

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO DE
PUNO

FACULTAD DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E
INFORMÁTICA

TRABAJO: DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA

Curso: Programación Numérica

Docente: Fred Torres Cruz

Estudiante: Wily Calib Caira Huancollo

Puno – Perú

6 de noviembre de 2025

Índice

1. Ejercicio 8.1 — Crecimiento de usuarios	2
2. Ejercicio 8.2 — Pérdida (Loss) en entrenamiento	3
3. Ejercicio 8.3 — Ventas diarias	4
4. Ejercicio 8.4 — Gradiente de la sigmoide	5
5. Ejercicio 8.5 — Detección de anomalías (latencia)	5
6. Ejercicio 8.6 — Tasa de conversión vs gasto	6
7. Ejercicio 8.7 — Sensor de temperatura	7

Instrucciones

Para cada ejercicio se sigue el mismo esquema (**igual al ejemplo**):

Paso 1: Fijar h .

Paso 2: Indicar los puntos (valores de la función) que se usan.

Paso 3: Escribir la fórmula numérica (adelante / atrás / centrada / segunda).

Paso 4: Sustituir numéricamente y operar.

Paso 5: Presentar el resultado numérico con unidades.

Paso 6: Interpretación breve.

1. Ejercicio 8.1 — Crecimiento de usuarios

Datos: meses $1 \dots 7$, $f = [10, 15, 23, 34, 48, 65, 85]$ (miles de usuarios).

Tarea 1 — Tasa en mes 4 (diferencia centrada)

Paso 1: Fijar $h = 1$.

Paso 2: Puntos usados: $f(3) = 23$, $f(5) = 48$.

Paso 3: Fórmula: $f'(4) \approx \frac{f(5) - f(3)}{2h}$.

Paso 4: Sustitución: $f'(4) \approx \frac{48 - 23}{2 \cdot 1}$.

Paso 5: Cálculo: $f'(4) = \frac{25}{2} = 12,5$.

Paso 6: Interpretación: En el mes 4 la ganancia de usuarios es **12,5** miles/mes (pendiente local).

Tarea 2 — Tasa en mes 1 (diferencia hacia adelante)

Paso 1: $h = 1$.

Paso 2: Puntos: $f(1) = 10$, $f(2) = 15$.

Paso 3: Fórmula adelante: $f'(1) \approx \frac{f(2) - f(1)}{h}$.

Paso 4: Sustitución: $f'(1) \approx \frac{15 - 10}{1}$.

Paso 5: Cálculo: $f'(1) = 5$.

Paso 6: Interpretación: Inicio con incremento 5 mil usuarios/mes.

Tarea 3 — Tasa en mes 7 (diferencia hacia atrás)

Paso 1: $h = 1$.

Paso 2: Puntos: $f(7) = 85$, $f(6) = 65$.

Paso 3: Fórmula atrás: $f'(7) \approx \frac{f(7) - f(6)}{h}$.

Paso 4: Sustitución: $f'(7) \approx \frac{85 - 65}{1}$.

Paso 5: Cálculo: $f'(7) = 20$.

Paso 6: Interpretación: Al final la ganancia mensual es 20 mil usuarios/mes.

Tarea 4 — Segunda derivada (aceleración) en cada mes

Paso 1: $h = 1$.

Paso 2: Puntos (para i interiores 2..6): usar $f(i-1), f(i), f(i+1)$.

Paso 3: Fórmula centrada segunda: $f''(i) \approx \frac{f(i+1) - 2f(i) + f(i-1)}{h^2}$.

Paso 4: Sustituciones y cálculos:

$$\begin{aligned}f''(2) &= \frac{23 - 2 \cdot 15 + 10}{1} = 3, \\f''(3) &= \frac{34 - 2 \cdot 23 + 15}{1} = 3, \\f''(4) &= \frac{48 - 2 \cdot 34 + 23}{1} = 3, \\f''(5) &= \frac{65 - 2 \cdot 48 + 34}{1} = 3, \\f''(6) &= \frac{85 - 2 \cdot 65 + 48}{1} = 3.\end{aligned}$$

Paso 5: Resultado: $f''(i) = 3$ (miles/mes²) para $i = 2, \dots, 6$.

Paso 6: Interpretación: Aceleración positiva y constante en interiores; el crecimiento se *acelera*.

2. Ejercicio 8.2 — Pérdida (Loss) en entrenamiento

Datos: épocas $t = \{0, 10, 20, 30, 40, 50\}$, $L = [2,45, 1,82, 1,35, 1,08, 0,95, 0,89]$.

Tarea 1 — Tasa en época 20 (centrada)

Paso 1: Fijar $h = 10$.

Paso 2: Puntos: $L(10) = 1,82$, $L(30) = 1,08$.

Paso 3: Fórmula centrada: $L'(20) \approx \frac{L(30) - L(10)}{2h}$.

Paso 4: Sustitución: $L'(20) \approx \frac{1,08 - 1,82}{2 \cdot 10} = \frac{-0,74}{20}$.

Paso 5: Cálculo: $L'(20) = -0,037$ (loss/época).

Paso 6: Interpretación: En época 20 la pérdida disminuye 0.037 por época.

Tarea 2 — Segunda derivada en época 30

Paso 1: $h = 10$.

Paso 2: Puntos: $L(20) = 1,35$, $L(30) = 1,08$, $L(40) = 0,95$.

Paso 3: Fórmula: $L''(30) \approx \frac{L(40) - 2L(30) + L(20)}{h^2}$.

Paso 4: Sustitución: $L''(30) = \frac{0,95 - 2(1,08) + 1,35}{100} = \frac{0,14}{100}$.

Paso 5: Cálculo: $L''(30) = 0,0014$.

Paso 6: Interpretación: Curvatura positiva pequeña \rightarrow la reducción del loss se *desacelera* ligeramente.

Tarea 3 — ¿Cuándo $|L'| < 0,01$?

Paso 1: Calcular derivadas centradas en 30 y 40:

$$L'(30) \approx \frac{L(40) - L(20)}{40 - 20} = \frac{0,95 - 1,35}{20} = -0,02,$$
$$L'(40) \approx \frac{L(50) - L(30)}{50 - 30} = \frac{0,89 - 1,08}{20} = -0,0095.$$

Paso 2: Resultado: primera época con $|L'| < 0,01$ es $t = 40$.

Paso 3: Interpretación: A partir de la época 40 las mejoras por época son muy pequeñas.

Tarea 4 — Estimar $L(25)$ por aproximación lineal

Paso 1: Usar la derivada en 20: $L'(20) = -0,037$.

Paso 2: Fórmula: $L(25) \approx L(20) + L'(20) \cdot (25 - 20)$.

Paso 3: Sustitución: $L(25) \approx 1,35 + (-0,037) \cdot 5 = 1,165$.

Paso 4: Interpretación: Estimación lineal de $L(25)$ 1.165.

3. Ejercicio 8.3 — Ventas diarias

Datos: Lun..Dom (1..7), Ventas (k\$): [45, 52, 61, 58, 73, 89, 95].

Tarea 1 — Derivada día a día

Paso 1: $h = 1$. forward en primer punto, backward en último, centrada en interiores.

Paso 2: Puntos: lista dada.

Paso 3: Fórmulas aplicadas:

$$f'_{\text{Lun}} = \frac{52 - 45}{1} = 7,$$
$$f'_{\text{Mar}} = \frac{61 - 45}{2} = 8,$$
$$f'_{\text{Mié}} = \frac{58 - 52}{2} = 3,$$
$$f'_{\text{Jue}} = \frac{73 - 61}{2} = 6,$$
$$f'_{\text{Vie}} = \frac{89 - 58}{2} = 15,5,$$
$$f'_{\text{Sáb}} = \frac{95 - 73}{2} = 11,$$
$$f'_{\text{Dom}} = \frac{95 - 89}{1} = 6.$$

Paso 4: Interpretación: picos de velocidad el viernes (15.5 k\$/día).

Tarea 2 — Día con mayor aceleración

Paso 1: Calcular segundas diferencias (implícitas) muestra mayor cambio de pendiente hacia el viernes.

Paso 2: Resultado: mayor aceleración cercana al **viernes**.

Paso 3: Interpretación: la campaña sube notablemente antes del fin de semana.

Tarea 3 — Caída el jueves (magnitud)

Paso 1: Interpretación directa: caída Mié→Jue = $61 - 58 = 3$ (k\$).

Paso 2: Interpretación: leve bajón de 3k entre miércoles y jueves.

Tarea 4 — Extrapolación lunes siguiente

Paso 1: Tomar derivada en domingo = 6 k\$/día.

Paso 2: Extrapolación: $95 + 6 = 101$ k\$ esperados el lunes siguiente.

4. Ejercicio 8.4 — Gradiente de la sigmoide

Datos: $x = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $\sigma(x) = \{0,0474, 0,1192, 0,2689, 0,5, 0,7311, 0,8808, 0,9526\}$.

Tarea 1 — $\sigma'(0)$ (centrada)

Paso 1: $h = 1$.

Paso 2: Puntos: $\sigma(-1) = 0,2689$, $\sigma(1) = 0,7311$.

Paso 3: Fórmula centrada: $\sigma'(0) \approx \frac{\sigma(1) - \sigma(-1)}{2h}$.

Paso 4: Sustitución: $\sigma'(0) \approx \frac{0,7311 - 0,2689}{2} = 0,2311$.

Paso 5: Resultado: 0,2311.

Paso 6: Interpretación: cercano al valor analítico 0,25 (error por h grande).

Tarea 2 — $\sigma'(\pm 2)$

Paso 1: Puntos: $\sigma(-3) = 0,0474$, $\sigma(-1) = 0,2689$ y $\sigma(1) = 0,7311$, $\sigma(3) = 0,9526$.

Paso 2: Cálculo centrado:

$$\sigma'(-2) = \frac{0,2689 - 0,0474}{2} = 0,11075, \quad \sigma'(2) = \frac{0,9526 - 0,7311}{2} = 0,11075.$$

Paso 3: Interpretación: simetría y consistencia con fórmula analítica $\sigma'(x) = \sigma(x)(1 - \sigma(x))$.

Tarea 3 — Recomendación de h

Paso 1: Recomendación práctica: usar h pequeño (por ej. 10^{-2} o 10^{-3}) si se tiene la forma analítica, para mejorar precisión.

5. Ejercicio 8.5 — Detección de anomalías (latencia)

Datos: horas $0 \dots 7$, latencia ms: $[120, 125, 128, 135, 280, 290, 275, 155]$.

Tarea 1 — Derivadas hora a hora

Paso 1: $h = 1$. forward en inicio, backward en final, centrada en interiores.

Paso 2: Cálculos:

$$d(0) = 125 - 120 = 5,$$

$$d(1) = \frac{128 - 120}{2} = 4,$$

$$d(2) = \frac{135 - 125}{2} = 5,$$

$$d(3) = \frac{280 - 128}{2} = 76,$$

$$d(4) = \frac{290 - 135}{2} = 77,5,$$

$$d(5) = \frac{275 - 280}{2} = -2,5,$$

$$d(6) = \frac{155 - 290}{2} = -67,5,$$

$$d(7) = 155 - 275 = -120.$$

Paso 3: Interpretación: salto muy grande en 3→4 (pico).

Tarea 2 — Pico de anomalía y magnitud

Paso 1: Pico: alrededor de hora 3 (salto a la hora 4).

Paso 2: Magnitud salto 3→4: $280 - 135 = 145$ ms.

Paso 3: Interpretación: incidente fuerte en la red/servidor.

Tarea 3 — Recuperación

Paso 1: Observación: derivadas negativas grandes en 6→7 muestran recuperación rápida (120 ms).

Paso 2: Interpretación: sistema vuelve a niveles normales al final.

6. Ejercicio 8.6 — Tasa de conversión vs gasto

Datos: gasto (\$k): $[0, 5, 10, 15, 20, 25]$, conversión (%): $[2, 1, 3, 8, 5, 2, 6, 1, 6, 7, 7, 0]$.

Tarea 1 — ROI marginal (dC/dG)

Paso 1: Fijar $h = 5$ (salvo extremos).

Paso 2: Cálculos:

$$\begin{aligned}G = 0 &: \frac{3,8 - 2,1}{5} = 0,34, \\G = 5 &: \frac{5,2 - 2,1}{10} = 0,31, \\G = 10 &: \frac{6,1 - 3,8}{10} = 0,23, \\G = 15 &: \frac{6,7 - 5,2}{10} = 0,15, \\G = 20 &: \frac{7,0 - 6,1}{10} = 0,09, \\G = 25 &: \frac{7,0 - 6,7}{5} = 0,06.\end{aligned}$$

Paso 3: Interpretación: rendimientos marginales decrecientes con el gasto.

Tarea 2 — Segunda derivada en 15k

Paso 1: Fórmula: $C''(15) \approx \frac{C(20) - 2C(15) + C(10)}{5^2}$.

Paso 2: Sustitución: $\frac{6,7 - 2(6,1) + 5,2}{25} = \frac{-0,3}{25} = -0,012$.

Paso 3: Interpretación: segunda derivada negativa \rightarrow rendimientos decrecientes.

Tarea 3 — Recomendación

Paso 1: Dado ROI marginal en 25k 0.06 % por \$1k y segunda derivada negativa, **no es recomendable** aumentar presupuesto sin otros beneficios.

7. Ejercicio 8.7 — Sensor de temperatura

Datos: tiempo (s) 0...7, Temp (°C): [20,1, 20,3, 20,8, 21,5, 22,6, 24,2, 26,1, 28,5].

Tarea 1 — Velocidad (primera derivada)

Paso 1: $h = 1$.

Paso 2: Cálculos (forward/centrada/backward):

$$v(0) = 0,20, v(1) = 0,35, v(2) = 0,60, v(3) = 0,90, v(4) = 1,35, v(5) = 1,75, v(6) = 2,15, v(7)$$

Paso 3: Interpretación: velocidad creciente del sensor.

Tarea 2 — Aceleración (segunda derivada)

Paso 1: Fórmula centrada: $a(t) \approx f(t+1) - 2f(t) + f(t-1)$.

Paso 2: Cálculos interiores:

$$a(1) = 0,3, a(2) = 0,2, a(3) = 0,4, a(4) = 0,5, a(5) = 0,3, a(6) = 0,5.$$

Paso 3: Interpretación: aceleraciones moderadas a fuertes en el intervalo medio.

Tarea 3 — Alertas

Paso 1: Umbral: alerta si $v > 0,8$ °C/s.

Paso 2: Resultado: alertas en $t = 3, 4, 5, 6, 7$.

Paso 3: Interpretación: evento de subida rápida a partir de $t = 3$.

Resumen Visual (tabla)

Ejercicio	Resultado (primera derivada)	Resultado (segunda derivada)
8.1	$f'(4) = 12,5$ (mil/mes)	$f''(i) = 3$ (mil/mes ²)
8.2	$L'(20) = -0,037$	$L''(30) = 0,0014$
8.3	pico 15.5 k\$/día (vie)	aceleración máxima cerca del vie
8.4	$\sigma'(0) \approx 0,2311$	simétrica (par)
8.5	salto 3→4 = +145 ms	recuperación 120 ms
8.6	ROI >0.2 % hasta 10k	$C''(15) = -0,012$
8.7	$v_{\text{máx}} = 2,4$ °C/s	$a_{\text{máx}} = 0,5$ °C/s ²

Cuadro 1: Resumen rápido de resultados numéricos principales.

Conclusión

1. Las aproximaciones numéricas realizadas (adelante/atrás/centrada y segundas diferencias) muestran consistencia con las expectativas teóricas: derivadas positivas indican crecimiento, derivadas negativas indican decrecimiento o recuperación.
2. En los ejercicios con datos espaciados (por ejemplo, épocas con $h = 10$), la precisión depende fuertemente de h ; reducir h (cuando la función es evaluable) mejora la aproximación de la derivada.
3. En el análisis práctico (8.5, 8.6, 8.7) las derivadas sirven para:
 - detectar anomalías y picos (salto de latencia 145 ms en 8.5),
 - medir rendimientos marginales (ROI decreciente en 8.6),
 - generar features útiles para modelos (vel/acc en 8.7).
4. Recomendaciones:
 - Cuando sea posible, evaluar la función analítica para usar h pequeño y diferencia centrada.
 - Para detección de anomalías, combine derivadas con un umbral y con un filtro (por ejemplo mediana móvil) para reducir ruido.
 - Documentar siempre h y las convenciones (forward/backward/centrada) en entregables académicos.