Capítulo 1

CAMPOS VECTORIALES E INTEGRALES DE LÍNEA

1.1. Campos vectoriales

Definición 1.1. *Sea D una región abierta en $\mathbb{R}^n$. Un* ***Campo vectorial*** *en D es una apliclación F que a cada punto $p \in D$ le asigna un vector $F(p) \in \mathbb{R}^n$, con $m > 1$. Si denotamos por $\vec{x}$ el vector posición de p, entonces podemos describir el campo vectorial por la función vectorial. Las funciones $f_i : D \to \mathbb{R}$ se llaman* ***componentes*** *del campo F. Si las componente f_i son derivables decimos que el campo vectorial F es derivable.*

Ejemplo 1.1. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ una región abierta y $f : D \to \mathbb{R}$ una función derivable. Entonces el campo vectorial*

$$\begin{aligned} F(\vec{x}) &= \bigtriangledown f(x_1, \cdots, x_n \\ &= (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) \end{aligned}$$

se llama ***Campo vectorial gradiente****. Los vectores del campo gradiente son ortogonales a las superficies de nivel de la función f.*

En muchos casos para entender un campo vectorial necesitamos dibujarlo, y esto no resulta una tarea no muy corta. Podemos usar para esta tarea ciertas líneas de campo, un concepto muy importante

Definición 1.2. *Una **línea de campo** de un campo vectorial $F(\vec{x})$ es una curva $\vec{r}(t)$, tal que*

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = F(\vec{r}(t)).$$

Geométricamente significa que el campo vectroial F es tangente a sus líneas de campo en cada punto. Analicamente, las línea de campo de un campo vectorial $F(x_1, \cdots, x_n$ con componentes $f_1, f_2 \cdots f_n$ son las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) = f_1(x_1(t), \cdots, x_n(t)) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) = f_2(x_1(t), \cdots, x_n(t)) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt}(t) = f_n(x_1(t), \cdots, x_n(t) \end{cases}$$

1.2. Intregales de Línea

Definición 1.3. *(Intregal de línea sobre un campo escalar). Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua, donde $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es una región abierta. Y sea γ una curva suave en $D \subseteq \mathbb{R}^n$ con una ecuación dada por una función vectorial $\vec{r} : [a, b] \to D$, $\vec{r} = \vec{r}(s)$, donde s es el parámetro de longitud de arco y b-a es la longitud de la curva γ. Entonces $f(\vec{r}(s))$ es una función real continua sobre el dominio $[a, b]$*

*La **intregal de línea** de la función f a lo largo de la curva γ, donde γ esta parámetrizada en términos del parámetro natura s (longitud de arco), $s \in [a, b]$, es*

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(r\vec{(s})ds$$

Si tenemos una ecuación $\vec{r} = \vec{p}(t).t \in [c, d]$ de la curva dada γ, respecto a un parámetro arbitrario t al parámetro natural s aplicando la fórmula

$$s = \int_c^t \|p'(u)\| du \Rightarrow ds = \|p'(t)\| dt$$

entonces la intregal de línea a lo largo de γ, de cualquier parametrización $\vec{p}(t)$ de γ, es

$$\int_\gamma f ds = \int_c^d f(\vec{p}(t))\|\vec{p}'(t)\|dt$$

Ejemplo 1.2. *La intregral de línea de la función f(x,y)=xy a lo largo de la circunferencia con centro en el origen y radio $r > 0$ es*

$$\begin{aligned}\int_\gamma f ds &= \int_0^{2\pi} (r\cos t)(r\sin t)\|(-r\sin t, r\cos t)\|dt \\ &= \int_0^{2\pi} r^3 \cos t \sin t dt \\ &= 0\end{aligned}$$

Definición 1.4. *(Intregal de línea sobre un campo vectorial). Sea $F : D \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo, donde $D \subseteq \mathbb{R}^n$ una región abierta. Sea γ una curva suave en D con una ecuación dada por una ecuación vectorial $\vec{r} : [a, b] \to D$, $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Entonces $F(\vec{r}(t))$ es una función vectorial continua sobre el dominio $[a, b]$.*

La **Intregal de línea** del campo vectorial F a lo largo de la curva γ es

$$\int_\gamma F \cdot d\vec{r} = \int_a^b F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)dt$$

Ejemplo 1.3. *la intregal de línea del campo vectorial $F(x, y) = (x + y, y)$ a lo largo de la curva con parametrización $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$ es*

$$\begin{aligned}\int_\gamma F \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin^2 dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2t - 1dt \\ &= -\pi\end{aligned}$$

Notación 1.5. *la notación*

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

donde C es una curva del plano, representa la integral de lnea sobre C del campo vectorial en el plano

$$F(x, y) = (P(x; y); Q(x; y)).$$

Igualmente la notacion

$$\int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + Q(x, y, z)dz,$$

donde C es una curva en el espacio, representa la integral de linea sobre C del campo vectorial en el espacio

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

1.3. El Teorema de Green

Definición 1.6. *(Campo vectorial conservativo). Un campo vectorial Sea $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, es un **campo vectorial conservativo** si existe un campo escalar $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que el gradiente su gradiente sea el campo vectorial dado, es decir*

$$\bigtriangledown f = F$$

*a la funcion f la llamaremos el **potencial escalar.***

Teorema 1.3.1. *(Teorema fundamental para integrales de lnea). Sea C una curva suave por partes, definida por $\vec{r}(t)$ para $a \leq b \leq \vec{r}(t) \in D$. para cada $t \in [a; b]$ y $D \subseteq F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una funcon derivable con gradiente continuo sobre C, entonces*

$$\int_C \bigtriangledown f \,.\, d\vec{r}(t) = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

Prueba.

$$\begin{aligned}
\int_C \bigtriangledown f . d\vec{r}(t) &= \int_a^b \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), \tfrac{\partial f}{\partial y}(x(t)\right) . (x'(t); y'(t))dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x(t); y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'((x(t), y(t))dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial f \circ r}{\partial x} dt \\
&= f(r(t))|_a^b \\
&= f(r(b)) - f(r(a))
\end{aligned}$$

□

Definición 1.7. *Sea $F : D \subseteq F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial y C1 y C2 dos curvas suaves contenidas en D definidas por $\vec{r_1}$ y $\vec{r_2}$ curvas suaves contenidas en D definidas por $\int_C F \, . \, d\vec{r}$ es* ***independiente de la trayectoria*** *si y solo si*

$$\int_{C_1} F \, . \, d\vec{r_1} = \int_{C_2} F \, . \, d\vec{r_2}$$

Definición 1.8. *La integral $\int_C F \, . \, d\vec{r}$ es independiente de la trayectoria $\oint_c F \, . \, d\vec{r} = 0$ si y solo si para toda curva cerrada C contenida en el dominio de F.*

Definición 1.9. *Una region R se llama* ***conexa*** *si para cualquier par de puntos $a, b \in \mathbb{R}$ existe una trayectoria continua $\vec{r} : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $r(0) = a$ y $r(1) = b$*

Definición 1.10. *Sean F un campo vectorial continuo sobre una region abierta y conexa D y C cualquier curva contenida en D. Si $\int_C F \, . \, d\vec{r}$ es independiente de la trayectoria si y solo si F es un campo conservativo.*

Definición 1.11. *Un conjunto R se llama* ***simplemente conexo*** *si no tiene huecos.*

Teorema 1.3.2. *Contenidos* $\cdots$ *Sea* $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ *un campo continuo abierto simplemente conexo* D*. entonces* F *es un campo vectorial conservativo si y solo si la matriz de derivadas parciales de* F

$$DF = [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}]_{n\times n}$$

es simétrica, es decir,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \text{ para cada } 1 \leq i, j \leq n$$

Teorema 1.3.3. *(Teorema de Green). Sea* $\mathbb{C}^+$ *una curva cerrada simple, orientada positivamente, suave por partes y* D *una región del plano* xy *acotada por* $\mathbb{C}$*. Sea* $F(x, y) = P(x, y)\boldsymbol{i}+Q(x, y)\boldsymbol{j}$ *un campo vectorial derivable en un abierto* Ω*, donde* Ω *contiene tanto a* D *como a su frontera* $\mathbb{C}$*. Entonces*

$$\oint_{\mathbb{C}} Pdx + Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

Teorema 1.3.4 (Teorema de Green para Regiones Múltiplemente Conexas.)**.** *Sean* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *curvas de Jordan suaves a trozos que tienen las siguientes propiedades:*

- *Dos cuales quiera de esas curvas no se cortan.*
- *Todas las curvas* $C_2, C_3, \ldots, C_n$ *están en el interior de* C_1*.*
- *La curva* C_i *no está en el interior de la curva* C_j *para cada* $i \neq j$, $i > 1$, $j > 1$*. Designemos por* R *la región que consiste en la reunión de* C_1 *con la porción del interior de* C_1 *que no está dentro de cualquiera de las curvas* $C_2, C_3, \ldots, C_n$*. Sean* P *y* Q *derivables con continuidad en un conjunto* S *que contiene a* R*. Tenemos entonces la siguiente identidad:*

$$\iint\limits_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_{C_1} (Pdx + Qdy) - \sum_{i=2}^{n} \oint_{C_i} (Pdx + Qdy)$$

Definición 1.12 (Rotación de un campo vectorial.)**.** *Sea* $F(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i}+ Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ *un campo vectorial sobre* $\mathbb{R}^3$*, tal que todas las derivadas parciales de* P*,* Q *y* R *existen. Entonces el* ***rotacional*** *de* F*, que se denota por* $\operatorname{Rot} F$ *o* $\nabla \times F$*, es un campo vectorial sobre* $\mathbb{R}^3$ *definido por*

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\mathbf{i} + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\mathbf{j} + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathbf{k}$$

Para un campo vectorial F definido en el plano xy, o en una región de este, con componentes $F(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$, el rotacional es,

$$\nabla \times F = \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathbf{k}$$

Teorema 1.3.5 (Primera Forma Vectorial Del teorema de Green)**.** *Sea C^+ una curva cerrada simple (Jordan), orientada positivamente, suave por partes y D una región del plano xy acotada por C. Sea $F(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ un campo vectorial derivable en Ω, donde Ω es una región del plano que contiene a D y su frontera C, entonces*

$$\oint_C F \cdot d\overrightarrow{r} = \iint\limits_D \nabla \times F \cdot \mathbf{k} dA$$

Definición 1.13 (Divergencia de un campo vectorial)**.** *Sea $F(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$ un campo vectorial tal que todas las derivadas parciales de P, Q y R existan. Entonces la* ***divergencia*** *de F, que se denota por* div F *o $\nabla \cdot F$ es un campo escalar sobre $\mathbb{R}^3$ definido por*

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Teorema 1.3.6 (Segunda Forma Vectorial del Teorema de Green)**.** *Sea C una curva cerrada simple, suave por partes orientada positivamente y D una región en el plano xy acotada por C. Sea $F(x,y)$ un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$ derivable en Ω, donde Ω es una región del plano que contiene a D y su frontera C. Entonces*

$$\oint_C F \cdot N ds = \iint\limits_D \nabla \cdot F dA$$

donde N es el vector normal unitario de C en la dirección hacia afuera de la región acotada por C.

Teorema 1.3.7. *Sea $F(x,y,z)$ un campo vectorial derivable definido en una región abierta, entonces*

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = \mathrm{div}(\mathrm{Rot}(F)) = 0$$

Prueba.

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times F) &= \operatorname{div}(\operatorname{Rot}(F)) \\
&= \operatorname{div} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\
&= \operatorname{div}[(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z})\mathbf{i} + (\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x})\mathbf{j} + (\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y})\mathbf{k}] \\
&= \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial y} \\
&= \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

♡

Teorema 1.3.8 (Área de una región plana)**.** *El área de una región D en el plano xy acotada por la curva simple C es*

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_{C^+} x dy - y dx$$

Prueba. Por el teorema de Green la integral de líne del enunciado del teorema se puede expresar:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \oint_{C^+} x dy - y dx &= \frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dA \\
&= \frac{1}{2} \iint_D 2 dA \\
&= \iint_D dA \\
&= A(D).
\end{aligned}
$$

♡