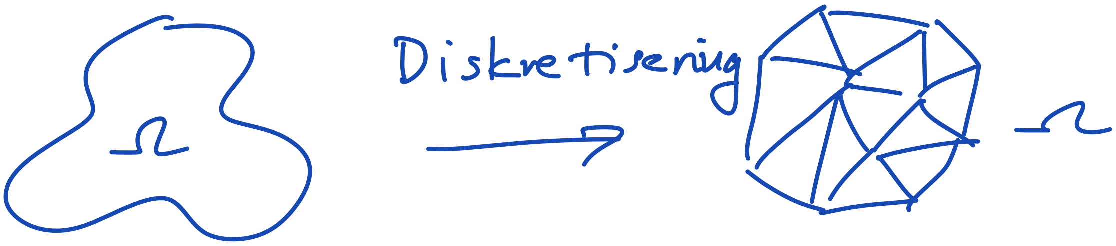
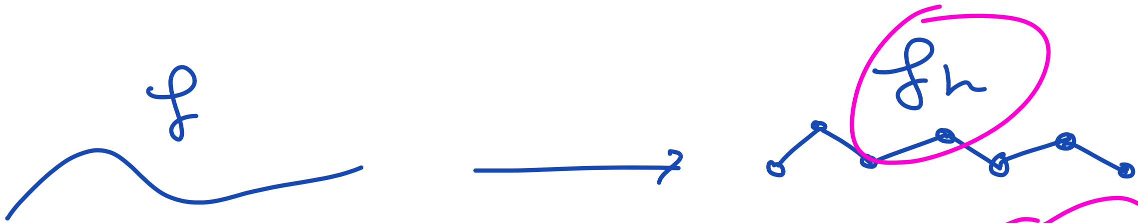
F15

- Interpolation
- Projektion
- Kvadratur
- Avsnitt 5.5–5.7





Hur får vi fram f_h?

$$f_h = \sum_{i=1}^{N} F_i \varphi_i(x)$$

(1) Interpolation $\quad f \longmapsto \underline{\underline{\pi_h}} f$

(2) Projektion $\quad f \longmapsto \underline{\underline{P_h}} f$

Viktig fråga: Hur stort är felet?

$$\begin{cases} \| f - \pi_h f \| \leq \ ? \\ \| f - P_h f \| \leq \ ? \end{cases}$$

Feluppskattning

- <u>Interpolation</u>

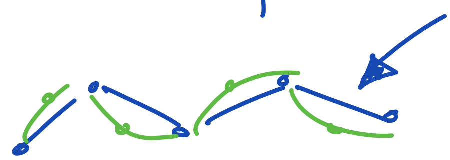
V = kontinuerligt funktionsrum

exempel: $V = C(\Omega)$ kont. funk.

$V = C^{\infty}(\Omega)$ släta funk. (smooth)

V_h = diskret funktionsrum

exempel: V_h = kont. styckvis linjära funktioner



Definiera interpolationsoperatorn π_h

$$\begin{cases} \pi_h : V \longrightarrow V_h \\ \pi_h : f \longmapsto \pi_h f \end{cases}$$

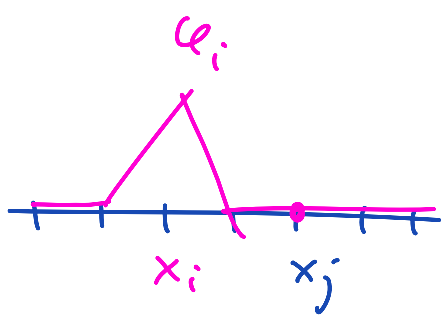
Låt $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$ vara en nodbas för V_h,

dvs

$$\boxed{\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}}$$

Kroneckers delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$



$\varphi_i(x_i) = 1$

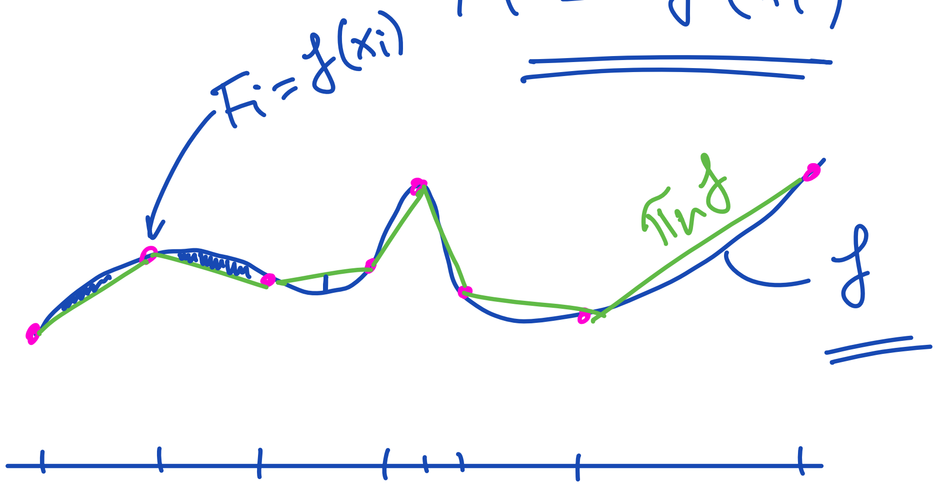
$\varphi_i(x_j) = 0$

Def. π_h

$$\pi_h f(x) = \sum_{i=1}^{N} \underline{f(x_i)}\, \varphi_i(x)$$

dvs:

$$\underline{\underline{F_i = f(x_i)}}$$ Koefficient-vektor



Sats: Feluppskattning för styckvis linjär interpolant

h = nätstorlek = diameter på trianglar (största)

norm

$$\boxed{\|f - \pi_h f\|_\infty \le \frac{h^2}{2} \|D^2 f\|_\infty}$$

om $f \in C^2(\Omega)$ (2 ggr kont. deriverbar)

Notera:
$$\|f\|_\infty = \max_{x \in \Omega} |f(x)| \quad \text{(sup)}$$

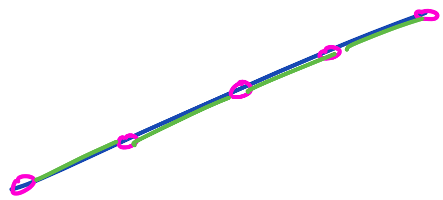
$$\|D^2 f\|_\infty = \max_{x \in \Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \right)^{1/2}$$

Hesse-matrisen

Frobenius-normen av

Notera:

1) Om $D^2 f = 0$ så är $f = \pi_n f$.



$\pi_n f = f$

kan uppskattas av

2) $f - \pi_n f \sim h^2 D^2 f$

Om styckvis kvadratisk interpoland:

$$f - \pi_n f \sim h^3 D^3 f$$

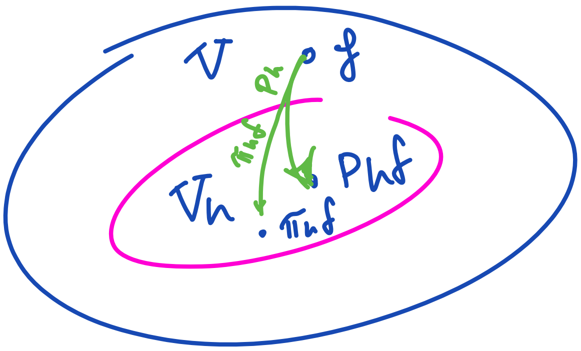
Om styckvis polynom av grad r:

$$f - \pi_n f \sim h^{r+1} D^{r+1} f$$

• Projektion

Ger ett sätt att approximera kont. funktioner med diskreta funktioner:

$$\begin{cases} P_h : V \longrightarrow V_h \\ \quad\;\; \psi \qquad\qquad\quad \psi \\ P_h : f \longmapsto P_h f \end{cases}$$



$$V_h \subset V$$

$P_h f$ definieras genom variationsproblemet

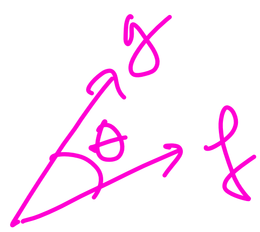
$$\boxed{\int_\Omega P_h f \, v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx \qquad \forall v \in V_h}$$

$P_h f$ är den enda funktion i V_h som uppfyller detta!

För att förstå projektionen inför vi skalärprodukten

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f g \, dx$$

← integral



Detta är en <u>skalärprodukt</u> för funktioner!

Jämför: Vektorer $a, b \in \mathbb{R}^n$

Summa

$$\langle a, b \rangle = a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$\|a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = \sqrt{a \cdot a}$$

Norm av funktion:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_\Omega f^2 dx}$$

L^2-norm: $\|f\|_2 = \|f\|$

Omskrivning av projektionen med skalärprodukt:

$$\int_\Omega \underline{\underline{P_n f}}\, v \, dx = \int f v \, dx \quad \forall v \in V_n$$

testfunktion

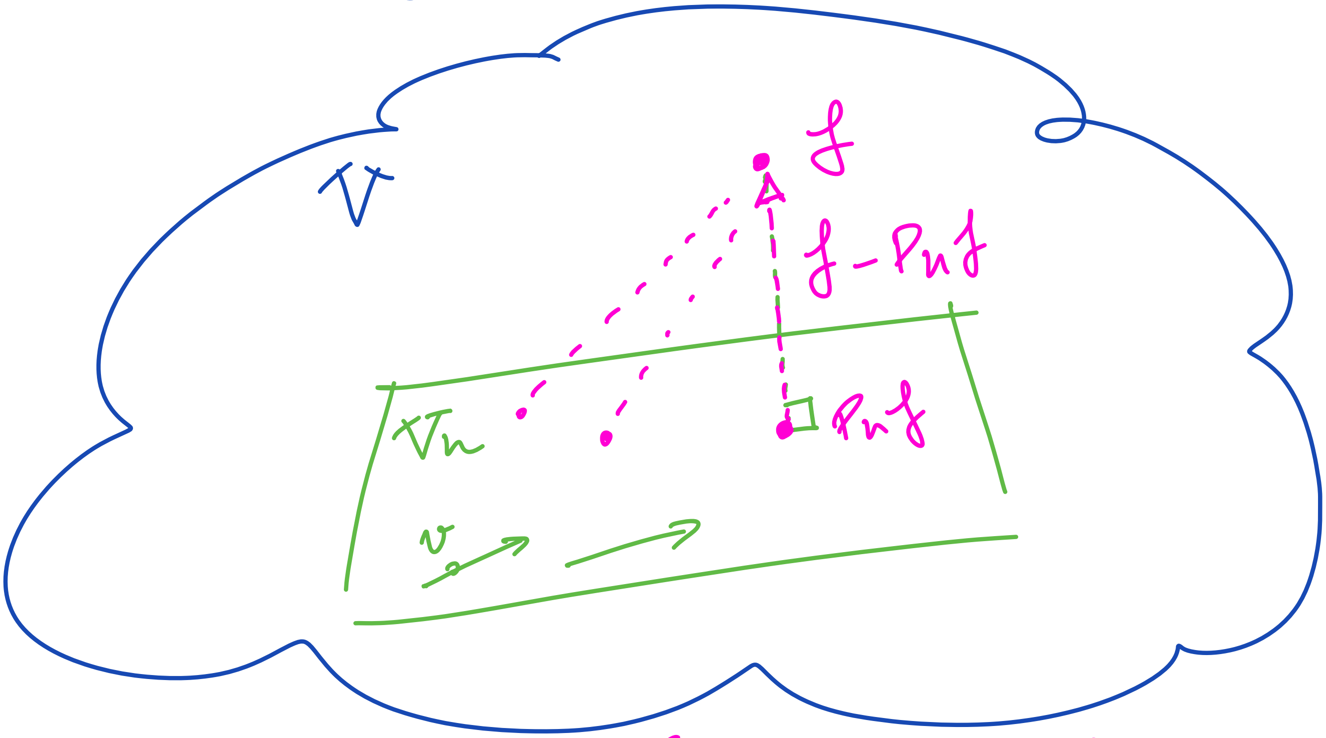
$$\langle P_n f, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_n$$

$$\langle f, v \rangle - \langle P_n f, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V_n$$

$$\rightarrow \quad \langle f - P_n f, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V_n$$

$\therefore \quad f - P_n f = \text{felet}$

ortogonalt mot alla $v \in V_n$!



Bästa approximationen (närmast) uppfyller

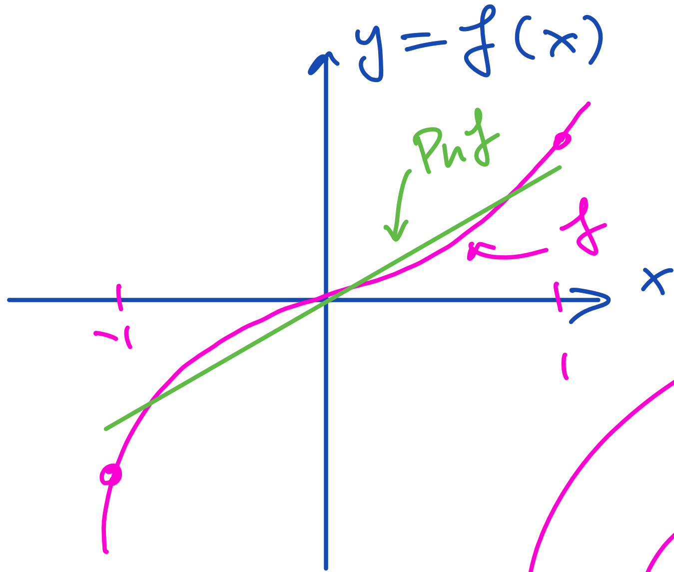
$$f - P_n f \perp v \quad \forall v \in V_n$$

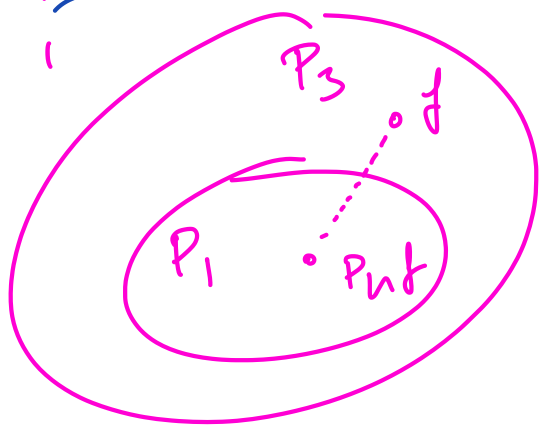
Exempel: Projektion på $P_1([-1,1])$

Polynom av grad 1 på $[-1,1]$

$$f(x) = x^3$$

$$V_h = P_1([-1,1])$$





$$\Longrightarrow \int_{-1}^{1} P_h f(x)\, v(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f(x)\, v(x)\, dx \quad \forall v \in V_h$$

basfunktioner

Räcker att det gäller för basfunktionerna

$$V_h = \text{span}\{1, x\}$$

Alla polynom av grad 1 kan skrivas som linjärkombination av dessa:

$$P_h f(x) = a \cdot 1 + b \cdot x$$

Två ekvationer:

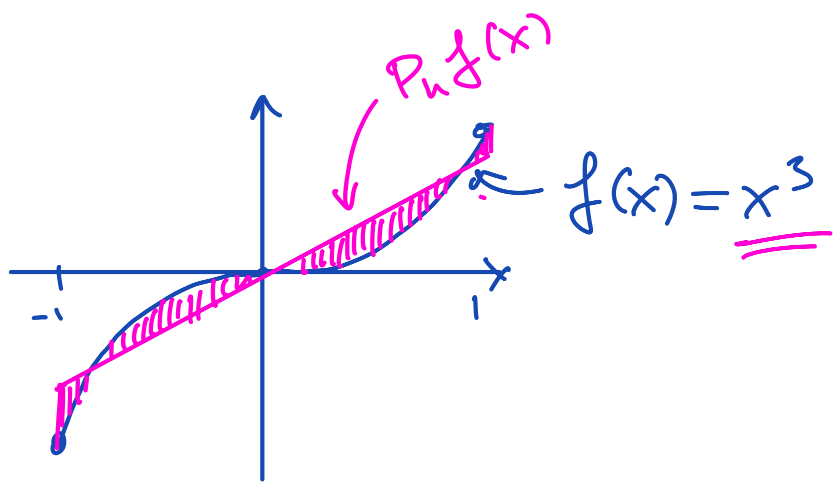
$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1} (a+bx)\cdot 1\,dx = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot 1\,dx & v = 1 \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} (a+bx)\cdot x\,dx = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot x\,dx & v = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + 0\cdot b = 0 \\ 0\cdot a + 2/3\cdot b = 2/5 \end{cases}$$

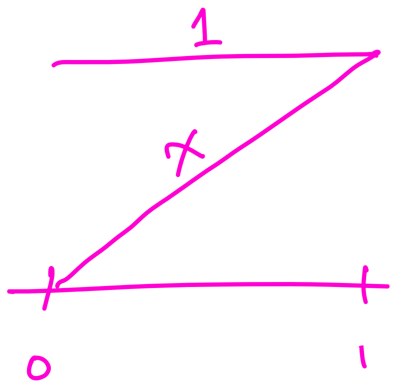
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

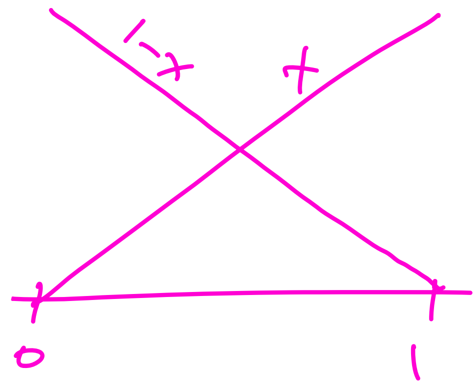
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{a = 0}} \qquad \underline{\underline{b = 3/5}}$$

$$\Rightarrow \quad P_n f(x) = a + b\cdot x = 0 + 3/5\,x = \underline{\underline{\frac{3x}{5}}}$$



Exempel på baser:





◦ Generell beräkning av P_h

V_h = diskret funktionsrum med bas $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$

$$V_h = \text{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$$

$$\dim V_h = N$$

P_h definieras av:

$$\Rightarrow \int_\Omega \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ansats}}}{P_h f}\; \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi_i}}{v}\, dx = \int_\Omega f \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi_i}}{v}\, dx \quad \forall v \in V_h$$

Steg 1: Ansats för $P_h f$:

$$P_h f(x) = \sum_{j=1}^{N} F_j \varphi_j(x)$$

Steg 2: Testa med basfunktionerna:

$$v = \varphi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

$$\int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^{N} F_j \varphi_j\Big) \varphi_i \, dx = \int_\Omega f \varphi_i \, dx, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\sum_{j=1}^{N} \int F_j \varphi_j \cdot \varphi_i \, dx = \int f \varphi_i \, dx$$

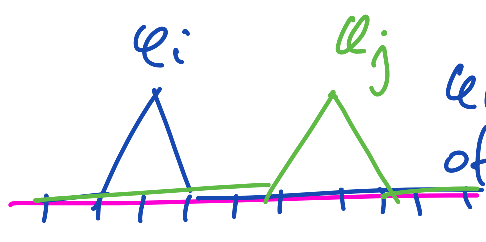
$$\sum_{j=1}^{N} \underbrace{\Big(\int_\Omega \varphi_i \cdot \varphi_j \, dx \Big)}_{= A_{ij}} F_j = \underbrace{\int_\Omega f \varphi_i \, dx}_{= b_i}$$

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} F_j = b_i, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\boxed{AF = b}$$ Linjärt ekvationssystem

$$\begin{cases} A_{ij} = \int_\Omega \varphi_i \varphi_j \, dx \\ b_i = \int f \varphi_i \, dx \end{cases}$$

Gles för styckvis linjära basfunktioner



$\varphi_i \varphi_j = 0$ ofta!