

Kapitel 1

Övningar

Ö1.1 (a) 1 (b) $\sqrt{14}$ (c) \sqrt{n} (d) $\sqrt{\frac{(2n+1)n(n+1)}{6}}$

Ö1.2 (a) 1 (b) 3 (c) 1 (d) n

Ö1.3 —

Ö1.4 —

Ö1.5 (a) $\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \neq x_2\}, \mathcal{R}f = \mathbb{R}$ (b) $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^2, \mathcal{R}f = \mathbb{R}^+$
(c) $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^2, \mathcal{R}f = (0, 1]$ (d) $\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, x_2) \neq (0, 0)\}, \mathcal{R}f = \mathbb{R}^+$

Ö1.6 (a) En cirkel i origo med radie 1 (b) En cirkel i $(2, 0)$ med radie 2
(c) En kvadrat med hörn i $(0, -1), (1, 0), (0, 1)$ och $(-1, 0)$ (d) Punkten $(0, 0)$

Ö1.7 Inre punkt, yttre punkt, randpunkt, öppen, sluten, begränsad:
(a) $(1, 1), (0, 0), (1, 0)$, ja, nej, nej (b) $(1, 0), (0, 1), (0, 0)$, nej, ja, ja
(c) $(3, 0), (\frac{3}{2}, 0), (1, 0)$, nej, nej, nej (d) $(1, 0)$, saknas, $(0, 0)$, ja, nej, nej

Ö1.8 (a) 0 (b) saknas (c) 0 (d) 0

Ö1.9 (a) 1 (b) saknas (c) saknas (d) saknas

Ö1.10 (a) ja (b) nej (c) ja (d) nej

Ö1.11 (a) $\frac{3}{5}$ (b) $-\frac{4}{5}$ (c) $\frac{16}{125}$ (d) $\frac{9}{125}$

Ö1.12 (a) $\frac{27}{8}$ (b) $-\frac{3}{20}$ (c) 18 (d) 84

Ö1.13 (a) x_2 (b) $-3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$ (c) $\begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 + x_1 \\ 1 + x_2 \end{bmatrix}$

Ö1.14 (a) $\begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} - x \\ 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 + x_1 \\ 1 + e(x_1 + x_2 - 1) \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2x_2 - 1 \\ 2x_1 - 1 \end{bmatrix}$

Ö1.15 (a) $z = 1$ (b) $z = x$ (c) $z = 2x + 4y - 3$ (d) $z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$

Ö1.16 (a) $6xz^2$ (b) 0 (c) $6x^2$ (d) 0

Ö1.17 (a) $4xy^2ze^{x^2y^2}\cos(z^2)$ (b) $4x^2yze^{x^2y^2}\cos(z^2)$
(c) $4y^2z(1 + 2x^2y^2)e^{x^2y^2}\cos(z^2)$ (d) $4y^2z(1 + 2x^2y^2)e^{x^2y^2}\cos(z^2)$

Ö1.18 (a) ja (b) ja (c) ja (d) nej

Ö1.19 (a) 1 (b) 0 (c) 7 (d) 16

Ö1.20 (a) 0 (b) $2t(1 - t^2)e^{-t^2}$ (c) $3t^2 \cos(t^3)$ (d) e^t

Ö1.21 (a) $\frac{\partial f}{\partial u} = (u + v)(u - v)^2(5u + v)$, $\frac{\partial f}{\partial v} = -(u + v)(u - v)^2(u + 5v)$
 (b) $\frac{\partial f}{\partial u} = 28(v - u)$, $\frac{\partial f}{\partial v} = 14(2u - v)$
 (c) $\frac{\partial f}{\partial u} = 2 \cos(2u - v)$, $\frac{\partial f}{\partial v} = -\cos(2u - v)$
 (d) $\frac{\partial f}{\partial u} = ve^u$, $\frac{\partial f}{\partial v} = e^u$

Ö1.22 (a) $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ (b) $\frac{1}{3} - x_1 - 4x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
 (c) $2 + 6x_1 + 2x_2 - 4x_1x_2 - 2x_1^2 - x_2^2$ (d) $4 - 9x_1 + 9x_1^2 - x_2^2$

Ö1.23 (a) 12 (b) 36 (c) 42 (d) 33

Ö1.24 (a) 4 (b) 0 (c) -55296 (d) -1

Ö1.25 (a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2x + y & 2y + x \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3x^2 + h^2 & 0 \end{bmatrix}$
 (d) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sin(y+h) - \sin(y-h)}{2h} \end{bmatrix}$

Kapitel 2

Övningar

Ö2.1 (a) $x - \cos(x) = 0$ (b) $x - e^{-x} = 0$
 (c) $\begin{bmatrix} x_1 - x_1^2x_1 \\ x_2 - x_2 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} x_1 - \cos(x_2) \\ x_2 - \cos(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ö2.2 (a) 1 (b) $\frac{6}{5}$ (c) $\frac{2}{1+e}$ (d) $\frac{2 \cos(1)}{\sin(1) + \cos(1)}$

Ö2.3 (a) $f(u) = \begin{bmatrix} u_2(1 - u_1^2) \\ 2 - u_1u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^\top$ och $\begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}^\top$.
 (c) $Df(u) = \begin{bmatrix} -2u_1u_2 & 1 - u_1^2 \\ -u_2 & -u_1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^\top$

Ö2.4 (a) $f(u) = \begin{bmatrix} u_1(1 - u_2) \\ u_2(1 - u_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ och $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$
 (c) $Df(u) = \begin{bmatrix} 1 - u_2 & -u_1 \\ -u_2 & 1 - u_1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}^\top$

Ö2.5 (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^\top$ (c) $\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^\top$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^\top$

Ö2.6 (a) Ja, $y = \sqrt{4 - x^2}$ (b) Ja, $y = \sqrt{4 - x^2}$ (c) Nej (d) Ja, $y = -\sqrt{4 - x^2}$

Ö2.7 (a) Ja (b) Nej (c) Nej (d) Ja

Ö2.8 (a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Ö2.9 Låt $\hat{v} = v/|v|$.

- (a) $\nabla f(1, 1) = (\cos(1), -\cos(1))$, $D_{\hat{v}}(1, 1) = \frac{\cos(1)}{\sqrt{5}}$
 (b) $\nabla f(-1, 0, 2) = (1, -1, 1)$, $D_{\hat{v}}(-1, 0, 2) = 1$
 (c) $\nabla f(-1, 0, 2) = (1, -1, 1)$, $D_{\hat{v}}(-1, 0, 2) = 0$
 (d) $\nabla f(7, 2) = (14, -24)$, $D_{\hat{v}}(7, 2) = -5\sqrt{2}$

Ö2.10 (a) 7 och -7 (b) 2 och -2 (c) $\sqrt{3}$ och $-\sqrt{3}$ (d) $2\sqrt{3}$ och $-2\sqrt{3}$

Ö2.11 (a) $x - y = 2$ (b) $x + 3y + 2z = 0$ (c) $2x - z = -1$ (d) $6x + 3y + 2z = 18$

Ö2.12 (a) $[10 \ 5 \ 0 \ 0 \ 2]^\top$ (b) $[0 \ 2 \ 3 \ 1]^\top$ (c) $[0 \ 1 \ -1 \ 3]^\top$ (d) $[2 \ 0 \ 2]^\top$

Ö2.13 (a) $\frac{r}{|r|^2}$ (b) $-\frac{r}{|r|^3}$ (c) $\frac{r}{|r|}$ (d) $-\frac{r}{|r|}e^{-|r|}$

Ö2.14 (a) 1 (b) 2 (c) 1 (d) 2

Ö2.15 (a) 1 och 0 (b) 1 och $-\frac{1}{8}$ (c) 0 och -2 (d) 3 och $\frac{3}{28}$.

Ö2.16 (a) $(0, 0)$ min (b) $(-\frac{1}{2}, 0)$ sadel (c) $(0, 0)$ max (d) $(0, 0)$ max

Ö2.17 (a) 1 (b) $\frac{1}{4}$ (c) 7 (d) $\frac{5}{4}$

Ö2.18 (a) $(1, 1)$ min (b) $(0, 0)$ sadel och $(1/6, 1/12)$ min
 (c) $(0, 0, 0)$ sadel och $(8, 16, 0)$ min
 (d) $(1, 2)$ sadel, $(2, 1)$ min, $(-1, -2)$ sadel och $(-2, -1)$ max

Ö2.19 (a) $(0, 0, 1)$ (b) $(1, 1, 1)$ (c) $(0, 0, 1)$ (d) $(2, 2, 1)$ och $(-2, -2, 1)$

Ö2.20 (a) 2 (b) $\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{10} + 1$ (d) $\sqrt{2}$

Ö2.21 (a) $4\sqrt{2}/9$ (b) \sqrt{n} (c) $\frac{4\sqrt{5}}{125}$ (d) 84375

Ö2.22 (a) $\begin{bmatrix} -\sin(x)y & \cos(x) \\ \cos(x) & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
 (c) $\begin{bmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -\cos(x)y & -\sin(x) \\ -\sin(x) & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Ö2.23 (a) $\frac{1}{12\sqrt{3}}S^2$ (b) $\frac{1}{16}S^2$ (c) $(\frac{S}{6})^{3/2}$ (d) $\frac{1}{6}(\frac{2S}{3+\sqrt{3}})^{3/2}$

Ö2.24 (a) $(0, 0)$ (b) $(0, \frac{1}{2})$ (c) $(1, 0)$ (d) $(0, \frac{1}{2}, 0)$

Ö2.25 (a) $\frac{5}{18}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{3}$

Kapitel 3

Övningar

Ö3.1 (a) 1 (b) 0 (c) 1 (d) $\frac{1}{4}$

Ö3.2 (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{8}{15}(2\sqrt{2} - 1)$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\ln(\frac{9}{8})$

Ö3.3 (a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{1}{12}$ (c) π (d) $\frac{1}{16}(1 + 3e^4)$

Ö3.4 (a) $\frac{1}{24}$ (b) $\frac{31}{8}$ (c) 0 (d) $\frac{1}{8}$

Ö3.5 (a) $\int_0^1 \left(\int_x^1 f(x, y) dy \right) dx$ (b) $\int_0^1 \left(\int_0^{\arccos(y)} f(x, y) dx \right) dy$
 (c) $\int_0^1 \left(\int_0^y f(x, y) dx \right) dy$ (d) $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \right) dy$

Ö3.6 (a) 0 (b) 0 (c) $\frac{1}{6}(e^9 - 1)$ (d) $\frac{1}{3} \ln(9)$

Ö3.7 (a) 0 (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{15}{2}$ (d) 49

Ö3.8 (a) $\frac{3\pi}{2}$ (b) 272 (c) $\frac{15\pi}{4}$ (d) $\pi(1 - \exp(-R^2))$

Ö3.9 (a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{32}{9}$ (d) $\frac{256}{9}$

Ö3.10 (a) 0 (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\ln(2) - 1$ (d) $\ln(2)$

Ö3.11 (a) 27 (b) $\frac{1}{24}$ (c) $\frac{9\pi}{8}$ (d) $\frac{1}{24}$

Ö3.12 (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{60}$ (c) $\frac{1}{120}$ (d) $\frac{1}{20}$

Ö3.13 (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 19 (d) $\frac{128\pi}{15}$

Ö3.14 (a) $\frac{4\pi}{3}R^3$ (b) $\frac{148\pi}{3}$ (c) $\frac{4\pi}{5}$ (d) 0

Ö3.15 (a) $\frac{4\pi}{3}$ (b) 8π (c) $\frac{4\pi}{3}(4 - \frac{5}{\sqrt{2}})$ (d) $\frac{8\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$

Ö3.16 (a) 8 (b) $\frac{1}{4}(2 - \sqrt{2})\pi$ (c) $\frac{12}{5}\pi$ (d) $\frac{\pi}{8}$

Ö3.17 (a) $\frac{\pi}{3}$ (b) 64 (c) 1024 (d) $\frac{\pi}{24}$

Ö3.18 (a) 8π (b) 0 (c) $\frac{24\pi}{5}$ (d) $\frac{24\pi}{15}$

Ö3.19 (a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$

Ö3.20 (a) $(\frac{7a}{12}, \frac{7a}{12}, \frac{7a}{12})$ (b) $(\frac{5a}{9}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ (c) $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ (d) $(\frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}, \frac{a}{2})$

Ö3.21 (a) $\frac{1}{2}\pi \varrho h R^4$ (b) $\varrho h R \pi (\frac{R^3}{4} + \frac{Rh^2}{3})$ (c) $\varrho h R \pi (\frac{R^3}{4} + \frac{Rh^2}{3})$ (d) $\frac{3}{2}\pi \varrho h R^4$

Ö3.22 (a) $\frac{2}{3}\varrho L^5$ (b) $\frac{2}{3}\varrho L^5$ (c) $\frac{2}{3}\varrho L^5$ (d) $\frac{1}{6}\varrho L^5$

Ö3.23 (a) divergent $+\infty$ (b) divergent $+\infty$ (c) konvergent $\frac{e-e^{-1}}{2}$
(d) konvergent 2π

Ö3.24 (a) $p < 1$ (b) $p > 1$ (c) alla p (d) inga p

Ö3.25 (a) 2π (b) 4π (c) π^2 (d) 2π

Kapitel 4

Övningar

Ö4.1 (a) $(t, \sqrt{4-t^2})$ (b) $(\sqrt{4-t^2}, t)$ (c) $(2\cos(t), 2\sin(t))$ (d) $(\sqrt{t}, \sqrt{4-t})$

Ö4.2 (a) $(\cos(t), \sin(t), 0), 0 \leq t \leq 2\pi$ (b) $(\cos(t), \sin(t), -\cos(t) - \sin(t)), 0 \leq t \leq 2\pi$
(c) $(\cos(t), \sin(t), 1 - \cos(t) - \sin(t)), 0 \leq t \leq 2\pi$
(d) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, t)$ och $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, t), t \in \mathbb{R}$

Ö4.3 (a) $x = -2t, y = 1, z = \frac{1}{2}t + t, t \in \mathbb{R}$ (b) $x = 1, y = t, z = 2t, t \in \mathbb{R}$
(c) $x = 1 + t, y = 3 + 2t, t \in \mathbb{R}$ (d) $x = -1, y = 4t, z = \pi^2 + 2\pi t, t \in \mathbb{R}$

Ö4.4 (a) $x = t, y = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, t \in \mathbb{R}$ (b) $x = t, y = 1 - t, z = 2t - 1, t \in \mathbb{R}$
(c) $x = t, y = 1, z = 0, t \in \mathbb{R}$ (d) $x = t, y = 3t + 2, t \in \mathbb{R}$

Ö4.5 (a) $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$ (b) $e - e^{-1}$ (c) $\frac{1}{27}(13^{3/2} - 8)$ (d) $\frac{14}{3}$

Ö4.6 (a) $2\pi + \frac{2}{3}$ (b) $\frac{5}{2}\sqrt{42}$ (c) $\frac{5\sqrt{5}-1}{6} + 2$ (d) $\frac{5}{8}$

Ö4.7 (a) $-\frac{2}{3}$ (b) $\frac{27}{28}$ (c) $-mg$ (d) 2π

Ö4.8 (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) 0

Ö4.9 (a) 63 (b) $-\frac{5}{2}$ (c) 17 (d) 24

Ö4.10 (a) $x + y + z = 1$ (b) $2x - 3z = 2$ (c) $x - y = 1$ (d) $z = 0$

Ö4.11 (a) $S: \mathbf{r} = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), 0), 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$
(b) $S: \mathbf{r} = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), \rho \cos(\theta)), 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$
(c) $S: \mathbf{r} = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), 1 - \rho \cos(\theta) - \rho \sin(\theta)), 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$
(d) $S: \mathbf{r} = (u, 0, v), -1 \leq u \leq 1, -\infty < v < \infty$

Ö4.12 (a) $x = 1$ (b) $x + y + z = \sqrt{3}$ (c) $z = 1$ (d) $x - y + \sqrt{2}z = 2$

Ö4.13 (a) $x + 2y - 2z = -3$ (b) $-x + 2z = 1$ (c) $-4y + z + 3 = 0$ (d) $x - z = 0$

Ö4.14 (a) 8π (b) $3\sqrt{14}$ (c) $\sqrt{14}\pi$ (d) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)\pi$

Ö4.15 (a) 4π (b) $\frac{8}{3}\pi$ (c) 0 (d) $\frac{4}{3}\pi$

Ö4.16 (a) 2π (b) 0 (c) $\frac{1}{2}\pi$ (d) $\frac{1}{2}\pi$

Ö4.17 (a) 0 (b) π (c) 0 (d) $\frac{5}{3}\pi$

Ö4.18 (a) $\frac{3}{4}$ (b) 45 (c) $\frac{33}{2}$ (d) 33

Ö4.19 (a) (yz, xz, xy) (b) $3\|\mathbf{r}\|\mathbf{r}$ (c) $(\sin(y), x \cos(y), 0)$ (d) $(\frac{y}{z}, \frac{x}{z}, -\frac{xy}{z^2})$

Ö4.20 (a) $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}, \phi = xyz$

(b) $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}, \phi = xy + yz + zx$

(c) $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \nabla \times \mathbf{F} = -2xe_z$, potential finns ej.

(d) $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2yz + 2, \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}, \phi = x^2yz + z^2$

Ö4.21 (a) $\Delta f = 4$ (b) $\Delta f = 0$ (c) $\Delta f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (d) $\Delta f = 2(y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2)$

Ö4.22 (a) 0 (b) 22 (c) 11 (d) $\frac{7}{2}$

Ö4.23 (a) π (b) 0 (c) 2π (d) 0

Ö4.24 (a) 0 (b) $\frac{1}{2}\pi$ (c) 0 (d) $\frac{5}{3}\pi$

Ö4.25 (a) $\frac{4}{3}$ (b) 0 (c) $\frac{44\pi}{15}$ (d) 1

Kapitel 5

Övningar

Ö5.1 —

Ö5.2 (a) $\mathcal{V} = \{(1, 0), (1, 4), (2, 1), (3, 1)\}, \mathcal{K} = \{(1, 4, 3), (2, 3, 4), (1, 3, 2)\}$

(b) $\mathcal{V} = \{(-1, -1), (0, 0), (1, 1), (0, 1)\}, \mathcal{K} = \{(2, 3, 4), (1, 2, 4)\}$

(c) $\mathcal{V} = \{(10, 10), (11, 11), (11, 12), (12, 10)\}, \mathcal{K} = \{(1, 4, 2), (2, 4, 3), (1, 2, 3)\}$

(d) $\mathcal{V} = \{(-1, 0), (0, 0), (1, 0), (-\frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{2}, 1), (0, 2)\}$
 $\mathcal{K} = \{(1, 2, 4), (2, 3, 5), (2, 5, 4), (4, 5, 6)\}$

Ö5.3 (a) $\{(1, 2), (2, 3), (1, 4), (3, 4), (1, 3), (2, 4)\}$

(b) $\{(1, 2), (2, 3), (1, 4), (3, 4), (2, 4)\}$

(c) $\{(1, 2), (2, 3), (1, 4), (3, 4), (1, 3), (2, 4)\}$

(d) $\{(1, 2), (3, 5), (2, 3), (4, 5), (1, 4), (2, 5), (5, 6), (2, 4), (4, 6)\}$

Ö5.4 —

- Ö5.5** (a) $\mathcal{V} = \{(1, 0, 0), (1, 4, 0), (2, 1, 0), (3, 1, 0), (2, 1, 1)\}$
 $\mathcal{K} = \{(1, 4, 3, 5), (2, 3, 4, 5), (1, 3, 2, 5)\}$
 (b) $\mathcal{V} = \{(-1, -1, 0), (0, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
 $\mathcal{K} = \{(2, 3, 4, 5), (1, 2, 4, 5)\}$
 (c) $\mathcal{V} = \{(10, 10, 0), (11, 11, 0), (11, 12, 0), (12, 10, 0), (11, 11, 1)\}$
 $\mathcal{K} = \{(1, 4, 2, 5), (2, 4, 3, 5), (1, 2, 3, 5)\}$
 (d) $\mathcal{V} = \{(-1, 0, 0), (0, 0, 0), (1, 0, 0), (-\frac{1}{2}, 1, 0), (\frac{1}{2}, 1, 0), (0, 2, 0), (0, 1, 1)\}$
 $\mathcal{K} = \{(1, 2, 4, 7), (2, 3, 5, 7), (2, 5, 4, 7), (4, 5, 6, 7)\}$

- Ö5.6** (a) $\{(1, 2, 5), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (1, 3, 4), (2, 4, 5), (3, 4, 5), \dots$
 $\dots, (1, 2, 3), (2, 3, 5)\}$
 (b) $\{(1, 2, 5), (1, 4, 5), (1, 2, 4), (2, 3, 4), (2, 4, 5), (3, 4, 5), \dots$
 $\dots, (2, 3, 5)\}$
 (c) $\{(1, 2, 5), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (1, 2, 4), (2, 3, 4), (2, 4, 5), (3, 4, 5), \dots$
 $\dots, (1, 2, 3), (2, 3, 5)\}$
 (d) $\{(4, 5, 7), (2, 3, 7), (4, 6, 7), (1, 2, 4), (2, 5, 7), (1, 2, 7), (2, 4, 5), \dots$
 $\dots, (1, 4, 7), (4, 5, 6), (5, 6, 7), (2, 4, 7), (3, 5, 7), (2, 3, 5)\}$

- Ö5.7** (a) 9 (b) 81 (c) 48 (d) 32

- Ö5.8** (a) 25 (b) 289 (c) 165 (d) 105

- Ö5.9** (a) $(0, 0.5, 1, 0.5, 1, 1.5, 1, 1.5, 2)$ (b) $(0, 0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0, 0.5, 1)$
 (c) $(0, 0.5, 1, -0.5, 0, 0.5, -1, -0.5, 0)$ (d) $(0, 0.25, 1, 0.25, 0.5, 1.25, 1, 1.25, 2)$

- Ö5.10** (a) $(0, 0.5, 1, 0.5, 1, 1.5, 1, 1.5, 2, 0.5, 1, 1.5, 1, 1.5, 2, \dots$
 $\dots, 1.5, 2, 2.5, 1, 1.5, 2, 1.5, 2, 2.5, 2, 2.5, 3)$
 (b) $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.125, 0.25, \dots$
 $\dots, 0, 0.25, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0, 0.5, 1)$
 (c) $(0, 0.5, 1, -0.5, 0, 0.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 0, 0.5, 1, \dots$
 $\dots, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 0.5, 1, 1.5, 0, 0.5, 1)$
 (d) $(0, 0.25, 1, 0.25, 0.5, 1.25, 1, 1.25, 2, 0.25, 0.5, 1.25, 0.5, 0.75, 1.5, \dots$
 $\dots, 1.25, 1.5, 2.25, 1, 1.25, 2, 1.25, 1.5, 2.25, 2, 2.25, 3)$

- Ö5.11** (a) $[\hat{x}_1 \ \hat{x}_2]^\top$ (b) $[1 - \hat{x}_2 \ 1 - \hat{x}_1]^\top$ (c) $[\hat{x}_1 \ 2 - 2\hat{x}_1 - \hat{x}_2]^\top$ (d) $[1 + \hat{x}_2 \ 2 - 2\hat{x}_1 - \hat{x}_2]^\top$

- Ö5.12** (a) $[\hat{x}_1 \ \hat{x}_2 \ \hat{x}_3]^\top$ (b) $[1 - \hat{x}_2 \ 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_3 \ \hat{x}_3]^\top$ (c) $[\hat{x}_1 + \hat{x}_3 \ 2 - 2\hat{x}_1 - \hat{x}_2 - \hat{x}_3 \ \hat{x}_3]^\top$
 (d) $[1 + \hat{x}_2 \ 2 - 2\hat{x}_1 - \hat{x}_2 - \hat{x}_3 \ \hat{x}_3]^\top$

- Ö5.13** (a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ (b) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$ (c) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = \frac{1}{2}$
 (d) $\lambda_1 = \frac{6}{10}, \lambda_2 = \frac{1}{10}, \lambda_3 = \frac{3}{10}$

- Ö5.14** (a) $\frac{1}{2}x_1$ (b) 1 (c) $[-\frac{1}{4} \ -\frac{1}{2}]^\top$ (d) $[-\frac{1}{2} \ 0]^\top$

- Ö5.15** (a) Ja (b) Nej (c) Ja (d) Ja

- Ö5.16** (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{12}$ (c) $\frac{1}{24}$ (d) $\frac{1}{2}$

Ö5.17 (a) $x_1 + x_2$ (b) 0 (c) $x_1 - x_2$ (d) $x_1 + x_2$

Ö5.18 (a) $x_1 + x_2 + x_3$ (b) 0 (c) $x_1 - x_2 + x_3$ (d) $x_1 + x_2 + x_3$

Ö5.19 (a) x (b) $x - \frac{1}{6}$ (c) $\frac{9x}{10} - \frac{1}{5}$ (d) $\frac{4x}{5} - \frac{1}{5}$

Ö5.20 (a) x (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{3x}{5}$ (d) $\frac{1}{5}$

Ö5.21 (a) x (b) $x - \frac{1}{6}$ (c) $\frac{9x}{10} - \frac{1}{5}$ (d) $\frac{4x}{5} - \frac{1}{5}$

Ö5.22 (a) $30\frac{2}{3}$ (b) $69\frac{1}{3}$ (c) $1\frac{1}{3}$ (d) $177\frac{1}{3}$

Ö5.23 (a) $30\frac{2}{3}$ (b) $61\frac{1}{3}$ (c) $1\frac{1}{3}$ (d) $132\frac{2}{3}$

Ö5.24 (a) 78 (b) $355\frac{1}{2}$ (c) 27 (d) 444

Ö5.25 (a) 78 (b) $372\frac{15}{16}$ (c) 27 (d) $392\frac{1}{4}$

Kapitel 6

Övningar

Ö6.1 (a) 0 (b) -4 (c) $2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ (d) $2x(1-x) + 2y(1-y)$

Ö6.2 (a) 0 (b) $x^2 + y^2 - 4$ (c) $x^4 - y^4 - 3x^2 + 3y^2 - 4xy$ (d) $-10 - 10xy + 3y^2 - 3x^2$

Ö6.3 —

Ö6.4 —

Ö6.5 (a) x^2 (b) $-\sin(x)$ (c) $-x$ (d) x

Ö6.6 (a) $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, L(v) = \int_{\Omega} v \, dx$
 (b) $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, L(v) = \int_{\Omega} v \, dx + \int_{\Gamma_R} v \, ds$
 (c) $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_R} uv \, ds, L(v) = \int_{\Omega} v \, dx + \int_{\Gamma_R} xv \, ds$
 (d) $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_R} 10uv \, ds, L(v) = \int_{\Omega} v \, dx + \int_{\Gamma_R} x^2 v \, ds$

Ö6.7 Hitta $u_h \in V_{h,0}$ sådan att $a(u_h, v) = L(v)$ för alla testfunktioner $v \in V_{h,0}$ med a och L enligt facit till Övning 6.6 ovan.

Ö6.8 (a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) 1 (d) $\frac{1}{8}$

Ö6.9 a) 0 (b) $\frac{2}{3}$ (c) 1 (d) $\frac{1}{24}$

Ö6.10 (a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) 1

Ö6.11 (a) 0 (b) $\frac{1}{27}$ (c) 0 (d) $\frac{1}{6}$

Ö6.12 (a) $\frac{1}{6}$ (b) $-\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 0

Ö6.13 (a) $\frac{1}{60}$ (b) $\frac{1}{120}$ (c) $\frac{1}{60}$ (d) $\frac{1}{120}$

Ö6.14 Hitta $u_h \in V_{h,0}$ sådan att $a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, dx$ för alla $v \in V_{h,0}$ där
 (a) $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ (b) $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + cuv \, dx$
 (c) $a(u, v) = \int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla v + \beta \cdot \nabla uv \, dx$ (d) $a(u, v) = \int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla v + \nabla \cdot (\beta u) v \, dx$

Ö6.15 (a) $-\nabla \cdot (\kappa \nabla u) = f$ i Ω , $u = 0$ på Γ (b) $-\nabla \cdot (\nabla u) + u = f$ i Ω , $u = 0$ på Γ
 (c) $-\nabla \cdot (\kappa \nabla u) = f$ i Ω , $\kappa \partial_n u + \gamma u = 0$ på Γ (d) $-\nabla \cdot (\nabla u) = f$ i Ω , $\partial_n u + u = 1$ på Γ

Ö6.16 (a) $-\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{12}$ (c) $\frac{1}{12}$ (d) $\frac{1}{12}$

Ö6.17 (a) $(I - 0.01M^{-1}A)^k U_0$ (b) $(I + 0.1M^{-1}A)^{-k} U_0$
 (c) $((I + 0.1M^{-1}A)^{-1}(I - 0.1M^{-1}A))^k U_0$ (d) $(I - 0.1M^{-1}A + 0.005(M^{-1}A)^2)^k U_0$

Ö6.18 (a) $(I - 0.1M^{-1}A)U_0 + 0.1M^{-1}b(t_0)$ (b) $(I + 0.1M^{-1}A)^{-1}(U_0 + 0.1M^{-1}b(t_1))$
 (c) $(I + 0.05M^{-1}A)^{-1}((I - 0.05M^{-1}A)U_0 + 0.1M^{-1}b(t_{1/2}))$
 (d) $U_0 + 0.05(f(0, U_0) + f(0.1, U_0 + 0.1f(0, U_0)))$, där $f(t, U) = -M^{-1}AU + M^{-1}b(t)$

Ö6.19 (a) $\frac{1}{60}$ (b) $\frac{1}{24}$ (c) 0 (d) 24

Ö6.20 (a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) 0 (d) $\frac{5}{6}$

Ö6.21 (a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \hat{x}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}$
 (c) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \hat{x}$

Ö6.22 (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{1}{12}$ (d) $\frac{1}{6}$

Ö6.23 (a) $-\frac{1}{8}$ (b) $-\frac{1}{6}$ (c) 0 (d) $-\frac{3}{8}$

Ö6.24 (a) $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \lambda(u^3 - u)v \, dx$ (b) $\int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla v + u^2 v \, dx$
 (c) $\int_{\Omega} \kappa(u) \nabla u \cdot \nabla v - \lambda u^p v \, dx$ (d) $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - e^{\lambda u} v \, dx$

Ö6.25 (a) $\int_{\Omega} \nabla \delta u \cdot \nabla v \, dx + \lambda \int_{\Omega} (3u^2 - 1) \delta uv \, dx$
 (b) $\int_{\Omega} \kappa \nabla \delta u \cdot \nabla v \, dx + \lambda \int_{\Omega} 2u \delta uv \, dx$
 (c) $\int_{\Omega} \kappa(u) \nabla \delta u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \kappa'(u) \delta u \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \lambda p \int_{\Omega} u^{p-1} \delta uv \, dx$
 (d) $\int_{\Omega} \nabla \delta u \cdot \nabla v \, dx - \lambda \int_{\Omega} e^{\lambda u} \delta uv \, dx$