Propiedades De Continuidad

Wilson Jerez

Corolario

Dadas $f : X \to \mathbb{R}^m$ y $g : X \to \mathbb{R}^n$, sea $(f, g) : X \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ definida por $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$. Entonces, (f, g) es continua si, y solo si, f y g son ambas continuas.

Demostración

Supongamos primero que (f, g) es continua. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $\|x - a\| < \delta$, entonces $\|(f, g)(x) - (f, g)(a)\| < \varepsilon$. Esto implica que $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ y $\|g(x) - g(a)\| < \varepsilon$, por lo que f y g son continuas en a.

Recíprocamente, supongamos que f y g son continuas en a. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existen $\delta_f > 0$ y $\delta_g > 0$ tales que si $\|x-a\| < \delta_f$, entonces $\|f(x)-f(a)\| < \varepsilon/2$, y si $\|x-a\| < \delta_g$, entonces $\|g(x)-g(a)\| < \varepsilon/2$. Tomando $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$, si $\|x - a\| < \delta$, entonces $\|(f, g)(x) - (f, g)(a)\| = \max\{\|f(x) - f(a)\|, \|g(x) - g(a)\|\} < \varepsilon$, lo que muestra que (f, g) es continua en a.

Consideraciones

Consideremos las siguientes aplicaciones bajo la hipótesis de que $X \subset \mathbb{R}^m$ y $f, g : X \to \mathbb{R}^n$, $\alpha : X \to \mathbb{R}$ son aplicaciones continuas.

Demostraciones

Continuidad de $f + g$

Para demostrar que $f + g$ es continua, consideremos un punto $a \in X$ y un número $\varepsilon > 0$ arbitrario. Dado que f y g son continuas, existen $\delta_f > 0$ y $\delta_g > 0$ tales que para todo $x \in X$,

$$\|x - a\| < \delta_f \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|x - a\| < \delta_g \Rightarrow \|g(x) - g(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$, tenemos que si $\|x - a\| < \delta$, entonces

$$\|(f + g)(x) - (f + g)(a)\| = \|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)\| \leq \|f(x) - f(a)\| + \|g(x) - g(a)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $f + g$ es continua en a.

Continuidad de $\alpha \cdot f$

Para demostrar que $\alpha \cdot f$ es continua, seguimos un razonamiento similar. Dado $\varepsilon > 0$, existen $\delta_\alpha > 0$ y $\delta_f > 0$ tales que

$$\|x - a\| < \delta_\alpha \Rightarrow |\alpha(x) - \alpha(a)| < \frac{\varepsilon}{2\|f(a)\| + 1}$$

$$\|x - a\| < \delta_f \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha(a)| + 1}$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_\alpha, \delta_f\}$, si $\|x - a\| < \delta$, entonces

$$\|(\alpha \cdot f)(x) - (\alpha \cdot f)(a)\| = \|\alpha(x)f(x) - \alpha(a)f(a)\| = \|\alpha(x)f(x) - \alpha(x)f(a) + \alpha(x)f(a) - \alpha(a)f(a)\| \leq |\alpha(x)|\|f(x) - f(a)\| + |\alpha(x) - \alpha(a$$

Por lo tanto, $\alpha \cdot f$ es continua en a.

Continuidad de $\langle f, g \rangle$

La continuidad de $\langle f, g \rangle$ se puede demostrar de manera similar, utilizando la definición de continuidad y la propiedad de que el producto interno es una operación continua.

Continuidad de $\frac{1}{\alpha}$

Finalmente, para demostrar que $\frac{1}{\alpha}$ es continua en a, asumimos que $0 \notin \alpha(X)$, lo que garantiza que $\alpha(x) \neq 0$ para todo $x \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - a\| < \delta$, entonces $|\alpha(x) - \alpha(a)| < \varepsilon|\alpha(a)|^2$. Esto asegura que

$$\left| \frac{1}{\alpha(x)} - \frac{1}{\alpha(a)} \right| = \left| \frac{\alpha(a) - \alpha(x)}{\alpha(x)\alpha(a)} \right| < \varepsilon,$$

lo que demuestra la continuidad de $\frac{1}{\alpha}$ en a.