1. Preliminares

1. Si N es un subgrupo normal de un grupo G, entonces las clases laterales de N en G forman un grupo G/N con la operación (aN)(bN)=abN. Este grupo se llama cociente de G por N.

2. Sea H un subgrupo de un grupo G. El número de clases laterales izquierdas de H en G es el índice $(G : H)$ de H en G.

3. Sea H un subgrupo normal de G. Defina el homorfismo natural o homomorfismo canónico

$$\phi = G \longrightarrow G/H$$

por :

$$\phi(g) = gH$$

4. Un grupo G es un p-grupo si todo elemento en G tiene orden potencia de p, donde p en un número primo. Un subgrupo de un grupo G es un p-subgrupo si es un p-grupo.

5. El conjunto:

$$N(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$$

es un subgrupo de G llamado normalizador de H en G. Notemos que H es un subgrupo normal de N(H). De hecho, N(H) es el mayor subgrupo de G en el que H es normal

6. Sea N un subgrupo normal de un grupo G. Las clases laterales de N en G forman un grupo G/N de orden [G:N].

7. (Teorema de Cauchy) Sea G un grupo tal que p divide el orden de G. Entonces G tiene un elemento de orden p y por lo tanto un subgrupo de orden p.

8. lema(17.2) Sea H un p-subgrupo de un grupo finito G. Entonces

$$\text{(N[H] : H)} \equiv \text{(G : H) (mod p).}$$

2. Primer Teorema de Sylow.

Sea G un grupo finito y sea $|G| = p^n m$ donde $n \geq 1$ y donde p no divide m. Entonces

1. G contiene un subgrupo de orden p^i para cada i en $1 \leq i \leq n$
2. Todo subgrupo H de G de orden p^i es un subgrupo normal de un subgrupo de orden p^{i+1} para $1 \leq i \leq n$.

demostración

1. Sabemos que G contiene un subgrupo de orden p por el teorema de Cauchy. Usamos un argumento de inducción y mostramos que la existencia de un subgrupo de orden p^i para $i \leq n$ implica la existencia de un subgrupo de orden p^{i+1}.
Sea H un subgrupo de orden p^i para $i \leq n$.nosotros vemos que p divide a $(G : H)$ por el lema 17.2, nosotros entonces sabemos que p divide $(N[H] : H)$.para H subgrupo normal de N [H].
Nosotros podemos formar $N[H]/H$, y vemos que p divide $|N[H]/H|$. Según el teorema de Cauchy, el grupo de factores $N[H]/H$ tiene un subgrupo K, que es de orden p.
Si $\gamma : N[H] \longrightarrow N[H]/H$ es el homomorfismo canónico, entonces $\gamma^{-1}[K] = \{x \in N[H] | \gamma(x) \in K\}$es un subgrupo de $N[H]$ y por lo tanto de G. Este subgrupo contiene a H y es de orden p^{i+1}

2. Repetimos la construcción de la parte 1 y notamos que $H \leq \gamma^{-1} \leq N[H]$ donde $\gamma^{-1}[K] = p^{i+1}$. Dado que es normal en N [H], por supuesto es normal en el grupo posiblemente más pequeño $\gamma^{-1}[K]$