Escuela Politécnica Nacional

Tarea 1: Errores numéricos

Nombre: Wellington Barros

1. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por $p*$.

a. $p = \pi, p^* = {}^{22}/_{7}$

$$error\ abs = |p - p*| = \left|\pi - \frac{22}{7}\right|$$

$$error\ abs = |p - p*| = 1{,}2644\ x\ 10^{-3}$$

$$error\ rel = \left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{\pi - \frac{22}{7}}{\pi}\right|$$

$$error\ rel = 4{,}024\ x\ 10^{-4}$$

b. $p = \pi, p^* = 3.1416$

$$error\ abs = |p - p*| = |\pi - 3{,}1416|$$

$$error\ abs = |p - p*| = 7{,}346\ x\ 10^{-6}$$

$$error\ rel = \left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{\pi - 3{,}1416}{\pi}\right|$$

$$error\ rel = 2{,}338\ x\ 10^{-6}$$

c. $p = e, p^* = 2.718$

$$error\ abs = |p - p*| = |e - 2{,}718|$$

$$error\ abs = |p - p*| = 2{,}818\ x\ 10^{-4}$$

$$error\ rel = \left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{e - 2{,}718}{e}\right|$$

$$error\ rel = 1{,}036\ x\ 10^{-4}$$

d. $p = \sqrt{2}, p^* = 1.414$

$$error\ abs = |p - p*| = \left|\sqrt{2} - 1{,}414\right|$$

$$error\ abs = |p - p*| = 2{,}135\ x\ 10^{-4}$$

$$error\ rel = \left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{\sqrt{2} - 1{,}414}{\sqrt{2}}\right|$$

$$error\ rel = 1{,}51\ x\ 10^{-4}$$

2. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por $p*$

a. $p = e^{10}, p^* = 22000$

$$error\ abs = |p - p*| = |e^{10} - 22000|$$

$$error\ abs = |p - p*| = 26{,}465$$

$$error\ rel = \left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{e^{10} - 22000}{e^{10}}\right|$$

$$error\ rel = 1{,}2\ x\ 10^{-3}$$

b. $p = 10^{\pi}, p^* = 1400$

$$error\ abs = |p - p*| = |10^{\pi} - 1400|$$

$$error\ abs = |p - p*| = 14{,}544$$

$$error\ rel = \left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{10^{\pi} - 1400}{10^{\pi}}\right|$$

$$error\ rel = 0{,}0104$$

c. $p = 8!, p^* = 39900$

$$error\ abs = |p - p*| = |8! - 39900|$$

$$error\ abs = |p - p*| = 420$$

$$error\ rel = \left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{8! - 39900}{8!}\right|$$

$$error\ rel = 0{,}01$$

d. $p = 9!, p^* = \sqrt{18\pi}\left({}^{9}/_{e}\right)^{9}$

$$error\ abs = |p - p*| = \left|9! - \sqrt{18\pi}\,(\frac{9}{e})^9\right|$$

$$error\ abs = |p - p*| = 3343{,}12$$

$$error\ rel = \left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{9! - \sqrt{18\pi}\,(\frac{9}{e})^9}{9!}\right|$$

$$error\ rel = 9{,}21\ x\ 10^{-3}$$

3. Encuentre el intervalo más largo en el que se debe encontrar $p*$ para aproximarse a p con error relativo máximo de 10−4 para cada valor de p.

El error relativo puede ser tanto positivo como negativo. Porque el valor de p* puede ser mayor o menor que p Por eso, se plantean dos ecuaciones:

a. π

$$error\ rel = \left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{\pi - p*}{\pi}\right| = 10^{-4}$$

$$p* = 3{,}141278494$$

$$error\ rel = \frac{p - p*}{p} 10^{-4}$$

$$\textbf{\textit{Límite inferior}}: \text{p} * = \pi - 10^{-4}\ x\ \pi$$

$$\textbf{\textit{Límite superior}}: p * = \pi + 10^{-4}\ x\ \pi$$

$$\left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{\pi - p*}{\pi}\right| = 10^{-4}$$

V

$$\left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{\pi - p*}{\pi}\right| = -10^{-4}$$

$$p* = 3{,}141278494 \quad V \qquad p* = 3{,}141906813$$

$$p* = \epsilon[3{,}141278494;\ 3{,}141906813]$$

///

b. e

$$error\ rel = \left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{e - p*}{e}\right| = 10^{-4}$$

$$\textbf{\textit{Límite inferior}}: \text{p} * = e - 10^{-4}\ x\ e$$

$$\textbf{\textit{Límite superior}}: p * = e + 10^{-4}\ x\ e$$

$$\left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{e - p*}{e}\right| = 10^{-4}$$

V

$$\left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{e - p*}{e}\right| = -10^{-4}$$

$$p* = 2{,}71801 \quad V \qquad p* = 2{,}718553657$$

$$p* = \epsilon[2{,}71801;\ 2{,}718553657]$$

//

c. $\sqrt{2}$

$$error\ rel = \left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{\sqrt{2} - p*}{\sqrt{2}}\right| = 10^{-4}$$

$$\boldsymbol{Límite\ inferior}: \mathrm{p} *= \sqrt{2} - 10^{-4}\ x\ \sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{Límite\ superior}: p *= \sqrt{2} + 10^{-4}\ x\ \sqrt{2}$$

$$\left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{\sqrt{2} - p*}{\sqrt{2}}\right| = 10^{-4}$$

V

$$\left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{\sqrt{2} - p*}{\sqrt{2}}\right| = -10^{-4}$$

$$p *= 1{,}414072141 \quad V \quad p *= 1{,}414354984$$

$$p *= \epsilon[1{,}414072141;\ 1{,}414354984]]$$

//

d. $\sqrt[3]{7}$

$$error\ rel = \left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{\sqrt[3]{7} - p*}{\sqrt[3]{7}}\right| = 10^{-4}$$

$$\boldsymbol{Límite\ inferior}: \mathrm{p} *= \sqrt[3]{7} - 10^{-4}\ x\ \sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{Límite\ superior}: p *= \sqrt[3]{7} + 10^{-4}\ x\ \sqrt{2}$$

$$\left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{\sqrt[3]{7} - p*}{\sqrt[3]{7}}\right| = 10^{-4}$$

V

$$\left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{\sqrt[3]{7} - p*}{\sqrt[3]{7}}\right| = -10^{-4}$$

$$p *= 1{,}91273989 \quad V \quad p *= 1{,}913122476$$

$$p *= \epsilon[1{,}91273989;\ 1{,}913122476]$$

4. Use la aritmética de redondeo de tres dígitos para realizar lo siguiente. Calcule los errores absoluto y relativo con el valor exacto determinado para por lo menos cinco dígitos.

a. $\frac{\frac{13}{14}-\frac{5}{7}}{2e-5.4}$

$p = 0{,}58606\ x\ 10^1 :\quad p *= 0.586\ x\ 10^1$

$error\ abs = |p - p *| = 6\ x\ 10^{-4}$

$$error\ rel = \left|\frac{p - p *}{p}\right| = 1{,}024\ x\ 10^{-4}$$

b. $-10\pi + 6e - \frac{3}{61}$

$p = -0{,}15155x\ 10^2 :\quad p *= -0.152\ x\ 10^2$

$error\ abs = |p - p *| = 0.045$

$$error\ rel = \left|\frac{p - p *}{p}\right| = 2{,}9693x\ 10^{-3}$$

c. $\left(\frac{2}{9}\right) \cdot \left(\frac{9}{11}\right)$

$p = 0{,}18182 :\quad p *= 0{,}182$

$error\ abs = |p - p *| = 1{,}8\ x\ 10^{-4}$

$$error\ rel = \left|\frac{p - p *}{p}\right| = 9{,}899\ x\ 10^{-4}$$

d. $\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}$

$p = 0{,}23958\ x\ 10^2 :\ p *= 0{,}240\ x\ 10^2$

$error\ abs = |p - p *| = 0{,}042$

$$error\ rel = \left|\frac{p - p *}{p}\right| = 1{,}753\ x\ 10^{-3}$$

5. Los primeros tres términos diferentes a cero de la serie de Maclaurin para la función arcotangente son: $x - (1/3)x^3 + (1/5)x^5$. Calcule los errores absoluto y relativo en las siguientes aproximaciones de π mediante el polinomio en lugar del arcotangente:

a. $4\left[\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

$\pi = 3{,}145576132 = p*$

$$error\ abs = |\pi - p*| = 3{,}98\ x\ 10^{-3}$$

$$error\ rel = \left|\frac{\pi - p*}{\pi}\right| = 1{,}267x\ 10^{-3}$$

b. $16\ \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4\ \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$

$\pi = 3{,}141621029 = p*$

$$error\ abs = |\pi - p*| = 2{,}83\ x\ 10^{-5}$$

$$error\ rel = \left|\frac{\pi - p*}{\pi}\right| = 9{,}03\ x\ 10^{-6}$$

6. El número e se puede definir por medio de $e = \sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$, donde $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ para $n \neq 0$ y $0! = 1$. Calcule los errores absoluto y relativo en la siguiente aproximación de e:

a. $\sum_{n=0}^{5}(1/n!)$

$n = 5$

$$S_5 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$$

$S_5 = 2{,}716666667 = p*$

$$error\ abs = |e - p*| = 1{,}615\ x\ 10^{-3}$$

$$error\ rel = \left|\frac{e - p*}{e}\right| = 5{,}94\ x\ 10^{-4}$$

b. $\sum_{n=0}^{10}(1/n!)$

$n = 10$

$$S_5 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots + n = 10$$

$S_5 = 2{,}718281801 = p*$

$$error\ abs = |e - p*| = 2{,}731\ x\ 10^{-8}$$

$$error\ rel = \left|\frac{e - p*}{e}\right| = 1{,}004\ x\ 10^{-8}$$

7. Suponga que dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) se encuentran en línea recta con $y_1 \neq y_0$. Existen dos fórmulas para encontrar la intersección x de la línea:

$$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0} \text{ y } x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0}$$

a. Use los datos $(x_0, y_0) = (1.31, 3.24)$ y $(x_1, y_1) = (1.93, 5.76)$ y la aritmética de redondeo de tres dígitos para calcular la intersección con x de ambas maneras. ¿Cuál método es mejor y por qué?

1) $x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0} = 0{,}5128571429$

2) $x = -\frac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0} = 0{,}5128571429$

En este caso, ambos métodos llegan al mismo resultado numérico, lo que implica que cualquiera podría ser usado. Sin embargo, el Método 1 es más directo y sencillo de aplicar porque simplemente involucra un cálculo de fracciones con multiplicaciones y restas, sin introducir el signo negativo extra del Método 2.