for Barlow's work, research showed that the author's position against negatives implied the need to adopt strategies to adapt his theory to the limitations imposed by his rejection to negatives. Seeking to improve our knowledge on this issue, we introduce a historical review focused on the use, acceptance, rejection and conception of negative numbers since the early days until the XIX century, when finally the whole controversy was solved with the widening of the concept of number, the axiomatization of algebra and the adoption of modern mathematics as a formal science.

PALAVRAS-CHAVE: Education. Mathematics. Negative Numbers. England

R E S U M EN

La rica historia acerca de la legitimación de los números negativos es el hilo conductor de esta investigación. En esta historia, es importante resaltar que aún considerando que los negativos nacieron en la Antigüedad, su aceptación como números solo ocurrió plenamente en el siglo XIX. En esta lucha, que duro casi dos mil años, la matemática inglesa, en especial la desarrollada en la segunda mitad del siglo XVIII y principios del siglo XIX, juega un papel preponderante como uno de los escenarios en los cuales el rechazo a los negativos se dio en forma más vehemente. En virtud de lo expuesto, el objetivo general de este estudio es comprender el duro rechazo inglés a los números negativos, que tuvo lugar entre 1750 y 1830. Para ello, realizamos un análisis de las obras *A Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra*, publicada en 1758 y *Tracts on the Resolution of Affected Algebräick Equations*, publicada en 1800 por Francis Maseres, y *Principles of Algebra*, publicada en 1796, por William Frend, ya que consideramos que esas obras fueron la base teórica de aquellos que se resistían a aceptar la existencia de los negativos en la Inglaterra de fines del siglo XVIII. Además, consideramos relevante estudiar también la primera obra inglesa sobre la Teoría de los Números, de autoría de Peter Barlow, uno de los últimos en asumir la postura contraria a los números negativos en Inglaterra. En la tarea de comprender el rechazo inglés a los negativos, nos propusimos los siguientes objetivos específicos: identificar la fundamentación teórica de la corriente opositora, analizar las principales consecuencias que la postura de rechazo implicaba en la matemática en desarrollo a fines del siglo XVIII y estudiar como esta teoría afectó la producción de la primera obra inglesa sobre la Teoría de los Números. Como resultado de los análisis de las obras de Maseres y Frend, concluimos que el rechazo a los negativos se basaba en la imposibilidad de una definición clara y rigurosa para esos números dentro de los moldes de la concepción de la matemática vigente. Observamos también que la postura de rechazo de los matemáticos ingleses alertaba por un lado sobre la necesidad de una fundamentación matemática más coherente con las teorías en desarrollo pero por otro lado, las ideas de rechazo provocaban limitaciones y restricciones a la matemática que se desarrollaba a fines del siglo XVIII. Entre esas limitaciones vale destacar aquellas impuestas a las operaciones algebraicas y la imposibilidad de que un número negativo fuera la raíz de una ecuación. En cuanto a la obra de Barlow, la investigación evidenció que la postura de rechazo del autor implicaba la necesidad de adoptar estrategias para adecuar su teoría a las limitaciones que su posición contraria a los negativos imponía. Con el objeto de enriquecer el conocimiento sobre este tema, presentamos en el inicio de nuestro trabajo una reseña histórica enfocada en el uso, aceptación, rechazo y concepción de los números negativos desde la Antigüedad hasta el siglo XIX, cuando finalmente toda la polémica fue superada con la ampliación del concepto de número, la axiomatización del Álgebra y la adopción del actual concepto de matemática como ciencia formal.

PALAVRAS CLAVE: Educación. Matemática. Números Negativos. Inglaterra.

S U M Á R I O

INTRODUÇÃO

É consensual que o conceito de número tem um papel de primazia dentro da matemática. Porém, se pedirmos para definir esse importante conceito, ou seja, se perguntarmos: o que é número?, a maioria das pessoas (sejam estas letradas ou não) responderia que é o instrumento utilizado para contar ou medir. Nessa resposta é facilmente perceptível que não cabem os números negativos, tampouco os números complexos. Assim, surge uma nova pergunta: esses números não são números? Quanto a esta segunda pergunta, atualmente não resta a menor dúvida quanto à existência e à legitimidade tanto dos negativos como dos complexos. Mas, nem sempre foi assim. A sua aceitação como números só ocorreu plenamente após uma longa batalha, que ficou resolvida por completo apenas no século XIX. O principal empecilho à aceitabilidade desses números era justamente a concepção de matemática que a resposta dada à primeira pergunta transmite, ou seja, a matemática vista como uma ciência que lida com quantidades e medidas, consequentemente, intimamente ligada ao mundo físico.

Diante do exposto, é notório que a resposta à pergunta: o que número?, carrega consigo um questionamento mais amplo sobre o que é matemática ou, mais didaticamente, qual a atual concepção de matemática? Esta intrínseca relação entre a concepção de número e a de matemática é também defendida por Fossa (2010, p. 56) ao afirmar que "um dos maiores entraves à compreensão clara do que seja um número é a falta de uma clara compreensão do que seja a própria matemática". Assim sendo, nos empenharemos nas próximas páginas a responder a esta última pergunta: qual a atual concepção de matemática?, pois ao construir essa resposta, compreenderemos também os impedimentos presentes em torno da legitimação dos números negativos, principal objeto de estudo desta pesquisa.

Segundo Fossa (2004, p. 3), não devemos, como erroneamente costuma-se fazer, definir matemática pelos conteúdos que ela propõe. Para esse autor, a melhor maneira de defini-la é pela sua metodologia de verificação. Na matemática, a metodologia de verificação é bastante clara: trata-se do método dedutivo, ou, mais precisamente, do método axiomático. Assim sendo, Fossa (2004, p.3) define "a *matemática* como sendo as áreas de investigação que validam as suas proposições através do método axiomático.” O referido autor ressalta ainda que anteriormente ao método axiomático existiam, como ainda existem hoje, diversas atividades práticas centradas nos números e nas suas operações. Ele denomina essas atividades de atividades proto-matemáticas e afirma que foi “possível vê-las como uma única disciplina – a matemática – somente quando várias dessas práticas foram transformadas pela adoção do método axiomático” (FOSSA, 2004, p. 3). Portanto, para esse autor, a adoção do método axiomático é o marco para o nascimento da matemática.

Dando continuidade a essa linha de raciocínio, encontramos em outro trabalho deste mesmo autor, publicado em 2001, a seguinte explanação sobre o método axiomático. Para Fossa (2001) este método,

> Baseia-se na seguinte reflexão: é impossível demonstrar toda proposição verdadeira porque toda demonstração apela a outras proposições (premissas) que encerram a evidência para a proposição a ser demonstrada. Portanto, para demonstrar uma proposição precisamos mostrar que todas as suas premissas são verdadeiras que, por sua vez, acarretam novas premissas, e assim por diante. Para evitar, de um lado, um círculo vicioso e, por outro lado, um regresso ao infinito é necessário pressupor algumas proposições sem demonstrá-las. Chama-se estas proposições de axiomas ou postulados e, segundo Aristóteles, elas devem ser tão evidentes que todo mundo consentiria em aceitá-las. [...] O método axiomático então consiste de pressupor certas palavras não definidas em termos das quais todas as definições são feitas e de pressupor certas proposições não demonstradas que, juntas com padrões de raciocínio válido, nos permite deduzir os vários teoremas. (FOSSA, 2001, p. 111.)

Diante do exposto, fica claro que o conceito aristotélico de axiomatização embasa-se na ideia de que os axiomas são proposições intuitivamente verdadeiras. Assim sendo, a geometria, por lidar diretamente com o espaço físico, foi a área da matemática que melhor se enquadrou no modelo axiomático e, portanto, foi a primeira a ser axiomatizada.

Diferentemente da geometria, que foi axiomatizada praticamente junto com a criação do método dedutivo, a álgebra só foi axiomatizada tardiamente, na primeira metade do século XIX. Veremos mais adiante que a axiomatização, tanto da álgebra como da aritmética, acontece junto com a ampliação do conceito de número para além da representação de quantidades e medidas. Diante desta conjuntura a geometria, por ser a única área axiomatizada até o início do século XIX, assume o papel de verificadora da verdade e do rigor matemático. Sobre essa supremacia geométrica, encontramos em Fossa (2001) o seguinte relato:

> Da época clássica da Grécia até aproximadamente o início do século XVII, a matemática ocidental era principalmente a geometria. E era principalmente a geometria não somente porque o maior esforço dos matemáticos deste longo período era dedicado à resolução de problemas geométricos, mas também porque o desenvolvimento dos outros ramos da matemática – especialmente a aritmética e álgebra – foi condicionado pela geometria. Demonstrações de proposições eram sempre feitas demonstrando as proposições geométricas equivalentes e a interpretação dos conceitos matemáticos era sempre feita em termos geométricos. (FOSSA, 2001, p. 107)

A ausência de um fundamento axiomático para a álgebra, fato que acarretava como consequência o condicionamento desta área à geometria, configurou-se no principal empecilho à aceitação dos números negativos, pois a necessidade de interpretações geométricas para demonstrações e conceitos algébricos fazia com que os negativos, apesar de necessários no contexto algébrico, não fossem legitimados como elementos matemáticos, uma vez que era impossível interpretá-los geometricamente. Assim sendo, os negativos foram rejeitados, pois não se enquadravam no modelo de matemática que durou até o início século XIX.

No que diz respeito especificamente a historia dos números negativos, verifica-se que, no decorrer dos séculos, como era de se esperar, houve um aumento crescente dos indícios favoráveis à existência desses números provenientes tanto da matemática prática como também da formal. Da matemática prática podemos destacar, por exemplo, a nova estrutura mercantil do fim do século XIII, que acarretou uma maior complexidade do contexto contábil e, consequentemente, possibilitou o aparecimento de uma estrutura de crédito que dava significado aos negativos. Na matemática formal, destacamos a publicação de *Ars Magna,* de Girolamo Cardano (1501-1576), que apresenta ao mundo as regras de como encontrar as raízes de equações do terceiro e quarto grau, e o nascimento da álgebra simbólica, com os trabalhos de François Viète (1540-1603). Entre outras coisas, esses dois acontecimentos enfraqueceram a necessidade de uma interpretação geométrica para os resultados matemáticos e contribuíram para uma futura desvinculação da álgebra à geometria, portanto, abriram caminho para a aceitação dos números negativos como elementos matemáticos.

Mesmo com o crescimento do uso dos negativos, a polêmica em torno da existência desses números continuava, visto que o principal problema da sua legitimação, a ausência de um sistema axiomático, no qual sua existência fosse justificada, perdurou até o século XIX, quando vários acontecimentos levaram os matemáticos a desenvolverem uma nova concepção da sua disciplina. Nagel (1935) destaca, entre esses acontecimentos, a relevância da discussão em torno da aceitabilidade dos números negativos e imaginários. Fossa (2007b), interpretando Nagel (1935), afirma que este

> [...] destaca o surgimento dos números negativos e imaginários – os assim chamados 'números impossíveis' - como o principal responsável pela mudança na definição de Matemática. Com o aparecimento destes números houve a necessidade, segundo o referido autor [Nagel], de conceber a Matemática num sentindo mais amplo ao que se entendia anteriormente; nesse sentido essa ciência não poderia ser vista unicamente como ciência dos números e das magnitudes (definição ainda encontrada em certos livros). Essa responsabilidade recai sobre os números imaginários, pois para que eles fossem verdadeiramente estabelecidos fez-se necessária uma revisão da noção tradicional concebida por Matemática. (FOSSA, 2007b, p. 62)

Concordamos com Nagel (1935) que o debate a respeito da existência dos números impossíveis tem uma grande parcela de contribuição na mudança de postura da matemática ocorrida no século XIX. Mas, estes, embora personagens principais dessa história, não são os únicos responsáveis, pois se assim o fossem, essa mudança já teria acontecido muito mais cedo, haja vista que esses números, mesmo escanteados, estão na matemática desde a Antiguidade, com o início dos estudos sobre resoluções de equação.

Para finalmente responder como a matemática é concebida atualmente e entender o que aconteceu no século XIX que mudou os fundamentos da matemática, partiremos do pressuposto de que a produção científica tem uma relação intrínseca com o momento histórico, do qual ela faz parte. Apoiados nessa ideia, torna-se fácil compreender a caracterização comumente feita do século XIX como um período revolucionário na história da humanidade, pois nesse século uma nova visão de mundo e de vida surgiu decorrente de um combinado de acontecimentos revolucionários nos campos político (Revolução Francesa, fim do sec. XVIII), econômico (Revolução Industrial), social (a eclosão de novas classes sociais) e científico (maior valorização do conhecimento técnico). No que se refere especificamente à matemática, Boyer (1996) caracteriza esse século como sendo a Idade de Ouro da matemática, e para justificar essa caracterização ele cita a introdução, no repertório matemático dessa época, de conceitos como geometrias não-euclidianas, espaços n-dimensionais, álgebras não comutativas, processos infinitos e estruturas não quantitativas.

Entre os elementos desse novo repertório matemático descrito por Boyer (1996), elegemos o surgimento das geometrias não-euclidianas e o conjunto de descobertas que possibilitou ver a álgebra em termos de estruturas abstratas para juntar-se à discussão sobre a existência dos números negativos e imaginários, como principais responsáveis na mudança da concepção de matemática predominante desde os gregos, para uma visão da matemática como ciência formal.

No trecho que segue, Eves (2011) retrata as mudanças que a criação das geometrias não-euclidianas ocasionou na geometria e na matemática de forma geral. Para ele, o advento das geometrias não-euclidianas

> Despedaçou-se uma convicção secular e profundamente arraigada de que apenas uma geometria era possível e abriu-se caminho para a criação de muitos outros sistemas geométricos. Os postulados da geometria tornaram-se, para os matemáticos, meras hipóteses cuja veracidade ou falsidade físicas não lhes diziam respeito; o matemático pode tomar seus postulados para satisfazer seu gosto, desde que eles sejam consistentes entre si. As características de ‘autoevidência’ e ‘veracidade’ atribuídas aos postulados desde os tempos dos gregos deixaram de ser consideradas pelos matemáticos. (EVES, 2011, p. 544)

Esse autor enfatiza ainda que as geometrias não-euclidianas foram responsável pela libertação da geometria, mas, a nosso ver, essa libertação não se limita à geometria, mas sim, pode ser estendida à matemática como ciência, pois com as geometrias não-euclidianas nos livramos da necessidade de verdade, característica fundamental no modelo axiomático aristotélico, o que gera como consequência uma grande liberdade ao trabalho matemático.

Quanto à álgebra, no século XIX ela passa a ser uma área de pesquisa mais geral e mais coerente, pois deixa de ser tratada simplesmente como aritmética simbólica, como acontecia até então, e passa a ser vista como um campo de estudo puramente hipotético-dedutivo e formal. É claro que essa mudança passa pela incorporação dos números negativos e complexos, mas, para Eves (2011), a completa libertação da álgebra só veio com o desenvolvimento de álgebras que satisfazem leis estruturais diferentes daquelas obedecidas pela álgebra usual, por exemplo, as álgebras não comutativas. Entre os vários responsáveis por este feito Eves (2001) destaca William Hamilton (1805-1865), e seu trabalho sobre os quatérnios, pois para esse autor a “grande importância dos quatérnios na história da matemática reside no fato de que sua criação por Hamilton em 1843 libertou a álgebra de suas amarras com a aritmética dos números reais, abrindo assim as comportas da álgebra abstrata.” (EVES, 2011, p.555).

Muitos outros matemáticos poderiam unir-se ao nome de Hamilton como personagens importantes na construção da álgebra como campo puramente abstrato, mas entre estes não pode deixar de falar de George Boole (1815-1864). Ele, além de dar continuidade aos estudos sobre o tratamento científico dos princípios fundamentais da álgebra, dedicou-se também à lógica e costuma ser lembrado por ter livrado essa área do psicologismo que a dominava. Para Fossa (2004, p. 6) “[...] a partir de Boole, a matemática passa a ser vista como sendo completamente abstrata e de natureza formal, envolvendo questões de verdade e falsidade somente em suas aplicações”.

Portanto, dentro dessa nova concepção de matemática, os números continuam tendo um local de destaque, o que mudou foi a forma como atualmente eles são entendidos, não mais como representantes de coisas, mas como símbolos, sendo necessário apenas que as teorias derivadas deles tenham consistência. Essa ideia fica ainda mais clara nas palavras de Eves (2011), ao comentar sobre o livro *The Mathematical Analysis of Logic*, de autoria de Boole:

> Nesse trabalho Boole defendia que o caráter essencial da matemática reside em sua forma e não em seu conteúdo; a matemática não é (como alguns dicionários ainda hoje afirmam) simplesmente ‘a ciência das medidas e dos números’, porém, mais amplamente, qualquer estudo consistindo em símbolos juntamente com regras precisas para operar com esses símbolos, regras essas sujeitas apenas à exigência de consistência interna. (EVES, 2011, p. 557)

Por meio desse esboço, acreditamos ter clarificado os questionamentos em torno do que seja matemática e da relação intrínseca entre número e a forma como a concebemos. Finalizaremos esse debate citando as palavras de Assis Neto (1995, p. 3), pois resume de forma clara o discutido até então.

> Essa mudança no auto-entendimento da Matemática, que Ernst Cassirer caracterizou como a ‘passagem do pensamento substancial para o pensamento funcional’ (NEILS, 1981, p. 218), se entrelaça com o desenvolvimento histórico do conceito de número; as duas coisas são interdependentes, a história de uma é a história da outra (evidente que também com a história de outros conceitos matemáticos).

Feita essa breve discursão sobre a atual concepção de matemática, voltaremos à primeira de nossas perguntas: o que é número? A resposta a essa pergunta é ainda mais complexa que a trabalhada anteriormente, portanto, nos contentaremos com a resposta simplista de que, na concepção antiga de matemática, número significava quantidade que definia coisas que existiam, mas na concepção moderna, número é apenas mais um das entidades abstratas dos matemáticos. Não nos prolongaremos nessa questão, pois a sua complexidade faria com que perdêssemos o nosso foco principal. Para o momento, optamos por ficar com a seguinte reflexão de Fossa (2010, p. 15) sobre o assunto:

> Precisamos reconhecer que o conceito de número contém muitas camadas de nuanças, cada uma das quais podem ser usadas para articular as outras. Em vez de eleger uma delas como única correta maneira de delimitar o conceito de número, seria muito mais proveitoso contemplar a plenitude de possibilidades, pois não somente nos fornece uma compreensão mais profunda do referido conceito, mas também é mais consoante com as verdadeiras atitudes matemáticas.

Ao construir a resposta ao questionamento inicial do que seria número, ficou evidente o quanto a problemática em torno da legitimidade dos números negativos é um tema relevante para a matemática. Assim sendo, nos propomos a estudar a rica história dos números negativos tendo como objetivos:

- Identificar e compreender a fundamentação teórica da corrente rejeitadora dos números negativos, tendo como foco as obras dos matemáticos ingleses Francis Maseres (1731-1824) e William Frend (1757-1841), que se tornaram referências nesse assunto.

- Analisar as principais implicações que a postura rejeitadora acarretava na matemática que estava em desenvolvimento no fim do século XVIII e início do século XIX, momento em que finalmente os negativos foram plenamente aceitos.

- Estudar como a teoria rejeitadora interferiu na produção da primeira obra inglesa sobre Teoria dos Números, *An Elementary Investigation of the Theory of Numbers*, publicada em 1811 e escrita por Peter Barlow (1776- 1862), um dos últimos, entre os matemáticos ingleses, a assumir a postura de rejeitador dos negativos.

A escolha desses matemáticos como sujeitos principais de nossa pesquisa se justifica por a matemática inglesa ter sido o cenário no qual a rejeição aos negativos ocorreu de forma mais intensa, pelas ideias de Maseres e Frend serem consideradas as diretrizes para os seguidores da corrente rejeitadora dos negativos e, pelo fato de Barlow, mesmo assumindo a postura de rejeitador, ter escrito uma obra na qual a segunda parte é dedicada ao estudo dos métodos de resolução de equações, assunto que é considerado o berço do surgimento dos negativos. Assim, por meio do estudo e análise das obras desses matemáticos, em especial a de Barlow sobre Teoria dos Números, objetivamos compreender como os rejeitadores desenvolviam suas teorias algébricas diante da ausência dos negativos.

Para alcançar o pretendido, iniciamos conhecendo melhor a problemática em questão, ou seja, a dificuldade de aceitação dos números negativos e, para tanto, apresentamos a seguir um apanhado histórico sobre a concepção e uso dos números negativos, desde as civilizações antigas até a sua plena aceitação pela matemática formal, no século XIX.

Depois, centramos nossa atenção no cenário da matemática inglesa, estudando as obras dos dois principais rejeitadores ingleses do século XVIII. Com esse estudo, entendemos melhor as bases teóricas e as consequências da corrente rejeitadora.

Por fim, realizamos uma análise detalhada da segunda parte da obra de Barlow, sobre Teoria dos Números. Nessa análise, nos focamos no tratamento dado aos números negativos, especialmente nas estratégias apresentadas pelo autor para contornar a ausência desses números. Para complementar a análise realizada nesta obra e fortalecer as conclusões tiradas, no que se refere ao pensamento de Barlow em relação aos negativos, analisamos também o dicionário matemático desse autor, publicado em 1814.

No que diz respeito ao tipo de pesquisa desenvolvida, na literatura sobre metodologia de pesquisa, verificamos que existe muitos autores que usam os termos pesquisa documental e pesquisa bibliográfica como sinônimos, porém, optamos pela diferenciação feita por Oliveira (2007). Para essa autora a pesquisa bibliográfica é um tipo de "estudo direto em fontes científicas, sem precisar recorrer diretamente aos fatos/fenômenos da realidade empírica" (OLIVEIRA, 2007, p. 69). Quanto à pesquisa "documental caracteriza-se pela busca de informações em documentos que não receberam nenhum tratamento científico, como relatórios, reportagens de jornais, revistas, cartas, filmes, gravações, fotografias, entre outras matérias de divulgação" (OLIVEIRA, 2007, p. 69). Apoiados nesta diferenciação a pesquisa aqui desenvolvida trata-se de uma pesquisa bibliográfica, uma vez que todas as nossas fontes de pesquisa são livros científicos. E como nosso objetivo é compreender um acontecimento do passado, a rejeição inglesa aos números negativos entre 1750-1830, nossa investigação pode ainda ser classificada como bibliográfica de cunho histórico.

1 CONHECENDO A PROBLEMÁTICA DA ACEITAÇÃO DOS NEGATIVOS

Atualmente, parece absurdo cogitarmos a matemática sem a presença dos números negativos. Tal estranheza se justifica pelo fato de nos dias de hoje esses números serem amplamente utilizados e se encontrarem tão bem fundamentados que sugerem a falsa impressão de que a sua aceitação se deu de forma natural. Porém, não foi bem assim que aconteceu. Mesmo existindo registros da presença dos números negativos na matemática desenvolvida por algumas civilizações antigas e, constate-se, no decorrer de vários séculos, a utilização desses números, associada principalmente à matemática de caráter prático, a aceitação dos números negativos pela comunidade científica matemática só aconteceu após um longo embate que envolveu matemáticos importantes de diferentes épocas, entre defensores e opositores.

A problemática em torno da existência dos números negativos se intensificou no século XVIII. Nesse século a comunidade científica matemática vivenciava um dilema. Por um lado era difícil negar os avanços que algumas entidades matemáticas, tais como os negativos, os complexos e os infinitesimais, ocasionavam na própria matemática e também em outras áreas, mas, por outro lado, esses elementos ainda não haviam sido completamente explicados, dentro de uma estrutura lógica, ou seja, existia a carência de uma sólida e rigorosa fundamentação para essas entidades. No caso especifico dos negativos, a problemática só foi plenamente resolvida no século XIX com a axiomatização dos números inteiros e o desenvolvimento da álgebra moderna.

Com o intuito de compreender os motivos que justificavam as dificuldades de aceitação desses números, bem como também as mudanças que essa rejeição desencadeou nos fundamentos da matemática, consideramos relevante realizar um levantamento histórico do desenvolvimento do conceito de número negativo ao longo dos séculos.

Antes de iniciarmos, queremos deixar claro que, embora a compreensão dos motivos da rejeição desses números encontre suas justificativas nos fundamentos matemáticos de cada civilização e de cada época, não é nosso objetivo, no momento, apresentar detalhadamente esses fundamentos[1]. Relataremos apenas os fatos que nos ajudarão a trilhar o desenvolvimento histórico dos números negativos da sua aparição até a sua plena aceitação.

1.1 OS NÚMEROS NEGATIVOS NAS CIVILIZAÇÕES ANTIGAS

Entre as civilizações antigas, escolhemos investigar a egípcia, a babilônica, a chinesa e a grega. A escolha das duas primeiras se justifica por essas civilizações serem consideradas as fontes iniciais do conhecimento matemático. Já a civilização chinesa foi escolhida por atribuírem a ela o fato de ter sido a primeira civilização a fazer uso dos números negativos. Quanto à civilização grega, sua presença se justifica por configurar-se na mais importante civilização antiga para história da matemática, por ter sido a responsável pela criação do modelo axiomático-dedutivo.

Os egípcios desenvolveram um sistema de numeração decimal, não posicional, no qual era introduzido um novo símbolo à medida que se aumentavam as unidades, semelhante ao sistema romano de numeração. Segundo Kline (1972), a aritmética egípcia era essencialmente aditiva e sua álgebra focava-se na obtenção da solução de problemas envolvendo uma variável. Esse autor ressalta ainda que a álgebra egípcia era puramente aritmética e não tinha a preocupação em explicar o porquê ou como os métodos foram utilizados.

Diante do que se conhece sobre a matemática da civilização egípcia, podemos afirmar que não existe nenhum indício de que os egípcios possuíam conhecimento ou faziam uso dos números negativos. Nem mesmo a constatação de Lumpkin (1996) de que a civilização egípcia empregava a ideia de linhas de níveis na construção das pirâmides deve ser interpretada como indício de que os egípcios idealizaram, mesmo que de forma primitiva, os números negativos.

[1]Para uma melhor compreensão desses fundamentos, ver ANJOS (2012). Nesse trabalho, a autora apresenta um detalhado estudo do desenvolvimento dos números negativos, tendo sempre a preocupação de fundamentar a matemática de cada época ou civilização estudada.

Observemos o seguinte o trecho, no qual Lumpkin (1996) aborda esse assunto:

> Massive stone structures such as the ancient Egyptian pyramids required deep foundations and careful leveling of the courses of stone. Horizontal leveling lines were used to guide the construction. One of these lines, often at pavement level, was used as a reference and was labeled nfr, or zero. Other horizontal leveling lines were spaced 1 cubit apart and labeled as 1 cubit above nfr, 2 cubits above nfr, or 1 cubit, 2 cubits, 3 cubits, and so forth, below nfr. (ARNOLD, 1991 apud LUMPKIN 1996)

Nele fica claro que a autora, em seu trabalho, defende apenas o conhecimento egípcio em relação ao zero, designada por esse povo de *nfr*.

O aparecimento efetivo dos números negativos é atribuído por diversos autores à matemática chinesa. O texto *K'u-ch'ang Sunuan Shu* ou *Nove Capítulos da Arte Matemática,* escrito durante a dinastia Han (206 a.C a 260 d.C), é considerado a principal publicação da matemática chinesa antiga, bem como também o marco inicial da utilização dos negativos. Segundo Struik (1989, p. 66)

> A matemática de *Nove Capítulos da Arte Matemática* consiste principalmente num conjunto de problemas com regras gerais para a sua solução; têm um caráter de cálculo aritmético e conduzem a equações algébricas com coeficientes numéricos. [...] Uma série de problemas conduzia a sistemas lineares que eram escrito na forma de matrizes dos coeficientes. [...] Nessas matrizes encontramos números negativos pela primeira vez na história.

É comum também encontramos na literatura sobre a história dos números negativos, que os chineses utilizavam na execução dos cálculos varas vermelhas para representar os números negativos e varas pretas para números positivos.

Segundo Anjos (2012), mesmo havendo duas formas de representação, o conceito de número para a matemática chinesa encontra-se essencialmente ligado à reprodução de quantidades que existiam. Dessa forma, para a autora, os números negativos não são concebidos de forma independente dentro da matemática chinesa, na verdade, "a ideia de negatividade e positividade na matemática chinesa era expressão de características complementares de um mesmo número, ou seja, nesse contexto, não havia números opostos, e sim, aspectos complementares de um mesmo número" (ANJOS, 2012, p. 16). Portanto, 5 varas vermelhas carregam consigo a ideia de existência da quantidade 5. O que as diferenciava das pretas era a característica que o vermelho representava, no caso, o sentido oposto ao transmitido pelo preto.

No que se refere à matemática do povo babilônico, existem divergências quanto ao uso ou não dos números negativos por essa civilização. Embora alguns historiadores matemáticos afirmem que o povo babilônico utilizava os números negativos, Høyrup (2001), em uma reanálise dos textos babilônicos, defende que essa postura é um engano e aponta como motivo para essa confusão, interpretações equivocadas feitas a partir do trabalho de Otto Neugebauer sobre a matemática babilônica. Pela interpretação de Høyrup (2001 apud SCHUBRING, 2005, p. 36), nos textos babilônicos existia apenas a subtração entre quantidades, o que não justifica a sugestão de que esse povo fazia uso dos negativos, já que não são identificadas manipulações com esses números.

A civilização grega é outra na qual não se identifica a presença da ideia de número negativo. Alguns historiadores justificam esse fato por meio da forte influência que a matemática grega sofreu da babilônica e da egípcia, e como vimos, essas foram civilizações em que o conceito de número negativo não esteve presente. Apesar do nosso objeto de estudo não estar presente na civilização grega, essa é uma civilização que merece ser estudada com um pouco mais de detalhe quando se pretende realizar a análise histórica de um conceito matemático, pois a esse povo é atribuída a responsabilidade pelo nascimento da matemática dedutiva. Sobre isso, Eves (2011, p. 94) expõe:

> Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes o bastante para responder questões na forma de *como*, não mais bastavam para as indagações mais científicas na forma de *por quê*. Algumas experiências com o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo, e a feição dedutiva da matemática, considerada pelos doutos como sua característica fundamental, passou ao primeiro plano. Assim, a matemática, no sentido moderno da palavra, nasceu nessa atmosfera de racionalismo e em uma das novas cidades comerciais localizadas na costa oeste da Ásia Menor[2].

[2] Anteriormente, Eves (2011) relata que o aparecimento da civilização grega se deu nas cidades comerciais espalhadas ao longo da costa da Ásia Menor. Ele explica também, por meio de uma nota de rodapé, que existem historiadores da matemática antiga que discordam dessa explicação da origem da matemática demonstrativa e são favoráveis a uma explicação de que ela teria se iniciado com a descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$. Entre estes, ele destaca Otto Neugebauer.

Sobre o nascimento da matemática, Fossa (2001) relata que a matemática pré-grega era de natureza essencialmente prática e com baixo nível de abstração. Mas com os gregos, o saber matemático sofreu quase de imediato uma transmutação. A preocupação de Tales de Mileto (642-548 a.C), não somente com a obtenção de soluções de problemas práticos, mas também com as verdades das proposições matemáticas, elevou a matemática do nível da prática ao nível da teoria.

Seguindo essa mesma linha de raciocínio, esse mesmo autor, em um trabalho de 2004, intitulado de *Dois momentos notáveis na vida da matemática: O nascimento e a maioridade*, aponta a civilização grega como a responsável por unificar e sistematizar os estudos sobre formas e contagem em uma disciplina, a matemática. Esta constatação se verifica no relato que segue:

> Interessantemente, apesar do fato da matemática ser eventualmente vista, no mundo antigo, como a ciência (num sentido lato) do número e da forma, parece que não houve uma só disciplina identificada como 'matemática' até a época dos pitagóricos. Houve, sim, uma multiplicidade de práticas inter-relacionadas, mas, independentes umas das outras: uma ciência que os gregos mais tarde chamariam de 'logística', uma geometria largamente ocupada com o cálculo de áreas e volumes de várias figuras, uma ciência de planejamento que Aristóteles chamou de economia doméstica, e assim por diante. São inter-relacionadas pelo fato de que era o conhecimento de número e das operações aritméticas que era necessário para lidar com estas práticas. Mas, foi possível vê-las como uma única disciplina – a matemática – somente quando várias dessas práticas foram transformadas pela adoção do método axiomático. (FOSSA, 2004, p. 3)

Embora Tales tenha sido o primeiro a contribuir para essa unificação, segundo Fossa (2004), foi somente com a escola pitagórica que de fato ela se concretizou e, podemos dizer que a matemática nasceu.

Ao centrar nossa atenção nos pitagóricos, constatamos que eles organizaram a matemática em quatro categorias[3]: Aritmética (teoria dos números), Geometria (forma), Música (razões e proporções) e Astronomia (formas em movimento), sendo que a Aritmética ocupava papel de destaque devido à grande importância que os pitagóricos davam aos números. Segundo Fossa e Anjos (2007), essa importância se justifica porque, para Pitágoras, a inteligibilidade do mundo, denominada por ele

[3] Esse grupo de matérias tornou-se conhecido na Idade Média como *quadrivium*, ao qual se acrescentava o *trivium*, formado por gramática, lógica e retórica.

de *lógos,* consistia na interação entre número e harmonia, e esta última correspondia às razões e proporções entre os números.

Vamos então nos concentrar na Aritmética, já que o objeto de estudo desta é o número, para então compreendermos porque os números negativos não aparecem na matemática grega. Por meio do trabalho realizado por Fossa e Anjos (2007), percebemos que nesta época a Aritmética costumava ser subdividida em duas subcategorias: Logística (Cálculos) e Aritmética (Teoria dos Números), e que Klein (1968) aperfeiçoou essa divisão, ampliando-a para quatro subcategorias: Aritmética Teórica, Aritmética Prática, Logística Teórica e Logística Prática. O argumento utilizado por Klein (1968) para essa ampliação foi que, ao realizar a divisão em apenas duas subcategorias, deixa-se de contemplar os aspectos práticos e teóricos presentes em cada uma delas. Fossa e Anjos (2007) seguem a divisão proposta por Klein (1968), mas apresentam uma interpretação reformulada da seguinte maneira:

> Aritmética Prática: contagem de coisas;
>
> Aritmética Teórica: enumeração de unidades;
>
> Logística Prática: uso de cálculos para resolver problemas práticos;
>
> Logística Teórica: cálculos com números puros. (FOSSA; ANJOS, 2007, p. 167)

Levando em consideração essa subdivisão da Aritmética, com as suas respectivas interpretações, estudaremos o conceito grego de número, tanto na Aritmética Prática como na Teórica.

Ao nos focarmos na Aritmética Teórica, verificamos que o número, denominado pelos pitagóricos de *arithmoí,* tem como fonte primária a *mônada*, que consistia na unidade indivisível, formadora de tudo. Assim sendo, para os gregos, “um número puro é simplesmente uma coleção destas unidades que não contêm matéria” (FOSSA; ANJOS, 2007, p.169), ou seja, número na matemática grega é sempre uma coleção de *mônadas* (Unidades)*.* Fossa e Anjos (2007) mostram também que o conceito de *mônada* inviabiliza o aparecimento dos números negativos na matemática dessa civilização, pois a possibilidade de um número ser positivo ou negativo contrariava a ideia de unidade presente na definição de *mônada*. Eles argumentam ainda que essa inviabilidade ocorria também com as frações, que contrariavam a ideia de indivisibilidade, conceito inerente à *mônada*.

Mas, no caso das frações, os gregos contornaram esse problema, concebendo-as como a razão entre dois números inteiros, porém, com os negativos não existia alternativa a não ser a rejeição, já que a base teórica grega do conceito de número era incompatível com a existência dos negativos.

Constatado que não existia embasamento teórico para o surgimento dos números negativos dentro da Aritmética Teórica, investigaremos se seria então possível, que eles fossem concebidos dentro da Aritmética Prática. Embasando-se novamente no trabalho de Fossa e Anjos (2007), percebemos que o conceito de número apresentado anteriormente era também utilizado na Aritmética Prática, na verdade o que diferenciava o número de uma subcategoria para outra era que no "caso da Aritmética Prática, as unidades utilizadas são objetos sensíveis, enquanto as unidades da Aritmética Teórica são objetos inteligíveis" (FOSSA; ANJOS, 2007, p.169).

Anjos (2012) amplia essa análise e conclui que também no contexto da Aritmética Prática os números negativos não encontram bases teóricas que os justifiquem, pois para essa autora, a Aritmética Prática grega "era a enumeração de unidades concretas, e seriam essas unidades que poderiam ter a propriedade de serem positivas ou negativas" (ANJOS, 2012, p.28). Assim sendo, o que seria possível era ter a negatividade apenas como uma característica do que está sendo numerado pela *mônada*, ou seja, não teríamos números negativos, mas sim, coisas que representassem negatividade, igualmente às varas vermelhas dos chineses.

A ligação entre a história dos números negativos e a civilização grega não se resume apenas à inadequação do seu conceito de número com o aparecimento dos negativos. Na verdade, a matemática dedutiva, iniciada pelos gregos, ganha força e passa a ser o modelo de ciência a ser seguido, principalmente a partir da publicação de *Os Elementos,* de Euclides (por volta do século 300 a.C), no qual ele

> [...] sistematiza os conhecimentos da geometria elementar, de forma rigorosa e dedutiva, partindo de um número mínimo de definições e de verdades aceitas sem provas. A ideia básica dos Elementos influenciou toda a produção científica posterior até nossos dias e ele é o mais antigo livro-texto que ainda continua em vigor atualmente. (GARBI, 2010, p. 19)

É necessário ressaltarmos que, embora *Os Elementos* não seja uma obra exclusivamente de geometria, já que aborda também assuntos de teoria dos números e álgebra elementar, uma grande importância é dada às demonstrações geométricas nessa obra, mesmo quando se trata de assuntos algébricos. A respeito dessa característica, Struik (1989, p. 109) faz o seguinte comentário:

> *Os Elementos*, de Euclides, tem uma teoria de equações quadráticas, mas que era expressa em termos das chamadas aplicações de áreas, e, visto que as raízes eram segmentos de recta obtidos pela execução de determinadas construções indicadas, podemos dizer que as únicas raízes admitidas eram as positivas.

As palavras de Struik (1989), além de confirmar o tratamento geométrico dado aos assuntos algébricos em *Os Elementos,* chama a atenção também para a limitação que esse tipo de abordagem impunha à aceitação de raízes negativas.

Voltando à temática, sobre importância da obra Os *Elementos,* Eves (2011, p. 167) enfatiza que,

> Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico. Mais de mil edições impressas dos Elementos já apareceram desde a primeira delas em 1482; por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria.

Diante do exposto, podemos afirmar que, a partir da publicação de *Os Elementos* a matemática grega inaugurou um modelo de se fazer matemática no qual tudo deve ser demonstrado tendo por base algumas verdades primeiras. Nesse contexto, a geometria demonstrativa ganha a posição de verificadora de verdades matemáticas. Essa conclusão pode ser reforçada com as seguintes palavras de Fossa (2008, p. 144):

> [...] os gregos, especialmente com a descoberta da axiomatização, radicalizaram esse procedimento e fizeram com que a apresentação de resultados algébricos fosse feita através da geometria. De fato, em relação a demonstrações matemáticas, a geometria foi norma.

No que se refere aos números negativos, veremos que esse modelo de matemática centrada na geometria, iniciado pelos gregos e posteriormente absorvido por outras civilizações, constituiu-se junto com a tardia axiomatização da álgebra como as principais barreiras filosóficas que dificultaram a aceitação dos números negativos.

A respeito da ênfase dada à geometria, Eves (2011) relata que atualmente alguns historiadores matemáticos discutem se as 14 proposições do Livro II, de *Os Elementos*, que abordam os assuntos sobre transformações de áreas e a álgebra geométrica da escola pitagórica, pretendiam realmente estabelecer uma forma geométrica de álgebra, conforme se supôs por muito tempo. Eves (2011) sugere ainda que já na época de Euclides na matemática grega coexistiam duas formas de abordagem algébrica, a geométrica e a aritmética.

De acordo com Fossa (2007a), mesmo os antigos considerando a aritmética um conhecimento matemático superior ao da geometria, formularam a aritmética em termos geométricos e até mesmo os que buscavam explicações por meio de uma abordagem não geométrica, como Nicomachus de Gerasa (60 d.C.- 20 d.C.), Theon de Smyrna (70 d.C.- 135 d.C.) e Diofanto[4] (~200 d.C. - X) modelaram as relações aritméticas pela geometria. Fossa (2007a) complementa essa afirmação justificando que esse aspecto tão importante na história do desenvolvimento da matemática ocorreu devido ao fato de a geometria ter sido axiomatizada relativamente cedo, o que não aconteceu com a aritmética. Portanto, ao "[...] tratar aritmética e, posteriormente, a álgebra em termos geométricos, os antigos (e os não tão antigos!) conseguiram evitar um grande dilema ao incluir esse tipo de conhecimento dentro da categoria da matemática" (FOSSA, 2007a, p.56). Assim sendo, o debate a respeito da abordagem geométrica da álgebra presente no Livro II, de *Os Elementos,* não seria uma questão de intenção, mas, como bem expõe Fossa, era uma questão de necessidade.

Entre os matemáticos gregos que optavam por uma abordagem aritmética da álgebra, destacam-se os escritos de Diofanto e a obra *Arithmetiké,* que consiste numa abordagem analítica da teoria algébrica dos números e que data do século III d.C. No que se refere à história dos números negativos, Diofanto deve ser sempre

[4] A data de nascimento e morte de Diofanto são imprecisas, mas é consensual que ele nasceu próximo ao ano 200 d.C., quanto a sua morte não existe um consenso, portanto, preferi omitir essa informação.

relatado, não somente por ter se dedicado ao estudo da resolução de equações de forma não geométrica, mas também por ter feito uso dos números negativos como intermediários no cálculo de suas equações e principalmente ter apresentado regras de como operar com esses números.

Apesar dessas contribuições, Diofanto não concebia os números negativos de forma independente, pois não os aceitava como respostas das equações por ele estudadas. Eves (2011, p. 208) registra que “Diofanto só admitia respostas entre os números racionais positivos e, na maioria dos casos, satisfazia-se com uma resposta apenas do problema”. Atualmente, problemas algébricos indeterminados, nos quais se impõe a restrição de que as soluções sejam inteiras, são conhecidos como problemas diofantinos.

Ao voltar à análise sobre o número negativo na civilização grega presente em Anjos (2012), verificamos que, embora essa autora defenda que os números negativos tenham surgido de forma independente, não em meio à contagem (Aritmética), mas sim, na resolução de equações (Logística) e que a obra *Arithmetiké,* de Diofanto, tenha sido uma das principais obras da matemática grega dedicada à resolução de equações, é compreensível a rejeição de Diofanto aos números negativos, pois segundo a autora, a concepção de número de Diofanto continuava atrelada ao conceito de *mônada*, que, como vimos, inviabiliza a aceitação desses números.

Em suma, no que se refere às civilizações antigas e ao aparecimento dos números negativos, podemos afirmar que mesmo que algumas civilizações já tivessem percebido a necessidade da existência dos números negativos, como é o caso da chinesa, que usava cores diferentes para representar números positivos e negativos, de modo geral, a concepção de número na Antiguidade continuava intrinsecamente ligada à representação de algo que existe e, nesse contexto, os números negativos não encontram qualquer possibilidade de sentido. Veremos na sequência que entre as heranças matemáticas deixadas pelas civilizações antigas, a matemática grega como um todo, mais precisamente a abordagem axiomática, influenciará fortemente a matemática desenvolvida na Europa durante a Idade Média e Renascença. Dessa forma, tanto a supervalorização da geometria, característica marcante na matemática grega, como também o conceito grego de número, constituíram-se em fatores significativos que dificultaram a aceitação dos números negativos nos séculos posteriores.

1.2 OS NÚMEROS NEGATIVOS DURANTE A IDADE MÉDIA

A tomada de Roma, em 476 d.C, pelos bárbaros[5] representa o marco histórico do fim da Antiguidade e o início da Idade Média. No que se refere à matemática, esse período foi marcado pela ascensão dos povos árabes e hindus, porém é importante relatarmos que desde a conquista da Grécia pelos romanos, por volta de 146 a.C, a produção matemática grega passava por um período de estagnação.

A álgebra hindu teria sido, segundo Kline (1972), herdada dos gregos, embora apresentasse também influência da matemática babilônica e principalmente da chinesa. A influência desta última, juntamente com a interligação com a astronomia, característica marcante na matemática hindu, contribuiu para que a matemática desse povo apresentasse um forte caráter prático. Esse conjunto de fatores costuma ser apontado como justificativa da utilização dos números negativos pelo povo hindu.

Porém, é importante ressaltarmos que a utilização dos negativos pelos matemáticos hindus não aconteceu de maneira uniforme. Nos trabalhos do matemático Bhahmagupta (598 d.C. -665 d.C), caracterizado por Struik (1989) como sendo em parte astronômicos e em parte aritméticos-algébricos, encontramos os números negativos sendo abordados de forma sistemática por meio de regras de sinais. A Bhahmagupta é ainda atribuído o feito de ter sido o primeiro a conceber os números negativos como entidades matemáticas independentes, pois em seus escritos verifica-se a aceitação, sem restrições, dos números negativos como soluções de equações algébricas.

[5] Os romanos usavam a palavra *bárbaros* para todos aqueles que habitavam fora das fronteiras do império romano e que não falavam sua língua oficial, o latim.

Contrapondo-se a essa posição, encontramos os escritos de Bhaskara II[6] (1114-1185), nos quais ele rejeitava soluções negativas para equações algébricas. Essa rejeição é registrada por Kline (1972, p. 185) da seguinte forma: "*Even Bhãskara while giving* 50 *and* -5 *as two solutions of problem says 'The second value is in this case not to be taken, for it is inadequate; people do not approve of negative solutions'"*. *A* explicação normalmente oferecida para essa postura é que tanto Bhaskara II como seus contemporâneos quase sempre lidavam com problemas que descreviam situações concretas e, nesse contexto, as soluções negativas não faziam sentido. Constatamos que Bhaskara II rejeitava até mesmo soluções positivas quando estas, ao serem interpretadas no contexto do problema, geravam alguma incoerência, como é o caso do exemplo citado por Schubring (2005, p. 38), no qual Bhaskara II diante de um problema envolvendo macacos[7], que em linguagem moderna se traduz pela equação $\left(\frac{x}{5}-3\right)^2+1=x$ e que apresenta como soluções $x_1 = 50$ e $x_2 = 5$, teria afirmado que embora encontremos duas soluções, a segunda deve ser descartada, uma vez que $\left(\frac{5}{5}-3\right)^2$ é incoerente, já que "*people do not approve a negative absolute number"* (SESIANO, 1985, p. 106 apud SCHUBRING, 2005, p.38).

Schubring (2005) relata ainda que nos casos de problemas abstratos, Bhaskara II reinterpretava as soluções negativas de modo que fizessem sentido. Para reforçar essa afirmação, Schubring (2005, p. 38) cita o seguinte exemplo:

> In a problem about determining the lengths of line segments on sides of triangles he obtained a negative result, to which instead of excluding it, he gave the following interpretation: This [i.e., 21] cannot be subtracted from the base [*c* = 9]. Wherefore the base is subtracted from it. Half the remainder is the segment, 6; and is negative: that is to say, is in the contrary direction.

Ou seja, as soluções negativas de problemas geométricos, para não serem excluídas, eram interpretadas por esse matemático como linhas no sentido oposto. Apesar da limitada aceitação dos negativos, Bhaskara II apresenta regras para

---

[6] Optou-se por essa denominação para evitar confusão com outro matemático indiano também chamado de Bhaskara, que viveu no século VII.

[7] O problema dos macacos estudado por Bhascara II é o seguinte: "The fifth part of a troop ofmonkeys less three, squared, had gone into a cave; only one monkey was still to be seen. What was the monkeys' number?" (SCHUBRING 2005, p. 38).

operar com números positivos e negativos, assim como já havia feito Bhahmagupta e anteriormente Diofanto.

A apresentação de regras que ensinam como operar com números negativos sugere que, embora os números negativos ainda não fossem unanimemente aceitos como entidades matemáticas independentes, a sua utilização como intermediário nas manipulações algébricas era algo plausível entre os algebristas.

A partir do século VII, depois de muitas guerras, os árabes iniciam a construção do que viria a ser um poderoso império econômico e político que tinha por base a religião islã. Embora, como expõe Boyer (1996), o primeiro século do império mulçumano tenha sido marcado por uma produção científica quase inexistente, em meados do século VIII, esse quadro começa a mudar. Veremos que o povo árabe, além de tornar-se o responsável pelo desenvolvimento e produção intelectual da Idade Média, também se configura como o preservador e transmissor da cultura mundial antiga.

A preservação deve-se em grande parte à Casa da Sabedoria, construída em Bagdá, na qual existia uma biblioteca que abrigava um vasto número de traduções. Muitos trabalhos de astronomia, medicina e matemática foram traduzidos para o árabe, principalmente de obras gregas e hindus.

No que se refere especificamente à matemática, Struik (1989) relata que a matemática do período islâmico é marcada por uma mistura de influências. Portanto, em meio a essa variedade de influências, as obras mais traduzidas pelos árabes nos sugerem o caminho intelectual seguido por esse povo. Na astronomia, destacam-se as obras de Bhahmagupta e Ptolomeu (90 d.C-168 d.C.), já na matemática *Os Elementos,* de Euclides, obteve diversas traduções, fato que não acontece com *Arithmetiké,* de Diofanto, que só veio a ser traduzido por volta do século X.

A forte presença das ideias de *Os Elementos* sugere a continuidade do modelo de matemática grego embasado na geometria. Esse fato torna-se essencialmente importante, pois segundo Eves (2011), será por meio das traduções árabes que posteriormente intelectuais europeus irão se reencontrar com clássicos da Antiguidade.

No que se refere especificamente aos números negativos, verificamos que a grande importância dada pelos árabes ao trabalho de Euclides contribuiu para que os números negativos não fossem aceitos por esse povo. Esse fato pode ser evidenciado, por exemplo, no texto *Al-jabr wa'l mugabalah* de Al-Khowarizmi[8] (século IX), um dos principais matemáticos árabes dessa época. Nesse trabalho, caracterizado por Parshall (1988) como sendo um livro elementar de matemática prática, Al-Khowarizmi, além de apresentar algoritmos aritméticos para solucionar as equações de primeiro e segundo grau por ele estudadas[9], expõe também as suas interpretações geométricas. Esse aspecto dual dessa obra é retratado por Parshall[10] (1988) da seguinte forma:

> […] Al-Khwarizmi went beyond merely providing the sort of algebraic recipe found in Babylonian texts. He insisted upon superadding a Euclidean style of geometrical proof for algebraic fact.Thus, after explicitly stating that '... it is necessary that we should demonstrate geometrically the truth of the same problems which we have explained in numbers'.(PARSHALL, 1988)

Essa necessidade de verificação geométrica acontecia devido à álgebra desenvolvida até início do século XIX ser caracterizada pela ausência de um fundamento axiomático. Diante dessa lacuna, para que os resultados encontrados por manipulações numéricas se legitimassem como científicos, se fazia necessário que fossem reinterpretados geometricamente, já que a única área da matemática até então axiomatizada era a geometria.

Parshall (1988) defende que Al-Khowarizmi, ao incorporar o rigor geométrico euclidiano em um livro sobre manipulações algébricas, reforça o modelo geométrico e expande a necessidade de demonstrações, mesmo quando se trata de assuntos práticos. Já Anjos (2012) chama a atenção para o fato de que a representação de números negativos por segmentos não é intuitiva, portanto, essa necessidade de verificação geométrica ajuda a entender a não utilização dos negativos como raízes de equações pelos árabes.

---

[8] A latinização do nome Al-Khowarizmi e de sua obra Al-jabr wa'l mugabalah deram origem respectivamente às palavras algoritmo e álgebra.

[9] Em notação moderna, as equações estudadas por Al-Khowarizmisão são as seguintes: $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, e $bx + c = ax^2$. A justificativa de se estudar cada tipo de equação do segundo grau separadamente é devido a não aceitação do zero e doss negativos como coeficientes das equações.

[10] O documento pesquisado não era paginado.

No que se refere especificamente aos negativos, não resta dúvida de que essa necessidade de verificação geométrica fortalece os obstáculos contrários à sua aceitação, visto que não existe uma representação lógica para esses números no modelo geométrico. Kasner e Newman (1950, p. 90) ressaltam esse fato no trecho que segue:

> The Greeks, for whom geometry was a joy and algebra a necessary evil, rejected negative numbers. Unable to fit them into their geometry, unable to represent them by pictures, […] There is a repetition of that indifference to the desire for concrete representation of abstract ideas in the contemporary theories of mathematical physics, which, although understandable as symbols on paper, defy diagrams, pictures, or adequate metaphors to explain them in terms of common experience.

Diante do exposto, fica claro que a supervalorização da geometria, anteriormente citada como uma barreira filosófica imposta pelos gregos, a aceitação dos números negativos é continuada pelos árabes e, como veremos é posteriormente repassada aos europeus no Renascimento. Veremos também que essa barreira só será totalmente transposta após a axiomatização da álgebra no início do século XIX.

Voltando à matemática árabe, verificamos que a postura iniciada por Al-Khowarizmi passa a ser seguida e aperfeiçoada pelos seus sucessores, surgindo um elemento novo apenas no século X, quando Al-Karaji (953-1029), influenciado pelos trabalhos de Diofanto, adotata uma postura mais autônoma da álgebra em detrimento do modelo geométrico. O'Connor e Robertson (1999) embasado nas ideias de Rashed caracteriza o trabalho desse matemático como sendo "the more-or-less explicit aim of [al-Karaji's] exposition was to find the means of realising the autonomy and specificity of algebra, so as to be in a position to reject, in particular, the geometric representation of algebraic operations". Esse autor enfatiza ainda a importância das inovações trazidas por Al-Karaji como um novo ponto de partida na álgebra.

Mesmo assumindo uma postura inovadora, Al-Karaji não rejeita por completo os métodos de Al-Khowarizmi. Assim sendo, seu trabalho pode ser interpretado como um misto entre a álgebra geométrica de Al-Khowarizmi e seus sucessores e a álgebra indeterminada de Diofanto.

Por fim, outro aspecto que não pode deixar de ser lembrado é que devido à importância comercial dos árabes, esse povo desenvolveu paralelamente aos trabalhos matemáticos mais teóricos e científicos uma vertente mais prática, menos presa a explicações e demonstrações. Fossa (2008, p. 146) confirma esse posicionamento ao citar que além dos tratados matemáticos existia também "[...] uma outra classe de texto da Idade Média, escritos na vernácula, cujo propósito foi ensinar os métodos aritméticos e algébricos a não-matemáticos, geralmente visando sua aplicação no comércio".

A partir do século XI, a Europa começa a passar por um conjunto de transformações econômicas, políticas e culturais, ocasionado principalmente pelo enfraquecimento do sistema feudal e o desenvolvimento do capitalismo, que contribuiu diretamente para o surgimento das primeiras cidades. Os efeitos que essas mudanças desencadearam nas artes, na filosofia e nas ciências, costumam ser denominados pelos historiadores de Renascença.

Como era de se esperar, motivada pelo desenvolvimento do comércio, a matemática desse período é marcada pelo fortalecimento do seu caráter prático, principalmente devido aos ensinamentos das *escolas de abaccus.* Segundo Anjos (2012), essas escolas teriam sido criadas por causa dos comerciantes que buscavam a aprendizagem de elementos básicos tanto de aritmética como de álgebra necessários diante do panorama instaurado pela nova estrutura mercantil no fim do século XIII. Ainda segundo essa autora, foi justamente o contexto contábil mais complexo que possibilitou o surgimento de uma estrutura de crédito que deu significado aos números negativos. Tanto para Anjos (2012) como para Parshall (1988), as *escolas de abaccus* tiveram um papel importante no processo de legitimação dos números negativos.

Embora a matemática do Renascimento tenha experimentado uma maior abertura quanto aos aspectos práticos dessa ciência e tenha passado a ser vista como ferramenta fundamental na resolução dos problemas da nova conjuntura capitalista, essas mudanças não acarretaram o desaparecimento da matemática clássica nesse período, pois, além das mudanças sociais, outra característica marcante no Renascimento foi o resgate do saber e da cultura clássica[11]. Esse

[11] Denominamos de cultura clássica o conjunto de obras literárias, filosóficas históricas e de artes plásticas produzidas pelos gregos e pelos romanos na Idade Antiga.

resgate foi feito em grande parte por meio da tradução do árabe para o latim de obras da Antiguidade, principalmente as das civilizações grega e romana.

Concentrando nossa atenção nos matemáticos formais do período do renascimento, encontramos Leonardo de Pisa (1175-1250), também conhecido como Fibonacci, considerado por muitos historiadores como o maior matemático da Idade Média. No que se refere aos números negativos, existem divergências quanto à visão de Fibonacci em relação a esses números.

Pycior (1997) sugere que Fibonacci, em seu livro *Flos* (1225), aceita os números negativos como raízes de equações ao trabalhar com problemas indeterminados semelhantes aos trabalhados por Diofanto. Anjos (2012) considera coerente a visão de Pycior (1997) e justifica argumentando que tanto a obra *Flos* como *Liber quadratorum* apresentam indícios da influência de Diofanto, o que sugere certa autonomia dos procedimentos algébricos. Porém, Anjos (2012) lembra também que muitos historiadores sugerem que a estrutura da resolução de equações de Fibonacci é similar à de Al-Khowarizmi, o que indicaria uma restrição do uso dos números negativos apenas para significar dívidas.

Já Schubring (2005) defende que Fibonacci ora aceita soluções negativas, ora as rejeita. A aceitação acontecia apenas quando era possível fazer uma releitura do problema de modo que as soluções negativas fizessem sentido. Sobre as releituras de Fibonacci, Schubring (2005, p. 39) expõe:

> He interpreted negative values as debts, as borrowed money, or as capital invested by one participant in addition to monies jointly invested by several persons *n*. Where it was impossible to reinterpret negative quantities, for instance negative prices as positive ones, he rejected the negative solution as *inconveniens*.

Ao analisar a história dos números negativos, um matemático que não pode deixar de ser lembrado é o francês Nicolas Chuquet (1445-1488). No ano de 1484, Chuquet escreveu sua aritmética *Triparty en la science des nombres*, mas ela só foi impressa no século XIX. Eves (2011) ao relatar sobre ela ressalta que esta obra era tão avançada para a época que acabou não exercendo praticamente nenhuma influência sobre os seus contemporâneos.

Se por acaso a obra de Chuquet tivesse tido maior aceitabilidade, a história dos números negativos poderia ter sido diferente, pois segundo Schubring (2005, p. 40), nessa obra "*Chuquet solved systems of linear equations in which the unknowns were pure numbers, and no longer quantities",* ou seja, nos sistemas de equações lineares resolvidos por Chuquet os valores desconhecidos são tratados como números puros e não como quantidades. Nessa abordagem, o número assume um papel semelhante ao atual, de símbolo. Devido a essa visão, Chuquet aceita qualquer resultado obtido como solução, sem necessidade de reinterpretações. Na teoria de Chuquet, a única exigência imposta para um valor ser admitido como solução era que satisfizesse as equações.

Segundo Schubring (2005), a postura de Chuquet em relação aos números negativos não se trata de um caso isolado. Na verdade, descendia das ideias contidas de um manuscrito de origem provençal[12] escrito em occitana[13], intitulado *Compendi del art del algorism*[14]. Para Schubring (2005), esse manuscrito marca uma ruptura com todas as formas anteriores de lidar com números negativos, pois nele soluções negativas são aceitas sem restrições ou reinterpretações. Ainda segundo esse autor, outro trabalho que teve como fonte principal esse manuscrito provençal foi a publicação *Compendion del abaco*, de Frances Pellos, publicado em 1460. Essa obra é considerada por Schubring (2005) como o primeiro texto impresso que contém soluções negativas.

Infelizmente, nenhum desses textos se tornaram referência para matemáticos posteriores, assim como aconteceu com a publicação de Luca Pacioli (1445-1517), intitulada de *Summa de Aritmética, Geometria, proportioni et proportionalita*, ou simplesmente *Summa,* publicado em 1494. Essa obra foi o primeiro texto de álgebra a ser publicado de forma impressa, o que fez com que atingisse um número razoável de público. Quanto aos números negativos, *Summa* segue uma linha mais

---

[12] Provença é a denominação geográfica para um antigo condado transformado em 1481 em província real francesa e que corresponde hoje a uma grande parte da região administrativa francesa de Provença-Alpes-Côte d'Azur.

[13] A língua occitana, também provençal, é uma língua românica falada no sul da França e também em alguns vales alpinos na Itália e no Val d'Aran, na Espanha.

[14] *Compendi del art del algorism* encontra-se atualmente na Biblioteca Nacional francesa em Paris. Embora ele já existisse há algum tempo como um dos documentos de cultura occitana, seu conteúdo matemático só foi examinado nos anos 1980, por Sesiano, que o caracterizou como um manual para ensinar aritmética comercial aos jovens que se preparavam para carreiras de negócios no sul da França.

tradicional ao rejeitar os negativos como raízes de equações e aceitá-los apenas no contexto da matemática comercial.

Embora costume-se citar Pacioli como um importante contribuinte da matemática, Parshall (1988) expõe que talvez a maior contribuição desse autor tenha sido abordar todos os domínios do conhecimento matemático em um só trabalho (*Summa*). Bem como também resgatar ao ambiente matemático do fim da Idade Média uma postura mais teórica e padrões mais rigorosos de técnicas e demonstrações, pois estas caraterísticas tinham sido negligenciadas, mediante a grande influência da matemática prática das *escolas de abaccus.*

1.3 A IDADE MODERNA E A LEGITIMAÇÃO DOS NEGATIVOS

Segundo Struik (1989), durante o período da Idade Média, nenhuma grande descoberta matemática foi apresentada, além das já conhecidas pelos gregos e pelos árabes. Mas, a nova fase que se iniciava, denominada de modernidade ou Idade Moderna, tinha como uma das principais características o desejo de ir além dos clássicos, de criar coisas novas. A descoberta da América, a criação da imprensa, a nova concepção de universo, originada da teoria heliocêntrica de Copérnico (1473-1543), são exemplos da mudança de postura dessa nova era.

No início do século XVI, primeiro século da Idade Moderna, a matemática contribui com essa fase de inovações ao descobrir regras gerais para solucionar equações cúbicas, algo considerado por muitos matemáticos anteriores como impossível. O responsável por esse grande feito foi Scipione del Ferro (1465-1526). Essa descoberta, além de ultrapassar o saber matemático até então conhecido, é de fundamental importância para a História que estamos analisando, pois os pesquisadores do desenvolvimento dos números negativos consideram a resolução de equações como o principal motivo para a aceitação desses números.

Embora se reconheça del Ferro como sendo o primeiro a solucionar a equação do terceiro grau, que em notação moderna[15] é representada por do $x^3 + ax = c$, o mérito pela publicação desse feito é atribuído a Cardano (1501-1576). Quanto a esse fato, nenhum problema, pois foi o próprio del Ferro que optou por não publicar sua descoberta e de acordo com Fossa (2008), a explicação para isso era que nessa época os professores não possuíam estabilidade e podiam ser desafiados a um duelo de conhecimento a qualquer momento. Então, diante dessa conjuntura, del Ferro considerava o fato de guardar em segredo um conhecimento que ninguém possuía mais vantajoso do que publicá-lo. No entanto, del Ferro não era a única pessoa que guardava esse segredo, ele havia confiado sua descoberta a outras duas pessoas, seu aluno, Antonio Maria Fiore (séc. XV — séc. XVI), ao qual ele ensinou, e seu genro Annibale dele Nave, o responsável por cuidar do seu caderno de resultados matemáticos.

Embora não haja nenhuma dúvida de que foi realmente Cardano, em sua obra *Artis Magnae, Sive de Regulis Algebraicis* (1545), costumeiramente chamada apenas por *Ars Magna*, quem primeiro apresenta a resolução dos treze tipos de equações cúbicas denominadas por ele de equações primitivas. A publicação de *Ars Magna* desencadeou uma ferrenha desavença entre o autor, Cardano, e Niccolò Fontona (1500-1557), conhecido como Tartaglia, sobre a propriedade dos métodos ali publicados. Segundo Fossa (2008), Tartaglia teria descoberto métodos semelhantes aos de del Ferro após ter sido desafiado por Fiore, aluno de del Ferro, a solucionar uma lista de trinta equações cúbicas do tipo das que del Ferro tinha descoberto. Em outra ocasião, Tartaglia teria ingenuamente fornecido essa descoberta a Cardano sob o juramento de não publicá-la. Porém, como é sabido, Cardano não cumpriu a sua promessa.

Fossa (2008) relata ainda que Cardano se defendeu das acusações de Tartaglia, argumentando que ele e Ludovico Ferrari (um aluno que o ajudou a encontrar as soluções de todos os tipos das equações cúbicas e o responsável por descobrir a solução das equações de quarto grau publicadas em *Ars Magna*), teriam visitado dele Nave, genro de del Ferro, e tido acesso ao caderno de anotações matemáticas de del Ferro. Cardano entendeu que com essa nova fonte, ele não

[15] Na formulação retórica da época a equação $x^3 + ax = c$ era abordada da seguinte forma, o cubo mais a cosa é igual a um número. A palavra italiana *cosa* era usada no sentido de incógnita.

precisava mais guardar segredo do que conhecia. Quanto a Tartaglia, este nunca se conformou com o que ele considerou como traição de Cardano, nem mesmo o fato de Cardano ter reconhecido na sua obra que os métodos apresentados não tinham sido desenvolvidos por ele, mas sim, por Tartaglia, amenizou a decepção deste com a sua ingenuidade[16].

Desavenças à parte, o que realmente nos interessa são as inovações contidas em *Ars Magna,* a respeito dos métodos de resolução de equações do terceiro e quarto grau e, mais ainda, os desencadeamentos que essa descoberta causou na matemática.

Mesmo Cardano tendo apresentado uma demonstração geométrica para todos os treze tipos de equações cúbicas por ele estudadas[17] e também reconhecido que a modelagem geométrica era a peça-chave das suas descobertas (o que pode ser percebido, por exemplo, no caso particular da equação cúbica $x^3 + a = N$, na qual o autor utiliza-se de uma espécie de *completação de cubos*), Fossa (2008), em sua análise de todos os capítulos da obra *Ars Magna,* defende que Cardano, nessa obra, transcende o papel atribuído à geometria de verificadora da verdade, pois opera e representa, tanto quantidades negativas como também entidades geométricas, como cubos e quadrados, por meio de segmentos.

Para Fossa (2008), a flexibilidade manipulativa atribuída ao segmento nas abordagens de Cardano aproxima sua argumentação do pensamento analítico e suas demonstrações geométricas passam a ser apenas uma questão de formalidade. Ainda segundo esse autor, ao pensar assim, "Cardano estava se libertando do modelo geométrico e concentrando a sua atenção nas operações aritméticas. Desta forma, não seria um exagero afirmar que os segmentos estavam fazendo o papel, para ele, de variáveis embora de maneira incipiente." (FOSSA, 2008, p.161).

Parshall (1988) também compartilha dessa opinião sobre a postura de Cardano e expõe:

[16] Para mais detalhes sobre a desavença entre Tartaglia e Cardano, ver Fossa (2008).

[17] A necessidade da abordagem caso por caso é devido à ausência do simbolismo algébrico e a não utilização dos números negativos como coeficientes.

> In Cardano's *Ars Magna*, we witness a definite struggle for existence between the old, venerated tradition of Euclid and the Arabs and the new, untried ideas of the sixteenth century. At the same time he tried to maintain the Euclidean standard, Cardano acknowledged the solution of the fourth degree equations, a discovery which he could not completely justify within his chosen framework. While desirous of purely geometrical interpretations of algebraic facts, Cardano admitted that negative numbers satisfied certain equations in spite of the fact that negative lengths, areas, and volumes made no sense. Even in light of the thorny geometrical problem presented by unadorned negative numbers, Cardano conceded that their square roots yielded to algebraic manipulation and provided solutions to equations.

Diante do exposto e do analisado, concluímos que a mais importante inovação encontrada em *Ars Magna* é a ampliação do poder das ferramentas da álgebra, bem como também uma maior autonomia dos métodos algébricos diante da supremacia da geometria até então vivenciada. Essa mudança desencadeia reflexões sobre os fundamentos da matemática, que como veremos mais adiante contribuirá para a adoção de uma nova concepção de matemática. Anjos (2012, p.39) ressalta esse caráter transformador de *Ars Magna* ao considerá-la como “um passo definitivo para a construção da autonomia da álgebra [...]”.

No que se refere especificamente à problemática em torno da aceitação dos números negativos, a publicação de *Ars Magna* foi de significativa relevância, pois a introdução da já citada mudança de postura no tratamento algébrico, acarretava como consequência direta o enfraquecimento do obstáculo geométrico, argumento comumente utilizado como suporte para rejeição desses números. Sendo assim, podemos dizer que *Ars Magna* pavimenta o caminho para a futura axiomatização da álgebra, fato que transpõe por completo todos os obstáculos à aceitação dos negativos.

De forma mais pontual, podemos citar ainda a presença de um capítulo no qual o autor aborda três maneiras em que quantidades negativas podem ser postuladas na resolução de problemas como outra contribuição desta obra no que se refere à aceitação dos negativos. De acordo com Fossa (2008, p. 177), em um desses problemas, Cardano aceita “um número negativo como solução em uma situação que lida com números puros e, portanto, sem possibilidade de usar a analogia de débito”, o que sugere juntamente com outros trechos, que faz referência a volumes negativos, que Cardano aceita plenamente os números negativos.

Verificamos ainda que Cardano vai mais além e, em outro problema também, sem contexto prático, apenas numérico, ele aceita os números imaginários[18] como resposta, apesar de não possuir muita compreensão sobre estes. Para Cardano, esses números não eram nem positivos nem negativos, mas algum terceiro tipo de coisa de natureza estranha. Coube a Rafael Bombelli (1526 - 1572) desvendar os mistérios dessa entidade estranha. Em 1572, Bombelli publica *L'Algebre,* onde esclarece por completo as regras das operações aritméticas para os números imaginários.

Segundo Fossa (2008), a obra de Bombelli disponibiliza argumentos poderosos para a aceitação dos números imaginários, pelo menos como ferramenta na resolução de equações, pois além das regras de manipulação, Bombelli mostrou também que o estudo por ele desenvolvido estava de acordo com fórmulas de Cardano para resolver equações cúbicas.

O ambiente matemático do fim do século XVI era bastante favorável aos números negativos. A publicação de *Ars Magna,* contendo regras para solucionar equações até o quarto grau e de *L'Algebre*, com as regras de manipulações dos imaginários, evidenciaram a incapacidade da geometria de justificar todas as questões relacionadas à matemática. Essas novas descobertas indicavam que o principal entrave à legitimação dos números negativos, o modelo geométrico euclidiano, estava próximo de ser superado.

Em meio a esse ambiente, a publicação de *In Artem Analyticam Isagoge* (1591), do francês François Viète (1540-1603), pode ser vista como mais uma importante contribuição no caminho da futura aceitação dos negativos.

Segundo Pycior (1997), o principal objetivo de Viète com essa publicação era apresentar um método mais eficiente para lidar com a resolução de equações. Para tanto, desenvolveu o que Viète chamou de método analítico. Segundo Fossa (2008), a maior inovação desse método é a proposta de investigar equações através da manipulação de símbolos em vez de números. Devido a essa intenção, *Isagoge* costuma ser indicada como o marco que inicia a passagem de uma abordagem matemática de retórica para uma simbólica.

---

[18]Denominavam-se números imaginários os números que possuíam em sua composição a raiz de índice par de um número negativo. Atualmente estes números compõem o conjunto dos números complexos, sendo utilizada a denominação número imaginário quando a parte real do número complexo é zero.

Embora, atualmente, seja inquestionável que a aceitação dos números negativos só se torne viável mediante a abordagem da matemática por meio de um sistema simbólico, como o proposto por Viète, o que presenciamos é uma controvérsia, pois o próprio Viète rejeitou a existência desses números. Sobre isso, Fossa (2008, p. 147) explica:

> [...] os dois problemas, o de números 'impossíveis' e o de simbolismos, são simbiônticos. A simbiose, no entanto, só seria reconhecida mais tarde, o que tornou a situação histórica bastante complexa, pois no século XVI, Cardano experimentou livremente os números negativos e imaginários, usando a álgebra retórica, enquanto Viète criou a álgebra simbólica, mas não aceitou os negativos nem os imaginários.

A explicação para Viète rejeitar os negativos é em razão de o método desenvolvido por ele ter como fonte principal a matemática grega de Pappus e Diofanto. Segundo Anjos (2012), Viète teria conservado o conceito de *mônada*, fundamental na teoria de Diofanto, porém, essa ideia, como já mencionado, inviabilizava a aceitação dos números negativos.

Essa explicação nos parece bem coerente, pois na análise feita por Fossa (2008), sobre a obra *Isagoge,* ele ressalta que para Viète "O símbolo $-B$ não é compreendido como um número negativo, mas como 'o nome negativo' de número". (FOSSA, 2008, p. 188). Anteriormente, havíamos sugerido igual compreensão ao analisar os negativos nos trabalhos de Diofanto.

Apesar de as obras de Cardano, Bombelli e Viète terem desenhado um cenário bastante favorável à legitimação dos números negativos como entidades matemáticas independentes, o que observamos, por meio do estudo das principais literaturas sobre os números negativos é que entre os séculos XVII e XVIII, esses números são aceitos por alguns matemáticos renomados de diferentes origens, porém rejeitados por outros. Entre os que aceitavam e utilizavam sem restrições, destacamos o francês René Descartes (1596-1650), o holandês Albert Girard (1595-1632) e o suíço Leonard Euler (1707-1783). Cada um desses contribuiu de alguma forma para uma maior aceitabilidade dos negativos, porém nenhum deles conseguiu pôr fim a problemática que já durava tanto tempo.

Segundo Schubring (2005), Girard não tinha restrição quanto ao uso dos negativos, pois em seu livro *Invention nouvelle en l'Algebre,* de 1629, ele defende expressamente que as raízes negativas não devem ser omitidas e declara que as raízes quadradas de 9 são $+3$ e -3. Esse autor indica ainda Girard como sendo um dos primeiros a sugerir a igualdade entre o número de raízes de uma equação e seu grau. No capítulo posterior, veremos que essa igualdade foi o motivo de uma acirrada discórdia entre opositores e defensores dos números negativos.

Quanto a Descartes, Pycior (1997) ressalta que ele não chegou a formular o conceito de número negativo como entidade matemática independente, embora tenha regularmente simbolizado e trabalhado com os negativos de forma isolada. Através das seguintes palavras dessa autora: “But even then he conceived of — q not as a single entity in itself but rather as the quantity q marked by the sign –” (PYCIOR, 1997, p. 82), podemos perceber que para Descartes os números negativos se assemelham aos positivos. Essa ideia também pode ser observada em Schubring (2005, p.46), ao relatar que “although Descartes extensively operated with negative numbers, these were not completely employed on an equal basis with positive numbers, but with some restrictions due to epistemological reservations and to a specific concept of quantities”.

Ainda segundo Pycior e Schubring, Descartes caracterizou os negativos como sendo *menor do que nada*. Para comprovar esse fato, Schubring cita o seguinte trecho: “It often happens that some of the roots are false, or less than nothing. Thus if we suppose *x* to stand also for the defect of a quantity, 5 say, we have $x + 5 = 0$ (DESCARTES, GÉOMÉTRIE, 445, *apud*, SCHUBRING, 2005 p. 47).

Descartes é ainda lembrado por ter sido o responsável por iniciar a construção do que hoje conhecemos como geometria analítica, embora o seu formato atual seja bem diferente da proposta dele. O grande mérito de Descartes é ter estreitado os laços entre a álgebra e a geometria, o que acarretou em contribuições para ambos os ramos.

Voltando aos negativos, Descartes reconheceu a importância desse número na teoria das resoluções de equações e se aventurou na tentativa de justificar a igualdade sugerida por Girard.

No que diz respeito a Euler, Anjos (2012), baseada nas ideias de Ferraro (2004), defende que Euler, ao considerar os números negativos como entidades que possuíam significado próprio, os diferenciava dos números verdadeiros, que para ele eram os naturais e as frações. Essa postura é interpretada por essa autora como uma alternativa desse matemático de utilizar os negativos sem entrar no cerne da sua existência. Embasado nessa justificativa, Euler não só aceitou as soluções negativas como também contribuiu no estudo dos números complexos e também tentou apresentar argumentos para justificar as regras de manipulações envolvendo quantidades negativas.

Diante de uma problemática, que já se estendia por tanto tempo sem um desfecho, como era o caso da legitimação dos negativos, era de se esperar que surgisse um acontecimento relevante que pusesse fim a esse embate e passássemos a ter uma unanimidade quanto à existência ou não dos números negativos. Porém, percebemos por meio da história que grandes mudanças não são provenientes de um único acontecimento, mas sim, de um conjunto deles.

Entre os acontecimentos que contribuíram para a futura aceitabilidade dos negativos, merece destaque o fato de a matemática dos séculos XVII e XVIII ter se desenvolvido essencialmente em torno do estudo dos infinitesimais, que posteriormente deram origem ao cálculo diferencial e integral. Com base no estudo do texto de Anjos (2012), identificamos algumas importantes contribuições do Cálculo para os negativos. A mais direta é a ampliação do conceito de número, que pode ser percebida por meio da seguinte colocação:

> [...] apesar dos desfechos da problemática dos infinitesimais e dos números negativos terem se estabelecido em contextos diferentes, o estudo envolvendo infinitesimais provocou discussões acerca da ampliação do conceito de número. (ANJOS, 2012, p. 53)

Além dessa contribuição, as diversas e importantes aplicabilidades do Cálculo na resolução de problemas do século XVII fizeram com que os infinitesimais fossem bastante utilizados pela maioria dos matemáticos desse período. Fato semelhante aconteceu também com os negativos, que encontravam justificativa para o seu uso na sua importância como ferramenta manipulativa.

O que presenciamos no início do século XVII foi uma menor valorização do rigor teórico, em nome dos avanços práticos, o que fez com que tantos os infinitesimais quanto os negativos, apoiados na necessidade de avanço, passassem a ser utilizados e também relativamente aceitos pela comunidade matemática, mesmo sem uma fundamentação rigorosa para ambos.

No entanto, a maior contribuição do Cálculo para os negativos vem justamente de uma postura contrária a esse relaxamento de rigor. A partir de meados do século XVIII, devido ao contraste entre o acelerado avanço das aplicações do Cálculo e a precária fundamentação deste, muitos matemáticos passaram a se dedicar a estudos relacionados aos fundamentos da matemática. Essa postura pode ser percebida na seguinte reflexão de Anjos (2012, p. 61) sobre a tentativa de Euler de explicar o produto entre duas quantidades negativas:

> Logo, ele [referindo-se a Euler], assim como a maioria dos matemáticos que aceitavam os negativos nesse período, mostrou tentativas de justificativas que não condiziam com a busca de fundamentação rigorosa, principal anseio dos matemáticos do século XVIII.

Como a geometria era o modelo de rigor historicamente consagrado, não é surpreendente que os matemáticos desse período tenham recorrido a ela para que esta, mais uma vez, oferecesse as justificativas para as novas descobertas.

Esse direcionamento para a geometria parece, em um primeiro momento, um retrocesso no caminho trilhado pelos negativos em direção a sua aceitabilidade. Porém, devido à geometria euclidiana não conseguir mais oferecer respostas satisfatórias às questões matemáticas, desde a descoberta de métodos para encontrar soluções de equações do terceiro e quarto grau e essa incapacidade ter se intensificado com os avanços das aplicabilidades dos imaginários e dos infinitesimais, novos horizontes começaram a ser buscados.

No caso dos números negativos, essa busca vem após uma forte oposição ao seu uso, que tem como um dos principais cenários[19] a matemática inglesa e os nomes de William Frend (1757-1841) e Francis Maseres (1731-1824). A postura rejeitadora assumida por esses dois matemáticos foi tão importante que atualmente é interpretada como fator motivador na busca para superar a ausência de fundamentação teórica para os números negativos. Devido a essa importância, as

[19] Embora a rejeição aos negativos não seja uma característica presente apenas na matemática inglesa, escolhemos ela como nosso objeto de estudo, devido a relevância que os matemáticos ingleses tiveram nesta discursão.

principais obras desses matemáticos configuram-se no nosso objeto de pesquisa do capítulo que seque.

Para o momento, finalizaremos, ressaltando que foi esse cenário de necessidade de fundamentação matemática e inaptidão do modelo até então utilizado que fez surgir a necessidade de alterações nos fundamentos da matemática como ciência, pois a concepção de matemática como uma ciência que lida apenas com quantidades não conseguia mais responder a todas as questões do início do século XIX. Segundo Anjos (2012), os responsáveis por essa mudança nos fundamentos da matemática, no que diz respeito à álgebra, é um grupo de matemáticos ingleses que

> [...] foi liderado por George Peacock (1791-1858), Charles Babbage (1792-1871) e John Herschel (1792-1871), fundadores da *Analytical Society* e principais expoentes de uma nova geração de matemáticos de Cambridge, que, tentaram, sobretudo, quebrar com o tradicionalismo inglês, especialmente em relação à álgebra. (ANJOS, 2012, p. 105)

Ainda sobre esse grupo, Fossa (2007a, p.52) relata que suas

> […] investigações em sistemas algébricos e lógicos transmudou o conceito vigente de álgebra de uma aritmética geral para ideia de que nas palavras de Nagel (1935, p. 437) a álgebra ‘ [...] is not concerned with any special interpretation of its symbols, but has as its subject matter the structure of systems of uninterpreted signs which are capable of any number of different interpretations’.

A esse grupo de matemáticos de Cambridge é atribuído o feito do desenvolvimento da moderna álgebra simbólica, principalmente depois da publicação de *Treatise on Algebra,* em 1830, por Peacock (1791-1858). De acordo com Anjos (2012, p.106), essa publicação “por meio de uma estrutura lógica, propiciou a aceitação completa dos números negativos”.

Segundo Fossa (2007a), mesmo que os argumentos de Peacock não tenham convencido a todos, *Treatise on Algebra* remove todos os obstáculos à aceitação dos números negativos, pois nessa obra “os números negativos, bem como os positivos, eram apenas símbolos não interpretados e as regras de sinal eram nada mais do que consequências da estrutura de um dado sistema axiomático” (FOSSA, 2007a, p. 53). Portanto, *Treatise on Álgebra* é assinalada como o marco que encerra a problemática em torno da legitimidade dos números negativos que, como vimos, fez parte da história da matemática desde a Antiguidade.

Por meio desse breve relato a respeito da história dos números negativos, ficamos conhecendo os motivos e justificativas da não aceitação desses números, bem como também as mudanças que tiveram que ocorrer nos fundamentos da matemática para que a sua legitimação acontecesse. No capítulo que segue, ampliaremos ainda mais o conhecimento sobre o assunto, estudando um pouco mais a rejeição inglesa, por meio do aprofundamento da vida e obra dos matemáticos ingleses Frend e Maseres. Como exposto anteriormente, estes, ao apoiarem sua rejeição aos negativos na falta de compatibilidade desses números com o modelo de matemática vigente na época, contribuíram significativamente com as mudanças nos fundamentos da matemática ocorrida no século XIX, que transformou a matemática em uma ciência formal.

2 A OPOSIÇÃO INGLESA AOS NEGATIVOS POR FRANCIS MASERES (1731-824) E WILLIAM FREND (1757-1841).

Conforme exposto no capítulo anterior, antes da axiomatização da álgebra por meio do trabalho de Peacock, em 1830, não existiam condições matemáticas suficientes que fundamentassem com o rigor desejado a existência dos números negativos, consequentemente a sua aceitação era motivo de discórdia entre vários matemáticos.

No decorrer do século XVIII e até meados do século XIX, a matemática inglesa se configurou como o principal cenário contrário à existência desses números. Como mencionado anteriormente, entre os opositores ingleses destacam-se os matemáticos Maseres, com as obras *A Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra,* publicada em 1758, e *Tracts on the Resolution of Affected Algebräick Equations,* publicada em 1800, e Frend, com *Principles of Algebra*, publicada em 1796.

Com o intuito de compreender melhor as bases teóricas da corrente de matemáticos ingleses que resistiam a aceitar a existência dos números negativos na virada do século XVIII, realizaremos, neste capítulo, uma análise detalhada das obras supracitadas. Nesta análise, além de conhecermos melhor as obras desses autores, temos como objetivos: identificar os argumentos utilizados para justificar a postura rejeitadora, assumida por eles, bem como também constatarmos as implicações que esse posicionamento acarretava na matemática em desenvolvimento na época.

Porém, antes de nos debruçarmos sobre as obras dessas duas referências quando o assunto é oposição à existência dos números negativos na Inglaterra do fim do século XVIII, consideramos relevante conhecermos um pouco de suas biografias.

2.1 UM POUCO SOBRE A VIDA E A OBRA DE WILLIAM FREND E DE FRANCIS MASERES

William Frend nasceu em 22 de novembro de 1757, em Canterbury, cidade que fica 100 quilômetros a sudeste de Londres. Perdeu sua mãe quando tinha apenas seis anos de idade. Seu pai, que era um importante comerciante e já havia ocupado o cargo de prefeito e vereador da cidade, desejava que Frend se tornasse um homem de negócios. Para tanto, o enviou para estudar em *Saint Omer*, na França, e depois para uma casa mercantil, em Quebec.

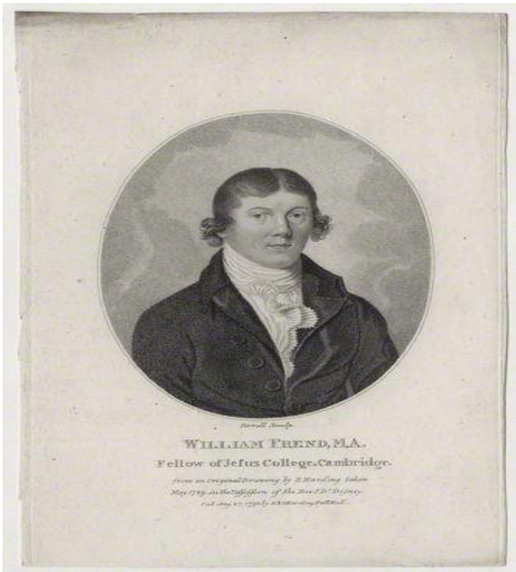


Figura 1- William Frend

Após seu retorno à Inglaterra, Frend manifestou a vontade de entrar para a Igreja da Inglaterra, e em dezembro de 1775 foi inscrito como pensionista no *Jesus College de Cambridge*. No fim de 1780, ele foi admitido diácono[20] na Igreja da Inglaterra. Nesse mesmo ano ele graduou-se bacharel em matemática pela Universidade de Cambridge. Essa universidade tem a tradição de realizar um exame

[20] O termo diácono é aplicado aos clérigos de igrejas de origem cristã e significa servo ou ajudante. Dependendo da tradição, o diácono pode ser permanente ou um estágio para a ordenação.

com os seus graduandos denominado de *Mathematical Tripos*, e ao aluno com as melhores notas nesse exame é concedido o título Senior Wrangler. Na Inglaterra, o termo Senior Wrangler se tornou sinônimo de supremacia acadêmica. Em 1780, Frend recebeu o Second Wrangler, que significa que ele foi o segundo melhor aluno nesse exame. Nesse mesmo ano ele foi agraciado juntamente com St John Priest com o Smith's Prize. Esse prêmio foi criado em 1769 e existiu até 1998, sendo que do ano de criação até 1885 era concedido aos dois graduandos de melhor desempenho em uma série de exames. Depois de 1885, o prêmio foi reformulado e passou a ser concedido para o melhor trabalho submetido na área de matemática aplicada. Embora um universitário de destaque, Frend nunca abandonou seu interesse de se tornar religioso e, em 1783, foi ordenado sacerdote da Igreja da Inglaterra.

Frend, que era um apaixonado por educação, idealizou, sugeriu e experimentou métodos de ensino em Medingley (Instituto de Educação Continuada, que faz parte da Universidade de Cambridge). Apesar da paixão, não foi nem como educador nem como matemático que obteve destaque na sociedade inglesa, mas sim, devido aos seus posicionamentos religiosos.

Em 1787, Frend deixou a Igreja da Inglaterra na qual ele havia sido ordenado para se tornar membro da Igreja Unitária[21]. Em 1793, Frend escreveu um folheto intitulado *Peace and Union recommended to the Associated Bodies of Republicans and Anti-republicans*, no qual denunciou abusos e condenou grande parte da liturgia da Igreja da Inglaterra. Por essa publicação, Frend foi acusado de ter violado as leis e o estatuto da universidade. Em 30 de maio do mesmo ano, após um polêmico julgamento descrito por ele em *An Account of the Proceedings in the University of Cambridge against William Frend,* ele foi condenado e obrigado a recuar nos seus posicionamentos, além de confessar seu erro. Como ele se recusou a cumprir a condenação, foi expulso da universidade. Depois dessa condenação, tornou-se uma figura de destaque entre reformadores religiosos ingleses.

Quanto às suas publicações, encontramos obras que abordam diversos assuntos, sendo que a maioria delas refere-se à economia, administração e religião.

---

[21] O unitarismo é uma corrente de pensamento teológico que afirma a unidade absoluta de Deus. Apesar de sua origem em igrejas cristãs, é geralmente identificado com as correntes de combate à Trindade.

As publicações matemáticas resumem-se em *Principles of Algebra*, publicada em 1796, *Tangible Arithmetic, or the Art of Numbering made Easy by means of an Arithmetical Toy*, publicada em 1805. Além de alguns artigos publicados nas obras de outros matemáticos, como os presentes na obra de Maseres, *Tracts on the Resolution of Affected Algebraick Equations*.

Embora Frend tenha ganhado destaque na sociedade devido a seus posicionamentos religiosos, a matemática foi algo sempre presente em sua vida, e nem mesmo sua expulsão como membro da universidade o afastou dela. Podemos comprovar esse fato observando que suas obras matemáticas anteriormente citadas são de datas posteriores a esse evento. Pycior (1982) reforça essa constatação ao relatar que a partir de 1828 Frend e Augustus De Morgan (1806-1871) foram amigos e debatedores matemáticos. Ainda segundo essa autora, nesses debates a problemática a respeito da existência dos números negativos e a natureza da álgebra eram assuntos que apareciam com certa frequência. Embora De Morgan não concordasse com a rejeição de Frend em relação à existência dos negativos e propusesse a abordagem simbólica como solução para o problema, ele admirava a clareza dos pensamentos de Frend em seus escritos, como se verifica nesse trecho, no qual ele comenta sobre a obra *Principles of Algebra*, “[...] is on the points which it treats, the clearest book in our language” (A. De Morgan 1842, p. 467 *apud* Pycior, 1982, p. 394).

A ligação entre Frend e De Morgan extravasou a amizade e os debates matemáticos, tornando-se familiar, em 1837, quando a filha mais velha de Frend, Sophia Elizabeth, casa-se com De Morgan. Pycior (1982) ressalta que Sophia Frend é uma mulher com características raras entre as mulheres do início do século XIX, pois, devido à educação recebida por seu pai, que era tratado como o seu companheiro intelectual, ela se interessava por matemática e ciências.

Quanto a Francis Maseres, ele nasceu em Londres, no ano de 1731. Era descendente de uma família rica de origem francesa que veio para a Inglaterra após a revogação do Édito de Nantes[22]. Maseres se formou no *Clare College Cambridge*

[22]O Édito de Nantes foi um documento histórico assinado em 13 de abril de 1598, que concedia a garantia de tolerância religiosa na França. No ano de 1685, o rei Luís XIV revogou a validade desse documento.

em 1752, em licenciatura em clássicos e matemática e obteve a quarta colocação no exame Mathematical Tripos e em 1755 obteve o título Master of Arts[23].

Figura 2- Francis Maseres

Além de matemático, Maseres era também advogado, porém não teve uma carreira de muito sucesso no campo jurídico. Alguns justificam esse fato pela sua característica de ser um homem tão íntegro e justo que se preocupava mais com a justiça do que com o ganho da causa do seu cliente. Em 1766, tornou-se procurador-geral de Quebec. Nessa província, participou de muitas discussões polêmicas envolvendo interesses jurídicos franceses e britânicos. Em 1769, após alguns atritos e sem muito sucesso na tarefa para a qual foi designado em Quebec, resolveu retornar à Inglaterra. As experiências vividas em Quebec inspiraram Maseres a publicar obras abordando assuntos relativos aos problemas políticos e religiosos dessa província.

Após o retorno à Inglaterra, Maseres retomou o lugar no Inner Temple[24], no qual já havia sido admitido em 1750, e nessa instituição chega a ocupar o mais alto

[23]O título Master of Arts (MA) é um grau superior concedido aos alunos que possuem grau de Bachelor of Arts (BA) da Universidade de Cambridge. Esse título equivale ao nosso mestrado.

[24] O Inner Temple é uma das quatro *Inns of Court* (associações profissionais de advogados e juízes) em Londres. O Inn é um corpo profissional que proporciona formação jurídica, seleção e regulação dos advogados.

cargo, o de tesoureiro[25], no ano de 1782. Maseres também se tornou membro da Royal Society em 1771, e em agosto de 1773, foi nomeado Cursitor Barão do Tesouro[26], cargo que ocupou até sua morte, aos 93 anos. No período de 1780 a 1822, foi também magistrado do Tribunal do Xerife de Londres.

Além de um homem influente na sociedade britânica, Maseres era também um homem de muitas posses. Como nunca se casou, dedicou parte da sua riqueza a financiar publicações de obras de autores que ele considerava dignos de assistência. Schaaf (2008), ao relatar sobre o lado positivo das contribuições matemáticas de Maseres, comenta que

> Perhaps the many publications with which he strove to bring mathematics to a much wider public were the most notable aspect of Maseres legacy. Some were original works; others were reprints of the works of distinguished mathematicians. [...] Of the reprints that Maseres made at his own expense, the most significant is the “Scriptores logarithmic” (1791-1807), six volumes devoted to the subject of logarithms, including works of Kepler, Napier, Snell, and others, interspersed with original tracts on related subjects.

Além de obras matemáticas, encontramos também, entre os trabalhos de autoria de Maseres, obras sobre ótica, questões jurídicas, religiosas e históricas.

2.2 UM PANORAMA GERAL DAS OBRAS *A DISSERTATION ON THE USE OF THE NEGATIVE SIGN IN ALGEBRA, TRACTS ON THE RESOLUTION OF AFFECTED ALGEBRÄICK EQUATIONS* E *PRINCIPLES OF ALGEBRA*

A obra de Maseres, *A Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra,* e a de Frend, *Principles of Algebra,* apresentam objetivo principal semelhante, pois ambas consistem de leitura para estudantes iniciantes[27] em álgebra e abordam

---

[25] O tesoureiro é quem lidera o parlamento, que é formado pelos Bencher. Para assumir o cargo de tesoureiro é preciso antes passar um ano como leitor.

[26] Um funcionário do tribunal do erário público, que é nomeado por patente.

[27] Por estudantes iniciantes entende-se alunos iniciantes do Curso de Matemática.

desde as definições básicas de operações em álgebra até métodos de resolução de equações. *Tracts on the Resolution of Affected Algebräick Equations* se diferencia destas, pois não se configura um livro para se aprender álgebra. Nessa última, o objetivo principal de Maseres é estudar, comparar e identificar vantagens e desvantagens dos métodos de resoluções de equações algébricas por aproximação desenvolvido por Joseph Raphson (1648-1715) e Edmund Halley (1656-1742).

A escolha dessas três obras para análise se justifica pela forte ligação entre elas no que se refere à concepção dos números negativos. No entanto, mais do que um posicionamento explícito de não aceitação à ideia da existência dos números negativos, essas obras apresentam também capítulos em comum e autorias divididas. No livro de Maseres, *Tracts on the Resolution of Affected Algebräick Equations,* encontramos dois capítulos de autoria de Frend; já na obra de Frend, o apêndice inteiro é de autoria de Maseres. Essa intersecção de capítulos e de autoria deixa clara a ligação existente entre os posicionamentos desses dois matemáticos.

A obra Principles of Algebra é composta de duas partes e um apêndice localizado entre elas. A primeira parte, como já relatamos, consiste de um livro para iniciantes em álgebra. Segundo Frend (1796) explica no prefácio, trata-se de um livro que foi escrito para ser usado nas escolas com o intuito de introduzir meninos e meninas no estudo de álgebra. Ele deixa claro também que não tem pretensão de abordar assuntos mais avançados de matemática nem apresentar novas teorias na primeira parte dessa obra.

O foco principal da primeira parte é oferecer uma formação básica em álgebra, por meio de uma linguagem bem acessível e prezando sempre pela didática. Essa intenção pode ser percebida no trecho abaixo:

> It was not my intention, even if I had been able, to advance the bounds of science[28] by this work. There are several things also omitted, which, if the work had been intended for higher capacities, would have been inserted. Thus, the proof of the binomial theorem would have been given, and the limits of the roots of equations would have been enlarged upon. I had also drawn up a series of problems; but I deferred the publishing of them, both that I might see the reception which my ideas might meet with from the public, and also because I was unwilling that the learner should be prevented, by too long practice on some of the rules, from having as soon as possible a general idea of the principles. (FREND, 1796, p. xiii)

[28]Utilizaremos s em vez de ʃ nas citações diretas retiradas da obras analisadas, pois consideremos que evita confusão com o f.

Tendo em vista esse objetivo, na primeira parte Frend define termos algébricos, explica as quatro operações em álgebra, dedica capítulos a assuntos algébricos básicos, como frações e potência e também a métodos de resoluções de equações simples, de segunda e de terceira ordem.

De acordo com Frend (1796), embora já existam outras obras, que assim como a sua têm como objetivo principal oferecer os fundamentos algébricos para iniciantes, essa se diferencia das demais por não incluir os números negativos em sua teorização. Segundo Frend (1796), sua pretensão é escrever uma obra isenta de teorias relacionadas aos números negativos e também das afirmações sobre raízes impossíveis, termo utilizado para denominar raízes de números negativos com índice par. O trecho abaixo confirma esse posicionamento:

> Rejecting these strange ideas of number, I resolved to try whether the principles of algebra did not admit of an easy explanation, and whether every right solution, produced by the common mode from various errors in the premisses, and the reasoning upon them, might not be deduced by a mode of reasoning, to which there could be no objection. The event has answered my expectations, and the reader will see the difference between this and the common mode, by comparing the examples in this work with those in other authors (FREND, 1796, p. xi)

Frend complementa a justificativa da necessidade da sua obra declarando que ela teria atendido a suas expectativas. Diante dessa declaração de satisfação e da intenção de ser bastante didático, concluímos que a primeira parte de *Principles of Algebra* se configura uma das principais obras quanto à fundamentação teórica e a operacionalização da álgebra para os matemáticos que rejeitam a existência de números negativos.

O apêndice dessa obra é de autoria de Maseres e tem como objetivo principal apresentar ao leitor métodos de resolução de equações cúbicas e biquadráticas. Nele encontramos um estudo completo sobre a resolução de equações cúbicas que se inicia com as regras de Cardano[29] e se estende analisando a resolução de todos

[29] Por Cardano ter sido o primeiro a publicar formalmente as resoluções para equações cúbicas e biquadráticas, as regras para solucionar esse tipo de equação ficaram conhecidas por Regras de Cardano.

os tipos possíveis de representação de equações cúbicas. Na sequência, o mesmo é feito com as equações biquadráticas. Todo esse estudo é feito sem admitir a existência de raízes negativas como solução de equações algébricas, e por diversas vezes, críticas são feitas tanto a essa ideia como também aos seus defensores.

No estudo realizado no apêndice, encontramos também o método desenvolvido por Raphson para encontrar soluções de equações algébricas por aproximação. Esse método consiste num dos principais objetos de estudo de Maseres, na obra *Tracts on the Resolution of Affected Algebräick Equations*, que apresentaremos mais adiante. No momento, ressaltaremos apenas que o método desenvolvido por Raphson é o preferido por Maseres, mesmo esse autor aceitando raízes negativas como soluções de equações algébricas. Esta preferência fica clara quando Maseres embora, discordando de Raphson no que diz respeito à existência de raízes negativas, elogia e indica a leitura do seu tratado, como verifica-se no trecho que seguem:

> I therefore cannot but recommend it to all young Algebraists to study Mr. Raphson's excellent Treatise on this subject, intitled, *Anaysis Equationum Universalis*, with great attention, and to endeavour to make themselves masters of it, by going carefully through all the examples given in it, and performing all the arithmetical operations contained on them. And I will venture to say that they will thereby acquire more useful knowledge in Algebra, towards the business of resolving affected, or compound, or multinomial, equations, than by reading all that has been written by Harriot and Des Cartes, and his learned Commentator Van Schooten, and all his other Commentators, and their numerous followers, on the boasted doctrine of the Generation of Equations one from another […] into each other, and likewise all the abstruse and intricate matter that has been delivered by Sir Isaac Newton, and Mr. Gravesende and Mr. Mac Laurin, and other learned Algebraists of modern times, on the invention of Divisors, which is grounded on that doctrine of the Generation of Equations from each other. Art. III. Yet in reading this excellent Treatise of Mr.Raphson, which I so much recommend, there will now and then occur some difficulties which are not inherent in the subject itself, but which might have been avoided, if Mr. Raphson had not unfortunately adopted the perplexing doctrines of modern writers of Algebra, about negative quantities and negative roots of equations. The quantities called negative are such as it is impossible to form any clear idea of, being defined, by Sir Isaac Newton and other Algebraists, to be such quantities as are less than nothing, or as arise from the subtraction of a greater quantity from a lesser, which is an operation evidently impossible to be performed: and, as to the negative roots of an equation (MASERES, 1800, p. 285)

Devido a discordância quanto à existência de raízes negativas, Maseres sente a necessidade de fazer as adequações do pensamento desse matemático ao seu e escreve um texto intitulado *Observations of Mr. Raphson's Method of Resolving Affected Equations of Degrees by Approximation*, que se encontra no apêndice de *Principles of Algebra,* logo após terminar o estudo completo sobre a resolução de equações cúbicas e biquadráticas.

Segundo Maseres[30], esse texto tem por objetivo apresentar algumas correções necessárias na leitura do tratado de autoria de Raphson sobre a resolução de equações, intitulado *Anaysis Equationum Universalis*. Para Maseres, as correções não dizem respeito ao método de resolução de equações desenvolvido por Raphson, porém são necessárias devido ao autor ter adotado raízes negativas como soluções de equações algébricas, o que, segundo Maseres, ocasiona algumas dificuldades na compreensão da teoria desenvolvida por Raphson.

Tanto esse texto como os dois que complementam o apêndice de *Principles of Algebra*, *An Explication of Simon Stevin's General Rule to extract one Root out any possible Equation in Number, either exactly or nearly true* e *A Remark on an Error in the Reasoning of the late learned French Mathematician Monsieur Clairaut, in that Part of his Elements of Algebra in which he endeavours to prove the Rules of Multiplication laid down by Writers on Algebra concerning Negative Quantities* encontram-se reproduzidos no livro de Maseres, *Tracts on the Resolution of Affected Algebräick Equations,* publicado em 1800, que será nosso objeto de estudo mais adiante.

A segunda parte de *Principles of Algebra* só foi publicada em 1799. Nela verificamos que Frend complementa os ensinamentos iniciais da primeira parte oferecendo um estudo detalhado sobre o número de raízes que uma equação algébrica possui e também algumas formas de obtenção dessas raízes. Vale a pena salientar que esse assunto foi um tema bastante polêmico na época e que dividiu a opinião de muitos matemáticos. A busca por uma regra geral para número de raízes de uma equação fez com que muitos matemáticos se convencessem da existência de raízes negativas e consequentemente passassem a aceitar a existência dos números negativos. Devido à forte ligação entre esses dois assuntos, voltaremos a abordá-los mais detalhadamente adiante.

---

[30] Esta ideia de Maseres encontra-se no apêndice do livro *Principles of Algebra,* que é de autoria de Frend.

Para o momento, finalizaremos as observações sobre *Principles of Algebra,* concluindo que esse não é apenas mais um livro de álgebra. Na verdade, é uma obra pensada e escrita com o intuito de oferecer um embasamento teórico algébrico aos que compartilham da rejeição aos números negativos. Suas duas partes, juntamente com o apêndice, disponibilizam aos seus leitores uma abordagem dos assuntos algébricos dos mais simples aos mais complexos, pautados sempre em enfoques contrários aos negativos.

Quanto as obras de Maseres, analisaremos primeiro *Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra: Containing a Demonstration of The Rules Usually Given Concerning It, and Shewing How Quadratic and Cubic Equations May be Explained without the Consideration of Negative* Roots. Já no título, Maseres deixa claro que sua intenção, com essa obra, é apresentar uma álgebra fundamentada na ideia de que os números negativos não existem. Está intenção é reforçada no primeiro parágrafo do prefácio, no qual o autor expressa que

> The design of the following dissertation is to remove from some of the less abstruse parts of Algebra, the difficulties that have arisen therein from the too extensive use of the Negative Sign, and to explain them without considering the Negative Sign in any other light than as the mark of subtraction of lesser quantity from a greater. (MASERES, 1758, p. i)

Dessa forma, logo no início, seu leitor fica ciente de que objetivo de Maseres, com essa obra, é expor uma álgebra em que o sinal negativo tem apenas um único significado, a marca que indica a subtração de uma menor quantidade de uma maior.

Para atingir tal objetivo, Maseres começa a obra apresentando algumas definições e as respectivas demonstrações para as operações de Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão de termos algébricos. Vale a pena salientar que argumentos geométricos são utilizados em muitas dessas demonstrações.

Essa primeira parte, embora fundamental para a compreensão da teoria abordada nos tópicos posteriores, ocupa apenas quinze páginas da obra. A maior parte do livro é dedicada ao estudo completo e detalhado dos métodos de resoluções de todos os possíveis casos de equações quadráticas e cúbicas. Esse estudo assemelha-se ao exibido pelo próprio Maseres no apêndice de *Principles of Algebra,* sendo que neste último ele vai mais além e aborda também resoluções de equações biquadráticas. Apesar de semelhantes, estes dois estudos desenvolvido por Maseres sobre resolução de equações, se diferenciam pelo fato dele utilizar-se em seu livro de demonstrações geométricas para chancelar suas teorias algébricas, algo que não acontece no estudo realizado no apêndice do livro de Frend.

A explícita valorização da geometria como modelo de ciência talvez seja a diferença mais marcante entre a postura destes dois autores, que apresentam posicionamentos tão semelhantes e até obras de autoria dividida. Esta constatação embasou-se no fato de não identificarmos em momento algum, no livro de Frend, o uso de demonstrações geométricas para validar a teoria algébrica por ele desenvolvida. Já Maseres, além de fazer uso deste recurso, defende explicitamente o modelo geométrico como padrão de rigor a ser seguido.

No que diz respeito à oposição de Maseres a existência dos números negativos, Schubring (2005) constata que a maneira como esse autor aborda a resolução de equações quadráticas e cúbicas evidencia o seu entendimento de que os únicos números que existem, são os números positivos. Concordamos com Schubring (2005) e estendemos esta constatação para Frend, pois mesmo não fazendo uso da geometria, observamos que no que diz respeito à resolução de equações, esse autores assumem posturas semelhantes. Citemos por exemplo, o estudo de resolução de equações do segundo grau, no qual verificamos que, ambos os autores, reduzem todos os tipo de equações mistas, deste grau, as três formas a seguir: $xx + px = r$, $xx - px = r$ e $px - xx = r$, onde p e r são números estritamente positivos. A inexistência da quarta maneira de combinar os termos de primeiro e segundo grau, que resultaria na equação da forma $-xx - px = r$ é decorrência da postura rejeitadora assumida por estes autores, pois nesta última forma de equação quadrática, ambas as soluções são negativas, o que para eles é impossível, portanto esta forma de equação não existe.

Mesmo Maseres, semelhante à Frend, explicitando que sua obra *Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra* destinava-se a iniciantes no estudo de álgebra e que nela nenhum assunto novo é abordado, ele a classifica como uma leitura importante, pois para o autor consiste em uma tentativa de abordar assuntos algébricos com a mesma clareza e rigor com que os livros de geometria eram escritos, algo que segundo Maseres (1758) não vinha sendo realizado por outros autores. Este defesa sobre o mérito da sua obra pode ser verificado no seguinte trecho

> The merit of it consists entirely in its being an attempt to treat the Science of Algebra with the same perspicuity and accuracy of reasoning that has usually been thought necessary in books of Geometry, but which, through causes not very easy to be fixed upon with certainty, has been almost universally neglected in books of Algebra. (MASERES, 1758, p. ii)

Além de uma valorização do modelo geométrico e de uma crítica a postura dos autores que fazem uso dos números negativos, neste trecho Maseres chama a atenção também para relaxamento com que os conceitos matemáticos vinham sendo trabalhados na matemática desenvolvida no final do século XVIII. Este cenário de menor valorização do rigor matemático foi herdado do século XVII, com o desenvolvimento do Cálculo, pois como comentado no capítulo anterior, em prol dos avanços práticos, tanto os infinitesimais, como os negativos e os complexos passaram a ser utilizados sem fundamentação.

Diante do exposto fica claro que diferentemente do que fez Peacock, que vislumbrou uma maneira de fundamentar os negativos, ampliando a álgebra para além da aritmética, Maseres preferiu reforçar a geometria como modelo de ciência a ser seguido, e ao tomar esse posicionamento, a rejeição aos negativos decorre como consequência direta, pois, no modelo geométrico, os negativos não possuem significação. Essa constatação de que a visão algébrica de Maseres resume-se apenas à aritmética é reforçada com o destaque que o autor faz sobre a argumentação por ele desenvolvida embasar-se apenas nas razões e nos princípios que fundamentam as operações básicas da aritmética, o que, segundo ele, faz com que a compressão da sua obra não necessite de nenhum conhecimento prévio de matemática.

Dando sequência a alegação de imprudência no tratamento dos assuntos algébricos, Maseres elenca alguns possíveis motivos para essa falta de precisão. Dentre esses, destacamos o fato de a álgebra ser

> […] expressed only in words, or in any abstract notation, wherein the senses are not concerned, men are much more easily deceived and for the same reasons, a defect of proof, or a hasty extension of a conclusion justly drawn in one case to several other cases that bear some resemblance, but not a

> complete one, to it, may be much more easily perceived in Geometry than in Algebra. (MASERES, 1758, p. iii)

Por fim, ele conclui que independentemente do motivo, é inquestionável que os assuntos algébricos estavam sendo tratados pelos escritores da época de forma bem menos precisa do que os assuntos geométricos e se utiliza desse fato para mais uma vez justificar a importância da sua obra.

Diante do exposto, fica claro que a rejeição de Maseres às abordagens algébricas que aceitam os números negativos, se alicerça na ausência de uma fundamentação sólida e rigorosa desses números, que como vimos no capítulo anterior, só foi possível com a ampliação do conceito de número para além da representação de quantidade e medidas, junto com a axiomatização da álgebra.

Como já mencionado no início, *Tracts on the Resolution of Affected Algebräick Equations*, também de autoria de Maseres, se difere das duas obras até o momento analisadas por não ser uma obra para iniciantes e também por possuir um objetivo bem específico, como pode ser percebido logo no início do prefácio, como segue:

> The principal object of the present Collection of Tracts is to explain, and illustrate by examples, Mr. Raphson's and Dr. Halley's Methods of Resolving Affected Algebraick Equations by Approximation, and to compare these two methods with each other, in order to be able to form a judgement of their respective merits and determine to which of them we ought to give the preference. (MASERES, 1800, p. v).

Por meio da análise realizada nessa obra, percebemos que o objetivo pretendido pelo autor, de estudar métodos de resoluções de equações algébricas afetadas por aproximação, desenvolvidos por Raphson e Halley, é atendido logo nos dois primeiros capítulos do livro. Nos capítulos seguintes, embora Maseres continue a abordar assuntos relacionados com os métodos de resoluções de equações por aproximação, esses não mais são a sua principal ocupação.

Na verdade, Maseres utiliza-se desse tema para mostrar que a aceitação de algumas considerações relacionadas aos números negativos, aceitas e empregadas por Raphson e outros matemáticos da época, geram dificuldades à compreensão das teorias que as utilizam. Essa constatação pode ser percebida, por exemplo, quando o autor apresenta duas resoluções de um mesmo problema que faz uso de métodos de resolução por aproximação, sendo que uma das resoluções utiliza os números negativos, e a outra, não. Vale a pena ressaltar que o capítulo em que se encontra a solução, que não utiliza os números negativos, é de autoria de Frend. Ao apresentar essas duas resoluções, Maseres objetiva mostrar ao leitor que os números negativos podem ser excluídos da resolução e mesmo assim a solução pode ser alcançada.

Outro fato que ficou evidente é que, para Maseres (1800), os métodos de resolução por aproximação, apesar de importantes para o avanço da álgebra, precisariam de adequações. O capítulo reproduzido do apêndice de *Principles of Algebra* intitulado *Observations of Mr. Raphson's Method of Resolving Affected Equations of Degrees by Approximation,* o qual já foi comentado anteriormente, deixa clara essa necessidade. Como vimos, nesse capítulo, Maseres pretende alinhar as ideias expostas por Raphson com as dele, excluindo do método desenvolvido por Raphson a utilização de raízes negativas. A rejeição de Maseres à existência de raízes negativas é tanta que ele chega a afirmar que a aceitação dessa ideia seria uma desonra à álgebra, como podemos perceber no trecho a seguir:

> […] adopted the doctrine and language of *negative roots* of equations, by which the Science of Algebra, or Universal Arithmetick, has been disgraced and rendered obscure and difficult, and disgusting to men of a just taste for accurate reasoning, ever since it's introduction by Harriot and Des Cartes. (MASERES, 1800, p. LV)

Apesar de os métodos de resolução de equações por aproximação serem o assunto principal do livro e encontrem-se presentes em quase todos os capítulos, constamos que Maseres tomou esse tema como pano de fundo e desenvolveu na obra inteira uma forte fundamentação contrária à existência dos números negativos. Essa conclusão é reforçada no Capítulo VII, intitulado: *A Remark on an Error in the Reasoning of the late learned French Mathematician Monsieur Clairaut,* reproduzido do apêndice do livro de Frend e no Capítulo X, intitulado: *Remarks on the Number of Negative and Impossible Roots in Algebräick Equations,* pois consistem de artigos escritos com o objetivo de refutar argumentos favoráveis aos números negativos.

Diante do estudo realizado nas obras de Maseres, fica explícito que a pretensão desse autor nessas obras não é apenas ensinar álgebra nem ilustrar métodos de solucionar equações algébricas, mas sim, expor uma sólida fundamentação teórica contrária à doutrina de aceitação à existência dos números negativos.

O panorama supracitado apresentado reafirma a relevância das obras matemáticas de Maseres e Frend aqui estudadas como referencial teórico para a postura rejeitadora inglesa do fim do século XVIII. Assim sendo, a partir de agora, aprofundaremos nossa investigação nessas obras, centrando nossa atenção na compreensão dos principais argumentos utilizados por esses autores para justificar a rejeição aos números negativos. Mais adiante, estudaremos também as implicações que esse posicionamento acarretava para a matemática em desenvolvimento na época.

2.3 ARGUMENTOS CONTRÁRIOS AOS NÚMEROS NEGATIVOS SEGUNDO MASERES E FREND

Um argumento frequentemente utilizado tanto por Maseres como por Frend em suas obras para justificar a rejeição à existência dos números negativos é a falta de uma definição clara para esses números. Para eles, o sinal negativo simboliza única e exclusivamente a operação de subtração; portanto, o uso desse símbolo carrega em si a obrigatoriedade da existência de duas quantidades. Considerando apenas esse significado para o sinal negativo, eles argumentam que uma quantidade isolada precedida do sinal negativo não tem significado algum e que qualquer dedução obtida a partir dessas quantidades ficaria submetida à impossibilidade da garantia de sua veracidade.

Esse argumento permeia toda a obra de Maseres, porém torna-se mais evidente no tratado *A Remark on an Error in the Reasoning of the late learned French Mathematician Monsieur Clairaut,* presente tanto em*Tracts on the Resolution* *of Affected Algebräick Equations,* como no apêndice de *Principles of Algebra.* Devido às ideias discutidas nesse tratado fornecerem contribuições importantes para a compreensão da concepção de números negativos tanto para Maseres como para os seus seguidores, analisá-lo-emos de forma mais detalhada.

O objetivo de Maseres ao escrever o tratado anteriormente mencionado é chamar a atenção e consequentemente corrigir um erro que, segundo ele, o matemático francês Alexis Claude Clairaut (1713-1765) cometeu em seu livro *Elémens D'Algebre,* publicado em 1749, ao demonstrar a proposição que garante ser um número positivo o produto entre dois números negativos. Antes de nos debruçarmos sobre esse debate, consideramos relevante fazermos uma breve apresentação de Clairaut e qual o seu posicionamento em relação os negativos.

Clairaut foi o único dos vinte filhos de seus pais que atingiu a idade adulta. Em julho de 1731, com apenas 21 anos, ele se tornou a pessoa mais jovem eleita para a Academia de Ciências de Paris. Clairaut é conhecido principalmente por suas pesquisas na área de física-matemática. Apesar de ter dedicado grande parte de seus estudos a assuntos mais avançados da matemática, em 1741 e em 1749 ele escreve dois livros dedicados ao ensino. O primeiro sobre geometria, e o segundo sobre álgebra. De acordo com Schubring (2005, p. 102), esses dois livros "attempt to realize a methodological approach according to which the respective mathematical concept field evolves in a seemingly 'natural way' from simple inquiries or from useful problems".

No que se refere aos negativos, segundo Schubring (2005, p. 102), "for Clairaut, negative numbers did not represent a mathematical problem, but rather a didactical one". Talvez seja por esse motivo que ele dedique quase quatro páginas, das quinze do prefácio do seu livro de álgebra, para explicar pedagogicamente a necessidade das operações com os números negativos e, em particular, a regra de sinais, assunto criticado por Maseres no artigo o qual discutiremos na sequência. Complementando o entendimento de Clairaut em relação aos negativos, Schubring (2005) expõe ainda que, diferentemente dos outros autores franceses que preferiam alterar a equação para que as soluções negativas se transformassem em positivas, Clairaut em seu livro discutia como os valores negativos poderiam ser compreendidos no contexto do problema proposto. Para ilustrar sua postura, Clairaut cita como exemplo um problema que envolve duas fontes enchendo tanques com água, que ao ser resolvido por um sistema de equações, encontra-se como respostas -30 e 40. A raiz negativa é interpretada pelo matemático francês como se a fonte estivesse retirando água, em vez de colocando. Ainda segundo Schubring (2005), ao reconhecer as soluções negativas por reinterpretações, Clairaut reforça a ideia de generalidade da álgebra, pois em vez de excluir soluções, incorpora outras que inicialmente não haviam sido planejadas pelo problema.

Voltando ao artigo escrito por Maseres, verificamos que Clairaut, para justificar seu pensamento, utiliza-se da proposição que garante ser o produto de $(a - b)$ por $(c - d)$ igual a $ac - bc - ad + bd$, e argumenta que nenhuma especificidade foi posta para os valores de a e c nessa proposição, podendo então esses assumirem quaisquer quantidades, inclusive o zero. Segundo Clairaut, para obter a demonstração da proposição pretendida, bastaria considerar $a = c = 0$, e ao utilizar-se da proposição anterior teríamos a expressão $(0 - b)$ multiplicada por $(0 - d)$ resultando em $0.0 - b.0 - 0.d + bd = +bd$, ou de forma mais sucinta $(-b)$ multiplicado por $(-d)$, resultando em $+bd$. Essa explicação pode ser encontrada no 9º artigo, página 73, do livro de Clairaut, com as seguintes palavras:

> *Pour nous assurer que la multiplication de — par — doit toujours donner + au produit, voyons quelle lumiére nous pouvons tirer de la méthode générale des multiplications donnée dans Art, xlv. Suivant cette méthode on voit très clairement que le produit d'une quantité telle que $a - b$ par une autre $c - d$ doit être $ac - bc - ad + bd$; et on voit par conséquent en même temps que le terme bd, qui est venu par la multiplication de b, et de d, a le signe $+$, tandis que ses produisants b et d ont le signe —. Il ne reste donc plus, qu' à savoir si, lorsque deux quantités negatives, telles que b et d, ne seront précèdées d'aucune quantité positive, leur produit sera encore $+bd$. Or c'est ce dont il est f*acile de reconnoitre la vérité, puisque la méthode par laquelle on a découvert que le produit de $a - b$ par $c - d$ étoit $ac - bc - ad + bd$, ne spécisiant aucune grandeur particuliére ni *à* a ni à c, doit avoir encore lieu lorsque ces quantités sont égales à zéro. Or, en ce cas, le produit $ac - bc - ad + bd$ se réduit à $+bd$. Donc $- bx - d$ est $= +bd$. (CLAIRAUT, 1749, p. 73 *apud* MASERES, 1800, p. 340)

Embora Maseres concorde que o produto de $(a - b)$ por $(c - d)$ seja $ac - bc - ad + bd$, ele discorda da demonstração apresentada por Clairaut, no que se refere a a e c serem valores quaisquer. Para ele, apesar de a e c não serem números particulares, nem quantidades que têm uma relação fixa com b e d, estes jamais devem ser supostos menores do que b e d, respectivamente. Maseres (1800) enfatiza ainda que Clairaut, em toda a parte inicial do seu livro, concebe a subtração apenas entre quantidades, na qual a quantia a ser retirada é sempre menor ou igual à quantia de onde se está retirando. Essa ênfase pode ser verificada por meio da afirmação:

> [...] the author not having hitherto given us any other idea of the sign — but that of it's denoting the subtraction of the quantities to which it is prefixed from those which go before them; in order to which it is necessary, and is constantly supposed in all the foregoing part of the book, that the said quantities, to which the said sign is prefixed, should be less than those that go before them. (MASERES, 1800, p. 341)

Maseres segue argumentando que, no momento em que Clairaut supõe a e c iguais a zero, ele contraria a sua própria definição para o sinal negativo: “Prenant le caractere —, qui se prononce moins, pour faire ressouvenir que la quantité qu'il précéde doit étre retranchée de celle qu'il suit”. (CLAIRAUT, 1749, p. 4 *apud* MASERES, 1800, p. 340), pois estaria retirando uma quantidade maior de uma menor.

Após essa análise, é notório que a contra-argumentação de Maseres tem como foco principal a ausência de uma definição para número negativo. A relevância, para Maseres, da clareza dos termos envolvidos em uma demonstração pode ser percebida na seguinte afirmação: “*This Proposition he should have, first, made intelligible, by telling us what he meant by a negative quantity, before he undertook to demonstrate it*” (MASERES, 1800, p. LIX). Entretanto, é importante ressaltar que a rejeição de Maseres à demonstração apresentada por Clairaut não se resume apenas à ausência de uma definição para esses números. Diferentemente do que se possa imaginar, já existiam, naquela época, algumas definições para números negativos apresentadas por algebristas que aceitavam a sua existência. O próprio Maseres (1800) cita as definições oferecidas por Nicolas Saunderson (1682-1751) e Colin Maclaurin (1698-1746), como sendo:

> When a greater quantity is taken from a lesser of the same kind, the remainder becomes of the opposite kind.— *Mac Laurin's Algebra, page 5.*
>
> An affirmative quantity is a quantity greater than nothing, and is known by this sign, + ; a negative quantity is a quantity less than nothing, and is known by this sign, −. —*Saunderson’s Algebra, Vol. I. page 50, Article 2.* (MASERES, 1800, p. 286)

Mas, para Maseres, tanto essas como qualquer outra definição que venha a ser oferecida não esclarecerá o significado desses números, pois para ele os números negativos não existem, consequentemente não podem ser definidos. Portanto, mais que uma ausência de definição, para os rejeitadores, o que existia era a impossibilidade de definição desses números.

Embora a impossibilidade de definir quantidades negativas não seja algo explícito nas colocações de Maseres e Frend, ela pode ser percebida de forma implícita, por exemplo, no trecho que segue, retirado do prefácio de *Principles of Algebra:*

> You may put a mark before one, which it will obey: it submits to be taken away from another number greater than itself, but to attempt to take it away from a number less than itself is ridiculous.Yet this is attempted by algebraists, who talk of a number less than nothing, of multiplying a negative number into a negative number and thus producing a positive number, of a number being imaginary. (FREND, 1796, p. X)

Por meio dessa afirmação, Frend esclarece que, para eles a presença do sinal negativo implica obrigatoriamente a subtração entre duas quantidades, sendo que essa operação só é possível quando a quantidade de onde se está retirando é maior ou igual à que está sendo retirada. Portanto, definir número negativo como sendo uma quantidade menor do que nada, ou proveniente da subtração de uma maior quantidade de uma menor, é para ele uma ideia absurda.

Outro exemplo que podemos citar para reforçar nossa argumentação são as explicações de utilização do sinal negativo expressas por Frend em:

> In writing down numbers with their relations in algebra, it is improper to begin with any of the marks but those of number. The number must be first written down to or from which another is to be added or taken away, into or by which another is to be multiplied or divided. The same is also obviously necessary for the marks of equality or difference.It is improper to write thus:$-a + bxc = \frac{d}{f}$; it should be $bxc - a = \frac{d}{f}$. Again to write thus, $bxc - a = -f,$ is not only improper, but absurd, as will be seen by attempting to read it. From b into c take a, the remainder is equal to some number which we will call m; but the mark — before f denotes that it is to be taken away from some number which is not written down, and we cannot make any sense of the expression — f. (FREND, 1796, p. 4)

Essas explicações reforçam o posicionamento de que para Frend o sinal negativo é uma marca que transmite apenas a ideia de retirar, portanto não tem significado algum se utilizado no início de uma expressão, se colocado antes de um número ou se for trabalhado de forma isolada para obter generalizações, ou seja, inexiste de forma independente.

Estudando Pycior (1982), verificamos que outro argumento bastante utilizado por Frend para não aceitar a existência dos números negativos seria o fato de que a adoção desses termos carentes de uma definição fazia com que a álgebra passasse da categoria de ciência para a de arte. Esse argumento aparece de forma explícita em uma carta de Frend a De Morgan, na qual o conteúdo versa sobre a avaliação de Frend a respeito do livro *Elements of Algebra Preliminary to the Differential Calculus,* de autoria de De Morgan. Frend inicia a carta com a seguinte frase: “I desire certainty not uncertainty science not art ....” (FREND,1836 *apud* PICYOR, 1982, p. 396), e no seu decorrer sugere que o livro de De Morgan, por fazer uso da álgebra simbólica e consequentemente legitimar o uso dos negativos, era um trabalho artístico, portanto invenções eram aceitáveis. É justamente como uma invenção que ele refere-se ao termo $\sqrt{-1}$.

No livro de Frend, elencado por nos para análise, essa argumentação não aparece de forma tão explícita, mas podemos identificá-la, por exemplo, no trecho a seguir, no qual ele defende a clareza da ideia de número e sugere que a dificuldade em trabalhar com os números é oriunda da adoção de uma arte sem justificativa.

> The ideas of number are the clearest and most distinct in the human mind; the acts of the mind upon them are equally simple and clear. There cannot be confusion in them, unless numbers too great for the comprehension of the learner are employed, or some arts are used which are not justifiable. (FREND, 1796, p. IX)

Essa passagem e várias outras nas quais o autor defende que a inserção dos números negativos comprometeria a clareza e o rigor científico da matemática, evidenciam a opinião de Frend de que a única álgebra possível era a aritmética, e qualquer outra álgebra tratava-se de arte, não de ciência.

Voltando à análise da impossibilidade de definição dos números negativos, verificamos que um dos motivos utilizados tanto por Maseres, como por Frend para justificar essa impossibilidade é a ausência de significado desses números na natureza. Essa ausência de correlação entre o mundo das coisas e as quantidades negativas, assim como acontece com as quantidades positivas e até mesmo com os irracionais, consiste em outro importante argumento presente nas obras pesquisadas.

Assis Neto (1995) denomina essa necessidade de correlação entre o mundo das coisas e os elementos matemáticos de pensamento substancial e defende que esse pensamento “[...] foi um obstáculo que os matemáticos precisaram ultrapassar para que o conceito de número, em particular de número negativo, pudesse ser corretamente apreendido” (ASSIS NETO, 1995, p. 3).

Esse argumento encontra-se mais explícito na obra de Frend, na qual identificamos críticas ao posicionamento de alguns algebristas que, diante da impossibilidade de explicar os números negativos, utilizavam-se de metáforas, como por exemplo, movimentações contábeis, para tornar a ideia defendida por eles compreensível e aceitável. Segundo Frend (1796), quando se torna necessário recorrer a metáforas para explicar os princípios de uma ciência é porque ela está sendo trabalhada de forma imprecisa. Para ele, a ideia de número é algo claro e simples na mente humana, portanto o seu uso também deve ser igualmente claro.

Essa necessidade de relacionar os entes matemáticos ao mundo físico é compreensível, pois, como visto no capítulo anterior, no fim do século XVIII os matemáticos ainda não possuíam uma fundamentação para a álgebra independente da geometria. Segundo Anjos (2012), John Wallis (1616-1703), no tratado intitulado *Treatise of Algebra, both Historical and Practical*, publicado em 1685, foi quem primeiro apresentou uma formulação aritmética para a álgebra. Ainda segundo essa autora, Wallis pretendia fundamentar a álgebra de modo a torná-la independente e até mesmo superior à geometria. Porém, essa desvinculação não era algo tão simples porque passava por uma mudança de postura na forma de conceber a matemática.

Quanto a essa mudança de postura, Fossa (2001) explica que os matemáticos até o século XVIII consideravam os axiomas como proposições intuitivamente verdadeiras, e essa atitude só perdeu força no século XIX, quando vários acontecimentos, entre esses, a descoberta das geometrias não-euclidianas, mostraram que consistência não é sinônimo de verdade, e então uma nova concepção de matemática surgiu. Esse raciocínio é compartilhado também por Servidoni (2006, p. 26), ao defender que

> [...] a Matemática era concebida e construída com base na observação e na experiência. As novas descobertas [referindo-se as geometrias nãoeuclidianas e o desenvolvimento da álgebra abstrata] fizeram com que o eixo temático se deslocasse dos problemas entre o conhecimento do mundo externo para o problema da dinâmica e da cognição, consequentemente, matemáticos começaram a refletir sobre suas próprias construções mentais.

Diante do já exposto até agora, não resta dúvida de que a adoção de uma nova concepção de matemática é um assunto intrinsecamente ligado à história de legitimação dos negativos. Mas, apesar de importante, não nos estenderemos nesse assunto agora, pois nosso objetivo no momento é identificar e compreender os argumentos e justificativas da postura rejeitadora. Assim sendo, a ausência de correspondência entre os números negativos e algo do mundo físico, justificativa utilizada por Maseres e Frend para a não aceitação de tais números, evidenciava que a rejeição deles fundamentava-se na incompatibilidade dos negativos com a concepção de matemática da época que tinha por base a geometria.

Embora presente nas três obras estudadas, essa concepção de matemática é mais facilmente identificada em *A Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra.* Nessa obra, a relevância da geometria como base teórica a ser seguida pode ser observada tanto nas várias demonstrações, nas quais o autor utiliza-se dessa ciência nas suas justificativas, como também na já citada importância atribuída aos livros de geometria como modelo a ser seguido. Por fim, podemos reforçar ainda mais essa constatação com a seguinte citação:

> That this great length of it arises merely from the great multiplicity of the case of cubic equations, and the rule that has been constantly observed of treating each of those cases separately and independently of all the rest and of setting down almost every step of the reasoning, as Euclid has done in his Elements, for the sake of making it as clear and easy as possible to beginners. (MASERES, 1758, p. i)

Nela, Maseres justifica o grande número de páginas dedicadas aos métodos de resolução de equações cúbicas, principalmente por realizar uma abordagem detalhada de cada passo, seguindo, de acordo com ele, o que Euclides fez em *Os Elementos* e obtendo dessa forma a clareza desejada.

Diante do exposto, podemos concluir que para Maseres e Frend, a existência dos números negativos contrariava a essência da natureza matemática até então desenvolvida, portanto todo o conflito presente em torno da aceitação dos números negativos tem como eixo central a incoerência que essa aceitação gerava na matemática da época.

2.4 IMPLICAÇÕES NA MATEMÁTICA ACARRETADAS PELA NÃO ACEITAÇÃO DOS NÚMEROS NEGATIVOS

No primeiro capítulo, ao relatarmos sobre a problemática em torno da aceitação dos números negativos, percebemos que, mesmo que a existência desses números não fosse algo consensual, já existiam alguns matemáticos, até mesmo antes do século XVIII, que aceitavam e aplicavam os números negativos nas teorias por eles desenvolvidas. Entre esses, destacamos Euler, Descartes e Newton. Nosso objetivo a partir de agora é identificar nas obras em análise as limitações e implicações que a rejeição aos números negativos acarretava para a matemática que vinha sendo desenvolvida.

Para a aritmética, a ausência dos números negativos restringe a possibilidade de realização da subtração, já que sem os negativos, a subtração $a - b$ só faz sentido se a for maior ou igual a b. No tópico anterior, ao analisarmos os argumentos de Frend e Maseres contra a existência dos negativos, apresentamos vários posicionamentos deles nos quais o significado do sinal negativo era explicado. Nesses posicionamentos, quase sempre a restrição à operação de subtração aparece bem explícita, portanto, optamos por não nos estendermos neste tópico para não sermos repetitivos.

No que diz respeito à álgebra, uma das implicações que a inexistência dos números negativos acarretava era a impossibilidade de generalizar as operações envolvendo esses números. Tanto para Maseres como para Frend, era inconcebível o que hoje conhecemos como regra dos sinais. O seguinte posicionamento de Frend (1796, p. 4): *"Again, we should do worse by writing down any of the above marks without any numbers. Thus* $-\text{x}- = +$ *is as nonsensical in algebra, as in common language to say, take away into take away equals add.", e* o capítulo escrito por Maseres, comentado anteriormente, em que afirma ser falsa a demonstração exposta por Clairaut (1749) para a multiplicação entre quantidades negativas, ressaltam a rejeição desses dois autores no que se refere a generalizações de propriedades envolvendo números negativos.

Embora Maseres e Frend não aceitassem as operações entre quantidades isoladas precedida do sinal negativo, eles admitiam operar com quantidades compostas envolvendo o sinal negativo, ou seja, eles operavam normalmente com termos do tipo $(a-b)$. No livro de Frend, encontramos a explicação das quatro operações envolvendo termos algébricos simples e compostos, porém foge ao nosso objetivo, no momento, estudar cada uma delas. No entanto, consideramos importante comentar como era explicada, por exemplo, a subtração $(3a - 4b) - (2a - 2b)$ e a multiplicação, $(a-b)\text{x}(c-d)$, pois atualmente, para realizá-las, fazemos uso da regra de sinais, conhecida por negativo multiplicado por negativo é igual a positivo.

Frend (1796) explica a operação de subtração da seguinte forma: inicia-se retirando $2a$ de $3a - 4b$ e obtendo como resposta $a - 4b$; na sequência ele explica que nessa operação foi retirado mais do que deveria, porque na verdade o que realmente se desejava retirar era $2a - 2b$, que é menor que $2a$. Portanto, é necessário fazer a compensação do que foi retirado a mais, que é exatamente $2b$. Assim, o resultado da operação é, na verdade, $a - 4b + 2b$.

Em um comentário posterior, ele explica que, mesmo $4b$ sendo maior que $2b$, podemos, nesse caso, reduzir o resultado final para $a - 2b$, utilizando o seguinte raciocínio, como $a - 4b + 2b$ é equivalente a $(a - 2b - 2b + 2b)$, podemos cancelar os termos semelhantes de sinais opostos e encontramos o desejado. Consideramos importante chamar a atenção para o fato de que essa redução só foi possível porque fazia parte de um termo composto. A mesma operação $2b - 4b$ não era aceita por

Frend caso não estivesse precedida do termo a, pois resultaria numa quantidade negativa.

Já a operação de multiplicação de $(a-b)$ por $(c-d)$ é explicada da seguinte forma: realiza-se primeiro o produto cx$(a-b) = ac - bc$ e d x$(a-b) = ad - bd$. Em uma colocação anterior, Frend já havia explicado que a multiplicação de c x b e d x b apenas aumenta o termo b, mas não altera a natureza da marcação que os une com o termo anterior. Essa explicação justifica o sinal negativo para os termos bc e bd. Diante dos resultados do produto de c e d por $(a-b)$ devemos na sequência realizar com esses resultados a operação indicada pela marcação entre c e d, como nesse caso temos $(c-d)$, a marcação é $(-)$ que indica retirada, deve-se, portanto retirar de $ad - bd$ (que veio da multiplicação de d x$(a-b)$) de $ac - bc$ (que veio da multiplicação de c x$(a-b)$), ou seja, $(ac - bc) - (ad - bd)$. De acordo com o explicado para subtração, temos como resultado $ac - bc - ad + bd$.

Percebemos por meio das explicações apresentadas anteriormente que, diante da limitação imposta pela ausência das generalizações que compõem a regra dos sinais, os opositores aos números negativos realizavam as operações algébricas de forma contextualizada.

Além da necessidade de contextualização e das limitações impostas nas operações algébricas, a ausência dos negativos acarretava também para a álgebra a impossibilidade de um número negativo ser raiz de uma equação algébrica. Essa impossibilidade tornava falsa a igualdade, sugerida por Girard, entre o número de raízes e o grau da equação. Embora só demonstrada no século XIX, matemáticos renomados acreditavam nessa igualdade. Entre os defensores, destacamos Descartes, que em *La géométrie*, obra que se encontra no apêndice do seu livro *O discours de la méthode pour bien conduire a raison et chercher la vérité dans les sciences*, publicado em 1637, afirma que se a é raiz de um polinômio, então $(x-a)$ divide o polinômio. Embasado nessa afirmação, que na verdade já havia sido descoberta por Thomas Harriot (1560-1621) anos antes, Descartes também sugere a proposição que garante a igualdade entre o número de raízes e o grau de uma equação.

O caminho até a comprovação dessa igualdade foi marcado por um acirrado embate que tinha como eixo central a formalização dos números negativos e dos complexos.

Nas duas obras em análise encontramos diversos posicionamentos contrários à igualdade sugerida por Descartes e Girard. No prefácio da parte II de *Principles of Algebra,* Frend expõe uma argumentação contrária à estratégia de encontrar raízes de uma equação escrevendo-a como produto de termos compostos. Essa estratégia embasa-se na afirmação de Descartes antes exposta sobre a divisão de polinômios.

Segundo Frend (1796, parte II), o artifício de escrever a equação como produto de termos compostos nem sempre gera raízes. Para confirmar seu posicionamento, Fend cita como contraexemplo a equação $x^2 + a\,x = k$, que pode ser escrita como $(x - b).(x + a + b)$, desde que b seja raiz. Ele argumenta que, $a + b$ não pode ser considerado como raiz, pois além de estar sendo adicionado a x, também não satisfaz a igualdade da equação proposta, pois$(a + b)^2 + a(a + b) \neq k = b^2 + a\,b$, já que b é raiz. Para os que aceitavam os números negativos e as regras de sinais, essa argumentação era facilmente refutada, pois embasado no método de Descartes, a outra raiz era na verdade $-a - b$*,* que satisfaz plenamente a equação sugerida.

Na obra de Maseres existe um capítulo de autoria de Frend intitulado *Remarks on the Number of Negative and Impossible Roots in Algebraick Equations,* que tem como único objetivo refutar a validade da proposição que sugere ser igual ao grau da equação o número de raízes que ela possui. Frend inicia esse capítulo já classificando como insatisfatórias e ininteligíveis as regras utilizadas pelos defensores dessa ideia. As críticas à igualdade iniciam-se logo no artigo I, como segue:

> *Article I*. Sr. Isaac Newton, Mr. George Campbell, the celebrated Mr. Mac Laurin of Edinburgh, the late Professor Waring of Cambridge, and other eminent writers on Algebra have laid down rules for finding the number of impossible roots in any proposed Algebraick equation: but these rules are far from being clear and satisfactory, and some of them are absolutely unintelligible; which indeed is not to be wondered-at, since they are all founded on a false supposition, which vitiates all the conclusions derived from it. This supposition, (which they lay down as an indisputable, and almost self-evident, maxim,) is, "*That every Algebraick equation has as many roots as it has dimensions",* though in truth there are very few

> equations in which this maxim really takes place; to wit, only one single form in each degree, or order, of equation. (FREND, 1800, p. 473)

Nesse artigo, percebemos que, além de tecer críticas à igualdade sugerida por Girard e Descartes, e aos que acreditavam nela, Frend sugere que de todas as equações possíveis de um determinado grau apenas uma delas pode vir a satisfazer essa igualdade, portanto, a proposição que generaliza tal igualdade é um absurdo.

Na sequência, ele reafirma esse posicionamento e o complementa afirmando que tais equações precisariam ainda atender a uma condição muito específica. Ele não mostra como chegou a essa conclusão, mas para convencer os seus leitores de sua afirmação, elenca todos os possíveis tipos de equações quadráticas, cúbicas e biquadráticas e, para cada grau expõe a única que, segundo ele, satisfaria a proposição, com a respectiva condição necessária.

Outro argumento apresentado por Frend para mostrar a não validade dessa igualdade toma por base as equações que têm seus termos ligados apenas com sinais positivos. Segundo Frend (1800), equações desse tipo só podem ter uma raiz, independentemente de qual seja o seu grau. Ele fundamenta essa afirmação argumentando que se certo valor for raiz da equação, qualquer outro valor inferior ou superior a esse valor, quando substituído pela incógnita, não satisfará a igualdade proposta pela equação e, portanto, não poderá ser considerada raiz. Dessa forma, a igualdade pretendida não seria válida nesses casos.

Segundo Frend (1800), o desejo de obter uma generalização para o número de raízes de uma equação fez com que os algebristas modernos (denominação dada por ele aos que defendem essa proposição) estendessem a todos os tipos de equações uma igualdade que é válida para apenas um número muito restrito delas. Para tanto, idealizaram a existência de raízes negativas e raízes impossíveis, que como já mencionamos é o que hoje denominamos de raízes complexas.

Embasado na existência apenas dos números positivos, os argumentos apresentados por Frend estão corretos. Porém, para os algebristas modernos, a proposição é válida porque, além das raízes positivas, existiam também as raízes negativas e as impossíveis. Assim, para completar o número desejado de raízes, após encontrar as raízes positivas, os algebristas modernos iam à busca das raízes negativas. Estas, segundo eles, seriam obtidas encontrando-se as raízes da equação proveniente da troca dos sinais dos termos de potência ímpar na equação proposta. As raízes positivas da equação transformada seriam consideradas como raízes negativas da equação proposta, pois tais valores acompanhados do sinal negativo, quando substituídos pela incógnita, satisfazem a igualdade da equação dada. Para que essa estratégia torne-se mais compreensível, vamos ilustrar esse raciocínio por meio do exemplo a seguir.

Considere a equação $x^3 + 2x^2 - x \quad = 2$. Essa equação tem como raiz positiva apenas o 1, e como raízes negativas o -1 e -2. Essas últimas, na verdade, eram descobertas pelos algebristas modernos encontrando as raízes positivas da equação $-x^3 + 2x^2 + x \quad = 2$, obtida pela troca dos sinais dos termos x^3 e x, na equação dada. Note que 1 e 2 são as raízes positivas da última equação, pois: $-(1)^3 + 2(1)^2 + 1 = 2$ e $-(2)^3 + 2(2)^2 + 2 = 2$. Esses valores, quando colocados com o sinal de negativo, solucionam a primeira equação, ou seja, $(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) = 2$ e$(-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) = 2$. Por esse motivo eram chamadas de raízes negativas.

Quando não existem raízes negativas ou quando mesmo com estas o número de raízes ainda é insuficiente para igualá-las ao grau da equação, os algebristas modernos recorrem às denominadas raízes impossíveis. Sobre estas Frend se posiciona da seguinte maneira:

> And by the impossible roots of an equation we are to understand certain fictitious quantities which are not the roots of any equation whatsoever, and of which no clear and distinct idea can be formed, but which are in number equal to the excess of the number of units contained in the index of the highest power of x in the equation, […] agreeably to the grand, fundamental, maxim abovementioned that is so much insisted on by modern Algebraists. (FREND, 1800, p. 478)

Pelo que podemos perceber, diferentemente do que acontecia com as raízes negativas, para as raízes impossíveis nenhuma definição nem estratégia de como encontrá-las foi oferecida pelos seus defensores. Devido a essa falta de clareza, as raízes impossíveis eram consideradas por Frend como uma ficção ainda mais absurda que as raízes negativas. Segundo ele, a única informação relevante sobre elas é que seriam em número suficiente para completar o grau da equação, após a descoberta das raízes positivas e negativas. Portanto, sua existência era justificada apenas para tornar verdadeira a proposição defendida pelos algebristas modernos.

Por meio da nossa investigação, ficou ainda mais claro o quanto a rejeição à existência de raízes negativas e impossíveis é um tema relevante para Frend, pois além do artigo *Remarks on the Number of Negative and Impossible Roots in Algebraick Equations*, o qual, como já mencionado, tem por objetivo principal negar a existência dessas raízes, ele dedica também um grande número de páginas da segunda parte da sua obra *Principles of Algebra* a estudar o número de raízes de uma equação, e nesse estudo não são aceitos como possíveis raízes os números negativos nem os imaginários.

No prefácio dessa segunda parte, Frend (1796, p. xi, parte II)[31] afirma que "in this work the number of roots in an equation is determined, not by a fiction, but on certain and undeniable principles […]" e reforça a rejeição aos negativos e imaginários expondo que a ideia de igualar o número de raízes ao grau da equação trata-se de uma conclusão precipitada, fundamentada em princípios falsos e não claros. Para Frend (1796), mesmo existindo homens de conhecimento renomado, como Newton, entre os defensores dessa ideia, é possível por meio de uma investigação rigorosa constatar que se trata de uma ideia falsa. O trecho que segue registra esse posicionamento:

> It is, however, to be recollected, that for a much longer period, men scarcely inferiour to Newton in genius, and his equals probably in industry, maintained a variety of positions in philosophy, which were overthrown by a more accurate investigation of nature and, if the name of Ptolemy can no longer support his epicycles, nor that of Des Cartes his vortices, Newton's dereliction of the principles of reasoning cannot establish the fallacious notion, that every equation has as many roots as it has dimensions. (FREND, 1796, p. vii, parte II)

Nele, Frend compara a existência de raízes negativas e impossíveis com os epiciclos de Ptolomeu e os vórtices de Descartes, ideias que deixaram de ser aceitas com o desenvolvimento da ciência. Ao fazer isso, ele reforça sua afirmação sobre a falta de rigor nas conclusões envolvendo quantidades negativas.

[31] Esta citação se encontra na segunda parte do livro de Frend que foi publicada em 1799, mas como a versão analisada por nós tem as duas partes na mesma edição, optamos por usar o mesmo ano da publicação da primeira.

É importante frisar ainda que, ao incluir Newton na lista dos matemáticos que defendem a igualdade entre o número de raízes e o grau da equação, Frend objetiva mostrar ao leitor o quanto essa ideia tinha força na comunidade matemática da época, pois para os ingleses, Newton não é apenas mais um matemático importante, é um gênio responsável pela descoberta e criação de importantes leis e teorias na física, na matemática e na astronomia. Entre os grandes trabalhos de Newton, o de maior destaque é *Philosophiae naturalis principia mathematica,* ou simplesmente, *Principia,* publicado em 1687. Nessa obra encontramos as leis de Newton para o movimento dos corpos, a fundamentação da mecânica clássica, a lei da gravitação universal e as demonstrações das leis de Kepler para o movimento dos planetas. Devido à amplitude e relevância dos temas abordados, *Principia* é considerado por muitos como o livro de ciências naturais de maior influência já publicado. Newton é ainda considerado pelos matemáticos como o pai do Cálculo Diferencial e Integral, título que divide com o alemão Gottfried W. Leibniz (1646-1716).

A crítica de Frend ao fato de aceitar uma ideia pouco clara apenas porque pessoas consideradas autoridades no assunto endossam tal ideia aparece também em Pycior (1982). Nesse trabalho, Frend cita mais uma vez o nome de Newton entre os matemáticos de renome que concordam com a existência dos números negativos e argumenta que mais jovem foi enganado por autoridades religiosas que o fizeram acreditar na doutrina da Trindade[32], mas não cometeria o mesmo erro em relação aos números negativos.

Voltando ao debate a respeito da validade da igualdade entre o número de raízes e o grau da equação, verifica-se, como já mencionado, que mesmo sem uma explicação convincente e a fundamentação desejada para os números negativos e complexos, durante o século XVIII, vários matemáticos que acreditavam na existência de ambos continuaram a estudá-los e tentaram apresentar uma demonstração rigorosa para essa igualdade.

Segundo Garbi (2010), Euler, na busca de compreender como extrair a raiz enésima de um número complexo, deu uma contribuição importante ao descobrir que qualquer número complexo possui exatamente n raízes enésimas. Para os que aceitavam a existência de números negativos, não era novidade que qualquer

[32] Esse trecho refere-se a sua mudança de posição religiosa da igreja católica, onde existe a doutrina da Trindade, para a igreja unitária, onde essa ideia não é aceita.

número positivo tem duas raízes quadradas, porém a descoberta de Euler mostrava que qualquer número tem três raízes cúbicas, quatro raízes quartas e assim por diante. Ainda segundo Garbi (2010), depois da descoberta de Euler, muitos matemáticos acreditavam que a demonstração da proposição que garante igualdade entre o grau de uma equação e o seu número de raízes estava próxima de ser alcançada.

A demonstração rigorosa dessa proposição foi fornecida por Karl Friedrich Gauss, (1777-1855), em 1799, na sua tese de doutorado. Nela, Gauss demonstra que qualquer equação de coeficientes reais ou complexos de grau $n > 0$ tem pelo menos uma raiz complexa. Por meio dessa afirmação e da propriedade enunciada por Descartes sobre a divisão de polinômio, a comprovação de que uma equação algébrica de grau n tem exatamente n raízes é alcançada. Pois, utilizando-se da raiz complexa, reduzia-se a equação para outra de grau $n - 1$, e ao repetir esse raciocínio encontra-se exatamente n raízes para equação de grau n. A descoberta de Gauss é hoje conhecida com Teorema Fundamental da Álgebra.

Diante da verificação de que as obras em análise e a publicação de Gauss são contemporâneas, percebemos que, mesmo com comprovações, muitos matemáticos continuavam a assumir a posição de rejeição aos negativos. Além de Maseres e Frend, podemos citar também Barlow, que publicou *An Elementary Investigation of the Theory of Numbers*, em 1811, obra que analisaremos no próximo capítulo, e como veremos ainda encontra-se presente uma postura contrária à existência dos números negativos.

Mesmo que em um primeiro momento pareça estranho o posicionamento de alguns matemáticos que continuam a assumir a postura de rejeitadores dos números negativos, apesar de tantos argumentos favoráveis à existência desses, essa estranheza desaparece se lembrarmos que o embate entre rejeição e aceitação dos números negativos não foi resolvido por meio da comprovação de argumentos, nem contrários, nem favoráveis aos negativos, mas como mencionado no capítulo anterior, por meio da construção de uma nova concepção de matemática.

Vale a pena registrar também que essa nova concepção de matemática foi, como relatado na introdução, oriunda de um conjunto de acontecimentos ocorridos no decorrer do século XIX, portanto podemos dizer que a nova concepção de matemática foi sendo construída durante o século XIX, fato é que mesmo depois dos trabalhos de Peacock ainda existiam os adeptos do pensamento substancial. Diante dessa conjuntura, o artigo de Gauss sobre restos biquadráticos, publicado em 1831, é apontado tanto por Assis Neto (1995) como por Schubring (2007) como esclarecedor da necessidade de ampliação do conceito de número e da matemática como um todo para além do pensamento substancial, ou seja, para além da necessidade de correlação da matemática com o mundo físico. Para Gauss, os

> [...] números positivos e negativos só podem encontrar uma aplicação quando o que se conta possui um oposto, quando o que se conta se pode comparar com a idéia de aniquilação. Olhando precisamente só se encontra esta condição quando os objetos que se contam não são substâncias (objetos pensáveis em si próprios) mas relações entre cada dois objetos. (GUASS, 1831, p.175 *apud* ASSIS NETO, 1995, p. 3)

Diante do exposto, concluímos que a oposição realizada por Maseres e Frend, com o intuito de alicerçar as novas descobertas em uma ciência sólida, contribuíram construtivamente para a ampliação do conceito de número e consequentemente para a construção dessa nova concepção de matemática. Anjos (2012), embasado nos estudos realizados por Pycior (1997), ressalta a importância de Maseres e Frend e conclui que, “ao argumentarem contra a aceitação dos números negativos, chamaram a atenção para a incoerência entre a concepção de número negativo e o que se considerava até então por álgebra” (ANJOS, 2012, p. 105) e dessa forma

> [...] plantou na Inglaterra um importante elemento que foi determinante para os acontecimentos que provocariam a completa aceitação dos números negativos, pois levantou questões que seriam importantes para a consolidação dos estudos sobre fundamentação matemática desenvolvidos por Peacock. (ANJOS, 2012, p. 85)

Portanto, nessa disputa entre os rejeitadores e os algebristas modernos, a respeito da existência dos números negativos, podemos dizer que a grande vitoriosa foi a matemática.

3 PETER BARLOW (1776- 1862) E OS NEGATIVOS

Feito o apanhado histórico a respeito da problemática em torno da legitimação dos números negativos e também o estudo nas bases teorias da rejeição a esses números na Inglaterra do final do século XVIII, finalizaremos nossa pesquisa, compreendendo como o posicionamento rejeitador interferia no desenvolvimento de teorias algébricas no inicio do século XIX. Para tanto escolhemos Peter Barlow, um dos últimos matemáticos a assumir a postura de opositor dos números negativos e sua obra sobre Teoria dos Números, *An Elementary Investigation of the Theory of Numbers*, publicada em 1811, como objeto de estudo para o pretendido no momento. Com intuito de complementar nosso entendimento nessa investigação, optamos por estudar também o dicionário matemático desse autor, *New Mathematical and Philosophical Dictionary*, publicado em 1814. No entanto, antes de iniciarmos a análise dessas obras, apresentaremos um pouco da vida profissional de Barlow, assim como fizemos com Frend e Maseres.

3.1 A VIDA PROFISSIONAL DE PETER BARLOW

No capítulo anterior, conhecemos os argumentos contrários à existência dos números negativos dos dois principais opositores ingleses do fim do século XVIII, Maseres e Frend. Diante da posição assumida por Barlow de seguir esta corrente, o embasamento teórico fornecido no Capítulo II nos ajudará bastante no estudo que apresentaremos na sequência. Agora, ampliaremos a investigação apresentada anteriormente, expondo o contexto geral da matemática inglesa do início do século XIX e correlacionando, sempre que possível, com características e posicionamentos assumidos por Barlow em sua vida profissional.

De modo geral, como já mencionamos, a matemática do século XVIII ficou caracterizada pela preocupação com os seus fundamentos teóricos, principalmente devido à ausência de rigor presente no Cálculo e na Álgebra que vinham sendo desenvolvidos. Diante dessa conjuntura, a matemática inglesa assumiu a postura mais conservadora de toda a Europa.

Boyer (1996) identifica na matemática inglesa do século XVIII uma tendência à valorização do modelo sintético[33], pilar principal da geometria clássica, como a forma mais eficaz de enfrentar a falta de rigor presente nas novas descobertas. Ele defende ainda a tese de que foram justamente essa predileção pela geometria pura, juntamente com a insistência excessiva pela precisão lógica, os principais obstáculos ao avanço do método analítico na Inglaterra. Fato que para ele acarretou como consequência um isolamento matemático inglês, já que a matemática que se desenvolvia na Europa continental se baseava na aplicação da análise à mecânica.

Para Boyer (1996), esse posicionamento inglês de retorno às bases da geometria clássica explica melhor o isolamento matemático que a Inglaterra vivenciou no século XVIII, do que a explicação comumente apresentada, que responsabiliza a dificuldade da notação fluxional adotada por Newton no desenvolvimento do Cálculo, se comparada com a notação diferencial utilizada no mesmo propósito por Leibniz. Segundo Boyer (1996, p. 317), o problema era que “nenhum Cálculo, diferencial ou fluxional, se casa bem com a geometria sintética.”, único modelo de rigor conhecido até então.

Embora Struik (1989) insista na justificativa da dificuldade de notação fluxional, ele complementa as explicações matemáticas apresentadas por Boyer, argumentando que existiam também razões sociais no isolamento matemático inglês, e para fundamentar sua argumentação aponta que,

> A Inglaterra encontrava-se constantemente em guerras comerciais com a França e desenvolveu um sentimento de superioridade intelectual que foi encorajado não só pelas vitórias alcançadas nas guerras e no comercio, mas também pela admiração que os filósofos continentais dedicavam ao seu sistema político. (STRUIK, 1989, p. 211)

Foi nesse cenário de forte nacionalismo, valorização da geometria clássica e a busca por fundamentação teórica que o matemático inglês Peter Barlow, que nasceu em 15 de outubro de 1776, no leste da Inglaterra, cresceu.

---

[33] O modelo sintético consiste na construção de uma prova, por meio do encadeamento de argumentos simples. É o que conhecemos por prova direta.

Figura 3- Peter Barlow

Segundo Stephen (1885), Barlow alcançou conhecimento científico considerável por seus próprios esforços, sendo considerado por muitos como autodidata. Antes dos vinte e cinco anos de idade ele já era correspondente regular do *Ladies Diary*[34], que, na época, tinha como editor Charles Hutton (1737-1823), também matemático e defensor da quebra do isolamento matemático inglês. Incentivado por Hutton, Barlow tornou-se, em 1801, professor na *Royal Military Academy*, em Woolwich, cargo que exerceu até o fim da sua vida profissional, aos setenta e um anos de idade.

Além das duas obras matemáticas anteriormente citadas, que serão analisadas na sequência, Barlow publicou no mesmo ano da publicação do seu dicionário matemático, 1814, *New Mathematical Tables*, que consiste numa tabela de fatores quadrados, cúbicos, raízes quadradas, inversos e logaritmos hiperbólicos de todos os números de 1 a 10.000. Essa tabela foi muitas vezes reeditada, devido à sua utilidade e exatidão. Porém, com o desenvolvimento das calculadoras e computadores, esta tabela tornou-se obsoleta, sendo atualmente apenas material de interesse histórico.

[34] *Ladies Diary* é uma revista Inglesa do século XVIII, publicada de 1704 a 1841 e consistia em sua grande parte de problemas e quebra-cabeças de matemática. O início da *Ladies Diary* coincide com a popularização da matemática.

Barlow é reconhecido não só como matemático, mas também por trabalhos sobre temas de Física, como é o caso dos seus estudos sobre magnetismo, tema que lhe rendeu a premiação da Medalha Copley[35], em 1825, ao solucionar problemas de divergência em bússolas navais, ocasionadas pela presença de grande quantidade de ferro nas novas embarcações. Nesta área ele dedicou-se ainda a estudos sobre óptica, os quais o levaram à invenção de uma lente que corrigia aberrações cromáticas em lentes côncavas. Essa lente ficou conhecida como lentes de Barlow e ainda hoje são usadas. Encontramos também contribuição de Barlow em estudos relacionados às engenharias, mais especificamente à locomoção a vapor e a pontes de suspensão.

Podemos dizer que os estudos de Barlow encontravam-se intimamente conectados com o momento em que o mundo estava passando, já que no início do século XIX existia um movimento geral de reorganização social advinda da Revolução Industrial. Essa nova postura colocava a ciência em função do desenvolvimento e nesse processo a matemática era considerada um elemento grande importância. Segundo Maia (2011, p. 135) no início do século XIX a Ciência foi "confrontada com um aumento exponencial de acontecimentos científicos, em grande parte fruto do apelo industrial face à feroz concorrência de mercados e às necessidades da economia crescente [...]". Assim, as pesquisas supracitadas, tanto na área de física, como também ligados às engenharias, são reflexos da nova conjuntura econômica e social inglesa, pois contribuíram com o desenvolvimento de soluções, instrumentos e melhoramento técnicos.

Esta conexão se estende também aos seus trabalhos de matemática, como por exemplo, *New Mathematical Tables*, que foi de grande utilidade para a época, pois para atender as necessidades da nova sociedade que estava se formando, as ciências exatas utilizavam cálculos cada vez mais complexos, mas, as calculadoras existentes ainda eram bastante ineficientes. Até mesmo nos trabalhos mais teóricos como é o caso de *An Elementary Investigation of the Theory of Numbers*, pode-se identificar um espírito inovador, pois esta obra configura-se a primeira obra de Teoria dos Números escrita em inglês. Barlow (1811) justificava a importância deste trabalho em seu o prefácio como segue

[35] É uma medalha de grande prestígio atribuída pela Royal Society. Foi concedida pela primeira vez em 1731.

> From the foregoing historical sketch, it appears that the writers on this subject are far from being numerous; but the well established celebrity of those, who have investigated its principles, would be of itself sufficient to stamp it with a degree of importance, and to render it worthy of attention. Few persons, it is conceived, will be disposed to consider that a barren subject, which has so much engaged the attention of the above named celebrated writers; in fact, there is no branch of analysis that furnishes a greater variety of interesting truths than the theory of numbers, and it is therefore singular that it should have been so little attended to by English mathematicians. […] This circumstance, it conceived will be deemed a sufficient apology for the appearance of the present volume. (BARLOW, 1811, p. ix)

Anteriormente a este trecho, Barlow expõe um breve histórico do desenvolvimento da Teoria dos Números, pois segundo ele este assunto chamou à atenção de matemáticos famosos desde a antiguidade. Para justificar esta afirmação ele inicia citando Pitágoras e Aristóteles, como os primeiros a se dedicarem ao estudo dos números e na sequência deixam claro que antes da invenção da análise, não era possível muito progresso neste assunto, mas, mesmo não sendo muitos os que se dedicaram a estudar esta área, ela sempre recebeu a atenção de matemáticos importantes, como Diofanto, Fermat, Euler, Legendre e Gauss. Após frisar a importância da Teoria dos Números historicamente, Barlow lamenta a ausência de publicações inglesas nesta área, o que torna sua obra digna de relevância.

Anjos (2012) interpreta a publicação dessa obra como um indício de uma preocupação, por parte de Barlow, com a quebra do isolamento matemático inglês, já que com este trabalho, ele objetivava apresentar aos ingleses, as inovações que o resto do continente haviam desenvolvidos, no que diz respeito à Teoria dos Números.

Compartilhamos da mesma interpretação de Anjos (2012) e acrescentamos ressaltando que esta publicação pode ser vista também como mais um posicionamento profissional de Barlow em conexão com as mudanças pela qual a sociedade inglesa passava no inicio do século XIX.

Em meio a tantos exemplos que classificam Barlow como um homem conectado com o seu tempo e de espirito inovador marcante, o seu posicionamento de opositor aos números negativos, pode ser visto, em um primeiro momento, como surpreendente, porém, não podemos esquecer que Barlow viveu em um período de mudança de postura e que apesar dos avanços tecnológicos, tanto os negativos como os infinitesimais, ainda se encontrava sem a fundamentação lógica desejada para sua aceitação. Aliado a esse fato, podemos citar também a tradição matemática inglesa, que tinha como base o método sintético e a grande valorização da geometria clássica, importante empecilho à aceitação dos negativos. Por fim, outro fato que pode também ter influenciado o posicionamento de rejeitador dos negativos, por parte de Barlow, é que o primeiro inglês a publicar uma obra, na qual se assume uma posição explicita de oposição à existência dos negativos foi, segundo Schubring (2005), Thomas Simpson (1710-1761) que também foi professor de matemática, na Academia Militar de Woolwich, mesmo local que Barlow trabalhou a vida toda. Simpson publicou seu *Treatise of Algebra* em 1745, e teve segundo Schubring (2005) dez reedições. Diante do grande número de reedições desta obra, podemos concluir que suas ideias tiveram grande aceitabilidade na Inglaterra, por um longo período, portanto mesmo não contemporâneos na Academia Militar de Woolwich, Barlow possivelmente foi influenciado pelas ideias de Simpson.

Assim sendo, a postura profissional de Barlow por ser inovadora em muitos momentos, mas, manter características conservadoras em outros, assemelha-se a história do uso dos negativos que, ao mesmo tempo, que trazia inovações, como por exemplo, as contribuições nas manipulações algébricas, encontrava resistência de aceitabilidade, devido à ausência de significado dentro da concepção da matemática vigente.

3.2 OS NEGATIVOS EM *NEW MATHEMATICAL AND PHILOSOPHICAL DICTIONARY*

Por se tratar de um dicionário, optamos por elencar algumas palavras para nortear nosso trabalho. Escolhemos as palavras: Número, Quantidade, Raízes e Negativo por considerá-las palavras-chave para atingirmos o pretendido. No entanto, sempre que necessário, foi estudada a definição de outras palavras para complementar o entendimento do assunto em pauta.

Ao definir Número, Barlow, em momento algum fala da existência de números negativos, porém, mesmo assim, é relevante estudar a definição apresentada por ele para número, pois as justificativas para aceitação ou rejeição dos negativos embasam-se na forma como esse termo é compreendido. Além disso, o entendimento desse termo ajudará também na compreensão de outros, pois ele é bastante utilizado para definir outros elementos matemáticos, como é o caso da definição de raízes de equação: “Roots of an Equation, are those numbers or quantities which substituted for the Unknown quantity, render the whole equation equal to zero” [36] (BARLOW, 1814, ROOTS *of an Equation*).

Número é definido por Barlow como um termo possuidor de dois entendimentos, um mais amplo e outro mais restrito. Barlow expõe que, no sentido mais amplo, número refere-se a quantidades abstratas, sendo o objeto de estudo da Aritmética. Ao definir número no sentido mais restrito, Barlow cita a definição de Euclides para número: “[...] to be a multitude of units.” (BARLOW, 1814, NUMBER) e complementa definindo número com sendo algo que indica a existência de várias coisas do mesmo tipo. Segundo ele, quando utilizados neste último sentido, os números são denominados de inteiros.

Por meio dessa definição, podemos perceber que números inteiros, para Barlow, são elementos matemáticos que se caracterizam pela capacidade de quantificar, portanto não faz sentido a existência de números inteiros negativos, uma vez que não se conta o que não existe. Na sequência, Barlow relata ainda que os números inteiros se classificam em várias categorias, como por exemplo, cardinal, ordinal, primo, racional, irracional e observamos que em nenhuma delas é possível enquadrar os números negativos.

Apesar da obra *An Elementary Investigation of theTheory of Numbers* não ser nosso objeto de pesquisa no momento, consideramos relevante apresentar a definição de números inteiros, presente no capítulo I da primeira parte dessa obra, já que estamos construindo a compreensão de número segundo Barlow. Nesta, Barlow inicia definindo unidade como sendo “An Unity or Unity, is the representation of any thing considered individually, without, regard to the parts of which it is composed”

[36] A as páginas da obra *New Mathematical and Philosophical Dictionary* não são numeradas, então por se tratar de um dicionário iremos fazer a referência da localização da citação na obra por meio do verbete correspondente ao trecho citado.

(BARLOW, 1811, p. 1), e na sequência, define números inteiros como sendo “An Integer, or Integral Number, is an unit, or an assemblage of units” (BARLOW, 1811, p. 1). Semelhantemente ao dicionário, essa definição também identifica número inteiro como quantificador.

Diante do exposto, fica perceptível que o entendimento de número inteiro para Barlow assemelha-se ao entendimento grego de número, que, como vimos anteriormente, dificulta a aceitação dos números negativos.

Como a definição de Barlow para número, no sentido mais restrito, não deixa margem ao aparecimento dos negativos, resolvem os analisar a ideia de números no sentido mais amplo, ou seja, número no sentido abstrato. A definição oferecida por Barlow para número abstrato é a seguinte:

> ABSTRACT Numbers, are assemblages of units, considered independently of anything or things, that they might otherwise be supposed to represent. For example, 5 is an abstract number, while it remains independent but if we say 5 feet, or 5 miles, it is no longer an abstract numbers, but a concrete number. (BARLOW, 1814, ABSTRACT *Numbers*)

Ao ser concebido como entidades sem relação com uma coisa específica, número abstrato não carrega consigo a necessidade de associação com algo que existe, mesmo assim, verificamos que a ideia de quantificar continua presente nesse entendimento de número, a única diferença é que nesse caso não existe a necessidade de especificar o que está sendo quantificado. Portanto, a concepção de número para Barlow, seja no sentido mais amplo, seja no mais restrito, configura-se uma dificuldade à aceitação da existência dos números negativos como termos matemáticos independentes.

Devido à concepção de número, segundo Barlow, apresentar-se intimamente ligada à ideia de quantificar, estudaremos agora a definição dada por ele para a palavra Quantidade. Para Barlow,

> QUANTITY, any thing capable of estimation or mensuration; or which, being compared with another thing of the same kind, may be said to be greater or less than it, equal or unequal to it. Mathematics is the science or doctrine of quantity, which being made up of parts is capable of being made greater or less. It is increased by addition, and diminished by subtraction; which are therefore the two primary operations that relate to quantity. Hence it is that any quantity may be supposed to enter into algebraic computations two different ways, which have contrary effects, viz. either as an increment or

> decrement. A Quantity which is to be added is called a positive quantity, and a quantity to be subtracted is said to be negative. (BARLOW, 1814, QUANTITY)

Ao definir quantidade como qualquer coisa capaz de ser estimada ou medida, fica subentendida a necessidade de esse termo referir-se a um objeto real ou fictício para ter sentido. Essa característica limita a amplitude de aplicação desse termo, no entanto, ao contrário do que verificamos na definição de número, nesse tópico Barlow faz alusão à existência de quantidades negativas, o que pode ser interpretado como uma contradição em seu pensamento, uma vez que a necessidade exposta acima impediria a possibilidade de existência de quantidades negativa.

No decorrer da análise das palavras elencadas como centrais no estudo que objetivamos, foram identificados vários trechos, que semelhantemente à afirmação acima sobre a existência de quantidades negativas, deixa margem ao aparecimento da hipótese de que o posicionamento assumido por Barlow de opositor dos negativos seria contraditório. Assim, em busca de esclarecer tais trechos e evitar interpretações erradas quanto à postura de Barlow no que se refere à rejeição aos negativos, a partir de agora em vez de apresentarmos a análise de algumas definições, nos deteremos ao estudo de alguns trechos com indícios contraditórios.

3.2.1 ESCLARECENDO TRECHOS COM INDÍCIOS CONTRADITÓRIOS NO DICIONÁRIO MATEMÁTICO DE BARLOW

Iniciemos analisando o trecho da citação anterior. Nesse caso específico, é facilmente perceptível que quantidades negativas não são concebidas pelo autor como um termo matemático independente. Na verdade, o termo *quantidade negativa* é apenas a denominação dada à parcela que está sendo subtraída na operação de subtração, ou seja, trata-se apenas de outra nomenclatura para o subtraendo. Portanto, a afirmação sobre a existência dessas quantidades não configura contradição no posicionamento oposicionista do autor. Note ainda que, seguindo essa mesma linha de raciocínio, ele poderia ter definido também número negativo sem necessariamente aceitá-lo como termo independente.

Esse argumento é reforçado com a constatação de outros trechos do dicionário nos quais o termo quantidade negativa é utilizado no mesmo sentido da explicação dada anteriormente. Citemos, por exemplo, o relato presente no vocábulo *Specious or Literal* ALGEBRA, no qual a seguinte explicação para quantidades negativas aparece: “Negative quantities are those which are to be subtracted. As $-a$, or $-2ab$, or $-3ab^2$”. Mesmo Barlow exemplificando essas quantidades com termos independentes, a explicação deixa claro que esse termo deve ser subtraído, portanto só faz sentido como termos integrantes da operação de subtração. Ao definir a palavra Negativo, Barlow afirmar apenas que em Álgebra e em Aritmética essa palavra significa o contrário de positivo e desmembra o estudo deste verbete em índice, expoente, quantidade e sinal negativo. A explicação para quantidade negativa é a seguinte: “Negative Quantities are those quantities which are preceded or affected with the negative sign”. (Barlow, 1814, NEGATIVE *Quantities*) Nesse caso, Barlow define quantidades negativas de forma mais independente do que na explicação anterior, já que as caracteriza apenas como quantidades precedidas pelo sinal de negativo sem mencionar a necessidade de elas comporem a operação de subtração. Mas, para evitar qualquer interpretação equivocada, logo na sequência ele tece o seguinte comentário sobre o aparecimento do sinal negativo

> The introduction of this character into algebra has given rise to various controversies, with regard to the legality or illegality of certain conclusions depending upon it; some maintaining, that as a negative quantity is in itself totally imaginary, it ought not to be introduced into a science, the excellency of which depends upon the rigour and certainty of its conclusions; while others, running into the opposite extreme, have endeavoured to illustrate what will not admit of illustration; and thus, like other zealots, have been the greatest enemies of the cause they were so anxious to defend.
>
> It is in vain to attempt to define what can have no possible existence; a quantity less than nothing is totally incomprehensible; and to illustrate it, by reference to a debtor and creditor account, to say the least of it, is highly derogatory to this most extensive and comprehensive science.
>
> The apparent anomalies resulting from the introduction of this character have arisen from giving to this symbol the same generality as belongs to the sign + or addition. When two quantities are to be added together, as a and b, it is perfectly indifferent which of them is placed first, for $a + b$ is in every respect the same as $b + a$; but if the difference of them is to be expressed, this is not the case ; $a - b$ and $b - a$ being totally different ; if a is greater than b, then $a - b$ is a real quantity equal to the difference of a and b ; but $b - a$ is an imaginary quantity arising from a supposititious operation, viz. of

> taking a greater quantity from a less; yet this expression, considered merely as an algebraical symbol, may still enter as such into the steps of and process, and will ultimately produce a legitimate result; but in order to this we must first have certain rules laid down for operating on such quantities, accommodated to their particular nature, and which must be such as necessarily arise from principles previously established. (BARLOW, 1814, NEGATIVE *Sign*)

Com esse comentário, Barlow afasta qualquer possível dúvida que poderia vir a existir quanto ao seu posicionamento no que se refere à aceitação dos negativos como resultado final da subtração, do tipo $a - b$ com $a < b$. Pelo exposto, fica explícita sua rejeição à existência de quantidades negativas como entidades matemáticas independentes. Vale a pena ainda ressaltar que Barlow vai mais longe e declara ser inútil a tentativa de atribuir significado a essas quantidades por meio de associações com débitos, pois, segundo ele, não se justifica o que não existe. Consequentemente, tais tentativas de justificativas são consideradas como uma depreciação do rigor científico. Por fim, ele complementa sua argumentação afirmando que quantidade menos do que nada é algo totalmente incompreensível.

Além da explícita oposição aos negativos, o trecho em análise nos chamou a atenção também pela declaração de que a expressão $a - b$, com $a < b$, quando vista apenas como símbolo algébrico, é aceitável no decorrer dos cálculos e produz resultados válidos, desde que manipulados de forma correta, ou seja, os negativos, embora rejeitados como resultados finais são plenamente aceitos por ele como intermediários nas operações algébricas. Essa característica é na verdade comum aos rejeitadores e mostraremos mais adiante que ela é um dos fatores que torna viável a produção de obras algébricas pelos que adotam o posicionamento de opositor dos negativos.

Na sequência do trecho supracitado, Barlow apresenta ainda as justificativas das regras de manipulações envolvendo expressões algébricas do tipo $(a - b)$. Suas justificativas são análogas às identificadas no livro de Frend, e como exposto no capítulo anterior, essas manipulações eram feitas de forma contextualizada, não havendo, portanto, nenhuma contradição nessa aceitação e o seu posicionamento de rejeitador dos negativos.

Antes de darmos continuidade aos esclarecimentos dos trechos controversos, consideramos relevante ressaltar que a argumentação contraria a existência dos números negativos desenvolvida por Barlow reflete exatamente o pensamento substancialista dominante na matemática desta época, pois a base da sua argumentação é a impossibilidade de existir algo real menor do que nada, ou seja, algo real ser negativo. No entanto, como foi exposto anteriormente, número atualmente não é necessariamente a representação de algo real, mas esta ampliação do entendimento de número para além do real, só aconteceu após a publicação dessa obra.

Schubring (2000, p. 53) traduz bem a importância dessa associação quantidade-número para a problemática em torno da existência dos negativos, na seguinte colocação, “As controvérsias em torno da existência dos números negativos se explicam, sobretudo, pelo obstáculo que há em passar da noção de grandeza, que é de natureza substancial, à de números, que essencialmente teórica.”.

O debate em torno da existência ou não dos números negativos sempre esteve intimamente ligado à questão da legitimidade da raiz quadrada desses números. Como vimos no Capítulo I, os números que hoje fazem parte do conjunto dos números complexos eram denominados de imaginários, e assim como acontecia com os negativos, sua validade era motivo de muito debate e polêmica. Ao analisar a definição de imaginário, encontramos o seguinte trecho que retrata bem as diversas opiniões a respeito dos números imaginários:

> The first notice that is taken of imaginary expressions, or of the square root of negative quantities, is found in Cardan's “Algebra, who was most probably first led to the consideration of them, from the solutions of those cubic equations which are now termed the irreducible case, […] this very singular circumstance, as soon as it was observed by Cardan, would no doubt lead him to an investigation of this species of quantity; but neither he, nor any other author, has yet been able to unravel the mysteries that these symbols involve, nor has any subject of mathematical inquiry led to more angry disputes : some asserting that such expressions as the mind can form no conception of, or at least of what they are intended to represent, ought not to be introduced into a science, the excellence of which consists in the rigour and evidence of its demonstrations, and that results thus obtained are unworthy of notice. On the other hand, it has been contended, that in all cases where the results thus deduced have been compared with those arising from the strictest geometrical investigations, they have always been found perfectly to agree ; and that the symbol $\sqrt{-1}$, although we can form no idea of what it represents, yet being subjected to the same rules as other analytical symbols, the results derived from its introduction are equally certain and conclusive ; while others, taking a mean between these extremes, admit that though from analogy there is no reason to doubt the truths obtained by means of these imaginary symbols, yet that it always adds a degree of conviction when the results are verified by a more rigid

> analysis, and consequently that they ought not to be employed when other means are equally successful. Baron Maseres is decidedly of the first of these opinions, on which subject he has a work, entitled " A Dissertation on the Use of the negative Sign in Algebra;" in which is demonstrated the nature of those signs, and the rules that are commonly given for working with them, and where he has also shown that equations of the second and third degree may be effected without the introduction, or at least without the consideration of negative roots. Mr. Woodhouse's opinion on this subject may be seen in his '*Analytical Calculations'*; and a very ingenious paper on the same head is inserted in the Phil. Trans, of Edinburgh for 1778, by Professor Playfair, who has there given us several examples in which these imaginary expressions may be introduced to advantage into trigonometrical and other species of calculation. (BARLOW, 1814, IMAGINARY *Quantities*)

Pelo que podemos perceber, os imaginários intrigavam os matemáticos da época, pois embora não existisse nenhuma ideia do que significava $\sqrt{-1}$, esse termo, quando submetido às mesmas regras que os outros símbolos analíticos, geravam resultados igualmente válidos. Mesmo sem uma clara compreensão dessas quantidades, sabia-se que elas solucionavam as equações cúbicas ditas irredutíveis e também contribuía com avanços na trigonometria e em outras áreas de estudo. Essa falta de clareza, por um lado, e os benefícios que esses números traziam, por outro, era o principal motivo da divisão de opinião dos matemáticos quando o assunto era a legitimidade dos imaginários e a aceitação dos negativos.

Ainda sobre o referido trecho, é notório que nele Barlow não explicita sua opinião sobre o assunto, assim como fez com os negativos. Parece-nos que neste trecho seu objetivo é apenas registrar as diferentes opiniões a respeito do embate travado em torno da existência dos imaginários.

Mesmo sem um posicionamento declarado, a presença de afirmações, nas quais ele inclui raízes imaginárias e negativas entre as possíveis raízes de uma equação, como a que segue: "The roots of na equation are divided into positive, negative, real, and imaginary or impossible" (BARLOW, 1814, *Roots of an* EQUATION,) e também o trecho, no qual ele sugere a existência do Teorema Fundamental da Álgebra: "And of these there are always as many real or imaginary, as there are units in the highest Power of the Unknown quantity. So na equation of the 2d degree hás two roots; one of the 3d degree, three; ofthe 4th degree, four, &c. (BARLOW, 1814, p. ROOTS *of an Equation*), não devem ser interpretados como se Barlow estivesse assumindo uma posição contrária à defendida por Maseres e Frend. Já que estes, como exposto no capítulo anterior, se opuseram de forma explícita à existência dessas raízes considerando-as como uma criação fictícia apenas para justificar a existência do Teorema Fundamental da Álgebra.

Com o propósito de compreender melhor as afirmações anteriormente mencionadas e confirmar que o posicionamento de Barlow segue, sim, as ideias apresentadas no capítulo anterior, defendidas por Maseres e Frend, realizamos uma análise mais aprofundada dos trechos, nos quais existe menção a números ou quantidades imaginárias.

A definição de raiz imaginária não nos ajudou muito, pois ela reflete apenas o que compreendemos hoje como raízes complexas, como observa-se em: “An Imaginary Root, is one to which no absolute value can be attached, one part of it consisting always of the square root of a negative quantity; yet it is such, that when substituted for the unknown quantity, it is found to answer the conditions of the equation (BARLOW, 1814, *Imaginary* ROOT). No entanto, afastamos totalmente possíveis interpretações erradas ou contraditórias a respeito da rejeição de Barlow em relação à existência dos negativos e dos imaginários por meio da análise do seguinte trecho:

> Imaginary quantities naturally arise out of the generalization of algebraical symbols, such as by extracting the even roots of negative quantities; whereas, according to the definitions on which we proceed, it is obvious that such quantities can have no real root. […] Imaginary quantities indicate impossibility; that is, in any equation which has for its result an imaginary quantity, some condition has been introduced which is impossible. If, for example, it were proposed to divide the number 10 into two such parts that their product should be 30, it is obvious that this latter condition is impossible, for the greatest product that can be formed of two numbers whose sum is ten, is $5 \times 5 = 25$, that is when the two parts are equal: and, accordingly, in the solution of such an equation we must expect an imaginary result, which is what really happens; for put x and $10 - x$ for the numbers then $10x - x^2 = 30$ or $x^2 - 10x = -30$, or $x = 5 \pm \sqrt{-5}$, which is an imaginary answer but still being substituted in the given equation, and submitted to the same rules as othe algebraical quantities, it will be found to answer the impossible conditions of the problem. (BARLOW, 1814, IMAGINARY *Quantities*)

Nele, fica claro que Barlow interpretava os imaginários como um termo sem significado no mundo, proveniente de procedimentos algébricos que surgem sempre que uma condição impossível for introduzida ao problema. Dessa forma, os números imaginários $x = 5 \pm \sqrt{-5}$ só são indicados como soluções do problema exposto na citação, por que o problema, ao pedir para dividir 10 em dois valores, cujo produto é

30, introduziu uma hipótese absurda, uma vez que a obtenção do maior produto, no qual suas parcelas são provenientes da divisão de um número real em duas partes também reais, é quando a divisão desse número é feita na metade. Assim, o maior produto, no conjunto dos reais, obtido da divisão de 10 em duas parcelas, é $5 \times 5 = 25$. Desse modo, ao pedir que o produto das parcelas fosse 30, o problema não apresenta solução nos reais. Mas, por meio dos procedimentos algébricos encontramos as soluções apresentadas acima que fazem parte do conjunto dos complexos e são denominadas de imaginárias. Assim sendo, quando Barlow inclui raízes negativas e imaginárias entre as possíveis raízes para uma equação, ele está admitindo-as como termos sem significado no mundo, provenientes da generalização de símbolos algébricos e de suas manipulações.

Chamamos a atenção ainda para o fato de que era imprescindível ao desenvolvimento da álgebra a aceitação da subtração de $(a - b)$, com $a < b$, pelo menos como um passo intermediário, bem como também as regras de manipulação envolvendo essa expressão. Porém, ao aceitarem essa operação, os rejeitadores se deparavam com o aparecimento de entidades matemáticas (raízes negativas e imaginárias) que na época eram carentes de significado lógico. Dessa forma, o fato de rejeitá-las por não encontrar significado lógico dentro da concepção de matemática vigente pode ser visto como um posicionamento até certo ponto pessoal, uma vez que elas eram provenientes de manipulações aceitáveis.

Outro fator importante no esclarecimento de uma possível interpretação equivocada a respeito da existência de contradição no posicionamento de Barlow é o fato de sua obra tratar-se de um dicionário, e não de uma obra teórica, o que torna mais difícil para o autor exprimir posicionamentos pessoais, bem como também se negar a registrar fatos, características e posicionamentos sobre o assunto o qual propôs abordar, apenas por serem diferentes das suas opiniões pessoais. Complementando esse raciocínio existe também o fato que, devido o dicionário consistir em um trabalho destinado a explicar o entendimento das coisas, a simples presença da definição de um termo, não implica na existência deste termo. Tomemos como exemplo, a palavra *esfinge*, que segundo o dicionário Aurélio significa: “Monstro fabuloso com cabeça humana e corpo de leão”. Embora, exista no dicionário uma explicação do que seja esfinge, este ser continua não existindo.

Assim sendo, concluímos que a escolha de Barlow por registrar a existência de raízes negativas e imaginárias e também o Teorema Fundamental da Álgebra em seu dicionário matemático não se configura uma contradição em seu pensamento de rejeitador dos números negativos. Defendemos que ele estaria apenas registrando os diversos posicionamentos matemáticos da época, e é com esse mesmo entendimento que interpretamos também a inclusão em seu dicionário de trechos nos quais ele relata as ideias de outros autores, mesmo que estes apresentem pontos divergentes dos defendidos por ele.

Com o intuito de reforçar nossa argumentação, ilustraremos agora dois trechos que retratam bem esse compromisso de Barlow com uma abordagem ampla de cada termo explicado em seu trabalho. O primeiro refere-se ao método de Euler para extrair raízes de equações biquadráticas, o qual é exemplificado por uma equação que contém três raízes positivas e uma negativa, como pode ser verificado em:

> Given $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$, to find the four values of x. [...] Hence, as the value b is negative, the four roots are the following :
>
> 1st. roots $x = \frac{3}{2} + \frac{4}{2} - \frac{5}{2} = 1$
>
> 2d. ……$x = \frac{3}{2} - \frac{4}{2} + \frac{5}{2} = 2$
>
> 3d. …….$x = \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} = 3$
>
> 4d. …….$x = \frac{3}{2} - \frac{4}{2} - \frac{5}{2} = -6$. (BARLOW, 1814, BIQUADRATIC *Equation*[37])

Mesmo não concordando com a existência da raiz -6, ele registra o método de Euler, que aceitava sem restrições as raízes negativas. A outra passagem encontra-se no comentário sobre o número de curvas de terceira ordem. Observemos:

> According to Newton, there are 72 species of lines of the third order; but Sterling discovered four more species of redundant hyperbolas; and Stone two other species of redundant hyperbolas, expressed by the equation $xy^2 = bx^2 + cx + d$; viz. in the case when $bx^2 + cx + d = 0$; has two unequal negative roots, and in that where the equation has two equal negative roots.

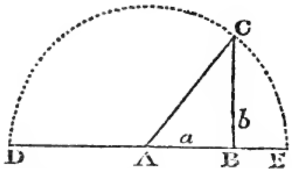
[37] Neste verbete o autor exemplifica três métodos de resolução de equações biquadráticas, o método de Ferrari, o de Descarte e finalmente o trecho citado encontra-se no terceiro método exposto que é o de Euler.

> So that there are at least 78 different species of lines of the third order. (BARLOW, 1814, CURVE[38])

Mesmo deixando explícito que ambas as citações referem-se a ideias de outros matemáticos, ao reproduzi-las em seu dicionário, Barlow atribui a sua a obra predicados como neutralidade, completude e credibilidade.

Neste estudo em busca de esclarecer o real posicionamento de Barlow em relação aos negativos e imaginários, a seguinte passagem: “If the quadratic be $x^2 - 2ax = b^2$, the construction will be the same as that of the preceding one, $x = a \pm \sqrt{a^2 + b^2}$ having one positive and one negative value” (BARLOW, 1814, CONSTRUCTION *of Equations*), nos chamou bastante a atenção por se encontrar no espaço dedicado à definição da expressão *construção de equações*, a qual ele define como sendo um método para encontrar as raízes de uma equação utilizando figuras geométricas. Como a supremacia da geometria sempre foi um dos principais obstáculos à aceitação dos negativos, resolvemos analisar essa passagem com mais detalhe.

O trecho citado antes não explica de que forma as raízes são obtidas, mas afirma que é por meio do mesmo processo que o utilizado no caso anterior, no qual ele mostra como encontrar as raízes quando temos uma equação do tipo $x^2 + 2ax = b^2$. Observemos a explicação apresentada para esse caso:

> If the quadratic be affected, let it be $x^2 + 2ax = b^2$ then form the right-angled triangle whose base AB is a, and perpendicular BC is b; with the centre A and radius AC, describe the semi-circle DCE; then DB and BE will be the two roots of the given quadratic ; x being $= \sqrt{a^2 + b^2} \pm a$.
>
> 
>
> (BARLOW, 1814, CONSTRUCTION *of Equations*)

Realmente BE e DB correspondem aos valores absolutos das raízes de ambas as equações, pois considerando o triângulo DCE, que tem como altura b e é retângulo em C, por está inscrito em uma semicircunferência, e utilizando-se das relações

[38] Para facilitar a localização desta citação procurar no sub tópico *Lines of the third order,* do verbete CURVE.

métricas no triângulo retângulo, temos que $b^2 = DB$ x BE. Mas, $DB = R + a$, onde R é o raio da semicircunferência que tem como centro A. Assim sendo, $R = a + BE$, consequentemente $DB = R + a = a + BE + a = 2a + BE$. Substituindo esta expressão em $b^2 = DB$ x BE, ficamos com $b^2 = (2a + BE)$x BE ou $b^2 = (2a)BE + (BE)^2$, portanto BE soluciona a equação do tipo $x^2 + 2ax = b^2$. Para encontrar a outra raiz voltemos à afirmação anterior de que $DB = 2a + BE \Rightarrow BE = DB - 2a$, agora substituindo esta expressão em $b^2 = DB$ x BE, ficamos com $b^2 = DB$x $(DB - 2a) \Rightarrow b^2 = (DB)^2 - 2aDB$, ou equivalentemente, $b^2 = (-DB)^2 + 2a(-DB)$, da qual conclui-se que $(-DB)$ é a outra raiz. Utilizando-se do mesmo raciocínio e fazendo as manipulações adequadas, verificamos que $(-BE)$ e (DB) são as raízes de $x^2 - 2ax = b^2$.

Note que nessa justificativa, desenvolvida por nós a partir da sugestão de Barlow, para se chegar aos valores das raízes foi necessário aceitarmos que $(-DB)^2 = (DB)^2$, o que significa aceitar que – x $- = +$. Porém, este fato contraria a posição rejeitadora do autor, mas ao voltarmos à atenção somente para a citação, verificamos que a geometria é usada por Barlow apenas como uma forma de justificar os valores das raízes em termos absolutos, pois ele apresenta no final de cada comentário uma equação algébrica que indica os valores as duas raízes. Dessa forma, esse trecho reflete bem a necessidade de justificativa dos assuntos algébricos por meio de demonstrações geométricas, mas não transpõe a barreira imposta pela geometria à aceitação dos negativos, como imaginamos quando identificamos tal trecho na definição da expressão *construção de equações*.

Ainda sobre a citação anterior, verificamos que a fórmula $x = \sqrt{a^2 + b^2} \pm a$ fornecida por Barlow para encontrar as raízes quando temos uma equação do tipo $x^2 + 2a = b^2$ está errada, pois $\sqrt{a^2 + b^2}$ é sempre maior ou igual que a, e, assim sendo, $x = \sqrt{a^2 + b^2} \pm a$ fornece sempre valores não negativos, mas como vimos outrora uma das raízes é sempre negativa. Esse erro pode ser compreendido melhor por meio do seguinte exemplo numérico. Considere a equação $x^2 + 2(4)x = 3^2$ ou a equivalente $x^2 + 8x = 9$. As suas raízes são: $x_1 = -9$ e $x_2 = 1$, mas, se utilizarmos a fórmula proposta pelo autor, encontramos $x = \sqrt{3^2 + 4^2} \pm 4 = 5 \pm 4 = x_1 = 9$ e $x_2 = 1$. Embora em termos absolutos os valores estejam corretos, apenas o 1 é raiz da equação, a outra raiz é -9 e não 9. A fórmula correta para este caso é: $x =$

$-a \pm \sqrt{a^2 + b^2}$, esta constatação nos leva à interpretação de que esse erro ocorreu justamente devido ao posicionamento rejeitador do autor, pois para os rejeitadores existe a necessidade de contornar uma expressão que inicia com o sinal de negativo, visto que para eles expressões desse tipo não fazem sentido, pois quantidades negativas não podem iniciar uma expressão, uma vez que são interpretadas apenas como o subtraendo.

Voltando às palavras que escolhemos para nortear nossa pesquisa no dicionário matemático de Barlow, resta apenas estudarmos a definição dos termos Negativo e Raiz. Quanto à definição de Negativo, ela não acrescenta muito à investigação, pois essa palavra é definida apenas como sendo o inverso de positivo. Os trechos mais significativos presentes neste tópico são a explicação sobre quantidade negativa e o relato no qual o autor se posiciona contrário à existência dos negativos como termos independentes, já mencionados anteriormente. O mesmo acontece com a palavra Raiz, que foi elencada como central justamente para investigarmos como o autor se posiciona em relação à existência de raízes negativas e imaginárias, tema também já debatido e esclarecido.

Finalizaremos com a análise da seguinte passagem: “False Root, in Numbers and Equations, is a term used by Cardan to denote what we now call their negative roots” (BARLOW, 1814, False *Root*). Mesmo que a intenção do autor com esse trecho seja apenas registrar uma mudança de nomenclatura, o fato de ele abordar as raízes negativas como sendo algo do conhecimento comum mostra a força que a ideia da existência dos números negativos tinha na comunidade matemática da época. Porém, os matemáticos mais conservadores defendiam que, mais que útil, um elemento matemático tem que ser compreendido dentro da lógica matemática. Dessa forma, a rejeição existia não simplesmente por não acreditar na existência dos negativos, mas por não compreendê-los dentro da estrutura lógica da matemática.

3.3 OS NEGATIVOS NA OBRA *AN ELEMENTARY INVESTIGATION OF THE THEORY OF NUMBERS*[39]

A partir de agora analisaremos as especificidades presentes na teoria desenvolvida por Barlow no decorrer da sua obra sobre Teoria dos Números. Optamos por centrar nossa atenção na segunda parte dela, pois nesta o autor dedica-se a estudar a resolução de equações indeterminadas e é justamente no contexto de resolução de equação que os negativos se originam e continuam a incomodar.

Sobre a origem dos números negativos, Nagel (1935) tece o seguinte comentário,

> […] while fractions, and operations with them in accordance with the same formal rules as with integers, has been accepted as "natural" extensions of the original concept of number, "negative" and "imaginary numbers" were not welcomed so readily. After a general method was discovered for solving algebraic equations of the first degree, it was found that in some cases a peculiar kind of root, namely, a "negative number," was obtained. Such roots clearly did not correspond to anything that had heretofore been recognized as quantity; hence what meaning to assign to these "negative quantities" become a serious problem (NAGEL, 1935, p. 433).

Pelo exposto, fica claro que os negativos surgem após o desenvolvimento de um método geral para resolução de equações do primeiro grau e devido eles não se enquadrarem no conceito de número vigente, o seu surgimento deu início a uma problemática que se desenrolou por vários séculos, relatada por nós no primeiro capítulo.

Vale a pena ainda ressaltar que a ligação entre a resolução de equações e a problemática dos números negativos não se limita ao aspecto motivacional inicial. A resolução de equações é, na verdade, um tema permanente no debate em torno da existência dos números negativos. Podemos evidenciar a forte ligação existente entre os dois temas por meio tanto da constatação do intenso debate sobre a existência dos números negativos, no decorrer do desenvolvimento de métodos de resolução de equações do terceiro e quarto grau. Como também nos estudos que

---

[39] Capa e Sumário desta obra encontra-se no Anexo.

objetivava comprovar a igualdade entre o número de raízes de uma equação e o seu grau. Essa igualdade, hoje conhecida como Teorema Fundamental da Álgebra, encantou diversos matemáticos renomados e mesmo antes da sua comprovação, existia um forte desejo na comunidade matemática de que esse resultado fosse verdade, devido a sua clareza e beleza. Assim sendo, o Teorema Fundamental da Álgebra e todos os estudos em busca da sua comprovação contribuíram de forma significativa com a problemática a respeito da existência dos negativos. Para finalizar é relevante ainda ressaltar que, embora, importante para historia dos negativos, a comprovação do Teorema Fundamental da Álgebra, por Gauss em 1799, não foi o suficiente para plena aceitação dos negativos, pois como já mencionamos a problemática em torno da existência desses números aconteceu não devido a falta de argumentos que justifiquem sua existência, mas devido à inadequação de sua existência com a concepção de matemática vigente até meados do século XIX.

Diante do exposto, a obra de Barlow sobre Teoria dos Números, ao dedicar boa parte de sua abordagem a métodos de resolução de equações, se configura um importante instrumento de pesquisa, já que foi escrita por um dos últimos matemáticos a assumir a posição de rejeitador dos números negativos.

Barlow inicia a segunda parte dessa obra com um capítulo intitulado de *On the Indeterminate and Diophantine Analysis*, no qual ele apresenta a teoria das frações contínuas, que servirá de embasamento teórico para os métodos de resolução de equações indeterminadas abordados nos capítulos subsequentes.

A teoria das frações contínuas consiste em uma teoria na qual, dada uma fração, deve-se obter uma sequência de frações, por meio de sucessivas divisões, de modo que essa sequência, ao ser expressa na forma de uma soma sucessiva específica, resulta na fração dada. O processo para obtenção dessa sequência de frações se inicia dividindo o maior dos termos da fração dada pelo menor e continua por meio da divisão entre o dividendo e o resto da divisão anterior. Esse processo deve se repetir até que se obtenha uma divisão exata. Para efeitos didáticos, elucidaremos a teoria das frações contínuas por meio de exemplos numéricos, porém é importante deixar claro que toda essa teoria encontra-se rigorosamente demonstrada no livro de Barlow, por meio de proposições genéricas.

Se desejarmos, por exemplo, representar $\frac{9}{13}$ por meio de uma fração contínua, devemos iniciar dividindo 13 por 9, que resulta em $13: 9 = 9.1 + 4$. Na sequência, devemos realizar a divisão entre o dividendo e o resto da operação anterior, ou seja, $9: 4 \ = \ 4.2 \ + 1$. Devemos repetir esse processo até obtermos uma divisão exata. No nosso exemplo, isto acontece já na próxima divisão, uma vez que $4: 1 \ = \ 1.4 \ + 0$. A fração contínua que representa $\frac{9}{13}$ é expressa da seguinte maneira $\frac{9}{13} = \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{0}{1}}}}$, onde $1, 2 ,4$ são respectivamente os quocientes das divisões realizadas. A sequência de frações $\frac{1}{1}, \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}} = \frac{9}{13}$ obtidas durante o processo de construção da fração contínua, são chamadas frações convergentes. Como se pode observar, as frações convergentes são frações intermediárias, geradas a cada nova divisão.

Entre os teoremas e proposições trabalhados por Barlow, no decorrer da sua exposição sobre a teoria das frações contínuas, o resultado que será mais utilizado por ele posteriormente para resolução de equações indeterminadas é o que garante que se $\frac{p}{q}$ e $\frac{p'}{q'}$ são duas frações consecutivas que convergem para certa fração $\frac{a}{b}$, então $pq' - p'q = \pm 1$, ou seja, a subtração entre o produto dos meios pelos extremos de duas frações convergentes consecutivas é sempre igual a ± 1. Assim sendo, para descobrirmos as soluções de equações indeterminadas do primeiro grau, do tipo $ax - by = \pm 1$, basta encontrarmos a sequência de frações que converge para $\frac{a}{b}$, pois pelo exposto, a fração imediatamente anterior a $\frac{a}{b}$ solucionará a equação.

Esse resultado e as equações do tipo $ax - by = \pm 1$ são peças centrais na teoria desenvolvida na segunda parte da obra, pois eles auxiliam tanto na resolução de equação indeterminada do primeiro grau como também nas equações dos demais graus. Devido a sua importância, analisaremos mais adiante as particularidades presentes na resolução de equações do tipo $ax - by = \pm 1$. No momento, chamamos a atenção apenas para o fato de que, ao apresentar uma equação que origina como resposta -1, Barlow deixa margem para deduzirmos que ele estaria aceitando uma subtração em que o subtraendo é maior que o minuendo.

Mas, como bem esclarecido no tópico anterior, Barlow é um rejeitador dos números negativos, portanto não pode ser esse o seu pensamento.

Diante desse impasse, resolvemos buscar interpretações que justificassem o raciocínio presente nessa afirmação como aceitável e ao mesmo tempo mantivesse coerente a postura de Barlow de rejeitador dos negativos.

Duas intepretações surgiram como possíveis justificativas para o pensamento de Barlow referente ao fato em questão. Antes de apresentá-las, queremos registrar que optamos por utilizarmos sempre exemplos numéricos para explicar nossas interpretações sobre o pensamento de Barlow, pois acreditamos que assim torna-se mais fácil expormos nossas ideias, como também o leitor as compreenderem.

Para a questão anteriormente levantada, escolhemos o exemplo trabalhado por Barlow (1811, p. 319), no qual é proposto encontrar as soluções inteiras[40] da equação $13x - 9y = 1$. Utilizando-se do resultado exposto antes, decorrente da teoria das frações contínuas, o autor facilmente encontra os valores $x = 2$ e $y = 3$ como possíveis soluções para equação $13x - 9y = 1$, já que $\frac{2}{3}$ é a fração que antecede $\frac{9}{13}$ na sequência de frações convergentes[41]. No entanto, Barlow argumenta que para esses valores temos $13x - 9y = -1$ e não o desejado.

Uma das interpretações que surgiu para o pensamento de Barlow, em relação a essa passagem, foi que o passo que origina como resposta -1 era aceitável por ele, por consistir em um passo intermediário na resolução da equação proposta e não um passo que conduzisse a um resultado final de uma expressão que representasse um termo independente. No caso em questão, seria apenas uma espécie de teste.

A estratégia de aceitar como legítima a subtração que dá origem a um número negativo sempre que esta consistir de um passo intermediário não é uma ideia introduzida por Barlow. Já comentamos anteriormente que essa ideia é algo comum entre os rejeitadores dos negativos e pode ser identificada também nas

[40] Vale a pena lembrar que para Barlow os números inteiros são apenas os números positivos.

[41] Os cálculos que conduzem à obtenção da fração 2/3 como sendo a fração que antecede 9/13 na sequência de frações já foram realizados antes.

obras de Maseres e Frend[42] analisadas no capítulo anterior, cuja datas de publicação antecedem a obra de Barlow em estudo.

Em nossa análise, concluímos que essa estratégia de aceitar os negativos como passo intermediário é o que torna viável o desenvolvimento de abordagens algébricas por autores que não aceitam os negativos como termo independente. Essa conclusão embasou-se tanto no fato dessa ser a justificativa utilizada para explicar vários trechos, nos quais os negativos aparecem, como também na constatação de que ao adotar esse recurso, todas as manipulações com os negativos passam a serem plenamente aceitas no decorrer do processo, sendo necessário apenas uma maior atenção nas hipóteses iniciais dos problemas e no fim, adequar as respostas de modo que teoria não entre em contradição.

A outra interpretação possível para a aceitação de Barlow, para o ponto em questão, é que ele estaria vendo a operação sendo realizada, não como $13.2 - 9.3 = 26 - 27 = -1$, mas, sim, $13(2) - 9(3) + 1 = 26 - 27 + 1 = 27 - 27 = 0$. Aqui, adequações de mudança de lado foram feitas com o objetivo de realizar a subtração do modo desejado pelos rejeitadores.

É perceptível, em ambas as interpretações que apresentamos, a necessidade de adequações para que os rejeitadores consigam dar continuidade à sua argumentação de forma coerente. Portanto, diante do exposto, nosso objetivo a partir de agora é mostrar que a única forma dos autores que não aceitam a existência dos negativos conseguirem produzir obras matemáticas que abordam assuntos algébricos é adicionando um conjunto de particularidades matemáticas e hipóteses *ad hoc*[43].

---

[42] São muitos os exemplos que ilustram esse artificio, veja, por exemplo, página 13 da obra *Principles of Algebra* de Frend.

[43] Hipótese ad hoc é aquela criada unicamente para explicar pontos que enfraquecem a consistência de uma teoria.

3.4 ADEQUAÇÕES PRESENTES NA OBRA DE TEORIA DOS NÚMEROS DE BARLOW, NECESSÁRIAS PARA MANTER A COERÊNCIA DA SUA POSTURA COMO REJEITADOR DOS NEGATIVOS

Após o embasamento teórico fornecido no primeiro capítulo, Barlow dedica os próximos três capítulos de sua obra *An Elementary Investigation of the Theory Of Numbers* ao estudo dos métodos de resoluções de equações indeterminadas do primeiro, segundo e terceiro grau, respectivamente. Como nesses capítulos cada método desenvolvido é ilustrado por meio de muitos exemplos, optamos por fazer um apanhado de posicionamentos que mostrem que a matemática, mais especificamente a álgebra, que se desenvolve tendo por base a ideia de que os números negativos não existem, obriga-se a introduzir particularidades, manobras e artifícios que acarretam como consequência a falta de clareza nas teorias desenvolvidas.

Por meio desse levantamento, mostraremos também que a inserção desses mecanismos era indispensável e consistia na única maneira que os adeptos da corrente contrária aos negativos possuíam para manterem suas teorias coerentes. Pois como bem expôs Nagel (1935), os procedimentos algébricos acarretam o aparecimento dessas entidades matemáticas (negativos), ainda carentes de significados lógicos no início do século XIX.

Para que possamos compreender bem as particularidades introduzidas, é necessário primeiro entendermos em que se fundamenta a rejeição aos negativos. A oposição aos negativos resume-se basicamente na sua inaceitabilidade como números, pois ao serem concebidos como algo menor do que nada, não se enquadravam dentro da concepção de matemática vigente, entendida como ciência que lida apenas com quantidades e medidas. Consequentemente, com a ausência dos negativos não era possível realizar a operação de subtração em que o minuendo é menor que o subtraendo, na Aritmética e na Álgebra, não era possível admitir um número negativo como raiz de uma equação.

Fundamentados nessa ideia, é fácil compreender que não existia problema para os rejeitadores que os negativos fossem utilizados como expoentes ou como coeficientes em expressões algébricas. O trecho que segue, “Every divisor of the formula $t^2 + au^2$, in which t and u are prime to each other, and a any integer number hatever, positive or negative, is also a divisor of the formula $q^2 + a$.” (BARLOW, 1814, p. 190), mostra o autor fazendo uso do termo inteiro negativo, referindo-se ao coeficiente da expressão.

Chamamos a atenção para dois pontos nessa passagem: primeiro para o fato de que, ao fazer uso do termo inteiro negativo, ele estaria comentando um erro de rigor, pois para ele, o conjunto dos números inteiros é composto apenas por termos positivos. Porém, interpretamos essa e outras passagens similares como um vício de linguagem do autor. O segundo ponto se refere ao fato de destacar um termo isoladamente e atribuir a ele a possibilidade de ser negativo.

Embora essa última postura não provoque problemas na fundamentação argumentativa dos rejeitadores, já que o termo referido é o coeficiente de uma expressão, ela acarreta uma falta de clareza à teoria, pois estaria admitindo a existência dos negativos, porém impondo a eles a restrição de só poderem ser referenciados quando não representam um termo isolado. Esta última ideia fica ainda mais clara na seguinte passagem

> Ex.1. Find the values of x and y in the indeterminate equation
>
> $$9x - 13y = 10$$
>
> First, in the equation
>
> $$9q - 13p = \pm 1$$
>
> we have $q = 3$ and $p = 2$, which gives $+1$, the same sign as 10 in the proposed equation; and, therefore, the general values of x and y are $x = 13m + 30$, and $y = 9m + 20$. Therefore, assuming successively
>
> $$m = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \&c.,$$
>
> we have the following corresponding values of x and y, which are all deduced from the first two, by adding successively to the values of x the coefficient of y and to y the coefficient of x.
>
> $$x = 4, 17, 30, 43, 56, 69, 82, \&c.$$
>
> $$y = 2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, \&c.$$ (BARLOW, 1811, p. 322)

Note que, após encontrar a expressão para os valores gerais de x e y, Barlow sugere entre os possíveis valores que o parâmetro m pode assumir[44] os números negativos -2 e -1. Ao fazer isso, ele, igualmente ao passo anterior, sugere a existência dos negativos, no entanto, particulariza e restringe o seu uso. A restrição quanto a uso dos negativos fica ainda mais evidente neste trecho, no momento em que m não pode assumir valores menores que -2, pois se assim fosse, teríamos tanto para x como para y valores negativos, que apesar de solucionarem o problema proposto, não são aceitáveis para Barlow, porque x e y representam as raízes da equação.

A possibilidade de representar um termo isolado com valores negativos, como aconteceu com o coeficiente a no trecho anterior e mais claramente com o parâmetro m agora, coexistindo com a imposição categórica de outros termos, por representarem resultados finais, como é o caso das raízes x e y, não poderem ser negativos, faz com que a teoria desenvolvida por Barlow, embora coerente, seja confusa.

Ao focarmos nossa atenção no aspecto estrutural dos métodos de resolução de equações indeterminadas, encontramos novamente artifícios inseridos pelo autor apenas para contornar a ausência dos negativos. Optamos por retornar a equação $13x - 9y = 1$, introduzida na página 104 deste trabalho, como suporte para as questões que apresentaremos agora. Anteriormente, foi salientado que os valores sugeridos pela teoria das frações contínuas $x = 2$ e $y = 3$, não satisfazia a equação, pois em vez de resultar em 1, esses valores, quando substituídos na equação, resultam em -1. Como o problema em questão consiste apenas da inversão do sinal, atualmente, com a plena aceitação dos negativos, esse problema é resolvido tomando como solução o oposto dos valores sugeridos, ou seja, $x = -2$ e $y = -3$. Mas, esses não podem ser os valores adotados por Barlow. Então, com o intuito de obter apenas valores positivos para as soluções, ele utiliza-se da seguinte estratégia: multiplica 13 por $(9m - 2)$ e 9 por $(13m - 3)$, pois dessa forma inverte o sinal do resultado final, mas mantém a diferença sendo 1, já que os termos $13(9m)$

[44] A justificativa para esta passagem é novamente o fato do número negativo está sendo utilizado na representação de um termo intermediário.

e $9(13m)$ são eliminados por terem sinais diferentes, sobrando apenas $13(-2) - 9(-3)$ que resulta em 1.

Note que Barlow, em sua estratégia, realiza a mesma ideia utilizada atualmente, a inversão dos sinais das possíveis soluções. Mas, o seu posicionamento o obriga a ir além. Ele precisa fugir das indesejadas soluções negativas e isso é alcançado impondo ao parâmetro m a restrição de só assumir valores que tornam as raízes positivas. No caso em questão, m deve ser maior ou igual a 1. A generalização dessa ideia encontra-se resumida no seguinte trecho:

> And we may always convert the value of the equation from $+c$ to $-c$, or from $-$ to $+$, by taking cp and cq negative and, in this case, m positive, in order that x and y may be so; for, if
>
> $a\,.\,cq - b\,.\,cp = +c$; then
>
> $a(mb - cq) - b(ma - cp) = -c$; and if
>
> $a\,.\,cq - b\,.\,cp = -c$, then will
>
> $a(mb - cq) - b(ma - cp) = c$.
>
> So that the general values of x and y are,
>
> $x = mb \pm cq$, and $y = ma \pm cp$,
>
> the upper sign having place for cq and cp, when the expression $aq - bp$ has the same sign with c in the given equation, and the lower one when it has a different sign. (BARLOW, 1811, p. 321)

Ao explicar o mecanismo para se inverter o sinal do resultado da equação, Barlow faz uma observação importantíssima que mantém sua teoria coerente com a sua postura de rejeitador dos negativos. Ele chama a atenção para o fato de que, ao utilizar a estratégia de inversão, o parâmetro m obrigatoriamente deve ser positivo. Essa exigência é necessária porque, nos casos de inversão, as raízes sugeridas são postas negativas[45], consequentemente, para a manutenção de suas ideias, m não pode ser também negativo, nem zero. Note ainda que, o parâmetro m, é apenas um elemento generalizador, pois o resultado final se mantém igual a 1 independente do valor que lhe é atribuído. Desta forma, as limitações impostas ao parâmetro m configuram-se em mais um artifício para manter a teoria coerente.

Diante do exposto, fica claro que não têm como o Barlow fugir totalmente dos negativos, pois eles constituem elemento essencial na argumentação. O que é

[45] Essa ideia foi exposta anteriormente com um exemplo numérico.

possível é impor restrições, com o objetivo de não ter um resultado final negativo. Assim sendo, as restrições impostas são provenientes apenas da necessidade de adequar as soluções à sua postura de rejeitador.

No levantamento que fizemos, percebemos que, além da necessidade de inserir manobras e artifícios, outro fato marcante presente na obra analisada é o aparecimento de particularidades na teoria desenvolvida, proveniente unicamente da postura de negar a existência dos números negativos.

Uma destas particularidades é a limitação no número de soluções de algumas equações indeterminadas. Por exemplo, ao estudar as equações do tipo $ax + by = c$, Barlow afirma que existe um número limitado de soluções para esse tipo de equações. Essa afirmação fundamenta-se na ideia de que o número de combinações possível de se escrever um número positivo como soma de outros dois números positivos é limitada. No entanto, caso ele aceitasse a existência de raízes negativas, essa limitação desapareceria.

A identificação do número de soluções possíveis para um equação é um tema de grande relevância para os rejeitadores. Comentamos no capítulo anterior, que Frend dedica boa parte da segunda parte de sua obra a esse estudo e na obra de Barlow a importância deste tópico fica bem evidente, no momento em que ele restringe a abordagem das equações do tipo $ax + by + cz = d$, apenas às que possuem todos os coeficientes positivos. Esta restrição acontece não porque os demais tipos de equação indeterminada do primeiro grau com três variáveis não são solucionáveis, com as bases teóricas que ele apresentou no capítulo sobre frações contínuas, mas sim porque esse é o único caso em que temos um número limitado de soluções. Pois quando temos um ou mais coeficientes negativos a equação $ax + by + cz = d$ tem uma infinidade de soluções positivas, como se verifica pelas próprias palavras de Barlow:

> In the first place, we may observe, that, if any one, or more, of the coefficients a, b, or c, be negative, the number of answers is indefinite.
>
> For, let b be negative, then the equation may be put under the form
>
> $$ax + cz = d + by,$$
>
> in which, by means of the indeterminate y, an indefinite number of values may be given to the second side of the equation; x and z : we need, therefore, only consider equations of the form above given, in which the quantities are all connected together by the sign $+$. (BARLOW, 1811, p. 327)

Já ao considerar todos os coeficientes positivos, a equação $ax + by + cz = d$ que equivale a $ax + by = d - cz$, possui um número limitado de soluções, pois x e y são obrigatoriamente positivos pela sua postura de rejeitador, o que obriga também a subtração $d - cz$ ser também positiva, limitando o número de solução aos casos em que cz é menor que d.

A necessidade de identificar exatamente quantas soluções possui uma equação fez com que os rejeitadores desenvolvessem toda uma teoria para este fim. Constatamos em nossa análise que na seção dedicada ao estudo das equações indeterminadas do primeiro grau com três variáveis, Barlow ocupa-se mais em expor a teoria que identifica quantas soluções positivas uma equação desse tipo possui, do que apresentar métodos de resolução para elas. A explicação apresentada acima para a escolha das equações trabalhadas nesse tópico evidência bem esta constatação.

Verificamos ainda que a tarefa de identificar o número de soluções torna-se bastante trabalhosa e requer cálculos bem maçantes à medida que as equações tornam-se mais complexas. Para ilustrar essa verificação citaremos a equação $12x + 15y + 20z = 100001$, trabalhada por Barlow nas páginas 335 e 336, a qual ele afirma possuir exatamente 1.388.611 soluções positivas.

Embora não reste dúvida que o estudo dedicado à identificação do número de soluções positivas de uma equação configure uma particularidade decorrente diretamente do fato do autor ser um rejeitador dos negativos e também, que a plena aceitação destes números faz com que esse conhecimento torne-se desnecessário, quando o tema em pauta é resoluções de equações indeterminadas. É importante ressaltar que, esse conhecimento é relevante quando saímos do campo teórico e partimos para o campo aplicável, onde em um grande número de casos não faz sentido a admissão de soluções negativas.

Dando continuidade ao nosso levantamento, observamos também que, a postura de rejeitador do autor restringe os tipos de equações possíveis de serem resolvidas e amplia o número de fórmulas gerais para as soluções das equações. Para ilustrar estas duas caraterísticas optamos por construir dois quadros, a partir dos quais fosse possível comparar as soluções apresentadas por Barlow para equações indeterminadas do primeiro grau com duas variáveis, com as soluções sugeridas por nós, utilizando a mesma linha de raciocínio, mas acrescentando o fato dos negativos existirem. Além das fórmulas gerais para as soluções, optamos por abordar também, o número de soluções, condições impostas ao parâmetro e exemplos, pois consideramos que desta forma os quadros ajudariam a esclarecer muitas das particularidades apresentadas anteriormente.

Para que os quadros atinjam o objetivo, para o qual foram idealizados é necessário antes esclarecermos a notação utilizada. As letras p e q representam respectivamente o numerador e denominador da fração $\frac{p}{q}$ que antecede $\frac{a}{b}$ na sequência de frações convergentes, durante a construção da fração contínua $\frac{a}{b}$. Assim sendo, pelo resultado já exposto na página 103 desta pesquisa, sabemos que $aq - bp = \pm 1$. As fórmulas[46] presentes nos quadros tomam por base o resultado $aq - bp = 1$, do qual se deduz $acq - bcp = c$. A letra m representa um parâmetro generalizador, já a, b e c são os coeficientes das equações e em todos os caso são positivos e por fim x e y representam as raízes das equações.

[46] Caso optássemos por usar como base o resultado $aq - bp = -1$, chegaríamos as mesma conclusões, havendo apenas uma mudança na correspondência entre as fórmulas e as equações.

QUADRO RESUMO SOBRE EQUAÇÕES INDETERMINADAS DO1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS, SEGUNDO AS IDEIAS APRESENTADAS POR BARLOW NO SEU LIVRO SOBRE TEORIA DOS NÚMEROS

Equação	Número de soluções	Solução	Exemplo	Condição para o parâmetro
$ax - by = c$	Infinitas	$x = mb + cq$ $y = ma + cp$	$9x - 13y = 10$ $\begin{cases} x = 13m + 10(3) \\ y = 9m + 10(2) \end{cases}$	$m \in \mathbb{Z} / m \geq -2$
$ax - by = -c$	Infinitas	$x = mb - cq$ $y = ma - cp$	$9x - 13y = -10$ $\begin{cases} x = 13m - 10(3) \\ y = 9m - 10(2) \end{cases}$	$m \in \mathbb{Z} / m \geq 3$
$ax + by = c$	Limitada aos valores de $\frac{cp}{a} < m < \frac{cq}{b}$	$x = cq - mb$ $y = ma + cp$	$9x + 13y = 2000$ $\begin{cases} x = 2000(3) - 13m \\ y = 9m - 2000(2) \end{cases}$	$m \in \mathbb{Z} /$ $444 < m < 461$
$ax + by = -c$	Nenhuma	Impossível de ser solucionável	$9x + 13y = -2000$ $\nexists\, x$ e $y \geq 0$, que satisfazem a equação	X
$-ax - by = c$	Nenhuma	Impossível de ser solucionável	$-9x - 13y = 2000$ $\nexists\, x$ e $y \geq 0$, que satisfazem a equação	X
$-ax - by = -c$	Limitada aos valores de $\frac{cp}{a} < m < \frac{cq}{b}$	Idêntica a da segunda equação	$-9x - 13y = -2000$ $\begin{cases} x = 2000(3) - 13m \\ y = 9m - 2000(2) \end{cases}$	$m \in \mathbb{Z} /$ $444 < m < 461$
$-ax + by = c$	Infinitas	Idêntica a da segunda equação	$-9x + 13y = 10$ $\begin{cases} x = 13m - 10(3) \\ y = 9m - 10(2) \end{cases}$	$m \in \mathbb{Z} / m \geq 3$
$-ax + by = -c$	Infinitas	Idêntica a da primeira equação	$-9x + 13y = -10$ $\begin{cases} x = 13m + 10(3) \\ y = 9m + 10(2) \end{cases}$	$m \in \mathbb{Z} / m \geq -2$

QUADRO RESUMO SOBRE EQUAÇÕES INDETERMINADAS DO 1º GRAU COM DUAS VARIÁVES, CASO OS NEGATIVOS FOSSEM PLENAMENTE ACEITOS.

Equação	Número de soluções	Solução	Exemplo	Condição do parâmetro
$ax - by = c$	Infinitas	$x = mb + cq$ $y = ma + cp$	$9x - 13y = 10$ $\begin{cases} x = 13m + 10(3) \\ y = 9m + 10(2) \end{cases}$	$\forall m \in \mathbb{Z}$
$ax - by = -c$	Infinitas	$x = mb - cq$ $y = ma - cp$	$9x - 13y = -10$ $\begin{cases} x = 13m - 10(3) \\ y = 9m - 10(2) \end{cases}$	$\forall m \in \mathbb{Z}$
$ax + by = c$	Infinitas	$x = mb + cq$ $y = -(ma + cp)$	$9x + 13y = 10$ $\begin{cases} x = 13m + 10(3) \\ y = -[9m + 10(2)] \end{cases}$	$\forall m \in \mathbb{Z}$
$ax + by = -c$	Infinitas	$x = mb - cq$ $y = -(ma - cp)$	$9x + 13y = -10$ $\begin{cases} x = 13m - 10(3) \\ y = -[9m - 10(2)] \end{cases}$	$\forall m \in \mathbb{Z}$
$-ax - by = c$	Infinitas	Idêntica a da quarta equação	$-9x - 13y = 10$ $\begin{cases} x = 13m - 10(3) \\ y = -[9m - 10(2)] \end{cases}$	$\forall m \in \mathbb{Z}$
$-ax - by = -c$	Infinitas	Idêntica a da terceira equação	$-9x - 13y = -10$ $\begin{cases} x = 13m + 10(3) \\ y = -[9m + 10(2)] \end{cases}$	$\forall m \in \mathbb{Z}$
$-ax + by = c$	Infinitas	Idêntica a da segunda equação	$-9x + 13y = -10$ $\begin{cases} x = 13m - 10(3) \\ y = 9\text{m} - 10(20) \end{cases}$	$\forall m \in \mathbb{Z}$
$-ax + by = -c$	Infinitas	Idêntica a da primeira equação	$-9x + 13y = -10$ $\begin{cases} x = 13m + 10(3) \\ y = 9m + 10(2) \end{cases}$	$\forall m \in \mathbb{Z}$

Ao comparar à segunda, terceira e última coluna nos dois quadros, as particularidades relatadas anteriormente a respeito da limitação no número de soluções possíveis, da restrição nos tipos de equações solucionáveis e da necessidade de adequações, ficam claramente explícitas como oriundas exclusivamente da postura rejeitadora de Barlow. Quanto à constatação da ampliação no número de fórmulas somente por meio de uma análise mais apurada da coluna referente às soluções, conseguimos concluir que as soluções sugeridas pelo quadro que aceita plenamente a existência dos negativos podem ser resumidas na seguinte estrutura

$$\begin{cases} x = mb \pm cq \\ y = \pm(ma \pm cp) \end{cases}$$

em que o sinal do meio será $+$ sempre que o sinal do resultado obtido pela substituição na equação de x por q e y por p, coincidir com o sinal de c, no caso contrário, o sinal do meio será $-$. Quanto ao sinal da raiz y, será $+$ sempre que os coeficientes de x e y tiverem sinais diferentes, já no caso em que os coeficientes de x e y tem o mesmo sinal, usa-se $-$ para expressão da raiz y.

Embora as informações relativas à coluna das soluções, da primeira, segunda, sétima e oitava linhas sejam as mesmas nos dois quadros, percebemos que não é possível sintetizar em uma única estrutura, como fizemos anteriormente todas as soluções contidas no quadro em que temos a abordagem de Barlow, pois a solução oferecida quando os coeficientes apresentam o mesmo sinal (linha 3 e linha 6) tem uma configuração completamente diferente das soluções presentes nas demais linhas.

Em busca de melhor compreender essa mudança na estrutura das soluções focamos nosso estudo na explicação fornecida por Barlow para deduzir as possíveis soluções das equações do tipo $ax + by = c$. Apesar do objetivo dessa pesquisa não ser detalhar métodos de resolução de equações indeterminadas, resolvemos expor o trecho, no qual Barlow explica como proceder para encontrar as fórmulas gerais das soluções da equação do tipo $ax + by = c$, pois consideremos esse trecho bastante rico para análise que estamos realizando,

> […] considering the sum $ax + by = c$.
>
> Let, then, $aq - bp = 1$, then we have also
>
> $$a.cq - b.cp = c;$$
>
> and it is evident, that we shall have the same result if we make
>
> $$x = cq - mb, \text{ and } y = cp - ma$$
>
> for this still gives
>
> $$a(cq - mb) - b(cp - ma) = c$$
>
> assuming, therefore, for in such a value, that $cp - ma$ may become negative, while cq - mb remains positive, we shall have
>
> $$a(cq - mb) + b(ma - cp) = c;$$
>
> and, consequently $x = cq - mb$, and $y = ma - cp$, but if m cannot be so taken that $cp - ma$ shall be "negative, while $cq - mb$ remains positive, it is a proof that the proposed equation is impossible in integers. And, on the contrary, the equations will always admit of as many solutions in whole numbers, as there may be different values given to m, such that the above conditions may obtain[47]. (BARLOW, 1811, p. 324)

Por meio da análise desse trecho compreendemos que a configuração diferente na solução acontece por que neste caso, invés de Barlow adicionar os termos generalizadores mb e ma ele opta por subtrai-los. A escolha pela subtração acontece por que com ela é possível manter o valor absoluto da raiz e mudar apenas o seu sinal, invertendo a posição do minuendo e do subtraendo. Percebemos que é exatamente essa, a estratégia escolhida por ele para conectar o método apresentado anteriormente, no qual os termos da equação são ligados pelo sinal negativo, com a questão atual, no qual o sinal entre os termos é positivo. Note que, para alcançar o desejado, Barlow inverte de posição os elementos da subtração $(cp - ma)$, que representa a raiz y, pois assim é possível trocar a operação do meio para adição mantendo o valor absoluto da y, ou seja, se $y = (cp - ma) < 0$ então

[47] As equações indeterminadas do primeiro grau com três variáveis, $ax + by + cz = d$, que possuem todos os coeficientes positivos são resolvidas por meio de uma extensão deste método. Para que a abordagem seja a mesma, basta olhar $d - cz$ da equação com três variáveis, como sendo o termo independente na equação com duas variáveis e fazer z variar em todos os valores que tornam $d - cz > 0$. A ideia de estender os métodos conhecidos para a equação do primeiro grau com duas variáveis foi utilizada por nós para verificar a possibilidade de resolução das equações do tipo $ax + by + cz = d$ não abordadas por Barlow.

$|y| = (\,ma - \,cp\,) > 0$, ou ainda $y = -(\,ma - \,cp\,) < 0$ e assim, para completar o desejado pelos rejeitadores, resta apenas limitar as respostas aos valores de m, em que $cq - mb > 0$ e $cp - ma < 0$, ou equivalentemente $ma - cp > 0$, ou seja, $\frac{cp}{a} < m < \frac{cq}{b}$.

Como comentado anteriormente essa passagem é bastante rica, pois ilustra muitas das considerações apontadas em nossa análise de como a postura de rejeitador dos negativos interfere na produção de uma obra algébrica. Por exemplo, aparece no desenrolar da argumentação a necessidade que uma das raízes seja momentaneamente negativa para que se consiga o desejado. No entanto, essa passagem é justificada como aceitável devido à inserção da manobra de aceitar a existência dos negativos, sempre que consistirem de termo intermediário. Encontramos também, a limitação no número de raízes, apenas para adequar a teoria ao posicionamento rejeitador do autor.

Nos capítulos posteriores, os quais são dedicados ao estudado de métodos de resoluções de equações de grau superiores, verificamos a adoção de estratégias semelhantes às apresentadas na análise realizada nas equações do primeiro grau. Por exemplo, no capítulo dedicado a equações do segundo grau, Barlow explica que as soluções para equações do tipo $m^2x^2 + bx + c = z^2$ são do seguinte modelo $x = \frac{p^2 - cq^2}{bp^2 - 2mpq}$, em que p e q são escolhidos aleatoriamente e na sequência ele apresenta o seguinte exemplo numérico,

> Ex. 1 Required the value of x in the equation
>
> $$9x^2 + 7x + \ 5 \ = \ z^2.$$
>
> Here, since $m \ = \ 3, b \ = 7, c \ = \ 5$, the values of x are contained in the expression
>
> $$x = \frac{p^2 - 5q^2}{7q^2 - 6pq}$$
>
> in which, by assuming $p \ = \ 4$ and $q \ = \ 2$, we have $x = \frac{4}{20}$ ou $x = \frac{1}{5}$which fraction answers the condition of the equation. (BARLOW, 1811, p. 348)

Note que, para se chegar à resposta $x = \frac{4}{20}$, ele realiza subtrações que resultam em valores negativos, pois ao substituir $p \ = \ 4$ e $q \ = \ 2$, a expressão que indica a solução assume a seguinte configuração $x = \frac{4^2-5(2)^2}{7(2)^2-6(4)(2)} \Rightarrow x = \frac{16-20}{28-48} \Rightarrow x = \frac{-4}{-20}$ que equivale a resposta dada, pois nas regras de manipulações, negativo dividido por negativo resulta em positivo. A justificativa para esse cálculo é a já comentada manobra adotada pelos rejeitadores, de aceitar esse tipo de subtração sempre que ela não resultar em um termo independente, ou seja, sempre que fizer parte de um passo intermediário na resolução.

Este exemplo retrata o que constatamos em nossa pesquisa sobre reaparecerem nos demais capítulos, as manobras, os artifícios, as particularidades e as estratégias anteriormente identificadas, como decorrentes unicamente da necessidade de adequar o estudo em desenvolvimento, sobre a resolução de equação, com a postura assumida pelo autor, de rejeitador dos negativos.

Esse fato, juntamente com as dificuldades de abordagem e contextualização das equações trabalhadas nos capítulos posteriores, devido à complexidade destas exigirem um maior número de condições a serem satisfeitas e, principalmente por considerarmos que a qualidade da pesquisa não seria comprometia, optamos por não apresentar o estudo realizado nos demais capítulos.

Por fim, diante da análise e comentários expostos, concluímos que Barlow ao adotar como premissa que os negativos não existem como números, obteve êxito no desenvolvimento de uma teoria explicativa sobre métodos de resolução de equações indeterminadas, devido à adoção de manobras e artifícios, bem como também a introdução de particularidades, que apesar de não acarretarem nenhuma inconsistência, fizeram com que a clareza, a simplicidade e a beleza, caraterísticas tão admiradas e desejadas em trabalhos matemáticos não habitassem esse seu trabalho. Por último consideramos importante frisar que muitas das características aqui apresentadas, evidenciam-se também nas obras algébricas de Maseres e Frend anteriormente analisadas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer da presente pesquisa, constatamos que os números negativos, tema central da nossa investigação, foi objeto de pesquisa em diversos trabalhos com enfoques de cunho histórico, como é o caso, por exemplo, do artigo escrito por Nagel, em 1935, no qual ele ressalta a importância histórica da problemática em torno da aceitabilidade dos negativos na construção da atual concepção de matemática; do artigo de Schubring, de 2000, em que de forma breve é apresentada uma análise do desenvolvimento do conceito de número negativo na França e na Alemanha depois do século XVII; do livro *Um estudo histórico-epistemológico do conceito de número negativo*, publicado em 2012, por Anjos, entre muitos outros.

Percebemos também que a abordagem histórica não é a única forma de utilizar-se desse tema. Verificamos que ele se apresenta também como um debate relevante no campo didático. Schubring (2000, p. 51) chama a atenção para este fato ao relatar que “[...] a didática não pode ignorar o caráter teórico desta noção matemática que quase todos os estudantes do ensino fundamental devem agora apreender. Os números negativos apresentam, portanto, um desafio à didática”. Com esta vertente destacamos o trabalho de George Glaeser, *Epistemologie des nombre relatifs,* de 1981, nele Glaeser estuda os obstáculos epistemológicos enfrentados pelos matemáticos na compreensão da regra de multiplicação envolvendo os números negativos.

Por fim, constamos nos últimos anos a presença de alguns trabalhos, fundamentados na tendência da Educação Matemática e que defendem o uso da história como um caminho didático no ensino de matemática, recorrendo ao estudo do processo histórico em torno da legitimidade dos negativos como números para produzir melhores abordagens desses números e suas regras de manipulações em sala de aula. Nessa direção, podemos citar, por exemplo, a tese de doutorado de Pontes, intitulada *Obstáculos superados pelos matemáticos no passado e vivenciados pelos alunos na atualidade: a polêmica multiplicação de números Inteiros*, de 2010, entre outros identificados por nós no desenvolvimento desta pesquisa.

Apoiados nas ideias de Mendes (2006) e em particular no trecho que segue, no qual ele relata sobre o seu entendimento a respeito do uso da história como instrumento pedagógico:

> No nosso entendimento, a história a ser usada no ensino fundamental e médio deve ser, de certo modo, uma 'história-significado' ou uma 'história-reflexiva', ou seja, uma história cuja finalidade é dar significado ao tópico matemático estudado pelos alunos, levando-os a refletir amplamente sobre as informações históricas de modo a estabelecer conexões entre os aspectos cotidiano, escolar e científico da matemática presente nessa história. Na verdade, queremos propor uma abordagem histórica que provoque no aluno uma reformulação da problematização histórica para o momento atual, considerando o contexto em que ele está inserido. (MENDES, 2006, p. 97)

Acreditamos que, mesmo não sendo nosso objetivo nesta investigação discutir os entraves didáticos presentes no ensino dos números negativos, o conhecimento aqui produzido abre perspectivas para elaboração de intervenções educativas com o intuito de superar os obstáculos ainda presentes no ensino dos negativos. Mendes (2006, p. 82) afirma também que "a matemática produzida e organizada socialmente pode ser reorganizada hoje de acordo com as necessidades atuais, assim como redescoberta pela humanidade, no sentido de (re)utilizá-la para responder às questões atuais surgidas no contexto social"

Seguindo as ideias defendidas por Mendes (2006), consideramos que a presente pesquisa, ao analisar os argumentos presentes nas obras matemáticas consideradas como referencial teórico para os defensores da corrente rejeitadora dos negativos, ao esclarecer as implicações dessa postura na matemática em desenvolvimento no fim do século XVIII e estudar como essa rejeição interferiu na construção de uma teoria algébrica, produziu um conjunto de informações que favorece uma melhor compreensão dos aspectos envolvidos na construção do conceito de número negativo. Sendo assim, defendemos que essa investigação, além de ampliar o repertório de pesquisas históricas a respeito dos números negativos, serve também como base teórica a futuras pesquisas no campo didático, visto que as questões aqui discutidas podem ser reorganizadas e reutilizadas pelos que norteiam suas pesquisas na direção da confecção de instrumentos didáticos por meio do uso da história.

Feita essa observação a respeito da perspectiva didática desta investigação, a partir de agora nos deteremos ao relato dos resultados de nossa pesquisa.

O levantamento histórico realizado no primeiro capítulo fez com adquiríssemos um conhecimento amplo do assunto, pois nesse capítulo nos apoderamos do conhecimento já construído a respeito da problemática que envolveu a legitimação dos negativos como número. No entanto, mais que uma visão geral, esse capítulo propiciou o entendimento do fundamento teórico que justificava a postura de rejeição aos negativos, pois ao estudar a evolução desse problema desde a Antiguidade até a sua resolução no século XIX, compreendemos que o eixo central da problemática encontrava-se na restrita concepção de número como instrumento de contagem e/ou medida, ou seja, na identificação de número como quantidade ou grandeza. Somente com a ampliação do conceito de número para símbolo, fato que aconteceu concomitantemente com a axiomatização da álgebra, a rejeição aos números negativos deixou de fazer sentido.

Nesse apanhado histórico, podemos perceber também que a matemática grega contribuiu de forma significativa para a construção e permanência dos obstáculos que dificultaram a aceitação dos números negativos. Os gregos, ao criarem o método axiomático-dedutivo, que segundo Fossa (2004) marca o nascimento da matemática como ciência, inauguram um modelo de se fazer matemática, no qual tudo deveria ser demonstrado tendo por base algumas proposições primeiras e, segundo Aristóteles, o idealizador desse método, essas proposições deveriam ser intuitivamente verdadeiras. Ao impor a necessidade de verdade, o método aristotélico cria uma exigência de relação dos entes matemáticos com o mundo físico, fato que Schubring (2000) caracteriza como epistemologia substancialista.

Essa exigência, além de gerar uma barreira de caráter estrutural às abordagens matemáticas puramente abstratas, como é o caso da álgebra, fez com que a geometria ocupasse um lugar de supremacia dentro da matemática, pois essa área, por lidar diretamente com o espaço físico, enquadrou-se perfeitamente ao método aristotélico e foi a única área axiomatizada enquanto o pensamento substancialista durou. Consequentemente, a geometria constituiu-se o único modelo de rigor e verdade matemática aceitável até o início do século XIX, quando finalmente superou-se a necessidade de verdade e passou-se a justificar os conceitos matemáticos através da coerência com as condições internas da própria matemática, ou seja, quando se passou a conceber a matemática como uma ciência formal.

No que se refere aos números negativos, mesmo eles tendo o seu nascedouro na Antiguidade, nos estudos sobre resolução de equações e, no decorrer dos séculos, tenham se tornado elementos cada vez mais necessários nas teorias que se desenvolviam, os negativos permaneceram questionados como entes matemáticos e até mesmo rejeitados devido à incapacidade de explicá-los dentro da concepção de matemática iniciada pelos gregos, que tinha por base a necessidade de correlação dos elementos dessa ciência com o mundo físico. Nessa concepção, os negativos eram compreendidos como menores do que nada, portanto inexistentes.

De posse de uma melhor compreensão a respeito da problemática envolvendo a legitimação dos negativos e da fundamentação teórica que justificava toda a polêmica em torno da existência ou não desses números, nos debruçamos na análise das obras algébricas de Francis Maseres e William Frend, referências entre os que se negavam a aceitar a existência dos negativos na Inglaterra do fim do século XVIII.

É importante ressaltarmos que o século XVIII costuma ser caraterizado como um período de busca por rigor, e isso se deve em grande parte aos avanços ocasionados pelo desenvolvimento do cálculo, que apesar de apresentar relevantes resultados práticos, não possuía uma fundamentação sólida, pois os infinitesimais, igualmente aos negativos e aos imaginários, ainda eram carentes de significado nessa época. Essa carência na fundamentação do cálculo é registrada por Boyer (1996, p. 332) na seguinte passagem:

> Durante toda a segunda metade do século dezoito houve um entusiasmo pelos resultados do Cálculo, mas confusão quanto os seus princípios básicos. Nenhum dos métodos de ataque usuais, quer os fluxos segundo Newton, quer as diferenciais de Leibniz ou os limites de d'Alembert pareciam satisfatórios.

Nesse dilema entre avanço prático e rigor teórico que os matemáticos do século XVIII vivenciavam, podemos afirmar que os sujeitos de nossa pesquisa estão claramente do lado do rigor, pois em nossa análise percebemos que a forte rejeição travada por eles em relação à existência dos negativos fundamentava-se principalmente na ausência de rigor que a admissão da existência desses números causava na ciência matemática.

Esse posicionamento em favor do rigor fica bastante claro quando identificamos entre os principais argumentos utilizados por Maseres e Frend para justificar a rejeição aos negativos por eles assumida, a falta de uma definição clara para esses números e a defesa de que o único significado compreensível para o sinal de negativo era a subtração entre duas quantidades, em que a quantia a ser retirada deveria ser obrigatoriamente a menor. Com esse entendimento, eles argumentavam que quantidades isoladas precedidas do sinal negativo e também qualquer dedução derivada delas não fazia sentido, portanto, os negativos existiam apenas como membro integrante da subtração, não de forma independente.

Em nossa análise, concluímos que mais que uma ausência de definição, o que Maseres e Fend defendiam era a impossibilidade de definição para os números negativos. Embora essa caraterística não apareça de forma explícita nas obras estudadas, essa tese pode ser sustentada tanto por meio dos posicionamentos que eles defendem em que qualquer explicação ou definição apresentada para os negativos não esclareciam o significado desses números, pois, segundo eles, não se explica o que não existe, como também na repulsa às definições que identificam os negativos como uma quantidade menor do que nada, ou como provenientes de uma subtração em que o subtraendo é maior que o minuendo, como é o caso da seguinte colocação de Maseres, em que ele critica as definições apresentadas por Newton e outros algebristas que usam sem restrições os números negativos:

> The quantities called negative are such as it is impossible to form any clear idea of, being defined, by Sir Isaac Newton and other Algebraists *, to be such quantities as are less than nothing, or as arise from the subtraction of a greater quantity from a lesser, which is an operation evidently impossible to be performed. (MASERES, 1800, p. 286)

A citação da página 68 desta pesquisa retirada da página X do prefácio de *Principles of Algebra,* de Frend, reforça também essa tese de impossibilidade de definição dos números negativos no pensamento desses autores, pois nela, Frend classifica como ridícula qualquer tentativa de expandir o significado do sinal de negativo para além da subtração que resulta em uma quantidade positiva, portanto desconsidera como legítimas as explicações outrora mencionadas utilizadas por alguns algebristas para definir número negativo.

Constatamos ainda que o fundamento utilizado por esses autores para justificar esse posicionamento de impossibilidade da existência dos números negativos era a ausência de significado desses números na natureza, assim como acontecia com os positivos e até mesmo com os irracionais. Não resta dúvida de que essa justificativa reflete a concepção de matemática vigente na época, visto que no fim do século XVIII ainda não existia uma fundamentação axiomática para álgebra, e consequentemente o conceito de número ainda continuava identificado com a ideia de quantidade e medida, ou seja, prevalecia a concepção de matemática substancialista. Diante dessa conjuntura e em nome do rigor matemático, Maseres e Frend negavam a existência dos negativos pela impossibilidade de explicá-los dentro da concepção de matemática da época.

Diante da constatação de que os autores das obras pesquisadas prezavam pelo rigor, era de se esperar que a valorização da geometria fosse uma característica marcante nessas obras, uma vez que ela configurava-se o único modelo de verificação de verdade matemática até o século XVIII. No entanto, é importante frisar que Frend não faz uso de demonstrações geométricas para validar suas afirmações algébricas. Podemos dizer que sua obra é puramente analítica, a defesa à geometria aparece apenas de forma subjetiva em meio às críticas da falta de rigor com que a álgebra vem sendo trabalhada. Na obra *Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra,* de Maseres, a valorização do modelo geométrico aparece de forma bem explícita. Além dos diversos trechos em que o autor defende que a álgebra precisaria ser tratada com a mesma solidez e clareza com que os assuntos geométricos eram abordados, nessa obra a geometria é utilizada em diversos momentos para chancelar suas teorias algébricas. Como é o caso, por exemplo, das equações do segundo grau trabalhadas por Maseres no Capítulo VI da obra supracitada. Nele, o autor apresenta um estudo geométrico para os quatro tipos de equações consideradas por ele.

Mesmo os rejeitadores dos negativos tendo em alguns momentos preferido recorrer ao modelo geométrico como alternativa para resolver a ausência de rigor presente nas teorias algébricas em desenvolvimento, o que acarretava como consequência à negação de todos os elementos dessas teorias que não pudessem ser explicados nesse modelo, como é o caso da existência dos números negativos e dos imaginários, concluímos que esses matemáticos, ao fundamentar sua rejeição na incoerência que a aceitação dos negativos gerava na natureza da matemática vigente, realizaram uma oposição racional e alertaram para a necessidade de alicerçar as novas descobertas em uma ciência sólida e rigorosa.

Dessa forma, embora pareça paradoxal, a rejeição por eles realizada contribuiu construtivamente para a futura ampliação do conceito de número e para a axiomatização da álgebra, pois o desejo de incorporar os negativos acaba despertando a busca por novos caminhos. Essa ideia é endossada por meio da literatura sobre os números negativos, que costuma atribuir à publicação de Peacock, *Treatise of Algebra,* obra considerada como a responsável por axiomatizar a álgebra e pôr fim a problemática de legitimação dos números negativos, como oriunda do desejo de resolver o problema da subtração $a - b$, quando $a < b$, ou seja, alicerçar os negativos em uma fundamentação sólida, como questionava Maseres e Frend.

Portanto, nessa disputa entre rejeitadores e favoráveis dos números negativos, defendemos que quem saiu ganhando foi a matemática, pois tanto a visão futurista dos matemáticos que utilizaram-se do negativos, mesmo sem uma estrutura lógica que os justificassem, como também a rejeição racional por busca de rigor, pavimentaram o caminho para a estruturação da álgebra como ciência hipotético-dedutiva, acontecimento significativo na construção da atual concepção de matemática como ciência formal.

Voltando aos objetivos que nortearam nossa pesquisa, outro foco do nosso estudo foram as implicações que a postura rejeitadora assumida por Maseres e Frend desencadeava na matemática em desenvolvimento no fim do século XVIII.

Na aritmética, a única implicação que a rejeição aos negativos acarretava era a restrição da subtração apenas aos casos que resultavam em uma resposta positiva, ou seja, para os rejeitadores, só é possível realizar a subtração quando a quantia a ser retirada é a menor. Quanto à álgebra, a inexistência dos números negativos gerava maiores complicações, pois nesse campo os valores a serem trabalhados são genéricos. Diante dessa generalidade, as regras de sinais se apresentam como um elemento indispensável para o desenvolvimento das teorias algébricas, mas para os rejeitadores, era impossível justificar a existência dos números negativos, as regras de sinais, por consistirem em conclusões tiradas apenas com os sinais, são completamente inconcebíveis. Para eles, tais regras não passavam de abstrações sem justificativa real.

Em nossa pesquisa, essa negação à regra dos sinais fica bem explícita, no decorrer do estudo do artigo *A Remark on an Error in the Reasoning of the late learned French Mathematician Monsieur Clairaut,* visto que este artigo tem como foco a critica de Maseres ao fato de Clariut ter generalizado a regra que afirma que menos multiplicado por menos resulta em mais. É importante que fique claro que os rejeitadores não desenvolveram suas teorias algébricas sem as manipulações presentes nas regras de sinais envolvendo os negativos, porém eles a utilizavam de forma contextualizada.

Essa contextualização foi apresentada por nós, quando explicamos o pensamento desenvolvido por Frend em seu livro para justificar tanto a multiplicação de $(a-b)$ por $(c-d)$ resultar em $ac- ad-bc + bd$, como a subtração entre binômios ligados com o sinal negativo. Nessas justificativas e também na crítica de Maseres à Clariut, percebemos a necessidade prévia de existência dos termos do tipo $(a-b)$ para que as manipulações com esses termos fossem possíveis, e também a impossibilidade de generalizar tais manipulações para valores negativos independentes, ou seja, a não validade das regras de sinais, o que desencadeava limitações às operações algébricas.

Mais que a não aceitação das regras de sinais, a rejeição aos negativos acarretava para a álgebra em desenvolvimento no fim do século XVIII a negação do Teorema Fundamental da Álgebra, pois esse teorema provado por Gauss em 1799 garante a igualdade numérica entre o grau de uma equação e a quantidade de raízes que ela possui. No entanto, sem a existência dos negativos e dos complexos, esse teorema seria falso, pois esses números juntamente com os positivos compõe as possíveis raízes de uma equação. O posicionamento dos rejeitadores em relação a esse teorema era que muitos matemáticos encantaram-se com a beleza dele e, diante do desejo de obter uma generalização para o número de raízes de uma equação, acabaram criando o que eles consideravam ficção, a existência de raízes negativas e complexas, apenas com o intuito de validar a igualdade entre o número de raízes e o grau da equação.

No decorrer da pesquisa, vários argumentos contrários a essa igualdade são expostos, principalmente no artigo *Remarks on the Number of Negative and Impossible Roots in Algebraick Equations* escrito por Frend e presente no livro de Maseres. Vale a pena lembrar que este artigo tem como único objetivo refutar a validade do Teorema Fundamental da Álgebra e para tanto, Frend procura desconstruir os argumentos dos que defendem este teorema. O raciocínio de Frend neste artigo tem por base a premissa que só existir os números positivos, e assim sendo apenas um tipo de equação de cada grau, diante de condição bem especifica, satisfaria tal teorema, portanto a generalização para todos os tipos de equação era vista por ele como um absurdo.

Devido à rejeição à existência de raízes negativas e complexas e o Teorema Fundamental da Álgebra serem temas que apresentam uma estreita conexão, além do artigo de autoria de Frend anteriormente mencionado, argumentos contrários a esse teorema permeiam as obras por nós estudadas, pois como indicamos anteriormente, as obras de Maseres e Frend são mais que trabalhos destinados a se ensinar álgebra, configuram-se como bases teóricas aos que defendem a postura rejeitadora dos negativos.

Para complementar nossa investigação a respeito da rejeição inglesa aos negativos, consideramos relevante analisarmos como a postura rejeitadora interferia na construção de uma teoria algébrica. Para esse propósito, escolhemos, por diversos motivos já expostos no capítulo anterior, a obra de Barlow sobre Teoria dos Números, e nela consideramos mais produtivo focarmos na segunda parte, pois é dedicada ao estudo dos métodos de resolução de equação indeterminada, assunto derivado do tema berço do nascimento dos negativos, a resolução de equações.

Por meio da investigação realizada na obra de Barlow, concluímos que a estratégia de aceitar os negativos como passo intermediário, conduta comum entre os rejeitadores, é o que torna viável o desenvolvimento de abordagens algébricas por autores que não aceitam os negativos como termo independente. Essa conclusão embasou-se tanto no fato de essa ser a justificativa utilizada para explicar vários trechos, nos quais os negativos aparecem nas teorias dos rejeitadores, como também na constatação de que ao adotar esse recurso, todas as manipulações com os negativos passam a ser plenamente aceitas no decorrer do processo, sendo necessária apenas uma maior atenção nas hipóteses iniciais dos problemas e no final adequar as respostas de modo que a teoria não entre em contradição com a postura rejeitadora.

Como essa não foi a única adequação constatada por nós no estudo desenvolvido por Barlow, levantamos a hipótese de que a única forma de os rejeitadores conseguirem produzir obras matemáticas que abordam assuntos algébricos é adicionando um conjunto de particularidades matemáticas e hipóteses *ad hoc.*

Na última seção deste relatório de pesquisa, provamos a hipótese levantada por meio da análise de vários trechos retirados da obra de Barlow que evidenciam a introdução de artifícios, manobras e particularidades, provenientes unicamente da necessidade de adequar à teoria em desenvolvimento, sobre resolução de equações indeterminadas, com a postura rejeitadora do autor.

Nas páginas 113 e 114 apresentamos ainda dois quadros resumos, em que utilizamos como base para a construção a teoria das equações indeterminadas do primeiro grau com duas variáveis. Em um dos quadros apresentamos o resumo da teoria apresentada por Barlow para esse tipo de equação e no outro seguimos a teoria desenvolvida pelo autor, só que removemos a rejeição à existência dos negativos. Por meio da comparação desses dois quadros e dos comentários que tecemos na sequência evidenciamos que a hipótese outrora levantada estava correta.

É importante ressaltar ainda que as adequações realizadas, apesar de desnecessárias, caso Barlow não fosse um rejeitador, não geraram inconsistências na teoria desenvolvida por ele. A única consequência negativa que constatamos nessa conduta foi a perda de clareza, caraterística tão almejada pelas teorias matemáticas. Sendo assim, no estudo desse último objetivo concluímos que, diante da necessidade de contornar a ausência dos negativos, elementos que aparecem naturalmente com os procedimentos algébricos, as teorias algébricas desenvolvidas pelos rejeitadores, apesar de consistentes, obrigavam-se a introduzir adequações e particularidades que acarretavam como consequência a falta de clareza.

Por último desejamos apenas registrar que esta pesquisa nos mostrou também que muitas vezes não percebemos a complexidade presentes em alguns conceitos matemáticos, que atualmente já se encontram bem adaptados à prática escolar cotidiana, como é o caso dos negativos. Acreditamos que um estudo histórico, como o realizado aqui sobre a rejeição inglesa aos negativos, é um caminho para percebermos que mesmo assuntos abordados no ensino fundamental não são necessariamente de fácil assimilação e intuitivos, como erroneamente costumamos achar.

REFERÊNCIAS

ANJOS, M. F. **Um estudo histórico-epistemológico do conceito de número negativo.** Natal: EDUFRN, 2012.

BARLOW, P. **An elementary investigation of the theory of numbers with its application to the indeterminate and Diophantine analysis, the analytical and geometrical division of the circle and several other curious algebraical and arithmetical problems**. London: J. Johnson and Co, 1811.

_______ . **A New mathematical and philosophical dictionary**. London: G. and S. Robinson, 1814.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2ª. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

CLAIRAUT, A. C. **Elémens D'Algébre**. Paris, 1749.

COURTNEY, W. P. **Dictionary of National Biography, 1885-1900**. Disponivel em: <http://en.wikisource.org/wiki/Frend,_William_(DNB00)>. Acesso em: 20 novembro 2013.

________. **Dictionary of National Biography, 1885-1900**. Disponivel em: <http://en.wikisource.org/wiki/Maseres,_Francis_(DNB00)>. Acesso em: 18 novembro 2013.

DESCARTES, R. **A Geometria**. Tradução de Emídio César de Queiroz Lopes. Lisboa: Editorial Prometeu, 2001.

EVES, H. **Introdução a História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5ª. ed. Campinas- SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERRARO, G. Differentials and differential coefficients in the Eulerian foundations of calculus. **História Mathematica**, v. 31, n. 1, p. 34-61, 2004.

FOSSA, J. A. A história da geometria e a epistemólogia da matemática. In: FOSSA, J. A. **Ensaios sobre a Educação Matemática**. Belém: EDUEPA, 2001. p. 105-122.

__________. **Dois momentos nótaveis na vida da matemática:** O nascimento e a maioridade. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife: SBEM. 2004. p. 1-11.

__________. Uma pequena história dos números inteiros. In: FOSSA, J. A. **Cabelos negros, olhos azuis e outras feições das matemáticas puras e aplicadas**. Natal: EDUFRN, 2007a. p. 49-58.

__________. O Triângulo dos Algebristas e a Idade Áurea da Matemática. In: FOSSA, J. A. **Cabelos negros, olhos azuis e outras feições das matemáticas puras e aplicadas**. Natal: EDUFRN, 2007b. p. 59-71.

__________. A Álgebra de Cardano a Vieté. In: (ORG.), I. A. M. **Matemáticas da Época de Andrea Palladio**. Natal: EDUFRN, 2008. p.141-194.

__________. **Os Primórdios da Teoria dos Números**. Natal: EDUFRN, 2010.
FOSSA, J. A.; ANJOS., M. F. Sobre a Incompatibilidade dos Números Negativos com o Conceito Grego de Áritmòs. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro- SP, v. 7, n. n. 14, p. 163-171, out/2007 mar/2008.

FREND, W. **Principles of Álgebra**. London: J. Davis, 1796.

GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas**. 4ª. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

HØYRUP, J. **Lengths, widths, surfaces:** A portrait of babylonian algebra and its Kin. New York: Springer, 2001.

KASNER, E.; NEWMAN, J. **Mathematics and the Imagination**. Nova York: Simon Schuster, 1950.

KLEIN, J. **Greek mathematical thought and the origin of algebra**. Tradução de Eva Braunn. Nova York: Dover Publications, Inc., 1968.

KLINE, M. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**. Nova York: Oxford University Press, v.1, 1972.

LUMPKIN, B. **The ancient Egyptian concept of zero and the Egyptian symbol for zero:** A note on a little known African achievement. (ISGEm) Newsletter International

Study Group on Ethnomathematics. V. 11, n. 2, San Diego, Califórnia, EUA: Jun 1996. Disponível em: < http://web.nmsu.edu/~pscott/isgem112.htm > Acesso em: 28 de dez 2013.

MAIA, R. G. **Ciência, pós-ciência, metaciência:** tradição, inovação e renovação. São Paulo: Editora livraria da fisica, 2011.

MASERES, F. **Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra:** Containing a Demonstration of The Rules Usually Given Concerning It, and Shewing How Quadratic and Cubic Equations May be Explained, without the Consideration of Negative Roots. London: Richardson, Samuel; Payne, and Thomas, 1758.

__________. **Tracts on the Resolution of Affected Algebräick Equations by Dr. Halley's, Mr. Raphson's and Issac Newton, Methods of Approximation**. London: S. Davis, and J White, 1800.

MENDES, I. A. A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A história como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Ed. Sulina, 2006. p. 79-136.

NAGEL, E. Impossible numbers: a chapter in the history of modern logic. **Studies in the History of Ideas**, Nova York, v. 3, 1935. 429-476.

ASSIS NETO, F. R. A. **Duas ou Três coisas sobre "Menos Vezes Menos dá Mais"**. UFPE. Recife. 1995.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn Al-Karaji. **The MacTutor History of Mathematics archive**. Disponivel em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Karaji.html>. Acesso em: 10 outubro 2013.

__________ . F. Alexis Claude Clairaut. **The MacTutor History of Mathematics archive**. Disponivel em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Clairaut.html>. Acesso em: 8 agosto 2014.

__________ . Francis Maseres. **The MacTutor History of Mathematics archive**. Disponivel em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Maseres.html>. Acesso em: 8 janeiro 2014.

OLIVEIRA, M. M. **Como fazer pesquisa qualitativa**. Petrópolis, Vozes, 2007.

PARSHALL, K. H. The art algebra from Al-khawarizmi to Viète: A study in the natural selection of ideas. **History of Science**, Londres, v. 26, n. nº 79, p. 129-164, 1988. Disponível em: <http://www.melaracconto.org/algebra/algebra/storia/siti/The%20Art%20of%20Algebra%20by%20Karen%20H_%20Parshall.htm> Acesso em: 26 de dez 2013.

PONTES, M. O. **Obstáculos superados pelos matemáticos no passado e vivenciados pelos alunos na atualidade**: a polêmica multiplicação de números inteiros. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal: 2010. (Tese de Doutorado).

PYCIOR, H. M. Early criticism of the symbolical approach to algebra. **Historia Matemática**, v. 9, p. 392-412, 1982.

________. **Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements.** Nova York: Cambridge University Press, 1997.

SCHAAF, W. L. Biografia de Francis Maseres no Dicionário da biografia científica, New York, 2008. Disponível em <http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830902850.html>. Acesso em: 8 de jan. 2014.

SCHUBRING, G. **Rupturas no estatuto dos número negativos**. Boletim GEPEM, n. 37, p. 51-64, 2000.

____________. **Conflicts between generalization, rigor, and intuition:** Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th CenturyFrance and Germany. Nova York: Springer, 2005.

____________. Um Outro Caso de Obstáculos Epistemólogicos: O princípio de permanência. **Bolema**, Rio Claro, SP, n. 28, p. 1-20, 2007.

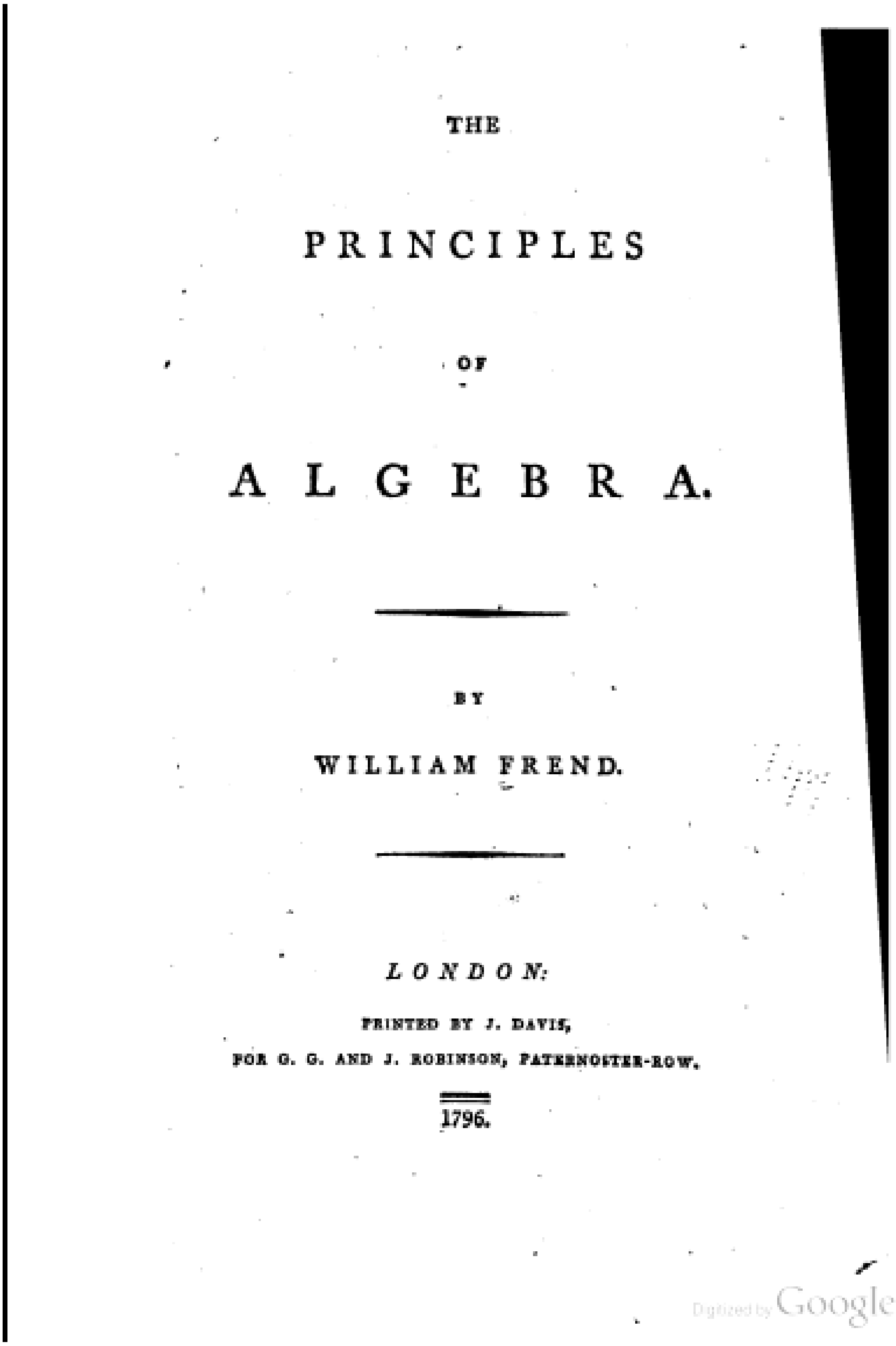
SERVIDONI, M. C. P. **A axiomatização da aritmética e a contribuição Hermann Günther Graβmann.** São Paulo: Pontifíca Universidade Católica, 2006.(Dissertação de mestrado).

STEPHEN, L. **Dictionary of National Biography**. Nova York: Macmilan, v. 03, 1885.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. Tradução de Joãp Gomes Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1989.

A N E X O S

Capa do livro Principles of Algebra de William Frend



THE

PRINCIPLES

OF

ALGEBRA.

BY

WILLIAM FREND.

LONDON:

PRINTED BY J. DAVIS,

FOR G. G. AND J. ROBINSON, PATERNOSTER-ROW.

1796.

Sumário do livro Principles of Algebra de William Frend

CONTENTS.

Capa do Livro Tracts on the Resolution of Affected Algebräick Equations de Francis Maseres.

TRACTS

ON THE

Resolution of Affected Algebräick Equations

BY

DR. HALLEY'S, MR. RAPHSON'S,

AND

SIR ISAAC NEWTON'S,

METHODS OF APPROXIMATION.

PUBLISHED BY

FRANCIS MASERES, Esq. F.R.S.

CURSITOR BARON OF THE COURT OF EXCHEQUER.

LONDON:

PRINTED BY J. DAVIS, CHANCERY-LANE;

AND SOLD BY J. WHITE, FLEET-STREET.

1800.

Sumário do livro Tracts on the Resolution of Affected Algebräick Equations de Francis Maseres.

A Table of the Contents of this Collection of Mathematical Tracts.

NUMBER I.

NUMBER II.

NUM-

NUMBER III.

NUMBER IV.

NUMBER V.

NUM

NUMBER VI.

An Explication of Simon Stevin's General Rule *to extract one Root out of any possible Equation in Numbers, either exactly or very nearly true.*

By JOHN KERSEY.

Being the Tenth Chapter of the Second Book of Mr. Kersey's Elements of Algebra.

In pages 325, 326, 327, &c, - - - - 336.

NUMBER VII.

A Remark on an Error in the Reasoning of the late learned French Mathematician, Monsieur Clairaut, *in that Part of his Elements of Algebra in which he endeavours to prove the Rules of Multiplication laid down by Writers on Algebra concerning Negative Quantities.*

By FRANCIS MASERES, Esq. F. R. S.

CURSITOR BARON OF THE EXCHEQUER.

In pages 339, 340, &c, - - 343.

NUMBER VIII.

A General Method of investigating the Two, or Three, First Figures of the least Root of an Equation that has more than one real and affirmative Root.

Reprinted from the 3d Volume of the Scriptores Logarithmici, *pages* 725, 726, &c - - - 761.

By FRANCIS MASERES, Esq. F. R. S.

CURSITOR BARON OF THE EXCHEQUER.

In pages 347, 348, 349, &c, - - - - - 431.

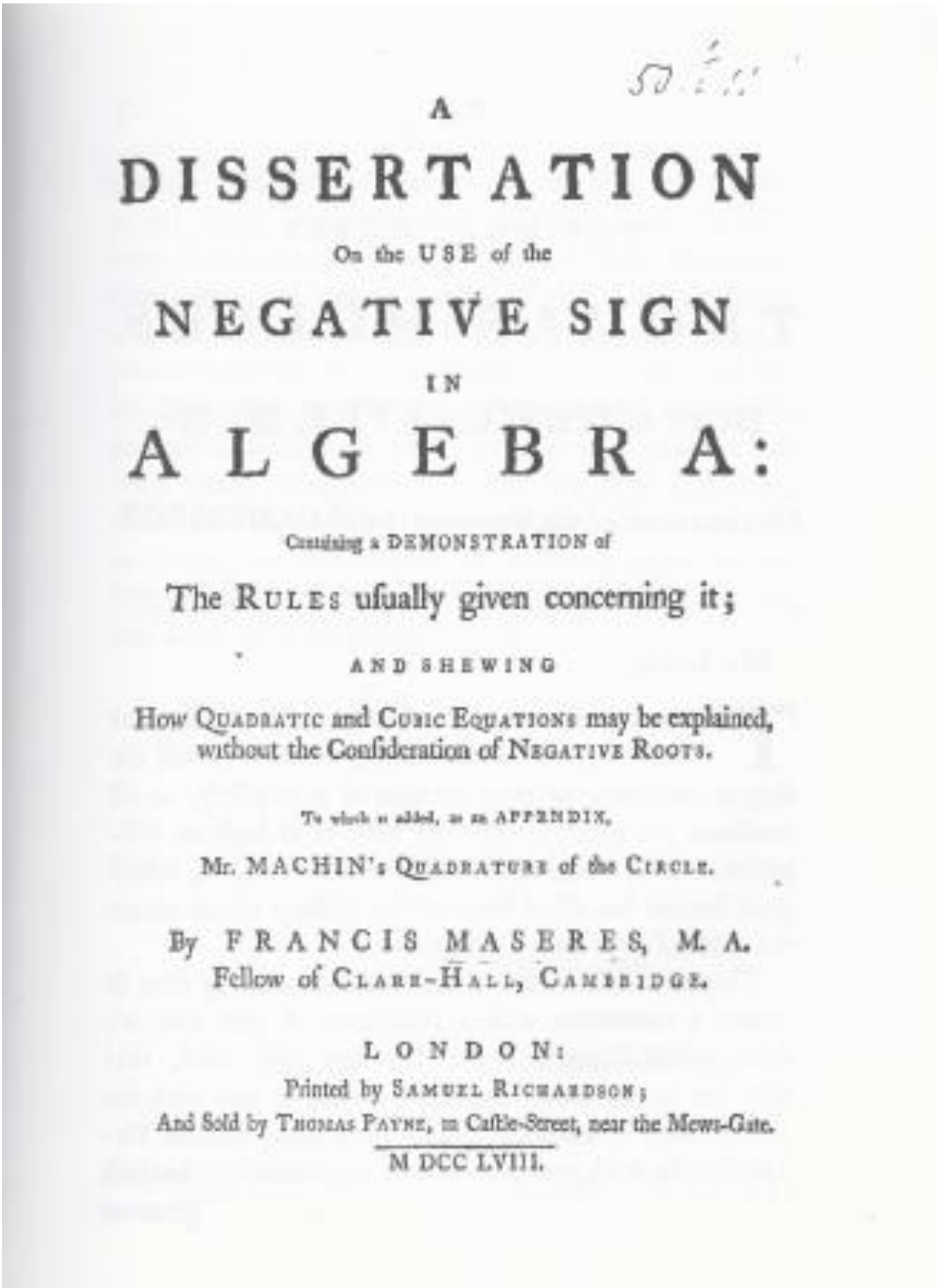
NUM-

NUMBER IX.

NUMBER X.

A NEW,

Capa do livro *A Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra* de Francis Maseres



A

DISSERTATION

On the USE of the

NEGATIVE SIGN

IN

ALGEBRA:

Containing a DEMONSTRATION of

The RULES usually given concerning it;

AND SHEWING

How QUADRATIC and CUBIC EQUATIONS may be explained, without the Consideration of NEGATIVE ROOTS.

To which is added, as an APPENDIX,

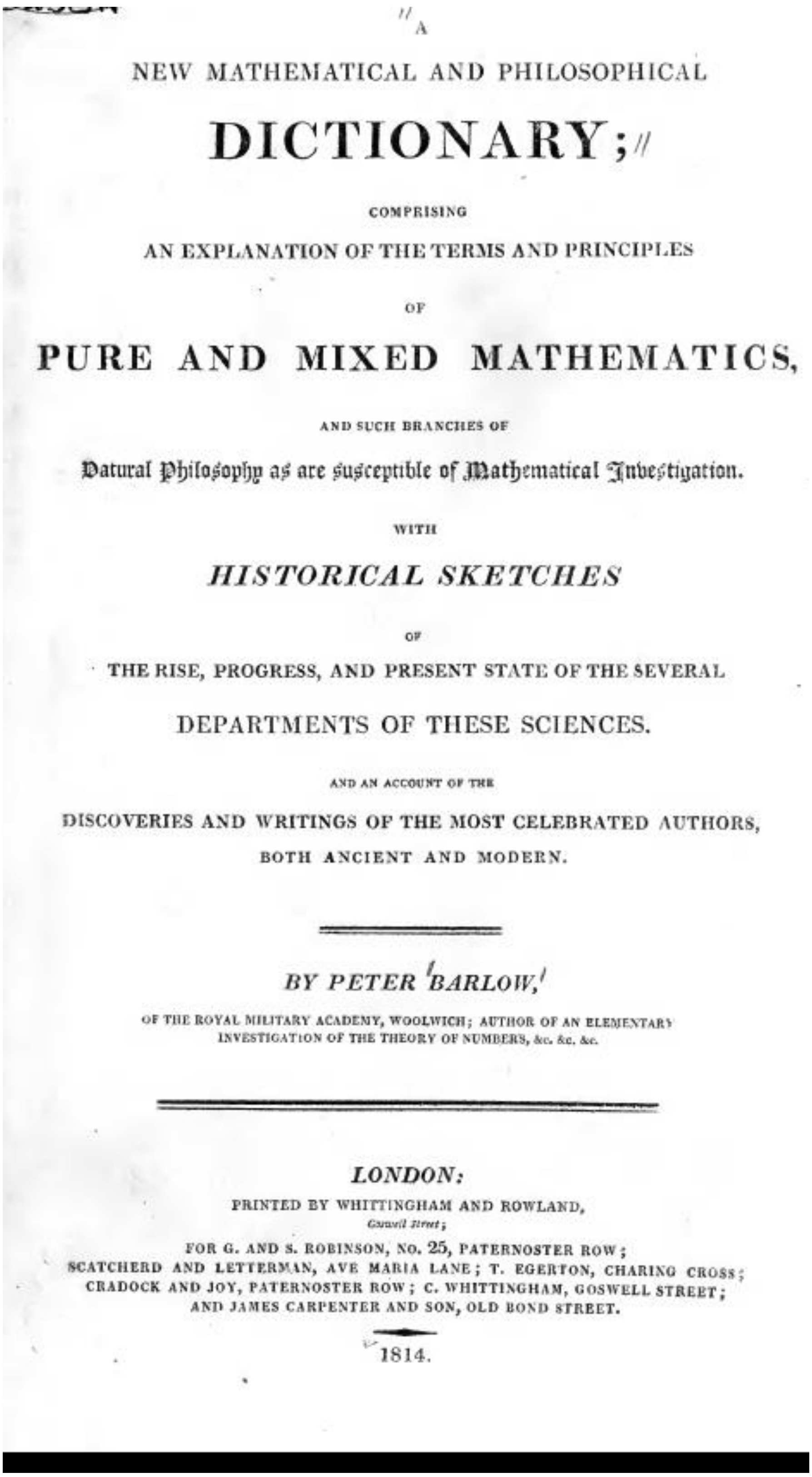
Mr. MACHIN's QUADRATURE of the CIRCLE.

By FRANCIS MASERES, M. A.
Fellow of CLARE-HALL, CAMBRIDGE.

LONDON:
Printed by SAMUEL RICHARDSON;
And Sold by THOMAS PAYNE, in Castle-Street, near the Mews-Gate.

M DCC LVIII.

Capa do Dicionário Matemático de Peter Barlow



A

NEW MATHEMATICAL AND PHILOSOPHICAL

DICTIONARY;

COMPRISING

AN EXPLANATION OF THE TERMS AND PRINCIPLES

OF

PURE AND MIXED MATHEMATICS,

AND SUCH BRANCHES OF

Natural Philosophy as are susceptible of Mathematical Investigation.

WITH

HISTORICAL SKETCHES

OF

THE RISE, PROGRESS, AND PRESENT STATE OF THE SEVERAL

DEPARTMENTS OF THESE SCIENCES.

AND AN ACCOUNT OF THE

DISCOVERIES AND WRITINGS OF THE MOST CELEBRATED AUTHORS,

BOTH ANCIENT AND MODERN.

BY PETER BARLOW,

OF THE ROYAL MILITARY ACADEMY, WOOLWICH; AUTHOR OF AN ELEMENTARY INVESTIGATION OF THE THEORY OF NUMBERS, &c. &c. &c.

LONDON:

PRINTED BY WHITTINGHAM AND ROWLAND,
Goswell Street;
FOR G. AND S. ROBINSON, No. 25, PATERNOSTER ROW;
SCATCHERD AND LETTERMAN, AVE MARIA LANE; T. EGERTON, CHARING CROSS;
CRADOCK AND JOY, PATERNOSTER ROW; C. WHITTINGHAM, GOSWELL STREET;
AND JAMES CARPENTER AND SON, OLD BOND STREET.

1814.

Capa do livro sobre Teorria dos Números de Peter Barlow

B. Ticknor

AN

ELEMENTARY INVESTIGATION

OF THE

THEORY OF NUMBERS,

WITH ITS APPLICATION TO

THE INDETERMINATE AND DIOPHANTINE ANALYSIS,

THE ANALYTICAL AND GEOMETRICAL DIVISION OF THE CIRCLE,

AND SEVERAL OTHER

CURIOUS ALGEBRAICAL AND ARITHMETICAL PROBLEMS.

BY PETER BARLOW,

OF THE ROYAL MILITARY ACADEMY.

LONDON:

PRINTED FOR J. JOHNSON AND CO.,

ST. PAUL'S CHURCH-YARD.

1811.

Sumário do livro sobre Teoria dos Números de Peter Barlow

CONTENTS.

PART I.