Identidad de Lagrange

Julian Andres Lopez Moreno-20191167031
Wilson Eduardo Jerez Hernández-20181167034
Juan Esteban Rodríguez Suárez-20192167037

8 de diciembre de 2021

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Preliminares

Lema 1

Para números reales $x_1, ..., x_n$.

$2\sum_{1\leq i<j\leq m} x_i x_j + 2(\sum_{k=1}^{m} x_k x_{m+1}) = 2\sum_{1\leq i<j\leq m+1} x_i x_j$

Prueba

$2\sum_{1\leq i<j\leq m} x_i x_j + 2(\sum_{k=1}^{m} x_k x_{m+1}) \to$

$2((\sum_{1\leq i<j\leq m} x_i x_j) + (\sum_{k=1}^{m} x_k x_{m+1})) \to$

$2((x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots x_1x_n + \cdots x_2x_3 + \cdots + x_{m-1}x_m) +$

$(x_1x_{m+1} + x_2x_{m+1} + \cdots + x_mx_{m+1})) \to 2\sum_{1\leq i<j\leq m+1} x_i x_j$

Lema 2

Para números reales $x_1, ..., x_n$ y $y_1, ..., y_n$
$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 y_k^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^2 y_j^2 = (\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{k=1}^{n} y_k^2)$
Prueba
$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 y_k^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^2 y_j^2 \rightarrow$
$x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + \cdots + x_n^2 y_n^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + \cdots x_{n-1}^2 y_n^2 =$
$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \rightarrow$
$(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{k=1}^{n} y_k^2)$

Teorema

Para números reales $x_1, ..., x_n$.

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

Demostración

Vamos a realizar la Demostración por inducción.

para n = 1 resulta trivial.

Paso base, n = 2

$$(\sum_{k=1}^{2} x_k)^2 = \sum_{k=1}^{2} x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2} x_i x_j \tag{1}$$

$$\rightarrow (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \tag{2}$$

y como x_1 y x_2 son números reales cumple con esta propiedad.

Demostración

Hipotesis de inducción, n = m

Supongamos cierto

$$(\sum_{k=1}^{m} x_k)^2 = \sum_{k=1}^{m} x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} x_i x_j \tag{3}$$

Paso inductivo, n = m + 1 Tenemos

$$(\sum_{k=1}^{m+1} x_k)^2 \to ((\sum_{k=1}^{m} x_k) + x_{m+1})^2 \tag{4}$$

Demostración

$$\rightarrow \underline{(\sum_{k=1}^{m} x_k)^2} + x_{m+1}^2 + 2(\sum_{k=1}^{m} x_k)x_{m+1} \tag{5}$$

Por **PB**, ahora utilizando la **HI**

$$\sum_{k=1}^{m} x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} x_i x_j + x_{m+1}^2 + 2(\sum_{k=1}^{m} x_k x_{m+1}) \tag{6}$$

Esto ultimo por la propiedad distributiva de la suma respecto al producto, ahora conmutando y agrupando dentro de la sumatoria

$$\sum_{k=1}^{m+1} x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} x_i x_j + 2(\sum_{k=1}^{m} x_k x_{m+1}) \tag{7}$$

ahora por Lema 1. $\sum_{k=1}^{m+1} x_k^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq m+1} x_i x_j$

Q.E.D.

Identidad de Lagrange

Identidad de Lagrange

Para números reales $x_1, ..., x_n$ y $y_1, ..., y_n$

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 = (\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{k=1}^{n} y_k^2) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2$$

Demostración

Por teorema anterior

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 y_k^2 + \underline{\sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i y_j x_j y_i} \tag{8}$$

Observamos

$$(x_i y_j - x_j y_i)^2 = x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - \underline{2x_i y_j x_j y_i} \tag{9}$$

aplicando axiomas de los reales

$$2x_i y_j x_j y_i = x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - (x_i y_j - x_j y_i)^2 \rightarrow \tag{10}$$

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 y_k^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - (x_i y_j - x_j y_i)^2 \tag{11}$$

reescribiendo

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 = \underline{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 y_k^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i^2 y_j^2} - \sum_{1\leq i<j\leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \tag{12}$$

utilizamos el Lema 2

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 = (\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{k=1}^{n} y_k^2) - \sum_{1\leq i<j\leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \tag{13}$$

Q.E.D.

Desigualdad de Cauchy-schwarz

Desigualdad de Cauchy-schwarz en R^n

Sean X y Y vectores en R^n, entonces:

$$|X \cdot Y| \leq ||X|| \cdot ||Y||$$

Por componentes

De manera equivalente podemos escribir

$$|X \cdot Y|^2 \leq ||X||^2 \cdot ||Y||^2$$

Notese que para $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$
$||X||^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ y
$||Y||^2 = (y_1^2 + y_2^2 + \cdots y_n^2) = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$ y
$|X \cdot Y|^2 = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)^2 = (\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2$
Por tanto la desigualdad de Cauchy-schwarz en R^n escrita por componentes quedaria

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{i=1}^{n} y_k^2) \geq (\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2$$

Demostración

Utilizando la identidad de lagrange: $(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 =$
$(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{i=1}^{n} y_k^2) - \underline{\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i y_j - x_j y_i)^2} \rightarrow$
$(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i y_j - x_j y_i)^2 = (\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{i=1}^{n} y_k^2)$
de donde $(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{i=1}^{n} y_k^2) \geq (\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2$
Lo cual demuestra la desigualdad de Cauchy-schwarz en R^n.
Q.E.D.