# Análisis Numérico: Método del Gradiente y Comparaciones

Wily Calib Caira Huancollo
Universidad Nacional del Altiplano

October 27, 2025

## Contents

# 1 Introducción

En este trabajo se presenta un análisis completo sobre el método del gradiente aplicado a funciones de varias variables, incluyendo derivadas parciales, cálculo del gradiente numérico, visualización gráfica y comparaciones entre diferentes métodos. Se incluyen tablas, gráficos y análisis exhaustivos, siguiendo un formato claro y detallado para su fácil comprensión.

# 2 Definición del Gradiente

El **gradiente** de una función $f(x, y)$ es un vector que indica la dirección de máximo crecimiento de la función y está compuesto por sus derivadas parciales:

$$\nabla f(x, y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

**Interpretación:** - La magnitud del gradiente indica la rapidez del cambio de la función. - La dirección del gradiente apunta hacia el incremento más rápido.

# 3 Ejemplo de Función y Gradiente

Consideremos la función:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

## 3.1 Derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

## 3.2 Gradiente

$$\nabla f(x, y) = [2x, 2y]$$

## 3.3 Cálculo en un punto específico

En el punto $(1, 2)$:

$$\nabla f(1, 2) = [2, 4]$$

# 4 Código en R

A continuación se muestra el código completo en R para calcular el gradiente numérico, generar tablas y graficar la función con sus vectores gradiente:

```
# ==========================================
# PROYECTO COMPLETO EN R
# Funci n: f(x,y) = x^2 + y^2
# Autor: Wily Calib Caira Huancollo
```

```r
# ==========================================

# --- Librer as necesarias ---
if(!require(ggplot2)) install.packages("ggplot2")
if(!require(reshape2)) install.packages("reshape2")
if(!require(ggquiver)) install.packages("ggquiver")
if(!require(viridis)) install.packages("viridis")
library(ggplot2)
library(reshape2)
library(ggquiver)
library(viridis)

# --- Funci n ---
f <- function(x, y) { x^2 + y^2 }

# --- Gradiente num rico ---
gradiente <- function(f, x0, y0, h = 1e-5) {
  df_dx <- (f(x0 + h, y0) - f(x0 - h, y0)) / (2 * h)
  df_dy <- (f(x0, y0 + h) - f(x0, y0 - h)) / (2 * h)
  return(c(df_dx, df_dy))
}

# --- Puntos de evaluaci n ---
puntos <- matrix(c(0,0, 0.5,0.5, 1,1, 1,2, 2,1, 2,2), ncol=2, byrow=TRUE)

# --- C lculo de gradientes y magnitudes ---
gradientes <- t(apply(puntos, 1, function(pt) gradiente(f, pt[1], pt[2])))
magnitud <- apply(gradientes, 1, function(g) sqrt(sum(g^2)))

# --- Tabla de resultados ---
resultados <- data.frame(
  x = puntos[,1],
  y = puntos[,2],
  df_dx = gradientes[,1],
  df_dy = gradientes[,2],
  grad_norm = magnitud
)
print(resultados)

# --- Graficar superficie ---
x <- seq(-3, 3, length.out=50)
y <- seq(-3, 3, length.out=50)
z <- outer(x, y, f)
df <- melt(z)
colnames(df) <- c("X","Y","Z")
df$X <- x[df$X]; df$Y <- y[df$Y]

ggplot(df, aes(X, Y, fill=Z)) +
  geom_raster() +
```

```
  geom_contour(aes(z=Z), color="white") +
  scale_fill_viridis_c(option="C") +
  labs(title="Superficie de f(x,y)=x^2+y^2", x="x", y="y") +
  theme_minimal()

# --- Graficar vectores del gradiente ---
grad_data <- data.frame(
  x = puntos[,1],
  y = puntos[,2],
  u = gradientes[,1],
  v = gradientes[,2]
)
ggplot() +
  geom_raster(data=df, aes(X,Y,fill=Z)) +
  geom_quiver(data=grad_data, aes(x=x, y=y, u=u, v=v), color="red", size=0.7) +
  scale_fill_viridis_c(option="C") +
  labs(title="Vectores gradiente sobre la superficie", x="x", y="y") +
  theme_minimal()
```

# 5 Tabla de Valores y Comparación

Se calculó el gradiente en varios puntos para comparar magnitudes y direcciones:

| Punto $(x, y)$ | $\frac{\partial f}{\partial x}$ | $\frac{\partial f}{\partial y}$ | $\|\|\nabla f\|\|$ |
|---|---|---|---|
| (0,0) | 0 | 0 | 0 |
| (1,1) | 2 | 2 | 2.828 |
| (2,1) | 4 | 2 | 4.472 |
| (1,2) | 2 | 4 | 4.472 |
| (2,2) | 4 | 4 | 5.657 |

Table 1: Gradientes en diferentes puntos y magnitudes

# 6 Conclusiones

- El método del gradiente permite identificar la dirección de mayor incremento de una función. - La comparación con métodos numéricos confirma la precisión del cálculo analítico. - Las visualizaciones ayudan a comprender la geometría de la función y el comportamiento del gradiente.