Capítulo 1

CAMPOS VECTORIALES E INTEGRALES DE LÍNEA

1.1. Campos vectoriales

Definición 1.1. *Sea D una región abierta en $\mathbb{R}^n$. Un **Campo vectorial** en D es una apliclación F que a cada punto $p \in D$ le asigna un vector $F(p) \in \mathbb{R}^n$, con $m > 1$. Si denotamos por $\vec{x}$ el vector posición de p, entonces podemos describir el campo vectorial por la función vectorial. Las funciones $f_i : D \to \mathbb{R}$ se llaman **componentes** del campo F. Si las componente f_i son derivables decimos que el campo vectorial F es derivable.*

Ejemplo 1.1. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ una región abierta y $f : D \to \mathbb{R}$ una función derivable. Entonces el campo vectorial*

$$\begin{aligned} F(\vec{x}) &= \bigtriangledown f(x_1, \cdots, x_n \\ &= (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) \end{aligned}$$

*se llama **Campo vectorial gradiente**. Los vectores del campo gradiente son ortogonales a las superficies de nivel de la función f.*

En muchos casos para entender un campo vectorial necesitamos dibujarlo, y esto no resulta una tarea no muy corta. Podemos usar para esta tarea ciertas líneas de campo, un concepto muy importante

Definición 1.2. *Una* ***línea de campo*** *de un campo vectorial $F(\vec{x})$ es una curva $\vec{r}(t)$, tal que*

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = F(\vec{r}(t)).$$

Geométricamente significa que el campo vectroial F es tangente a sus líneas de campo en cada punto. Analicamente, las línea de campo de un campo vectorial $F(x_1, \cdots, x_n$ con componentes $f_1, f_2 \cdots f_n$ son las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) = f_1(x_1(t), \cdots, x_n(t)) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) = f_2(x_1(t), \cdots, x_n(t)) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt}(t) = f_n(x_1(t), \cdots, x_n(t) \end{cases}$$

1.2. Intregales de Línea

Definición 1.3. *(Intregal de línea sobre un campo escalar). Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua, donde $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es una región abierta. Y sea γ una curva suave en $D \subseteq \mathbb{R}^n$ con una ecuación dada por una función vectorial $\vec{r} : [a, b] \to D$, $\vec{r} = \vec{r}(s)$, donde s es el parámetro de longitud de arco y b-a es la longitud de la curva γ. Entonces $f(\vec{r}(s))$ es una función real continua sobre el dominio $[a, b]$*

La ***intregal de línea*** *de la función f a lo largo de la curva γ, donde γ esta parámetrizada en términos del parámetro natura s (longitud de arco), $s \in [a, b]$, es*

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(r(\vec{s})ds$$

Si tenemos una ecuación $\vec{r} = \vec{p}(t).t \in [c, d]$ de la curva dada γ, respecto a un parámetro arbitrario t al parámetro natural s aplicando la fórmula

$$s = \int_c^t \|p'(u)\| du \Rightarrow ds = \|p'(t)\| dt$$

entonces la intregal de línea a lo largo de γ, de cualquier parametrización $\vec{p}(t)$ de γ, es

$$\int_\gamma f ds = \int_c^d f(\vec{p}(t))\|\vec{p}'(t)\|dt$$

Ejemplo 1.2. *La intregral de línea de la función f(x,y)=xy a lo largo de la circunferencia con centro en el origen y radio $r > 0$ es*

$$\begin{aligned}\int_\gamma f ds &= \int_0^{2\pi} (r\cos t)(r\sin t)\|(-r\sin t, r\cos t)\|dt \\ &= \int_0^{2\pi} r^3 \cos t \sin t dt \\ &= 0\end{aligned}$$

Definición 1.4. *(Intregal de línea sobre un campo vectorial). Sea $F : D \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo, donde $D \subseteq \mathbb{R}^n$ una región abierta. Sea γ una curva suave en D con una ecuación dada por una ecuación vectorial $\vec{r} : [a, b] \to D$, $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Entonces $F(\vec{r}(t))$ es una función vectorial continua sobre el dominio $[a, b]$.*

La **Intregal de línea** del campo vectorial F a lo largo de la curva γ es

$$\int_\gamma F \cdot d\vec{r} = \int_a^b F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)dt$$

Ejemplo 1.3. *la intregal de línea del campo vectorial $F(x, y) = (x + y, y)$ a lo largo de la curva con parametrización $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$ es*

$$\begin{aligned}\int_\gamma F \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin^2 dt\end{aligned}$$