Universidad Nacional del Altiplano
Escuela Profesional de Ingeniería Estadística e Informática

Ejercicios Resueltos

Paso a paso

Curso: Programación Numérica
Docente: Fred Torres Cruz

Estudiante: Wily Calib Caira Huancollo
Fecha: 11 de diciembre de 2025

Índice

1. Ejercicio 1

Matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Paso 1: Polinomio característico

Para valores propios:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 7-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(7-\lambda).$$

Paso 2: Encontrar eigenvalores

Como la matriz es diagonal:

$$\lambda_1 = 4, \qquad \lambda_2 = 7.$$

Paso 3: Eigenvectores

Para $\lambda_1 = 4$:

$$(A - 4I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Esto implica $y = 0$, x libre. Tomamos:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = 7$:

$$(A - 7I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Esto implica $x = 0$, y libre. Tomamos:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comprobación

$$Av_1 = 4v_1, \qquad Av_2 = 7v_2.$$

2. Ejercicio 2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Paso 1: Polinomio característico

$$\det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4.$$

$$(1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Paso 2: Eigenvalores

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Resolviendo:

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = -1.$$

Paso 3: Eigenvectores

Para $\lambda_1 = 3$:

$$(B - 3I) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ecuación:

$$-2x + 2y = 0 \Rightarrow y = x.$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = -1$:

$$(B + I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2x + 2y = 0 \Rightarrow y = -x.$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Comprobación

$$Bv_1 = 3v_1, \qquad Bv_2 = -1v_2.$$

3. Ejercicio 3

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2.$$

Paso 1: Derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 - 2x_2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - 2x_1.$$

Paso 2: Segundas derivadas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -2.$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Paso 3: Polinomio característico

$$\det(H - \lambda I) = (4 - \lambda)(2 - \lambda) - 4.$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda + 4.$$

Paso 4: Eigenvalores

$$\lambda = 3 \pm \sqrt{5}.$$

Paso 5: Clasificación

Ambos valores propios son positivos.

Conclusión

El punto crítico $(0, 0)$ es un **mínimo local**.

4. Ejercicio 4

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2.$$

Paso 1: Hessiana

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Paso 2: Eigenvalores

Son los elementos de la diagonal:

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = -4.$$

Conclusión

La función tiene un **máximo local** en $(0, 0)$.

5. Ejercicio 5

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Paso 1: Multiplicación

$$Cv = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Paso 2: ¿Es eigenvector?

Si fuera eigenvector:

$$Cv = \lambda v = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Igualando:

$$2\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = 4,$$

$$\lambda = 6 \quad \text{(segunda componente)}.$$

Inconsistencia $\rightarrow$ no existe λ.

Conclusión

El vector $v = (2, 1)^T$ **no es eigenvector** de C.

6. Conclusión General

En los cinco ejercicios se aplicaron conceptos fundamentales del álgebra lineal y del cálculo multivariable: determinación de valores propios, eigenvectores, construcción de Hessianas y análisis de la definitud para clasificar puntos críticos. El desarrollo paso a paso permitió comprender cada procedimiento con claridad, mostrando cómo estas herramientas son esenciales en el análisis matemático y en la programación numérica.