

Identidad de Lagrange

Julian Andres Lopez Moreno

Wilson Eduardo Jerez Hernández-20181167034

Juan Esteban Rodríguez Suárez-20192167037

7 de diciembre de 2021

Universidad Distrital Francisco José de Caldas



Preliminares

Lema1

Para números reales x_1, \dots, x_n .

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} x_i x_j + 2 \left(\sum_{k=1}^m x_k x_{m+1} \right) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m+1} x_i x_j$$

Prueba

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} x_i x_j + 2 \left(\sum_{k=1}^m x_k x_{m+1} \right) \rightarrow \\ & 2 \left(\left(\sum_{1 \leq i < j \leq m} x_i x_j \right) + \left(\sum_{k=1}^m x_k x_{m+1} \right) \right) \rightarrow \\ & 2 \left((x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots x_1 x_n + \cdots x_2 x_3 + \cdots) + (x_1 x_{m+1} + \right. \\ & \left. x_2 x_{m+1} + \cdots) \right) \rightarrow 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m+1} x_i x_j \end{aligned}$$

Lema 2

Para números reales x_1, \dots, x_n y y_1, \dots, y_n

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 y_k^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^2 y_j^2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

Prueba

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n x_k^2 y_k^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^2 y_j^2 \rightarrow \\ & x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + \cdots + x_n^2 y_n^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 y_n^2 = \\ & (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \rightarrow \\ & \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) \end{aligned}$$

Teorema

Para números reales x_1, \dots, x_n .

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

Demostración

Vamos a realizar la Demostración por inducción.

para $n = 1$ resulta trivial.

Paso base, $n = 2$

$$(\sum_{k=1}^2 x_k)^2 = \sum_{k=1}^2 x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2} x_i x_j$$

$\rightarrow (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$ y como x_1 y x_2 son números reales cumple con esta propiedad.

Hipotesis de inducción, $n = m$

Supongamos cierto $(\sum_{k=1}^m x_k)^2 = \sum_{k=1}^m x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} x_i x_j$

Paso inductivo, $n = m + 1$

Tenemos $(\sum_{k=1}^{m+1} x_k)^2 \rightarrow ((\sum_{k=1}^m x_k) + x_{m+1})^2 \rightarrow$
 $(\sum_{k=1}^m x_k)^2 + x_{m+1}^2 + 2(\sum_{k=1}^m x_k)x_{m+1}$ por **PB**, ahora utilizando
la **HI**

$\sum_{k=1}^m x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} x_i x_j + x_{m+1}^2 + 2(\sum_{k=1}^m x_k x_{m+1})$ Esto
ultimo por la propiedad distributiva de la suma respecto al
producto, ahora conmutando y agrupando dentro de la sumatoria
 $\sum_{k=1}^{m+1} x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} x_i x_j + 2(\sum_{k=1}^m x_k x_{m+1})$ ahora por Lema
1, $\sum_{k=1}^{m+1} x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m+1} x_i x_j$

Q.E.D.

Identidad de Lagrange

Identidad de Lagrange

Para números reales x_1, \dots, x_n y y_1, \dots, y_n

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2$$

Demostración

Por teorema anterior

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 y_k^2 + 2 \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i y_j x_j y_i}_{\text{aplicando axiomas de los reales}}$$

Observamos $(x_i y_j - x_j y_i)^2 = x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2x_i y_j x_j y_i$ aplicando axiomas de los reales $2x_i y_j x_j y_i = x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - (x_i y_j - x_j y_i)^2 \rightarrow$
 $\sum_{k=1}^n x_k^2 y_k^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - (x_i y_j - x_j y_i)^2$ reescribiendo
 $\sum_{k=1}^n x_k^2 y_k^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^2 y_j^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2$
utilizamos el Lema 2

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2$$

Q.E.D.

Desigualdad de Cauchy-schwarz

Desigualdad de Cauchy-schwarz en R^n

Sean x y y vectores en R^n , entonces:

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$

Por componentes

De manera equivalente podemos escribir

$$|X \cdot Y|^2 \leq \|X\|^2 \cdot \|Y\|^2$$

Notese que para $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$\|X\|^2 = (x_1^2, x_2^2 + \dots x_n^2) = \sum_{k=1}^n x_k^2 \text{ y}$$

$$\|Y\|^2 = (y_1^2, y_2^2 + \dots y_n^2) = \sum_{k=1}^n y_k^2 \text{ y}$$

$$|X \cdot Y|^2 = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 = (\sum_{k=1}^n x_k y_k)^2$$

Por tanto la desigualdad de Cauchy-schwarz en R^n escrita por componentes quedaria

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2$$

Demostración

Utilizando la identidad de lagrange: $(\sum_{k=1}^n x_k y_k)^2 =$
 $(\sum_{k=1}^n x_k^2)(\sum_{i=1}^n y_k^2) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \rightarrow$
 $(\sum_{k=1}^n x_k y_k)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = (\sum_{k=1}^n x_k^2)(\sum_{i=1}^n y_k^2)$
de donde $(\sum_{k=1}^n x_k^2)(\sum_{i=1}^n y_k^2) \geq (\sum_{k=1}^n x_k y_k)^2$

Lo cual demuestra la desigualdad de Cauchy-schwarz en R^n .

Q.E.D.