

1.  $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z(z^2+9)} dz$

**Solución:**

Consideremos la integral  $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z(z^2+9)} dz$ . Definimos la función  $f(z) = \frac{\cos z}{z^2+9}$ . Observamos que  $f(z)$  es analítica en todo el plano complejo excepto en los puntos  $z = 3i$  y  $z = -3i$ . Dado que la curva de integración  $|z| = 1$  no incluye estos puntos, podemos aplicar el Teorema de los Residuos.

Seleccionamos el punto  $z = 0$ , el cual está en el interior de la curva  $C$ . Aplicando el Teorema de los Residuos, obtenemos:

$$\begin{aligned} 2\pi i f(0) &= \int_C \frac{\frac{\cos z}{z^2+9}}{z-0} \\ &= \int_C \frac{\cos z}{z(z^2+9)} \end{aligned}$$

Así,

$$2\pi i f(0) = 2\pi i \frac{1}{9}.$$

Por lo tanto,

$$\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+9)} = \frac{2\pi i}{9}.$$

2.  $\int_C \frac{ze^{-z}}{z - \frac{i\pi}{2}} dz$ , donde  $C$  es el triángulo con vértices  $-1-i$ ,  $1-i$  y  $2i$

**Solución:**

Observamos que  $ze^{-z}$  es analítica en  $C$  y en su interior. Por lo tanto,  $z_0 = \frac{i\pi}{2}$  está dentro de  $C$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{ze^{-z}}{z - \frac{i\pi}{2}} &= 2\pi i \left( \frac{i\pi}{2} \right) e^{\frac{-i\pi}{2}} \\ &= -\pi^2(-i) \\ &= i\pi^2 \end{aligned}$$

3.  $\int_{|z|=1} \frac{z^2}{z+3} dz$

**Solución:**

Observamos que  $\frac{z^2}{z+3}$  es analítica en cualquier punto excepto  $z = -3$ , que no pertenece a  $|z| = 1$  ni a su interior. Además,  $|z| = 1$  es una curva cerrada simple. Por lo tanto, por el teorema de Cauchy,  $\int_{|z|=1} \frac{z^2}{z+3} = 0$ .

4.  $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2-1} dz$

**Solución:**

Tenemos

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2-1} dz = \int_{|z|=C} \frac{\sin z}{(z+1)(z-1)} dz$$

para  $\{\frac{z}{|z|} = 2\} = C$ . Pero  $\frac{1}{(z+1)(z-1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1}$ . De donde  $(A+B)z + (B-A) = 1$  y entonces  $A = \frac{-1}{2}$ ,  $B = \frac{1}{2}$ . Por tanto,

$$\int_C \frac{\sin z}{(z+1)(z-1)} = -\frac{1}{2} \int_C \frac{\sin z}{z+1} + \frac{1}{2} \int_C \frac{\sin z}{z-1}$$

Sin embargo, notamos que  $f = \sin z$  es analítica y que tanto  $z = 1$  como  $z = -1$  pertenecen al interior de  $C$ , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( - \int_C \frac{\sin z}{z+1} + \int_C \frac{\sin z}{z-1} \right) &= -2\pi i f(-1) + 2\pi i f(1) \\ &= \pi i (\sin(1) + \sin(1)) \\ &= 2\pi i \sin(1) \end{aligned}$$

5.  $\int_{|z|=b} \frac{dz}{z^2+bz+1}$ .

**Solución:**

Es importante destacar que  $b$  debe ser mayor que 0 para que exista la circunferencia. Las raíces de la ecuación  $z^2 + bz + 1 = 0$  son  $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4}}{2}$ . Vamos a comparar  $z_{1,2}$  para determinar si están dentro de la circunferencia  $|z| = b$ .

$$\begin{aligned} |z_{1,2}| &= \left| \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4}}{2} \right| \\ &\leq \frac{b}{2} + \frac{1}{2} |\sqrt{b^2-4}| < \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b \end{aligned}$$

Por lo tanto, estas raíces están dentro de la circunferencia.

De donde,

$$\int_C \frac{dz}{z^2+bz+1} = \int_C \frac{A}{z-z_1} dz + \int_C \frac{B}{z-z_2}$$

y por el teorema del número de giros,

$$\int_C \frac{dz}{z^2+bz+1} = 2\pi i A + 2\pi i B.$$

6.  $\int_C \frac{e^{-z}}{z^3+2z^2-3z-10} dz$ , donde  $C$  es el triángulo con vértices  $i$ ,  $-i$  y  $3$ .

**Solución:**

Observamos por el algoritmo de la división que  $z^3 + 2z^2 - 3z - 10 = (z-2)(z^2 + 4z + 5)$ .

Ahora,  $f = \frac{e^{-z}}{z^2+4z+5}$  es analítica excepto en  $z = -2i - i$  y  $z = -2 + i$ , puntos que no están en  $C$  ni en su interior. Tomamos  $z_0 = 2$ , que está dentro de  $C$ .

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\frac{e^{-z}}{z^2+4z+5}}{z-2} &= 2\pi i f(2) \\ &= 2\pi i \frac{e^{-2}}{4+8+5} = \frac{2\pi i e^{-2}}{17}\end{aligned}$$

7.  $\int_{|z-(1+i)|=1} \log z dz.$

**Solución:**

Observamos que  $\log z$  es analítica en  $C$  y su interior. Además,  $C$  es una curva cerrada simple. Por tanto,

$$\int_C \log(z) dz = 0.$$

8.  $\int_C \frac{dz}{z+1+i}$ , donde  $C$  es el cuadrado con vértices  $3i$ ,  $3+3i$ ,  $0$  y  $3$ .

**Solución:**

Note que  $z+1+i=0$  únicamente en  $z=-1-i$ , pero este  $z$  no está en  $C$  ni en su interior. Además, al ser una curva cerrada simple, se tiene:

$$\int_C \frac{dz}{z+1+i} = 0$$

9.  $\int_{|z-3|=2} \frac{\log z}{(z+1)(z-3)} dz$

**Solución:**

Observando que  $z_0 = 3$  está en el interior de la curva y que  $f(z) = \frac{\log z}{z+1}$  es analítica en  $z \neq -1$ , pero  $-1$  no está sobre la curva ni en su interior, se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\frac{\log z}{z+1}}{z-3} &= 2\pi i f(3) \\ &= \frac{\pi i \log 3}{2}\end{aligned}$$

10.  $\int_0^{1+i} z^2 dz$

$$\begin{aligned}\int_0^{1+i} z^2 dz &= \left. \frac{z^3}{3} \right|_0^{1+i} \\ &= \frac{(1+3i)^3 - 0^3}{3} \\ &= \frac{-2+2i}{3} \\ &= \frac{2}{3}(-1+i)\end{aligned}$$

$$11. \int_0^{\pi+2i} \cos \frac{z}{2} dz$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi+2i} \cos \frac{z}{2} dz &= 2 \sin \left( \frac{z}{2} \right) \Big|_0^{\pi+2i} \\ &= 2 \sin \left( \frac{\pi}{2} + i \right) - \sin(0) \\ &= 2 \left( \frac{e^{\frac{\pi}{2}} e^i - e^{-\frac{\pi}{2}} e^{-i}}{2i} \right) \\ &= 2 \left( \frac{ie^i + ie^{-i}}{2i} \right) = 2 \cosh 1 \end{aligned}$$