$\boxed{F19}$

- Inlämningsuppgift
- Fabricering av analytiska lösningar
- Normer för funktioner: $\|f\| = ?$
- Konvergensstudier
- Frågestund: Uppgift 7.2

* Inlämning

- 10 bevis + 7.1 eller 7.2
- 7.1 Advektions-diffusionsekvationen

$$\dot{u} + \left(\underbrace{-\varepsilon \Delta u}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\beta \cdot \nabla u}_{\text{Advektion}} = f \right) \xrightarrow{\text{FEM}} AU = b$$

$\varepsilon = \kappa$

- 7.2 Schrödinger-ekvation

$$-\tfrac{1}{2}\Delta u + Vu = \underline{\lambda} u \xrightarrow{\text{FEM}} AU = \lambda U$$

* Fabricering av analytiska lösningar

$$\underbrace{u_h}_{\text{numerisk lösning}} \approx \overbrace{u}^{\text{exakt lösning}}$$

Vill kontrollera att koden stämmer

1. Bestäm $u = u(x, y, z)$
2. Stoppa in i ekvationen
3. Bestäm högerledet f
4. Beräkna lösning u_h
5. Jämför u och u_h

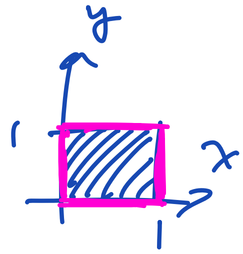
$$A(\overset{u = \sin(x)}{u}) = f$$

Ex:

$$-\Delta u = f \quad \text{(Poissons ekvation)}$$

Exempel: Poissons ekvation

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{i} \quad \Omega = [0,1]^2 \\ u = u_D & \text{på} \quad \partial\Omega \end{cases}$$



Randvärdesproblem

Tag $u(x,y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$

$$\Rightarrow \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \big(2\pi\cos(2\pi x)\sin(2\pi y), \; 2\pi \sin(2\pi x)\cos(2\pi y)\big)$$

$$\Rightarrow \Delta u = \nabla \cdot \nabla u = -4\pi^2 \sin(2\pi x)\sin(2\pi y) - 4\pi^2 \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$$

$$= -8\pi^2 \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$$

$$\Rightarrow f = -\Delta u = 8\pi^2 \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$$

På randen: $u = 0 \qquad (u_D = 0)$

$\therefore \quad u(x,y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$

är lösning till

$$\begin{cases} -\Delta u = \underbrace{8\pi^2 \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)}_{=f} \\ u = 0 \quad \text{på} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Notera: $$f = 8\pi^2 \underbrace{\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)}_{=u}$$

$$= \underline{\underline{8\pi^2 u}}$$

$$-\Delta u = 8\pi^2 u$$

$$\lambda = 8\pi^2$$

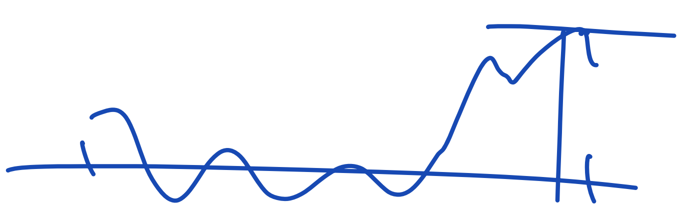
$$-\Delta u = \lambda u$$

$\therefore$ $u = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$ är en egenfunktion med egenvärde $\lambda = 8\pi^2$

* Normer för funktioner

Maxnormen:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$



$= \|f\|_\infty$

Avstånd i maxnorm:

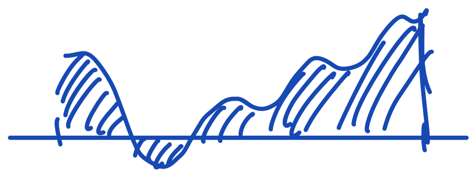
$$\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x) - g(x)|$$

L^p-norm:

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, dx \right)^{1/p}$$

p=1

$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f| \, dx \qquad (L^1\text{-norm})$$



p=2

$$\|f\|_2 = \left(\int |f|^2 dx \right)^{1/2} \qquad (L^2\text{-norm})$$

Skalärprodukt:

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f g \, dx$$

$$\langle f, f \rangle = \int_\Omega |f|^2 dx$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Felet:

$$\|u-u_h\|_2 = \left(\int_\Omega (u-u_h)^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Felet i L^2-normen

* Konvergensstudier

För en numerisk metod med polynom av grad r förväntar vi oss konvergens av grad $r+1$

$$\|u-u_h\|_2 \leq C \cdot h^{r+1}$$

C: konstant, h: nätstorlek

För derivatan tappar vi en konvergensordning:

$$\|\nabla u - \nabla u_h\| \leq C \cdot h^r$$

Om $r=1$ (styckvis linjära polynom):

$$\|u-u_h\|_2 \leq C \cdot h^2 \quad \text{(kvadratisk)}$$

$= e$

$$e = C \cdot h^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ln e}_{= y} = \ln(Ch^2)$$

$$= \ln C + \ln h^2$$

$$= \underbrace{\ln C}_{m} + 2 \underbrace{\ln h}_{= x}$$

$$\boxed{y = kx + m}$$ (rät linje)

$k = 2$ (konvergensordning)

Bestäms m.h.a polyfit()

p = polyfit(log(h), log(e), 1)

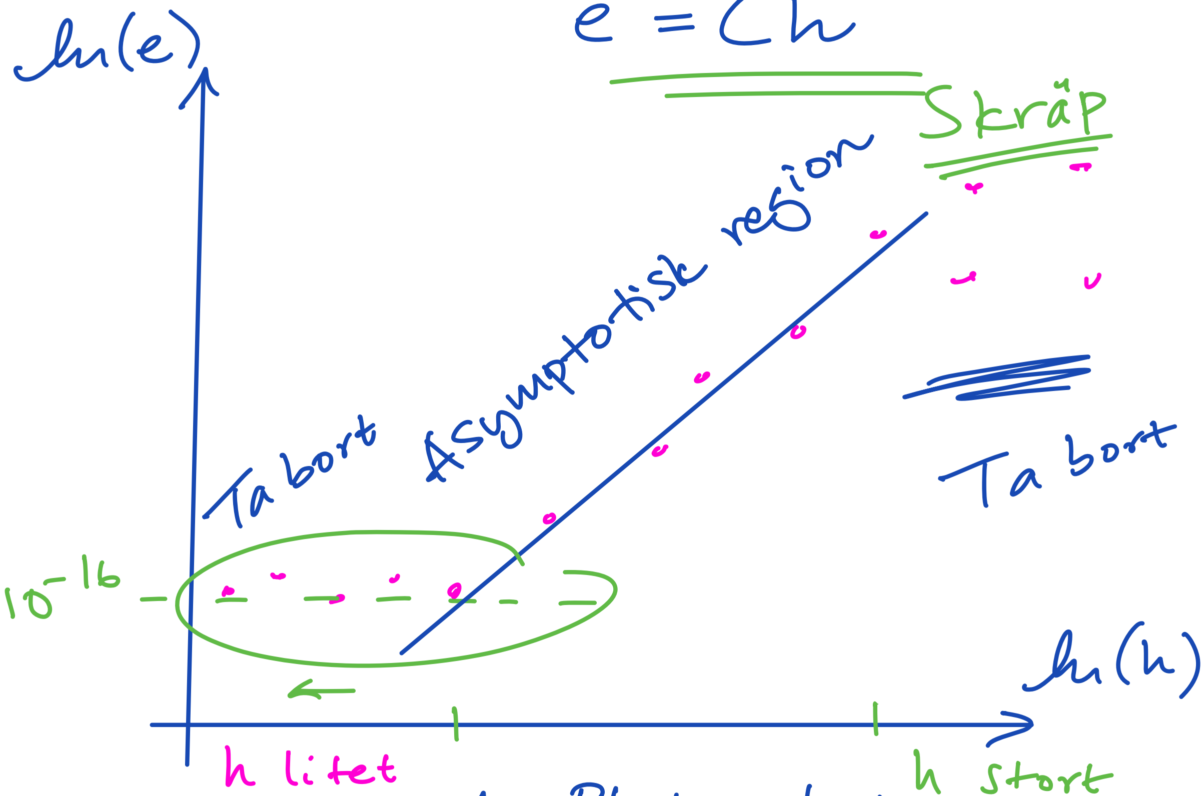
p = [k, m]

Rät linje!

k = p[0]

Exempel:

$$e = Ch^{r+1}$$



Python

loglog(h, e)

1. Plotta loglog
2. Välj värden
3. Anpassa med polyfit
4. Plotta linje

* FEM och egenvärdesproblem

$$\underset{\int * v}{-\frac{1}{2}\Delta u} + \underset{\int * v}{Vu} = \lambda u$$

Stark

$$\int_\Omega -\frac{1}{2}\Delta u\, v\, dx + \int_\Omega Vuv\,dx = \lambda \int_\Omega uv\,dx$$

Integrera partiellt

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega Vuv\,dx = \lambda \int_\Omega uv\,dx$$

e_i e_i e_i

Svag

Ansats: $u_h = \sum_{j=1}^{N} u_j e_j$

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \underbrace{\left(\int_\Omega \frac{1}{2}\nabla e_j \cdot \nabla e_i\, dx + \int V e_j e_i\, dx \right)}_{= A_{ij}} = \lambda \sum_{j=1}^{N} u_j \underbrace{\int e_j e_i\, dx}_{M_{ij}}$$

$$\boxed{AU = \lambda MU}$$