Ejercicio Final Introducción Al LaTeX

Autor
Wilson Eduardo Jerez Hernández
20181167034
wejerezh@correo.udistrital.edu.co

Profesor
Jhonatan Steven Mora Rodriguez.

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Matemáticas

Índice

1. La Ecuación de Clase

Antes de hablar de la Ecuacion de clase vamos a demostar el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Sea G un grupo finito y sea X un G-conjunto finito. si $x \in X$, entonces $|O_x| = [G : G_x]$.*
Demostración.

Sabemos que $|G|/|G_x|$ es el número de clases laterales iz1quierdas de G_x en G por el Teorema de Lagrange . Definemos una función biyectiva ϕ de la órbita O_x de x al conjunto de clases laterales izquierdas L_{G_x} de G_x en G. Sea $y \in O_x$. ENtonces existye g en G tal que $gx = y$. Definamos ϕ de forma que $\phi(y) = gG_x$. Para mostrar que ϕ es $1-1$, supongamos que $\phi(y_1) = \phi(y_2)$. Entonces

$$\phi(y_1) = g_1 G_x = g_2 G_x = \phi(y_2),$$

donde $g_1 x = y_1$ y $g_2 x = y_2$. Como $g_1 G_x = g_2 G_x$, existe $g \in G_x$ tal que $g_2 = g_1 g$,

$$y_2 = g_2 x = g_1 g x = g_1 x = y_1;$$

por lo tanto. la función ϕ es 1-1. Finalmente, debemos mostrar que ϕ es epiyectiva. sea gG_x una clase lateral izquierda. Si $gx = y$, entonces $\phi(y) = gG_x$.
QED

Sea X un G- conjunto y X_G el conjunto de puntos fijos en X; es decir,

$$X_G = \{x \in X : gx = x \text{ para todo } g \in G\}.$$

Como las órbitas de la acción particionan a X,

$$|X| = |X_G| + \sum_{i=k}^{n} |O_{x_i}|$$

donde $x_k, \cdots, x_n$ son representantes de las distintas órbitas no triviales de X (aquellas órbitas que contienen más de un elemento).

Ahora consideremos el caso especial en el que G actua en sí mismo por conjugación, $(g, x) \to gxg^{-1}$. El **centro** de G,

$$Z(G) = \{x : xg = gx \text{ para todo } g \in G\},$$

es el conjunto de puntos que quedan fijos por conjugación. La órbitas de la acción se llaman **clases de conjugación** de G. Si $x_1, \cdots, x_k$ on representantes de cada una de las clases de conjugación no-triviales de G y $|O_{x_1}| = n_1, \cdots, |O_{x_k}| = n_k$, entonces

$$|G| = |Z(G)| + n_1 + \cdots + n_k.$$

Cada uno de los subgrupos estabilizadores de uno de los x_i, $C(x_i) = \{g \in G : gx_i = x_i g\}$, se llama **subgrupo centralizador** de x_i. Por el **Teorema 1.1**, obtemos la **ecuación de clase:**

$$|G| = |Z(G)| + [G : C(x_1)] + \cdots + [G : C(x_k].$$

Una de las conseciuencias de la ecuación de clase es que el orden de cada clase de conjugación divide al orden de G.

Ejemplo 1.1. *Es fácil verificar que las clases de conjugación en S_3 son las siguientes:*

$$\{(1)\},\ \{(123), (132)\},\ \{(12), (13), (23)\}.$$

La ecuación de clase es 6 = 1 + 2 + 3.

2. Los teoremas de Sylow

Usaremos lo que hemos aprendido sobre acciones de grupo para demostrar los Teoremas de Sylow. Recordemos por un momento los que significa que G actúe en sí mismo por conjugación y cómo las clases de conjugación se distribuyen en el grupo de acuerdo a la ecuación de clase. Un grupo G actúa en si mismo por conjugación de manera que $(g, x) \to gxg^{-1}$. Sean $x_1, \cdots, x_k$ representantes de cada una de las distintas clases de conjugación de G que contienen más de un elemento. Entonces la ecuación de clase se escribe como

$$|G| = |Z(G)| + [G : C(x_1)] + \cdots + [G : C(x_k)],$$

donde $Z(G) = \{g \in G : gx = xg$ para todo $x \in G\}$ es el centro de G y $C(x_i) = \{g \in G : gx_i = x_i g\}$ es el subgrupo centralizador de x_i.