Ejercicio Final Introducción Al LaTeX

Autor
Wilson Eduardo Jerez Hernández
20181167034
wejerezh@correo.udistrital.edu.co

Profesor
Jhonatan Steven Mora Rodriguez.

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Matemáticas

Índice

Universidad Distrital José Francisco de Caldas
Facultad Ciencias y Educación
Proyecto de Matemáticas

1. La Ecuación de Clase

Antes de hablar de la Ecuacion de clase vamos a demostar el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Sea G un grupo finito y sea X un G-conjunto finito. si $x \in X$, entonces $|O_x| = [G : G_x]$.*

Demostración.

Sabemos que $|G|/|G_x|$ es el número de clases laterales iz1quierdas de G_x en G por el Teorema de Lagrange . Definemos una función biyectiva ϕ de la órbita O_x de x al conjunto de clases laterales izquierdas L_{G_x} de G_x en G. Sea $y \in O_x$. ENtonces existye g en G tal que $gx = y$. Definamos ϕ de forma que $\phi(y) = gG_x$. Para mostrar que ϕ es $1-1$, supongamos que $\phi(y_1) = \phi(y_2)$. Entonces

$$\phi(y_1) = g_1G_x = g_2G_x = \phi(y_2),$$

donde $g_1x = y_1$ y $g_2x = y_2$. Como $g_1G_x = g_2G_x$, existe $g \in G_x$ tal que $g_2 = g_1g$,

$$y_2 = g_2x = g_1gx = g_1x = y_1;$$

por lo tanto. la función ϕ es 1-1. Finalmente, debemos mostrar que ϕ es epiyectiva. sea gG_x una clase lateral izquierda. Si $gx = y$, entonces $\phi(y) = gG_x$. ***QED***

Sea X un G- conjunto y X_G el conjunto de puntos fijos en X; es decir,

$$X_G = \{x \in X : gx = x \text{ para todo } g \in G\}.$$

Como las órbitas de la acción particionan a X,

$$|X| = |X_G| + \sum_{i=k}^{n} |O_{x_i}|$$

donde $x_k, \cdots, x_n$ son representantes de las distintas órbitas no triviales de X (aquellas órbitas que contienen más de un elemento).

Ahora consideremos el caso especial en el que G actua en sí mismo por conjugación, $(g, x) \to gxg^{-1}$. El **centro** de G,

$$Z(G) = \{x : xg = gx \text{ para todo } g \in G\},$$

es el conjunto de puntos que quedan fijos por conjugación. La órbitas de la acción se llaman **clases de conjugación** de G. Si $x_1, \cdots, x_k$ on representantes de cada una de las clases de conjugación no-triviales de G y $|O_{x_1}| = n_1, \cdots, |O_{x_k}| = n_k$, entonces

$$|G| = |Z(G)| + n_1 + \cdots + n_k.$$

Cada uno de los subgrupos estabilizadores de uno de los x_i, $C(x_i) = \{g \in G : gx_i = x_ig\}$, se llama **subgrupo centralizador** de x_i. Por el **Teorema 1.1**, obtemos la **ecuación de clase:**

$$|G| = |Z(G)| + [G : C(x_1)] + \cdots + [G : C(x_k].$$

Una de las conseciuencias de la ecuación de clase es que el orden de cada clase de conjugación divide al orden de G.

2. Los teoremas de Sylow

Recordemos Por un momento lo que significa que G actúe en si mismo por conjugación y cómo las clases de conjugación se distribuyen en el grupo de acuerdo a la ecuación de clase, discutida anterioremnte. Un grupo G actúa en si mismo por conjugación de manera que $(g,x) \to gxg^{-1}$. Sean $x_1, \cdots, x_k$ representantes de cada una de las distintas clases de conjugación de G que contiene más de un elemnto. Entonces la ecuación de clase se escribe como

$$|G| = |z(G)| + [G : C(x_1)] + \cdots + [G : C(x_k)],$$

donde $Z(G) = \{g \in G : gx = xg \text{ para todo } x \in G\}$ es el centro de G y $C(x_i) = \{g \in G : gx_i = x_i g\}$ es el subgrupo centralizador de x_i. low examinando los subgrupos de orden p, donde p es un primo.

Un grupo de G es un **P-grupo** si todo elemneto de G tiene orden potencia de p, donde p es un número primo. Un subgrupo de un grupo G es un **P-subgrupo** si es un p-grupo.

Teorema 2.1. *(cauchy) sea G un grupo finito y P un primo tal que p divide el orden de G. Entonces G contiene un elemnto de orden p.*

Demostración

Procederemos por inducción sobre el orden de G. si $|G| = p$, entonces un generados de G es el elemnto requerido. Supongamos ahora que todo subgrupo de orden k, donde $p \leq k < n$ y p divide a k, tiene un elemnto de orden p. supongamos que $|G| = n$ y que $p|n$ y consideremos la ecuación de clase de G:

$$|G| = |z(G)| + [G : C(x_1)] + \cdots + [G : C(x_k)]$$

Tenemos dos casos que considerar.

Caso 1. *el orden de alguno de los subgrupos centralizadores, $C(x_i)$, es divisible por p para algún $i, i = 1, \cdots, k$. En este caso, por hipótesis de inducción estamos listos. Como $C(x_i)$ es un subgrupo propio de G y p divide a $|C(x_i)|$, $C(x_i)$ contiene un elemnto de orden p. Por lo tanto, G contiene un elemnto de orden p.*

Caso 2. *Ninguno de los centralizadores tiene orden divisible por p. Entonces p divide a $[G : C(x_i)]$, el orden de cada clase de conjugación en la ecuación de clase; luego, p divide el orden del centro de G, $Z(G)$. Como $Z(G)$ es abeliano, tiene un subgrupo de orden p por el Teorema Fundamental de Los Grupos Abelianos Finitos. Por lo tanto, el centro de G contiene un elemnto de orde p.*

Colorario 2.2. *Sea G un grupo finito. Entonces G es un P-grupo si y solo si $|G| = p^n$.*

Ejemplo 2.1. *Consideremos el grupo A_5. Sabemos que $|A_5| = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. por el Teorema de Cauchy, sabemos que A_5 tiene subgrupos de órdenes 2,3 y 5. Los teoremas de sylow nos daán aún más información sobre los posibles subgrupos de A_5*

Podemos ahora enunciar el primer Teorma de Sylow. La demostración es muy similar a la del Teorema de Cauchy.

Teorema 2.3. *(primer teorema de Sylow) Sea G un grupo finito y p un primo tal que p^r divide a $|G|$. Entonces G contiene un subgrupo de orden p^r* ***Demostración*** *Procederemos por inducción*

sobre el orden de G una vez más. Si $|G| = p$,entonces estamos listos. Ahora supongamos que el orden de G es n con $n > p$ y que el teorema es verdadero para todos los grupos de orden menor a n, donde p divide a n.Usaremos la ecuación de clase una vez más:

$$|G| = |Z(G)| + [G : C(x_1)] + \cdots + [G : C(x_k)].$$

Supongamos primero que p no divide a $[G : C(x_i)]$ para algún i.Entonces p^r — $\|C(x_i)\|$, pues p^r divide a $|G| = |C(x_i)| \cdot [G : C(x_i)]$. Podemos aplicar la hipótesis de inducción a $C(x_i)$

Por lo tanto, podemos suponer que p divide a $[G : C(x_i)]$ para todos los i. Como p divide a $|G|$, la ecuación de clase dice que p divide a $||Z(G)||$; luego, por el teorema de Cauchy,$Z(G)$ tiene un elemento de orden p,digamos g. Sea N el grupo generado por g. Claramente, N es un subgrupo normal de $Z(G)$ pues $Z(G)$ es abeliano; por lo tanto,N es normal en G pues todo elemento en $Z(G)$ conmuta con todo elemento en G. Ahora consideremos el grupo cociente G/N de orden $|G|/p$.Por la hipótesis de indicción, G/N contiene un subgrupo H de orden p^{r-1}.La preimagen de H bajo el homomorfismo canónico $\phi : G ß G/N$ es un subgrupo de orden p^r en G.

3. Sea S_n el grupo simétrico de n-letras. Demuestre que $A_n \trianglelefteq S_n$

Preliminares

Teorema 3.1. *Sea G un grupo y N un subgrupo de G. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *$aN = N a$ para cada $a \in G$.*
2. *Para cada a, $b \in G$ se tiene $ab \in N$ implica $ba \in N$.*
3. *$aNa^{-1} = \{ana^{-1}$ tal que $n \in N\} \subseteq N$ para cada $a \in G$.*
4. *$aNa^{-1} = N$ para cada $a \in G$.*

Teorema 3.2.

1. *una permutación par $\circ$ una permutación par es una una permutación par*
2. *una permutación par $\circ$ una permutación impar es una permutaciónimpar*
3. *una permutación impar $\circ$ una permutación par es una permutación impar*
4. *una permutación impar $\circ$ una permutación impar es una permutación par*

Demostración

Sabemos que los σ son pares o bien impares

caso 1

sea σ una permutación par entonces $\sigma = ((a_1a_n)(a_1a_{n-1}...(a_1a_3)(a_1a_2))$ consideremos pues a $\sigma^{-1} = ((a_1a_2)^{-1}(a_1a_3)^{-1}...(a_1a_{n-1})^{-1}(a_1a_n)^{-1}$ puesto que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ pero tambien sabemos que cualquier transposición es el inverso de si misma por lo tanto $\sigma^{-1} = ((a_1a_2)(a_1a_3)...(a_1a_{n-1})(a_1a_n)$ y como el número de transposiciones de σ^{-1} nunca cambia entonces σ^{-1} es par y sea cualesquiera $\tau \in A_n$ por tanto τ es par y por lema 2 $\sigma \circ \tau$ es par y $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ es par por tanto $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \subseteq A_n$ y por lema 1 $\sigma A_n = A_n\sigma$ para σ par

caso 2
sea σ una permutación impar entonces $\sigma = ((a_1a_n)(a_1a_{n-1}...(a_1a_3)(a_1a_2))$ consideremos pues a $\sigma^{-1} = ((a_1a_2)^{-1}(a_1a_3)^{-1}...(a_1a_{n-1})^{-1}(a_1a_n)^{-1}$ puesto que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ pero tambien sabemos que cualquier transposición es el inverso de si misma por lo tanto $\sigma^{-1} = ((a_1a_2)(a_1a_3)...(a_1a_{n-1})(a_1a_n)$ y como el número de transposiciones de σ^{-1} nunca cambia entonces σ^{-1} es impar y sea cualesquiera $\tau \in A_n$ por tanto τ es par y por lema 2 $\sigma \circ \tau$ es impar y $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ es par por tanto $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \subseteq A_n$ y por lema 1 $\sigma A_n = A_n\sigma$ para σ impar

*por **caso 1** y **caso 2** $\sigma A_n = A_n\sigma$ para cada $\sigma \in S_n$* $\square$.

4. Operaciones básicas con matrices

4.1. Suma de matrices

Dadas dos matrices de la misma dimensión, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, se difinen la matriz suma como: $A+B = (a_{ij}+b_{ij})$. Es decir aquella matriz cuyos elementos se obtienen umando los elementos de las dos matrices que ocupan la misma misma posición, es decir,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{pmatrix}$$

4.2. Producto de un número real por una matriz

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ y un número real λ, se define el producto de un número real por una matriz: a la matriz del mismo orden que A, en la que cada elemento está multiplicado por λ.

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 & \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 & \lambda \cdot a_4 \end{pmatrix}$$

4.3. Producto de matrices

Dos matrices A y B se dicen multiplicables si el número de columnas de A coincide con el número de filas de B.

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = M_{m\times p}$$

El elemento c_{ij} de la matriz producto se obtiene multiplicando cada elemento de la fila i de la matriz A por cada elemento de la columna j de la matriz B y sumándolos.

5. tabla de distribución normal

Para poder utilizar la tabla tenemos que transformar la variable X que sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$ en otra variable Z que siga una distribución $N(0, 1)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

6. Tabla de probabilidades puntuales de la distribución Binomial (n,p)

$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

n	k	0,01	0,05	0,10	0,15	1/6	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,4019	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4019	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,1608	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0322	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0032	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,3349	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467
	1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,4019	0,3932	0,3560	0,3025	0,2634	0,2437	0,1866
	2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2009	0,2458	0,2966	0,3241	0,3292	0,3280	0,3110
	3	0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0536	0,0819	0,1318	0,1852	0,2195	0,2355	0,2765
	4	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0080	0,0154	0,0330	0,0595	0,0823	0,0951	0,1382
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0006	0,0015	0,0044	0,0102	0,0165	0,0205	0,0369
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0014	0,0018	0,0041

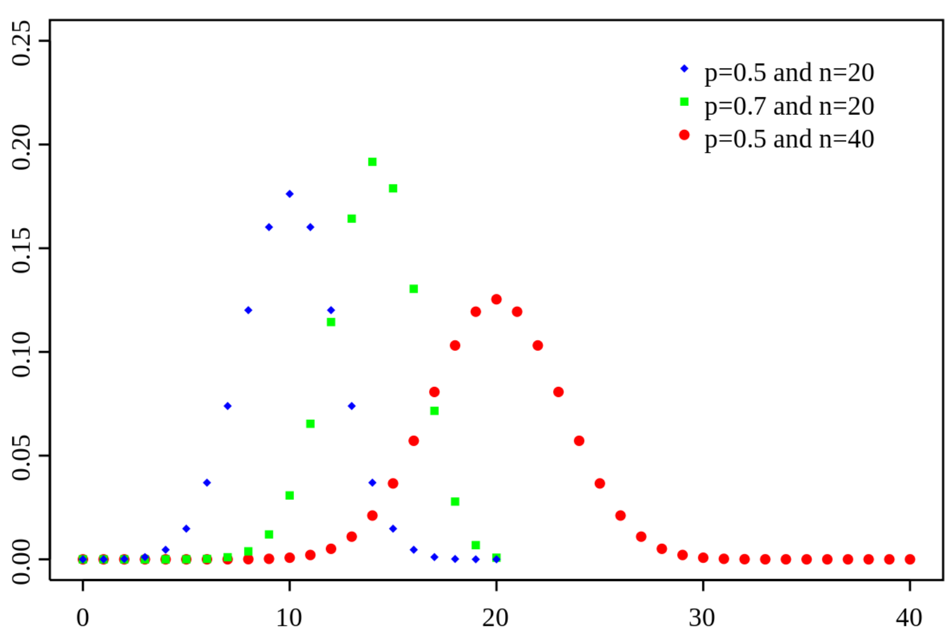


Figura 1: Imagen 1 distribución Binomial

7. diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
A & B \arrow[dr] & C & D & E \\
\alpha & \gamma & \beta & \delta & \epsilon
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A & B \arrow[dl, dotted] \arrow[r, dashed, no head, squiggly] & C & D \arrow[d, two heads] & E & F \\
\alpha & \beta \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & \gamma & \delta & \epsilon \arrow[u] & \phi
\end{tikzcd}$$

8. cajas

Este texto está en una caja de color amarillo

$\sqrt{\frac{x^2}{2}}$

La fórmula para ds

hola

9. MATEMÁTICAS ACTUARIALES

9.1. tabla de mortalidad

l_x: Número de vivos de edad exacta x
d_x: Número de muertes ocurridas entre las edades x y $x+1$
${}_nd_x$: Número de muertes ocurridas entre las edades x y $x+n$
p_x: Probabilidad de que una persona de edad exacta x sobreviva 1 año más
${}_np_x$: Probabilidad de que una persona de edad x sobreviva n años más
q_x: Probabilidad de que una persona de edad x muera entre las edades x y $x+1$
${}_nL_x$ Años persona vividos entre las edades x y $x+n$
T_x: Años persona vividos entre las edades x y w
$\mathring{e}_x$: Esperanza de vida a la edad x

9.2. Anualidades contingentes

Dotal puro n años ${}_nE_x$
Anualidad vitalicia vencida a_x
Anualidad vitalicia anticipada $\ddot{a}_x$
Anualidad vencida temporal n años $a_{x:n}$
Anualidad anticipada temporal n años $\ddot{a}_{x:n}$

10. Ejercicio 39 de la sección 1.6 Blanchard

Suponga que desea modelar una población con una ecuación diferencial de la forma $\frac{dP}{dt} = f(P)$, donde $P(t)$ es la población en el tiempo t.
Los experimentos han sido realizadas sobre la población que dan la siguiente información:

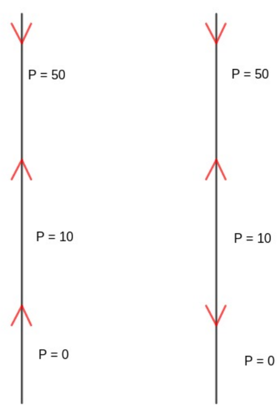
- Los únicos puntos de equilibrio son P = 0, P = 10 y P = 50.
- Si la población es 100, la población disminuye.
- Si la población es de 25, la población aumenta.

(a) Dibuje las líneas de fase posibles para este sistema para $P > 0$ (hay dos)

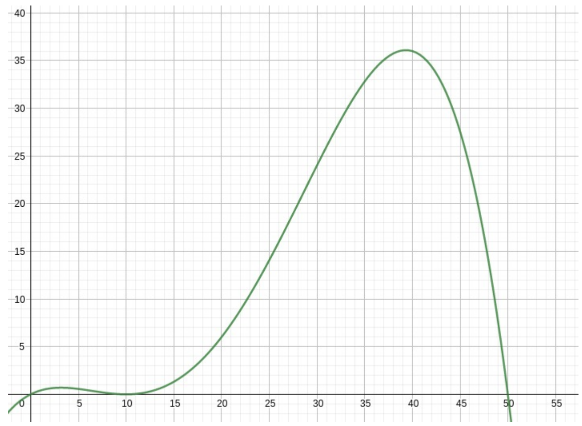
(b) Dé un bosquejo aproximado de las funciones correspondientes $f(p)$ para cada uno de sus lineas de fase.

(c) Dé una fórmula para las funciones $f(p)$ cuya gráfica concuerde(cualitativamente) con los bosquejos aproximados de la parte (b) para cada una de sus líneas de fase.

Desarrollo
a)



b) y c)
Primera linea de fase



$f(P) = \frac{1}{10000}P(P-10)^2(50-P)$

11. Ejercicio 25 de la sección 1.9 Blanchard

Un tanque de 400 galones inicialmente contiene 200 galones de agua que contienen 2 partes por mil millones en peso de dioxina, un carcinógeno extremadamente potente. Supongamos que el agua contiene 5 partes por mil millones de dioxina fluyen hacia la parte superior del tanque a una velocidad de 4 galones por minuto. El agua del tanque se mantiene bien mezclada y se extraen 2 galones por minuto del fondo del tanque. ¿Cuánta dioxina hay en el tanque cuando está lleno?
$Q(t)$ cantidad de dioxiona en un tiempo t. $c_e = 5\frac{partes}{milmillones}$
$v_e = 4\frac{galones}{minuto}$
$v_s = 2\frac{galones}{minuto}$
$v = v_o + (v_e - v_s)t = 200 + (4-2)t = 200 + 2t$
$c_s = \frac{Q_{(t)}}{v} = \frac{Q_{(t)}}{200+2t}$
entonces, $Q'_t + \frac{2}{200+2t}Q = 20$
$Q'_t + \frac{1}{100+t}Q = 20$
Como, $Q(t) = \underbrace{Q_1(t)}_{homogenea} + \underbrace{Q_2(t)}_{particular}$

11.1. Homogenea

$$\begin{aligned} Q'(t) + \frac{1}{100+t} &= 0 \\ Q_1(t) &= e^{-\int_{t_0}^{t}(\frac{1}{100+T}dT)Q_0} \\ &= e^{(\ln(100+t_0) - \ln(100+t))} \\ &= e^{\ln(\frac{100+t_0}{100+t})Q_0} \\ &= \frac{100+t_0}{100+t}Q_0 \end{aligned}$$

11.2. Particular

$$
\begin{aligned}
Q'(t) + \frac{1}{100+t}Q &= 20 \\
Q_2(t) &= \frac{100+t_0}{100+t}\int_{t_0}^{t}\frac{100+T}{100+t_0}20dT \\
&= \frac{20}{100+t}\int_{t_0}^{t}100+TdT \\
&= \frac{20}{100+t}(100t-100t_0+\frac{t^2-t_0^2}{2})
\end{aligned}
$$

Ahora, cuando $t_0 = 0$ y $Q_0 = 2$ obtendremios una solución especifica

$$
\begin{aligned}
Q(t) &= \frac{100}{100+t}(2) + \frac{20}{100+t}(100t+\frac{t^2}{2}) \\
&= \frac{200+2000t+10t^2}{100+t}
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
v(t) &= 200+2t \\
400 &= 200+2t \\
200 &= 2t \\
100 &= t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{(100)} &= \frac{200+2000(100)+10(100)^2}{100+100} \\
&= 1501
\end{aligned}
$$

12. Ejercicio sobre la ecuación de Bessel

Sean $x_1 = x_1(t)$ y $x_2 = x_2(t)$ las soluciones de la ecuación de Bessel

$$2t^2x^{''} + tx^{'} + (t^2-n^2)x = 0,\ n > 0 \text{ constante},$$

definidas sobre el intervalo $0 < t < \infty$, y que satisfacen las condiciones $x_1(1) = 1$, $x_1^{'}(1) = 0$, $x_2(1) = 0$, $x_2^{'} = 1$, Demuestre que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ forman un conjunto fundamental de soluciones en (o, ∞).

Teorema 12.1. ***Criterio para conjunto fundamental de soluciones*** *Sean $x_1 = x_1(t)$ y $x_2 = x_2(t)$ dos soluciones de la ecuacion diferencial, $t \in J$ entonces los tres condiciones siguientes son equivalentes.*

1. *$x_1(t)$ y $x_2(t)$ forman un conjunto fundamental de soluciones*
2. *$w_t = w(x_1, x_2) \neq 0$ para todo $t \in J$*

3. $w(t_0) \neq 0$ para algún t_0 en J

$3 \to 1$
Suponga que para dos, constantes c_1 y c_2 se tiene:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = 0, \forall t \in J$$

entonces,

$$x'(t) = c_1 x'_t + c_2 x'_2(t) = 0, \forall t \in J$$

En particular para $t = t_0$,

$$c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) = 0$$

$$c_1 x'(t_0) + c_2 x'_2(t_0) = 0$$

como $w_(t_0) \neq 0$ es el determinate de la matriz de coeficientes de anterior sistema de ecuaciones se concluye que $c_1 = c_2 = 0$, lo que prueba la independencia lineal de x_1 y x_2.♠

Solución del ejercicio

Para dar solucionar el ejercicico, vamos a usar del teorema anterior el númeral (3), y entonces probaremis que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ forman un conjunto fundamental de soluciones

* La ecucación de Bessel es homogenea
* Conjunto solución $(0, \infty)$
* $t_0 = 1$ y $1 \in (0, \infty)$
* $w(1) = w(x_1(1), x_2(1)) = det \begin{pmatrix} x_1(1) & x_2(1) \\ x'_1(1) & x'_2(1) \end{pmatrix} = x_1(1)x'_2(1) - x'_1(1)x_2(1) = (1 \cdot 1) - (0 \cdot 0) = 1 \neq 0$

$\to x_1(t)$ y $x_2(t)$ forman un conjunto fundamental de soluciones en $(0, \infty)$. ♠

13. Grupos simples finito y campos finitos

Los conceptos sobre grupos simples, los campos finitos y las geometrías finitas tardaron más de 100 años en desarrollarse.

Se centran en el concepto de grupo lineal que llego a su madurez en el libro "*Linear Group, with an Exposition of the Galois Field Theory of Dickson*"(1910).

Actualmente se define un grupo lineal como un grupo de matrices con entradas en un campo. Las matrices fueron introducidas por Cayley (1855). El concepto de campo finito se remonta a Galois. Tomemos el campo $\mathbb{F}_p = \{0, 1, 2, ..., p-1\}$, existe el campo $\mathbb{F}_{p^n}$, para cada número natural n, cuyos elementos polinomios de grado $n-1$ con en $\mathbb{F}_p$.
Ejemplo

Consideremos $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_{2^2} = \{0, 1, x, x+1\}$
bajo la adición y multiplicación mod 2. Note que, el campo
$\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_{2^2}$ se construye:
$\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2 [x] / \langle x^2 + x + 1 \rangle$

Se deduce que hay campos con 4, 8 y 9 elementos porque $4 = 2^2$, $8 = 2^3$ y $9 = 3^2$.

Las transformaciones de las lineas proyectivas sobre campos nos dan un nuevo grupo simple

- ¡1-¿ $PSL(2, 4) = PGL(2, 4)$ tiene $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ elementos, y resulta que es isomorfo a A_5.
- ¡2-¿ $PSL(2, 9)$ tiene $10 \cdot 9 \cdot 8/2 = 360$ elementos, y resulta ser isomorfo a A_6.
- ¡3-¿ $PSL(2, 8) = PGL(2, 8)$ tiene $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ elementos, y es un nuevo grupo simple, descubierto por Cole (1893).

Moore demostro:

- Todo campo finito es isomorfo a uno de los campos de Galois $\mathbb{F}_{p^n}$.
- Todos los grupos $PSL(2, np)$ son simples cuando $p > 3$ y $n > 1$.

Rescribiendola,

"Todos los grupos $PSL(2, p^n)$ son simples cuando $p^n > 3$."

De forma general,

"$PSL(m, q)$ es simple para todo $m, q \geq 2$ excepto $(m, q) = (2, 2), (2, 3)$."

En conclusión,

Definición 13.1. *$PSL(m, q)$ es el grupo de matrices $m \times m$ con entradas en $\mathbb{F}_q$ y determinante 1 cocientado por el subgrupo formado por la matriz identidad y su negativo.*

La geometría se puso al día en 1905 cuando Veblen definió el espacio proyectivo $m-$dimensional sobre el campo $\mathbb{F}_q$.

Se descubrió que grupos como el "grupo de rotación de $\mathbb{R}^n$"tienen homólogos finitos que suelen ser grupos simples.

En 1860, surgieron cinco grupos simples finitos de la nada. Estos grupos se conocen como los grupos de Mathieu, en honor a su descubridor "Emile Mathieu".

14. Los grupos de Mathieu

Un grupo se llama grupo $k-$transitivo, si existe un conjunto de elementos sobre los que el grupo actúa fiel (monomorfismo) y $k-$transitivamente.

Si los elementos de G permutan un cierto conjunto S, entonces

- G se llama $1-$transitivo si cualquier miembro de S puede ser enviado a cualquier otro miembro de S mediante una permutación en G.

- G se llama $2-$transitivo si cualquier par ordenado de miembros de S puede ser a cualquier otro par ordenado de miembros de S por un miembro de G.

Definición 14.1. *El grupo G actúa sobre el conjunto S si*

$$\begin{aligned} \psi : G \times S &\longrightarrow S \\ (g,x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

1. $\psi(e,x) = e \cdot x = x$ *para todo* $x \in S$.
2. $\psi(g_2, \psi(g_1,x)) = \psi(g_2, g_1 \cdot x) = (g_2 g_1) \cdot x = \psi(g_2 g_1, x)$

Ejemplo 14.1. *El grupo alterno A_n es $k-$transitivo para números impares $k \leq n$.*

- ¡1-¿ Mathieu descubrió (1861, 1873) cuatro grupos de permutación que son 4 o 5-transitivos, y un grupo relacionado que es 3-transitivo.

- ¡2-¿ Los cincos grupos de Mathieu se denominan M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23} y M_{24}.

Grupo	Transitividad	Orden
M_{11}	4	11·10·9·8
M_{12}	5	12·11·10·9·8
M_{22}	3	22·21·20·16·3
M_{23}	4	23·22·21·20·16·3
M_{24}	5	24·23·22·21·20·16·3

¿Cuál es la mejor manera de codificar los mensajes para que los errores puedan ser detectados y corregidos?

Un mensaje se divide en “caracteres”, que son secuencias de 0s y 1s (secuencias binarias) de una determinada longitud fija k.

El objetivo de la teoría de la codificación es conseguir la máxima corrección de errores con el mínimo aumento de la longitud del mensaje.

Ejemplo 14.2. *Para $d = 3$ y $k = 7$ es la longitud mínima que se puede utilizar para obtener 16 caracteres, y esto se consigue con el siguiente código:*

0000000	0100101	1000110	1100011
0001111	0101010	1001001	1101100
0010011	0110110	1010101	1110000
0011101	0111001	1011010	1111111

Este código se debe a Hamming (1950), y se conoce como *código Hamming* $(7,4)$. Un código más notable es el código $(23,12)$ de Golay (1949). El *código de Golay* consiste en $2^{12} = 4096$ secuencias binarias de longitud 23, dos de las cuales difieren en al menos siete dígitos (tres dígitos erróneos).

- ¡1-¿ Las simetrías del código pueden realizarse mediante un grupo de transformaciones lineales del espacio $\mathbb{F}_{2^{32}}$, y este grupo de simetría resulta ser nada menos que M_{23}.

- ¡2-¿ El grupo M_{24} aparece cerca, como el grupo de simetría de un subconjunto relacionado de $\mathbb{F}_{2^{24}}$, el llamado *código de Golay extendido.*

- ¡3-¿ Estos descubrimientos se deben a Paige (1957) y Assmus y Mattson (1966).

15. Grupos continuos

La teoría de los grupos continuos fue creada por el matemático noruego Sophus Lie en la década de 1870. Inicialmente, su objetivo era desarrollar una teoría de ecuaciones diferenciales como la teoría de ecuaciones polinómicas de Galois. Vio que cada ecuación diferencial tiene un grupo, análogo al grupo de Galois pero “continuo” en lugar de finito, y que los grupos “simples” presentan un obstáculo para la solución.
El ejemplo más fácil de entender de un grupo continuo es la recta numérica R, bajo la operación de suma. Este grupo es “continuo” en el sentido de que la operación de grupo $x, t \to x + y$, y también la operación inversal de grupo $x \to -x$, es una

función continua. Un ejemplo relacionado es el círculo unitario

$$\mathbb{S}^1 = \{z : |z| = 1\}$$

Podemos interpretar un miembro z de SO(2) como una rotación del plano, porque

$$z = \cos\theta + i\sin\theta, \text{ para algun } \theta$$

El primer grupo continuo realmente interesante es $SO(3)$, el grupo de rotación del espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$. Si tomamos una rotación r de $\mathbb{R}^3$ dada por un eje A que pasa por O y un giro de ángulo θ alrededor de A, entonces ni siquiera es obvio que las rotaciones espaciales formen un grupo. Dada una rotación r con eje A y ángulo θ, y una rotación s con eje B ángulo ϖ, ¿podemos estar seguros de que la combinación sr tiene incluso un eje C y un ángulo X bien definidos? La respuesta es (sí) aparentemente fue encontrada por primera vez por Euler (1776), pero ahora podemos encontrar esta respuesta mucho más fácilmente. El truco consiste en ver cada rotación como un producto de dos reflexiones, como se muestra en la siguiente figura.

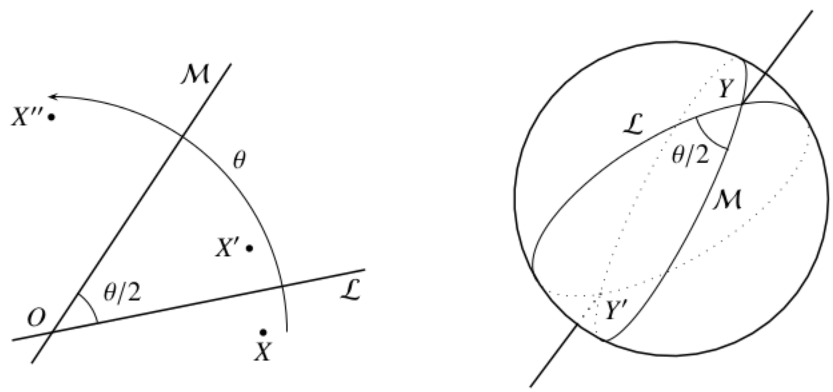


Figura 2: Rotación a través de un par de reflexiones

Supongamos ahora que queremos encontrar el resultado de realizar la rotación r de la esfera, con eje que pasa por P y ángulo θ, luego la rotación s con eje a través de Q y el ángulo φ. Haciendo uso de nuestra libertad para elegir los grandes círculos de reflexión, realizamos r por el par de reflexiones en los grandes círculos L y M a través de P que están separados por un ángulo $\theta/2$, donde M pasa a través de P y Q.

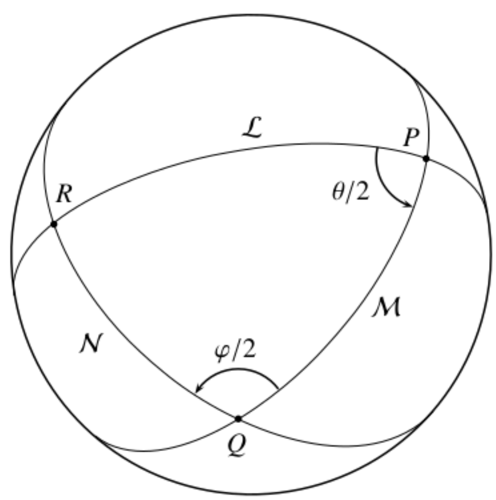


Figura 3: Hallar el producto de rotaciones

Referencias

[1] Thomas W. Judson *Algebra Abstracta : Teoría y Aplicaciones*
`http://abstract.ups.edu/aata-es/section-sylow-theorems.html`

[2] Tablas de probabilidad
`https://www.uv.es/montes/nau_gran/tablas.pdf`
`https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/probabilidades/distribucion-normal/tabla-de-la-distribucion-normal.html`

[3] Operaciopnes con matrices
`https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebralineal/matrices/operaciones-con-matrices.html`

[4] Misraim Guitiérrez *Introducción al LaTeX*
`https://sistemas.fciencias.unam.mx/~misraim/notas.pdf`

[5] Dept. d'informática, universitat de valéncia *LaTeXavanzado pauqetes y herramientas para gráficos*

[6]