UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

DE SOLUTIONE PROBLEMATUM DIOPHANTEORUM PER NÚMEROS INTEGROS: O PRIMEIRO TRABALHO DE EULER SOBRE EQUAÇÕES DIOFANTINAS

JOICE DE ANDRADE DANTAS

NATAL
2011

JOICE DE ANDRADE DANTAS

DE SOLUTIONE PROBLEMATUM DIOPHANTEORUM PER NÚMEROS INTEGROS:
O PRIMEIRO TRABALHO DE EULER SOBRE EQUAÇÕES DIOFANTINAS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial a obtenção do título de mestre.

Orientador: Dr. John Andrew Fossa.

NATAL
2011

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela fidelidade e infinita misericórdia.

À minha família pelo incentivo e dedicação.

Ao meu orientador, Prof. John Andrew Fossa, pela paciência, carinho e seriedade com que conduziu as orientações.

Ao Prof. Alzir Oliveira e à Profa. Hozanete Alves, professores do Curso de Letras da UFRN, que diligentemente me ajudaram com o estudo da Língua Latina.

Aos professores do Programa de Mestrado em Educação, pelas experiências e conhecimento compartilhado durante o curso.

Aos colegas da turma, em especial à Sarah Mara, pelo companheirismo, pelas reflexões, críticas e sugestões.

À Verônica Rebouças, Ítalo Rebouças e Igor Rebouças, que me receberam em sua casa durante a minha estada em Natal com muita dedicação, sempre apoiando e incentivando minha pesquisa.

Ao Renato Macedo por me ouvir, aconselhar e nunca me deixar desistir.

Enfim, a todos que sempre acreditaram em mim e me apoiaram.

RESUMO

Nesta pesquisa analisamos historicamente e matematicamente o primeiro trabalho de Leonhard Euler sobre Equações Diofantinas o *De solutione problematum diophanteorum per números integros* ("Sobre a solução de problemas diofantinos por números inteiros"). Foi publicado em 1738, embora apresentado à Academia de São Petersburgo cinco anos antes. No texto, Euler trata do problema de fazer com que a expressão generalizada do segundo grau seja igual a um quadrado perfeito, isto é, procura soluções no conjunto dos números inteiros para equação $ax^2+bx+c = y^2$. Para tanto, Euler mostra como descobrir mais soluções depois que uma primeira é encontrada, fazendo uma série de substituições combinando termos e eliminando variáveis, até que o trabalho se resume a encontrar a solução para $q = \sqrt{ap^2 + 1}$, uma equação de Pell. Este trabalho é o primeiro também em que Euler atribui erroneamente esse tipo de equação a Pell. Euler faz também, uma série de restrições para a equação $ax^2+bx+c = y^2$ e trabalha com diversos subcasos, que vão desde equações incompletas até o trabalho com números poligonais.

Palavras-chave: História da Teoria dos Números. Equações Diofantinas. Leonhard Euler.

ABSTRACT

The present dissertation analyses Leonhard Euler´s early mathematical work as Diophantine Equations, *De solutione problematum diophanteorum per números íntegros* (On the solution of Diophantine problems in integers). It was published in 1738, although it had been presented to the St Petersburg Academy of Science five years earlier. Euler solves the problem of making the general second degree expression a perfect square, *i.e.*, he seeks the whole number solutions to the equation $ax^2+bx+c = y^2$. For this purpose, he shows how to generate new solutions from those already obtained. Accordingly, he makes a succession of substitutions equating terms and eliminating variables until the problem reduces to finding the solution of the Pell Equation. Euler erroneously assigns this type of equation to Pell. He also makes a number of restrictions to the equation $ax^2+bx+c = y$ and works on several subthemes, from incomplete equations to polygonal numbers.

Keywords: History of Number Theory. Diophantine Equations. Leonhard Euler.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 16
FIGURA 2 17
FIGURA 3 30
FIGURA 4 31
FIGURA 5 34
FIGURA 6 34
FIGURA 7 36
FIGURA 8 38
FIGURA 9 42
FIGURA 10 43
FIGURA 11 45
FIGURA 12 45
FIGURA 13 47
FIGURA 14 47
FIGURA 15 51
FIGURA 16 52
FIGURA 17 53
FIGURA 18 58
FIGURA 19 60
FIGURA 20 63
FIGURA 21 69

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - CONSTRUINDO A PROBLEMÁTICA. 07

CAPÍTULO 2 - HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES E EQUAÇÕES DIOFANTINAS 11

2.1. - NO EGITO 11

2.2. - NA BABILÔNIA 13

2.3. - NA GRÉCIA 15

2.4. - NA ÍNDIA 18

2.5. - NA ARÁBIA 21

2.6. - NA EUROPA 23

CAPÍTULO 3 - A VIDA DE EULER 28

CAPÍTULO 4 - UMA ANÁLISE DO PRIMEIRO TRABALHO DE EULER SOBRE EQUAÇÃO DIOFANTINAS 42

CONSIDERAÇÕES FINAIS 73

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 76

Capítulo 1 - CONSTRUINDO A PROBLEMÁTICA

INTRODUÇÃO

Nesta pesquisa analisamos matematicamente contida primeira obra sobre equações diofantinas do grande matemático Leonhard Euler, *De solutione problematum diophanteorum per números integros* ("Sobre a solução de problemas diofantinos por números inteiros"), publicado em 1738, embora apresentado à Academia de São Petersburgo cinco anos antes. Para isto contamos com uma tradução da obra para o português (Dantas e Fossa, manuscrito, não publicado).

Em relação à estruturação textual, no Capítulo 1, intitulado "Construindo a Problemática", apresentamos nossa questão de estudo, explicando os fatores que nos levaram a escolha do tema, bem como nossos objetivos e a metodologia de pesquisa utilizada.

No Capitulo 2, intitulado "História das Equações e Equações Diofantinas", fazemos um estudo bibliográfico da evolução dos conceitos e métodos de resolução de equações desde os egípcios até os europeus,com Euler.

No Capítulo 3, intitulado "A Vida de Euler", apresentamos uma breve biografia de Euler.

No Capítulo 4, intitulado "Uma Análise do Primeiro Trabalho de Euler Sobre Equações Diofantinas", utilizando a referida tradução de Dantas e Fossa (não publicada) do trabalho de Euler de *De solutione problematum diophanteorum per números íntegros*, fazemos uma descrição do trabalho parágrafo a parágrafo e fazemos uma análise da matemática contida no mesmo.

Nas "Considerações Finais" fazemos o fechamento do trabalho, chamando a atenção ao cumprimento do objetivo do trabalho e destacando os pontos mais importantes observados durante a pesquisa e os relacionando.

JUSTIFICATIVA

A escolha por estudar um trabalho de Euler deve-se ao fato de ele ser considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos, inovador em várias subáreas da Matemática.

Em especial, se interessou pela Teoria dos Números numa época em que esse ramo da ciência não era reconhecido como uma área de pesquisa matemática.

A seleção de um dos artigos de Euler sobre da Teoria dos Números deve-se ao fato de ela oferecer uma variedade de situações-problemas, permitindo que se formulem questões fáceis de serem compreendidas pelos estudantes e que possam ser inseridas dentro de contextos reais, que pertençam ao cotidiano tanto do aluno do Ensino Básico, como do aluno do Ensino Superior, futuro professor. Segundo Coelho, Machado e Maranhão (2003, p.13) a Teoria dos Números é um campo apropriado para propiciar o desenvolvimento da chamada "rede de significados", citada nos PCN, pois o assunto permite que se formulem questões cuja solução completa requer incorporação e manejo de conceitos de forma integrada.

Ainda nesse contexto, (Bekken, 1994) reforça que o trabalho com tópicos da Teoria dos Números necessita de conceitos básicos simples. O autor aponta que a atividade de resolução de problemas de Teoria dos Números não envolve, necessariamente, a aplicação direta de algoritmos, mas necessita do desenvolvimento de habilidades como interpretar e conjecturar. Também incentiva a busca de heurísticas, que são os planos e metas desenvolvidos pelos alunos que os guiam, de forma global, à busca de solução de problemas. Em oposição, os procedimentos algorítmicos são baseados em regras e operações pré-determinadas, que viabilizam a solução de forma direta e específica.

Conforme Maranhão, Machado, Coelho (2005, p. 11):

> Dentre as investigações de Educação Matemática mundiais, aquelas sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra e da Teoria Elementar dos Números em níveis de ensino superiores e entre professores do Ensino Básico têm tido uma atenção crescente por parte dos pesquisadores. A importância desses estudos repousa no fato de que a Álgebra e a Teoria dos Números são subjacentes a quase todos os domínios da Matemática, e até mesmo de outras áreas (...)

Apesar disso, pesquisas recentes têm mostrado a existência de pouca ou nenhuma inclusão da Teoria dos Números no Ensino Básico, principalmente no que se refere às Equações Diofantinas, que é o que Euler estuda no seu primeiro trabalho sobre Teoria dos Números. A pesquisa de Oliveira (2006), por exemplo, pretendeu examinar se as Equações Diofantinas Lineares estavam presentes em documentos oficiais e no livro didático do Ensino Médio. O autor observou não haver referência explícita e poucas situações implícitas nas duas coleções de livros didáticos analisadas.

Outras pesquisas parecem explicar a ausência desse tema no Ensino Básico como consequência da formação do professor do Ensino Básico. A pesquisa de Resende (2007), por exemplo, analisou as propostas curriculares das disciplinas que tratam de Teoria dos Números nos cursos de licenciatura em matemática de doze universidades brasileiras. Também analisou dez livros didáticos, escolhidos dentre os mais citados nos programas das disciplinas pesquisadas, e realizou sete entrevistas semi-estruturadas com professores e pesquisadores em Teoria dos Números ou em Educação Matemática. Concluiu que a Teoria dos Números tratada na maioria das universidades pesquisadas, não tem a preocupação com a formação do professor da escola básica, pois a abordagem dos conteúdos é axiomática e a linguagem é predominantemente simbólico-formal, com ênfase nas demonstrações.

Dentro desse contexto, podemos ainda tomar como exemplo a pesquisa de Costa (2007), a qual constatou que apesar de os professores afirmarem trabalhar com seus alunos situações-problema que recaem em Equações Diofantinas Lineares, ainda utilizam o método de tentativa e erro como ferramenta de resolução, aliada a uma concepção da escrita algébrica como mera formalização, sem exploração de sua capacidade resolutiva.

Estes exemplos revelam que o tema Equações Diofantinas é tratado esporadicamente e de forma subentendida, configurando uma motivação para o seu estudo e aprofundamento, que poderá dar subsídios ao futuro professor de Matemática em seus estudos sobre a Teoria dos Números.

OBJETIVOS

Portanto, devido a essa necessidade de trabalhos que versem sobre Teoria dos Números e especificamente sobre Equações Diofantinas, decidimos estudar o artigo *De solutione problematum diophanteorum per números íntegros* de Euler, tendo como principal objetivo o de investigar como Euler resolvia Equações Diofantinas. Além disso, buscamos situar historicamente o trabalho de Euler, tanto em relação ao desenvolvimento dos métodos de resolução de Equações, quanto ao contexto em que foi escrito, isto é, em que momento de sua vida Euler escreveu o artigo.

Porém o artigo em questão, não tinha tradução para o Português, havia apenas o original em Latim e uma tradução para Inglês, diante dessa situação a nossa primeira atitude para alcançar nossos objetivos foi realizar uma tradução para o Português do artigo original em Latim de Euler. Para tal, estudamos a língua latina por meio de gramáticas, assistindo algumas disciplinas oferecidas pelo Departamento de Letras da Universidade Federal do Rio Grande do Norte e participando de cursos de extensão tratando de língua latina.

Houve muitas dificuldades com a tradução, pois o Latim, diferente do Português que é uma língua analítica, é uma língua sintética, isto é ela utiliza declinações. Declinações são mudanças nas terminações de determinados tipos de palavras, assim, enquanto que no Português reconhecemos a função sintática de uma palavra principalmente pela sua posição na frase, no Latim a posição é indiferente, pois a terminação determina sua declinação, e, portanto sua função sintática. Então, para entendermos um pouco, temos de saber que em Latim há seis casos, cada um correspondendo a um caso gramatical nas línguas analíticas, como o Português, por exemplo. A comparação que pode ajudar a compreensão das declinações é a comparação com os verbos, isto é os verbos têm conjugações, já os nomes têm declinações em Latim. Apesar da dificuldade e com muito estudo foi feita a tradução do artigo de Euler: Dantas e Fossa (não publicada).

Nesse momento, após a construção da problemática e a fim de alcançarmos os objetivos apresentados nosso trabalho será conduzido a um estudo de caráter bibliográfico, que poderemos observar no capítulo a seguir.

CAPÍTULO 2 - HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES E EQUAÇÕES DIOFANTINAS

Neste capítulo faremos um apanhado bibliográfico da evolução dos conceitos e métodos de resolução de equações e equações diofantinas desde o Egito até a Arábia, terminando com a Europa, com Euler.

2.1. NO EGITO

O Egito foi berço de uma das mais antigas e magníficas civilizações da humanidade. Ele ficava numa região centrada no Nilo, com um ambiente hostil no sul e nas fronteiras leste e oeste, na verdade, era como uma ilha, pois era cercado ao norte pelo mar e em suas outras fronteiras pelo deserto.

Segundo Ronan (1994, p. 20):

> Mas, se o isolamento era a característica fundamental do antigo Egito, sua civilização foi, contudo, magnífica; era olhada com inveja pelos que circundavam suas fronteiras, e somente os desertos a sua volta impediram que se tornasse vitima de vizinhos ciumentos. Na realidade, alguns nômades de estabeleceram na área esparsamente povoada do delta do Nilo, mas eles não perturbaram a natureza, basicamente pacifica, do país, que era essencialmente, uma terra de agricultores e escribas.

Os egípcios começaram desde cedo a se interessar por astronomia e desenvolveram conhecimentos em medicina e matemática.

> A antiga astronomia egípcia deixou seu registro em túmulos e edificações; a matemática, nos arquivos dos templos e nos papiros dos palácios... Em medicina, os egípcios eram cirurgiões competentes... (RONAN, 1994, p.29).

Certo número de papiros egípcios resistiu ao desgaste do tempo por mais de três milênios e meio, talvez graças ao clima seco.

Conforme nos afirma Eves (2004, p. 70), dos papiros de conteúdo matemático, o mais extenso tem cerca de dezoito pés de comprimento por cerca de treze polegadas de altura, e foi adquirido no Egito em 1858 por Henry Rhind, sendo por isso, conhecido como papiro Rhind. Também é conhecido por Papiro Ahmes em homenagem ao escriba que o copiou por volta de 1650.

Muitos dos problemas do papiro de Ahmes tratam da solução de equações lineares, da forma $x + ax = b$ ou $x + ax + bx = c$ onde a incógnita x é chamada de *aha.*

No tempo de Ahmes (1550 a.C.), as questões eram formuladas como problemas com resposta e explicação do tipo “faça assim”, isto é, como “receitas”, que não são dadas como regras gerais, mas como uma sequência de exemplos de cálculos.

No problema de número 24 do papiro é pedido o valor de x sabendo que x mais um sétimo de x dá dezenove. Segundo Boyer (1974, p. 12), o prob. 24, por exemplo, pede o valor de *aha* sabendo que *aha* mais um sétimo de *aha* dá 19.

Portanto, a equação a qual queremos a solução é x + 1/7x = 19 e conforme Smith (1958 ,p.436) é resolvida basicamente assim:

Supondo sete como solução. Então, usar a forma do texto,

Uma vez que	dê	7
$\frac{1}{7}$	Dará	1
$\frac{1}{7}$	Dará	8

Assim, tantas quantas forem as vezes que o 8 for multiplicado para obter 19,o 7 deve ser multiplicado para obter o resultado requerido.

Desta forma, observamos que o valor 7 é atribuído a incógnita, então quando substituímos $x + \frac{1}{7}x$ passa a valer 8, em vez de 19 como se queria. Mas, como 8 $\Big(2 + \frac{1}{4} +$ *18=19* deve-se multiplicar 7 por *2+14+18* para obter a resposta.

Atualmente, observemos que esse problema consiste na solução da equação $x + \frac{x}{n} = N$, onde n e N são dados, o método que vimos pode ser descrito pela frase *“adivinhar e ajustar”* e tem sido chamado de *regula falsi* (regra da falsa).

Outro importante papiro foi o de Berlin, no qual se encontra a primeira solução conhecida da equação quadrática.

O papiro de Berlim foi comprado por A. H. Rhind, em Luxor, em 1850, na mesma época do papiro de Rhind, mas encontrava-se em muito mau estado e só foi restaurado e analisado cerca de 50 anos mais tarde por Schack-Schackenburg. O papiro de Berlim encontra-se, ainda assim, parcialmente estragado. Neste papiro aparece pela primeira a solução de uma equação do 2.º grau.[1]

1 Sobre os papiros, maiores detalhes podem ser encontrados no texto História da matemática no Egito, disponível em http://www.malhatlantica.pt/mathis/Egipto/egipto.htm

O problema reduz-se a resolver as equações $x^2 + y^2 = 100$, $y = \frac{3}{4}x$, e a solução é substancialmente como segue:

> Faça um quadrado cujo lado seja 1 e outro cujo lado é $\frac{3}{4}$. O quadrado de $\frac{3}{4}$, dando $\frac{9}{16}$. Adicione aos quadrados, dando $\frac{25}{16}$, cuja raiz quadrada é $\frac{5}{4}$. A raiz quadrada de 100 é 10. Divida 10 por $\frac{5}{4}$, dando 8, e $\frac{3}{4}$ de 8 são 6. Então $8^2 + 6^2 = 100$ e $6 = \frac{3}{4}$ de 8, de modo que as duas raízes implícitas da é equação são 6 e 8.A solução,é portanto,um simples caso de falsa posição.(SMITH, 1958, p. 443, tradução nossa)

2.2. NA BABILÔNIA[2]

Os povos mesopotâmicos destacaram-se nas ciências, arquitetura e literatura.

A escrita utilizada na Mesopotâmia era a cuneiforme, trata-se de marcas em forma de cunha sobre tábuas de barro, barro que, por sinal, era abundante devido a situação geográfica.

> Embora a terra pantanosa acima do golfo Pérsico tivesse juncos, a fibra desse material não era apropriada para a confecção de papiros; os sumérios, portanto, tinham necessidade de outro material facilmente disponível para registrar os seus escritos. Escolheram seu inexaurível suprimento de barro, dando-lhe a forma de plaquetas, ou cilindros, ou mesmo prismas, onde escreviam com um pedaço afiado de junco. O metal ou a pedra só era usado como material para escrita nos monumentos, nunca no dia-a-dia. (Ronan, 1994, p. 32)

Essas tábuas de barro tinham grande durabilidade e segundo Cajori (2007, p. 21):

> Essas placas eram de dimensões variadas, desde as pequenas do tamanho de cartas de baralho até as do tamanho de um livro, normalmente preenchidas na frente e no verso — e algumas vezes nos lados. Cerca de meio milhão de placas foram desenterradas, das quais somente algumas poucas centenas são de matemática. Estas últimas são de dois períodos, 1800 — 1600 a. C. (o período “babilônico antigo”, grosseiramente da dinastia Hamurabi) e de 300 a. C. ao início da presente era (período selêucida).

Algumas das tábuas contêm exemplos de problemas que hoje podemos resolver com o auxilio de equações do segundo grau, um exemplo é o texto AO 8862 (por volta de 1700 A.C.), apresentado a seguir com uma explicação de Neugebauer e de van der Waerden, encontrada no livro de Bekken (1994, p. 22):

> Multipliquei o comprimento e a largura e obtive a área. Em seguida somei a diferença entre o comprimento e a largura e obtive 3,3. Mais adiante, somei o

2 As civilizações antigas da Mesopotâmia são frequentemente chamadas de babilônias, embora a Babilônia não tenha sido a principal cidade, mas convencionou-se o uso dessa nomenclatura informa.

> comprimento e a largura, encontrando 27. Desejamos encontrar o comprimento, a largura e a área.
> Dadas as somas 27 e 3,3.
> O resultado: o comprimento 15
> largura 12
> área 3,0
> Siga o método:
> $27 + 3{,}3 = 3{,}30$ e $2 + 27 = 29$
> Tome a metade de 29, que dá 14;30.
> $$14;30.14;30 = 3{,}30;15$$
> $$3{,}30;15 - 3{,}30 = 0;15$$
> Que tem 0;30 como raiz quadrada
> $14;30 + 0;30 = 15$ o comprimento
> $14;30 - 0;30 = 14$ a largura
> Subtraia de 14 os 2 que foram adicionados a 27 dando 12,que é a largura verdadeira.
> O comprimento 15 e a largura 12 se multiplicam, dando a área 3,0.
> $$15 - 12 = 3 \ , \ \ 3{,}0 + 3 = 3{,}3$$
> $15 + 12 = 27$ (BEKKEN, 1994, p. 22)

A notação usada na explicação de Neugebauer e de van der Waerden acima, obedece a seguinte fórmula $A, B; a, b = 60A + B + \left(\frac{a}{60}\right) + \left(\frac{b}{3600}\right)$ já que o sistema posicional babilônio é de base 60, porém abaixo vemos a resolução do problema utilizando o sistema decimal:

> Então, usando o sistema decimal o problema fica assim:
> Tomando l como comprimento e b como largura, temos:
> $$b.l + (b - l) = 183$$
> $$b + l = 27$$
> Usando a “receita” descrita anteriormente, temos:
> $183 + 27 = 210$ e $27 + 2 = 29$
> Tomamos a metade de 29, que dá 14,5.
> $$14{,}5.14{,}5 = 210{,}25$$
> $$210{,}25 - 210 = 0{,}25$$
> Onde a raiz de 0,25 é 0,5, assim
> $14{,}5 + 0{,}5 = 15$ o comprimento
> $14{,}5 - 0{,}5 = 14$ a largura
> Subtraia de 14 os 2 que foram adicionados a 27 dando 12, que é a largura verdadeira.
> Dessa forma, multiplicando o comprimento 15 e a largura 12 temos que a área é 180.
> Usando nossa simbologia atual, o problema resumir-se-ia a resolver a seguinte equação:
> $$b.l + (b - l) = 183 \ (I)$$
> Mas $b = 27 - l \ (II)$
> Então substituindo (I) em (II) temos a seguinte equação do segundo grau:
> $$l^2 - 29l + 210 = 0$$
> Cujas raízes são 15 e 14.
> Esse problema pode facilmente ser transformado em um *problema padrão* dos babilônios.
> Encontre o comprimento l e a largura b, sendo dadas a área a e o semi-perímetro s, isto é:
> $l.b = a$ e $l + b = s$ (BEKKEN, 1994, p. 24)

Portanto, segundo Bekken (1994, p. 24), para resolver o problema, encontre primeiro a metade da soma e eleve ao quadrado, subtraia então o produto e tome a raiz quadrada. Você encontra o comprimento l e a largura b, tomando a metade da soma e adicionando (respectivamente subtraindo) a raiz quadrada. Com isso, veja que acabamos de descrever o calculo de l e b pela fórmula:

$$\frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - a}\ .$$

Essas soluções algorítmicas de problemas sem símbolos, que não são formulados de forma genérica, mas exemplificados em números concretos, que mais parecem "receitas".

2.3. NA GRÉCIA

Foi a partir da influência da civilização grega que questões do tipo "como" começaram a perder importância para questões do tipo "por quê". Isto é, a transformação da matemática calculadora egípcia e babilônica, cheias de receitas, partindo de casos particulares, para uma matemática raciocinada, a grega.

Dessa forma, os gregos vieram a formalizar as receitas, sistematizando os conhecimentos práticos.

Surgiram também relatos sobre um grande número de matemáticos preocupados com problemas de Geometria. Tratava-se de um período em que a Álgebra Aritmética era substituída por uma Álgebra Geométrica. Nessa nova Álgebra não podia haver, por exemplo, soma de áreas com segmentos ou áreas com volumes. Deveria haver uma homogeneidade dos termos de uma equação e elas seriam interpretadas geometricamente.

Dentro dessa Álgebra Geométrica grega, era utilizado o método das proporções e o da aplicação de áreas para resolução de equações.

O método das proporções fornece soluções geométricas para equações do tipo $ax = bc$ e $x^2 = ab$, e consiste na construção de um segmento de reta x, dado por $a{:}\,b = c{:}\,x$ ou $a{:}\,x = x{:}\,b$, em que a,b,c são segmentos de reta dados, conforme a Figura 1.

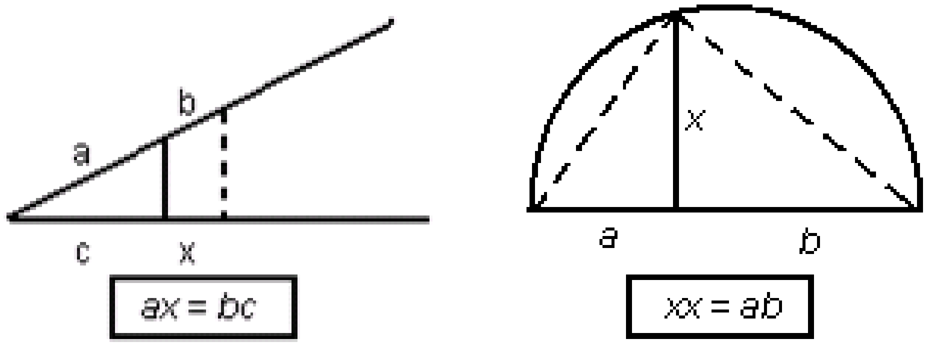


Figura 1: Método das proporções.

Os gregos foram capazes de resolver equações quadráticas com métodos geométricos. Euclides (300 a.C.) propôs em Os *Dados*, problemas envolvendo equações quadráticas. Um deles é como segue:

Se duas linhas retas incluem uma área dada em um ângulo dado e o excesso do maior sobre menor está dado, então cada um deles é dado.

Expresso de forma algébrica em referência ao retângulo, se $xy = k^2$ e $x - y = a$, então x e y podem ser encontrados. Euclides resolve o problema geometricamente. Igualmente, há nos *Elementos* problemas geométricos como seguintes:

> Para cortar uma linha reta dada de modo que o retângulo contido pelo todo e por um dos segmentos seja igual ao quadrado do segmento restante.
> Isto pode ser representado algebricamente pela equação $a(a - x) = x^2$ou pela $x^2 + ax = a^2$ (SMITH, 1958, p. 444, tradução nossa).

O problema anterior é representado pela Figura 2, a seguir:

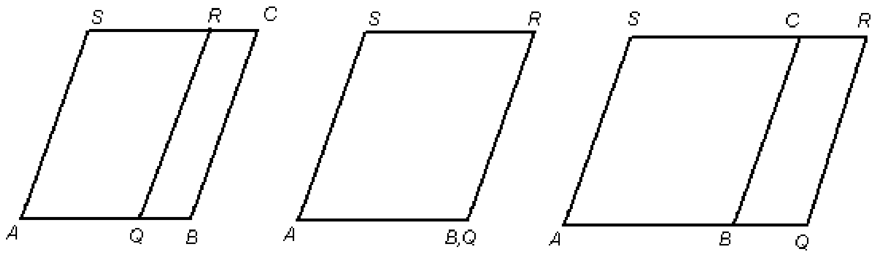


Figura 2: Problema contido nos *Elementos*.

Embora seja fácil a resolução de equações desse tipo com o nosso simbolismo algébrico atual, deve-se admitir que uma resolução retórica[3] requer uma atenção mental elevada. Já observamos também, a resolução de problemas usando a álgebra geométrica, mas de acordo com Eves (2007, p. 207), acredita-se que na verdade, estes problemas foram resolvidos aritmeticamente, talvez mediante a regra da falsa posição.

Os três primeiros séculos da matemática grega iniciam-se com os esforços de Tales por uma Geometria demonstrativa e culmina com *Elementos* de Euclides. Constituíram um

3 Em 1842 ,G.H.F. Nesselmann caracterizou, com propriedade, três estágios no desenvolvimento da notação algébrica.primeiro se tem a álgebra retórica em que os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos. A seguir em a álgebra sincopada em que se adotam abreviações para algumas quantidades e operações que se repetem mais frequentemente. Finalmente chega-se ao último estágio, o da álgebra simbólica em que as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada de símbolos que aparentemente nada têm a ver com os entes que representam.

período de grandes realizações para a Matemática em geral, com contribuições para a Álgebra e para as equações.

Após esse período, segue-se um longo declínio, interrompido apenas entre 250 a 350 d.C. no qual surge o algebrista grego, Diofanto[4] de Alexandria. Pouco se sabe acerca da vida de Diofanto, que provavelmente nasceu cerca de 200 e morreu no ano 284. Contudo, são apenas suposições, embora se encontre na Antologia Grega um epigrama que se propõe a dar detalhes de sua vida, citado por Boyer (1996, p. 121):

> Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida, e somando uma duodécima parte a isto cobriu-lhe as faces com penugem; Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após o seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz criança tardia; depois de chegar à medida de metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou sua vida.

De acordo com Ribeiro (2007, p. 58), esse enigma equivale à equação:

> $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \left(\frac{1}{7}x + 5\right) + \left(\frac{1}{2}x + 4\right) = x$, que mostra que Diofanto viveu 84 anos. Contudo, o que é interessante ressaltar é que esse tipo de problema não deve ser tomado como típico problema diofantino, pois ele pouco se dedicou às equações do primeiro grau.

Conforme Eves (2007, p. 2007), Diofanto escreveu três trabalhos: *Arithmetica*, o mais importante, que era originalmente em treze livros, dos quais só seis se preservaram; *Sobre números poligonais*, do qual restou apenas um fragmento; e *Porismas*, que se perdeu. A *Arithmetica*[5] trata-se de uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números, a parte remanescente do trabalho se dedica a resolução de 130 problemas, que levam a equações do primeiro e do segundo grau e em particular, uma cúbica é resolvida.

“Diophantus resolveu sem dificuldades equações determinadas do primeiro e segundo graus; da cúbica nós encontramos somente o exemplo no Arithmetica, e que é um caso muito especial”. (HEATH, 2006, p. 462, tradução nossa)

O que é mais surpreendente sobre a *Arithmetica*, por exemplo, não é somente o uso de uma linguagem completamente nova e a extensão do domínio dos números, mas os problemas que Diophantus levantou e resolveu.

> Por exemplo, um problema usualmente estudado por Diofanto era encontrar o valor de dois números: “Proposto que a soma de dois números forma 20 unidades e que seu produto forma 96 unidades...” (DAHANDALMEDICO & PEIFFER, 1986, p. 79).

---

4 É razoavelmente preciso dizer que a álgebra anterior a época de Diofanto era retórica . Uma das principais contribuições de Diofanto à matemática foi a sincopação da álgebra grega. (Eves, 2008, p.206)

5 Deve-se lembrar que na Grécia antiga a palavra aritmética significava teoria dos números, não computação.

Para resolvê-lo, Diofanto supunha que a diferença entre eles fosse duas *arithmés*[6] representada por $2d$. Assim, os dois números são $10 + d$ e $10 - d$. Fazendo-se $(10 + d) \cdot (10 - d) = 96$, temos $100 - 2d = 96$ e $d = 2$. Assim, os dois números são 12 e 8.

Percebemos que mesmo com a mudança de concepção sobre a Álgebra nesse período, (que foi de aritmética, com os babilônios e egípcios, para geométrica, com os gregos), a busca pelas soluções ainda estavam relacionadas às equações particulares e não aos métodos gerais.

2.4. NA ÍNDIA

Após a época dos gregos clássicos, os primeiros povos cuja pesquisa teceu uma larga influência no mundo da Matemática foram indianos.

De acordo com Cajori (1991, p. 83, tradução nossa):

> Parece que a matemática grega cresceu mais por está sob condições mais favoráveis do que hindu, já que na Grécia ela alcançou uma existência independente, e foi estudada para sua própria causa, quando a matemática hindu permaneceu sempre meramente empregada à astronomia. Além disso, na Grécia a matemática era uma ciência dos povos, livre para ser estudada por todos que tivessem gosto por ela; na Índia, como no Egito, estava nas mãos principalmente dos sacerdotes.
> [...]
> Era muito impressionante a diferença no modo de pensar do hindu e do grego; enquanto os gregos eram proeminentemente geométricos, os indianos eram antes de qualquer coisa aritméticos. O hindu tratava do número, e o grego da fórmula.

Os indianos eram hábeis aritméticos, porém deram contribuições significativas à Álgebra e, assim como Diofanto, sincoparam sua Álgebra. Os matemáticos indianos tinham uma predileção em trabalhar com números nas operações aritméticas ou na resolução de equações, utilizando frequentemente os métodos da falsa posição ou de inversão, no qual se trabalha "de trás para frente", a partir dos dados do problema.

Conforme Eves (2007, p. 255):

> Outro método de resolução preferido era o de inversão no qual se trabalha para trás, a partir dos dados. Considere, por exemplo, o seguinte problema que faz parto do texto de *Lilāvati* de Bhāskara : Linda donzela de olhos resplandecentes, uma vez que entendeis o métodos de inversão correto, dizei-me qual é o número que multiplicado por 3, depois acrescido de $3/4$ do produto, depois dividido por 7, diminuído de $1/3$ do quociente, multiplicado por si mesmo, diminuído de 52, pela extração da raiz quadrada, adição de 8 e divisão por 10 resulta no número 2?"

Pelo o método da inversão, quando houver uma soma, subtraímos; uma multiplicação, dividimos; ou uma raiz, elevamos ao quadrado, ou seja, é a substituição de cada operação pela

---

6 Esse termo designava a incógnita

sua inversa. Dessa forma, o problema proposto na citação acima seria resolvido da seguinte maneira:

Começando pelo 2 que seria multiplicado por 10 (já que no problema há divisão por 10), do resultado subtrairíamos 8 (devido a adição de 8, no problema) e depois elevamos a segunda potência (devido a raiz quadrada do problema), e somamos 52 (por causa da subtração de 52), obtendo 196,

$[(2).(10)-8]^2-52=196;$

e assim por diante, como mostraremos a seguir,

$$\sqrt[2]{196}=14$$

$$\frac{(14).\left(\frac{3}{2}\right).(7).\left(\frac{4}{7}\right)}{3}=28,$$

até chegarmos a 28, a resposta para o problema.

Percebemos, portanto, uma semelhança com a resolução atual de uma equação em uma situação análoga, ou seja, se fossemos escrever e resolver esse problema nos dias atuais teríamos a seguinte equação:

$$\frac{\sqrt{\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{7}{4}\right).(3x)}{7}\right]^2-52+8}}{10}=2$$

Resolveríamos, multiplicando ambos os membro por 10, depois subtraíamos 8 novamente em ambos os membros, e procederíamos elevando cada membro ao quadrado e assim por diante, exatamente como os hindus faziam, com a diferença apenas da notação.

Segundo Fossa (2010, p. 571) os hindus tiveram certa desenvoltura no desenvolvimento da álgebra, especificamente na atividade de resolução de equações, como acabamos de constatar.

Consoante, Datta e Singth (Apud Fossa 2010, p.571), os hindus usaram três nomes distintos para álgebra e todos revelam algo sobre sua maneira de conceber essa ciência. A partir de 860, usaram o nome *bîjaganita*, uma palavra composta de *bîja*, “elemento” ou “ análise” e *ganita*, “a ciência de calcular”, apontando para uma álgebra que não apenas faz cálculos,mas também demonstrações.

Um outro nome indiano para álgebra é *kuttaka-ganita* ou “pulverizador”, que surge pela primeira vez em 628 numa obra de Brahmagupta. Foi usado para resolução de equações indeterminadas do primeiro grau, mas foi generalizado para denotar a álgebra em geral, resaltando a importância que os hindus deram às equações diofantinas.

Segundo Boyer (1996, p. 151), aparentemente, foi Brahmagupta o primeiro a dar uma solução geral da equação diofantina linear $ax + by = c$, onde a, b e c são inteiras. Para que essa equação tenha soluções inteiras, o máximo divisor comum de a e b deve dividir c; e Brahmagupta sabia que se a e b são primos entre si,todas as soluções da equação são dadas por $x = p + mb$, $y = q - ma$, onde m é um inteiro arbitrário. Ele sugeriu também a equação diofantina quadrática $x^2 = 1 + py^2$, que erradamente tem o nome de Pell (1611-1685).

Segundo Fossa (2010, p. 588), Brahmagupta não fez um grande avanço na resolução da equação de Pell, só conseguindo resolver exemplos particulares por tentativa e erro. Só em 1150 Bhâskara II elaborou um método, que era chamado de a *cakravâla*,ou seja, o "circulo" ou o "horizonte", portanto o "método cíclico", pois reitera o mesmo procedimento varias vezes até se achar o resultado desejado.

Segundo Bekken (1994, p. 47 - 49) a álgebra de Brahmagupta (aprox. 630) e de Bhāskara (aprox. 1150) são na realidade introduções a obras de astronomia. O *Siddhaanta Siromani*[7] (Lilāvati)[8] de Bhāskara, por volta de 1150, inclui muitos problemas de Brahmagupta, os quais são resolvidos tanto de forma retórica quanto através de uma notação simbólica sistemática.

A Índia produziu muitos matemáticos na segunda metade da Idade Média, mas Bhāskara foi o mais importante do século 12. Foi ele quem preencheu algumas lacunas na obra de Brahmagupta, por exemplo, dando soluções particulares da equação de Pell, segundo Boyer (1996, p. 152):

> Com relação à equação de Pell $x^2 = 1 + py^2$, proposta antes por Brahmagupta, Bhaskara deu soluções particulares para os cinco casos $p = 8, 11, 32, 61$ e 67. Para $x^2 = 1 + 61y^2$, por exemplo, ele deu a solução $x = 1.776.319.04$ e $y = 22.615.390$.

---

7 Bhaskara escreveu o Siddhanta Siromani, aos 36 anos, em 1150. O seu manuscrito está dividido em quarto partes – Lilavati (A Bela) sobre aritmética; Bijaganita sobre a álgebra, Goladhyaya sobre a esfera, ou seja sobre o globo celeste e Grahaganita sobre a matemática dos planetas.

(http://www.malhatlantica.pt/mathis/India/BhaskaraII.htm#top,acessado em 09/11/2008)

8 O próprio título dessa obra pode ser tomado como indicação da qualidade desigual do pensamento hindu,pois o nome do título é o da filha de Bhāskara que,segunda a lenda, perdeu a oportunidade de se casar por causa da confiança de seu pai em suas predições astrológicas. Bhaskara tinha calculado que sua filha só poderia se casar de modo propício numa hora determinada de um dia dado.no dia que deveria ser o do seu casamento a jovem ansiosa estava debruçada sobre um relógio de água quando se aproximava a hora do casamento,quando uma pérola em seu cabelo caiu,sem ser observada,e deteve o fluxo de água.Antes que o acidente fosse notado,a hora propício passava.Para consolar a infeliz moça,o pai deu seu nome ao livro que estamos descrevendo.(Boyer, 1996,p.152)

Bhāskara foi o último matemático medieval importante da Índia, e sua obra representa a culminação de contribuições hindus anteriores.

2.5. NA ARÁBIA

Consoante Ronan (1994, p. 106), se a Astronomia árabe, consolidou e aperfeiçoou uma ciência que era, em essência, uma herança dos gregos, a matemática árabe foi bem diferente. Certamente foi um meio pelo qual os algarismos hindus foram transmitidos para o Ocidente, mas, acima de tudo, trouxe para a arte da Matemática duas técnicas poderosas: a álgebra e a trigonometria.

De acordo com Fragoso (2000, p. 21), os árabes foram responsáveis por fazer desaparecer grande parte do conhecimento ocidental, todavia contribuíram para sua preservação. O extermínio se deu quando em 641 d.C. Omar mandou que fosse destruída a Biblioteca de Alexandria. A preservação foi devida à atuação de três califas, considerados os grandes patronos da cultura clássica: al-Mansur, Harum al-Rachid e al-Mamum, que durante seus reinados foram responsáveis pela tradução, do grego para o árabe, dos mais importantes escritos científicos conhecidos, entre eles, o *Almagesto* de Ptolomeu e *Os Elementos* de Euclides.

Segundo Cajori (2007, p. 157), o primeiro autor notável de textos matemáticos foi Al-Khowarizmi, nossa principal fonte de informação a respeito dele é o livro de crônicas intitulado *Kitab Al-Fihrist*, escrito por Al-Nadim, por volta de 987 d.C., contendo biografia de homens eruditos.

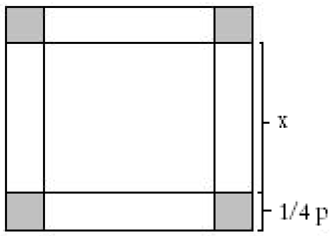
Uma parte do trabalho original de Al- Khowarizmi sobre a aritmética não foi conservado, só em 1857 uma versão em latim foi descoberta. Ela começa com as seguintes palavras: Falou *Algoritmi*. Deixai-nos agradecer a Deus, nosso líder e defensor. Aqui o nome do autor, Al-Khowarizmi passou para *Algoriti*, do qual veio a nossa palavra algoritmo, significando a arte de calcular de um modo particular, e também originou-se a forma arcaica *augrimo*, usada por Chaucer.

Consoante Rāshid (1994, p. 8, tradução nossa):

> Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi escreveu seu ilustre *Kitab al-jabr wa al-maqabala* (musharrafa and Ahmad, eds., 1939) em Bagdá entre 813 e 833, durante o reino de al-Mamum. Era a primeira vez na história, que o termo álgebra aparecia em um título designando como uma disciplina (al-Nadim, Tajaddud, ed., 1971, pp. 3338-341). Seu reconhecimento não era assegurado somente pelo título, mas foi confirmado pela formulação de um vocabulário técnico novo, que pretendia especificar seus objetos e procedimentos.

Segundo Ronan (1994, p. 107), o termo *al-jabr* referia-se a “transferir termos” para eliminar quantidades negativas (de modo que, por exemplo , $x = 40 - 4x$ se torna $5x = 40$); *al-muqabala* era o processo seguinte, o que “balanceava” as quantidades positivas restantes (assim se tivermos $50 + x^2 = 29 + 10x$, *al-muqabala* o reduz para $x^2 + 21 = 10x$). Nesse livro, Al-Khowarizmi não usou símbolos como fazemos hoje. Eles foram introduzidos mais tarde – expressou sua matemática em palavras; além disso, não inventou a Álgebra como técnica, pois a tomou emprestado do grego ou, mais provavelmente, de fontes hindus. Mas sua realização foi tornar clara a técnica e, explicando-a bem, promover o seu uso.

Conforme Smith (1958, p. 446, 447, tradução nossa):

> Al-Khowârizmî (825) usou dois métodos gerais para resolver equações quadráticas do tipo $x^2 + px = q$, ambas baseadas nos modelos gregos. Dado $x^2 + 10x = 39$ construiu um quadrado como mostrado aqui.
>
> 
>
>
> Então a parte não sombreada é $x^2 + px$, e é consequentemente igual a q. Para obter um quadrado, devemos adicionar os quatro quadrados sombreados, onde cada um é $(\frac{1}{4}p)^2$ e a soma deles é $\frac{1}{4}p^2$, que é neste caso 25.Desde $25 + 39 = 64$, temos
>
> $x + \frac{1}{2}p = 8;$
>
> Quando $x + 5 = 8$
>
> e $x = 3.$

A indicação Smith (1958, p. 446, 447, tradução nossa) para o segundo método é a seguinte:

> Você divide por dois o número das raízes, que no exemplo atual rende cinco. Isto você multiplica por ele mesmo; o produto é vinte cinco. Adicione isto a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro. Tome agora a raiz disto, que é oito, e subtraia dele a metade do número das raízes, que é cinco; o restante é três. Esta é a raiz do quadrado que você procurava; o quadrado dele mesmo é nove.
>
> A raiz negativa era negligenciada, o que acontecia regularmente até os tempos modernos.
> Seu segundo método era similar ao nosso comum. Na figura a parte não sombreada é $x^2 + px$, e adicionada ao quadrado de $\frac{1}{2}p$.
>
> Tem então $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 + q$,
>
> Quando $x = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q} - \frac{1}{2}p,$

> da qual ele utiliza somente a raiz positiva.
> Al-Khowârizmî considera igualmente outras formas, sua solução do tipo $x^2 + q = px$ sendo baseado na identidade
> $(\frac{1}{2}p)^2 - (\frac{1}{2}p - x)^2 = x(p - x) = px - x^2 = q,$
> de qual segue isso $x = \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}.$

Além do al-Khowarizmi, o poeta Omar Khayyam (1100) de Chorassan, criou um método de resolução de equações do segundo grau:

> Multiplique a metade da raiz por ela mesma; adicione o produto ao número e da raiz quadrada desta soma subtraia a metade da raiz. O restante é a raiz do quadrado.
> Ele também deu regras para outros tipos, como para $x^2 + q = px$ sendo baseada na identidade
> $$x(p - x) + (x - \frac{1}{2}p)^2 = (\frac{1}{2}p)^2$$
> e isso para $px + q = x^2$ em cima da identidade
> $x(x - p) + (\frac{1}{2}p)^2 = (x - \frac{1}{2}p)^2$. (SMITH, 1958, p. 447, 448, tradução nossa)

Conforme Cajori (2007, p. 168), os árabes possuíam leis que, pela sua generosidade beneficiavam muito a pesquisa científica. Na corte dos califas, por exemplo, os cientistas eram contemplados com bibliotecas e observatórios. Além das suas várias contribuições, guardaram com zelo o que aprenderam da Grécia e da Índia, e quando o amor pela ciência despontou no Ocidente foram os árabes que transmitiram para os europeus os valiosos tesouros da antiguidade.

2.6. NA EUROPA

A partir do século V d.C, com a queda de Roma, a civilização ocidental mudou em muitos aspectos, dividindo-se em duas áreas culturais muito distintas: o mundo árabe-iraniano e a Europa.

O período que vai da queda do Império Romano até o século XI, é chamado Baixa Idade Média. Durante esse período, segundo Eves (2007, p. 289), a civilização na Europa atingiu níveis muito baixos. O ensino praticamente deixou de existir, quase todo o saber grego desapareceu e muitas das artes e dos ofícios legados pelo mundo antigo foram esquecidos.

No século XII, considerado o século das traduções, os europeus retomaram a cidade de Toledo, considerada um grande centro cultural árabe na Península Ibérica, que foi uma oportunidade aos estudiosos desse continente para fornecerem uma série de traduções de obras clássicas do grego e do árabe para o latim, maneira pela qual a Europa retomou o acesso ao conhecimento matemático.

De todos aqueles que estudaram matemática e em particular equações algébricas, nos séculos XII e XIII, Leonardo de Pisa foi, de fato, o grande destaque, pois além de grande matemático, teve papel fundamental no processo de transmissão do conhecimento matemático.

Segundo Cajori (2007, p. 179 e 182), Leonardo de Pisa também conhecido como Fibonacci, isto é, filho de Bonaccio. De todos os métodos de cálculos, ele achou o dos indianos o melhor. Voltando à Pisa, publicou, em 1202, seu maior trabalho, o *Liber Abaci*, que foi, por séculos, uma das fontes da qual os autores extraíram material para trabalhos sobre aritmética e álgebra. Nele estão quatro métodos de calculo com inteiros e frações conhecidas na época; a raiz quadrada e cúbica são explicadas, sendo que esta última não tinha sido considerada no Ocidente cristão; equações do primeiro e do segundo grau, determinadas ou indeterminadas, são resolvidas pelos métodos de "simples" ou "dupla posição", e, também, por álgebra propriamente dita. Além de tomar conhecimento, que a equação quadrática $x^2 + c = bx$ pode ser satisfeita por dois valores de x, sem tomar conhecimento, no entanto, de raízes negativas e imaginárias.

Apesar de Leonardo de Pisa ter sido o primeiro grande matemático a advogar a adoção da "notação arábica", foi trabalho dos matemáticos do século XV que consolidou o sistema de numeração hindu-arábico e o desenvolvimento da linguagem simbólica para a matemática.

Conforme Boyer (1996, p. 189), a Alemanha e Itália forneceram a maior parte dos matemáticos do início da Renascença, mas em 1484 foi composto na França um manuscrito que em nível e importância foi talvez o mais notável desde o *Liber Abaci* de Fibonacci, de quase três séculos antes e que, como o *Liber Abaci*, só foi impresso no século dezenove. Essa obrar, intitulada *Triparty en la science des nombres*, foi escrita por Nicolas Chuquet (morreu por volta de 1500), de quem quase nada sabemos, exceto que nasceu em Paris, bacharelou-se em medicina e praticou em Lyon.

O texto *Triparty en la science des nombres*, Três partes da Ciência dos Números, é essencialmente retórica. Em sua primeira parte explica o novo sistema de numeração e ensina como efetuar operações aritméticas com a estrutura desse sistema, na segunda trata de raízes de números e na terceira parte, ocupa-se das equações algébricas, onde estaria propenso a aceitar que uma equação possuísse raízes negativas, desprezando as imaginárias.

A mais antiga álgebra da renascença, a de Chuquet, foi escrita por um francês, mas a álgebra mais conhecida desse período foi publicada dez anos depois, na Itália, por Luca Pacioli, padre e professor de matemática, que escreveu *Summa de arithmetica, geometrica,* *proportioni et proportionalita*, Suma de Aritmética, Geometria, Proporções e Proporcionalidade, o primeiro livro de aritmética e álgebra a ser impresso. Em seu trabalho utilizou várias abreviações, terminando seu texto afirmando que a possibilidade de solução de uma cúbica genérica era a mesma que a da quadratura do círculo, conjectura que não demoraria a cair.

No século XVI, provavelmente um dos maiores feitos matemáticos, foi a descoberta pelos matemáticos italianos, da solução algébrica das equações do terceiro e quarto graus. Girolamo Cardano, Niccolò 'Tartaglia' Fontana, Scipione Del Ferro e Ludovico Ferrari foram os principais personagens responsáveis pela descoberta das fórmulas gerais, em meio a disputas, brigas e traições.

Segundo Cardano (apud Bekken, 1994, p.71):

> Em nossos dias, Scipione Del Ferro de Bologna resolveu a equação $x^3 + px = q$, uma façanha elegante e admirável... Além disso, meu amigo Niccoló Tartaglia resolveu a mesma e outras...Antes me haviam enganado as palavras de Luca Pacioli...

O primeiro matemático que conseguiu resolver algebricamente equações cúbicas do tipo $x^3 + px = q$ foi o bolonhês Scipione del Ferro, talvez baseado em fontes árabes.

Del Ferro não publicou o resultado, pois, segundo Fossa (2008, p. 152 - 153), naquela época, esse resultado poderia ser usado em alguma disputa de cargo em concurso, ocasião em que cada participante elaborava uma lista de problemas para o outro, e numa data estipulada, cada um teria de defender publicamente suas soluções diante do rival. Porém, confiou seu caderno de resultados matemáticos, incluindo a referida solução cúbica, ao seu genro, Annibale delle Nave e ensinou o método ao seu aluno Antonio Maria Fiore. Fiore, então desafia Nicolo Fontana[9], conhecido como Tartaglia, "o gago", pois se pudesse derrotá-lo numa disputa, se tornaria conhecido.

Consoante Eves (2007, p. 302):

> Fior desafiou Tartaglia para uma disputa pública envolvendo a resolução de equações cúbicas. Com muito empenho Tartaglia conseguiu resolver também, faltando poucos dias para a disputa, a equação cúbica desprovida do termo quadrático. Como no dia marcado sabia resolver dois tipos de cúbicas, ao passo que Fior só sabia resolver um, Tartaglia triunfou plenamente.

---

[9] Nicolo Fontana, Tartaglia, nasceu em 1499, foi o primeiro italiano a traduzir e a publicar os *Elementos* de Euclides.

Genônio Cardano, nasceu em Pavia, no ano de 1501, e estudou medicina na Universidade de Pádua. Em 1545, em sua obra *Ars Magna*, ele publicou uma resolução para as equações cúbicas, mesmo sob os protestos de Tartaglia que o acusava de plágio.

Segundo Fossa (2008, p. 155), de posse do método de Del Ferro, Cardano e seu aluno Ludovico Ferrari conseguiram uma solução completa para as equações cúbicas e a publicou no importante livro *Artis Magnae, Sive de Regulis Algebraics*, conhecido como *Ars Magna*. O que deixou Tartaglia ficou furioso, no entanto Cardano e Ferrari haviam visitado delle Nave em Bologna e consultado o caderno de Del Ferro. Além disso, na *Ars Magna*, Cardano deu o crédito da solução original a Del Ferro e reconheceu que Tartaglia havia lhe dado a solução, mas sem a demonstração.

Pouco depois da resolução da equação do terceiro grau, encontrou-se também a resolução da equação do quarto grau. O matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi, 1540, propôs um problema a Cardano que recaía numa equação quártica, embora não tivesse conseguido resolver. Seu discípulo Ferrari o fez, e Cardano publicou essa resolução também em sua obra *Ars Magna*.

Segundo Eves (2007, p. 305):

> Uma vez que a resolução de uma equação quártica se reduz à resolução de uma cúbica associada a ela, Euler, por volta de 1750, tentou igualmente reduzir a resolução de uma equação quíntica geral à de uma quártica associada. Euler falhou nesse seu intento, assim como falharia também Lagrange uns trinta anos mais tarde. O médico italiano Ruffini, porém, tomou outro caminho: em tentativas de 1803, 1805 e 1813 procurou provar, embora sempre de maneira insuficiente, que as raízes das equações gerais de grau cinco, ou maior, não podem ser expressas por meio de radicais em termos dos coeficientes respectivos, um fato verdadeiro, como se sabe hoje. Esse resultado notável foi demonstrado independentemente e conclusivamente pelo famoso matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802- 1829) em 1824. Em 1558, Charles Hermite (1822- 1901) deu uma solução quíntica geral por meio de funções elípticas.

Passaram-se aproximadamente três mil anos para ir das equações do primeiro ou segundo grau às equações de terceiro e quarto graus, sendo necessário mais ou menos trezentos anos para a compreensão da equação de quinto grau.

Vale também mencionar François Viète que nasceu na França em 1540 e é considerado por muitos como precursor da Álgebra simbólica, sendo o primeiro algebrista a demonstrar as vantagens no uso de letras para designar quantidades desconhecidas, ou incógnitas. Além de Viète, René Descartes, nascido em 1596, na França, contribuiu para desenvolvimento da linguagem algébrica, o que possibilitou a construção de seu método para resolução de equações.

Outro matemático que contribuiu para o desenvolvimento da história das equações foi Leonhard Euler nasceu na Suíça em 1707. Seu trabalho com os números complexos desempenhou um papel muito importante na teoria das equações algébricas, pois, quando buscava resposta à questão de como extrair uma raiz enésima de um número complexo, Euler descobriu que qualquer número complexo não nulo (inclusive os reais) tem exatamente n raízes. Esse resultado aguçou os ânimos de muitos matemáticos da época, pois desde a época de Cardano, já se sabia que as equações de terceiro grau tinham três raízes e as de quarto grau, quatro. Com os resultados descobertos por Euler, muitos passaram a fazer conjecturas, sem conseguir provar, que as equações polinomiais de grau n tinham exatamente n raízes.

Euler estudou também outras áreas da matemática, que poderemos constatar no capitulo seguinte que trata de sua vida.

CAPÍTULO 3 - A VIDA DE EULER

INTRODUÇÃO

Antes de falarmos diretamente da vida de Euler, convém mostrar um pouco de contexto histórico anterior ao seu nascimento.

A História da Matemática durante a Idade Moderna difere da história da Antiguidade e Medieval pelo menos em um ponto: nesse período nenhuma nação conservou liderança por um período longo, sendo comum quando se estuda Antiguidade, por exemplo, em livros de História da Matemática colocar capítulos nomeados pela nação dominante no período, como Mesopotâmia, Egito, Grécia etc, mas do Renascimento até o século dezoito o centro da atividade Matemática se deslocou repetidamente, conforme Boyer (1996, p. 303):

> Da Alemanha para a Itália, para a França, para Holanda, para a Inglaterra. Se as perseguições religiosas não tivessem obrigado os Bernoulli a deixar a Antuérpia, a Bélgica poderia ter tido sua vez; mas a família emigrou para a Basileia e em consequência a Suíça foi a terra natal de muitas das principais figuras matemáticas do inicio do século dezoito. Já mencionamos as obras dos matemáticos do clã Bernoulli, bem como a de Hermann, um dos seus protegidos suíços. Mas o mais importante matemático nascido na Suíça nessa época, ou em qualquer outra, foi Leonhard Euler (1707-1783), que nasceu em Basileia.

A VIDA DE EULER

Euler nasceu em Basileia, na Suíça em 15 de abril de 1707. Seu pai, Paulus Euler, era um ministro protestante e sua mãe, Marguerite Brucker, era filha de um pastor. Pouco depois do seu nascimento, sua família mudou-se para a cidade de Riehen, onde passou a maior parte da sua infância.

Segundo D’Ambrosio (2009, p. 17), Paulus Euler, havia sido aluno da Universidade de Basileia e orientando de Jacob Bernoulli, conduziu Euler em seus primeiros estudos sobre Matemática.

> Meu pai foi Paulus Euler, então designado ministro na vila de Riehen, uma hora de distancia de Basel e o nome da minha mãe era Margaretha Brucker. Pouco tempo depois meus pais mudaram-se para Riehen onde no devido tempo eu recebi de meu pai minha primeira instrução; e porque ele havia sido um dos discípulos do renomado mundialmente Jacob Bernoulli, ele tentou transmitir para mim os primeiros princípios de matemática e para este fim usou o material de Christoph Rudolph, com observações de Michael Stiefel, o qual eu estudei diligentemente por vários anos. (EULER, 1767, apud FELLMAN, 2007, p. 5, tradução nossa).

Quando chegou à adolescência, Euler retornou á sua cidade natal, Basileia, para viver com a sua avó materna.

> Presumidamente no oitavo ano de sua vida, Leonhard foi mandado à Latin school em Basileia, onde se instalou na casa da sua avó materna enviuvada Maria Magdalena Brucker-Faber. O “ginásio” em Basileia estava numa condição desanimadora, já que além do latim e (opcionalmente) o grego, quase nada mais poderia ser aprendido ali. Por exemplo, a matemática como objeto de estudo foi cortado devido a pedido dos cidadãos, apesar de muitos apelos veementes do matemático de renome mundial Johann Bernoulli (1667-1748), em sua capacidade como inspetor do sistema educativo, para fazer melhorias. (FELLMAN, 2007, p. 14, tradução nossa).

Matriculou-se na Universidade da Basileia, e em 1723. Recebeu o grau de Mestre em Filosofia com uma dissertação na qual comparava uma teoria de Descartes com de Newton.

> No outono de 1723 ele adquiriu o grau academico de magister, que correspondeu ao final do estudo na Faculdade de Filosofia. Nesta ocasião, o recém-formado apresentou seu primeiro discurso público (em latim, é claro), no qual ele comparou os sistemas de filosofia natural de Descartes e Newton (um tema então muito oportuno e até meados do século) porque a teoria do vótice de Descartes não pôde ser interposto com a teoria da gravitação de Newton e suas implicações matemáticas. (FELLMAN, 2007, pp. 16 e 17, tradução nossa).

Euler não aprendeu Matemática alguma na escola, mas seu interesse, despertado nas lições de seu pai, o levou a estudar sozinho diversos textos e a tomar lições particulares. Assim, nessa época, já recebia, aos sábados à tarde, lições de Jacob Bernoulli e seu irmão, Johann Bernoulli, que pode ser visto na Figura 3 a seguir, que rapidamente descobriu o seu talento para a Matemática.

Figura 3: Johann Bernoulli.

(fonte: http://www.mathematik.ch/mathematiker/johann_bernoulli.php)

> Em 1720 eu fui admitido na universidade como um estudante público, onde em pouco tempo eu encontrei a oportunidade de tornar-me próximo do famoso professor Johann Bernoulli, que com especial satisfação ajudou-me a ir adiante às ciências matemáticas. Todavia, ele rejeitou categoricamente lições privadas, devido ao horário cheio: todavia, me deu um conselho muito mais útil, que consistia em eu mesmo conseguir entender de alguma forma os mais difíceis livros de matemática e trabalhar através deles com grande diligencia, e se eu encontrasse alguma objeção ou dificuldade, me ofereceria livre acesso a ele todos os sábados à tarde, e ele foi generoso o suficiente para explicar as dificuldades, as quais foram feitas com tal desejo de auxiliar que, quando ele resolveu uma das minhas objeções, dez outras imediatamente desapareceram, este certamente é o melhor método para fazer um promissor progresso nas ciências matemáticas. (EULER, 1767, apud FELLMAN, 2007, p. 5, tradução nossa).

Euler iniciou seus estudos de teologia no outono de 1723, seguindo os desejos do pai, contudo, embora fosse um cristão devoto, não conseguia encontrar entusiasmo para o estudo da teologia, grego e hebraico, que ele encontrava na Matemática. Johann Bernoulli resolveu intervir e convenceu Paulus Euler que o seu filho estava destinado a ser um grande matemático. A tarefa de persuasão tornou-se mais fácil pelo fato dos dois terem sido amigos quando Paulus estava na graduação.

> Pelo cuidado da minha família, eu fui matriculado na Faculdade Teológica, visto que eu fui me aplicando ao mesmo tempo, não somente à teologia, mas também especialmente ao idioma grego e hebraico, que, todavia não progredi muito bem posto que devotei a maior parte do meu tempo oas estudos de matemática e, felizmente, as visitas aos sábados a Johann Bernoulli ainda continuavam. (EULER, 1767, apud FELLMAN, 2007, pp. 5 e 6, tradução nossa).

Em 1726, Euler concluiu o seu trabalho sobre a propagação do som, e em 1727 entrou na competição da Academia de Paris, cujo problema do ano era encontrar a melhor maneira de colocar os mastros num navio. Ganhou o segundo lugar, perdendo para Pierre Bouguer, que mais tarde ficou conhecido como “o pai da arquitetura naval”, conforme detalha Fellman (2007, p. 20, tradução nossa):

> Ele teve a audácia de participar com um livro de memórias (O.II, 20) do premio do concurso público anunciado em 1726 pela Paris Academy, que consistia em determinar a melhor maneira de criar um mastro de um navio. Ele, ”um jovem habitante dos Alpes”, que, com exceção dos cargueiros, balsas e canoas simples sobre o rio Reno, nunca tinha visto um navio! Embora o primeiro prêmio tenha sido atribuído ao então já famoso físico, astrônomo e geodeta Pierre Bouguer (1698-1758), o trabalho de Euler foi citado como um Accessit, uma espécie de segundo lugar, que, no entanto teve que compartilhar com Ch. E. L. Camus (1699-1768).

Euler continuou a consultar Johann Bernoulli e iniciou uma forte amizade com seus dois filhos, Daniel e Nikolaus.

Na Suíça de 1700 não havia muito trabalho para matemáticos em início de carreira. Quando se soube que a Academia de São Petersburgo (veja a Figura 4 a seguir) procurava novos colaboradores, matemáticos de toda a Europa viajaram até à Rússia, incluindo Daniel e Nicolaus II[10] Bernoulli, filhos de Johann Bernoulli e amigos de Euler, o qual também procurava uma colocação acadêmica.

Figura 4: Academia de Ciências de São Petersburgo.
(fonte: http://www.russobras.com.br/historia/historia_3.php)

> Na Rússia, Catherine tinha acabado o projeto que seu marido Pedro, o Grande, tinha começado, que era de erguer uma academia de ciências em sua capital. Os dois jovens Bernoulli foram chamados em 1725 e quando deixaram Basileia prometeram ao Sr. Euler o qual apaixonadamente desejava segui-los, que eles iriam encontrar uma situação para ele. (FUSS, 2005, p. 4, tradução nossa)

Por volta de 1726, Daniel e Nicolaus II conseguem que a czarina, Catarina I (viúva de Pedro o Grande) oferecesse um lugar na Academia a Euler para a seção de medicina e escrevem aconselhando-o a aplicar seus talentos matemáticos para o ensino de fisiologia. Euler aceitou, mas não imediatamente.

> Os irmãos Bernoulli foram fiéis a sua promessa, apesar da dificuldade de ter um rival de peso ao seu lado, quando a maioria dos homens teria preferido para manter-se livre de tais circunstâncias. (CONDORCET, 1783, p. 2, tradução nossa).

Euler resolve só viajar para a Rússia na primavera seguinte por dois motivos: procurava tempo para estudar os tópicos do seu novo trabalho e queria tentar conquistar um lugar vago na Universidade de Basiléia, como professor de Física. Para se candidatar a este lugar, Euler escreveu um artigo sobre acústica. Apesar da qualidade do artigo, não foi

[10] Nicolaus Bernoulli era o pai de Johann e Jacob Bernoulli.Johann colocou o nome do filho de Nicolaus também, por isso Nicolaus II.

escolhido para o cargo, talvez, por ainda ter 19 anos e só ter escrito mais dois artigos de três e cinco páginas respectivamente.

> Esta falha, em retrospecto, foi uma grande sorte, pois só desta forma Euler podia alcançar o que foi negado a seu professor por toda a vida: uma arena de trabalho compatível com a sua genialidade e sede de ação, que foi encontrada na cidade de Pedro, o Grande, na "Veneza do Norte ". (FELLMAN, 2007, p. 21, tradução nossa)

Como não foi selecionado para a cadeira de física da Universidade de Basileia, aceitou o primeiro convite e, em 1727, após estudos intensivos durante a longa viagem até a Rússia, chegou, aos vinte anos, em São Petersburgo.

Segundo D'Ambrosio (2009, p. 20), a morte de Catarina I teve sérias consequências para o processo de modernização iniciado por seu marido Pedro, o Grande, pois ascendeu ao poder um grupo de forte tendência anti-europeização, que via a academia como um luxo desnecessário. Surgiram, também, conflitos entre 17 membros estrangeiros da Academia, intensificando as rivalidades entre seguidores de Descartes, Newton e Leibniz. Em meio à essa situação conflituosa, Euler transferiu-se da seção de medicina para a seção de matemática na Academia.

Chegando lá, afiliou-se à Academia de Ciências, onde teve contato com grandes cientistas como Jakob Hermann, Daniel Bernoulli e Christian Goldbach.

> Com o apoio de Daniel, Euler recebeu uma oferta da Academia Russa para o cargo de médico associado, e, em seguida, deixou a sua pátria para participar deste novo trabalho na Academia de São Petesburgo em 1727. Em alguns meses, ele conseguiu ser transferido para a seção de matemática-física da Academia como membro permanente em 1727.
> (...)
> Em São Petersburgo, Euler estava cercado por um grupo de matemáticos famosos, incluindo Daniel Bernoulli, um matemático aplicado, e Jacob Hermann, um analista e geômetra. Eles fizeram uma contribuição impar para o florescimento do gênio matemático Euler. (DEBNATH, 2010, pp. 33 e 34, tradução nossa).

Sua estada na Academia Euler também enriqueceu os volumes do *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae* (CASP), que foi a primeira revista da série publicada pela Academia de São Petesburgo. Sua publicação constou de 14 volumes anuais, nos quais Euler publicou do número 2 ao 14. Um aspecto a salientar é a demora de publicação de cada revista, os anos que aparecem como números de volume estão atrasados em até 10 anos em relação ao ano real de publicação.

Em 1730, Euler tornou-se professor de Física da Academia, fato que o permitiu abandonar o posto de tenente da marinha Russa, que ele ocupava desde 1727. Três anos mais tarde, com o retorno de Daniel Bernoulli a Basileia, Euler assumiu a cátedra de matemática da Academia.

> Quando Jakob Hermann, em 1730 retornou para Basileia, Daniel Bernoulli assumiu a cátedra desta última para a matemática, e Euler em 1731 estava como professor de física. Ao mesmo tempo, ele avançou para um membro comum da Academia de São Petersburgo. (...) Dois anos depois, quando Daniel Bernoulli retornou para seu país natal, Euler assumiu, finalmente, uma vaga de professor de matemática e deixou a cadeira de física para o seu amigo e colega Krafft. (FELLMAN, 2007, pp. 37e 39, tradução nossa)

Em 1734, devido à nova posição e os proventos advindos dela, Euler se casa com Katharina Gsell, segundo Fellman (2007, p.39, tradução nossa):

> Leonhard escolheu Katharina Gsell, a filha do segundo casamento (divorciado) de um artista, Georg Gsell (1663-1740), originário de St. Gallen, a quem o czar Pedro I tinha chegado a conhecer na Holanda e a qual tinha contratado para sua academia de arte.

Euler teve treze filhos com Katharina Gsell, mas apenas cinco sobreviveram à infância. Ele atribui a essa fase algumas de suas maiores proezas científicas.

“Ao longo de quatro décadas de seu casamento feliz e produtivo, Euler teve 13 filhos. Infelizmente, como era comum na época, apenas cinco sobreviveram até à adolescência, e apenas três viveram mais que seus pais”.(DUNHAM,1999, p. XXII, tradução nossa)

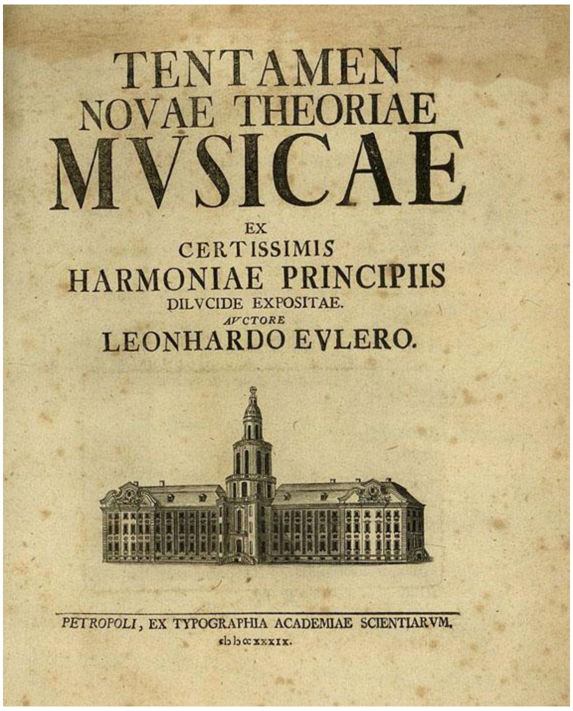
Em 1735 Euler resolve um dos problemas não solucionados da época, que era o chamado “problema de Basileia”, formulado por Pietro Mengoli (1625-1686) em 1644. A solução lhe rendeu fama mundial, pois até os famosos irmãos Jakob e Johann Bernoulli fizeram várias tentativas, sem sucesso, em resolver este problema clássico. O problema trata-se de somar a série infinita dos inversos dos quadrados. Euler desenvolveu um novo método analítico para lidar com o problema. Mas o seu método permite também somar todas as séries infinitas do mesmo tipo em que o expoente é um número par.

Ainda no ano de 1735 Euler ficou gravemente doente, quase perdendo a vida. Conforme D’Ambrosio (2009, p. 20), desde a infância Euler sofria de uma doença cutânea, uma forma de tuberculose que afeta os gânglios linfáticos do pescoço, tendo como consequência, a perda da visão do olho direito em 1738, que pode ser observado no retrato feito por Emanuel Handmann (Figura 5, a seguir):

Figura 5: Euler.

(fonte: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PictDisplay/Euler.html)

Apesar, das complicações de saúde, Euler escreveu mais de cinquenta trabalhos durante esse primeiro período em que viveu em São Petersburgo sobre assuntos que vão desde a Álgebra e Teoria dos Números até Astronomia e Teoria Musical, a qual era uma fonte de relaxamento para ele, e cuja capa vemos na Figura 6:



TENTAMEN
NOVAE THEORIAE
MVSICAE
EX
CERTISSIMIS
HARMONIAE PRINCIPIIS
DILVCIDE EXPOSITAE.
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO.

PETROPOLI, EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
cIↄIↄccxxxix.

Figura 6: Capa de Tentamen Musicae.

(fonte: http://www.kettererkunst.de/kunst/kd/details.php?obnr=410702270&anummer=309)

Conforme Debnath (1999, p. 40, tradução nossa):

> Embora ele tenha sido sempre ativo e o produtivo nas ciências matemáticas, a sua principal fonte de lazer era a música. Por isso estava ativamente envolvido com estudos avançados e a pesquisa sobre teoria da música e a publicação de seu tratado *An attempt at a new theory of music, clearly expounded on the most reliable principles of harmony* em 1739, e os vários manuscritos de música durante 1766-1768. Evidentemente, uma parte pequena de seu legado matemático e científico.

Em 1938, foi publicado “De solutione problematum diophanteorum per numeros íntegros” no sexto volume do *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, seu primeiro trabalho sobre Teoria dos Números, que analisaremos mais adiante. Este trabalho foi escrito em latim, pois nessa época era a língua utilizada por toda a intelectualidade, mas poderia ter sido escrito em russo, pois segundo Debnath (1999, p. 39, tradução nossa):

> Euler foi extremamente proficiente em muitas línguas, especialmente em latim, Francês, alemão e russo que ele utilizava eficientemente para escrever artigos científicos, livros e correspondência. Ele foi um grande conhecedor da história antiga da matemática e da ciência e tinha uma memória fenomenal de eventos históricos e pessoas. Surpreendentemente, ele tinha um conhecimento incomum de outras disciplinas, incluindo botânica, bioquímicatério e da medicina, apesar de ele não trabalhar esses assuntos.

Além dos trabalhos citados e dentre os mais de cinquenta publicados no período, podemos destacar em 1736 um tratado de mecânica, em dois volumes, *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*; em 1738-40, uma introdução a aritmética para escolas elementares afiliadas a Academia, dente outros; em 1738 completou seu tratado sobre navios, *Scientia navalis*, que públicada em dois volumes em 1749.

> Apesar dos graves retrocessos de sua saúde nos anos de 1735 e 1738, Euler, com zelo incompreensível, movido as frentes de vários disciplinas científicas ao mesmo tempo: durante o "primeiro período em Petersburgo" foram escritos mais de cinquenta memórias e livros. Estas obras podem ser divididas em quatorze áreas de pesquisa, que são listados aqui apenas por palavras-chave: Álgebra (teoria das equações), teoria dos números (números primos, análise diofantina); aritmética; geometria (topologia); geometria diferencial (trajetórias recíprocas, geodésicas); equações diferenciais; teoria da série (séries infinitas); cálculo das variações; mecânica (global representação, tautochrones, a teoria do impacto e elasticidade); teoria nautica; física (elasticidade do ar, a natureza do fogo); astronomia (astronomia posicional, as órbitas planetárias), teoria das marés, e teoria musical. (FELLMAN, 2007, p. 43, tradução nossa)

Depois de vencer o Grande Premio da Academia de Paris em 1738 e em 1740, Euler tornou-se um eminente matematico em toda a Europa e recebeu o convite de Frederico, o Grande, para fazer parte da Academia de Ciências da Prússia, sediada em Berlim. De início recusou o convite, mas como a vida na Rússia não estava fácil devido ao péssimo ambiente político causado pela luta pela sucessão com a morte de Catarina I, acabou aceitando.

> Certamente, a gravidade da situação interna na Rússia, foi uma razão de peso para Euler de deixar o país. Após a morte de Anna Ivanovna (final de 1740), a ascensão ao trono do infante Ivan VI e a revolta no palácio de 1741, que pretendia colocar Elisavetta Petrovna de 20 anos no trono russo, a situação natural da "russificação" da filha de Pedro, certamente não parecia cor-de-rosa para os "estrangeiros".
> Apesar de Euler, levar em conta os seus serviços para a Rússia, em geral, e da Academia, em particular, provavelmente não teve medo que acontecesse nada sério, pelo menos é o que E. Winter pensa. Porém, Euler ainda tinha outras razões para sua transferência. Além da geografia, que foi fatal para ele, como podemos constatar a partir de uma carta muito íntima de Euler para Müller de julho de 19/08, 1763, que escrita no contexto das negociações para volta a Petersburgo, que foi sua esposa Katharina, que o incentivou a aceitar o convite a Berlim, porque estava apreensiva com os incêndios que eclodiam frequentemente em São Petersburgo. (FELLMAN, 2007, p. 56, tradução nossa)

Euler retirou-se de São Petersburgo no dia 19 de Junho de 1741e chegou em 25 de Julho em Berlim, onde viveu 25 anos. Ele entrou para a Academia de Ciências de Berlim, que pode ser vista na Figura 7 a seguir. Por ser um matemático superior foi compensado generosamente, sendo capaz de comprar um boa casa, mas o que foi realmente surpreendente é que Academia de São Petersburgo ainda o manteve como membro e continuou a lhe pagar uma pensão. Em retribuição, Euler enviava quase metade das suas publicações a São Petersburgo. De acordo com Calinger (1996, p.159), em uma carta para Johann Caspar Wettstein, Euler escreveu:

"Posso fazer exatamente o que eu desejo [em minha pesquisa] O rei me chama de seu professor, e eu acho que sou o homem mais feliz do mundo ...."

Figura 7:Academia de Ciencias de Berlim.

(fonte: http://catalogue.museogalileo.it/gallery/BerlinAcademyScience.html)

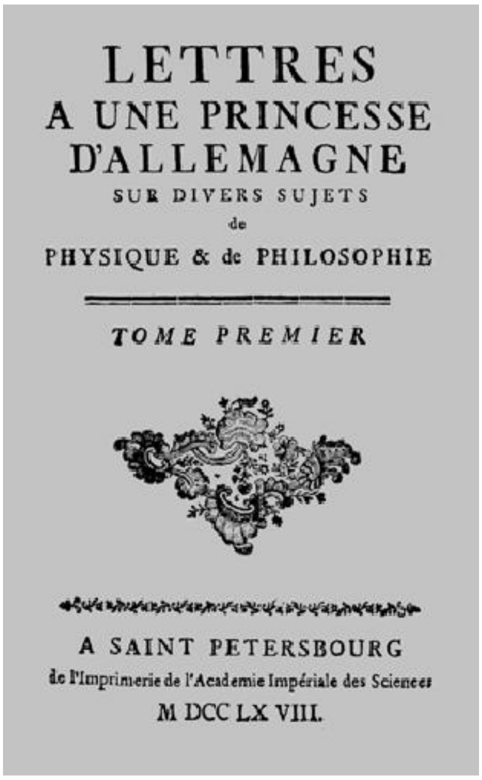
Em Berlim, Euler atingiu o auge de sua carreira, pois mais de 100 memórias foram enviadas para Academia de São Petersburgo, e cerca de 125 memórias foram publicadas na Academia de Berlim sobre vários temas de matemática e física, dentre estes os dois trabalhos que o iriam tornar mais reconhecido: *Introductio in analysin infinitorum*, publicado em 1748 e *Institutiones calculi differentialis.*

> Durante este tempo, ele publicou duas de suas maiores obras, um texto de 1748 sobre as funções, *Introductio in analysin infinitorum*, e um volume de 1755 de cálculo diferencial, *Institutiones calculi differentialis*. Neste período também estudou números complexos e descobriu a "identidade de Euler", bem como ofereceu uma demonstração do teorema fundamental da álgebra. (DUNHAM, 1999, p. xxiv, tradução nossa)

A contribuição de Euler para a Academia de Berlim foi impressionante. Além de todas as publicações já citadas, supervisionava o observatório e o jardim botânico, selecionava pessoal e geria várias questões financeiras, coordenava a publicação de mapas geográficos e de trabalhos científicos, uma fonte de rendimentos para a Academia.

> Embora Euler estava encarregado múltiplas funções na Academia, ele tinha de supervisionar observatório da Academia e jardins botânicos, lidar com o pessoal matéria, atenta para os assuntos financeiros, como a venda de almanaques, o que constituía a principal fonte de renda para a academia, para não falar de uma variedade de inovações tecnológicas e projetos de engenharia. (GAUTSCHI, 2008, p. 7, tradução nossa)

Euler também é convidado para ser tutor da Princesa Anhalt-Dessau, sobrinha de Frederico II, o Grande. Euler escreveu mais de 200 cartas dirigidas à princesa, que mais tarde foram compiladas num volume intitulado *Letters of Euler on Different Subjects in Natural Philosophy Addressed to a Germnn Princess*, cuja capa podemos ver na Figura 8 e o qual incorpora exposições sobre vários assuntos pertencentes à Física e Matemática, dando também a conhecer as perspectivas religiosas e a própria personalidade do seu autor.


LETTRES
A UNE PRINCESSE
D'ALLEMAGNE
SUR DIVERS SUJETS
de
PHYSIQUE & de PHILOSOPHIE

TOME PREMIER

A SAINT PETERSBOURG
de l'Imprimerie de l'Academie Impériale des Sciences
M DCC LX VIII.

Figura 8: Letters of Euler on Different Subjects in Natural Philosophy Addressed to a Germnn Princess.
(fonte: http://books.google.com)

Apesar dessa grande contribuição que resultou no prestigio da Academia, Euler foi forçado a abandonar Berlim, devido a um conflito de interesses com Frederico II, que chegou a chamá-lo de pouco sofisticado em comparação ao círculo de filósofos trazidos pelo rei alemão para a Academia, entre os quais estava Voltaire.

Euler, um simples homem religioso e um grande trabalhador, era muito convencional nos seus gostos e crenças, sendo de várias maneiras o oposto direto de Voltaire. Tendo tido um treino limitado na arte da retórica, tendia a debater matérias de que pouco sabia, sendo alvo frequente da sagacidade de Voltaire.

A animosidade com Frederico II continuava, que chegou a lhe chamar de "ciclope" devido ao seu defeito físico (Euler sofria de uma febre que o fez perder a visão em 1738). Este conflito é descrito detalhadamente por Varadarajan (2006, p. 12, tradução nossa):

> No entanto, ao longo dos anos as relações entre ele e o Rei Frederico lentamente deteriorou-se. (...). Ele admirava literatura francesa e figuras da ciência (como Voltaire e d'Alembert), mas sem qualquer entendimento profundo dos seus méritos e seu trabalho. Ele certamente não compreendia totalmente o monumental porte de Euler.
> Quando Euler chegou a Berlim, o rei tinha nomeado Maupertius como o presidente da Academia. (...). Maupertius morreu em 1759, e Euler passou a funcionar como o presidente, mas o rei nunca atribuiu à Euler o título de presidente da Academia. Quando por volta de 1763, Frederico nomeou d'Alembert como o presidente da

> Academia de Berlim (embora d'Alembert tenha rejeitado a oferta do rei), Euler começou a pensar em deixar Berlim.

Em 1759, com a morte de Maupertius (1698-1759), Frederico II oferece um cargo ao matemático d'Alembert, com quem Euler tinha tido algumas divergências sobre questões cientificas. Apesar de d'Alembert não ter aceitado o cargo, Frederico II continuou a amolar Euler, que incomodado com tal situação, escreveu a Academia de São Petersburgo com o anseio de regressar e aceitou o convite feito por Catarina, a Grande, de voltar para a Academia de S. Petersburgo.

> Finalmente, ele escreveu ao secretário da Academia de São Petersburgo sobre seu desejo de voltar. Enquanto isso, Catherine II (a Grande) tornou-se a czarina na Rússia, e uma de suas prioridades era a restauração da Academia de São Petersburgo à sua antiga posição de glória e importância. Isso significava trazer Euler a Academia, então ordenou que seu embaixador na Prússia fizesse uma oferta sob qualquer termo que Euler indicasse. No início, o rei recusou os pedidos de Euler para sair, mas ele não podia prevalecer contra a pressão da czarina. Então ele finalmente cedeu e permitiu que Euler saísse com sua família e vários assistentes, expressando sua frustração e irritação em piadas grosseiras aos seus companheiros. Euler voltou à Rússia em 1766 pela Polônia, onde foi tratado com grande respeito e carinho pelo rei polonês Stanislas, um ex-amante de Catarina II, graças certamente a seu pedido. Retornou a São Petersburgo praticamente como um herói conquistador, universalmente admirado e respeitado. (VARADARAJAN, 2006, p. 12, tradução nossa)

Assim, apesar de trazer muito prestígio a Academia de Berlim, em 28 de Julho de 1766, com cinquenta e nove anos de idade, Euler retornou a Academia de São Petersburgo, na Rússia, onde permaneceu até sua morte.

> Em 28 julho de 1766, a família Euler chegou em São Petersburgo. Ele tinha cinquenta e nove anos de idade. Catherine II recebeu-o de forma real, superando os termos do seu contrato. Ela mandou 10.800 rublos para a compra de uma grande casa de dois andares, com mobiliário completo, nas margens do Grande Neva perto da academia. A imperatriz também forneceu um de seus cozinheiros para trabalhar na sua cozinha. O retorno de Euler foi triunfal. (...) Ela sabia que existia algum apoio à elevá-lo à nobreza, mas ela declarou que sua fama era maior do que qualquer título de nobreza. Em 1765 a Rússia sofreu uma grande perda no campo das ciências, quando Mikhail Lomonosov morreu. Euler e Albrecht começaram à reabilitar com sucesso a academia. (...) Como membro mais velho e mais distinto, ele foi o lider de todas as conferências realizadas e foi o maior responsável pela seleção de novos membros.(CALINGER, 2007, p. 50, tradução nossa)

Ainda no ano de sua volta descobriu que, devido a catarata, começou a perder a visão do olho esquerdo. Pensando no futuro, tentou preparar-se para a cegueira treinando escrever com giz numa ardósia ou ditando para algum dos seus filhos. Segundo Fellman (2007, p. 116, tradução nossa):

> “Já durante os últimos anos em Berlim uma catarata se tornou evidente em seu olho esquerdo, e em São Petersburgo a doença rapidamente tornou-se mais grave.”

Além disso, em 1771, perdeu todos os seus bens, à exceção de manuscritos de Matemática, num incêndio na sua casa. Conforme Calinger (2007, p. 51, tradução nossa):

> Em maio 1771 aconteceu um grande incêndio em São Petersburgo, destruindo cerca de 550 casas, incluindo o de Euler. Na confusão geral, Euler quase cego, estava de pijama, poderia ter morrido se não fosse o seu copeiro Peter Grimm ,que adentrou rapidamente a casa para resgatá-lo. A biblioteca e móveis foram destruídos, mas o Conde Vladimir Orlov salvou os manuscritos. Catherine compensou Euler com 6.000 rublos para construir uma casa nova, que foi rapidamente construida.

Em setembro 1771, Euler é operado devido à catarata, e recupera a visão durante um breve período de tempo. Mas, ao que parece, Euler não tomou os devidos cuidados médicos e ficou completamente cego. Segundo Calinger (2007, p. 51, tradução nossa):

> Em setembro de 1771 ele fez uma operação para correção de catarata produzindo uma quase cegueira. Johann Albrecht e nove médicos se reuniram em torno dele para observar a breve operação. A restauração da visão à seu olho esquerdo trouxe um momento de regozijo. Mas em outubro uma complicação, possivelmente uma infecção, deixou-o totalmente cego. Tentado amenizar sofrimento pela perda da visão Euler a descreveu como "uma distração a menos". Ele ainda pôde realizar difíceis cálculos de cabeça, como uma soma de séries infinitas com cinquenta casas decimais.
>
> Em 1773, Euler pediu Daniel Bernoulli para lhe recomendar um assistente de Basileia. E em julho Bernoulli enviou Nicholas Fuss para ser seu secretário pessoal. Fuss tornou-se ainda mais próximo de Euler casando com sua neta Albertina, a segunda filha de Albrecht, em 1784. Além disso, Fuss escreveu uma biografia sobre Euler: “Eulogy of Leonhard Euler”.

Euler continuou trabalhando, mesmo despois da cegueira, conforme descreve Hoffmann (2007 , p. 69, tradução nossa):

> Embora Euler tenha ficado completamente cego em 1771, continuou trabalhando. Ele escreveu e publicou vários artigos. Devido a sua ampla memória e seu notável poder de imaginação, Euler foi capaz de ditar até mesmo complicadas investigações matemáticas aos seus colegas mais novos. Encontrou mentes capazes e esses jovens se tornaram eminentes matemáticos sob a sua supervisão. O mais famoso é Nikolaus Fuss (1755-1829), que Nasceu na Basileia e se casou com Albertine Euler (1766-1829), filha do filho mais velho, Johann Albrecht Euler, em 1784.

Em 1773 perdeu a mulher com quem foi casado por 40 anos. Muito triste, e decidido a não depender dos filhos, resolveu se casar novamente.

> Em novembro 1773 a esposa de Euler, Katharina, morreu aos sessenta e sete anos. Euler estava determinado a manter-se independente e não depender de seus filhos, apesar do costume na época para um pai idoso de residir com os filhos e estar sob seus cuidados.(CALINGER, 2007, p. 52, tradução nossa)

Três anos depois da morte de Katharina, Euler casou com sua cunhada, Abigail Gsell, de cinquenta e três anos, em São Petersburgo.

O segundo período de Euler em São Petersburgo durou 17 anos, até a sua morte. Foi um momento de rica produção para ele. Ele publicou vários trabalhos durante estes anos , entre eles os três volumes do *Dioptrica* (1769-1771), provavelmente preparado em Berlim, *Institutionum calculi integralis* (1768-1770), também em três volumes, o livro *Theoria motuum lunae* (1772) que foi publicado por seu filho, Johann Albrecht Euler (1734-1800), Wolfgang Krafft (1743-1814) e Johann Andreas Lexell (1740-1784) sob a sua direção. Ela continha as tabelas lunares: *Novae tabulae Lunares* como um apêndice.

Passou os anos finais de sua vida na Rússia, sob a proteção de Catarina a Grande. Morreu em 18 de setembro de 1783, em São Petersburgo, vítima de um acidente vascular cerebral e foi enterrado no Mosteiro Alexander Nevsky.

Euler foi um grande pesquisador da Matemática, se dedicando as suas várias áreas, entre elas destacamos a Teoria dos Números, que estudaremos no capítulo seguinte representada pelo seu trabalho “De solutione problematum diophanteorum per números íntegros”.

CAPÍTULO 4 - UMA ANÁLISE DO PRIMEIRO TRABALHO DE EULER SOBRE EQUAÇÃO DIOFANTINAS

Neste capítulo, descrevemos o trabalho de Euler de “De solutione problematum diophanteorum per números íntegros” parágrafo a parágrafo e explicamos o método de Euler fazendo todos os cálculos e manipulações algébricas que não aparecem no texto, são apenas indicados por Euler, além de alguns comentários analíticos, utilizando a tradução de Dantas e Fossa.

O trabalho de Euler “De solutione problematum Diophanteorum per numero íntegros”, que traduzimos como: “Sobre a solução de problemas diofantinos por números inteiros”, é o segundo dele sobre Teoria dos Números. Sua primeira publicação foi no volume 6 do *Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* de 1738 e neste mesmo volume constam ainda mais sete trabalhos de Euler.

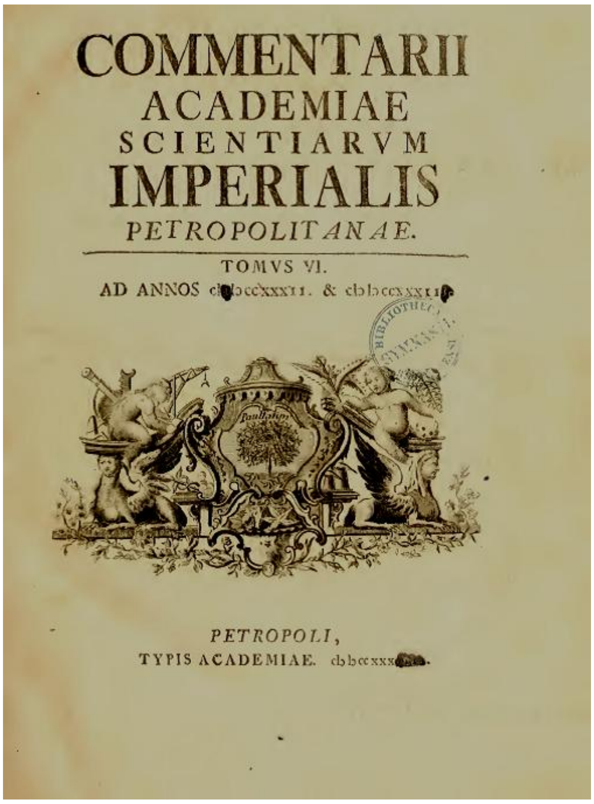


Figura 9: Capa da Revista Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae(CASP)
(fonte: Euler 1738)

175

DE
SOLVTIONE PROBLEMATVM
DIOPHANTAEORVM PER NVMEROS
INTEGROS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.

Figura 10: Titulo do trabalho E29 de Euler da CASP

(fonte: Euler 1738)

Este artigo, E29[11], é o primeiro no qual Euler atribuiu erroneamente a Equação de Pell a John Pell (1611-1685), que viveu aproximadamente cem anos antes dele, e este erro de nomenclatura persiste até hoje. Frequentemente, as pessoas dizem que Euler cometeu um erro atribuindo a equação a Pell, mas o registro de Pell pelo MacTutor[O'C] apud Sandifer (2007, p.63) informa:

> A equação de Pell $y^2 = ax^2 + 1$, onde a é um inteiro não quadrado, foi primeiramente estudada por Brahmagupta e Bhaskara II. A teoria completa deles foi extraída por Lagrange, não Pell. Frequentemente é dito que Euler, por engano, atribuiu o trabalho de Brouncker sobre esta equação a Pell. De qualquer forma a equação aparece no livro de Rshn, o qual certamente foi escrito com a ajuda de Pell: alguns dizem que inteiramente escrito por Pell. Quem sabe, Euler não sabia exatamente o que estava fazendo quando nomeou a equação.

No artigo, Euler mostra como uma equação diofantina quadrada pode ser reduzida a uma equação de Pell, isto é, se nós pudermos encontrar uma solução para a equação diofantina $y^2 = an^2 + bn + c$ e pudermos encontrar soluções para a equação de Pell $q^2 = ap^2 + 1$, então nós podemos usar as soluções da equação de Pell para construir mais soluções para a equação diofantina original.

Euler inicia o trabalho afirmando que quando se resolve problemas diofantinos, frequentemente encontra-se uma fórmula, na qual não há mais de uma incógnita envolvida, e procuram-se especialmente números inteiros para substituir a incógnita e satisfazer a fórmula, mas quando não for possível utilizar inteiros, é necessário resolver com números fracionários. Continua dizendo que para todo problema desse tipo, o método consiste em encontrar um número que satisfaça à equação, e a partir desse número as outras infinitas soluções podem

11 Conforme D'Ambrosio (2009, p. 16), os trabalhos de Euler foram indexados pelo historiador da matemática sueco Gustav Eneström (1856- 1929), produzindo a referência básica de suas publicações, que é conhecida como Índice de Eneström. Por isso, as publicações são identificadas com a letra E seguida de um número.

ser encontradas, mas nenhuma regra é dada para revelar a primeira solução, pois há casos em que a fórmula não admite solução alguma. Mostra o seguinte exemplo: $3x^2 + 2$, que nunca pode ser igual a um quadrado. Euler não demonstra esse exemplo particular, mas podemos comprová-lo a seguir:

Podemos representar o inteiro x por $3k, 3k + 1$ ou $3k + 2$ .Fazendo a substituição em $3x^2$ temos que nas três situações o resto é 0, então $3x^2 + 2$ deixa resto 2¸ mas como um numero quadrado nunca pode ter resto 2 por 3, $3x^2 + 2$ nunca pode ser igual a um quadrado.

Em seguida, para encontrar a regra geral, Euler toma a fórmula $ax^2 + bx + c$, a qual deve ser igual a um quadrado, onde a, b, c sejam números inteiros e requer-se também que os números substituídos no lugar de x também sejam inteiros. Então, ele toma um número n que quando substituído no lugar de x na fórmula, a torna um quadrado, cuja raiz é m. Completa a sequencia, como a seguir:

> Agora, para encontrar outro número que satisfaz a fórmula, a partir desse n dado, tomo $\propto n + \beta + \gamma\sqrt{an^2 + bn + c}$, pois esse valor, substituído no lugar de x torna $ax^2 + bx + c$ um quadrado, cuja raiz é $\delta n + \varepsilon + \zeta\sqrt{an^2 + bn + c}$. De fato, é claro, que este número substituído no lugar de x será igual ao quadrado racional porque $an^2 + bn + c$ é um quadrado, e por esse método, sob a condição de que n seja um inteiro, outros números inteiros serão encontrados, como logo será evidente. (EULER, 1738, p.176).

Assim, no quarto parágrafo do seu artigo toma $\propto n + \beta + \gamma\sqrt{an^2 + bn + c}$ o qual substituído no lugar de x de $ax^2 + bx + c$, o torna um quadrado de raiz $\delta n + \varepsilon + \zeta\sqrt{an^2 + bn + c}$.

Então temos:

$$a\left[(\alpha n + \beta) + \gamma\sqrt{an^2 + bn + c}\right]^2 + b\left[\propto n + \beta + \gamma\sqrt{an^2 + bn + c}\right] + c = \left[(\delta n + \varepsilon) + \zeta\sqrt{an^2 + bn + c}\right]^2$$

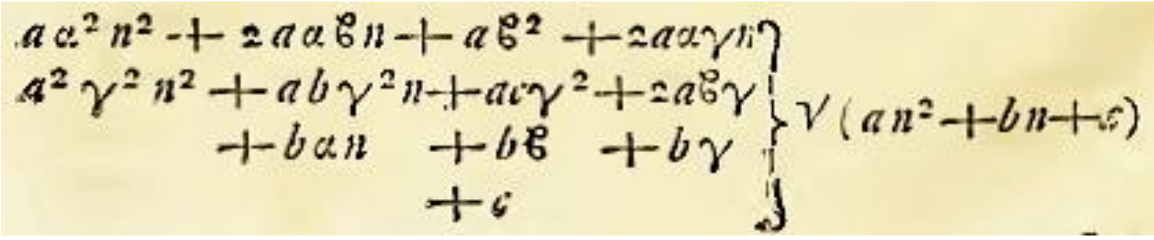
i) Trabalhando com o primeiro membro:

$$a\left[(\alpha n + \beta)^2 + 2(\alpha n + \beta)\left(\gamma\sqrt{an^2 + bn + c}\right) + \gamma^2(an^2 + bn + c)\right] + b\alpha n + b\beta + b\gamma\sqrt{an^2 + bn + c} + c$$

$$a\left[(\alpha^2 n^2 + 2\alpha n\beta + \beta^2) + 2\alpha n\gamma\sqrt{an^2 + bn + c} + \beta\gamma\sqrt{an^2 + bn + c} + \gamma 2 an2 + bn + c + b\alpha n + b\beta + b\gamma an2 + bn + c + c\right.$$

$a\alpha^2 n^2 + 2a\alpha n\beta + a\beta^2 + 2a\alpha n\gamma\sqrt{an^2 + bn + c} + a\beta\gamma\sqrt{an^2 + bn + c} + a^2\gamma^2 n^2 +$ $ab\gamma^2 n + ac\gamma^2 + b\alpha n + b\beta + b\gamma\sqrt{an^2 + bn + c} + c$

Neste trabalho, Euler organiza o primeiro membro conforme a Figura 11:



$$\left.\begin{array}{l} a\alpha^2 n^2 + 2a\alpha\beta n + a\beta^2 + 2a\alpha\gamma n \\ a^2\gamma^2 n^2 + ab\gamma^2 n + ac\gamma^2 + 2a\beta\gamma \\ \quad + b\alpha n \quad + b\beta \quad + b\gamma \\ \qquad\quad + c \end{array}\right\} \surd(an^2 + bn + c)$$

Figura 11:Página 176, paragrafo 4 do E29 de Euler da CASP.

(fonte: Euler 1738)

Ele ordena de forma que os ultimos termos contidos na chave, $2a\alpha n\gamma$, $a\beta\gamma$ e $b\gamma$ são os termos que estão multiplicados por $\sqrt{an^2 + bn + c}$, por isso o termo $+c$, na ultima linha está deslocado.

ii) Trabalhando com o segundo membro:

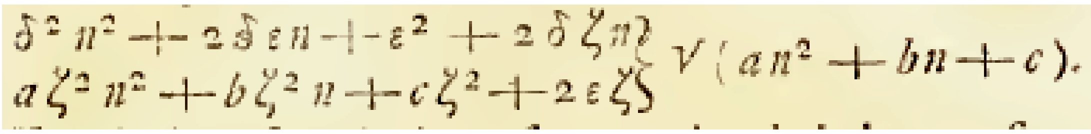
$\left[(\delta n + \varepsilon) + \zeta\sqrt{an^2 + bn + c}\right]^2$

$(\delta n + \varepsilon)^2 + 2(\delta n + \varepsilon)\left(\zeta\sqrt{an^2 + bn + c}\right) + \zeta^2(an^2 + bn + c)$

$(\delta^2 n^2 + 2\delta\varepsilon n + \varepsilon^2) + 2\delta n\,\zeta\sqrt{an^2 + bn + c} + 2\varepsilon\zeta\sqrt{an^2 + bn + c} + \zeta^2(an^2 + bn +$ c

$\delta^2 n^2 + 2\delta\varepsilon n + \varepsilon^2 + 2\delta n\,\zeta\sqrt{an^2 + bn + c} + 2\varepsilon\zeta\sqrt{an^2 + bn + c} + a\zeta^2 n^2 + b\zeta^2 n +$ $c\zeta^2$

Neste trabalho, Euler organiza o segundo a Figura 12:



$$\left.\begin{array}{l} \delta^2 n^2 + 2\delta\varepsilon n + \varepsilon^2 + 2\delta\zeta n \\ a\zeta^2 n^2 + b\zeta^2 n + c\zeta^2 + 2\varepsilon\zeta \end{array}\right\} \surd(an^2 + bn + c).$$

Figura 12:Página 177, paragrafo 4 do E29 de Euler CASP.

(fonte: Euler 1738)

Ele ordena de forma semelhante ao primeiro membro, no qual os ultimos termos contidos na chave, $2\delta n\,\zeta$ e $2\varepsilon\zeta$ são os termos que estão multiplicados por $\sqrt{an^2+bn+c}$.

Em seu trabalho, Euler mostra apenas a expressão que corresponde ao primeiro membro, que vimos anteriormente, e esta que corresponde ao segundo membro usando a notação particular, que vimos nas figuras acima, sem nenhum dos cálculos que mostramos.

iii) Comparando o primeiro e o segundo membro, temos:

Primeiro Membro

$n^2(a\alpha^2+a^2\gamma^2)+n(2a\alpha\beta+ab\gamma^2+b\alpha)+(a\beta^2+ac\gamma^2+b\beta+c)+$
$\sqrt{an^2+bn+c}(2a\alpha\gamma n+2a\beta\gamma+b\gamma)$

Segundo Membro

$$n^2(\delta^2+a\zeta^2) \quad +n(2\delta\varepsilon+b\zeta^2) \qquad +(\varepsilon^2+c\zeta^2)$$
$$+\sqrt{an^2+bn+c}(2\delta\zeta n+2\varepsilon\zeta)$$

Comparando os termos que estão multiplicados por n^2 no primeiro e segundo membros, encontramos:

A) $a\alpha^2+a^2\gamma^2=\delta^2+a\zeta^2$

Comparando os termos que estão multiplicados por n no primeiro e segundo membros, encontramos:

B) $2a\alpha\beta+ab\gamma^2+b\alpha=2\delta\varepsilon+\ b\zeta^2$

Comparando os termos independentes do primeiro e segundo membros, encontramos:

C) $a\beta^2+ac\gamma^2+b\beta+c=\varepsilon^2+c\zeta^2$

Comparando os termos que estão multiplicados por $\sqrt{an^2+bn+c}$ no primeiro e segundo membros, encontramos:

$2a\alpha\gamma n+2a\beta\gamma+b\gamma=2\delta\zeta n+2\varepsilon\zeta$

Comparando a expressão acima, encontramos:

D) $2a\alpha\gamma=2\delta\zeta$

E) $2a\beta\gamma+b\gamma=$
$2\varepsilon\zeta$

iv) Da expressão **D)**, temos:

$2a\alpha\gamma=2\delta\zeta$

$\delta=\frac{2a\alpha\gamma}{2\zeta}\therefore\ \delta=\frac{\boldsymbol{a\alpha\gamma}}{\boldsymbol{\zeta}}$

No original a expressão que consta é $\boldsymbol{\delta} = \frac{\alpha\alpha+\gamma}{\zeta}$, conforme a Figura 13 abaixo, um provável erro de composição do redator da revista, já que o resultado não é mantido nos cálculos subsequentes.

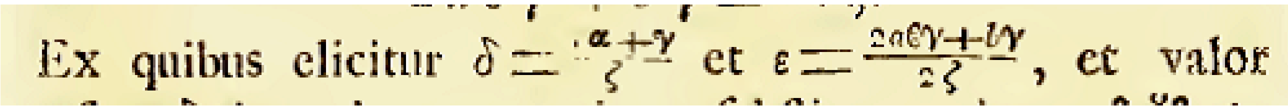

Ex quibus elicitur $\delta = \frac{\alpha+\gamma}{\zeta}$ et $\varepsilon = \frac{2a\beta\gamma+b\gamma}{2\zeta}$, et valor

Figura 13:Página 177, paragrafo 4 do E29 de Euler da CASP.

(fonte: Euler 1738)

v) Da expressão **E)**, temos:

$2a\beta\gamma + b\gamma = 2\varepsilon\zeta$

$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{a\beta\gamma}+\boldsymbol{b\gamma}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\zeta}}$

vi) Com o valor de δ, da expressão **A)**, temos:

$a\alpha^2 + a^2\gamma^2 = \delta^2 + a\zeta^2$

$a\alpha^2 + a^2\gamma^2 = \left(\frac{a\alpha\gamma}{\zeta}\right)^2 + a\zeta^2$

$\boldsymbol{\alpha^2\zeta^2 + a\gamma^2\zeta^2 = a\alpha^2\gamma^2 + \zeta^4}$

$\zeta^4 + \zeta^2(-\alpha^2 - a\gamma^2) + (a\alpha^2\gamma^2)$

Fazendo $x = \zeta^2$, temos:

$x^2 + x(-\alpha^2 - a\gamma^2) + (a\alpha^2\gamma^2) = 0$

$\Delta = (\alpha^2 - a\gamma^2)^2$

$x' = \alpha^2$ e $x'' = a\gamma^2$

Como $x = \zeta^2$,temos:

$\zeta = \alpha$ e $\zeta = \gamma\sqrt{a}$, mas o segundo valor de ζ só convém se a for um quadrado, portando temos: $\zeta = \alpha$

Conforme podemos observar na Figura 14 a seguir, Euler não mostra nenhum dos cálculos que fizemos só mostra a expressão $\alpha^2\zeta^2 + a\gamma^2\zeta^2 = a\alpha^2\gamma^2 + \zeta^4$ e os resultados encontrados a partir dela, $\zeta = \alpha$ e $\zeta^2 = a\gamma^2$.

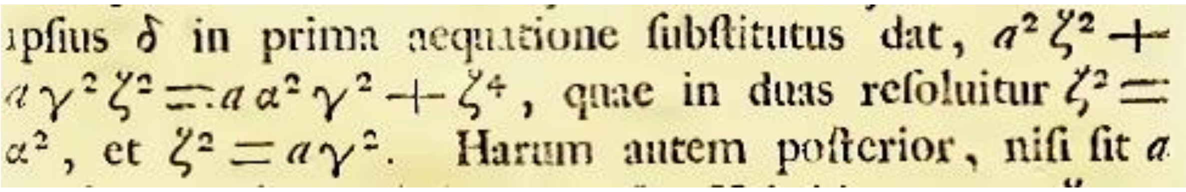

ipſius δ in prima aequatione ſubſtitutus dat, $\alpha^2\zeta^2 + a\gamma^2\zeta^2 = a\alpha^2\gamma^2 + \zeta^4$, quae in duas reſoluitur $\zeta^2 = \alpha^2$, et $\zeta^2 = a\gamma^2$. Harum autem poſterior, niſi ſit a

Figura 14: Página 177, paragrafo 4 do E29 de Euler da CASP.

(fonte: Euler 1738)

vii) Com os valores de δ, ε e ζ, da expressão **B)**, temos:

$$2a\alpha\beta + ab\gamma^2 + b\alpha = 2\delta\varepsilon + b\zeta^2$$

$$2a\alpha\beta + ab\gamma^2 + b\alpha = 2\left(\frac{a\alpha\gamma}{\zeta}\right)\left(\frac{2a\beta\gamma+b\gamma}{2\zeta}\right) + b\zeta^2$$

$$2a\alpha\beta + ab\gamma^2 + b\alpha = \frac{2a^2\alpha\beta\gamma^2+ab\alpha\gamma^2}{\alpha^2} + b\alpha^2$$

$$2a\alpha\beta + ab\gamma^2 + b\alpha = \frac{2a^2\beta\gamma^2+ab\gamma^2}{\alpha} + b\alpha^2$$

$$2a\alpha^2\beta + ab\alpha\gamma^2 + b\alpha^2 = 2a^2\beta\gamma^2 + ab\gamma^2 + b\alpha^3$$

$$2a^2\beta\gamma^2 - 2a\alpha^2\beta + ab\gamma^2 - ab\alpha\gamma^2 + b\alpha^3 - b\alpha^2 = 0$$

$$2a\beta(a\gamma^2 - \alpha^2) + a\gamma^2(b - b\alpha) - \alpha^2(b - b\alpha) = 0$$

$$2a\beta(a\gamma^2 - \alpha^2) + (a\gamma^2 - \alpha^2)(b - b\alpha) = 0$$

$$(a\gamma^2 - \alpha^2)(b - b\alpha + 2a\beta) = 0$$

Então,

$$a\gamma^2 - \alpha^2 = 0 \qquad\qquad \Rightarrow b - b\alpha + 2a\beta = 0$$

$$\Rightarrow a\gamma^2 = \alpha^2 \qquad\qquad 2a\beta = b\alpha - b$$

$$\beta = \frac{b\alpha-b}{2a}$$

viii) Com os valores de β, ε e ζ, da expressão **C)**, temos:

$$a\beta^2 + ac\gamma^2 + b\beta + c = \varepsilon^2 + c\zeta^2$$

$$a\left(\frac{b\alpha - b}{2a}\right)^2 + ac\gamma^2 + b\left(\frac{b\alpha - b}{2a}\right) + c = \left(\frac{b\gamma}{2}\right)^2 + c\alpha^2$$

$$\frac{b^2\alpha^2 - 2b^2\alpha + b^2}{4a} + ac\gamma^2 + \frac{b^2\alpha - b^2}{2a} + c = \frac{b^2\gamma^2}{4} + c\alpha^2$$

$$b^2\alpha^2 - 2b^2\alpha + b^2 + 4a^2c\gamma^2 + 2b^2\alpha - 2b^2 + 4ac$$
$$= ab^2\gamma^2 + 4ac\alpha^2$$

$$b^2\alpha^2 - b^2 + 4a^2c\gamma^2 + 4ac = ab^2\gamma^2 + 4ac\alpha^2$$

$$b^2\alpha^2 - 4ac\alpha^2 = ab^2\gamma^2 + b^2 - 4a^2c\gamma^2 - 4ac$$

$$\alpha^2(b^2 - 4ac) = b^2(a\gamma^2 + 1) - 4ac(a\gamma^2 + 1)$$

$$\alpha^2(b^2 - 4ac) = (b^2 - 4ac)(a\gamma^2 + 1)$$

$$\alpha^2 = a\gamma^2 + 1$$

$$\alpha = \sqrt{a\gamma^2 + 1}$$

Obs.:

$\varepsilon = \dfrac{2a\beta\gamma + b\gamma}{2\zeta}$
Mas $\beta = \frac{b\alpha-b}{2a}$
e $\zeta = \alpha$. Então, $\varepsilon = \frac{b\gamma}{2}$

Em seu artigo Euler só nos fornece os resultados que assinalamos no retângulo do item viii, sem nenhum dos cálculos mostrados. Partindo do último resultado assinalado

$$\alpha = \sqrt{a\gamma^2 + 1}$$

, antes de proceder ao quinto parágrafo, ele diz que devemos achar um valor para γ que torne $a\gamma^2 + 1$ um quadrado para que α seja inteiro.

Seja p o número que, substituído no lugar de γ, faz $a\gamma^2 + 1$ um quadrado e q sua raiz.

Como $\alpha = \sqrt{a\gamma^2 + 1}$, temos então:

$q = \sqrt{ap^2 + 1}$

$\alpha = q$

$\gamma = p$

$\beta = \dfrac{b(q-1)}{2a}$

$\delta = \dfrac{a\alpha\gamma}{\zeta} = \dfrac{a\alpha\gamma}{\alpha} = a\gamma = ap$

$\varepsilon = \dfrac{2a\beta\gamma + b\gamma}{2\zeta} = \dfrac{b\gamma}{2}$

$\zeta = \alpha = q$

Então Euler enuncia o seguinte **Teorema**:

"Se $ax^2 + bx + c$ é um quadrado para $x = n$, então também será um quadrado para $x = qn\frac{bq-b}{2a} + p\sqrt{an^2 + bn + c}$ e sua raiz será $apn + \frac{bp}{2} + q\sqrt{an^2 + bn + c}$." (EULER, 1738, p. 177).

Assim, se bp for divisível por 2, a raiz quadrada será um número inteiro e se $bq - b$ for divisível por $2a$, x será um número inteiro.

Euler prossegue ao sexto parágrafo, onde faz a aplicação do teorema encontrado. Ele associa os valores de x substituídos na equação, que é igualada à raiz de certo quadrado, aos valores dados a raiz deste quadrado. Para efeito de notação, se tomarmos os valores substituídos no lugar de x como x_i·, e os valores associados ao quadrado como k_i, poderemos observar como Euler chega aos valores descritos no sexto parágrafo, cujo primeiro valor associado a x é n, portanto $x_1 = n$, o primeiro valor associado a raiz do quadrado é m, portanto $\sqrt{k_1} = m$.

A partir dos valores de x_1 e de $\sqrt{k_1}$ aplicados ao teorema podemos encontrar os valores de x_2 e de $\sqrt{k_2}$, e assim sucessivamente, conforme está descrito no seguinte trecho do sexto parágrafo:

> Desta maneira, portanto, do valor *n* dado para *x*, esse outro é achado: $qn + \frac{bq-b}{2a} + pm$, onde *m* é colocado no lugar de $\sqrt{(an2 + bn + c)}$. Da mesma forma, quando essa quantidade é tratada como *n*, isto é, quando $apn + \frac{bp}{2} + qm$ é tomado no lugar de *m*, encontra-se mais um valor que, substituído no lugar de *x*, satisfaz ao quesito, a saber, $2ap2n + bp2 + 2pqm + n$, e a raiz desse novo quadrado será $2apq + bpq + 2ap2m + m$. (EULER, 1738, p.178)

Assim, aplicando os valores de $x_1 = n$ e de $\sqrt{k_1} = m$, onde segundo o teorema $x = qn\frac{bq-b}{2a} + p\sqrt{an^2 + bn + c}$ significa que $x_2 = qx_1 + \frac{bq-b}{2a} + p\sqrt{k_1}$ e portanto $x_2 = qn + \frac{bq-b}{2a} + pm$. Sua raiz será $apn + \frac{bp}{2} + q\sqrt{an^2 + bn + c}$, isto é, $\sqrt{k_2} = apx_1 + \frac{bp}{2} + q\sqrt{k_1}$, portanto $\sqrt{k_2} = apn + \frac{bp}{2} + qm$.

Prosseguindo com as substituições, temos:

$$x_3 = qx_2 + \frac{bq-b}{2a} + p\sqrt{k_2}$$

$$x_3 = q(qn + \frac{bq-b}{2a} + pm) + \frac{bq-b}{2a} + p(apn + \frac{bp}{2} + qm)$$

$$x_3 = q^2n + 2pqm + \frac{bq^2}{2a} - \frac{bq}{2a} + ap^2n + pqm + \frac{bp^2}{2} + \frac{bq}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$x_3 = q^2n + 2pqm + ap^2n + \frac{bq^2}{2a} + \frac{bp^2}{2} - \frac{b}{2a}$$

Observe que o resultado final do parágrafo quatro é $q^2 = ap^2 + 1$, que substituiremos a seguir:

$$x_3 = (ap^2 + 1)n + 2pqm + ap^2n + \frac{b(ap^2+1)}{2a} + \frac{bp^2}{2} - \frac{b}{2a}$$

$$x_3 = ap^2n + n + 2pqm + ap^2n + \frac{bp^2}{2} + \frac{b}{2a} + \frac{bp^2}{2} - \frac{b}{2a}$$

$$x_3 = 2ap^2n + bp^2 + 2pqm + n$$

A raiz quadrada associada a x_3, será $\sqrt{k_3}$,encontrada a seguir:

$$\sqrt{k_3} = apx_2 + \frac{bp}{2} + q\sqrt{k_2}$$

$$\sqrt{k_3} = ap(qn + \frac{bq-b}{2a} + pm) + \frac{bp}{2} + q(apn + \frac{bp}{2} + qm)$$

$$\sqrt{k_3} = apqn + ap^2m + \frac{bpq}{2} - \frac{bp}{2} + \frac{bp}{2} + apqn + \frac{bpq}{2} + q^2m$$

$$\sqrt{k_3} = 2apqn + ap^2m + bpq + q^2m$$

Substituindo $q^2 = ap^2 + 1$, temos:

$$\sqrt{k_3} = 2apqn + ap^2m + bpq + (ap^2 + 1)m$$

$$\sqrt{k_3} = 2apqn + ap^2m + bpq + ap^2m + m$$

$\sqrt{k_3} = 2apq\boldsymbol{n} + bpq + 2ap^2m + m$

No original de Euler, conforme figura abaixo, valor para $\sqrt{k_3}$ no parágrafo é $2apq + bpq + 2ap2m + m$, cujo primeiro termo difere do valor encontrado acima, porém o valor utilizado para encontrar x_4 e $\sqrt{k_4}$ é $\sqrt{k_3} = 2apqn + bpq + 2ap^2m + m$, tratando-se , portanto, de mais um erro de composição do editor da revista.

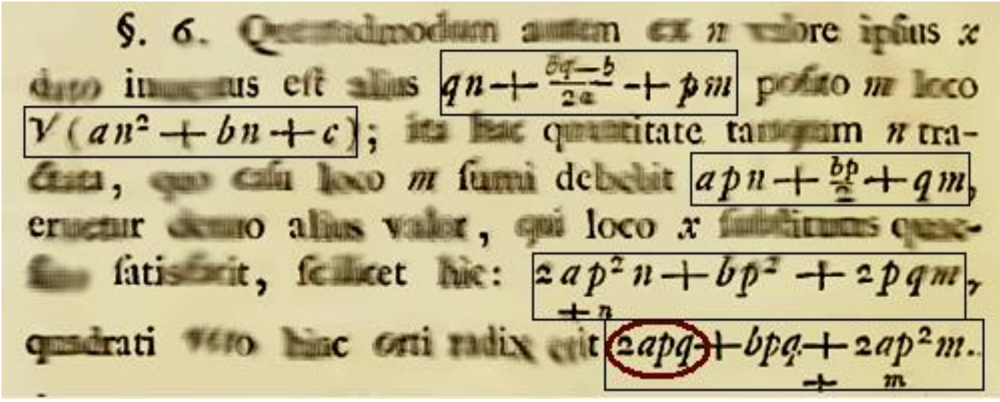


Figura 15:Página 178, paragrafo 6 do E29 de Euler da CASP.

(fonte: Euler, 1738)

Euler continua o parágrafo seis como mostramos a seguir:

"Tomando agora aquele valor para n e este para m e obtemos um quarto valor para x que satisfaz ao quesito, a saber, $4ap^2qn + 2bp^2q + 4ap^3m + qn + \frac{b(q-1)}{2a} + 3pm$ cuja raiz será $4a^2p^3n + 2bp^3 + 4ap^2qm + 3apn + \frac{3bp}{2} + qm$". (EULER, 1738, p. 178).

Prosseguindo as substituições para encontrar os valores de x_4 e $\sqrt{k_4}$, temos:

$x_4 = qx_3 + \frac{bq-b}{2a} + p\sqrt{k_3}$

$x_3 = q(2ap^2n + bp^2 + 2pqm + n) + \frac{bq-b}{2a} + p(2apqn + bpq + 2ap^2m + m)$

$x_3 = 2ap^2qn + bp^2q + 2pq^2m + qn + \frac{bq-b}{2a} + 2ap^2qn + bp^2q + 2ap^3m + pm$

$x_3 = 2ap^2qn + bp^2q + 2pq^2m + qn + \frac{bq-b}{2a} + 2ap^2qn + bp^2q + 2ap^3m + pm$

Substituindo $q^2 = ap^2 + 1$, temos:

$x_3 = 2ap^2qn + bp^2q + 2p(ap^2 + 1)m + qn + \frac{bq-b}{2a} + 2ap^2qn + bp^2q + 2ap^3m + pm$

$x_3 = 4ap^2qn + 2bp^2q + 2ap^3m + 2pm + qn + \frac{bq-b}{2a} + 2ap^3m + pm$

$x_3 = 4ap^2qn + 2bp^2q + 4ap^3m + qn + \frac{bq-b}{2a} + 3pm$

A raiz quadrada associada a x_4, será $\sqrt{k_4}$, encontrada a seguir:

$\sqrt{k_4} = apx_3 + \frac{bp}{2} + q\sqrt{k_3}$

$\sqrt{k_4} = ap(2ap^2n + bp^2 + 2pqm + n) + \frac{bp}{2} + q(2apqn + bpq + 2ap^2m + m)$

$\sqrt{k_4} = 2a^2p^3n + abp^3 + 2ap^2qm + apn + \frac{bp}{2} + 2apq^2n + bpq^2 + 2ap^2qm + qm$

Substituindo $q^2 = ap^2 + 1$, temos:

$\sqrt{k_4} = 2a^2p^3n + abp^3 + 2ap^2qm + apn + \frac{bp}{2} + 2ap(ap^2 + 1)n + bp(ap^2 + 1) + 2ap^2qm + qm$

$\sqrt{k_4} = 2a^2p^3n + abp^3 + 2ap^2qm + apn + \frac{bp}{2} + 2a^2p^3n + 2apn + abp^3 + bp + 2ap^2qm + qm$

$\sqrt{k_4} = 4a^2p^3n + 2\boldsymbol{a}bp^3 + 4ap^2qm + 3apn + \frac{3bp}{2} + qm$

O valor para $\sqrt{k_4}$ no parágrafo, conforme a Figura 16 é $4a^2p^3n + 2bp^3 + 4ap^2qm + 3apn + \frac{3bp}{2} + qm$, cujo segundo termo difere do valor encontrado anteriormente. Portanto deve tratar-se de mais um erro de composição do editor da revista.

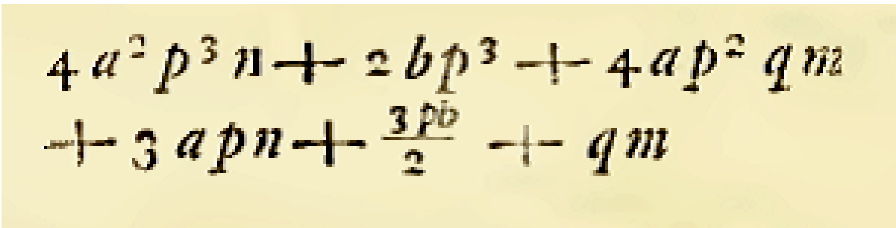

$4a^2p^3n + 2bp^3 + 4ap^2qm + 3apn + \frac{3pb}{2} + qm$

Figura 16:Página 178, paragrafo 6 do E29 de Euler da CASP.
(fonte: Euler, 1738)

No parágrafo sete, temos os valores de x que satisfazem o problema e as raízes correspondentes dos quadrados, de forma semelhante ao parágrafo seis, mas aqui, para encontrar o valor de x_i, utilizamos os valores correspondentes a x_{i-1} e x_{i-2} e o valor de $\sqrt{k_i}$ utilizamos $\sqrt{k_{i-1}}$ e $\sqrt{k_{i-2}}$, conforme Figura 17 a seguir:

	Valores ipſius x	Valores $\surd(ax^2+bx+c)$
I.	n	m
II.	$qn+pm+\frac{b(q-1)}{2a}$	$apn+qm+\frac{bp}{2}$
III.	$2q^2n+2pqm+\frac{b(q^2-1)}{a}$ $-n$	$2apqn+2q^2m+bpq$ $-m$
IV.	$4q^3n+4pq^2m+\frac{b(4q^3-3q-1)}{2a}$ $-3qn-pm$	$4apq^2n+4q^3m+2bpq^2$ $-apn-3qm-\frac{bp}{2}$
V.	$8q^4n+8pq^3m+\frac{4bq^2(q^2-1)}{a}$ $-8q^2n-4pqm$ $+n$	$8apq^3n+8q^4m+4bpq^3$ $-4apqn-8q^2m-2bpq$ $+m$
	etc. etc.	etc.
	Huius progreſſionis haec eſt lex.	Huius progreſſionis haec eſt lex.
	term. quicunque A	E
	hunc ſequens B	F
	$2qB-A+\frac{b(q-1)}{a}$	$2qF-E$

Figura 17: Tabela da página 179, paragrafo 7 do E29 de Euler da CASP.
(fonte: Euler, 1738)

Na primeira coluna temos os valores para x, onde o valor dado na linha I é $x_1 = n$ e o dado na linha II é $x_2 = qn + pm + \frac{b(q-1)}{2a}$, que é o valor de x dado no teorema. Os valores seguintes são encontrados pela fórmula $2qB - A + \frac{b(q-1)}{a}$, onde A e B correspondem respectivamente ao nosso x_{i-2} e x_{i-1}, portanto segundo a nossa notação $2qx_{i-1} - x_{i-2} + \frac{b(q-1)}{a}$. Então, para encontrar x_3 na linha III procederemos da seguinte forma:

$$x_3 = 2qx_{3-1} - x_{3-2} + \frac{b(q-1)}{a}$$

$$x_3 = 2qx_2 - x_1 + \frac{b(q-1)}{a}$$

$$x_3 = 2q\left(qn + pm + \frac{b(q-1)}{2a}\right) - n + \frac{b(q-1)}{a}$$

$$x_3 = 2q^2n + 2pqm + \frac{b(q^2-q)}{a} - n + \frac{b(q-1)}{a}$$

$$x_3 = 2q^2n + 2pqm + \frac{b(q^2-1)}{a} - n$$

O valor da linha VI dado a x_4:

$$x_4 = 2qx_{4-1} - x_{4-2} + \frac{b(q-1)}{a}$$

$$x_4 = 2qx_3 - x_2 + \frac{b(q-1)}{a}$$

$$x_4 = 2q\left(2q^2n + 2pqm + \frac{b(q^2-1)}{a} - n\right) - \left(qn + pm + \frac{b(q-1)}{2a}\right) + \frac{b(q-1)}{a}$$

$$x_4 = 4q^3n + 4pq^2m + \frac{b(4q^3-4q)}{2a} - 2qn - qn - pm + \frac{b(-q+1)}{2a} + \frac{b(2q-2)}{2a}$$

$$x_4 = 4q^3n + 4pq^2m + \frac{b(4q^3-3q-1)}{2a} - 3qn - pm$$

O valor da linha V dado a x_5:

$$x_5 = 2qx_{5-1} - x_{5-2} + \frac{b(q-1)}{a}$$

$$x_5 = 2qx_4 - x_3 + \frac{b(q-1)}{a}$$

$$x_5 = 2q\left(4q^3n + 4pq^2m + \frac{b(4q^3-3q-1)}{2a} - 3qn - pm\right) - \left(2q^2n + 2pqm + \frac{b(q^2-1)}{a} - \right.$$
$$n + b(q-1)a$$

$$x_5 = 8q^4n + 8pq^3m + \frac{b(4q^4-3q^2-q)}{a} - 6q^2n - 2pqm - 2q^2n - 2pqm + \frac{b(-q^2+1)}{a} +$$
$$n + \frac{b(q-1)}{a}$$

$$x_5 = 8q^4n + 8pq^3m + \frac{b(4q^4-4q^2)}{a} - 8q^2n - 4pqm + n$$

$$x_5 = 8q^4n + 8pq^3m + \frac{4bq^2(q^2-1)}{a} - 8q^2n - 4pqm + n$$

Na segunda coluna temos os valores para $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, onde o valor da raiz quadrada na linha I é $\sqrt{k_1} = m$ e o da linha II é $\sqrt{k_2} = apn + qm + \frac{bp}{2}$, que é o valor para a raiz quadrada dada no teorema. Os valores seguintes são encontrados pela fórmula $2qF - E$, onde E e F correspondem respectivamente ao nosso $\sqrt{k_{i-2}}$ e $\sqrt{k_{i-1}}$, portanto, segundo a nossa notação $2q\sqrt{k_{i-1}} - \sqrt{k_{i-2}}$. Então, para encontrar o $\sqrt{k_3}$ na linha III procederemos da seguinte forma:

$$\sqrt{k_3} = 2q\sqrt{k_{3-1}} - \sqrt{k_{3-2}}$$

$$\sqrt{k_3} = 2q\sqrt{k_2} - \sqrt{k_1}$$

$\sqrt{k_3} = 2q\left(apn + qm + \frac{bp}{2}\right) - m$

$\sqrt{k_3} = 2apqn + 2q^2m + bpq - m$

O valor da linha VI dado a $\sqrt{k_4}$:

$\sqrt{k_4} = 2q\sqrt{k_{4-1}} - \sqrt{k_{4-2}}$

$\sqrt{k_4} = 2q\sqrt{k_3} - \sqrt{k_2}$

$\sqrt{k_4} = 2q(2apqn + 2q^2m + bpq - m) \ - \left(apn + qm + \frac{bp}{2}\right)$

$\sqrt{k_4} = 4apq^2n + 4q^3m + 2bpq^2 - 2qm - apn - qm - \frac{bp}{2}$

$\sqrt{k_4} = 4apq^2n + 4q^3m + 2bpq^2 - apn - 3qm - \frac{bp}{2}$

O valor da linha V dado a $\sqrt{k_5}$:

$\sqrt{k_5} = 2q\sqrt{k_{5-1}} - \sqrt{k_{5-2}}$

$\sqrt{k_5} = 2q\sqrt{k_4} - \sqrt{k_3}$

$\sqrt{k_5} = 2q\left(4apq^2n + 4q^3m + 2bpq^2 - apn - 3qm - \frac{bp}{2}\right) - (2apqn + 2q^2m + bpq - m$

$\sqrt{k_5} = 8apq^3n + 8q^4m + 4bpq^3 - 2apqn - 6q^2m - bpq - 2apqn - 2q^2m - bpq + m$

$\sqrt{k_5} = 8apq^3n + 8q^4m + 4bpq^3 - 4apqn - 8q^2m - 2bpq + m$

Observe que esses valores formam uma progressão que pode ser continuada tanto quanto se queira.

Segundo o que Euler escreve no parágrafo oito, nessas expressões, os termos alternados de $ax^2 + bx + c$, a partir do menor, serão inteiros quadrados, e se como vimos anteriormente, bp for divisível por 2, todos os quadrados serão inteiros. Já a respeito de x, os seus valores serão inteiros se $b(q-1)$ for divisível por $2a$, mas se não for, o termos alternados de x também serão inteiros, para $qq - 1$, pois vimos que $q^2 - 1 = ap^2$ sempre será divisível por a se p e q forem inteiros. Além disso, se o m tomado nessas expressões for negativo, o número de soluções será duplicado.

Já o parágrafo nove aborda que se a for um quadrado não encontraremos uma solução inteira, a não ser que o próprio $ax^2 + bx + c$ seja um quadrado ou possa ser igualado a um quadrado, além disso, se a for um quadrado, não há nenhum inteiro com exceção de 0, que substituído no lugar de p em $ap^2 + 1$, o faça um quadrado. Excluímos esse caso em que a é um quadrado, pois o nosso propósito era determinar um método em que obtivéssemos soluções inteiras e, nesse caso, n será o único valor obtido para x, a não ser que busquemos outros por tentativa e erro.

No décimo parágrafo, Euler trata o caso contrário do nono parágrafo: se a não for um quadrado. Neste caso, sempre podemos encontrar um número inteiro que substituído no lugar de p em $ap^2 + 1$, o faça um quadrado. Se pudermos encontrar também, um único exemplo em que $ax^2 + bx + c$ seja um quadrado, então podemos encontrar infinitos casos que o transformem em um quadrado. Para isso, primeiro, por tentativa e erro devemos encontrar um número inteiro x que torne $ax^2 + bx + c$ um quadrado. Em seguida, devemos procurar um valor para p que torne $ap^2 + 1$ um quadrado. Assim, um número infinito de casos será solucionado com a ajuda das progressões já encontradas.

Depois de todas essas considerações, achamos que seria pertinente aplicarmos o método descoberto por Euler em exemplo particular, para que o processo fique mais claro. Pensamos no exemplo $3x^2 + 5x + 7$. Observe que $a = 3$ não é um quadrado, portanto encontraremos soluções inteiras.

Conforme o décimo parágrafo, devemos primeiro por tentativa e erro encontrar um número inteiro x que torne $ax^2 + bx + c$ um quadrado, neste caso $n = 3$ e $m = 7$. Em seguida, devemos procurar um valor para p que torne $ap^2 + 1$ um quadrado, neste exemplo $p = 1$ e $q = 2$. Assim, um número infinito de casos será solucionado com a ajuda das progressões já encontradas, como pode ser observado abaixo:

I. $\boldsymbol{n = 3}$

II. $qn + pm + \frac{b(q-1)}{2a}$

$3q + 7p + \frac{5(q-1)}{2.3}$

$\frac{3q}{6} + 7p + \frac{5q}{6} - \frac{5}{6}$

$\frac{18q}{6} + 7p + \frac{5q}{6} - \frac{5}{6}$

$\frac{23q}{6} + 7p - \frac{5}{6}$

Substituindo o valor da Equação de Pell:

$\frac{46+42-5}{6} = \boldsymbol{\frac{83}{6}}$

Equação de Pell

$$\boxed{\begin{array}{l} q^2 = 3p^2 + 1 \\ q^2 - 3p^2 = +1 \\ q = 2 \text{ e } p = 1 \end{array}}$$

I. $m = \sqrt{49} = \boldsymbol{7}$

II. $apn + qm + \frac{bp}{2}$

$9p + 7q + \frac{5p}{2}$

$\frac{18p}{2} + \frac{5p}{2} + 7q$

$\frac{23p}{2} + 7q$

Substituindo o valor da Equação de Pell:

$\frac{23+28}{2} = \boldsymbol{\frac{51}{2}}$

III. $2q^2n + 2pqm + \frac{b(q^2-1)}{a} - n$

$2.2^2.3 + 2.2.1.7 + \frac{5(2^2-1)}{3} - 3$

$24 + 28 + 5 - 3 = \mathbf{54}$

(...)

III. $2apqn + 2q^2m + bpq - m$

$2.3.1.2.3 + 2.2^2.7 + 5.1.2 - 7$

$36 + 56 + 10 - 7 = \mathbf{95}$

(...)

Conforme o parágrafo oito, se bp não for divisível por 2, os termos alternados de $ax^2 + bx + c$, a partir do menor, serão inteiros, no caso: $\mathbf{7}, \frac{51}{2}, \mathbf{95}, \ldots$ Se $b(q-1)$ não for divisível por $2a$, os termos alternados de x serão inteiros, neste caso :$\mathbf{3}, \frac{83}{6}, \mathbf{54}, \ldots$

Nos parágrafos seguintes Euler, discorre sobre alguns casos particulares. Por exemplo, no parágrafo onze, toma o caso em que c seja um quadrado, isto é $c = dd$. Então temos $ax^2 + bx + dd$ que é igual a um quadrado quando $x = 0$. Assim, tomando $n = 0$ e $m = d$, teremos:

I. $n = 0$

II. $qn + pm + \frac{b(q-1)}{2a}$

$pd + \frac{b(q-1)}{2a}$

III. $2qB - A + \frac{b(q-1)}{a}$

$2q\left(pd + \frac{b(q-1)}{2a}\right) - 0 + \frac{b(q-1)}{a}$

$2dpq + \frac{b(q^2-q)}{a} + \frac{b(q-1)}{a}$

$2dpq + \frac{b(q^2-1)}{a}$

I. $m = d$

II. $apn + qm + \frac{bp}{2}$

$qd + \frac{bp}{2}$

III. $2qF - E$

$2q\left(qd + \frac{bp}{2}\right) - d$

$2dq^2 + bpq - d$

$d(2q^2 - 1) + bpq$

Assim, a série correspondente aos valores de x será: $0, dp + \frac{b(q-1)}{2a}, 2dpq + \frac{b(q^2-1)}{a}, \ldots, A, B, 2qB - A + \frac{b(q-1)}{a}$

As raízes geradas serão:

$d, dq + \frac{\boldsymbol{bp}}{\mathbf{2}}, d(2q^2 - 1) + bpq, \ldots, E, F, 2qF - E.$

No original, conforme a Figura 18, o segundo termo dessa sequencia é $\boldsymbol{dq + \frac{bq}{2}}$, um erro de composição do editor da revista.

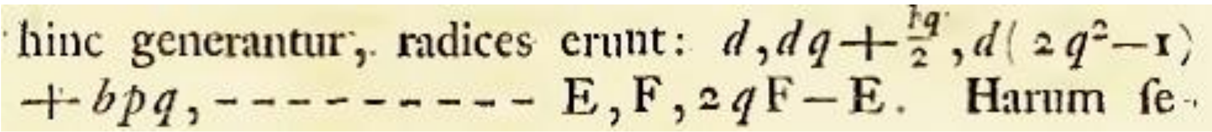

hinc generantur, radices erunt: $d, dq + \frac{bq}{2}, d(2q^2 - 1) + bpq$, ---------- $E, F, 2qF - E$. Harum se-

Figura 18: Página 181, paragrafo 11 do E29 de Euler da CASP.
(fonte: Euler, 1738)

No parágrafo doze, Euler considera o caso particular em que $b = 0$ e $d = 1$, então a fórmula geral $ax^2 + bx + c$ será reduzida ao máximo, tomando a forma $ax^2 + 1$, teremos então:

I. $n = 0$

II. $qn + pm + \frac{b(q-1)}{2a}$

$0.q + 1.p + \frac{0.(q-1)}{2a}$

p

III. $2qB - A + \frac{b(q-1)}{a}$

$2qp - 0 + \frac{0.(q-1)}{a}$

$2pq$

IV. $2qB - A + \frac{b(q-1)}{a}$

$2q(2pq) - p + \frac{0.(q-1)}{a}$

$4pq^2 - p$

I. $m = 1$

II. $apn + qm + \frac{bp}{2}$

$0.ap + 1.q + \frac{0.p}{2}$

q

III. $2qF - E$

$2qq - 1$

$2q^2 - 1$

VI. $2qF - E$

$2q(2q^2 - 1) - q$

$4q^3 - 2q - q$

$4q^3 - 3q$

Portanto os valores de x compõem a seguinte série:

$0, p, 2pq, 4pq^2 - p, \dots A, B, 2qB - A$

A série das raízes dos quadrados produzidos será:

$1, q, 2q^2 - 1, 4q^3 - 3q, \dots E, F, 2qF - E$

No parágrafo seguinte, Euler concluiu pelos exemplos anteriores que o método pode ser adaptado a qualquer caso, que para isso primeiro devemos determinar os números que devem ser designados por p e q para um valor arbitrário de a. Onde p, deve ser um número que faça $ap^2 + 1$ um quadrado de raiz q. É evidente que se obtivermos um único valor apropriado para p, podemos obter outros infinitos, com restrição de que o valor seja o menor possível, porém maior que 0, pois obteremos todos os valores para x, o que os valores maiores não farão. Além disso, os outros termos $2pq, 4pq^2 - p,$ etc. não contribuem para o números de soluções, já que geram somente os valores subsequentes de x conforme vimos no sétimo parágrafo.

No parágrafo quatorze, Euler toma outros exemplos particulares, primeiro toma $a = e^2 - 1$, onde o menor valor para p é 1 e q é e, como veremos a seguir:

$$a = e^2 - 1$$
$$ap^2 + 1 = q^2$$
$$(e^2 - 1)p^2 + 1 = q^2$$
$$(e^2 - 1)p^2 = q^2 - 1$$
$$q = e \text{ e } p = 1$$

Note que esses valores são encontrados por tentativa e erro.

Prossegue dizendo que se $a = e^2 + 1$, então $p = 2e$ e $q = 2e^2 + 1$ e, se tivermos $a = e^2 \pm 2$, teremos $p = e$ e $q = e^2 \pm 1$, deste modo, infinitos casos podem ser determinados, os quais alguns poderão ser obtidos pelo seguinte teorema:

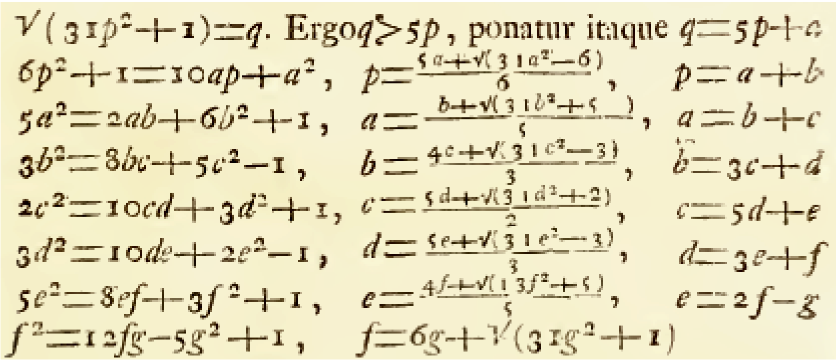
> Se tivermos $a = \alpha^2 e^{2b} \pm 2\alpha e^{b-1}$, obteremos $p = e$ e $q = \alpha e^{b+1} \pm 1$, onde para α podemos também aceitar números fracionários, contanto que, quando multiplicados por e^{b-1}, sejam transformados em inteiros. De modo semelhante, se tivermos $a = (\alpha e^b + \beta e^\mu)^2 + 2\alpha e^{b-1} + 2\beta e^{\mu-1}$, então obteremos $p = e$ e $q = \alpha e^{b+1} + \beta e^{\mu+1} + 1$. E, ainda, se tivermos $a = \frac{1}{4}\alpha^2 k^2 e^{2b} \pm \alpha e^{b-1}$, obteremos $p = ke$ e $q = \frac{1}{2}\alpha k^2 e^{b+1} \pm 1$. (Euler, 1738, p.182)

O teorema citado anteriormente generaliza o que foi obtido a partir da resolução dos exemplos dados.

No décimo quinto parágrafo, Euler diz que sempre que a for um número encontrado através das fórmulas que conhecemos anteriormente, os valores de p e q são também imediatamente encontrados. Porém, se a não pode ser reduzido à forma dada, há um método especial para descobrir p e q, usado por Pell e por Fermat. Esse método é universal, funcionando sempre, para qualquer que seja a. Ele é recomendo também por produzir o menor valor para p, que é o que se deseja de acordo com o parágrafo treze.

Euler não explica o método, pois conforme o parágrafo dezesseis, o método é descrito numa conhecida obra de Wallis, mas não cita a obra, mas que descobrimos ser *Commercium*.

conhecida obra *Commercium* de Wallis. Esse método é importante para determinar sem dúvidas o menor valor de p para o qual $ap^2 + 1$ é um quadrado. Assim, ele apresenta o método por meio do caso particular $31p^2 + 1$, onde p seja mínimo para fazê-lo um quadrado, desse exemplo-guia podemos encontrar solução para qualquer outro caso, para isso devemos proceder da maneira apresentada na Figura 19:



$\sqrt{(31p^2+1)} = q$. Ergo $q > 5p$, ponatur itaque $q = 5p + a$

$6p^2 + 1 = 10ap + a^2$, $p = \frac{5a + \sqrt{(31a^2 - 6)}}{6}$, $p = a + b$

$5a^2 = 2ab + 6b^2 + 1$, $a = \frac{b + \sqrt{(31b^2 + 5)}}{5}$, $a = b + c$

$3b^2 = 8bc + 5c^2 - 1$, $b = \frac{4c + \sqrt{(31c^2 - 3)}}{3}$, $b = 3c + d$

$2c^2 = 10cd + 3d^2 + 1$, $c = \frac{5d + \sqrt{(31d^2 + 2)}}{2}$, $c = 5d + e$

$3d^2 = 10de + 2e^2 - 1$, $d = \frac{5e + \sqrt{(31e^2 - 3)}}{3}$, $d = 3e + f$

$5e^2 = 8ef + 3f^2 + 1$, $e = \frac{4f + \sqrt{(31f^2 + 5)}}{5}$, $e = 2f - g$

$f^2 = 12fg - 5g^2 + 1$, $f = 6g + \sqrt{(31g^2 + 1)}$

Figura 19: Página 183, paragrafo 16 do E29 de Euler da CASP.
(fonte: Euler, 1738)

Ora a forma geral é $ap^2 + 1 = q$, neste caso temos $a = 31$. Assim, $\sqrt{31p^2 + 1} = q$, como $6 > \sqrt{31} > 5$, então $q > 5p$. Podemos tomar $q = 5p + a$.

Dessa forma, a primeira expressão é encontrada da seguinte maneira:

$\sqrt{31p^2 + 1} = 5p + a$

$31p^2 + 1 = (5p + a)^2$

$31p^2 + 1 = 25p^2 + 10ap + a^2$

$31p^2 - 25p^2 + 1 = 100ap + a^2$

$\mathbf{6p^2 + 1 = 10ap + a^2}$

$6p^2 - 10ap + (1 - a^2) = 0$

$p = \frac{10a \pm \sqrt{124a^2 - 24}}{12} \therefore \boldsymbol{p = \frac{5a \pm \sqrt{31a^2 - 6}}{6}}$

Para a segunda expressão, tomamos $p = a + b$:

$\frac{5a + \sqrt{31a^2 - 6}}{6} = a + b$

$5a + \sqrt{31a^2 - 6} = 6a + 6b$

$\sqrt{31a^2 - 6} = a + 6b$

$31a^2 - 6 = a^2 + 36b^2 + 12ab$

$30a^2 = 36b^2 + 12ab + 6$

$\boldsymbol{5a^2 = 6b^2 + 2ab + 1}$

$5a^2 - 2ab - (1 + 6b^2) = 0$

$a = \frac{2b \pm \sqrt{4(31b^2+5)}}{10} \therefore \boldsymbol{a = \frac{b \pm \sqrt{31b^2+5}}{5}}$

Para a terceira expressão, tomamos $a = b + c$:

$\frac{b+\sqrt{31b^2+5}}{5} = b + c$

$b + \sqrt{31b^2 + 5} = 5b + 5c$

$\sqrt{31b^2 + 5} = 4b + 5c$

$31b^2 + 5 = 16b^2 + 25c^2 + 40bc$

$15b^2 = 25c^2 + 40bc - 5$

$\boldsymbol{3b^2 = 5c^2 + 8bc - 1}$

$3b^2 - 8bc + (1 - 5c^2) = 0$

$b = \frac{8c \pm \sqrt{4(31c^2-3)}}{6} \therefore \boldsymbol{b = \frac{4c \pm \sqrt{31c^2-3}}{3}}$

Para a quarta expressão, tomamos $b = 3c + d$:

$\frac{4c+\sqrt{31c^2-3}}{3} = 3c + d$

$4c + \sqrt{31c^2 - 3} = 9c + 3d$

$\sqrt{31c^2 - 3} = 5c + 3d$

$31c^2 - 3 = 25c^2 + 9d^2 + 30cd$

$6c^2 = 9d^2 + 30cd + 3$

$\boldsymbol{2c^2 = 3d^2 + 10cd + 1}$

$2c^2 - 10cd - (3d^2 + 1) = 0$

$c = \frac{10d \pm \sqrt{4(31d^2+2)}}{4} \therefore \boldsymbol{c = \frac{5d \pm \sqrt{31d^2+2}}{2}}$

Para a quinta expressão, tomamos $c = 5d + e$:

$\frac{5d+\sqrt{31d^2+2}}{2} = 5d + e$

$5d + \sqrt{31d^2 + 2} = 10d + 2e$

$\sqrt{31d^2 + 2} = 5d + 2e$

$31d^2 + 2 = 25d^2 + 4e^2 + 20de$

$6d^2 = 4e^2 + 20de - 2$

$3d^2 = 2e^2 + 10de - 1$

$\mathbf{3d^2 - 10de + (1 - 2e^2) = 0}$

$d = \frac{10e \pm \sqrt{4(31e^2-3)}}{6} \therefore \boldsymbol{d = \frac{5e \pm \sqrt{31e^2-3}}{3}}$

Para a sexta expressão, tomamos $d = 3e + f$:

$\frac{5e+\sqrt{31e^2-3}}{3} = 3e + f$

$5e + \sqrt{31e^2 - 3} = 9e + 3f$

$\sqrt{31e^2 - 3} = 4e + 3f$

$31e^2 - 3 = 16e^2 + 9f^2 + 24ef$

$15e^2 = 9f^2 + 24ef + 3$

$\mathbf{5e^2 = 3f^2 + 8ef + 1}$

$5e^2 - 8ef - (3f^2 + 1) = 0$

$e = \frac{8f \pm \sqrt{4(31f^2+5)}}{10} \therefore \boldsymbol{e = \frac{4f \pm \sqrt{31f^2+5}}{5}}$

Observe que a expressão dada na figura é $e = \frac{4f \pm \sqrt{\mathbf{13}f^2+5}}{5}$ e não $e = \frac{4f \pm \sqrt{31f^2+5}}{5}$ como vimos anteriormente, um provável erro de composição do editor da revista.

Finalmente para ultima expressão da figura, tomamos $e = 2f - g$:

$\frac{4f+\sqrt{31f^2+5}}{5} = 2f - g$

$4f + \sqrt{31f^2 + 5} = 10f - 5g$

$\sqrt{31f^2 + 5} = 6f - 5g$

$31f^2 + 5 = 36f^2 + 25g^2 - 60fg$

$-5f^2 = 25g^2 - 60fg - 5$

$\mathbf{f^2 = -5g^2 + 12fg + 1}$

$f^2 - 12fg + (5g^2 - 1) = 0$

$f = \frac{12g \pm \sqrt{4(31g^2+1)}}{2} \therefore \boldsymbol{f = 6g \pm \sqrt{31g^2 + 1}}$

Euler diz que devemos continuar a fazer essas operações até chegarmos à expressão $\sqrt{31g^2 + 1}$ na segunda coluna (vide Figura 19), pois essa é a mesma forma da formula proposta inicialmente $\sqrt{31p^2 + 1}$. Então se tomarmos $g = 0$ teremos $f = 1$:

$f = 6g \pm \sqrt{31g^2 + 1} \quad f = 6.0 + \sqrt{31.0^2 + 1} \therefore \boldsymbol{f = 1}$

Então, temos:

$e = 2f - g = 2(1) - 0 \;\therefore\; \boldsymbol{e = 2}$

$d = 3e + f \; = 3(2) + 1 \therefore\; \boldsymbol{d = 7}$

$c = 5d + e = 5(7) + 2 \;\therefore\; \boldsymbol{c = 37}$

$b = 3c + d = 3(37) + 7 \therefore\; \boldsymbol{b = 118}$

$a = b + c = 118 + 37 \;\therefore\; \boldsymbol{a = 155}$

$p = a + b = 155 + 118 \;\therefore\; \boldsymbol{p = 273}$

$q = 5p + a = 5(273) + 155 \therefore\; \boldsymbol{q = 1520}$

Para que possamos encontrar os valores de p e q sem muito trabalho, a seguinte tabelada Figura 20 é anexada, onde para cada valor de a é apresentado o menor valor que substituído no lugar de p faz $ap^2 + 1$ um quadrado.

a.	*p.*	*q.*	*a.*	*p.*	*q.*
2.	2.	3.	37.	12.	73
3.	1.	2.	38.	6.	37
5.	4.	9.	39.	4.	25
6.	2.	5.	40.	3.	19
7.	3.	8.	41.	320.	2049
8.	1.	3.	42.	2.	13
10.	6.	19.	43.	531.	3482
11.	3.	10.	44.	30.	199
12.	2.	7.	45.	24.	161
13.	180.	649.	46.	3588.	24335
14.	4.	15.	47.	7.	48
15.	1.	4.	48.	1.	7
17.	8.	33.	50.	14.	99
18.	4.	17.	51.	7.	50
19.	39.	170.	52.	90.	649
20.	2.	9.	53.	9100.	66249
21.	12.	55.	54.	66.	485
22.	42.	197.	55.	12.	89
23.	5.	24.	56.	2.	15
24.	1.	5.	57.	20.	151
26.	10.	51.	58.	2574.	19603
27.	5.	26.	59.	69.	530
28.	24.	127.	60.	4.	31
29.	1820.	9801.	61.	226153980.	1766319049
30.	2.	11.	62.	8.	63
31.	273.	1520.	63.	1.	8
32.	3.	17.	65.	16.	129
33.	4.	23.	66.	8.	65
34.	6.	35.	67.	5967.	48842
35.	1	6.	68.	4.	33

Figura 20: Página 184, paragrafo 17 do E29 de Euler da CASP.

(fonte: Euler, 1738)

Observe por exemplo o valor para $a = 2$, então teríamos $q = \sqrt{2p^2 + 1}$, segundo a tabela $p = 2$ e $q = 3$, assim:

$3 = \sqrt{2(2)^2 + 1} = \sqrt{9}$

No parágrafo dezenove, Euler fala que de imediato temos um método bem simples para extração aproximada da raiz quadrada de qualquer número não-quadrado a. Isto é, se temos $ap^2 + 1 = q^2$, então $\sqrt{a} = \frac{\sqrt{q^2-1}}{p}$ e se tomarmos q um numero extremamente grande, então temos que $\sqrt{a} = \frac{q}{p}$ aproximadamente. Mas podemos colocar no lugar de p cada um dos termos da série $0, p, 2pq, 4pq^2 - p, \dots A, B, 2qB - A$ e no lugar de q cada termo correspondente da série $1, q, 2q^2 - 1, 4q^3 - 3q, \dots E, F, 2qF - E$ (vide parágrafo doze, comentado na página 58). Se Q for o i-ésimo termo desta série e P o i-ésimo termo da outra série, termos $\sqrt{a} = \frac{Q}{P}$, os termos de Q são crescentes, o termo inicial é 1, encontra-se $\sqrt{a}$ com mais precisão tomando termos mais afastados do primeiro termo da série. Por exemplo, se $a = 6$; então teremos $p = 2$ e $q = 5$, e por sua vez, a séries podem ser escritas como a seguir:

$$\frac{1,5,49,485,4801,47525,470449,4656965, etc}{0,2,20,198,1960,19402,192060,1901198, etc}$$

Tomando o ultimo termo $\frac{4656965}{1901198}$, será tão próximo da raiz de 6 que a diferença não excederá a fração $\frac{1}{2.(1901198)^2\sqrt{6}}$. De forma semelhante, a raiz quadrada de 61 será aproximadamente $\frac{1766319049}{226153980}$, apesar de um pouco maior, a diferença não excede $\frac{1}{2(226153980)^2\sqrt{61}}$.

No parágrafo seguinte, Euler procura números triangulares que também sejam quadrados; isto é $\frac{x^2+x}{2}$ deve ser um quadrado. Consequentemente $2x^2 + 2x$ também será um quadrado, e comparando-o com a fórmula $ax^2 + bx + d^2$ (vide parágrafo 11, comentado na página 57), temos $a = 2, b = 2, d = 0$, mas como $a = 2$ pela tabela dada, temos que $p = 2$ e $q = 3$. Assim, os seguintes valores devem ser substituídos no lugar de x são:

$0, dp + \frac{b(q-1)}{2a}, 2dpq + \frac{b(q^2-1)}{a}, \dots, A, B, 2qB - A + \frac{b(q-1)}{a}$

obs.: $\frac{b(q-1)}{a} = 2$

O primeiro termo é **0**.

O segundo termo é

$dp + \frac{b(q-1)}{2a}$

$0 + \frac{2(3-1)}{2.2} = \mathbf{1}$

O terceiro termo é

$2dpq + \frac{b(q^2-1)}{a}$

$2.0 + \frac{2(3^2-1)}{2} = \mathbf{8}$

O quarto termo é

$2qB - A + \frac{b(q-1)}{a}$

$2.3.8 - 1 + 2 = \mathbf{49}$

O quinto termo é

$2qB - A + \frac{b(q-1)}{a}$

$2.3.49. -8 + 2 = \mathbf{288}$

O sexto termo é

$2qB - A + \frac{b(q-1)}{a}$

$2.3.288 - 49 + 2 = \mathbf{1681}$

O sétimo termo é

$2qB - A + \frac{b(q-1)}{a}$

$2.3.1681 - 288 + 2 = \mathbf{9800}$

Esses valores formam a seguinte série: $0, 1, 8, 49, 288, 1681, 9800, etc$ e os termos desta série quando substituídos no lugar de x fará $\frac{x^2+x}{2}$ um quadrado, e as raízes desses quadrados pertencerão à série de forma geral:

$d, dq + \frac{\boldsymbol{bp}}{\mathbf{2}}, d(2q^2 - 1) + bpq, \ldots, E, F, 2qF - E.$

Aqui o erro dessa sequencia, contida no parágrafo onze, é corrigido reforçando a crença de que tratava-se de um erro de compilação.

O primeiro termo é $d = \mathbf{0}$

O segundo termo é

$dq + \frac{bp}{2}$

$0.3 + \frac{2.2}{2} = \mathbf{2}$

O terceiro termo é

$d(2q^2 - 1) + bpq$

$0(3^2 - 1) + 2.2.3 = \mathbf{12}$

O quarto termo é

$2qF - E$

$2.3.12 - 2 = \mathbf{70}$

O quinto termo é

$2qF - E$

$2.3.70 - 12 = \mathbf{408}$

O sexto termo é

$2qF - E$

$2.3.408 - 70 = \mathbf{2378}$

O sétimo termo é

$2qF - E$

$2.3.2378 - 408 = \mathbf{13860}$

Como esse termos são raízes de $2x^2 + 2x$, eles deverão ser divididos por 2 para obter as raízes de $\frac{x^2+x}{2}$, formando a seguinte série: $0, 1, 6, 35, 204, 1189, 6930, etc.$

No parágrafo vinte, Euler explica que os números poligonais de l lados são expressos pela fórmula geral $\frac{(l-2)x^2-(l-4)x}{2}$ [12]na qual x denota raiz do numero poligonal. Assim, para que um número poligonal seja um quadrado, é necessário que $2(l-2)x^2 - 2(l-4)x$ seja um quadrado, mas é evidente, que há um caso que de imediato satisfaz a condição, a saber quando $x = 0$, pois a própria formula é igual a zero. Consequentemente, teremos $n = 0$ e $m = 0$ e comparando-a com a fórmula geral $ax^2 + bx + c$, temos $a = 2(l-2)$, $b = -2(l-4)$ e

[12] O l indica o poligonal e o x o seu lugar na sequencia. Assim, para $l = 3$ e $x = 5$, por exemplo,o valor da fórmula é 15, o quinto numero triangular.

$c = 0$. Portanto, se $2(l-2)p^2 + 1 = q^2$, então haverá valores x para que $2(l-2)x^2 - 2(l-4)x$ ou a sua quarta parte $\frac{(l-2)x^2-(l-4)x}{2}$, isto é, para os números poligonais serem quadrados obedecem a série de forma geral (vide a tabela do sétimo parágrafo, Figura 17):

$$n, qn + pm + \frac{b(q-1)}{2a}, 2q^2n + 2pqm + \frac{b(q^2-1)}{a} - n, \dots, A, B, 2qB - A + \frac{b(q-1)}{a}$$

O primeiro termo é $n = \mathbf{0}$.

O segundo termo é

$$qn + pm + \frac{b(q-1)}{2a}$$

$$q.0 + p.0 - \frac{2(l-4)}{2.2(l-2)} = \frac{-(\boldsymbol{l}-\mathbf{4})}{\mathbf{2}(\boldsymbol{l}-\mathbf{2})}$$

O terceiro termo:

$$2q^2n + 2pqm + \frac{b(q^2-1)}{a} - n$$

$$2q^2.0 + 2pq.0 + \frac{-2(l-4)(q^2-1)}{2(l-2)} - 0 = \frac{-(\boldsymbol{l}-\mathbf{4})(\boldsymbol{q}^{\mathbf{2}}-\mathbf{1})}{(\boldsymbol{l}-\mathbf{2})}$$

Os termos seguintes são regidos pela lei:

$$A, B, 2qB - A + \frac{b(q-1)}{a}$$

$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \mathbf{2}\boldsymbol{qB} - \boldsymbol{A} + \frac{-\mathbf{2}(\boldsymbol{l}-\mathbf{4})(\boldsymbol{q}-\mathbf{1})}{\mathbf{2}(\boldsymbol{l}-\mathbf{2})}$$

Então, temos a série:

$$0, \frac{-(l-4)}{2(l-2)}, \frac{-(l-4)(q^2-1)}{(l-2)}, \dots, A, B, 2qB - A + \frac{-2(l-4)(q-1)}{2(l-2)}$$

Se $l > 4$, certamente todos esses termos da série serão negativos, entretanto quando q for negativo, os termos alternados serão positivos. Além disso, se encontrarmos um número negativo para x, digamos $-k$, poderemos sempre encontrar um número positivo $x = k + \frac{l-4}{l-2}$ que produz o mesmo poligonal. Se, no entanto, $\frac{l-4}{l-2}$ não for um numero inteiro, o referido número positivo será fracionário, o que aqui, será excluído. Por isso, nós devemos colocar $-q$ no lugar de q nos termos alternados da série. Os termos da série quando substituídos no lugar de x em $2(l-2)x^2 - 2(l-4)x$ o fará um quadrado, e as raízes desses quadrados pertencerão à série de forma geral (vide a tabela do sétimo parágrafo, Figura 17):

$m, apn + qm + \frac{bp}{2}, 2apqn + 2q^2m + bpq - m, \ldots, E, F, 2qF - E$

O primeiro termo é $m = \mathbf{0}$.

O segundo termo é

$apn + qm + \frac{bp}{2}$

$2(l-2)p.0 + q.0 + \frac{-2(l-4)p}{2} = \boldsymbol{-(l-4)p}$

O terceiro termo é

$2apqn + 2q^2m + bpq - m$

$2.2(l-2)pq.0 + 2q^2.0 - 2(l-4)p.q - 0 = \boldsymbol{-2(l-4)pq}$

Os termos seguintes são regidos pela lei:

$\boldsymbol{E, F, 2qF - E}$

Então, temos a série:

$0, (l-4)p, 2(l-4)pq, \ldots E, F, 2qF - E.$

No parágrafo vinte um, Euler continua a discussão sobre os números poligonais, concluindo que somente os números inteiros positivos serão considerados para descobrir outros casos em que $2(l-2)x^2 - 2(l-4)x$ seja um quadrado, como quando $x = 1$, pois produz o quadrado 4. Assim, tomando $n = 1$ e $m = 2$ e utilizando a série de forma geral (vide sétimo parágrafo):

$n, qn + pm + \frac{b(q-1)}{2a}, 2q^2n + 2pqm + \frac{b(q^2-1)}{a} - n, \ldots, A, B, 2qB - A + \frac{b(q-1)}{a}$

Temos o primeiro termo $n = \mathbf{1}$.

O segundo termo:

$qn + pm + \frac{b(q-1)}{2a}$

$q.1 + p.2 + \frac{-2(l-4)(q-1)}{2.2(l-2)} = \boldsymbol{q + 2p - \frac{(l-4)(q-1)}{2(l-2)}}$

O terceiro termo:

$2q^2n + 2pqm + \frac{b(q^2-1)}{a} - n$

$2q^2.1 + 2pq.2 + \frac{-2(l-4)(q^2-1)}{2(l-2)} - 1 = \boldsymbol{2q^2 + 4pq + \frac{-(l-4)(q^2-1)}{(l-2)} - 1}$

Os termos seguintes são regidos pela lei:

$A, B, 2qB - A + \frac{b(q-1)}{a}$

$\boldsymbol{A, B, 2qB - A + \frac{-(l-4)(q-1)}{(l-2)}}$

Então, temos para os valores de x a série:

$1, q + 2p - \frac{(l-4)(q-1)}{2(l-2)}, 2q^2 + 4pq + \frac{-(l-4)(q^2-1)}{(l-2)} - 1, \ldots, A, B, 2qB - A + \frac{-(l-4)(q-1)}{(l-2)}.$

Os termos da série quando substituídos no lugar de x em $\frac{(l-2)x^2-(l-4)x}{2}$ o fará um quadrado, e as raízes desses quadrados pertencerão à série de forma geral (vide sétimo parágrafo):

$m, apn + qm + \frac{bp}{2}, 2apqn + 2q^2m + bpq - m, \ldots, E, F, 2qF - E$

Temos o primeiro termo $m = 1$.

O segundo termo é

$apn + qm + \frac{bp}{2}$

$\frac{(l-2)}{2}p + 1.q + \frac{-(l-4)p}{4}$

$\frac{2lp}{4} - p + q - \frac{lp}{4} + p$

$q + \frac{lp}{4}$

Porém no original o termo é $q + \frac{lp}{2}$, conforme a Figura 21, um erro de composição do editor da revista.

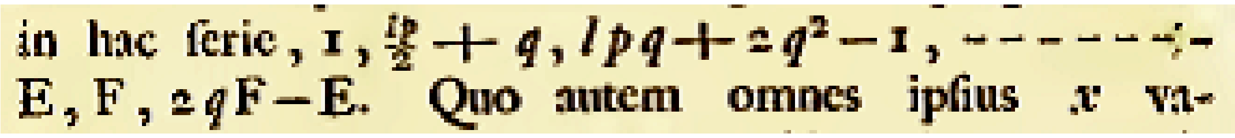

in hac serie, 1, $\frac{lp}{2} + q$, $lpq + 2q^2 - 1$, ... E, F, 2qF − E. Quo autem omnes ipsius x va-

Figura 21: Página 187, paragrafo 21 do E29 de Euler da CASP.

(fonte:Euler, 1738)

O terceiro termo é

$2apqn + 2q^2m + bpq - m$

$2.\frac{(l-2)}{2}pq + 2q^2 - 2.\frac{(l-4)}{2}pq - 1$

$2lpq - 2pq + 2q^2 - \frac{lpq}{2} + 2pq - 1$

$\frac{lpq}{2} + 2q^2 - 1$

Também diferente do termo do original acima.

Os termos seguintes são regidos pela lei:

$\boldsymbol{E, F, 2qF - E}$

Então, temos a série:

$1, q + \frac{lp}{2}, lpq + 2q^2 - 1, \dots E, F, 2qF - E.$

Euler diz que para todos os valores de x encontrados sejam números inteiros, devemos selecionar para q não o menor valor que faz $\frac{l-4}{2(l-2)}(q-1)$ um número inteiro, o que sempre pode ser feito. Continua o parágrafo vinte um de seu artigo, considerando o exemplo em que queremos números pentagonais que são quadrados, e assim, temos $l = 5$ e $a = 6$, enquanto que q será um número da série $1, 5, 49, etc.$ (conforme parágrafo dezenove, na página 64) e os valores correspondentes de p serão $0, 2, 20, etc.$ (também conforme parágrafo dezenove, na página 64). Substituindo $l = 5$ em $\frac{l-4}{2(l-2)}(q-1)$, temos $\frac{1}{6}(q-1)$ que para ser inteiro devemos tomar $q = 49$ e $p = 20$.

Assim, as raízes dos números pentagonais, que são quadrados serão dadas pela substituição dos valores acima na série abaixo (encontrada na página 69):

$1, q + 2p - \frac{(l-4)(q-1)}{2(l-2)}, 2q^2 + 4pq + \frac{-(l-4)(q^2-1)}{(l-2)} - 1, \dots, A, B, 2qB - A + \frac{-(l-4)(q-1)}{(l-2)}.$

Sendo o primeiro termo 1.

O segundo termo

$q + 2p - \frac{(l-4)}{2(l-2)}(q-1)$

$49 + 2.20 - \frac{1}{6}(49-1)$

$49 + 40 - 8 = 81$

O terceiro termo

$2q^2 + 4pq + \frac{-(l-4)(q^2-1)}{(l-2)} - 1$

$2(49)^2 + 4.20.49 + \frac{-(5-4)(49^2-1)}{(5-2)} - 1$

$4802 + 3920 + \frac{-2400}{3} - 1$

$4802 + 3920 - \frac{2400}{3} - 1 = 7921$

Os termos seguintes são regidos pela lei:

$\mathrm{A}, \mathrm{B}, 2qB - A + \frac{-(l-4)(q-1)}{(l-2)}$

$2.49. B - A + \frac{-(5-4)(49-1)}{(5-2)}$

$98B - A - \frac{48}{3} = 98B - A - 16$

Assim, as raízes dos números pentagonais, que são quadrados estão contidos na seguinte série:

$$1, 81, 7921, \ldots, A, B, 98B - A - 16$$

As raízes quadráticas desses números pentagonais serão dadas como a seguir:

O primeiro termo é 1.

O segundo termo é

$q + \frac{lp}{2}$

$49 + \frac{5.20}{2} = 99$

O terceiro termo é

$lpq + 2q^2 - 1$

$5.20.49 + 2(49)^2 - 1$

$4900 + 4802 - 1 = 9701$

Os termos seguintes são regidos pela lei:

$E, F, 2qF - E$

$2.49. F - E = 98F - E$

No parágrafo vinte um, Euler comenta sobre outro caso especial, dado $2(l-2)p^2 + 1 = q^2$ é evidente pelo que já vimos, que, se $2l - 4$ for um quadrado, nenhum outro número inteiro pode ser substituído no lugar de p. Todos os números pentagonais serão quadrados, se $l = 4$, pois todo número pentagonal é, de imediato, um quadrado. Alguns serão quadrados se $2l - 4 = 16$, ou 36, ou 64, etc., pois, nesses casos, nenhum será um quadrado, com exceção de 0 e 1. Assim, se $2l - 4 = 16$, teremos $l = 10$ e, portanto, os números poligonais decagonais, cuja forma é $4x^2 - 3x$. Mas, nenhum número decagonal, exceto 0 e 1, é um quadrado no inteiros.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta parte do trabalho faremos algumas considerações acerca da descrição e explicação dos cálculos e manipulações algébricas necessárias ao entendimento do artigo *De solutione problematum diophanteorum per números integros* ("Sobre a solução de problemas diofantinos por números inteiros"), o primeiro sobre equações diofantinas do grande matemático Leonhard Euler, e que foi publicado em 1738, para isto contamos com uma tradução da obra em Latim para o Português (DANTAS e FOSSA (não publicado)). As referidas considerações, que por sua vez representam os resultados gerais do nosso estudo, estarão em consonância com o objetivo geral e objetivos específicos, os quais serão frisados a seguir.

O objetivo geral foi investigar a como o grande matemático Leonhard Euler resolvia Equações Diofantinas a partir da sua primeira obra sobre Equações Diofantinas. Enquanto que os objetivos específicos foram: 1. Situar historicamente o trabalho de Euler em relação ao desenvolvimento dos métodos de resolução de Equações, 2. Situar em que momento de sua vida Euler escreveu o artigo.

A fim de cumprir nosso primeiro objetivo especifico, no Capitulo 2 sobre a História das Equações , fizemos uma pesquisa bibliográfica e verificamos o desenvolvimento dos conceitos e métodos de resolução de equações partindo dos egípcios e babilônios com suas "receitas" descrevendo a solução algorítmica de problemas sem símbolos, isto é, utilizando a retórica,empregando uma álgebra geométrica, passando pelos gregos que vieram a formalizar as receitas, sistematizando os conhecimentos práticos, além de empregarem uma álgebra geométrica, havia também Diofanto com as equações diofantinas e sua a sincopação da álgebra grega, até os europeus, os quais desenvolveram a linguagem simbólica matemática, começaram a aceitar equações com números negativos, números complexos e desenvolveram a solução para equações do terceiro, quarto e quinto graus.

Para alcançar nosso segundo objetivo especifico, no Capítulo 3 fizemos um pesquisa sobre a vida de Euler, mostramos sua origem; professores que o influenciaram, como Jacob Bernoulli, que o introduziu nos primeiros estudos sobre Matemática; os lugares em que morou, ensinou e os vários trabalhos que produziu, a exemplo da Academia de São Petersburgo e os vários artigos que publicou no Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae (CASP); seu casamento com com Katharina Gsell, filha de um pintor suíço, com quem teve treze filhos; bem como, a tuberculose que afetou sua visão, mas não o impediu de continuar trabalhando até sua morte em São Petersburgo em 18 de setembro de 1783, vítima de uma acidente vascular cerebral.

Em cumprimento ao objetivo geral, no capítulo 4 fizemos uma descrição parágrafo analítica do artigo E29 de Euler o *De solutione problematum diophanteorum per números íntegros*, apresentando cálculos não realizados, esclarecendo passagens e fazendo uma análise do processo utilizado.

Verificamos que Euler procura a solução de problemas diofantinos por meio de números inteiros, isto é do problema de fazer com que a expressão generalizada do segundo grau $ax^2 + bx + c$, onde a, b, c e os números a serem substituídos no lugar de x são inteiros, seja igual a um quadrado perfeito, portanto $ax^2 + bx + c = y^2$. Para isto, Euler mostra que encontrando uma primeira solução, outras infinitas podem ser descobertas, chegando ao seguinte teorema:

Se ax^2+bx+c é um quadrado para $x = n$, então também será um quadrado para $x = qn + \frac{bq-b}{2a} + p\sqrt{(an^2+bn+c)}$ e sua raiz será $apn + \frac{bp}{2} + q\sqrt{(an^2+bn+c)}$.

Então, faz uma série de substituições combinando termos e eliminando variáveis, até que o trabalho se resume a encontrar a solução para $q = \sqrt{ap^2 + 1}$, uma equação de Pell. Este trabalho é o primeiro também em que Euler atribui erroneamente esse tipo de equação a Pell.

Ao abordar a solução geral da equação de Pell, ele ilustra vários casos para os valores de a, b *e* c e apresenta um método universal, independente do número denotado por a, atribuindo o método a Wallis, sem explica-lo, mostrando somente um exemplo ilustrativo, o procedimento e apresenta uma tabela que lista o menor valor de p que faz $ap^2 + 1$ um quadrado perfeito (q^2) para cada valor de a de 2 até 68. Apresenta também sucessivas aproximações de $\sqrt{a}$ com o auxilio dessa tabela.

Então, Euler faz uma série de restrições para a equação $ax^2+bx+c = y^2$ e trabalha com diversos subcasos, que vão desde equações incompletas até o trabalho com números triangulares e poligonais.

Observamos também que Euler foi bem cuidadoso ao explicar seu artigo, e que supõe certo conhecimento prévio do leitor, como por exemplo, quando utiliza o método universal no parágrafo dezesseis e não o explica, pois afirma que o método é descrito numa conhecida obra de Wallis, mas não a cita, mas que descobrimos ser *Commercium*.

Além disso, destacamos uma grande quantidade de erros de composição do editor da revista, dizemos erros de composição porque todas as vezes que observamos alguma discrepância entre nossos cálculos e o resultados de Euler, o termo é retomado em seguida, da forma como calculamos, isto é, Euler utiliza os termos que encontramos nos cálculos subsequentes, confirmando que não se trata de um erro em seus cálculos e sim um erro de composição do editor da revista *Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*.

O artigo de Euler mostra como uma equação indeterminada (diofantina) do segundo grau pode ser reduzida a uma equação de Pell, sendo uma introdução a muito sobre Teoria dos Números que esta envolvida em seus trabalhos, como o E-79 de 1762, onde ele retorna como o mesmo tópico com o titulo *De resolutione formularum quadraticarum indeterminarum per números íntegros* (Sobre a solução das formulas indeterminadas quadradas por números inteiros); o E323 com o titulo *De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo* (Sobre o uso de um novo algoritimo para resolução de problemas pellianos) e o E559 *Nova subsidia pro resolutione formulae* $axx + 1 = yy$ (Novo subsidio para reolução da formula $axx + 1 = yy$), que ainda não tem uma tradução dos originais em latim, nem tiveram um tratamento descritivo e uma analise matematica como fizemos com o artigo E29 nesse trabalho, então como uma continuidade seria interessante trabalhar com esses artigos numa futura pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEKKEN, O. B. *Equações de Ahmes até Abel*. Trad. José Paulo Carneiro. Rio de Janeiro: Universidade Santa Úrsula, 1994.

BOYER, C. B. *História da Matemática***.** São Paulo: Ed. Edgard Blücher, 1974.
_______________. *História da Matemática***.** São Paulo: Ed. Edgard Blücher, 1996.

CALINGER, R. (1996). *Leonhard Euler: The First St. Petersburg Years (1727-1741),* Historia Mathematica vol. 23, pp.121-166.

CAJORI, F. *Uma História da Matemática*. Trad. Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 1991.

_____________.*Uma História da Matemática*. Trad. Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.

COELHO, S. P., MACHADO, S. D. A., MARANHÃO, M. C. S. A. Qual a álgebra a ser ensinada em cursos de Formação de professores de matemática? . In: II SIPEM.2003. Santos.Anais.

CONDORCET, M. *Eulogy to Mr. Euler*. *History of the Royal Academy of Sciences.* 1783. Disponível em: <eulerarchive.maa.org/historica/condorcet.pdf>. Acesso em: 1 jan. 2010.

COSTA, E. S. *Equações Diofantinas Lineares e o Professor do Ensino Médio.* 2007. 118 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Puc, São Paulo, 2007.

DAHANDALMEDICO A., PEIFFER J. *Une Histoire des Mathématiques*: *Routes et dédales*. Points Sciences. Paris: Seuil, 1986.

DEBNATH, L. *The Legacy of Leonhard Euler*. *A Tricentinnial Tribute.* London: Imperial College Press. 2010.

DUNNHAM, W. *Euler: The Master of Us All.* Washington: The Mathematical Association of America, 1999.

EULER, L. *De solutione problematum diophanteorum per números íntegros*. In: Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae**.** Rússia: St. Petersburg Academy, 1738, pp. 175-188.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. São Paulo: Ed. Unicamp, 2004.

FELLMAN, E. A. *Leonhard Euler*. Berlin: Birkhäuser Verlag, 2007.

FOSSA, J. A. *Os primórdios da teoria dos números*. Parte B. Volume 1. Arquivo para a História da Teoria dos Números e da Lógica. Natal: EDUFRN. 2010.

___________ . *A controvérsia Cardano-Tartaglia.* In: Org. Iran Abreu Mendes, A Matemática no Século de Andrea Palladio. Natal: EDUFRN, 2008, pp. 152-157.

FRAGOSO, W. C. *Uma Abordagem Histórica da Equação do Segundo Grau*. In: Revista do Professor de Matemática n 43. Santa Maria: SBM, 2000, p.20-25.

FUSS, N. *Eulogy of Leonhard Euler*. 2005. Disponível em: <archive.maa.org/historica/ fuss.pdf> Acesso em: 1 jan. 2010.

GAUTSCHI. *Leonhard Euler: His life, the man, and his Works.*2008. Disponível em: <www.euler-2007.ch/doc/EulerLec.pdf> Acesso em: 1 jan. 2010

HEATH,T. L. *A History of Greek Mathematics: From Aristarchus to Diophantus.* Dover Publications, 2006.

HOFFMANN, P. (2007) *Leonhard Euler and Russia in Lenhard Euler: Life, Work and Legacy*. Studies in History and Philosophy of Mathematics vol. 5. Netherlands: Editors Bradley R. E. and Sandifer C. E. Elsevier, 2007.

MARANHÃO, M. C. S. A.; MACHADO, S. D. A.; COELHO, S. P. (2005). *Projeto: O que se entende por Álgebra?* PUC. São Paulo, 2005.

OLIVEIRA, S. B. *As equações Diofantinas Lineares e o livro didático de Matemática para o Ensino Médio*. 2006. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Puc, São Paulo, 2006.

POMMER,W. M. *Equações diofantinas lineares: um desafio motivador para alunos do ensino médio*. 2008. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Puc, São Paulo, 2008.

RĀSHID, R. *The development of Arabic mathematics: between arithmetic and álgebra*. Springer, 1994

RESENDE, M. R. *Re-significando a Disciplina Teoria dos Números na Formação do Professor de Matemática na Licenciatura*. 2007. 281 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Puc, São Paulo, 2007.

RIBEIRO, A. J. (2007). *Equação e seus Multisignificados no Ensino de Matemática: Contribuições de um Estudo Epistemológico.* 2007. 141 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Puc, São Paulo, 2007.

RONAN, C. A. *História ilustrada da ciência - das origens à Grécia*. Trad. Jorge Enéas Fortes. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1994.

SANDIFER, E. C. *Euler and Pell. How Euler did it.* The MAA Tercentenary Euler Celebration. MAA, 2007.

SMITH, D. E. *History of Mathematics*. Volume II. New York: Dover Publications, 1958.

___________. *History of Mathematics*. Volume II. New York: Dover Publications, 1990

VARADARAJAN, V. S. *Euler Through Time: A new Look*. USA: American Mathematical Society, 2006.