$\boxed{\text{F18}}$ • Implementation av FEM

Assemblering

Hur räknar man ut styvhetsmatrisen?

$$\underline{\underline{PDE}} \longrightarrow \boxed{\text{FEM}} \longrightarrow \underline{\underline{AU = b}}$$

Styvhetsmatrisen:

basfunktion

$$\underline{\underline{A_{ij}}} = \underline{\underline{a(\varphi_j, \varphi_i)}} \quad \text{(abstrakt)}$$

bilinjär form (svag)

Exempel: Värmeledning

$$\rightarrow A_{ij} = \underbrace{\int_\Omega k \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i \, dx}_{= a(\varphi_j, \varphi_i)}$$

Integraler över Ω!

Exempel: Advektion-diffusion

$$\rightarrow A_{ij} = \int_\Omega \big(\underbrace{k\nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i}_{\text{diffusion}} + \underbrace{(\beta \cdot \nabla\varphi_j \, \varphi_i}_{\text{advektion}} \big) \, dx$$

Uppgift: Beräkna matrisen $\underline{\underline{A}}$ givet bilinjära formen $\underline{\underline{a}}$.

Naiv algoritm:

antal basfunktioner $= \dim V_h$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{for } i = 1, \dots, N \\ \quad \text{for } j = 1, \dots, N \\ \qquad A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) \\ \quad \text{end} \\ \text{end} \end{array} \right.$$

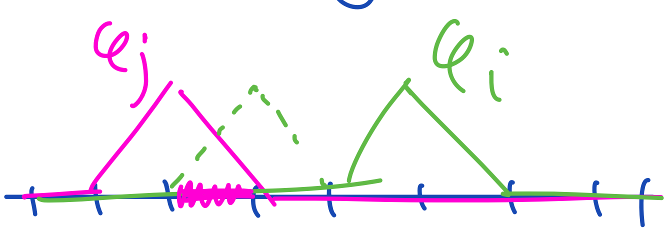
ex: $\underline{\underline{N = 10^9}}$

Mycket ineffektiv pga A gles

= består nästan bara av 0:or!

$a(\varphi_j, \varphi_i) = 0$ om inte

φ_j och φ_i är grannar!



Standardalgoritmen för beräkning av styvhetsmatrisen kallas <u>assemblering</u>:

- Iterera över trianglarna K istället för matrisen A
- Verktyg: <u>elementstyvhetsmatrisen</u>
- Verktyg: lokal-<u>global avbildning</u>

<u>Notera</u>:

PDE

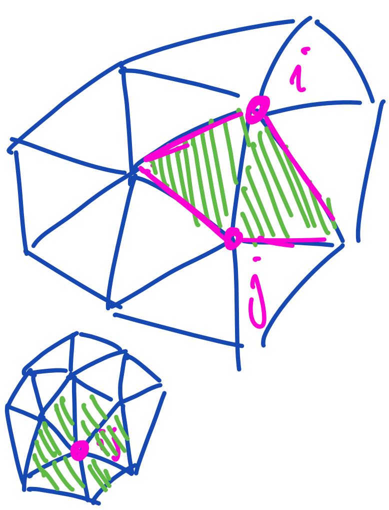
$A(u) = f$

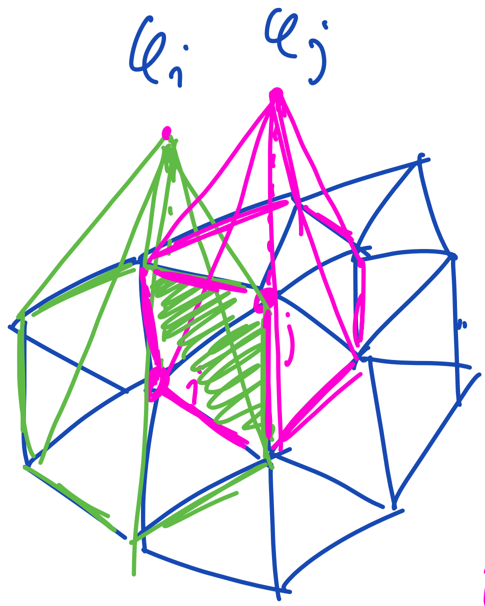
$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_\Omega A(\varphi_j)\,\varphi_i\,dx$$

$$= \sum_K \underbrace{\int_K A(\varphi_j)\,\varphi_i\,dx}_{a_K(\varphi_j,\varphi_i)}$$

$$= \sum_K a_K(\varphi_j, \varphi_i)$$

$$= \sum_{K:\,\varphi_j\varphi_i \neq 0} a_K(\varphi_j, \varphi_i)$$

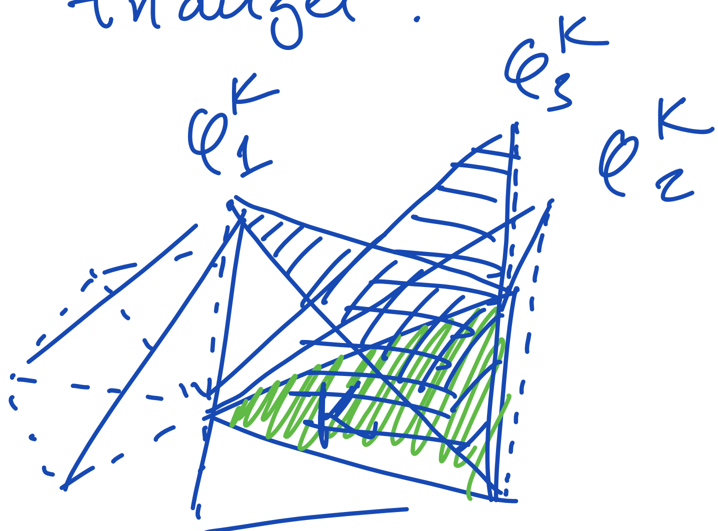




En integral över triangel K

$$\therefore \quad A_{ij} = \sum_{K:\, \varphi_i \varphi_j \neq 0} a_K(\varphi_j, \varphi_i)$$

Hur ser basfunktionerna ut på en lokal triangel?



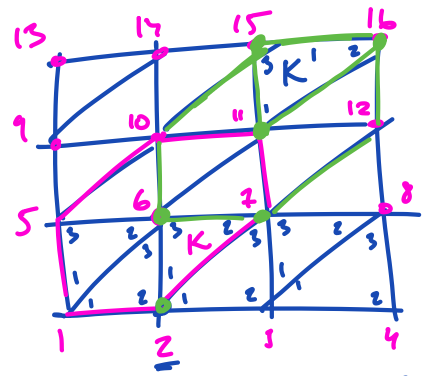
Finns 3 basfunktioner på varje triangel K: $\varphi_1^K, \varphi_2^K, \varphi_3^K$.

Var och en är en del av en <u>global</u> basfunktion.

Finns ett samband mellan lokala basfunktioner $\varphi_1^K, \varphi_2^K, \varphi_3^K$ och globala basfunktioner φ_I.

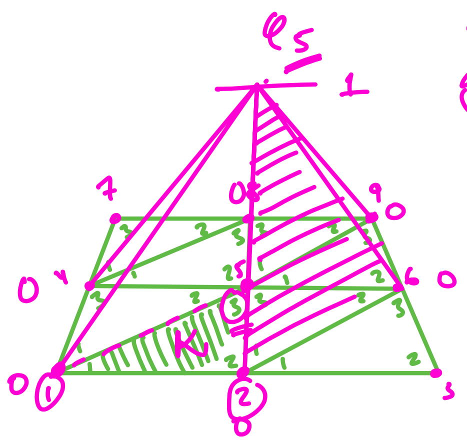
Ges av lokala-globala mappningen

$$\iota_K : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3,4,\dots,N\}$$

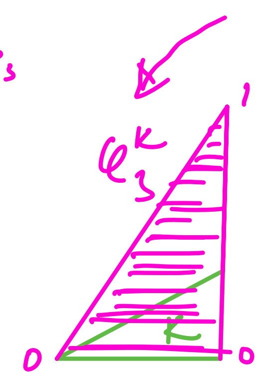


$$\begin{cases} \iota_K(1) = 2 \\ \iota_K(2) = 7 \\ \iota_K(3) = 6 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \iota_{K'}(1) &= 11 \\ \iota_{K'}(2) &= 16 \\ \iota_{K'}(3) &= 15 \end{aligned}$$

Två basfunktioner grannar om de har en gemensam kant.



Räknas ut mha affina avbildningen



$\iota_K(3) = 5$

$\varphi_3^K = \varphi_5\big|_K$

Notera:

Integral över triangel K

Global basfunktion

$$A_{IJ} = \sum_{K:\varphi_J\varphi_I\neq 0} a_K(\varphi_J, \varphi_I)$$

lokal basfunktion

$$= \sum_{K:\varphi_i\varphi_j\neq 0} a_K(\varphi^K_{\iota_K^{-1}(J)}, \varphi^K_{\iota_K^{-1}(I)})$$

$$= \sum_{K:\varphi_i\varphi_j\neq 0} \underbrace{a_K(\varphi^K_j, \varphi^K_i)}_{\text{elementstyvhetsmatrisen } A^K}$$

$$= \sum A^K_{ij}$$

$\therefore$ Styrhetsmatrisen är en summa av elementstyvhetsmatriser A^K!

Assembleringsalgoritmen:

$A \leftarrow 0$ (gles $N\times N$-matris)

for $K \in \mathcal{K}$ (iterera över nät)

  $A^K \leftarrow$ elementstyvhetsmatrisen

  for $i = 1,2,3$

    for $j = 1,2,3$

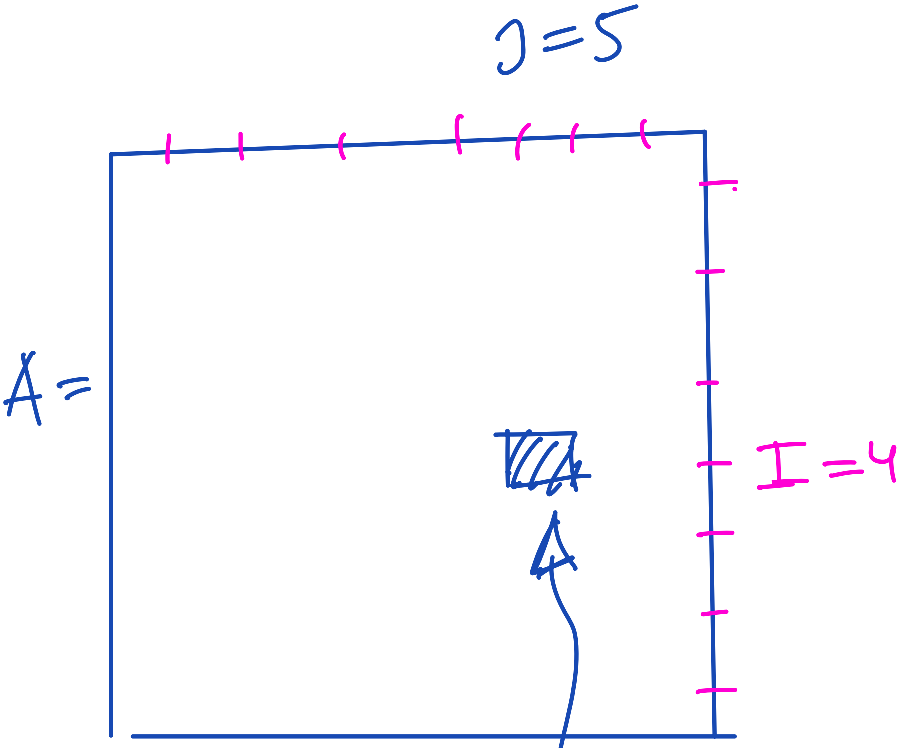
$$\begin{cases} I = \iota_K(i) \\ J = \iota_K(j) \end{cases}$$

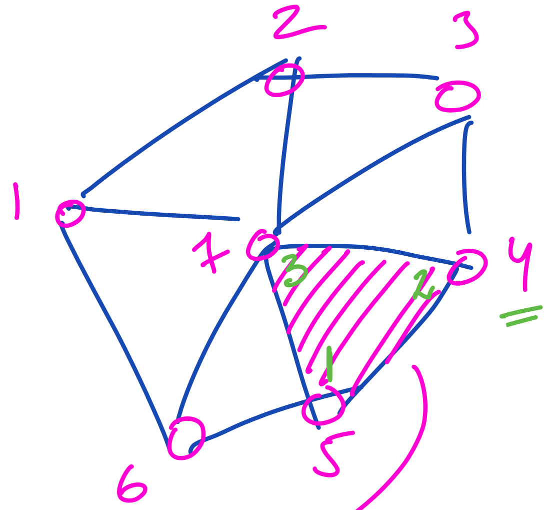
Addera A^K till A

$$A_{IJ} \leftarrow A_{IJ} + A^K_{ij}$$

end

end
end



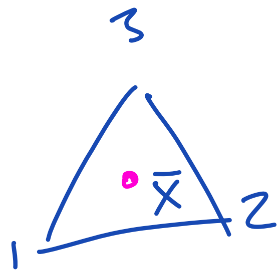


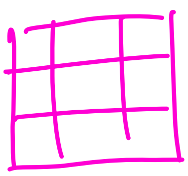
$$+= \quad A^K = \begin{array}{cc} & \\ i & \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \blacksquare & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} \\ & j=1 \end{array}$$

$$\begin{cases} i = 2 \longmapsto 4 \\ j = 1 \longmapsto 5 \end{cases}$$

Exempel: Värmeledning

$$A^K_{ij} = \int_K \kappa \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx$$

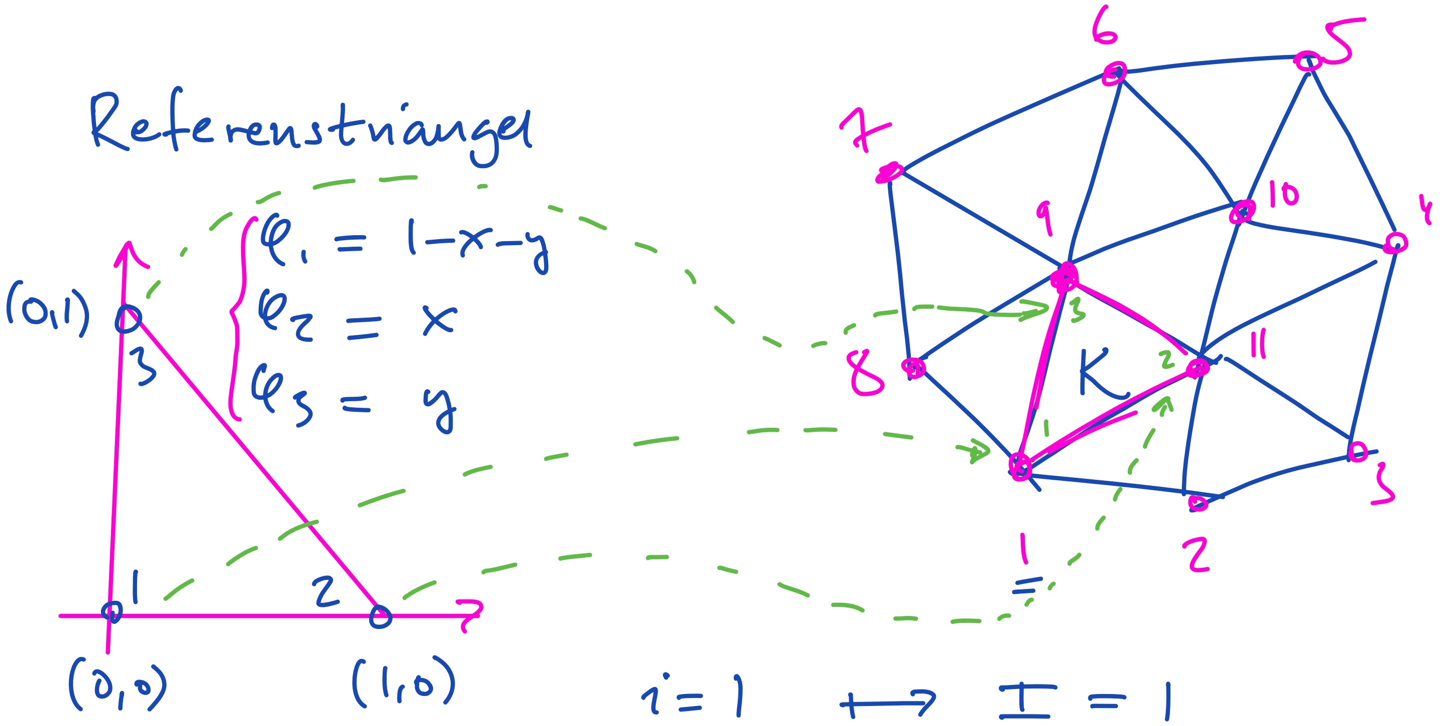


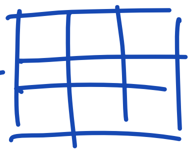


$$\approx |K| \cdot \kappa(\bar{x}) \cdot \underline{\underline{\nabla \varphi_j(\bar{x})}} \cdot \underline{\underline{\nabla \varphi_i(\bar{x})}}$$

Referenstriangel

$$\varphi_1 = 1-x-y$$
$$\varphi_2 = x$$
$$\varphi_3 = y$$



$A_K =$ 

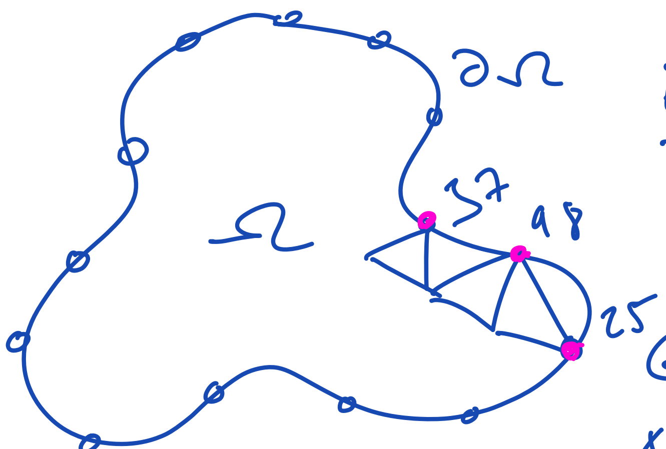
$i = 1 \longmapsto I = 1$

$i = 2 \longmapsto I = 11$

$i = 3 \longmapsto I = 9$

Randvillkor:

Hur sätter vi lösningen till ett givet värde på randen? (Dirichet-villkor)



Exempel:

$u = 5$ på randen $\partial\Omega$

Genom att assemblera $AU = b$ och sedan modifiera A och b!

Notera: Lösningen ges av:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} U_i \varphi_i(x)$$

där $U \in \mathbb{R}^N$ löser

$$AU = b$$

Modifiera A och b s.a. $U_i = 0$ för alla index på randen.

Exempel: Se till att

$$U_{37} = U_{98} = U_{25} = 5$$