MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefon: 031–772 5346

Tentamen 2024-05-27
Kurskod: MVE255
Hjälmedel: Inga

$\boxed{\text{Demo}}$ • Frågestund tenta

TENTAMEN 2024-05-27

MVE255 Flervariabelanalys och partiella differentialekvationer

---

Tentamen består av fyra delar:

- Del A: Teorifrågor ($4 \times 2\text{p} = 8\text{p}$)
- Del B: Räkneuppgifter ($6 \times 3\text{p} = 18\text{p}$)
- Del C: Programmering ($3 \times 3\text{p} = 9\text{p}$)
- Del D: Problem ($3 \times 5\text{p} = 15\text{p}$)

På del **A**, **B** och **C** skall **endast svar** anges. Poäng ges endast för rätt svar; delpoäng ges endast i undantagsfall.

På del **A** skall svaret anges som ett eller två ord.

På del **B** och del **C** skall svar anges exakt, dvs utan avrundning. Uppgifterna är konstruerade så att det krävs maximalt tre decimaler.

På del **D** skall **fullständiga och välskrivna lösningar** lämnas in. Dessa uppgifter kan också ge delpoäng för delvis fullständiga lösningar.

Tentamen kan ge maximalt **50p**. Till detta läggs de bonuspoäng som tjänats ihop under kursens gång. Betygsgränser är **20p (betyg 3)**, **30p (betyg 4)** och **40p (betyg 5)** för det sammanlagda resultatet.

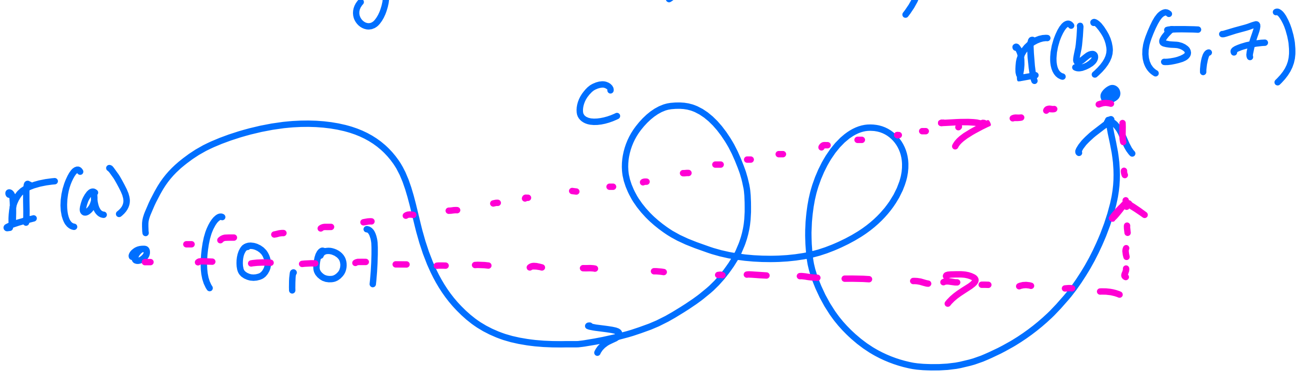
Lycka till!

Anders

Arbete

- Tangentkurvintegral med potential

$$\mathbf{F} = \left(\pi y^3 \cos(\pi x) + 2xy,\; 3y^2 \sin(\pi x) + x^2\right)$$



Vet att

$$W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \underbrace{\phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a))}_{}$$

$$\int_a^b \mathbf{F}\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

om $\mathbf{F} = \nabla\phi$

om $\underbrace{\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0}_{}$

om konservativ (cirkulation $= 0$)

Kolla om $\nabla \times \mathbf{F} = 0$

$$\mathbf{F} = \Big(\underbrace{\pi y^3 \cos(\pi x) + 2xy}_{=F_x},\; \underbrace{3y^2 \sin(\pi x) + x^2}_{=F_y}\Big)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

$$= \left(3\pi y^2 \cos(\pi x) + 2x\right) - \left(3\pi y^2 \cos(\pi x) + 2x\right) = 0$$

$\Rightarrow \quad \mathbb{F} = \nabla\phi$

$$F_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} \Rightarrow \phi = \int F_x\,dx$$

$$F_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} \Rightarrow \phi = \int F_y\,dy$$

$$\phi = \int \pi y^3\cos(\pi x) + 2xy\,dx = y^3\sin(\pi x) + x^2y + g_x(y)$$

$$\phi = \int 3y^2\sin(\pi x) + x^2\,dy = y^3\sin(\pi x) + x^2y + g_y(x)$$

$\Rightarrow \quad g_x = g_y = C$

$\Rightarrow \quad \phi = y^3\sin(\pi x) + x^2y + C$

Tag $C=0$

$$W = \phi(5,7) - \phi(0,0)$$

$$= 7^3\cdot\sin(5\pi) + 25\cdot 7 - 0$$

$$= 25\cdot 7 = \underline{\underline{175}}$$

2

2023-05-29

flöde = normalytintegral

A.8 Bestäm flödet av vektorfältet $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{1}{9\pi}(x^3-y^3, y^3-z^3, z^3-x^3)$ genom sfären med radie $r = 3$ och centrum i origo.

Gauss sats:

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\mathbb{F}\, dV$$

$$\mathbb{F} = \frac{1}{9\pi}(x^3-y^3, y^3-z^3, z^3-x^3)$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\mathbb{F} = \frac{1}{9\pi}(3x^2+3y^2+3z^2)$$

$$= \frac{1}{3\pi} r^2 \qquad x^2+y^2+z^2 = r^2$$

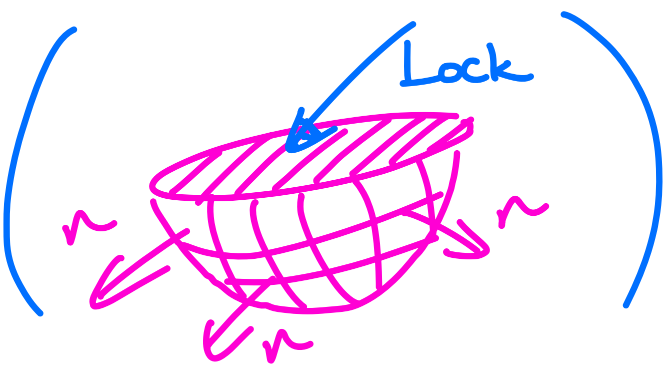
$$\Rightarrow \iint_{\partial\Omega} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{3} r^2\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

Separabel

$$= \frac{1}{3\pi}\cdot 2\pi \cdot \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \cdot \int_0^{3} r^4\, dr$$

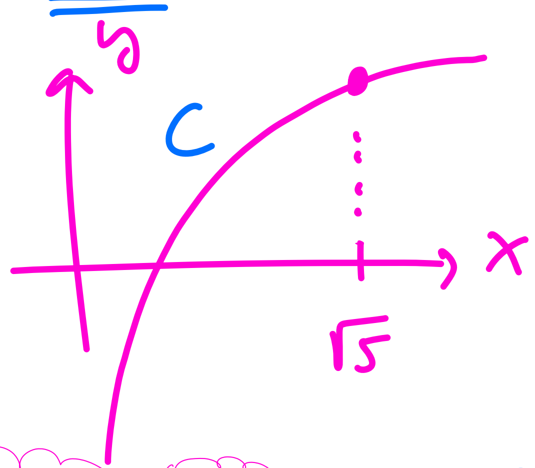
$$= \frac{2}{3}\cdot 2 \cdot \frac{3^5}{5} = \frac{4\cdot 3^4}{5} = \frac{324}{5}$$

$$= \frac{648}{10} = 64.8$$



2023-10-06

A.7 Bestäm kurvintegralen av funktionen $f(x,y) = 3x^2$ längs kurvan $y = 2\ln(x)$ för $0 < x < \sqrt{5}$.



Parametrisera:

$$\mathbf{r}(x) = (x, 2\ln(x))$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2\ln(t) \end{cases}$$

$y = 2\ln(x)$
$0 \le x \le \sqrt{5}$
$\mathbf{r} = (x(t), y(t))$
$= (t, 2\ln(t))$

$x = t$

$x(t) = t$

$$\Rightarrow \mathbf{r}'(x) = \left(1, \frac{2}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{r}'\| = \sqrt{1 + 4/x^2}$$

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(x)) \cdot \|\mathbf{r}'\|\,dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{5}} 3x^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}\,dx = \int_0^{\sqrt{5}} 3x\sqrt{x^2+4}\,dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{5}} 3x \cdot (x^2+4)^{1/2}\,dx = \Big[(x^2+4)^{3/2}\Big]_0^{\sqrt{5}}$$

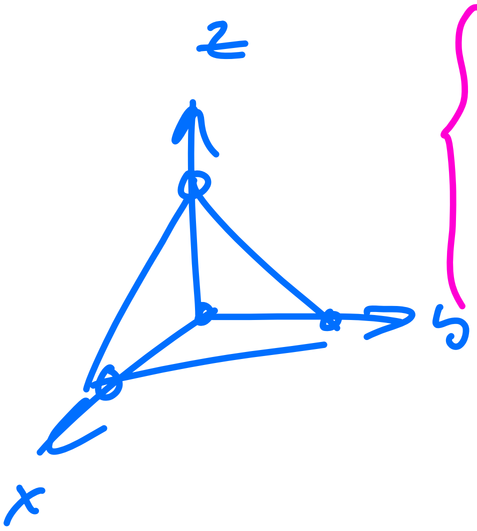
$2x$

$$= (5+4)^{3/2} - 4^{3/2} = 9^{3/2} - 4^{3/2}$$

$$= 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = \underline{\underline{19}}$$

2022-08-26

A.9 Bestäm värdet av den linjära interpolanten $\pi_h f(x,y,z)$ i punkten $(0.1, 0.1, 0.1)$ för $f(x,y,z) = \cos(\pi x)\cos(\pi y)\cos(\pi z)$ på referenstetraedern.



$$\begin{cases} v^1 = (0,0,0) \\ v^2 = (1,0,0) \\ v^3 = (0,1,0) \\ v_4 = (0,0,1) \end{cases} \qquad \begin{cases} \phi_1 = 1-x-y-z \\ \phi_2 = x \\ \phi_3 = y \\ \phi_4 = z \end{cases}$$

$$\pi_h f = \sum_{i=1}^{4} f(v^i)\,\phi_i(x,y,z)$$

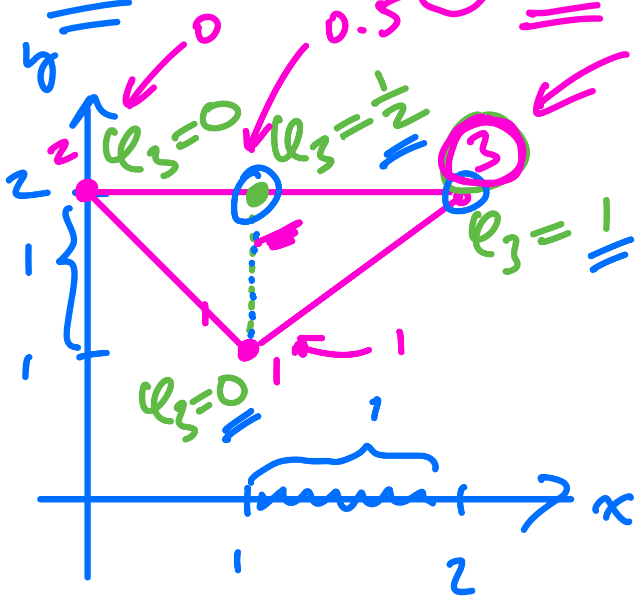
$f(v^1) = 1 \qquad f(v^2) = -1 \qquad f(v^3) = -1 \qquad f(v^4) = -1$

$$\Rightarrow \quad \pi_h f = 1\cdot(1-x-y-z) - x - y - z$$
$$= 1 - 2x - 2y - 2z$$

$$\pi_h f(0.1, 0.1, 0.1) = 1 - 0.2 - 0.2 - 0.2 = \underline{\underline{0.4}}$$

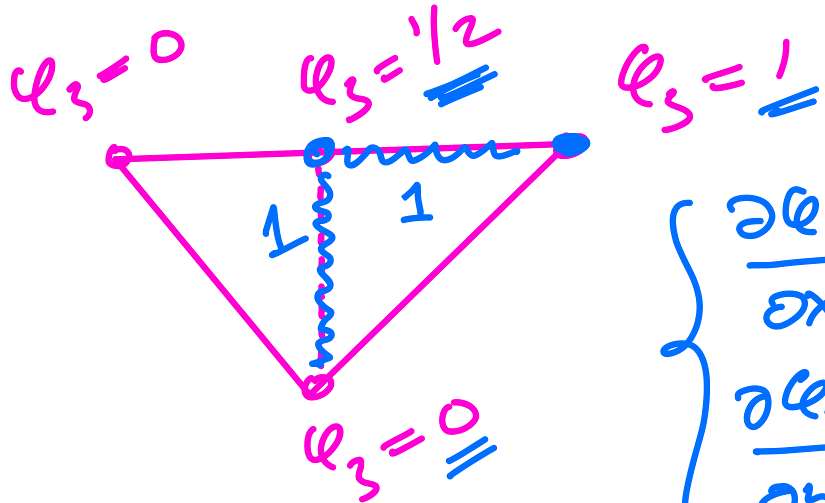
2021-05-31

A.11 Bestäm längden av gradienten av basfunktionen φ_3 på triangeln T med hörnen $v^1 = (1,1)$, $v^2 = (0,2)$, $v^3 = (2,2)$.



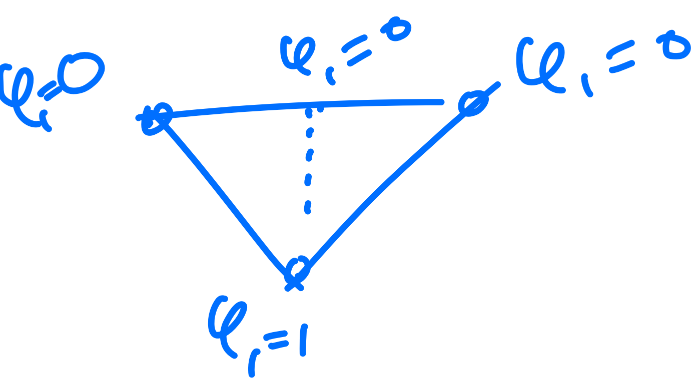
$$\nabla \varphi_3 = (0.5, 0.5)$$

$$\Rightarrow \|\nabla \varphi_3\| = \sqrt{0.5^2 + 0.5^2} = \sqrt{0.5} = \underline{\underline{1/\sqrt{2}}}$$



$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x} = 0.5 \\ \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial y} = 0{,}5 \end{cases}$$

$$\nabla \varphi_3 = (0.5, 0.5)$$



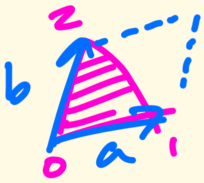
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -1 \end{cases}$$

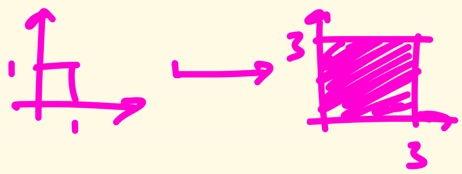
2023-08-25

C.2 Vilket tal är det tänkt att programmet skall räkna ut (variabeln s)?

Python code

```
from generate_mesh_2d import *

V, K = generate_mesh_2d(32, 32)

V = 3*V   # Notera!
s = 0.0

for k in K:
    a = V[k[1]] - V[k[0]]
    b = V[k[2]] - V[k[0]]
    c = 0.5*abs(a[0]*b[1] - a[1]*b[0])
    s += c

print(s)
```



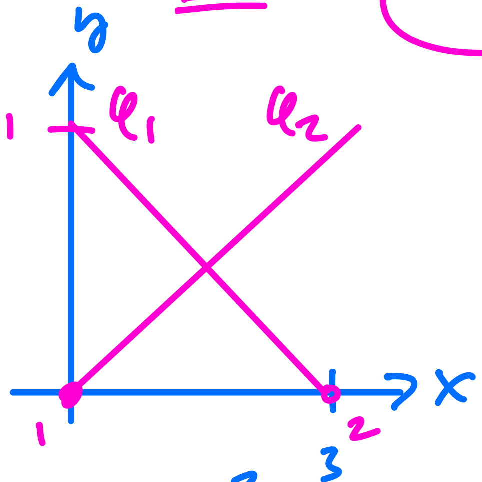


a × b

s = 3 · 3 = 9

2023-05-29

A.11 Bestäm determinanten av massmatrisen för två styckvis linjära basfunktioner på intervallet $[0,3]$. Ledning: $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ för $x_1 = 0$ och $x_2 = 3$.



$$\begin{cases} \varphi_1 = 1 - x/3 \\ \varphi_2 = x/3 \end{cases}$$

$$y = kx + m$$

$$M_{ij} = \int_0^3 \varphi_1 \varphi_2 \, dx$$

$$M_{12} = \int_0^3 (1 - x/3)\, x/3 \, dx =$$

$$= \int_0^3 \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} \, dx = 1/2$$

$$M_{11} = \int_0^3 (1 - x/3)^2 \, dx = 1$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det = 1 - \frac{1}{4} = \underline{0.75}$$

$$\varphi_1(x) = k\underline{x} + m$$

$$\varphi_1(0) = 1 \quad \Rightarrow k \cdot 0 + m = 1 \Rightarrow m = 1$$

$$\varphi_1(3) = 0 \quad \Rightarrow k \cdot 3 + \underbrace{m}_{=1} = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{q = 1 - \frac{1}{3} \cdot x}}$$