.

Cálculos

En los Ejercicios 1 a 5, indique si la función ν dada es una norma euclidiana para el dominio integral dado.

1. La función ν para $\mathbb{Z}$ dada por $\nu(n) = n^2$ para $n \neq 0$ en $\mathbb{Z}$.

   Solución: Sí, es una norma euclidiana. Para ver esto, recordemos que $|\cdot|$ es una norma euclidiana en $\mathbb{Z}$. Para la Condición 1, encontramos q y r tales que $a = bq + r$ donde $r = 0$ o $|r| < |b|$. Entonces, seguramente tenemos $\nu(r) = 0$ o $\nu(r) = r^2 < b^2 = \nu(b)$, porque r y b son enteros. Para la Condición 2, note que $\nu(a) = a^2 \leq a^2b^2 = \nu(ab)$ para a y b no nulos, porque a y b son enteros.

2. La función ν para $\mathbb{Z}[x]$ dada por $\nu(f(x)) =$ (grado de $f(x)$) para $f(x) \neq 0$ en $\mathbb{Z}[x]$.

   Solución: No, ν no es una norma euclidiana. Sea $a = x$ y $b = 2x$ en $\mathbb{Z}[x]$. No existen $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$ que satisfagan $x = (2x)q(x) + r(x)$ donde el grado de $r(x)$ es menor que 1.

3. La función ν para $\mathbb{Z}[x]$ dada por $\nu(f(x)) =$ (el valor absoluto del coeficiente del término de mayor grado no nulo de $f(x)$) para $f(x) \neq 0$ en $\mathbb{Z}[x]$.

   Solución: No, ν no es una norma euclidiana. Sea $a = x$ y $b = x + 2$ en $\mathbb{Z}[x]$. No existen $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$ que satisfagan $x = (x + 2)q(x) + r(x)$ donde el valor absoluto del coeficiente del término de mayor grado en $r(x)$ es menor que 1.

4. La función ν para $\mathbb{Q}$ dada por $\nu(a) = a^2$ para $a \neq 0$ en $\mathbb{Q}$.

   Solución: No, no es una norma euclidiana. Sea $a = 1/2$ y $b = 1/3$. Entonces $\nu(a) = (1/2)^2 = 1/4 > 1/36 = \nu(1/6) = \nu(ab)$, por lo que se viola la Condición 2.

5. La función ν para $\mathbb{Q}$ dada por $\nu(a) = 50$ para $a \neq 0$ en $\mathbb{Q}$.

   Solución: Sí, es una norma euclidiana, pero no es útil. Sea $a, b \in \mathbb{Q}$. Si $b \neq 0$, sea $q = a/b$. Entonces $a = bq + 0$, lo que satisface la Condición 1. Para la Condición 2, si tanto a como b son no nulos, entonces $\nu(a) = 50 \leq 50 = \nu(ab)$.

6. Refiriéndose al Ejemplo 46.11, exprese realmente el mcd 23 en la forma $\lambda(22, 471) + \mu(3, 266)$ para $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$.

   Solución: Tenemos $23 = 3(138) - 1(391)$, pero $138 = 3, 266 - 8(391)$, entonces

   $$23 = 3[3, 266 - 8(391)] - 1(391) = 3(3, 266) - 25(391).$$

   Ahora $391 = 7(3, 266) - 22, 471$, entonces

   $$23 = 3(3, 266) - 25[7(3, 266) - 22, 471] = 25(22, 471) - 172(3, 266).$$

7. Encuentre un mcd de 49,349 y 15,555 en $\mathbb{Z}$.

   Solución: Realizando el algoritmo de la división, obtenemos

   $$49, 349 = (15, 555)3 + 2, 684,$$
   $$15, 555 = (2, 684)6 - 549,$$
   $$2, 684 = (549)5 - 61,$$
   $$549 = (61)9 + 0,$$

   entonces el mcd es 61.

8. Siguiendo la idea del Ejercicio 6 y refiriéndose al Ejercicio 7, exprese el mcd positivo de 49,349 y 15,555 en $\mathbb{Z}$ en la forma $\lambda(49, 349) + \mu(15, 555)$ para $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$.

   Solución: Tenemos $61 = 5(549) - 2, 684$, pero $549 = 6(2, 684) - 15, 555$, entonces

   $$61 = 5[6(2, 684) - 15, 555] - 2, 684 = 29(2, 684) - 5(15, 555).$$

   Ahora $2, 684 = 49, 349 - 3(15, 555)$, entonces

   $$61 = 29[49, 349 - 3(15, 555)] - 5(15, 555) = 29(49, 349) - 92(15, 555).$$

9. Encuentre un mcd de $x^{10} - 3x^9 + 3x^8 - 11x^7 + 11x^6 - 11x^5 + 19x^4 - 13x^3 + 8x^2 - 9x + 3$ y

Solución: Usamos el algoritmo de la división.

$$
\begin{aligned}
& x^{10} - 3x^9 + 3x^8 - 11x^7 + 11x^6 - 11x^5 + 19x^4 - 13 \\
\div\ & x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 9x^3 + 5x^2 - 5x + 2 \\
=\ & x^4 - 2x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^{10} - 3x^9 + 3x^8 - 9x^7 + 5x^6 - 5x^5 + 2x^4 & \\
-(x^4 - 2x)(x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 9x^3 + 5x^2 - 5x + 2) & \\
= & \ -2x^7 + 6x^6 - 6x^5 + 17x^4 - 13x^3 + 8x^2 - 9x + 3 \\
\div & \ x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 9x^3 + 5x^2 - 5x + 2 \\
= & \ -2x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-2x^7 + 6x^6 - 6x^5 + 18x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 4x & \\
-(-2x)(x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 9x^3 + 5x^2 - 5x + 2) & \\
= & \ -x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 5x + 3 \\
\div & \ x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 9x^3 + 5x^2 - 5x + 2 \\
= & \ 1/x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 5x + 3 & \\
\div & \ x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 5x + 2 \\
\\
= & \ -x^2 + 6x - 19 \\
\div & \ x^2 - 6x + 19 \\
= & \ x \\
\div & \ x^3 + 2x - 1 \\
= & \ x^3 + 2x - 1
\end{aligned}
$$

Un mcd es $x^3 + 2x - 1$.

10. Describa cómo se puede usar el algoritmo euclidiano para encontrar el mcd de n miembros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de un dominio euclidiano.

    Solución: Use el algoritmo euclidiano para encontrar el mcd d_2 de a_2 y a_1. Luego úselo para encontrar el mcd d_3 de a_3 y d_2. Luego úselo nuevamente para encontrar el mcd d_4 de a_4 y d_3. Continúe este proceso hasta encontrar el mcd d_n de a_n y d_{n-1}. El mcd de los n miembros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es d_n.

11. Usando su método ideado en el Ejercicio 10, encuentre el mcd de 2178, 396, 792 y 726.

    Solución: Usamos la notación de la solución del ejercicio anterior con $a_1 = 2178$, $a_2 = 396$, $a_3 = 792$ y $a_4 = 726$. Tenemos $2178 = 5(396) + 198$ y $396 = 2(198) + 0$, por lo que $d_2 = 198$. Tenemos $792 = 4(198) + 0$ así que $d_3 = 198$. Tenemos $726 = 3(198) + 132$, $198 = 1(132) + 66$, y $132 = 2(66) + 0$. Así, el mcd de 2178, 396, 792 y 726 es $d_4 = 66$.

Bibliografía

1. John B. Fraleigh, Neal E. Brand. *A First Course in Abstract Algebra, 7th Edition*, Pearson.

2. Thomas W. Judson. *Abstract Algebra, Theory and Applications*, Stephen F. Austin State University.