Taller final análisis complejo
Wilson Eduardo Jerez Hernández - 20181167034

1. $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z(z^2+9)} dz$
Solución:
Consideremos la integral $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z(z^2+9)} dz$. Definimos la función $f(z) = \frac{\cos z}{z^2+9}$. Observamos que $f(z)$ es analítica en todo el plano complejo excepto en los puntos $z = 3i$ y $z = -3i$. Dado que la curva de integración $|z| = 1$ no incluye estos puntos, podemos aplicar el Teorema de los Residuos.

   Seleccionamos el punto $z = 0$, el cual está en el interior de la curva C. Aplicando el Teorema de los Residuos, obtenemos:

$$\begin{aligned} 2\pi i f(0) &= \int_C \frac{\frac{\cos z}{(z^2+9)}}{z-0} \\ &= \int_C \frac{\cos z}{z(z^2+9)} \end{aligned}$$

   Así,

$$2\pi i f(0) = 2\pi i \frac{1}{9}.$$

   Por lo tanto,

$$\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+9)} = \frac{2\pi i}{9}.$$

2. $\int_C \frac{ze^{-z}}{z-\frac{i\pi}{2}} dz$, donde C es el triángulo con vértices $-1-i$, $1-i$ y $2i$
Solución:
Observamos que ze^{-z} es analítica en C y en su interior. Por lo tanto, $z_0 = \frac{i\pi}{2}$ está dentro de C. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{ze^{-z}}{z-\frac{i\pi}{2}} &= 2\pi i \left(\frac{i\pi}{2}\right) e^{\frac{-i\pi}{2}} \\ &= -\pi^2(-i) \\ &= i\pi^2 \end{aligned}$$

3. $\int_{|z|=1} \frac{z^2}{z+3} dz$
Solución:
Observamos que $\frac{z^2}{z+3}$ es analítica en cualquier punto excepto $z = -3$, que no pertenece a $|z| = 1$ ni a su interior. Además, $|z| = 1$ es una curva cerrada simple. Por lo tanto, por el teorema de Cauchy, $\int_{|z|=1} \frac{z^2}{z+3} = 0$.

4. $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2-1} dz$
Solución:
Tenemos

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2-1} dz = \int_{|z|=C} \frac{\sin z}{(z+1)(z-1)} dz$$

para $\{\frac{z}{|z|} = 2\} = C$. Pero $\frac{1}{(z+1)(z-1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1}$. De donde $(A+B)z + (B-A) = 1$ y entonces $A = \frac{-1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$. Por tanto,

$$\int_C \frac{\sin z}{(z+1)(z-1)} = -\frac{-1}{2} \int_C \frac{\sin z}{(z+1)} + \frac{1}{2} \frac{\sin z}{z-1}$$

Sin embargo, notamos que $f = \sin z$ es analítica y que tanto $z = 1$ como $z = -1$ pertenecen al interior de C, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(-\int_C \frac{\sin z}{z+1} + \int_C \frac{\sin z}{z-1}\right) &= -2\pi i f(-1) + 2\pi i f(1) \\ &= \pi i \left(\sin(1) + \sin(1)\right) \\ &= 2\pi i \sin(1) \end{aligned}$$

5. $\int_{|z|=b} \frac{dz}{z^2+bz+1}$.
Solución:
Es importante destacar que b debe ser mayor que 0 para que exista la circunferencia. Las raíces de la ecuación $z^2 + bz + 1 = 0$ son $z_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4}}{2}$. Vamos a comparar $z_{1,2}$ para determinar si están dentro de la circunferencia $|z| = b$.

$$\begin{aligned} |z_{1,2}| =& |\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4}}{2}| \\ \leq& \frac{b}{2} + \frac{1}{2}|\sqrt{b^2-4}| < \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b \end{aligned}$$

Por lo tanto, estas raíces están dentro de la circunferencia.

De donde,

$$\int_C \frac{dz}{z^2+bz+1} = \int_C \frac{A}{z-z_1} dz + \int_C \frac{B}{z-z_2}$$

y por el teorema del número de giros,

$$\int_C \frac{dz}{z^2+bz+1} = 2\pi i A + 2\pi i B.$$

6. $\int_C \frac{e^{-z}}{z^3+2z^2-3z-10} dz$, donde C es el triángulo con vértices i, $-i$ y 3.
Solución:
Observamos por el algoritmo de la división que $z^3 + 2z^2 - 3z - 10 = (z-2)(z^2+4z+5)$.

Ahora, $f = \frac{e^{-z}}{z^2+4z+5}$ es analítica excepto en $z = -2i - i$ y $z = -2 + i$, puntos que no están en C ni en su interior. Tomamos $z_0 = 2$, que está dentro de C.

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\frac{e^{-z}}{z^2+4z+5}}{z-2} &= 2\pi i f(2) \\ &= 2\pi i \frac{e^{-2}}{4+8+5} = \frac{2\pi i e^{-2}}{17}\end{aligned}$$

7. $\int_{|z-(1+i)|=1} \log z dz$.
Solución:

Observamos que $\log z$ es analítica en C y su interior. Además, C es una curva cerrada simple. Por tanto,

$$\int_C \log(z) dz = 0.$$

8. $\int_C \frac{dz}{z+1+i}$, donde C es el cuadrado con vértices $3i$, $3+3i$, 0 y 3.
Solución:
Note que $z+1+i = 0$ únicamente en $z = -1-i$, pero este z no está en C ni en su interior. Además, al ser una curva cerrada simple, se tiene:

$$\int_C \frac{dz}{z+1+i} = 0$$

9. $\int_{|z-3|=2} \frac{\log z}{(z+1)(z-3)} dz$
Solución:
Observando que $z_0 = 3$ está en el interior de la curva y que $f(z) = \frac{\log z}{z+1}$ es analítica en $z \neq -1$, pero -1 no está sobre la curva ni en su interior, se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\frac{\log z}{z+1}}{z-3} &= 2\pi i f(3) \\ &= \frac{\pi i \log 3}{2}\end{aligned}$$

10. $\int_0^{1+i} z^2 dz$

$$\begin{aligned}\int_0^{1+i} z^2 dz &= \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^{1+i} \\ &= \frac{(1+3i)^3 - 0^3}{3} \\ &= \frac{-2+2i}{3} \\ &= \frac{2}{3}(-1+i)\end{aligned}$$

11. $\int_0^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}dz$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}dz &= 2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\Big|_0^{\pi+2i} \\
&= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\right) - \sin(0) \\
&= 2\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}}e^{i} - e^{\frac{-\pi}{2}}e^{-i}}{2i}\right) \\
&= 2\left(\frac{ie^{i} + ie^{-i}}{2i}\right) = 2\cosh 1
\end{aligned}$$