0.1. Grupos continuos

La teoría de los grupos continuos fue creada por el matemático noruego Sophus Lie en la década de 1870. Inicialmente, su objetivo era desarrollar una teoría de ecuaciones diferenciales como la teoría de ecuaciones polinómicas de Galois. Vio que cada ecuación diferencial tiene un grupo, análogo al grupo de Galois pero "continuo" en lugar de finito, y que los grupos "simples" presentan un obstáculo para la solución.
Así, su atención se desplazó rápidamente al problema de clasificar grupos continuos y (particularmente) identificar los grupos simples entre ellos. La definición de un "grupo continuo", o lo que ahora llamamos un grupo de Lie, es algo sutil, como lo es la definición de "simple"para estos grupos. Aquí nos contentamos simplemente con dar algunos ejemplos y probar la simplicidad de uno de ellos.
El ejemplo más fácil de entender de un grupo continuo es la recta numérica R, bajo la operación de suma. Este grupo es "continuo" en el sentido de que la operación de grupo $x, y \to x+y$, y también la operación inversal de grupo $x \to -x$, es una

función continua. Un ejemplo relacionado es el círculo unitario

$$\mathbb{S}^1 = \{z : |z| = 1\}$$

en el plano de los números complejos, bajo la operación (obviamente continua) de multiplicación de números complejos. $\mathbb{S}^1$ también se llama SO(2), el primero de una familia llamada especiales ortogonales o de rotación. Podemos interpretar un miembro z de SO(2) como una rotación del plano, porque

$$z = \cos\theta + i\sin\theta, \text{ para algun } \theta$$

y multiplicando cada número complejo por z gira el plano $\mathbb{C}$ alrededor de O a través del ángulo θ. Por lo tanto, la operación de grupo en $SO(2)$ también puede verse como una suma de ángulos, que es otra forma de ver que $SO(2)$ es continua. Tanto $\mathbb{R}$ y $SO(2)$ son grupos abelianos, por lo que no son muy interesantes. El primer grupo continuo realmente interesante es $SO(3)$, el grupo de rotación del espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$. Si tomamos una rotación r de $\mathbb{R}^3$ dada por un eje A que pasa por O y un giro de ángulo θ alrededor de A, entonces ni siquiera es obvio que las rotaciones espaciales formen un grupo. Dada una rotación r con eje A y ángulo θ, y una rotación s con eje B ángulo ϖ, ¿podemos estar seguros de que la combinación sr tiene incluso un eje C y un ángulo X bien definidos? La (sí) aparentemente fue encontrada por primera vez por Euler (1776), pero ahora podemos encontrar esta respuesta mucho más fácilmente. El truco consiste en ver cada rotación como un producto de dos reflexiones, como se muestra en la figura 1.

La imagen de la izquierda en la figura muestra un par de líneas en el plano, L y M, que se encuentran en O en el ángulo $\theta/2$. Si un punto X se refleja en L (hacia X'), entonces en M (hacia X''), el ángulo entre X y X'' es claramente θ. De manera más general, está claro que una rotación alrededor de cualquier punto Y a través del ángulo θ puede realizarse mediante reflexiones sucesivas en dos líneas cualesquiera a través de Y que se encuentran en el ángulo $\theta/2$ (medido en el sentido apropiado). Lo mismo es cierto para la rotación de una esfera, y por tanto de $\mathbb{R}^3$, alrededor de cualquier eje. Para rotar a través del ángulo θ alrededor del eje YY' (imagen de la derecha) basta con reflejar en dos grandes círculos cualesquiera a través de Y e Y' que se encuentran en el ángulo $\theta/2$. De manera equivalente, uno refleja la esfera en cualquiera de los dos planos que se encuentran a lo largo de la línea YY' en el ángulo $\theta/2$.

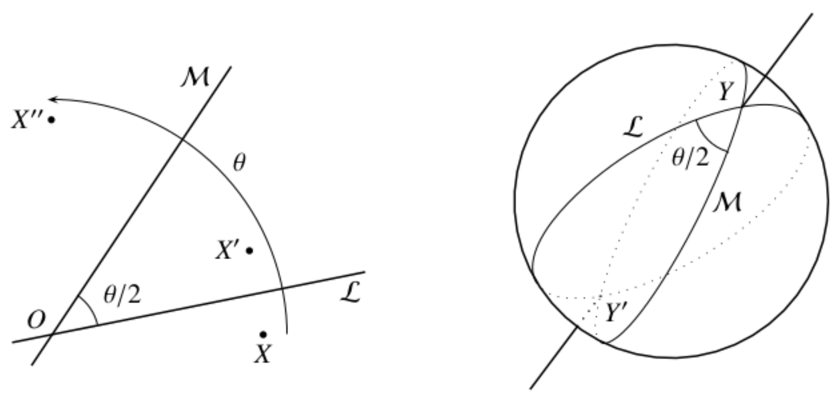

Figura 1: Rotación a través de un par de reflexiones

Supongamos ahora que queremos encontrar el resultado de realizar la rotación r de la esfera, con eje que pasa por P y ángulo θ, luego la rotación s con eje a través de Q y el ángulo φ. Haciendo uso de nuestra libertad para elegir los grandes círculos de reflexión, realizamos r por el par de reflexiones en los grandes círculos L y M a través de P que están separados por un ángulo $\theta/2$, donde M pasa a través de P y Q (Figura 2).)

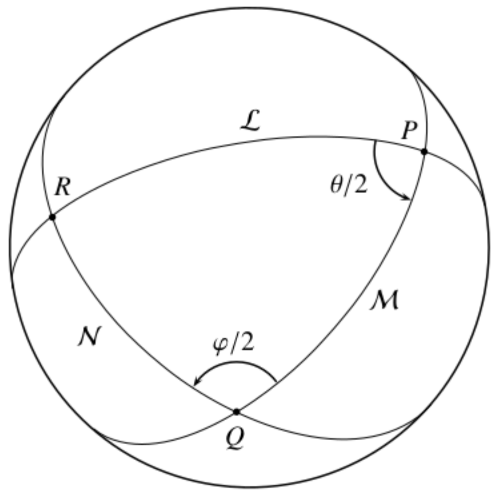

Figura 2: Hallar el producto de rotaciones

Luego nos damos cuenta de s por el par de reflexiones en M y N a través de Q que están separadas por un ángulo $\varphi/2$. De ello se deduce, dado que las reflexiones sucesivas en M se cancelan, asi

$$\begin{aligned} sr &= \text{reflejo en } L \text{ luego reflejo en } M \text{ luego reflejo en } M \text{ luego reflejo en } N \\ &= \text{reflexión en } L \text{ luego reflexión en } N \\ &= \text{rotación alrededor del eje RR a través del ángulo } x, \end{aligned}$$

donde R es el tercer vértice y $x/2$ es el tercer ángulo, en el triángulo esférico formado por los grandes círculos L, M y N. Así, el producto de las rotaciones es una rotación. Como siempre, esta operación de "producto" es asociativa, porque es el producto de funciones. También es claro que la inversa de una rotación es una rotación (mismo eje, negativo del ángulo), por lo que las rotaciones forman un grupo bajo la operación producto. Finalmente, es intuitivamente claro que el producto y el inverso dependen continuamente de la posición del eje y del ángulo de rotación. Entonces este grupo $SO(3)$ es continuo. En la siguiente sección veremos que la continuidad es crucial para demostrar que $SO(3)$ es un grupo simple.

0.2. Simplicidad de $SO(3)$

Para demostrar que SO es simple, consideramos un subgrupo normal $H \neq 1$ y pretendemos demostrar que $H = SO(3)$. Como H es normal,

$gH = Hg$, y por lo tanto $gHg^{-1} = H$ para cada g en $SO(3)$. En otras palabras, gHg^{-1} está en H para cada g en $SO(3)$ y cada h en H. Esto nos permite construir muchos elementos de H a partir de un elemento no trivial h y, de hecho, podemos construir todos los elementos de $SO(3)$. Los construimos en tres pasos, comenzando con una h específica con eje A y ángulo θ distinto de cero:

step 1. H incluye la rotación a través del ángulo θ sobre cualquier eje B. Para ver por qué, sea g una rotación que mueve el eje A al eje B. Entonces gHg^{-1} es la rotación a través del ángulo θ alrededor del eje B porque

- g^{-1} mueve el eje B a la posición del eje A.
- h gira $\mathbb{R}^3$ sobre el eje A a través del ángulo θ.
- g mueve el eje en la posición A de regreso a su posición original B.

Step 2 H incluye rotaciones a través de todos los ángulos en un intervalo entre algunos α y β, α ¡β. Como sabemos de la sección anterior, el producto de rotación r alrededor del eje PP a través del ángulo θ y una rotación s alrededor del eje QQ' a través del ángulo θ es una rotación alrededor del eje RR' a través del ángulo X, donde R y $X/2$ son como se muestra en Figura 3.

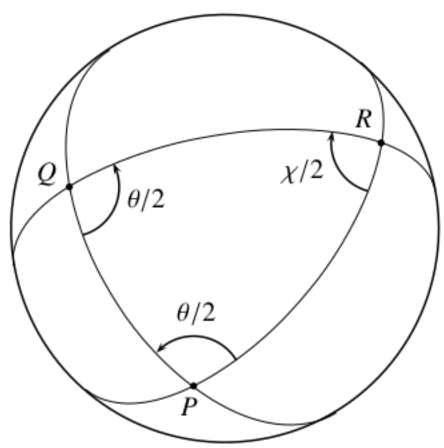

Figura 3: Hallar el producto de rotaciones

Supongamos ahora que P es fijo y que se permite que Q varíe continuamente a lo largo de un gran círculo fijo que pasa por P. Cuando Q está cerca de P, también lo está R; por tanto, triángulo PQR es casi euclidiano y la suma de sus ángulos es cercana a π. De ello se deduce que $X/2$ está cerca de $\pi - \theta$. A medida que P se aleja, el triángulo esférico PQR se vuelve más grande, por lo que también lo hace la suma de sus ángulos según la Sección 17.6, por lo que $X/2$ se vuelve más grande. Dado que $X/2$ varía continuamente con la posición de Q, necesariamente toma todos los valores en un intervalo entre algún α y β, donde $\alpha < \beta$

Step 3. H incluye rotaciones a través de cualquier ángulo.

Como $\alpha < \beta$, el intervalo entre α y β incluye un subintervalo de la forma $[2m\pi/n, 2(m+1)\pi/n]$, para algunos enteros m y n. Por tanto, del Paso 2 y el Paso 1 se deduce que H incluye todas las rotaciones, alrededor de un eje fijo B, con ángulos entre $2m\pi/n$ y $2(m+1)\pi/n$. Por supuesto, H también incluye todos los productos de sus miembros y, por lo tanto, todas sus n-ésimas potencias, que multiplican los ángulos por n. Pero si multiplicamos los ángulos entre $2m\pi/n$ y $2(m+1)\pi/n$ por n, obtenemos todos los ángulos, según sea necesario.

Aplicando el Paso 1 nuevamente, obtenemos rotaciones con todos los ángulos y todos los ejes, por lo que H incluye todos los elementos de $SO(3)$, como se afirma. Lie observó la simplicidad de muchos grupos de Lie, incluido $SO(3)$, pero sus conceptos de 'grupo 'y 'simplicidad 'eran algo diferentes a los nuestros. En su opinión, un 'grupo 'incluía 'elementos 'infinitesimales', y los usó para determinar la simplicidad. Hoy, llamamos a los 'elementos infinitesimales 'de un grupo de Lie sus vectores tangentes en la identidad, y construimos a partir de ellos una estructura algebraica separada llamada álgebra de Lie del grupo de Lie. Un álgebra de Lie tiene una operación de 'producto', llamada paréntesis de Lie, que es bastante diferente de una operación de grupo; por ejemplo, el corchete de mentira no es asociativo. Sin embargo, es una buena idea mirar las álgebras de Lie. Existe un concepto natural de simplicidad para las álgebras de Lie, de modo que un grupo de Lie simple tiene un álgebra de Lie simple, y probar la simplicidad es algo más fácil para las álgebras que para los grupos. La desventaja, si la hay, es que un álgebra de Lie simple puede no provenir de un grupo de Lie simple.

Por ejemplo, el grupo $SU(2)$ del conjunto de ejercicios anterior tiene el mismo álgebra de Lie que $SO(3)$, por lo que el álgebra de Lie de $SU(2)$ es simple. Sin embargo, el grupo $SU(2)$ no es simple; tiene un subgrupo normal con los elementos 1 y -1. El problema es que el álgebra de Lie no puede "detectar"los elementos del grupo que están lejos del elemento de identidad, por lo que puede pasar por alto un subgrupo normal cuyos miembros que no son de identidad están todos lejos (como es el caso de $SU(2)$). Esto no es necesariamente algo malo y, de hecho, muchos autores definen un grupo de Lie como simple si su álgebra de Lie es simple.