1. Defina los siguientes comandos:

   - Defina el comando \limit{f}{a}, con dos argumentos, que impprima:

   $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

   - Defina el comando \prod[k]{a}{n}, con tres argumentos uno de ellos opcional, que imprima

   $$\prod_{i=k}^{n} a_i = a_k a_{k+1} \cdots a_n$$

   - Defina el comando \sumar[k]{a}{n}, con tres argumentos, uno de ellos opcional, que imprima

   $$\sum_{i=k}^{n} = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n$$

   - Defina el comando \D2{F}{n}{a}, con tres argumentos que imprima

   $$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^2}{a x_1 x_1}(a) & \frac{\partial f^2}{a x_1 x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f^2}{a x_1 x_1}(a) \\ \frac{\partial f^2}{a x_1 x_1}(a) & \frac{\partial f^2}{a x_1 x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f^2}{a x_1 x_1}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^2}{a x_1 x_1}(a) & \frac{\partial f^2}{a x_1 x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f^2}{a x_1 x_1}(a) \end{pmatrix}$$

   - Realize un código en LaTeXque imprima:

   Una **partición** P de un intervalo [a,b] es un conjunto

   $$P = \{x_0, x_1, x_2 \cdots, x_n\} \tag{1}$$

   tal que

- $x_i < x_{i+1}$ para cada $i = 0, 1, \cdots, n-1$,
- $x_0 = a, y x_n = b$.

Para una partición $P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ de un intervalo cerrado [a,b] y una función f definida y acotada en [a,b], llamanos a la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \triangle x \tag{2}$$

tal que

- $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ para cada $i = 1, \cdots, n$ y
- $\triangle x = \min_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$

una **suma de Riemann** de la funciń f sobre el intervalo [a,b] y bajo la partición P. Además , decimos que una función f es **Riemann integrable** en el intervalo [a,b], si

$$\lim_{\triangle x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \triangle x \tag{3}$$

existe es un número real, es decir, el valor al cual tiende este limite no depende de la forma en que se seleccionen las particiones P sobre [a, b] y ni como se eligen los valores x_i^*.
En el caso en el que la función f sea integrable en el intervalo [a,b] escribimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\triangle x to 0} \sum_{i}^{n} f(x_{i=1}^*) \triangle x \tag{4}$$

donde el lado derecho se lee: " la integral de $f(x)$ de a a b con respecto a x".
Notemos que no todo función real definida y acotada en un intervalo es Riemann intregable, como ocurre con la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

En este caso si restringimos las particiones $P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ tal que $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, y seleccionamos siempre $x_i^* \in \mathbb{Q}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} && \text{(Dado que } x_i^* \in \mathbb{Q}) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} n\frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} b-a \\
&= b-a
\end{aligned}$$

Por otro lado, si seleccionamos $x_i^* \notin \mathbb{Q}$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} 0 \times \frac{b-a}{n} && \text{(Dado que } x_i^* \notin \mathbb{Q}) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Lo que demuestra que la función no es Riemann integrable.

Algunas propiedades de la integral de Riemann son

$$\int_a^b c dx = c(b-a) \tag{5}$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \tag{6}$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{7}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad \text{(Para cada } c \in [a,b]) \tag{8}$$

Si $g(x)dx \leq f(x)$ para cada $x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \tag{9}$$

Por último, si f es una función continua en $[a,b]$, entonces se garantiza que existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b cdx = f(c)(b-a) \tag{10}$$

En efecto; existen dos números reales m y M tal que para cada $x \in [a,b]$ se tiene:

$$m \leq f(x) \leq M$$

Por las propiedades (5) y (9)

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Dividiendo las desigualdades por $(b-a)$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$$

por el teorema del valor medio existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

de lo que se sigue lo que se quiere probar.

Para que una función real f sea Riemann integrable en un intervalo $[a,b]$ es necesario y suficiente que la función f tenga solo un número enumerable de discontinuidades en el intervalo $[a,b]$. De hecho si $f(x)$ es una función continua $[a,b]$, entonces la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es derivable en (a,b) y $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in (a,b)$. En efecto

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \end{aligned}$$

Por la propiedad (7)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt}{h}$$

Por la propiedad (8)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Por la propiedad (10)

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-x)f(x_h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{hf(x_h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} f(x_h) \end{aligned}$$

Como $x_h \to x$, cuando $h \to 0$ y $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces

$$= f(x).$$