Capítulo 1

primer corte

1. 10 % trabajo en pareja
   a) 24 de noviembre 2 pm fecha de entrega
   b) 26 de noviembre fecha de sustentacion
   c) video de 15-20 min
2. 10 % trabajo grupar 26 de noviembre
3. 15 % parcial, viernes 3 de diciembre

1.1. Introducción a las ecuaciones diferenciales

`https://www.youtube.com/watch?v=MdKOjS8-oNw&t=2142s`

1.1.1. Importancia de las ecuaciones diferenciales

La importantancia de las ecuaciones diferenciales son la expresión matemática de aquéllas leyes fundamentales de la naturaleza que son formuladas en términos de razones de cambio de cantidades variables. Estas leyes surgen en diversos campos de aplicaclión por ejemplo:

1. movimiento newtonianos y no newtonianos.
2. difusión de calor
3. elasticidad
4. estudio de fluidos
5. crecimiento de poblaciones
6. economia
7. ecologia
8. ciencias sociales

y muchos otros.

1.1.2. Estudio de las soluciones de una ecuación diferencial

el análisis de las soluciones tanto teóricas como numéricas de las ecuaciones diferenciales es fundamental para la investigación y compresión de los fenómenos naturales o teóricos que representan; tanto el estudio de las propiedades generales de las ecuaciones, que nos proporciona información valiosa que se puede aplicar en cada cado particular: como su complemento, la resolución numérica, que permite contruir soluciones de una ecuación, paso a paos en la vecindad de un punto y con cierto margen de error.

1.1.3. Ecuación diferencial

En términos generales, una ecuación diferencial es una ecuación que contiene derivadas de las funciones que aparecen en la ecuación.
Ejemplo:
$2y'' - y' + y = 0$
Aquí debemos encontrar la función y que satisfaga la ecuación dada.

1.1.4. Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo a: Tipo, orden y linealidad.

1. Según el Tipo: en ecuación diferencial o ecuación diferencial en derivadas parciales.
2. Según el orden: El orden de una ecuación diferncial corresponde al orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación.
3. Según la linealidad.

1.1.5. Ecuación diferencial ordinaria

Una ecuación diferencial ordinaria (e.d.o) es una ecuación que relaciona una función desconocida de una variable con una o más funciones de sus derivadas. En general, estas ecuaciones diferenciales son expresadas del tipo

$$f(t, x(t), x'(t), ..., x^n(t)) = 0 \tag{1.1}$$

donde

1. t: tiempo o variable independiente, t $\in$ I con I $\subseteq R$
2. x: variable dependiente, x=x(t) es una función que satisface (1)
3. $F : I \times R^{n+1} \to R$ donde
   $(t, x(t), x'(t), ..., x^n(t)) \to F(t, x(t), x'(t), ..., x^n(t))$
4. n: es el orden de la edo. COrresponde a la derivada de mayor orden que aparece en la edo.

1.1.6. Notación

Usaremos las siguientes notaciones:

- x = x(t) . Aquí x es la variable dependiente y t la variable independiente. Se usa en problemas dinámicos (posición, velocidad de un cuerpo,...)
- y = y (x) . Aquí y es la variable dependiente y x la variable independiente. Se usa en problemas de estática, geométricos,...

1.1.7. Forma normal de una edo

Decimos que una edo está en forma normal si está escrita en la forma

$$x^n = f(t, x'.x'', ..., x^{n-1})$$

donde $f : I \times R^n \to R$, es decir la derivada de orden más alto aparece despejada en la ecuación.

1.1.8. Solución de una edo de orden 1

Consideremos una edo de orden 1 en forma normal, es decir

$$x' f(t, x)$$

donde f está definida en un subconjunto D de R 2 , que llamaremos dominio de la ecuación. Además f : D → R se supondrá siempre continua. Una solución de esta edo es una función x = x(t) derivable en un intervalo abierto I y satisface que

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

esto es, al sustituir la función solución y su derivada en la edo resulta una identidad.

EJ: Determine si la función dada es solución de la edo

1. $x'' = x + e^{2t}$

   - $x_1(t) = \frac{1}{3}e^{2t}$
     Veamos ahora su derivada
     $\to x' = \frac{1}{3}(e^{2t})' \to x' = \frac{1}{3}e^{2t}(2t)' \to x' = \frac{1}{3}e^{2t}2 \to x' = \frac{2}{3}e^{2t}$
     Veamos ahora su segunda derivada
     $\to x'' = \frac{2}{3}(e^{2t})' \to x'' = \frac{2}{3}e^{2t}(2t)' \to x'' = \frac{2}{3}e^{2t}2 \to x'' = \frac{4}{3}e^{2t}$
     Ahora remplazamos
     $\frac{4}{3}e^{2t} = \frac{1}{3}e^{2t} + e^{2t} \to \frac{4}{3}e^{2t} = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{3}{3}e^{2t} \to \frac{4}{3}e^{2t} = \frac{4}{3}e^{2t}$
     por tanto $x_1(t) = \frac{1}{3}e^{2t}$ es solución de la edo :)

   - $x_2(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$ Veamos ahora su derivada
     $x' = \frac{1}{2}e^{2t}2 \to x' = e^{2t}$ Veamos ahora su segunda derivada
     $x'' = 2e^{2t}$
     Ahora remplazamos
     $2e^{2t} = \frac{1}{2}e^{2t} + e^{2t} \to 2e^{2t} = \frac{3}{2}e^{2t} \to 4e^{2t} - 3e^{2t} = 0 \to e^{2t} \neq 0$
     para cualquier valor de t, (pues la función exponencial es siempre positiva) por tanto $x_2(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$ no es solución de la edo :(

2. $x' = 2tx$
   $x(t) = e^{t^2}$
   Veamos ahora su derivada
   $x' = 2te^{t^2}$
   Ahora remplazamos
   $2e^{2t} = 2t(e^{t^2}) \to 2e^{2t} = 2e^{t^2}t \to t = 0$
   por ende $x(t) = e^{t^2}$ es soloucion de la edo cuando t = 0.

3. $x' = -\frac{t}{x}$
   el Dominio de la ecuación diferencial seria: $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0\}$

   - $x_1(t) = \sqrt{4 - t^2}$
     Veamos ahora su derivada
     $x' = ((4 - t^2)^{\frac{1}{2}})' \to x' = \frac{1}{2}(4 - t^2)^{-1/2}(4 - t^2)' \to -\frac{2t}{2\sqrt{4-t^2}} \to x' = -\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}$
     Ahora remplazamos
     $-\frac{t}{\sqrt{4-t^2}} = -\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}$
     por tanto $x_1(t) = \sqrt{4 - t^2}$ es solución de la edo.
     recordemos calcular el dominio de cada ecuación.

   - $x_2(t) = -\sqrt{4 - t^2}$
     vemos ahora su derivada
     $x' = \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}$
     Ahora remplazamos
     $\frac{t}{\sqrt{4-t^2}} \neq -\frac{t}{-\sqrt{4-t^2}} \to \frac{t}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}$
     por tanto $x_2(t) = -\sqrt{4 - t^2}$ es solución de la edo.

1.1.9. Campos de direcciones

https://www.youtube.com/watch?v=40WLcnRAqdo
Este curso se enfoca en el estudio de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Muchas veces es de mayor interés conocer el comportamiento cualitativo (método cualitativo) que comprende una interpretación geométrica de las soluciones de una edo, en lugar de conocer explícitamente las soluciones de la edo usando un método analítico. Los campos de direcciones son una herramienta valiosa en el estudio de las soluciones de ecuación diferenciales de primer orden, es decir para ecuaciones de la forma

$$x' = f(t,x)$$

con f continua.
interpretación geométrica de $x' = f(t,x)$ x'(t) es la pendiente de la recta tangente a la curva, x = x(t) en el punto (t,x(t)) la ecuación de la rectan tangente L está dada por (t_1, x_1): $x(t) = x_1 + f(t_1, x_1)(t - t_1)$
¿cómo se construye el campo de direcciones?
a cada punto (t,x) del dominio de D de la ecuación diferencial se le aisgna una única recta que pasa por (t,x) cuya pendiente esta dada po rel valo de f en el (t,x)
ejercicio: realizar el campo de direcciones de x' = t + x

1.1.10. Líneas Isoclinas

De especial interés es el estudio goemétrico de las ecuauciones f(t,x)=c donde c es cualquier valor realizar a estas curvas se les conoce como Líneas isoclinas. son curvas pero resiven el nombre de Líneas isoclinas. Estas permiten deducir un campo de direcciones más fiable

1.1.11. Estudio de la ecuación

$x' = ax, a \in \mathbb{R}$ x'= ax es una familia de edo de primer orden.
EJ

- $a = 1 \to x' = x$
- $a = 0 \to x' = 0$
- $a = 2 \to x' = 2$

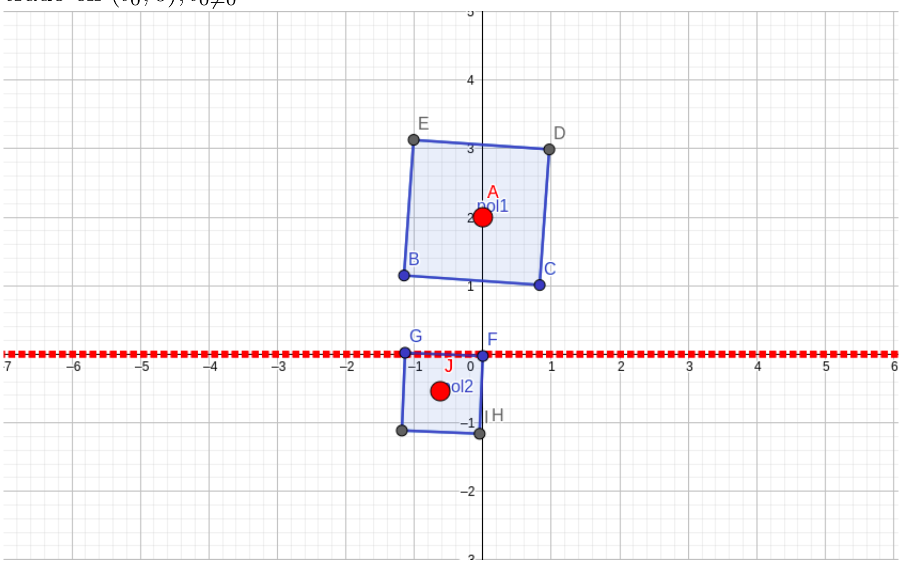
1.2. Teorema de existencia y unicidad de soluciones

$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$, $x(a) = b$

- $f(t,x)$ continua en algún rectángulo que contiene (a,b), **existe solución**
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ continua en ese rectángulo **Es única solución**

Ejercicio: Establecer si el P.V.I dado tiene solución unica:
1. $x' = \frac{x}{t}$
$x(0) = 0$

¿f es continua es (0,0)? No. Luego, no es posible encontrar un intervalo centrado en (0,0) donde f sea continua.
por el teroema de existencia y unicidad no garantiza ni siquiera la existencia de soluciones al P.V.I.
2. $x' = \frac{x}{t}$
$x(t_0) = 0, t_0 \neq 0$
Observamos que f es continua siempre que $t \neq 0$ por tanto es posible encontrar un rectángulo centrado en $(t_0, 0), t_{0 \neq 0}$



por el T. existencia y unicidad, existe por lo menos una solución. Ahora calculamos $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{x}{t}) = \frac{1}{t}$ y vemos que es continua para $t \neq 0$ por tanto tiene solución unica
3. $x' = 3x^{\frac{2}{3}}$
$x(2) = 0$
4. $x' = 3x^{\frac{2}{3}}$
$x(2) = 1$

1.3. Solución de una ecuación lineal no homogenea

Consideremos la ecuación lineal:

$$x' = a(t)x + b(t) \text{ con } b(t) \neq 0$$

Busquemos las soluciones que tengan la forma:

$$x(t) = f(t)e^{A(t)}$$

Este es un método llamado "variación de contantes.º "variación de paramatros". Entinces se obtiene que :

$$x(t) = ke^{A(t)} + e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t) d(t)$$

$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$
$x_p(t) = e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t) d(t)$
Solución de $x' = a(t)x + b(x)$

1.4. Ecuación de Bernoulli

Algunas ecuaciones no lineales pueden reducirse a ecuaiones lineales meduantge una sustitución adecacuda. Esto ocurre con la ecuación de Bernoulli:
Ecuación de Bernoulli es una ecuación de la forma.

$$x' + q(t)x = p(t)x^n \text{ con } n \neq 1$$

Mediante el cambio de variable $u = x^{1-n}$ la ecuación de Bernoulli se reduce a la ecua lienal en u:

$$u' + (1-n)q(t)u = (1-n)p(t3)$$