1. Sea S_n el grupo simétrico de n-letras. Demuestre que $A_n \trianglelefteq S_n$

Preliminares

Lema 1

Sea G un grupo y N un subgrupo de G. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. aN = N a para cada a $\in$ G.
2. Para cada a, b $\in$ G se tiene ab $\in$ N implica ba $\in$ N.
3. aNa^{-1} = $\{ana^{-1}$ tal que n $\in$ N$\}$ $\subseteq$ N para cada a $\in$ G.
4. aNa^{-1} = N para cada a $\in$ G.

Lema 2

1. una permutación par $\circ$ una permutación par es una una permutación par
2. una permutación par $\circ$ una permutación impar es una permutaciónimpar
3. una permutación impar $\circ$ una permutación par es una permutación impar
4. una permutación impar $\circ$ una permutación impar es una permutación par

Demostración

Sabemos que los σ son pares o bien impares

caso 1

sea σ una permutación par entonces $\sigma = ((a_1a_n)(a_1a_{n-1}...(a_1a_3)(a_1a_2))$ consideremos pues a $\sigma^{-1} = ((a_1a_2)^{-1}(a_1a_3)^{-1}...(a_1a_{n-1})^{-1}(a_1a_n)^{-1}$ puesto que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ pero tambien sabemos que cualquier transposición es el inverso de si misma por lo tanto $\sigma^{-1} = ((a_1a_2)(a_1a_3)...(a_1a_{n-1})(a_1a_n)$ y como el número de transposiciones de σ^{-1} nunca cambia entonces σ^{-1} es par y sea cualesquiera $\tau \in A_n$ por tanto τ es par y por lema 2 $\sigma \circ \tau$ es par y $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ es par por tanto $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \subseteq A_n$ y por lema 1 $\sigma A_n = A_n\sigma$ para σ par

caso 2

sea σ una permutación impar entonces $\sigma = ((a_1a_n)(a_1a_{n-1}...(a_1a_3)(a_1a_2))$ consideremos pues a $\sigma^{-1} = ((a_1a_2)^{-1}(a_1a_3)^{-1}...(a_1a_{n-1})^{-1}(a_1a_n)^{-1}$ puesto que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ pero tambien sabemos que cualquier transposición es el inverso de si misma por lo tanto $\sigma^{-1} = ((a_1a_2)(a_1a_3)...(a_1a_{n-1})(a_1a_n)$ y como el número de transposiciones de σ^{-1} nunca cambia entonces σ^{-1} es impar y sea cualesquiera $\tau \in A_n$ por tanto τ es par y por lema 2 $\sigma \circ \tau$ es impar y $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ es par por tanto $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \subseteq A_n$ y por lema 1 $\sigma A_n = A_n\sigma$ para σ impar

por **caso 1** y **caso 2** $\sigma A_n = A_n\sigma$ para cada $\sigma \in S_n$ $\square$.