**F09**

- Generaliserade integraler
- Medelvärden & moment

## Repetition: Dubbel- och trippelintegral

$$\iint f\,\underline{dA}$$

areaelement

$$\iiint f\,\underline{dV}$$

volymelement

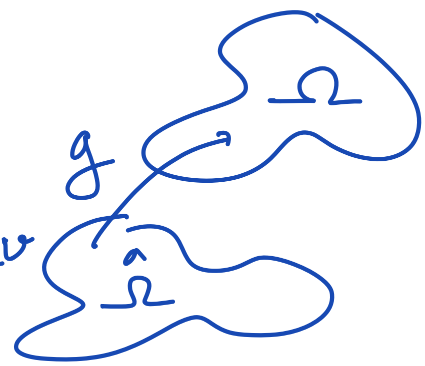
$$\int_c^d \left( \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Fubinis sats

$$\int_e^g \left( \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y,z)\,dx \right) dy \right) dz$$

↑ Inre gränser kan bero på yttre variabler

$$\iint_{\Omega} f\,\underbrace{dA}_{dxdy} = \underline{\iint_{\hat{\Omega}} f\circ g\,|\det g'|\,d\hat{A}} \quad dudv$$

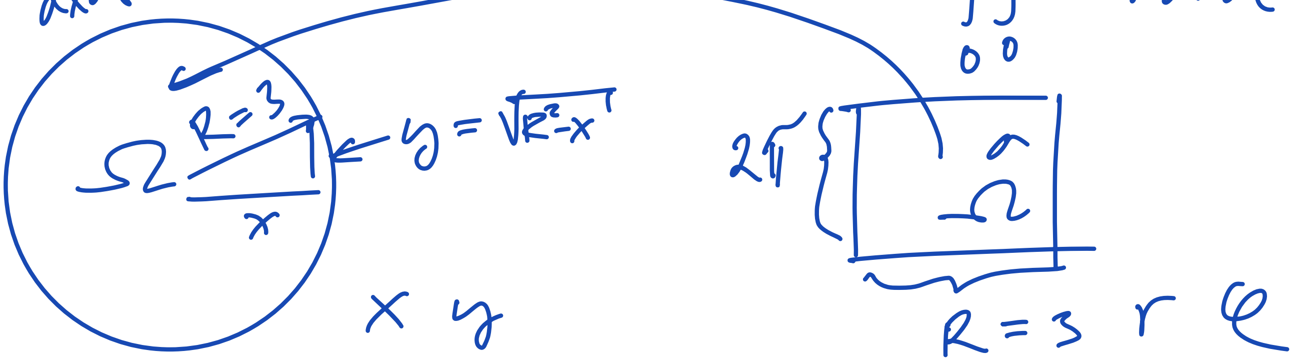



**Exempel:**

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} = g(r,\varphi)$$

$$|\det g'| = r \Rightarrow dxdy = \underline{r\,dr\,d\varphi}$$

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dxdy \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^3 r\,dr\,d\varphi$$



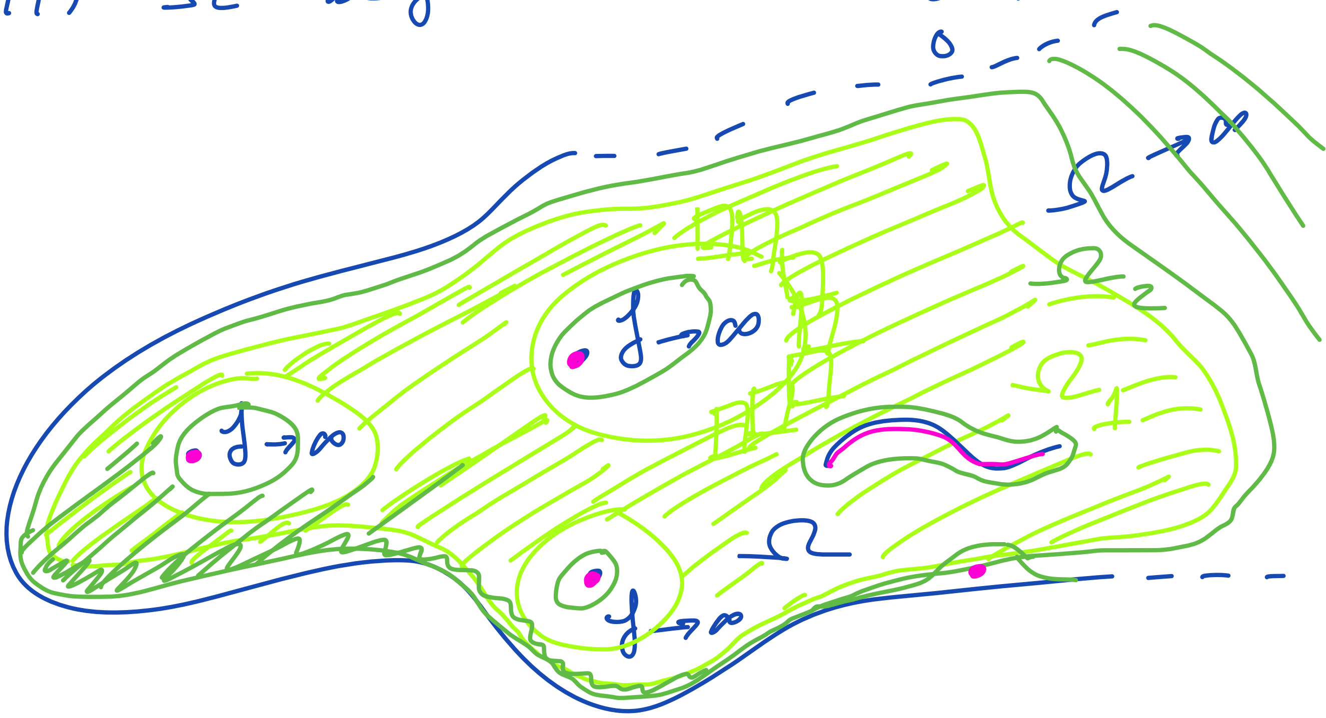
- Generaliserade integraler

Vi har antagit att:

(i) $f$ begränsad $\leftarrow$ $\sum\sum f_{kl}^{sup} \Delta x_k \Delta y_l$

(ii) $\Omega$ begränsat

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$




**Def.** Generaliserad integral

$$\iint_\Omega f\,dA = \lim_{k\to\infty} \iint_{\Omega_k} f\,dA$$

om gränsvärdet existerar så är $f$ generaliserat integrerbar på $\Omega$.

**Definition:** Uttömmande svit

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $(\Omega_k)_{k=0}^{\infty}$ begränsade delmängder

$\Omega_k \subseteq \Omega_{k+1}$, "$\lim_{k\to\infty} \Omega_k = \Omega$"

**Obs!** $f$ måste vara positiv (eller negativ). Annars kan vad som helst hända!

**Exempel:**

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \underbrace{e^{-|x|-|y|-|z|}} \, dx\,dy\,dz$$

Separabel!

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-|x|} \cdot e^{-|y|} \cdot e^{-|z|}} \, dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|}\,dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z|}\,dz$$

jämn

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx\right)^3 = \left(2\int_0^{\infty} e^{-|x|}\,dx\right)^3 = 8\left(\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx\right)^3$$

$$= 8 \cdot \left(-\left[e^{-x}\right]_0^{\infty}\right)^3 = 8 \cdot (-0+1)^3 = \underline{\underline{8}}$$

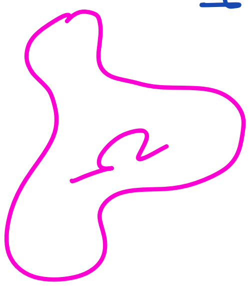
Konvergent!

- Medelvärden & moment

enkel-, dubbel eller trippelintegral

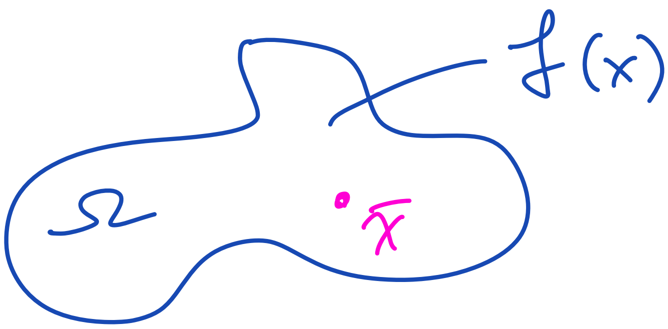
Definition:

$$\bar{f}_\Omega = \frac{\int_\Omega f\,dx}{\int_\Omega 1\,dx} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\,dx$$




längd
area
volym

Fråga: Antar en funktion alltid sitt medelvärde i en punkt?




$$\exists\, \bar{x} \in \Omega : f(\bar{x}) = \bar{f}_\Omega \, ?$$

## Definition: Bågvis sammanhängande

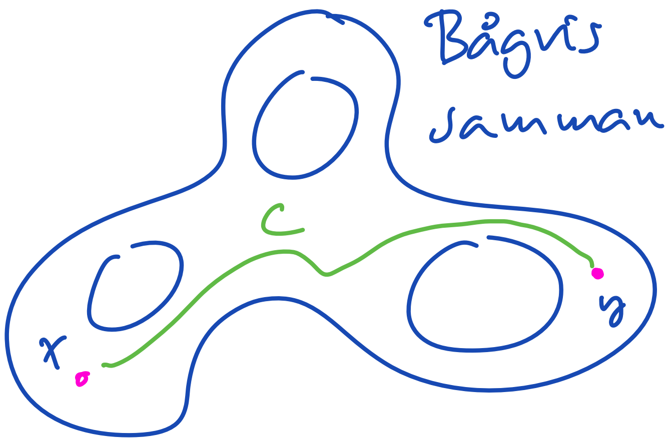
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ är bågvis sammanhängande om

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$

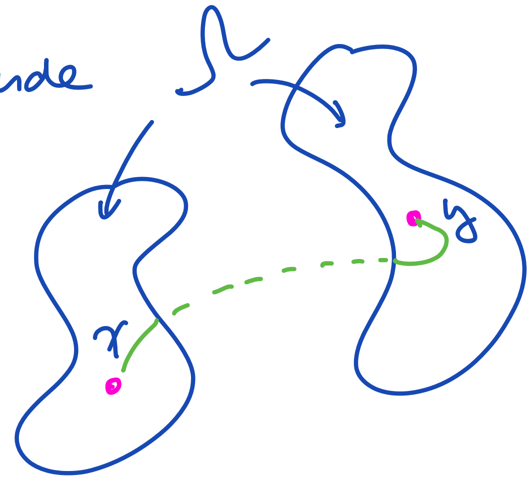
$\forall\, x, y \in \Omega \;\; \exists$ kurva $C \subseteq \Omega$

$y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$

som binder samman $x$ och $y$




Bågvis sammanhängande




Ej bågvis sammanhängande

## Sats: Medelvärdessatsen för integraler

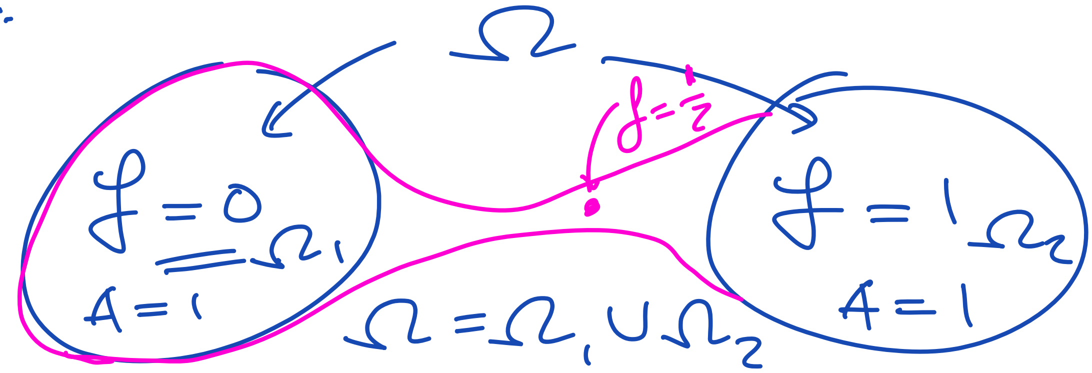
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sammanhängande och kompakt
(och mätbar) (begr. sluten)

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ kontinuerlig

$$\Longrightarrow \exists\, \bar{x} \in \Omega \text{ s.a. } f(\bar{x}) = \frac{\int_\Omega f\,dx}{|\Omega|}$$

Ja! Finns medelvärdespunkt om $\Omega$ är sammanhängande $= \bar{f}_\Omega$

Exempel:




$$\bar{f}_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f \, dx$$

$$= \frac{1}{1+1} \left( \int_{\Omega_1} f \, dx + \int_{\Omega_2} f \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (0 + 1) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Definition: Viktat medelvärde

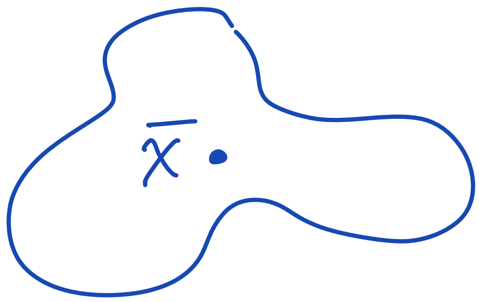
$$\bar{f}_{\Omega, w} = \frac{\int_\Omega f \underline{\underline{w}} \, \underline{\underline{dx}}}{\int_\Omega \underline{\underline{w}} \, dx} \qquad w \geq 0$$

(Tidigare hade vi $w = 1$)

**Definition:** Masscentrum

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Densitet $\varrho$




Vektor!

$$\bar{x} = \frac{\int_\Omega x \varrho \, dx}{\int_\Omega \varrho \, dx} = \frac{\int x \varrho(x) \, dx}{M}$$

Vektor!

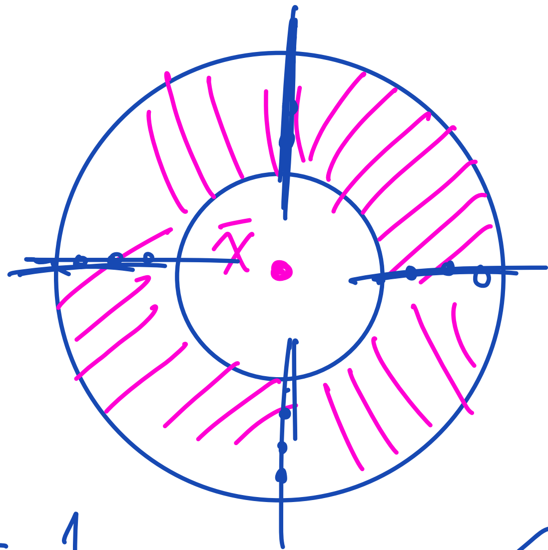
$=$ Viktade medelvärdet av koordinaterna med vikt $\varrho$

**Notera:**

$$\bar{x}_i = \frac{\int_\Omega x_i \varrho(x) \, dx}{M}$$

$i = 1, 2, 3$

**Fråga:** Innebär medelvärdessatsen för integraler att masscentrum alltid ligger innanför kroppen?

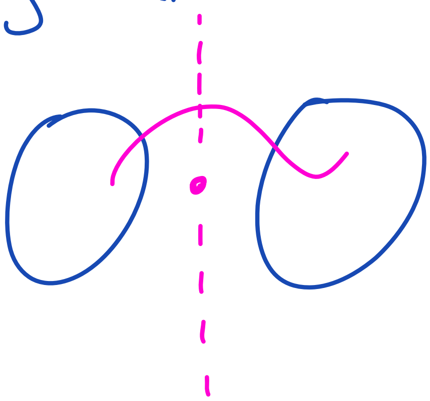


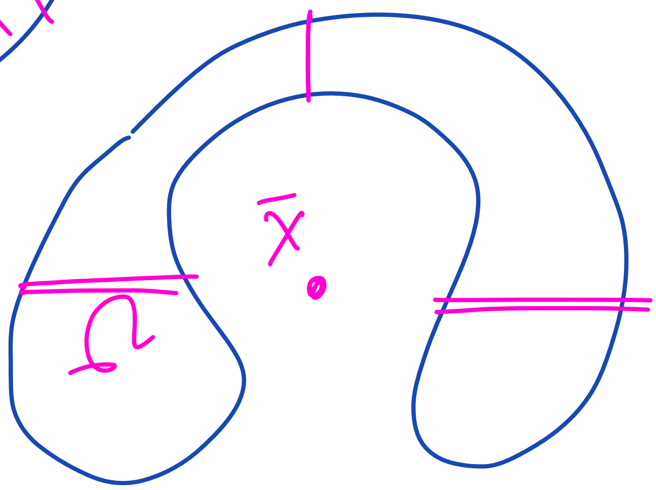

**Svar:** Nej!

$f(x_1, x_2) = x_1$

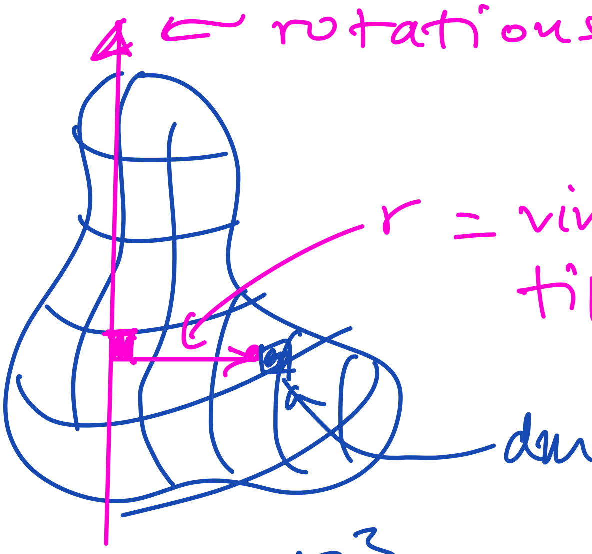
$$\bar{x}_1 = \frac{\int_\Omega x_1 \, dx}{|\Omega|}$$

$\rho = 1$





# Definition: Tröghetsmoment




$\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$I = \int_\Omega r^2 \underbrace{dm}_{=\rho\, dx = \rho\, dV} = \int_\Omega \underbrace{r^2 \rho(x)\, dx}_{=m} = \iiint_\Omega r^2 \underbrace{\rho\, dV}_{=dm}$$

## Newtons andra lag

$$\tau = I \alpha$$

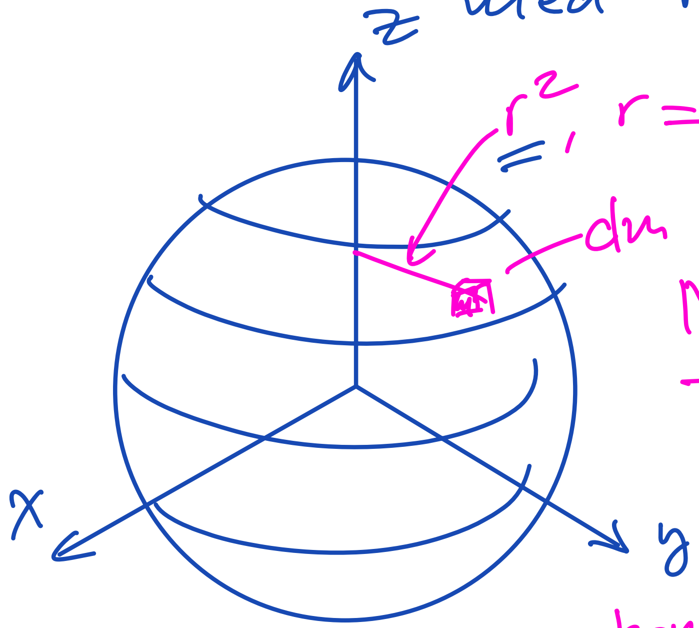
Tröghetsmoment

Vinkelacceleration

vridmoment

$$F = ma$$

## Exempel: Tröghetsmoment för klotet med radie $R$ och massa $M$




$r^2$, $r$ = vinkelräta avståndet till $z$ axeln.

Notera: $r^2 = x^2 + y^2$ (ej $+z^2$)

$$I = \int_\Omega r^2 \underbrace{\rho}_{\text{konstant}} \, dx = \rho \int_\Omega r^2 \, dx$$

$$= \rho \iiint_\Omega r^2 \, dV, \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

Sfäriska koordinater:

$$g = \begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

$$g' = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\det g' = r^2 \sin\theta$$

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

Inte samma $r$ som ovan!

$$\Rightarrow I = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \underbrace{\left(r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\right)}_{= x^2+y^2} \times r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^4 \sin^3\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 2\pi\rho \int_0^{R} r^4\, dr \cdot \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2\pi\rho R^5}{5} \cdot \int_0^{\pi} \underbrace{\sin^2\theta}_{=1-u^2} \cdot \underbrace{\sin\theta\, d\theta}_{=-du}$$

Đặt $u = \cos\theta$

$\Rightarrow \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-u^2$

$\Rightarrow du = -\sin\theta\, d\theta$

$$= \frac{2\pi\rho R^5}{5} \int_{-1}^{1} (1-u^2)\, du = \frac{2}{5} M R^2$$