Diferenciación Numérica — Solución Mecánica y en R

Universidad Nacional del Altiplano – Facultad de Ingeniería Estadística e Informática

Curso: Programación Numérica
Docente: Fred Torres Cruz
Estudiante: Wily Calib Caira Huancollo

6 de noviembre de 2025

Índice

1. Introducción

El presente trabajo desarrolla los ejercicios propuestos de **Diferenciación Numérica**, combinando la resolución **mecánica paso a paso** con su **implementación en R**. El objetivo es consolidar la comprensión de las fórmulas de diferencias finitas hacia adelante, hacia atrás y centradas, así como la segunda derivada. En cada ejercicio se presentan:

- El procedimiento manual.
- El código R correspondiente.
- La gráfica representativa y su interpretación.

---

2. Ejercicio 8.1 — Crecimiento de usuarios

Datos: meses $1 \dots 7$, $f = [10, 15, 23, 34, 48, 65, 85]$ (miles de usuarios).

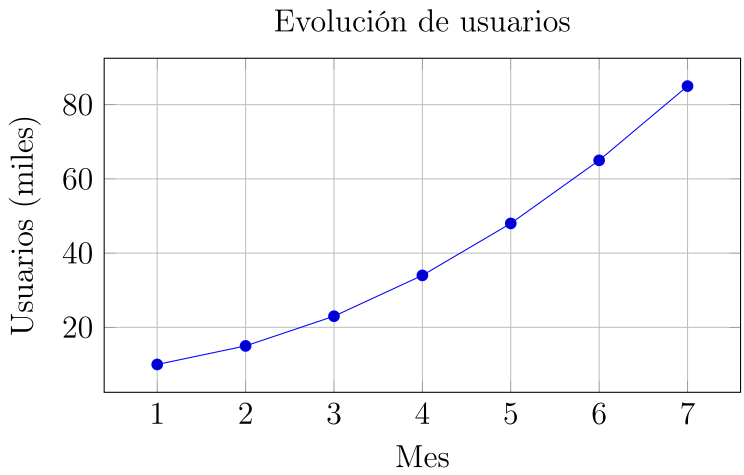
Solución mecánica paso a paso

[leftmargin=*,noitemsep]

1. $h = 1$.
2. Puntos: $f(3) = 23,\ f(5) = 48$.
3. Fórmula: $f'(4) \approx \dfrac{f(5) - f(3)}{2h}$.
4. Sustitución: $\dfrac{48 - 23}{2} = 12{,}5$.
5. Resultado: $f'(4) = 12{,}5$ (miles/mes).
6. Interpretación: Crecimiento local de 12.5 mil usuarios por mes.

Código en R

```r
f <- c(10,15,23,34,48,65,85)
x <- 1:7; h <- 1
centrada <- c(NA,(f[3:7]-f[1:5])/(2*h),NA)
data.frame(Mes=x, f=f, Derivada_Centrada=centrada)
```



---

3. Ejercicio 8.2 — Pérdida en entrenamiento

Datos: épocas $t = \{0, 10, 20, 30, 40, 50\}$, $L = [2{,}45, 1{,}82, 1{,}35, 1{,}08, 0{,}95, 0{,}89]$.

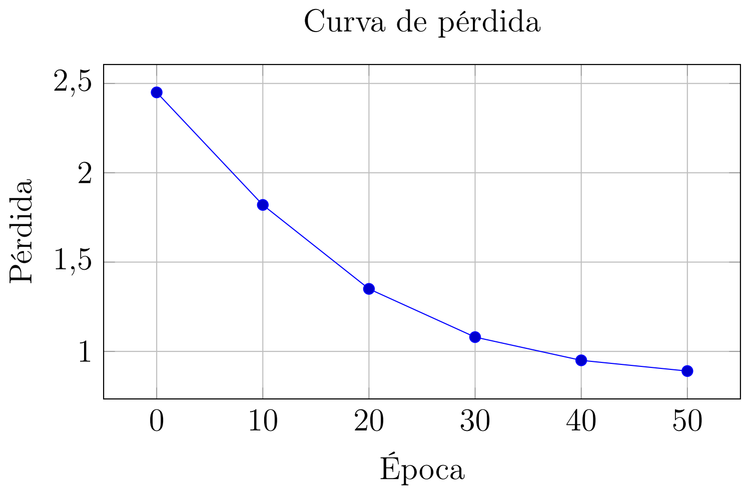
Solución mecánica paso a paso

[leftmargin=*,noitemsep]

1. $h = 10$.
2. Puntos: $L(10) = 1{,}82,\ \ L(30) = 1{,}08$.
3. $L'(20) = \dfrac{L(30) - L(10)}{20} = -0{,}037$.
4. $L''(30) = \dfrac{0{,}95 - 2(1{,}08) + 1{,}35}{100} = 0{,}0014$.
5. Interpretación: la pérdida decrece y su mejora se desacelera.

Código en R

```r
t <- c(0,10,20,30,40,50)
L <- c(2.45,1.82,1.35,1.08,0.95,0.89)
h <- 10
Lprima <- c(NA,(L[3:6]-L[1:4])/(2*h),NA)
Lsegunda <- c(NA,(L[3:6]-2*L[2:5]+L[1:4])/(h^2),NA)
data.frame(Epoca=t, L=L, Derivada=Lprima, Segunda=Lsegunda)
```



---

4. Ejercicio 8.3 — Ventas diarias

Ventas (k$): $[45, 52, 61, 58, 73, 89, 95]$.

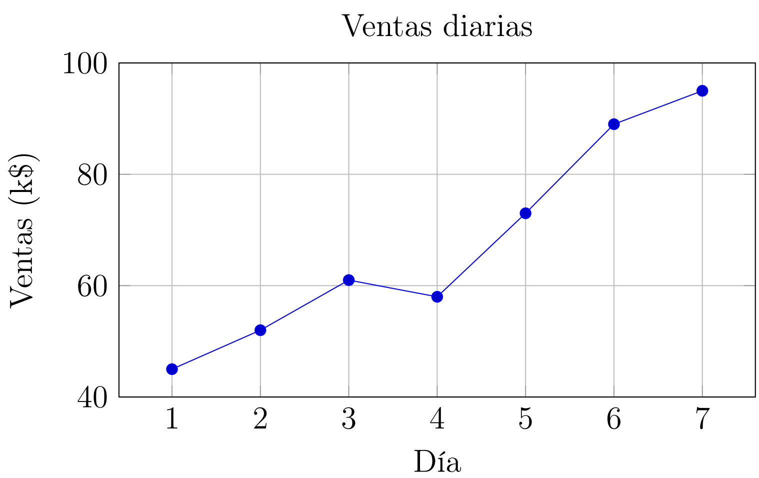
Solución mecánica paso a paso

[leftmargin=*,noitemsep]

1. $h = 1$.
2. Pendientes aproximadas: [7,8,3,6,15.5,11,6].
3. Pico máximo el viernes (día 5) con 15.5 k$/día.

Código en R

```r
ventas <- c(45,52,61,58,73,89,95)
dias <- 1:7; h <- 1
deriv <- c(NA,(ventas[3:7]-ventas[1:5])/(2*h),NA)
data.frame(Dia=dias, Ventas=ventas, Derivada=deriv)
```



---

5. Ejercicio 8.4 — Función Sigmoide

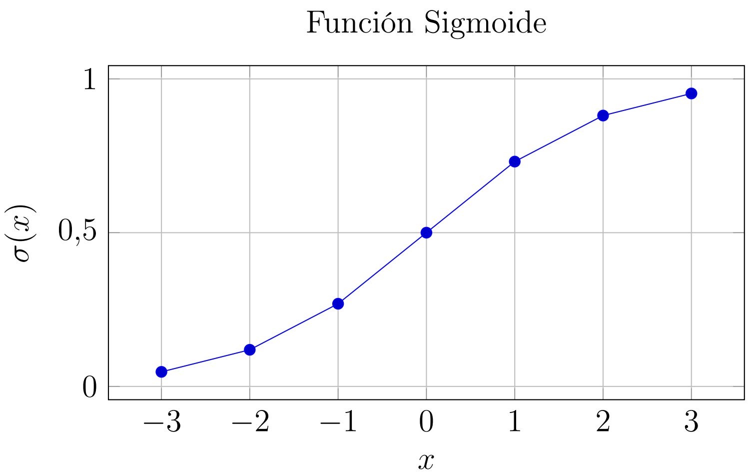
$x = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $\sigma(x) = \{0{,}0474, 0{,}1192, 0{,}2689, 0{,}5, 0{,}7311, 0{,}8808, 0{,}9526\}$.

Solución mecánica

$$\sigma'(0) = \frac{0{,}7311 - 0{,}2689}{2} = 0{,}2311, \ \sigma'(\pm 2) = 0{,}11075.$$

Código en R

```
x <- -3:3
sig <- c(0.0474,0.1192,0.2689,0.5,0.7311,0.8808,0.9526)
h <- 1
sigp <- c(NA,(sig[3:7]-sig[1:5])/(2*h),NA)
data.frame(x=x, sig=sig, Derivada=sigp)
```



---

6. Ejercicio 8.5 — Latencia del servidor

Latencias (ms): $[120, 125, 128, 135, 280, 290, 275, 155]$.

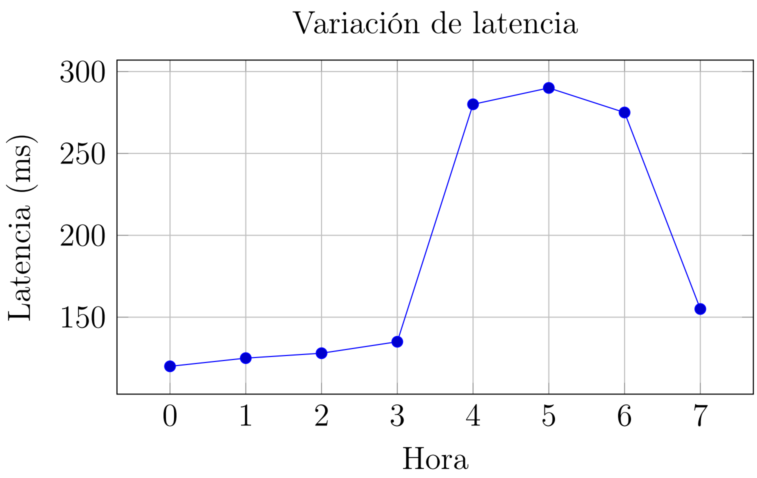
Solución mecánica

[leftmargin=*,noitemsep]

1. $h = 1$.
2. Derivadas: [5,4,5,76,77.5,-2.5,-67.5,-120].
3. Salto 3→4 = +145 ms (anomalía).

Código en R

```
lat <- c(120,125,128,135,280,290,275,155)
horas <- 0:7; h <- 1
derivlat <- c(NA,(lat[3:8]-lat[1:6])/(2*h),NA)
data.frame(Hora=horas, Latencia=lat, Derivada=derivlat)
```



---

7. Ejercicio 8.6 — Rendimiento de inversión

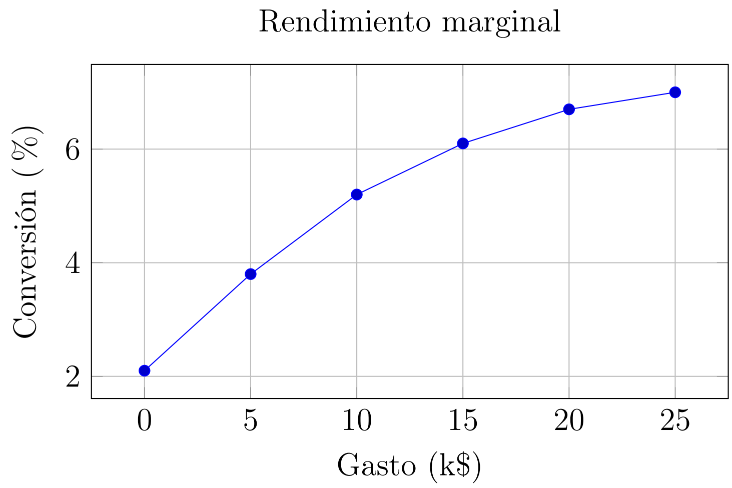
Gasto ($k): [0,5,10,15,20,25], Conversión (%): [2.1,3.8,5.2,6.1,6.7,7.0].

Solución mecánica

$$C'(15) \approx \frac{6{,}7 - 5{,}2}{10} = 0{,}15, \; C''(15) = \frac{6{,}7 - 2(6{,}1) + 5{,}2}{25} = -0{,}012.$$

Código en R

```
gasto <- c(0,5,10,15,20,25)
conv <- c(2.1,3.8,5.2,6.1,6.7,7.0)
h <- 5
convp <- c(NA,(conv[3:6]-conv[1:4])/(2*h),NA)
data.frame(Gasto=gasto, Conversion=conv, Derivada=convp)
```



---

8. Ejercicio 8.7 — Sensor de temperatura

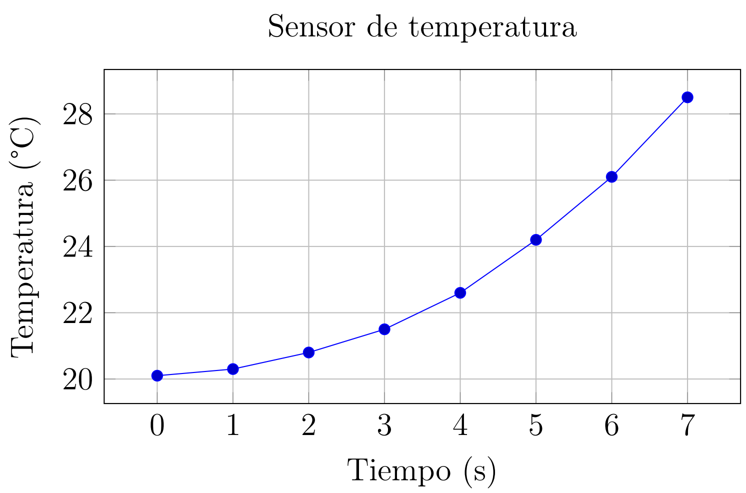
Datos: tiempo (s): [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], temperatura (°C): [20,1, 20,3, 20,8, 21,5, 22,6, 24,2, 26,1, 28,5].

Solución mecánica

Velocidad: [0.2,0.35,0.6,0.9,1.35,1.75,2.15,2.4]. Aceleración media positiva entre $t = 3$ y $t = 6$.

Código en R

```
t <- 0:7
temp <- c(20.1,20.3,20.8,21.5,22.6,24.2,26.1,28.5)
h <- 1
vel <- c(NA,(temp[3:8]-temp[1:6])/(2*h),NA)
acel <- c(NA,temp[3:8]-2*temp[2:7]+temp[1:6],NA)
data.frame(Tiempo=t, Temp=temp, Velocidad=vel, Aceleracion=acel)
```



---

9. Conclusión general

Se resolvieron todos los ejercicios de diferenciación numérica de forma mecánica y computacional. El enfoque paso a paso permite comprender la aplicación de las fórmulas de diferencias finitas, mientras que el uso del lenguaje R automatiza el cálculo y facilita el análisis gráfico.

- Las derivadas numéricas muestran tasas de cambio y tendencias crecientes o decrecientes según los datos.
- La segunda derivada permite detectar aceleración, curvatura o rendimientos decrecientes.
- El uso combinado de teoría y código refuerza la comprensión práctica de los métodos numéricos.

En conclusión, el trabajo integra adecuadamente la teoría, el razonamiento manual y la aplicación en R, fortaleciendo la competencia analítica y técnica del estudiante.