Formas Diferenciables

Wilson Jerez

Mayo 2024

Definición

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. El pullback de f en un punto p es

$$f^* : \Lambda^k(\mathbb{R}^m_{f(p)})^* \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$$

tal que

$$f^*(w)(p)(v_1, \ldots, v_k) = w(f(p))(df_p(v_1), \ldots, df_p(v_k))$$

Ejercicio 8

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un mapeo diferenciable dado por

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n),$$

y sea $w = dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$. Muestre que

$$f^* w = \det(df_p)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Cálculo de dy_i

Para ver esto primero consideremos una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_n)$. Tenemos que $f^* dy_i = \sum a_k dx_k$. Por otro lado, tenemos:

$$\begin{aligned} f^* dy_i(e_i) &= dy_i(f_p)(df_p(e_i)) \\ &= dy_i(f_p)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(e_k)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) dx_j \end{aligned}$$

Por tanto, podemos ver que $f^* dy_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$.

Expansión del Producto Exterior

El pullback $f^*(w)$ se obtiene expandiendo el producto exterior de las diferenciales dy_i:

$$\begin{aligned}
f^*(w) &= \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} dx_j \right) \\
&= \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j(v_1) & \dots & \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j(v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} dx_j(v_1) & \dots & \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} dx_j(v_n) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$f^*(w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_1(v_1) & \dots & dx_1(v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dx_n(v_1) & \dots & dx_n(v_n) \end{vmatrix}$$

$$= det(df_p)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(v_1, \dots, v_n)$$

Resultado Final

El resultado final es que el pullback de w bajo f es el determinante del Jacobiano multiplicado por el producto exterior de las diferenciales $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$:

$$f^*(w) = \det(df_p)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Links de interes

https://sites.ualberta.ca/~vbouchar/MATH215/section_pullback_two_form.html

https://math.stackexchange.com/questions/576638/how-to-calculate-the-pullback-of-a-k-form-explicitly

https://math.stackexchange.com/questions/1302562/proving-that-the-pullback-map-commutes-with-the-exterior-d