Introducción

El Análisis matemático estudia conceptos relacionados de alguna manera con los números reales; por ello empezaremos nuestro estudio del Análisis con una discusión del sistema de los números reales.

Capítulo 1

Números reales

1.1. Los Axiomas de Cuerpo

Nosotros denotamos por $\mathbb{R}$ como un conjunto con ciertas operaciones que satisfacen todos los axiomas listados en este capitulo, y lo llamaremos el conjunto de los números reales.

Definición 1.1.1. ***Adicción***.*Para cada par de numeros reales x,y existe un número real asociado denotado por $x + y$, llamado la suma de x y y. la asociación $(x, y) \to x + y$ es llamada adicción, y tiene las siguientes propiedades:*

A1. Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ Nosotros tenemos la asociativa, como:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

A2. Existe un elemento 0 de $\mathbb{R}$ tal que $0 + x = x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

A3. Si x es un elemento de $\mathbb{R}$, entonces existe un elemento $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = y + x = 0$

A4. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ nosotros tenemos $x + y = y + x$ **conmutativa**

1.2. Los Axiomas de Orden

Teorema 1.2.1. *Sean a y b números reales tales que*

$$a \leq b + \epsilon \text{ para cada } \epsilon > 0 \tag{1.2.1}$$

Entonces $a \leq b$.
Demostración. *si $b < a$ entonces la desigualdas (1) no se satisface para $\epsilon = (a - b)/2$ puesto que*

$$b + \epsilon = b + \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2} < \frac{a + a}{2} = a \ \to b + \epsilon < a$$

lo cual es una contradicción y por el axioma 6(tricotomia), resulta que $a \leq b$.

1.3. La Representación geométrica de los números reales

1.4. Intervalos

1.5. Los enteros

1.6. Teorema de descomposición única para enteros

Teorema 1.6.1. *Cada entero $n > 1$ es primo o producto de primos.*

Demostración. *Utilizaremos la inducción sobre n. El teorema se verifica trivialmente para n=2. Supongamos que es cierto para cada entero k con $1 < k < n$. si n no es primo, admite un divisor d con $1 < d < n$. Por lo tanto $n = cd$, con $1 < c < n$. Puesto que tanto c como d son $< n$, cada uno es primo o producto de primos; luego n es producto de primos.* ***QED***

Antes de probar la parte (2), la unicidad de la descomposición, introduccieremos otros conceptos. Si $d|a$ y $d|b$, diremos que d es un divisor común de a y b. El teorema que sigue demuestra que cada par de eneteros

1.7. Los números racionales

1.8. Los números irracionales