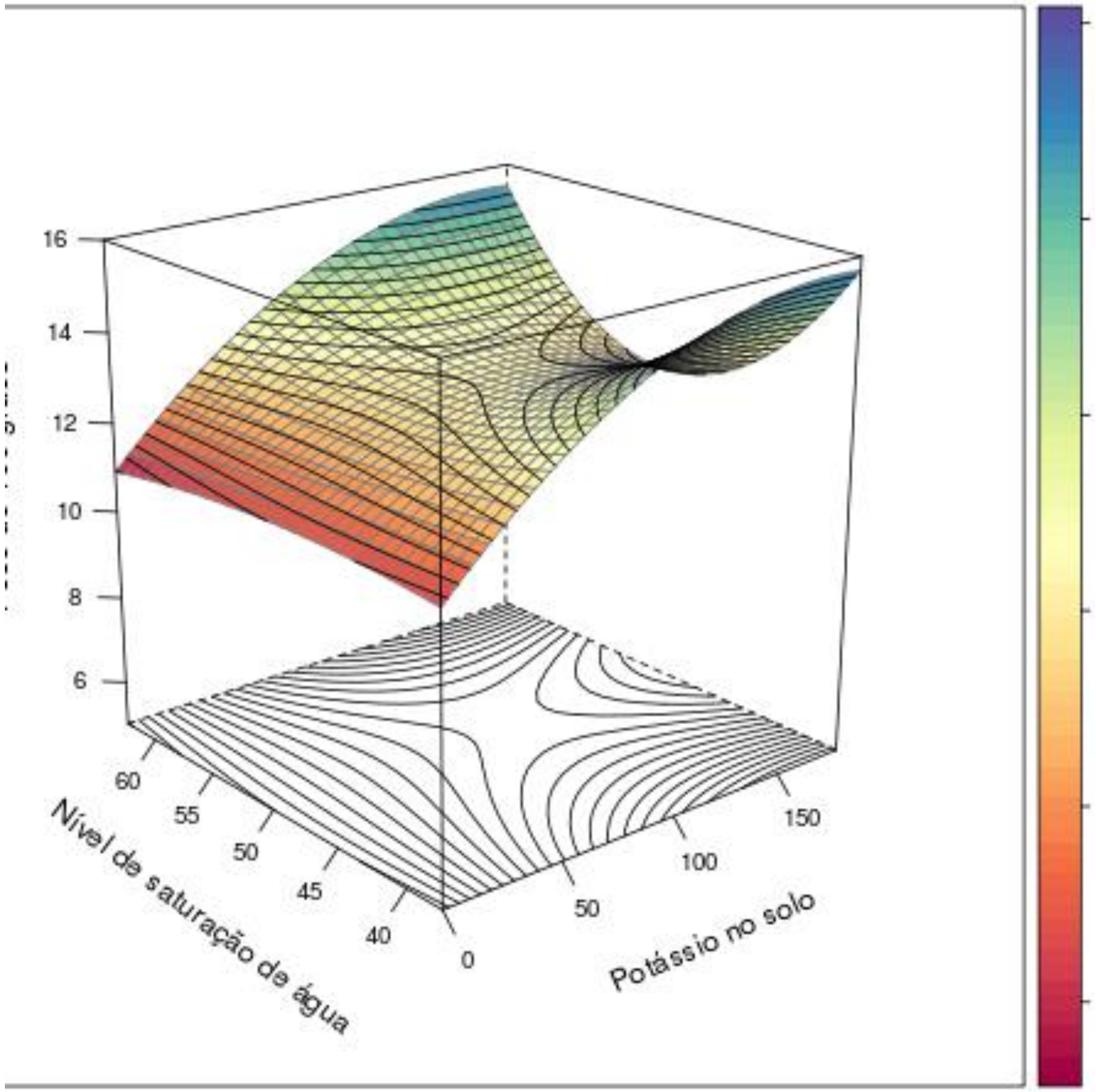
ALÉM DA LINEARIDADE

FLÁVIA MORAES

MESTRE ECONOMIA, FGV-RJ



1. Introdução

2. Regressão Polinomial

3. Step Functions

4. Splines

5. Local Regression

6. Generalize Additive Models

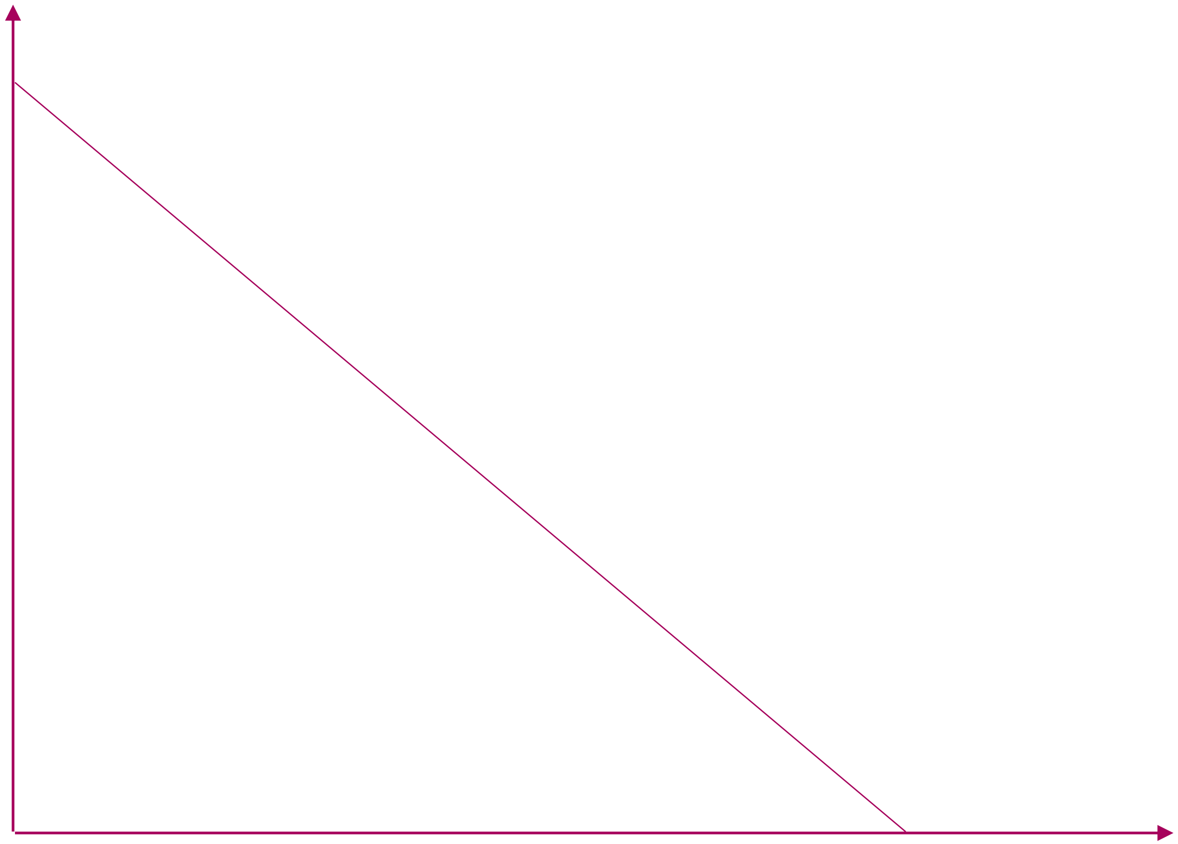
Por que todo mundo **AMA** Regressões Lineares?

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

1. **Introdução**
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

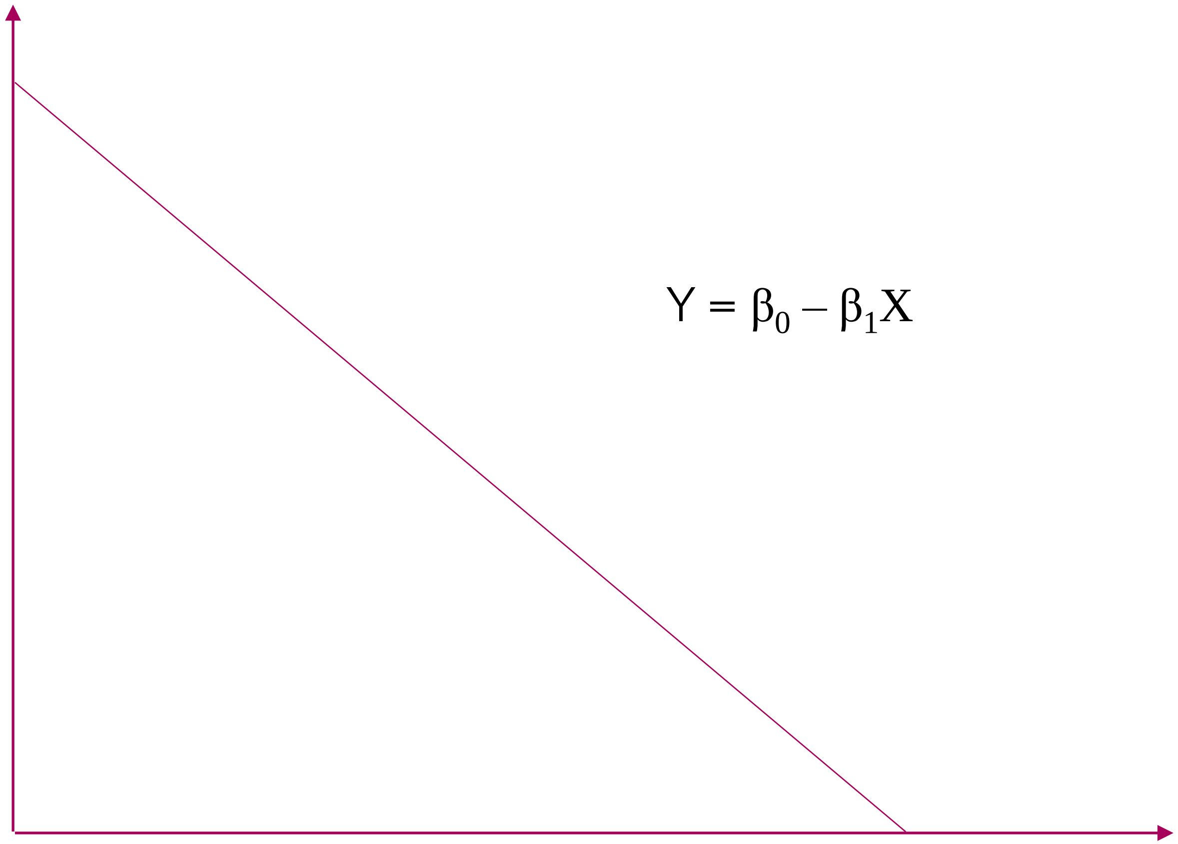
1. **Introdução**
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

1. **Introdução**
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models



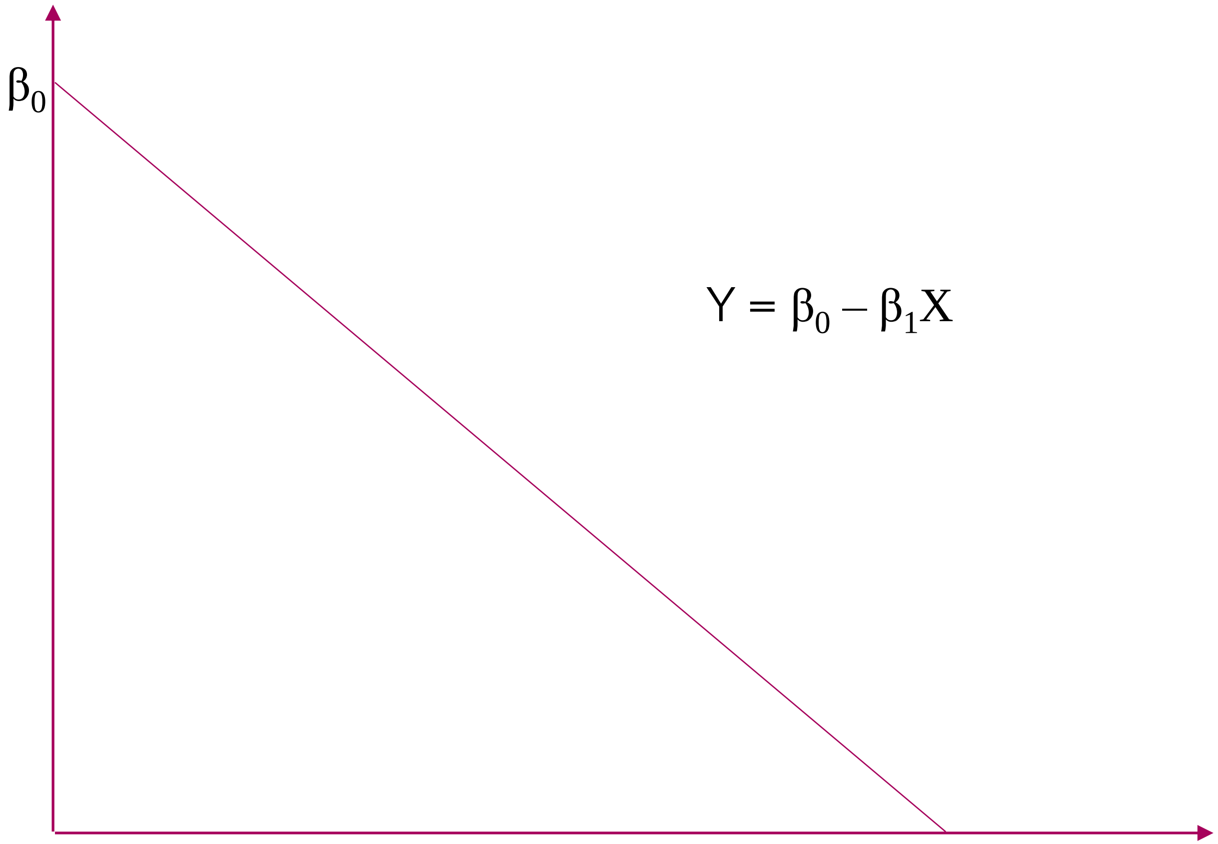
1. Introdução

2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

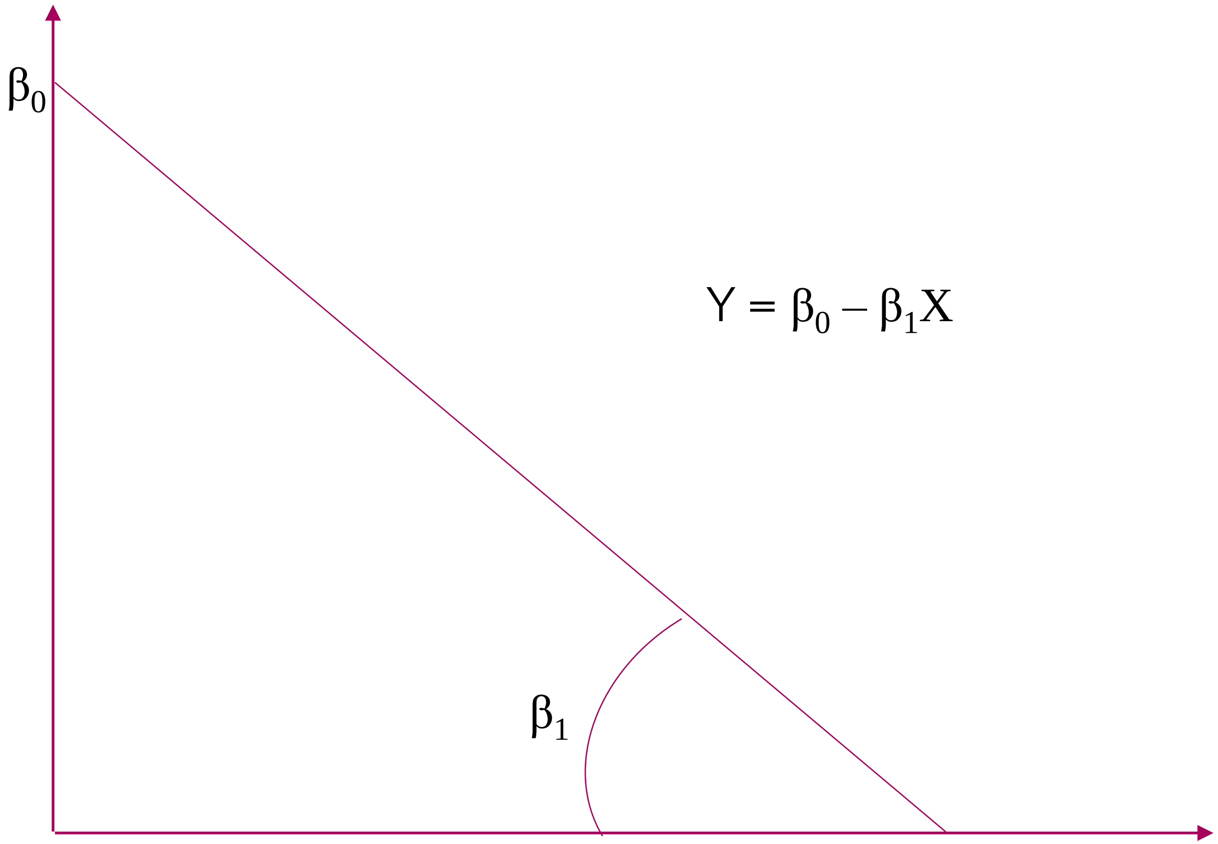


1. Introdução

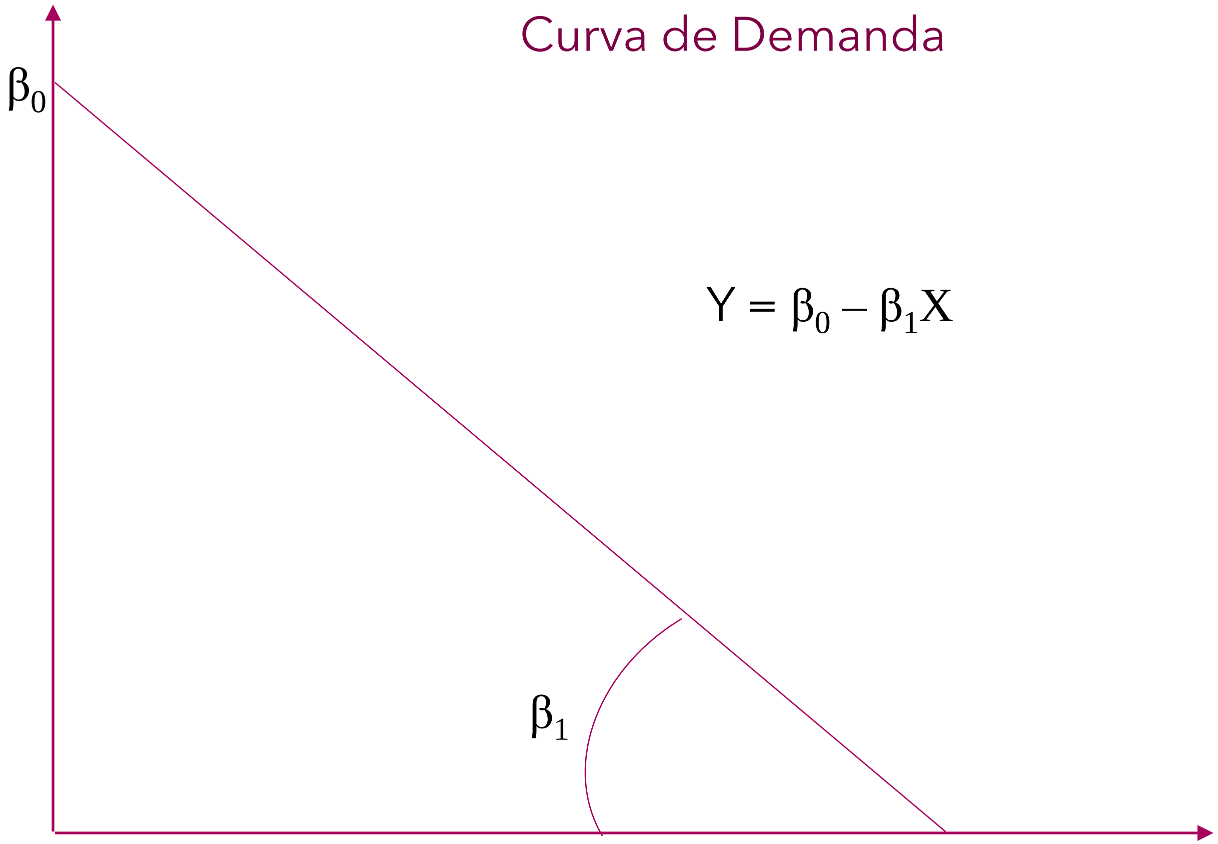
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models



1. **Introdução**
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

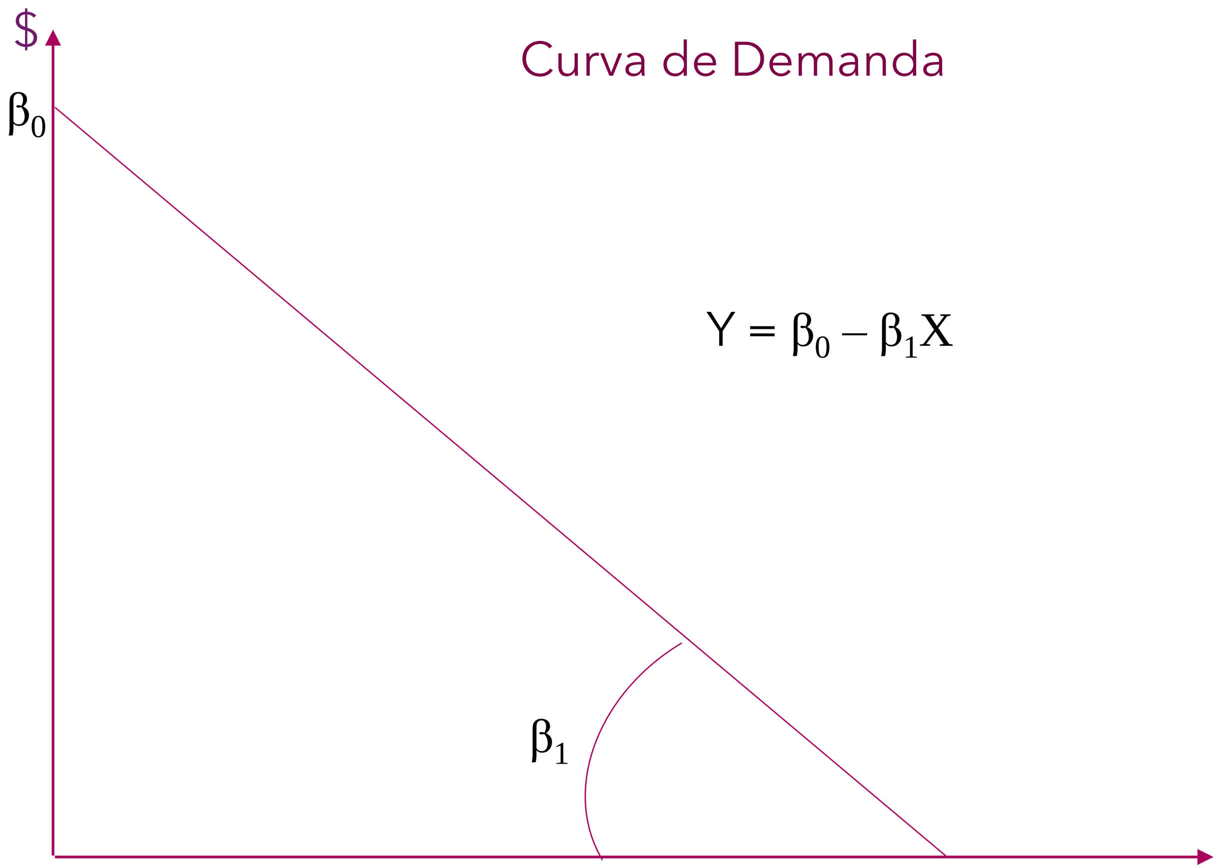


1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models



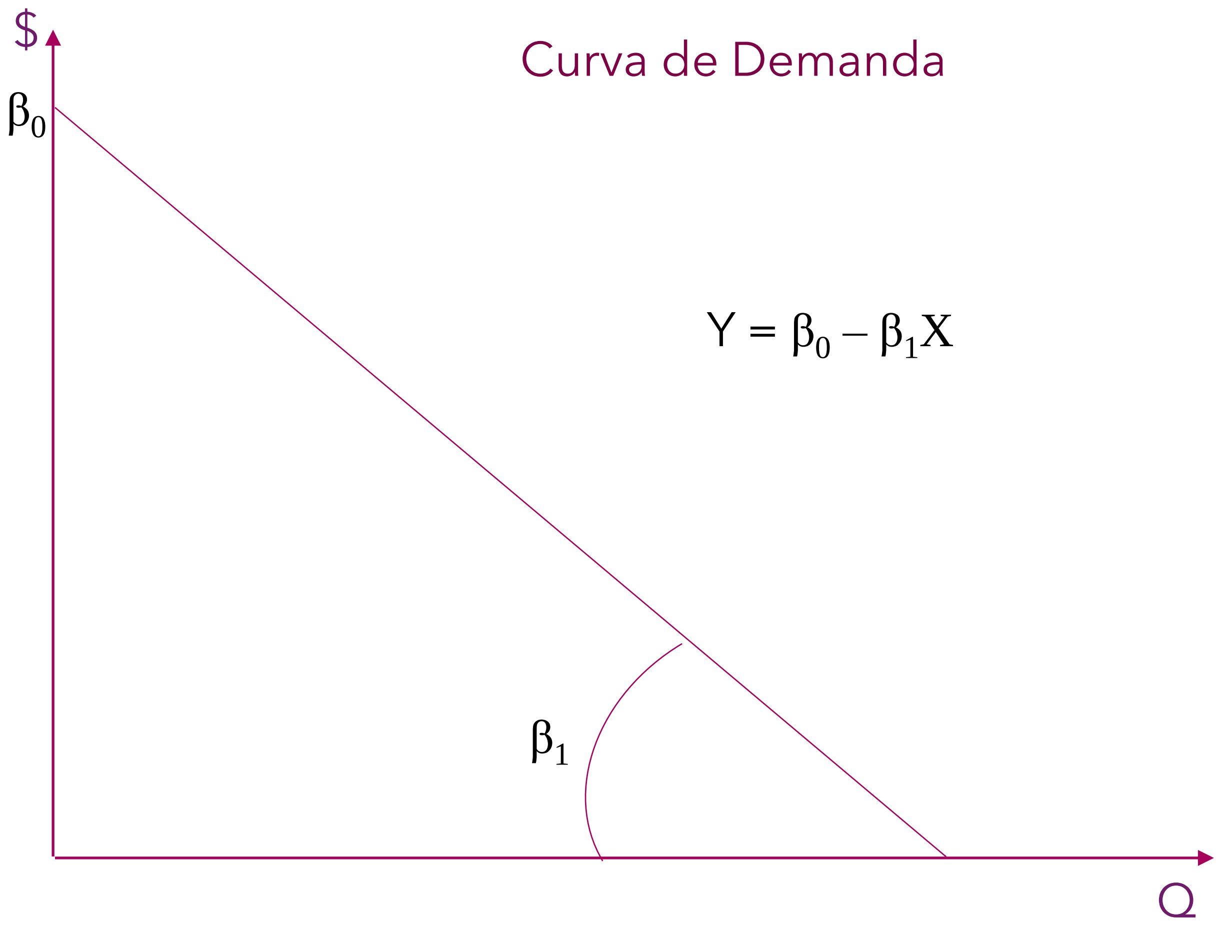
1. Introdução

2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models



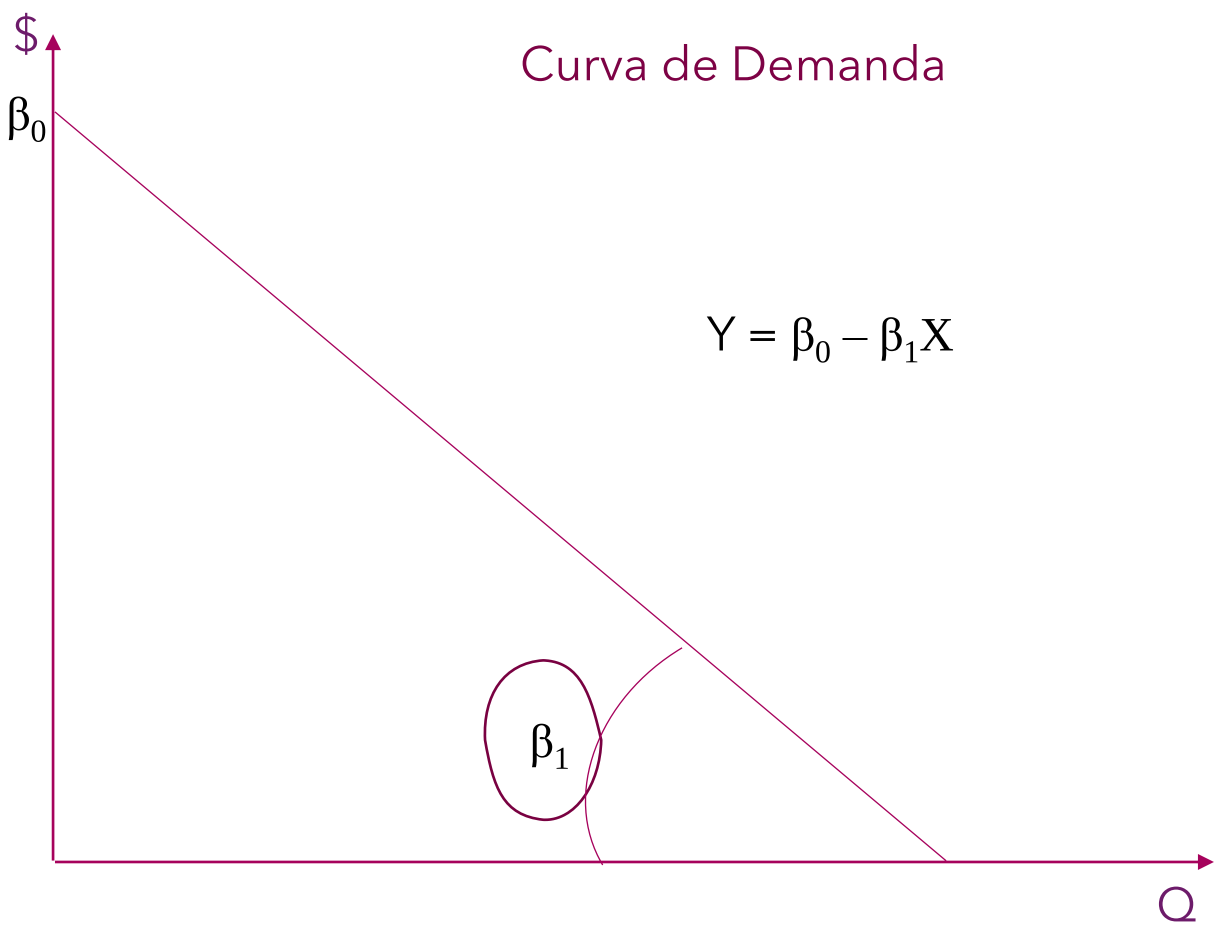
1. Introdução

2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models



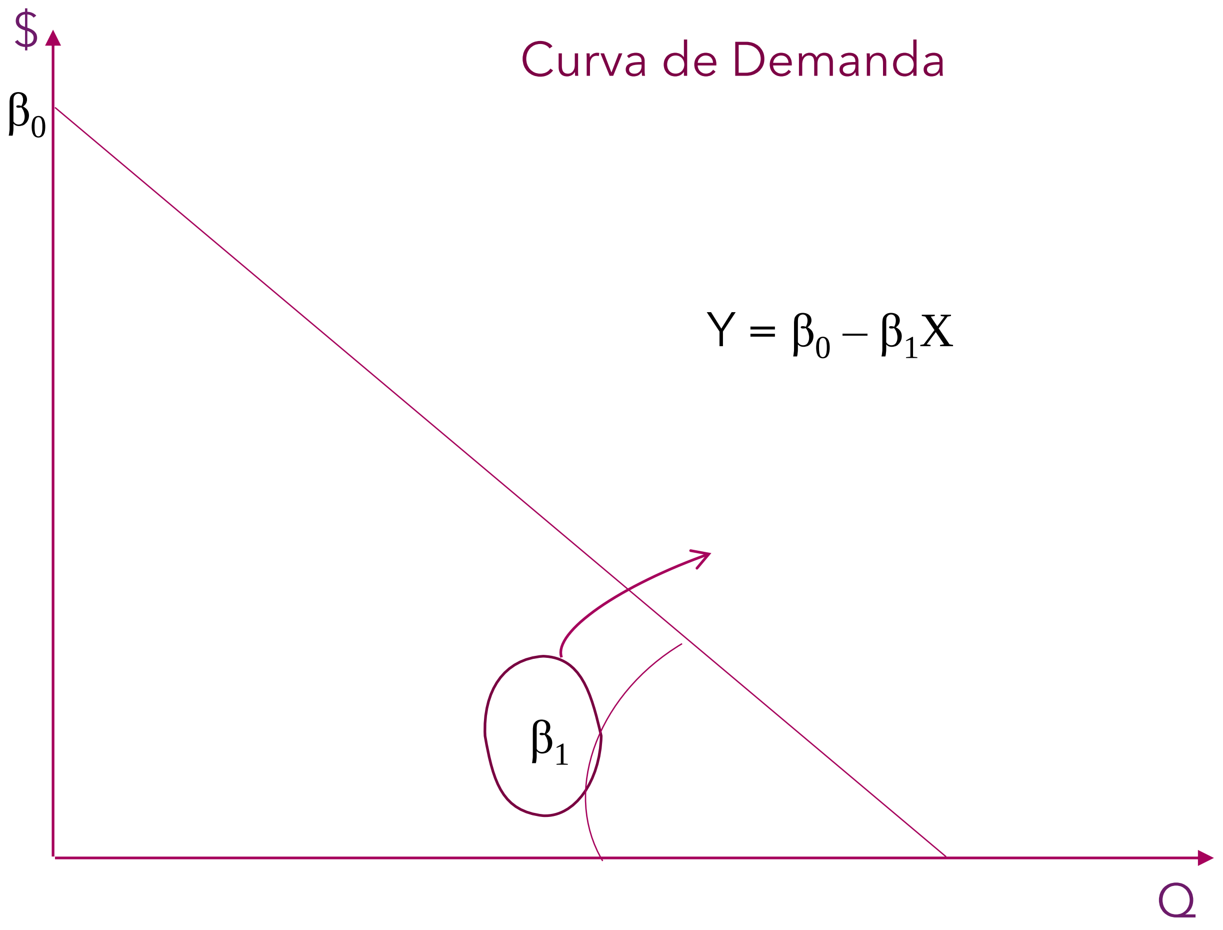
1. **Introdução**

2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models



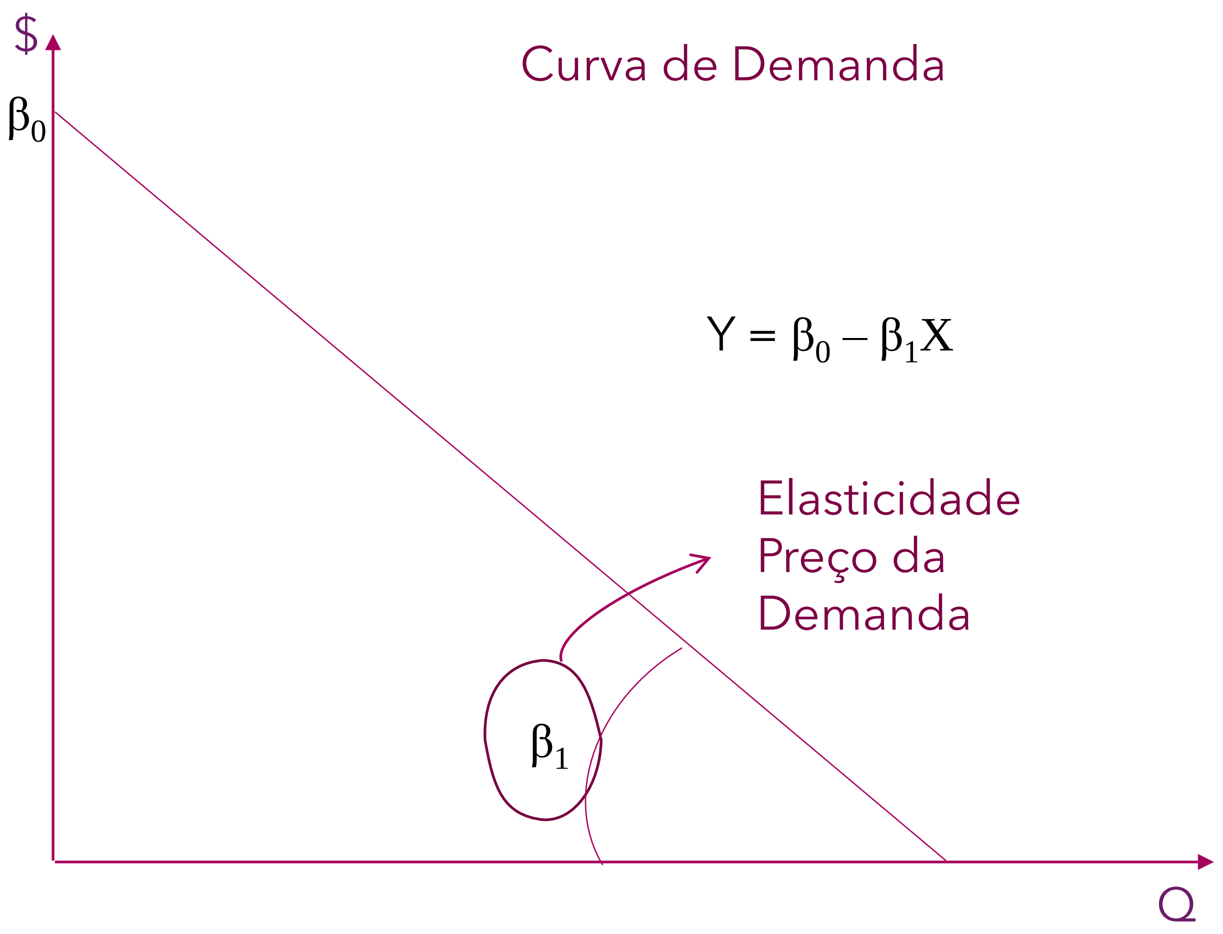
1. Introdução

2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models



1. Introdução

2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models



1. **Introdução**
2. **Regressão Polinomial**
3. **Step Functions**
4. **Splines**
5. **Local Regression**
6. **Generilize Additive Models**

Regressões Lineares são

Intuitivas

1. **Introdução**
2. **Regressão Polinomial**
3. **Step Functions**
4. **Splines**
5. **Local Regression**
6. **Generilize Additive Models**

Regressões Lineares são

Intuitivas

Fáceis de Interpretar

1. **Introdução**
2. **Regressão Polinomial**
3. **Step Functions**
4. **Splines**
5. **Local Regression**
6. **Generilize Additive Models**

Regressões Lineares são

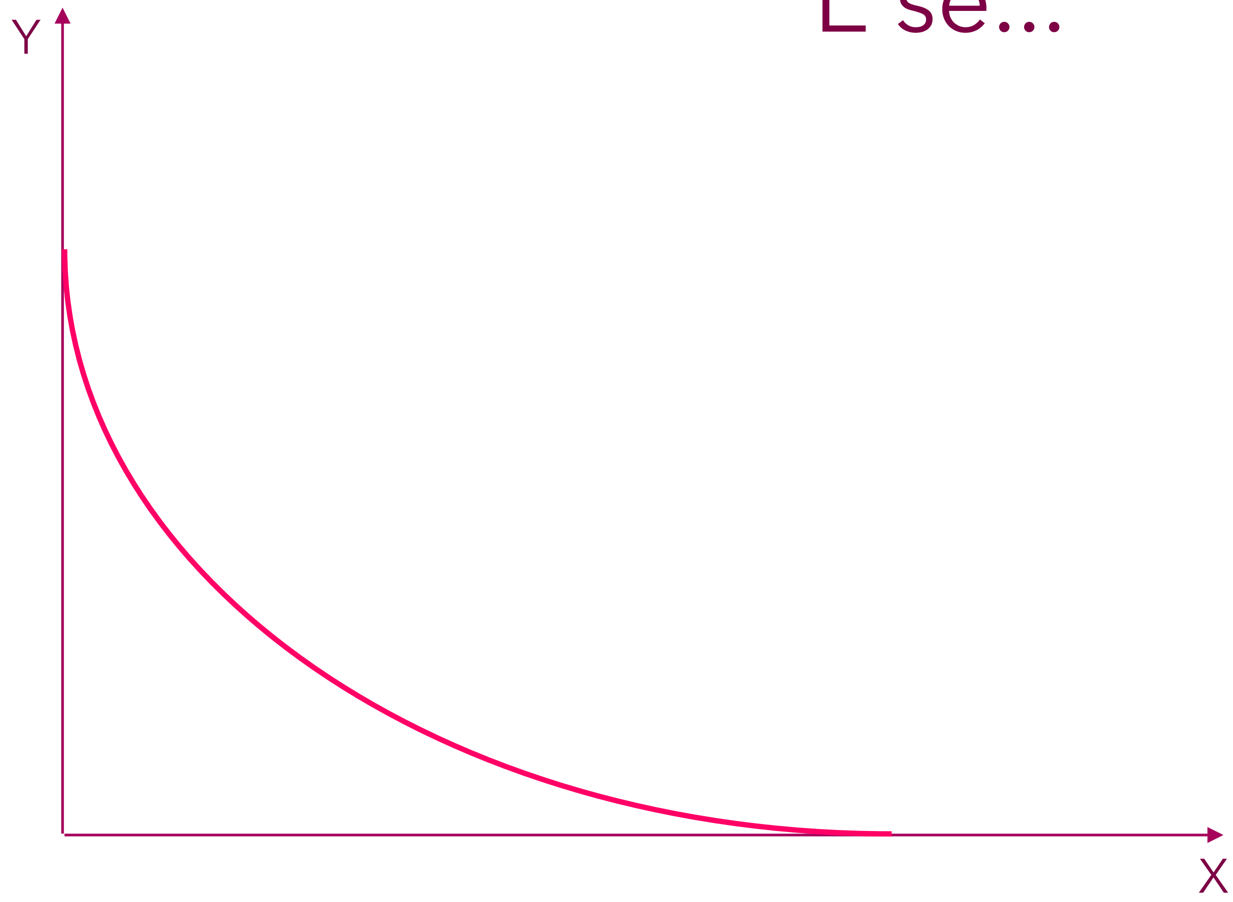
Intuitivas

Fáceis de Interpretar

Boas Inferências

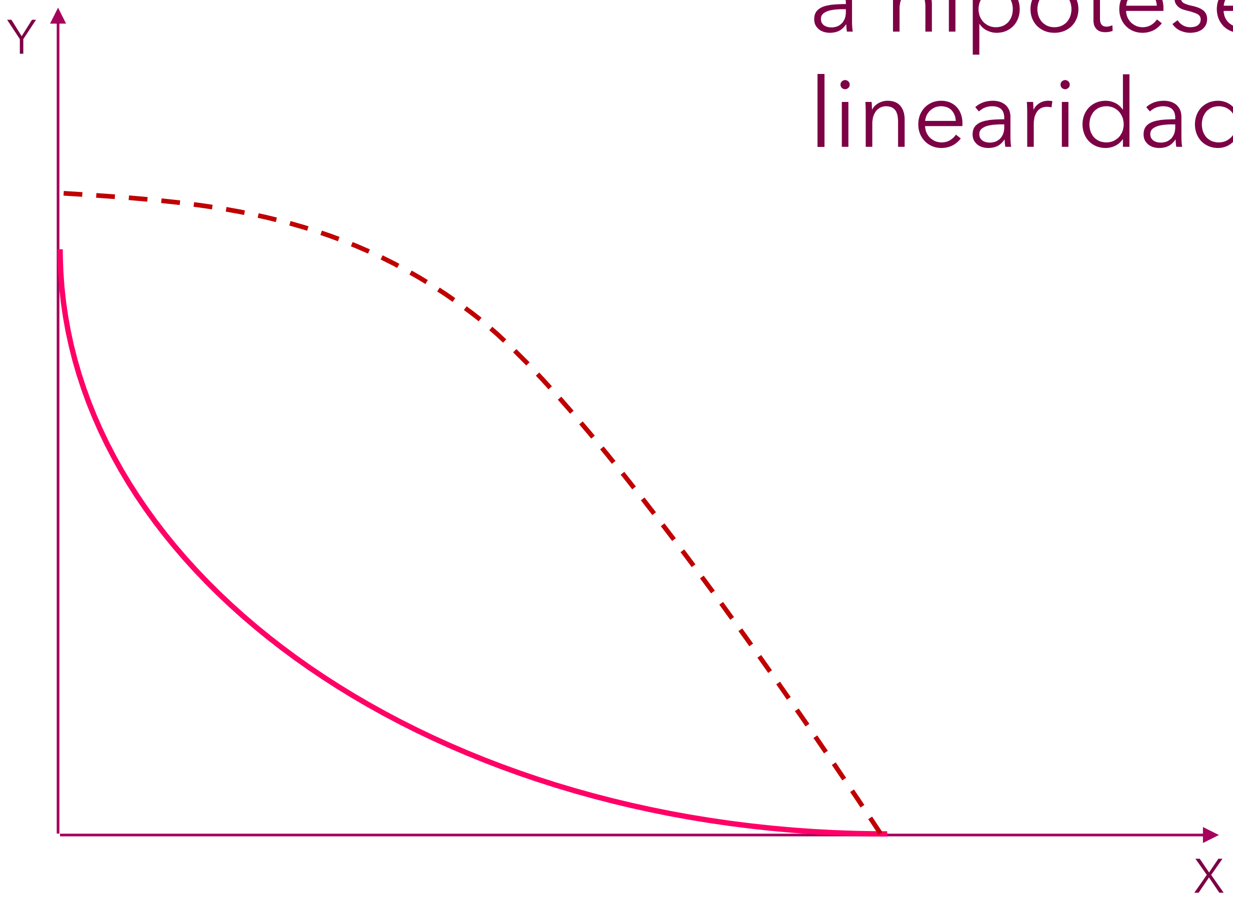
1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

E se...



1. Introdução

2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models



a hipótese de linearidade...

1. Introdução

2. Regressão Polinomial

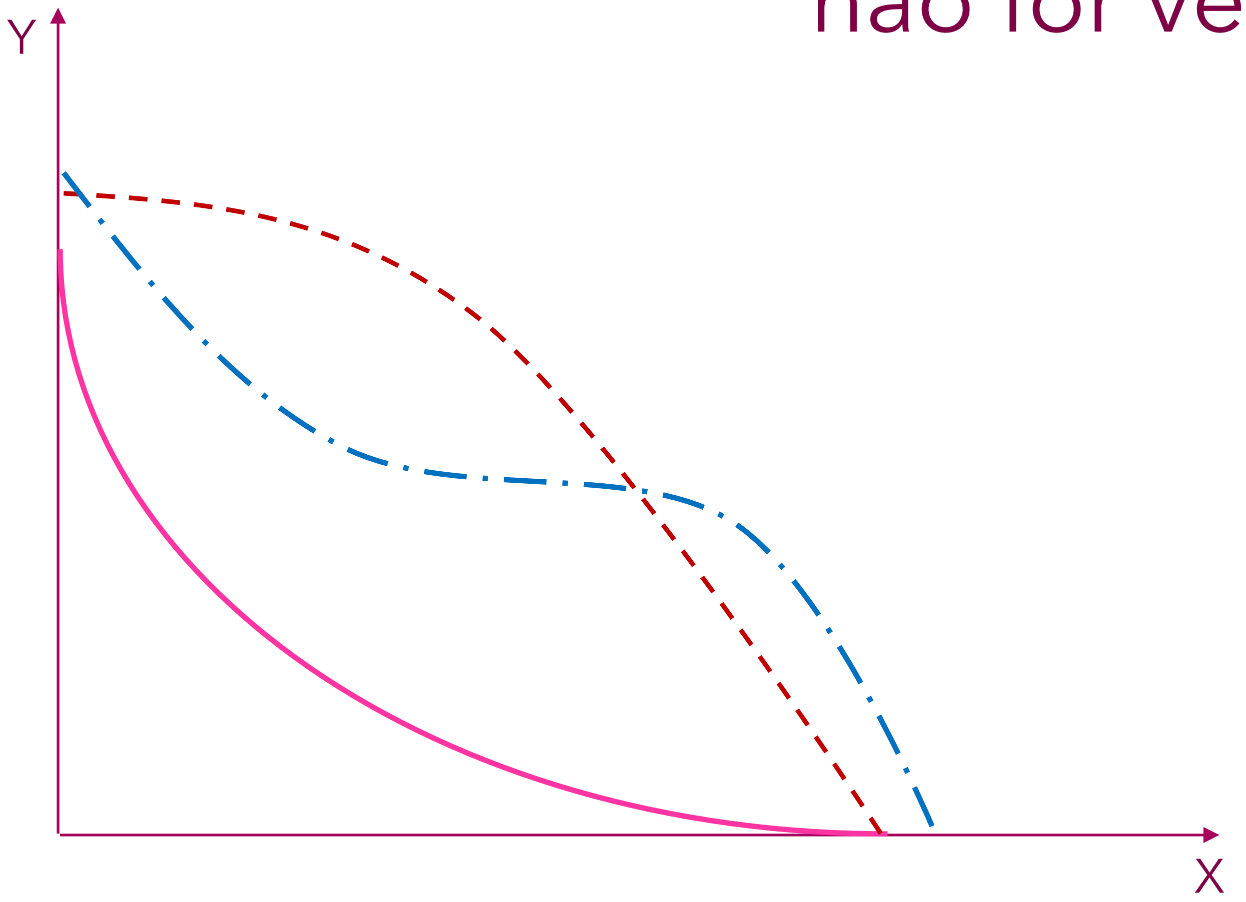
3. Step Functions

4. Splines

5. Local Regression

6. Generilize Additive Models

não for verdadeira????



1. Introdução

2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

1. Introdução
2. **Regressão Polinomial**
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Uma primeira forma de flexibilizar a hipótese de linearidade é acrescentando fatores que são a variável explicativa elevada a uma potência.

1. Introdução
2. **Regressão Polinomial**
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Por exemplo, uma regressão cúbica usa três variáveis x, x^2 e x^3.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 + \varepsilon_i$$

onde ε_i é o erro.

1. Introdução
2. **Regressão Polinomial**
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

No limite, uma função polinomial de grau **d** *pode ser definida como*

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \ldots + \beta_d x_i^d + \varepsilon_i \quad (7.1)$$

onde ε_i é o erro.

1. Introdução
2. **Regressão Polinomial**
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Note que os coeficientes da equação (7.1) podem ser facilmente estimados usando o Método dos Mínimos Quadrados da Regressão Linear, pois temos um modelo linear simples cujos fatores são x_i, x_i^2, x_i^3, ..., x_i^d.

1. Introdução
2. **Regressão Polinomial**
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

1. Introdução

2. Regressão Polinomial

3. Step Functions

4. Splines

5. Local Regression

6. Generilize Additive Models

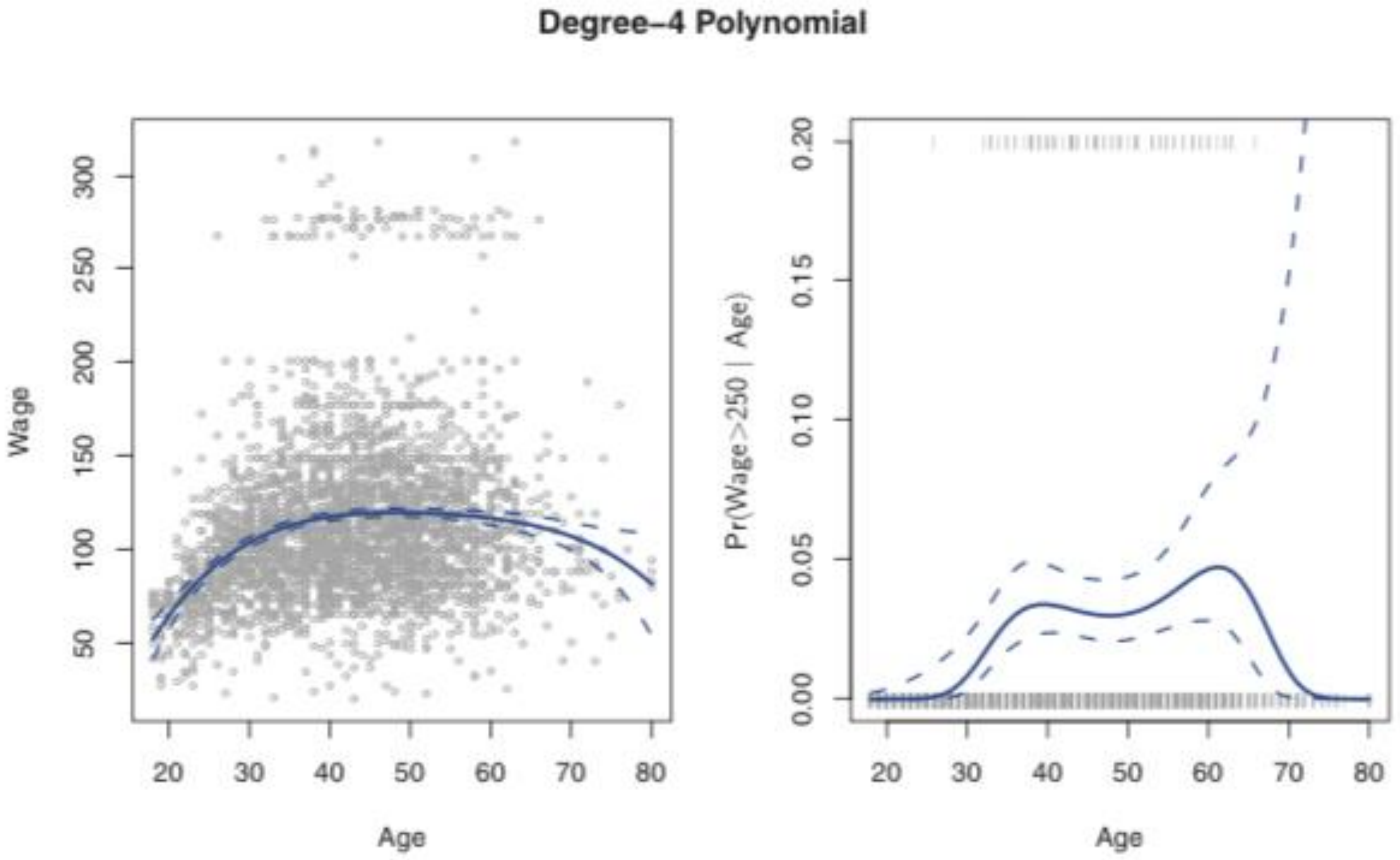


FIGURE 7.1. *The* Wage *data. Left: The solid blue curve is a degree-4 polynomial of* wage *(in thousands of dollars) as a function of* age*, fit by least squares. The dotted curves indicate an estimated 95 % confidence interval. Right: We model the binary event* wage>250 *using logistic regression, again with a degree-4 polynomial. The fitted posterior probability of* wage *exceeding $250,000 is shown in blue, along with an estimated 95 % confidence interval.*

1. Introdução

2. Regressão Polinomial

3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

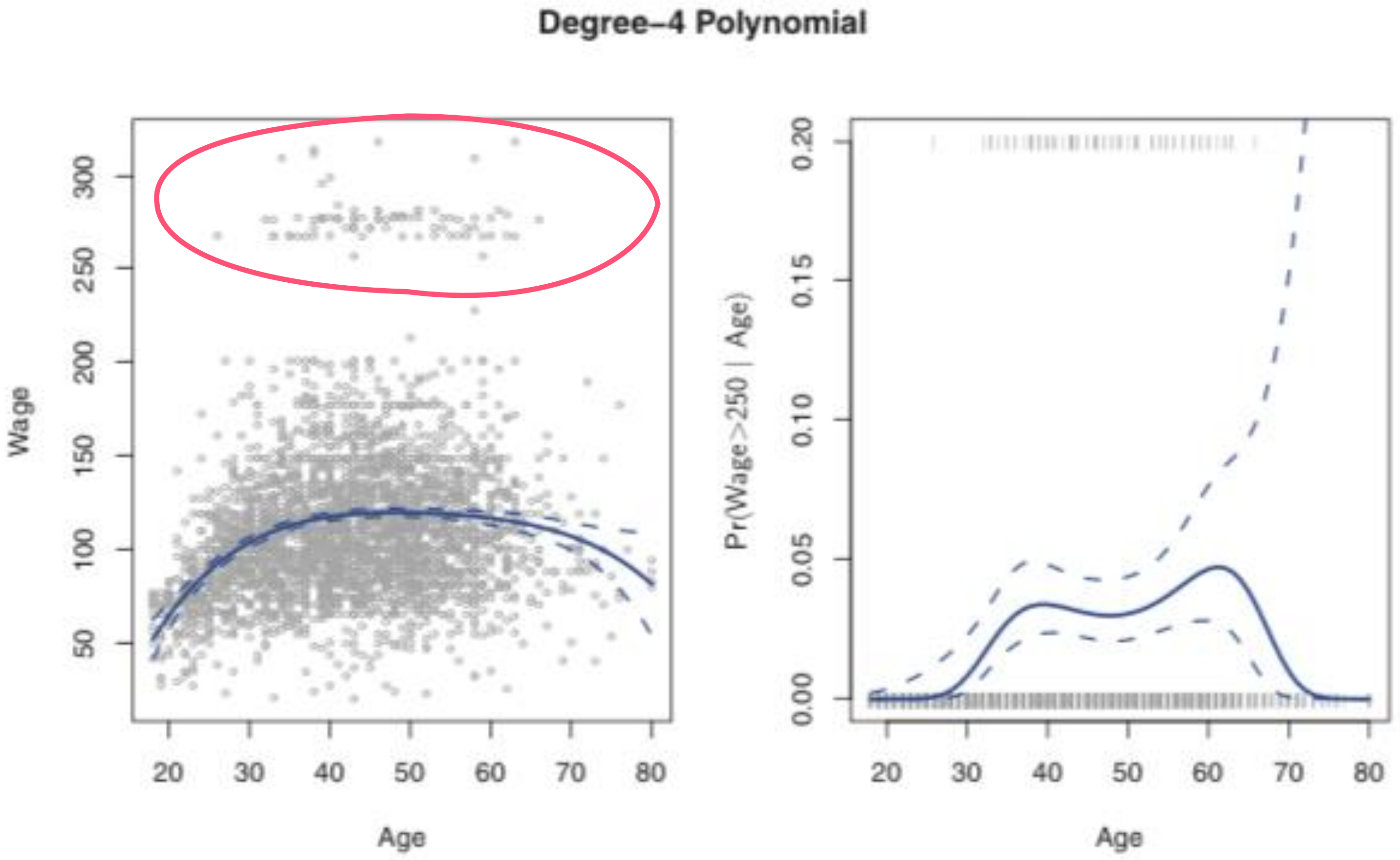


FIGURE 7.1. *The* Wage *data. Left: The solid blue curve is a degree-4 polynomial of* wage *(in thousands of dollars) as a function of* age*, fit by least squares. The dotted curves indicate an estimated 95 % confidence interval. Right: We model the binary event* wage>250 *using logistic regression, again with a degree-4 polynomial. The fitted posterior probability of* wage *exceeding \$250,000 is shown in blue, along with an estimated 95 % confidence interval.*

1. Introdução
2. **Regressão Polinomial**
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Aparentemente existem duas populações:

- *remuneração* **alta** *(>250k)*
- *remuneração* **baixa** *(<250k)*

$$\Pr(y_i > 250 \mid x_i) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_3 x_i^3 + \ldots + \beta_d x_i^d)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_3 x_i^3 + \ldots + \beta_d x_i^d)}$$

1. Introdução

2. **Regressão Polinomial**

3. Step Functions

4. Splines

5. Local Regression

6. Generilize Additive Models

Aparentemente existem duas populações:

- *remuneração* ***alta*** *(>250k)*
- *remuneração* ***baixa*** *(<250k)*

$$\Pr(y_i>250|x_i) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_3 x_i^3 + \ldots + \beta_d x_i^d)}{1+\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_3 x_i^3 + \ldots + \beta_d x_i^d)}$$

1. Introdução
2. **Regressão Polinomial**
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Aparentemente existem duas populações:

- *remuneração* ***alta*** *(>250k)*
- *remuneração* ***baixa*** *(<250k)*

$$\Pr(y_i > 250 \mid x_i) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_3 x_i^3 + \ldots + \beta_d x_i^d)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_3 x_i^3 + \ldots + \beta_d x_i^d)} \quad (7.3)$$

Logistic Regression

1. Introdução

2. Regressão Polinomial

3. Step Functions

4. Splines

5. Local Regression

6. Generilize Additive Models

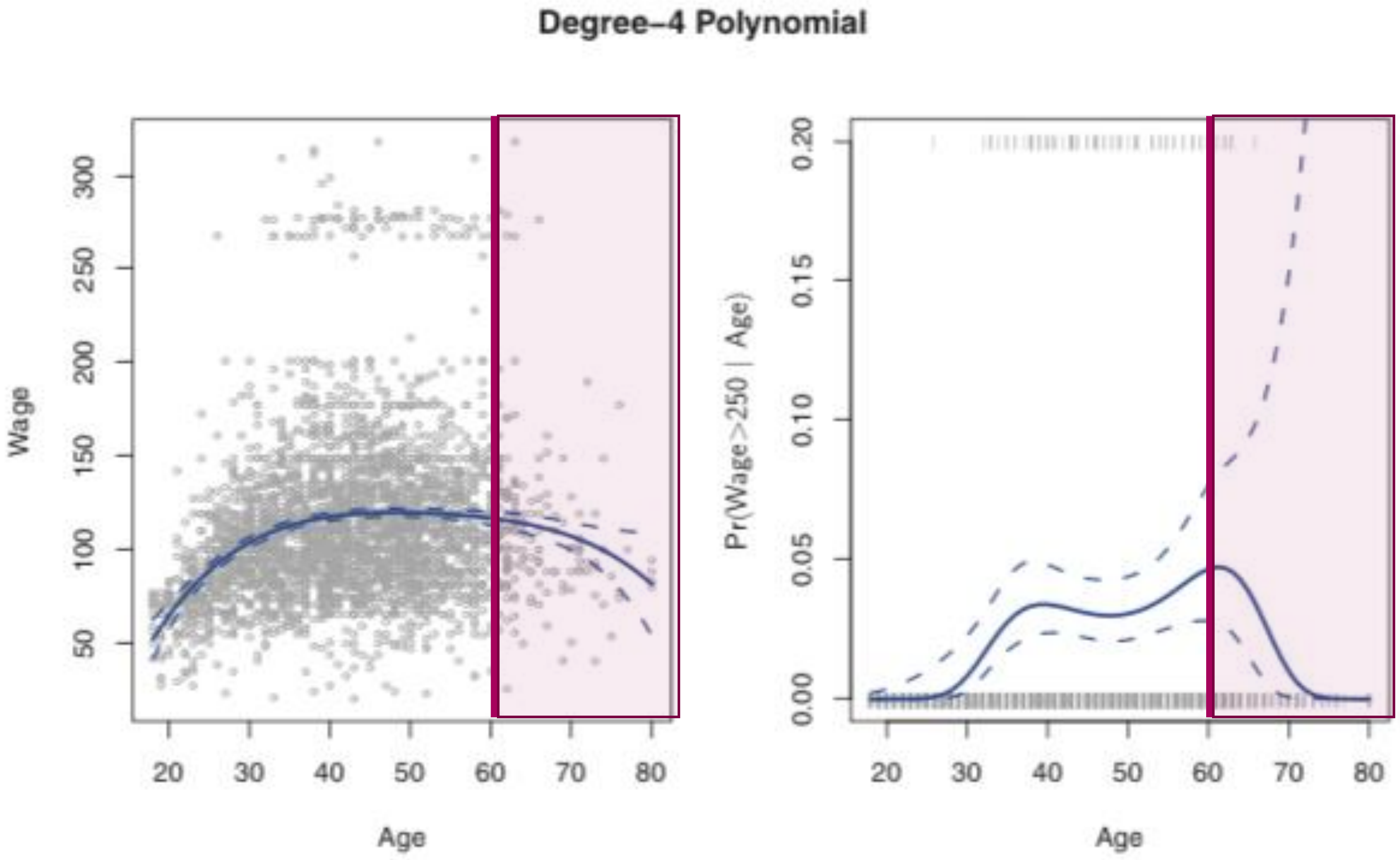


FIGURE 7.1. *The* Wage *data. Left: The solid blue curve is a degree-4 polynomial of* wage *(in thousands of dollars) as a function of* age*, fit by least squares. The dotted curves indicate an estimated 95 % confidence interval. Right: We model the binary event* wage>250 *using logistic regression, again with a degree-4 polynomial. The fitted posterior probability of* wage *exceeding $250,000 is shown in blue, along with an estimated 95 % confidence interval.*

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Podemos converter a variável contínua X em k variáveis categóricas ordenadas, quebrando o intervalo de X em vários compartimentos. Para cada nível, calcularemos um parâmetro β_k.

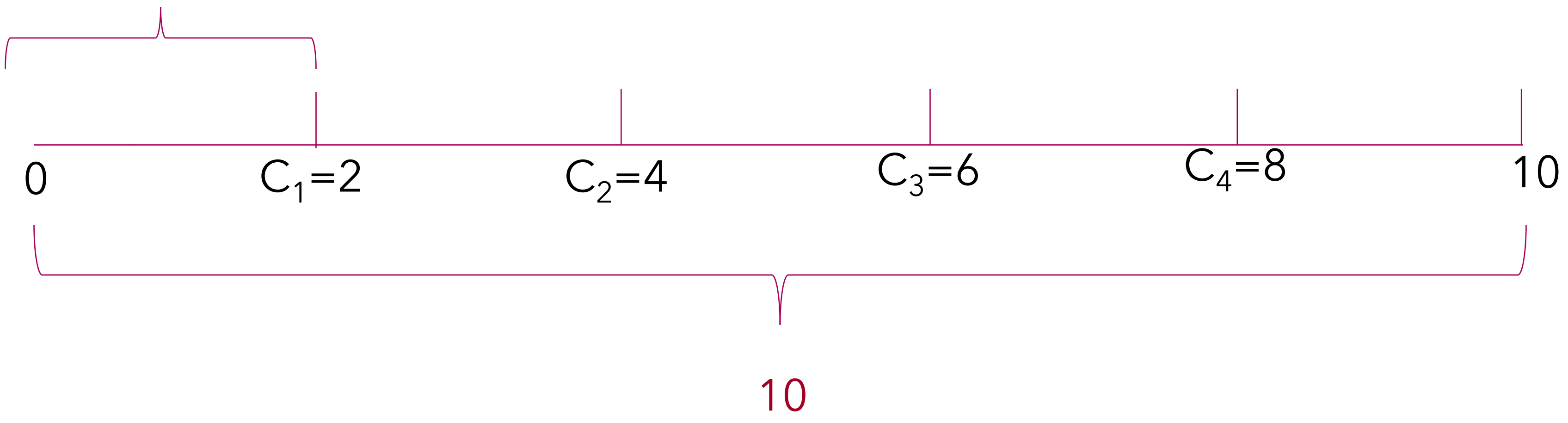
1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. **Step Functions**
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Exemplo:

Vamos pegar o intervalo de 0 a 10 e definir 4 pontos de corte que vão determinar 5 intervalos.

$C_1 = I(X<2)$ → 1° intervalo

Se x estiver no primeiro intervalo, C_1 vai assumir o valor de 1 e todos demais assumirão o valor zero

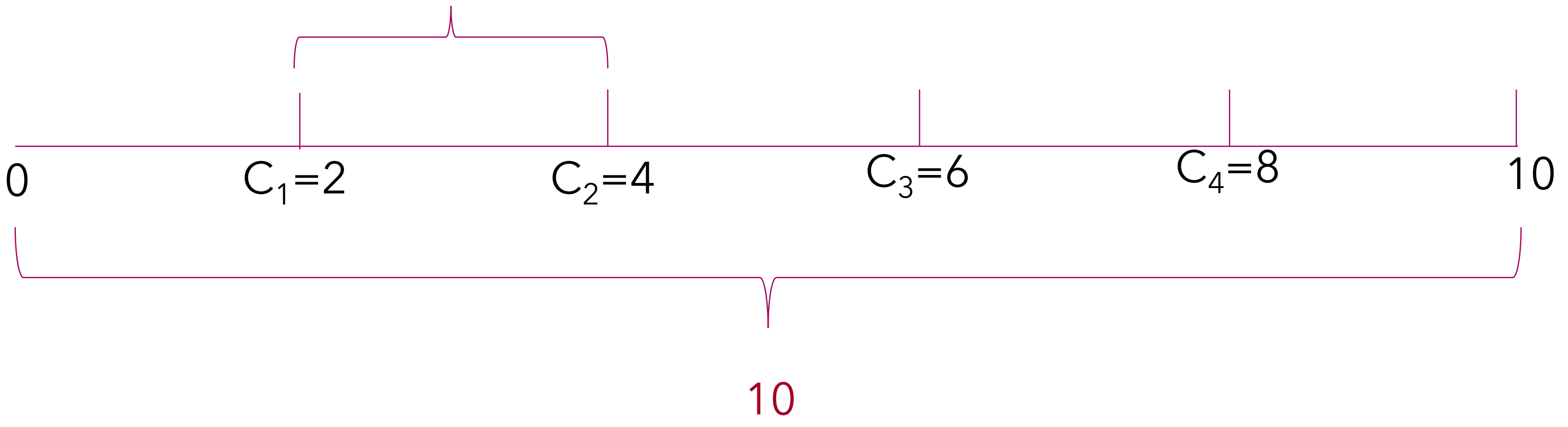


1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Exemplo:

Se x estiver no segundo intervalo, C_2 vai assumir o valor de 1 e todos demais assumirão o valor zero

$C_2 = I(2 \leq X < 4)$ → 2° intervalo

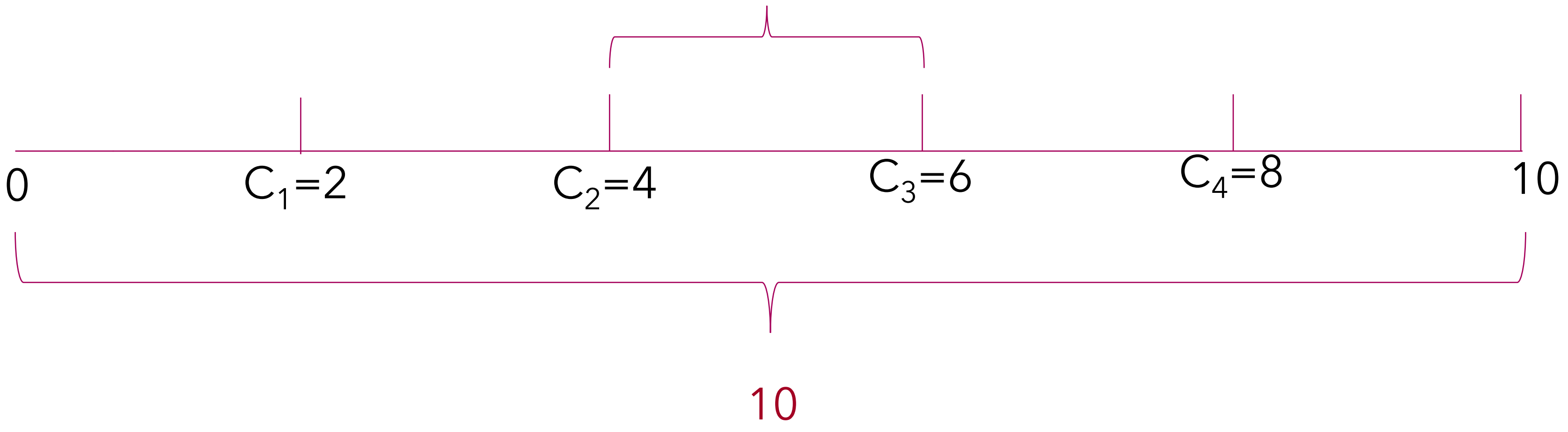


1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. **Step Functions**
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Exemplo:

Se x estiver no terceiro intervalo, C_3 vai assumir o valor de 1 e todos demais assumirão o valor zero

$C_3 = I(4 \leq X < 6)$ → 3º intervalo



Exemplo:

Se x estiver no primeiro intervalo, C_4 vai assumir o valor de 1 e todos demais assumirão o valor zero

4° intervalo ← $C_4 = I(6 \leq X < 8)$

0 — $C_1=2$ — $C_2=4$ — $C_3=6$ — $C_4=8$ — 10

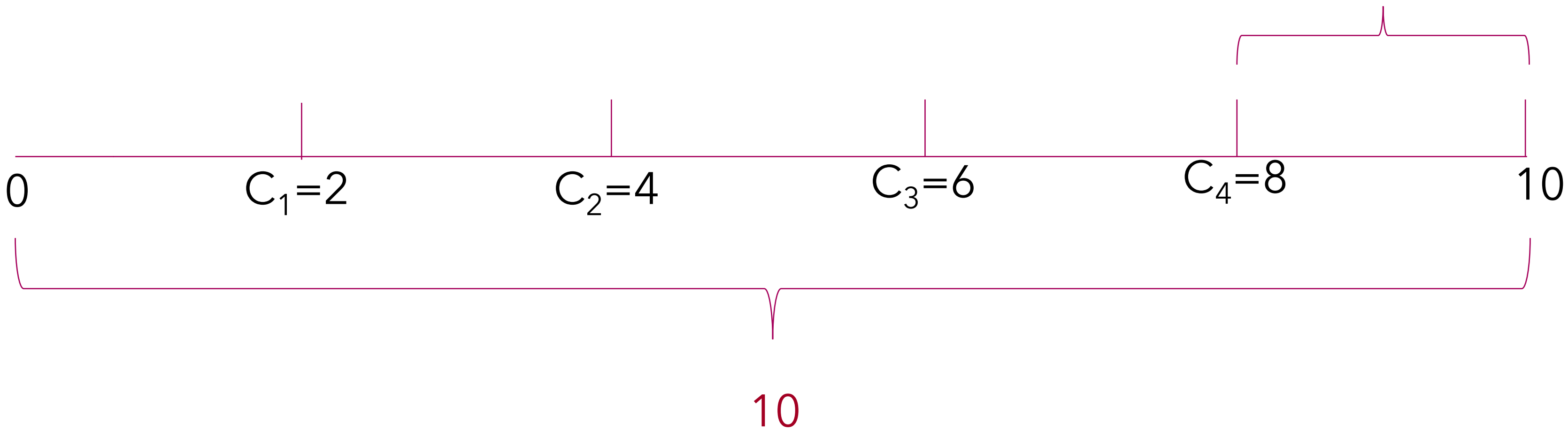
10

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. **Step Functions**
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Exemplo:

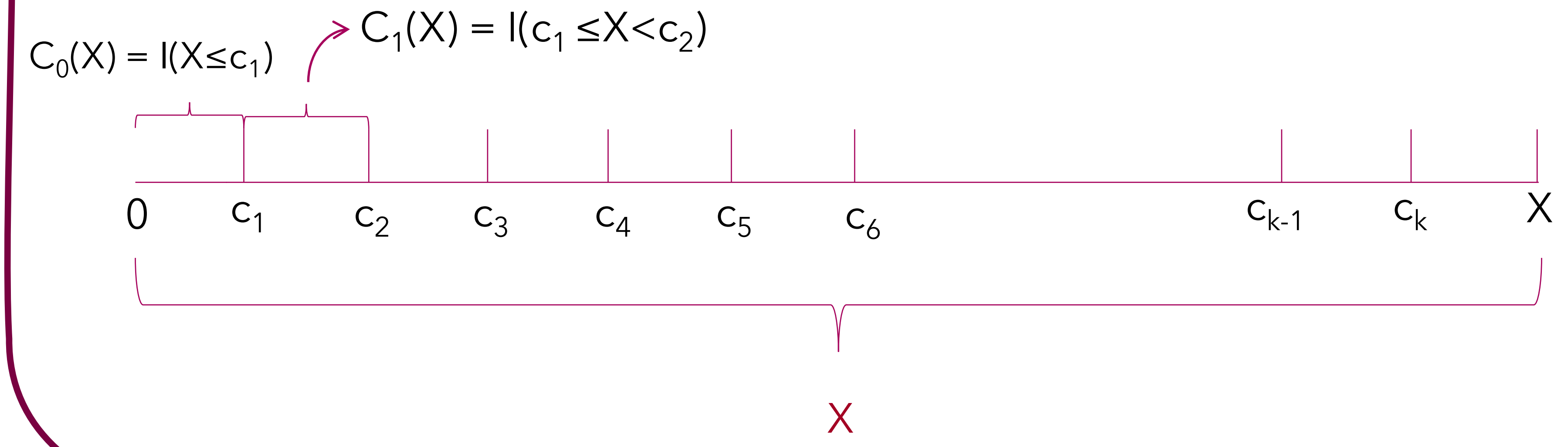
Se x estiver no primeiro intervalo, C_5 vai assumir o valor de 1 e todos demais assumirão o valor zero

5º intervalo ← $C_5 = I(8 \leq X < 10)$



1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. **Step Functions**
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Podemos, portanto, definir k pontos de corte no intervalo X, criando (k+1) variáveis de nível (dummy variables).



1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Vamos então estimar pelo Método dos Mínimos Quadrados uma constante para cada intervalo (ou nível) de X, segundo a equação

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 C_1(x_i) + \beta_2 C_2(x_i) + \ldots + \beta_k C_k(x_i) + \varepsilon_i \quad (7.5)$$

Onde, para cada valor de x, no máximo um dos C_1, C_2,...,C_k pode ser não-nulo.

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. **Step Functions**
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Note que
(1) O valor de β_j representa o acréscimo médio na variável y quando x assume o valor dentro do intervalo j;
(2) Quando forçamos um valor constante dentro dos intervalos, podemos perder tendências importantes

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. **Step Functions**
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

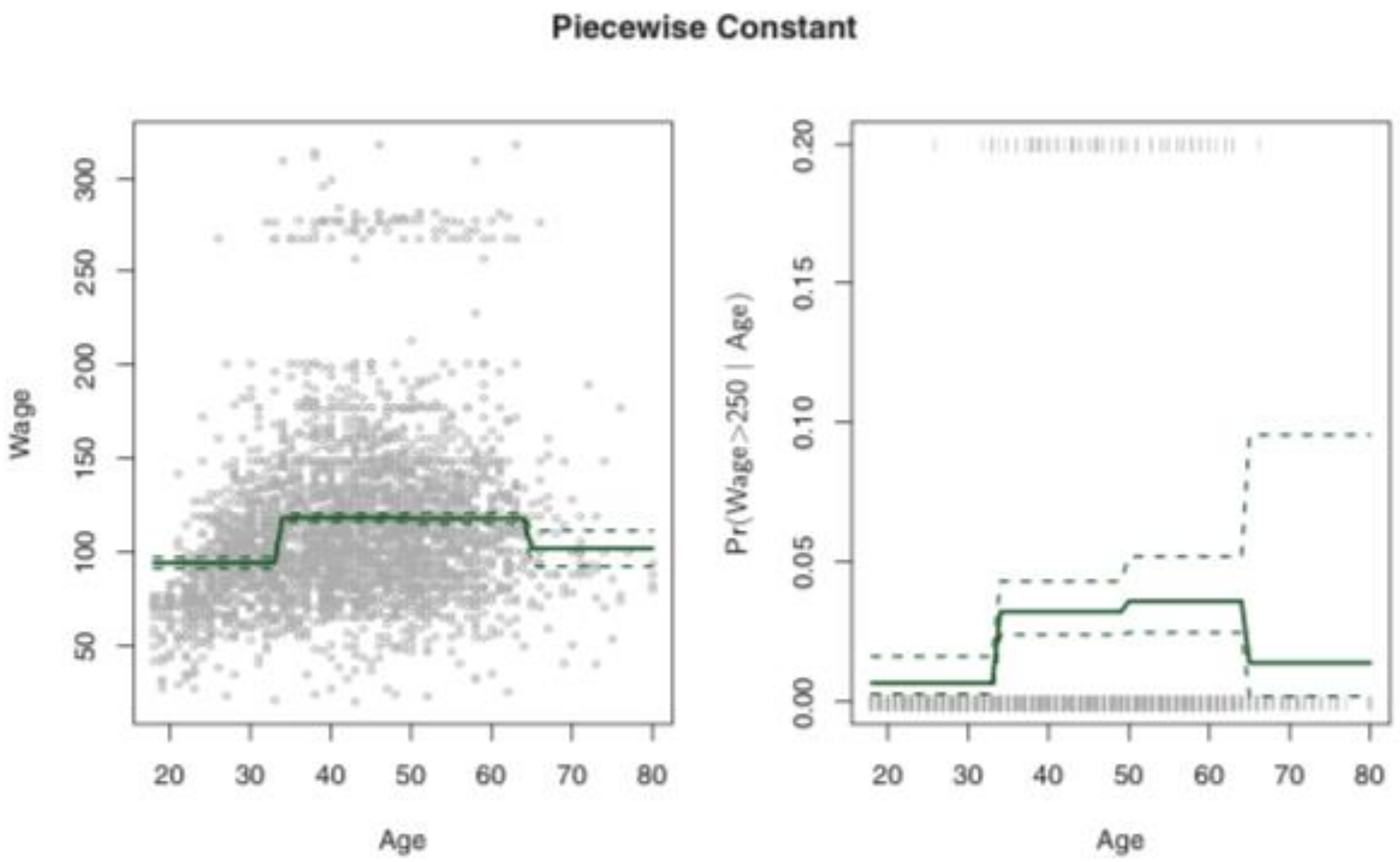


FIGURE 7.2. *The* Wage *data. Left: The solid curve displays the fitted value from a least squares regression of* wage *(in thousands of dollars) using step functions of* age*. The dotted curves indicate an estimated 95 % confidence interval.* Right: *We model the binary event* wage>250 *using logistic regression, again using step functions of* age*. The fitted posterior probability of* wage *exceeding* \$250,000 *is shown, along with an estimated 95 % confidence interval.*

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. **Step Functions**
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

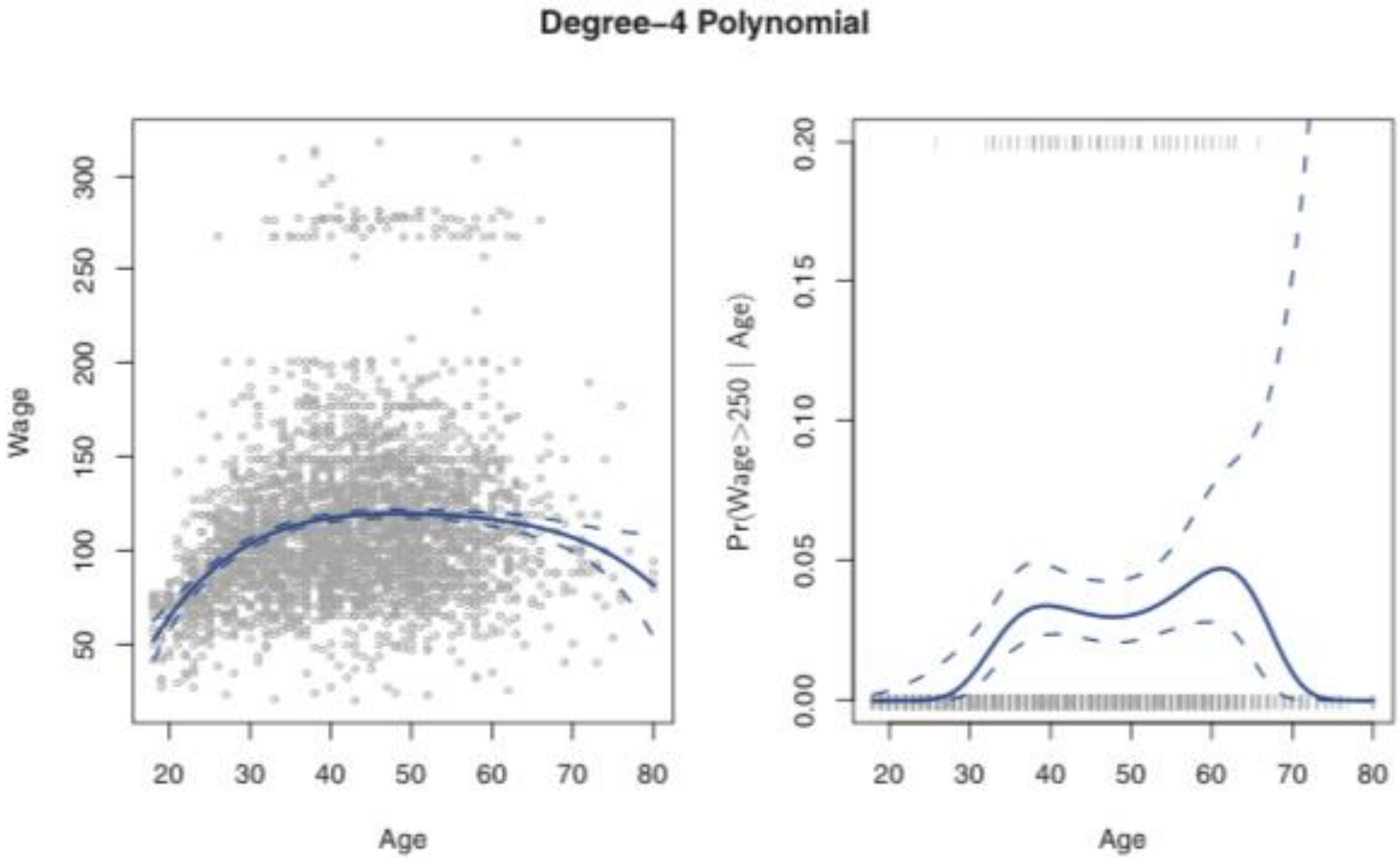


FIGURE 7.1. *The* Wage *data.* Left: *The solid blue curve is a degree-4 polynomial of* wage *(in thousands of dollars) as a function of* age*, fit by least squares. The dotted curves indicate an estimated 95 % confidence interval.* Right: *We model the binary event* wage>250 *using logistic regression, again with a degree-4 polynomial. The fitted posterior probability of* wage *exceeding* \$250,000 *is shown in blue, along with an estimated 95 % confidence interval.*

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Os modelos de regressão polinomial ou em nível são casos especiais de *basis functions*, em que se aplica uma determinada função ou transformação a uma variável *x*.

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Ou seja, ao invés de ajustar um modelo linear a x, nós ajustamos um modelo linear a $b_1(x), b_2(x), \ldots, b_k(x)$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 b_1(x_i) + \beta_2 b_2(x_i) + \ldots + \beta_k b_k(x_i) + \varepsilon_i \quad (7.7)$$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

As funções $b_1(.), b_2(.),\ldots, b_k(.)$ foram escolhidas arbitrariamente ANTES de rodarmos o modelo.

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Nas duas sessões anteriores escolhemos a *função polinomial* e a *step function* para aplicar na variável x.

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Mas podemos usar várias outras *basis functions*!!!

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Que tal conhecermos uma nova função que vai nos dar ainda mais flexibilidade para rodar nossas regressões sem perder a capacidade de fazer inferências usando as mesmas ferramentas para calcular o desvio-padrão das estimativas e a estatística-F?!

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

SPLINES

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Vamos novamente particionar o intervalo de x. Mas, ao invés de usar uma função constante, vamos aplicar uma função polinomial cúbica. Para simplificar, vamos separar x em apenas duas partes.

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Na prática, vamos ajustar duas funções polinomiais de grau 3 aos dados. Uma função para os valores de x menores que c e outra para x maior que c, onde c é o knot.

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Na prática, vamos ajustar duas funções polinomiais de grau 3 aos dados. Uma função para os valores de x menores que c e outra para x maior que c, onde c é o knot.

$y_i =$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Na prática, vamos ajustar duas funções polinomiais de grau 3 aos dados. Uma função para os valores de x menores que c e outra para x maior que c, onde c é o knot.

$$y_i = \beta_{01} + \beta_{11}x_i + \beta_{21}x_i^2 + \beta_{31}x_i^3 + \varepsilon_i$$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Na prática, vamos ajustar duas funções polinomiais de grau 3 aos dados. Uma função para os valores de x menores que c e outra para x maior que c, onde c é o knot.

$$y_i = \beta_{01} + \beta_{11}x_i + \beta_{21}x_i^2 + \beta_{31}x_i^3 + \varepsilon_i \, , \text{ se } x_i < c$$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Na prática, vamos ajustar duas funções polinomiais de grau 3 aos dados. Uma função para os valores de x menores que c e outra para x maior que c, onde c é o knot.

$$y_i = \begin{cases} \beta_{01} + \beta_{11}x_i + \beta_{21}x_i^2 + \beta_{31}x_i^3 + \varepsilon_i\,, & se\ x_i < c \\ \beta_{02} + \beta_{12}x_i + \beta_{22}x_i^2 + \beta_{32}x_i^3 + \varepsilon_i\,, & \end{cases}$$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Na prática, vamos ajustar duas funções polinomiais de grau 3 aos dados. Uma função para os valores de x menores que c e outra para x maior que c, onde c é o knot.

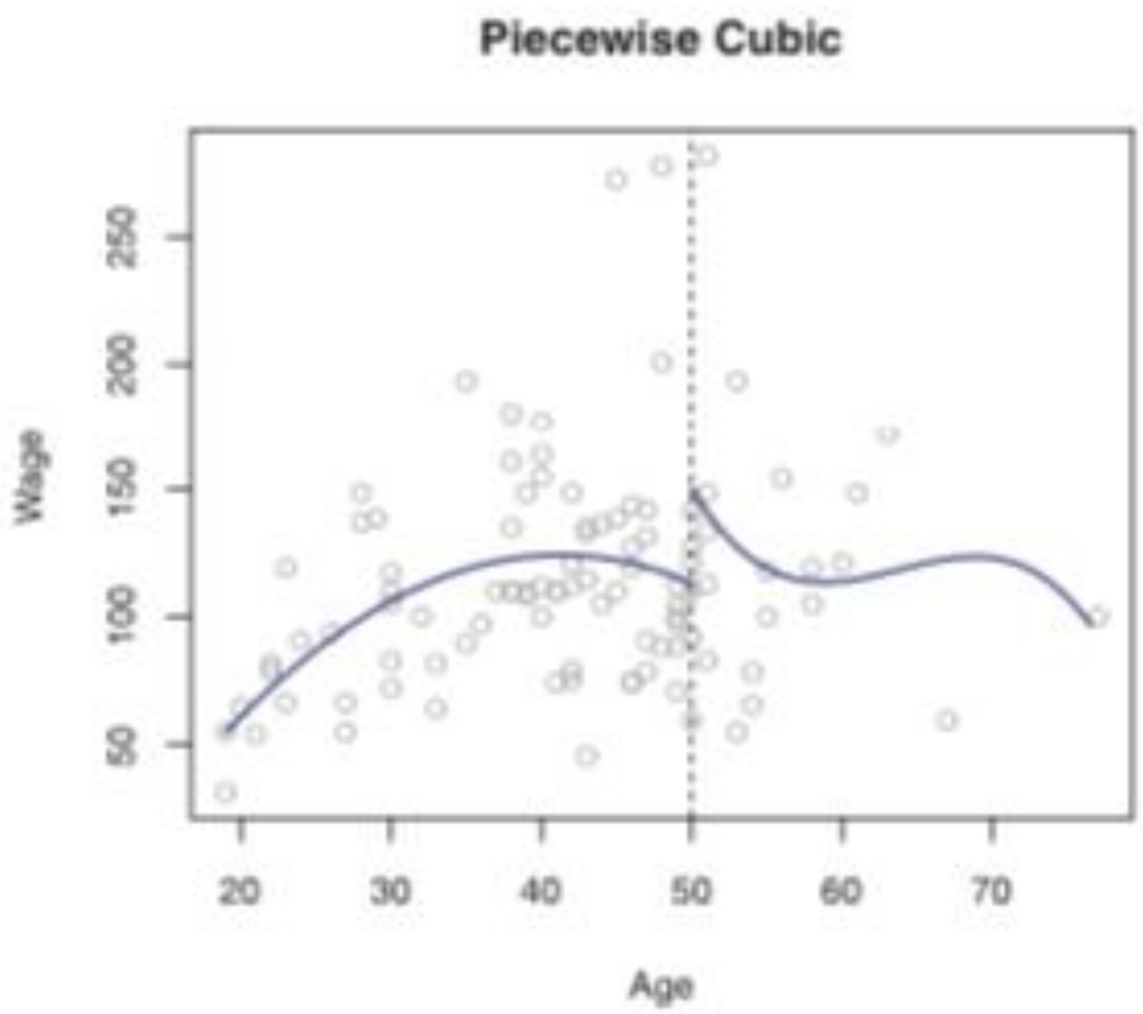
$$y_i = \begin{cases} \beta_{01} + \beta_{11}x_i + \beta_{21}x_i^2 + \beta_{31}x_i^3 + \varepsilon_i, & se\ x_i < c \\ \beta_{02} + \beta_{12}x_i + \beta_{22}x_i^2 + \beta_{32}x_i^3 + \varepsilon_i, & se\ x_i \geq c \end{cases}$$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

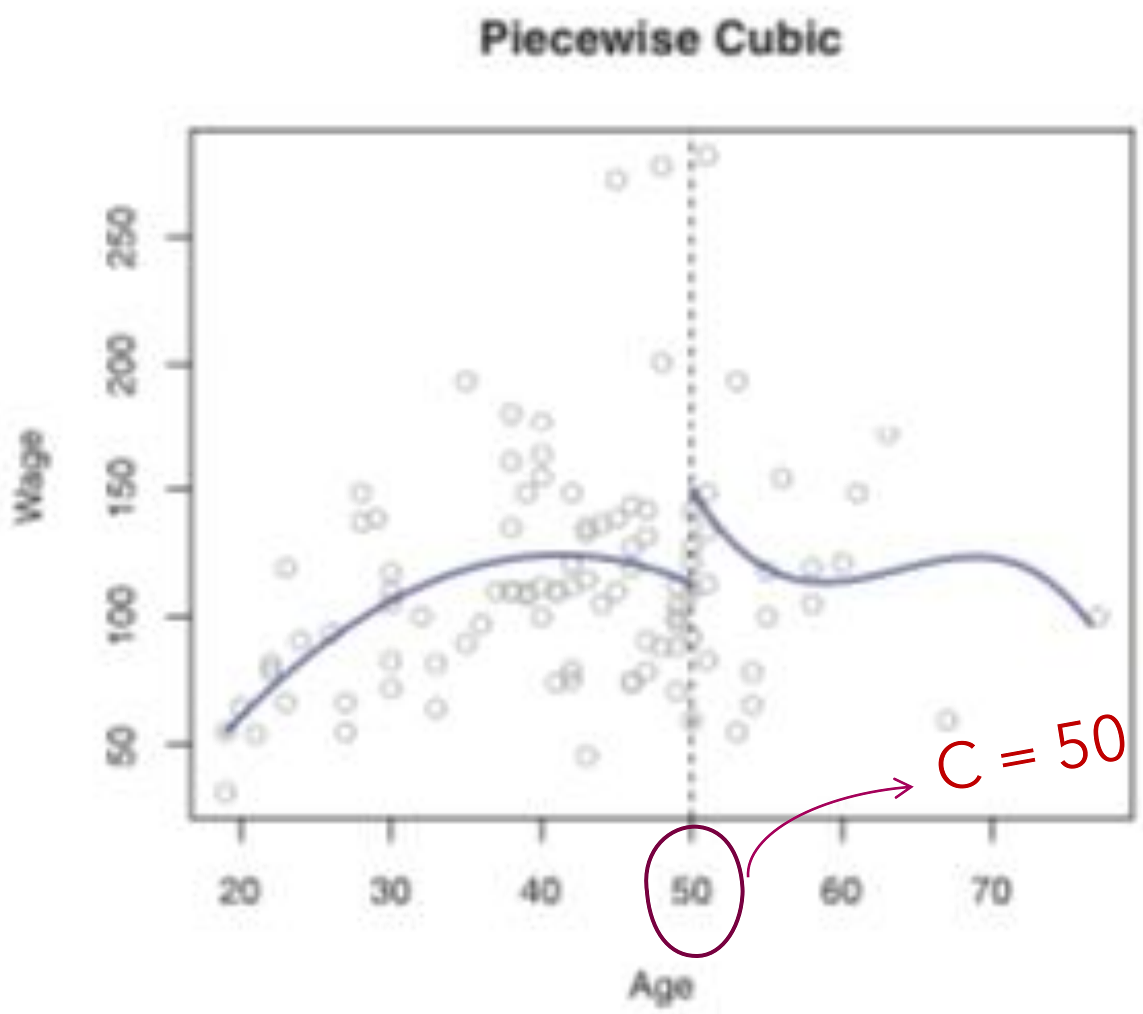
Na prática, vamos ajustar duas funções polinomiais de grau 3 aos dados. Uma função para os valores de x menores que c e outra para x maior que c, onde c é o knot.

$$y_i = \begin{cases} \beta_{01} + \beta_{11}x_i + \beta_{21}x_i^2 + \beta_{31}x_i^3 + \varepsilon_i \text{, se } x_i < c \\ \beta_{02} + \beta_{12}x_i + \beta_{22}x_i^2 + \beta_{32}x_i^3 + \varepsilon_i \text{, se } x_i \geq c \end{cases}$$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models



1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models



1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

1. Introdução

2. Regressão Polinomial

3. Step Functions

4. Splines

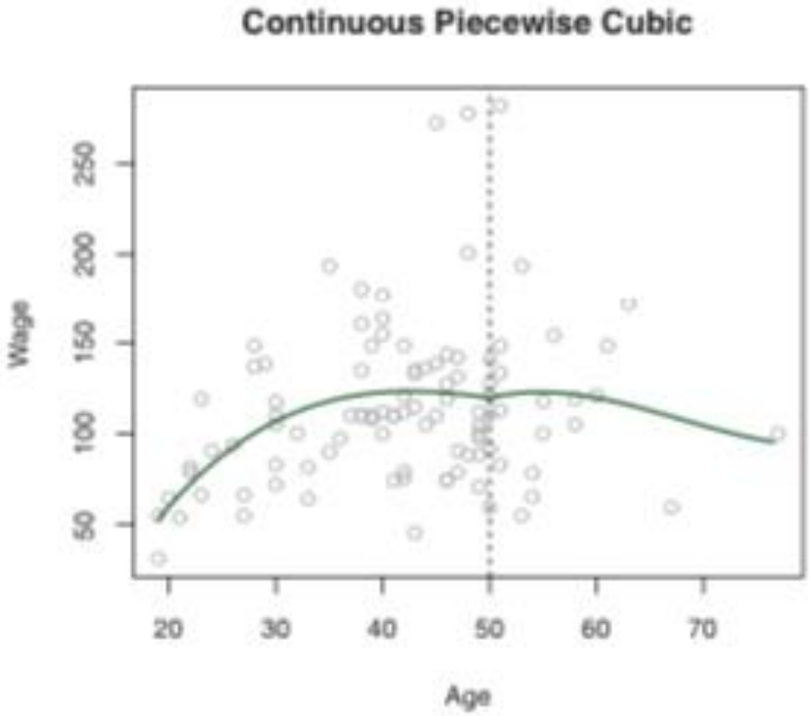
5. Local Regression

6. Generilize Additive Models

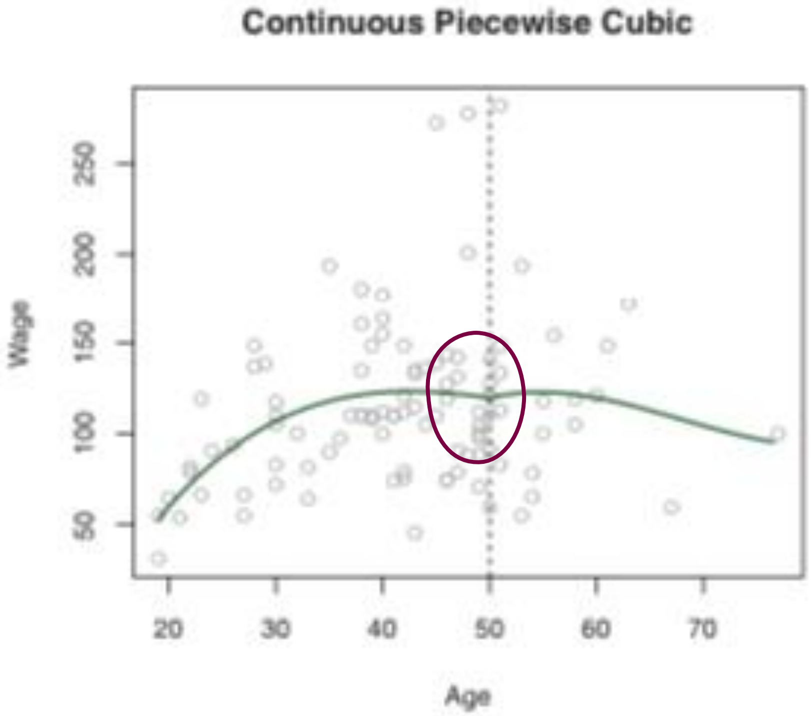
1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Para resolver a questão da descontinuidade, podemos acrescentar uma restrição de que a primeira derivada no ponto C seja igual nas duas regressões. Vamos ver como fica?

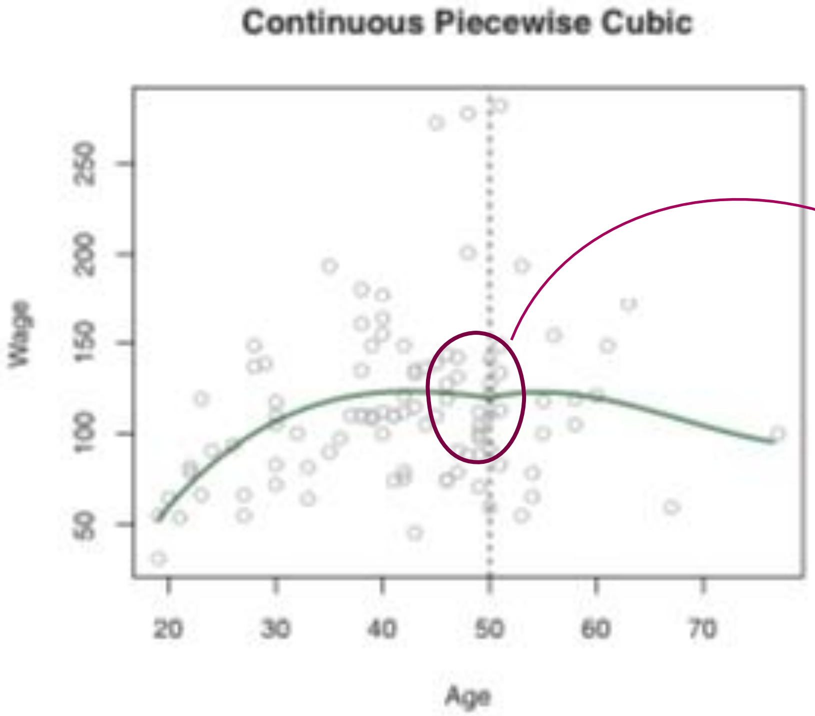
1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models



1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models



1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models



Eliminamos o problema da descontinuidade, mas a curva tem um bico, formando um V no Knot..

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Será que dá para melhorar?

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Será que dá para melhorar?
Será que podemos suavizar mais a curva?

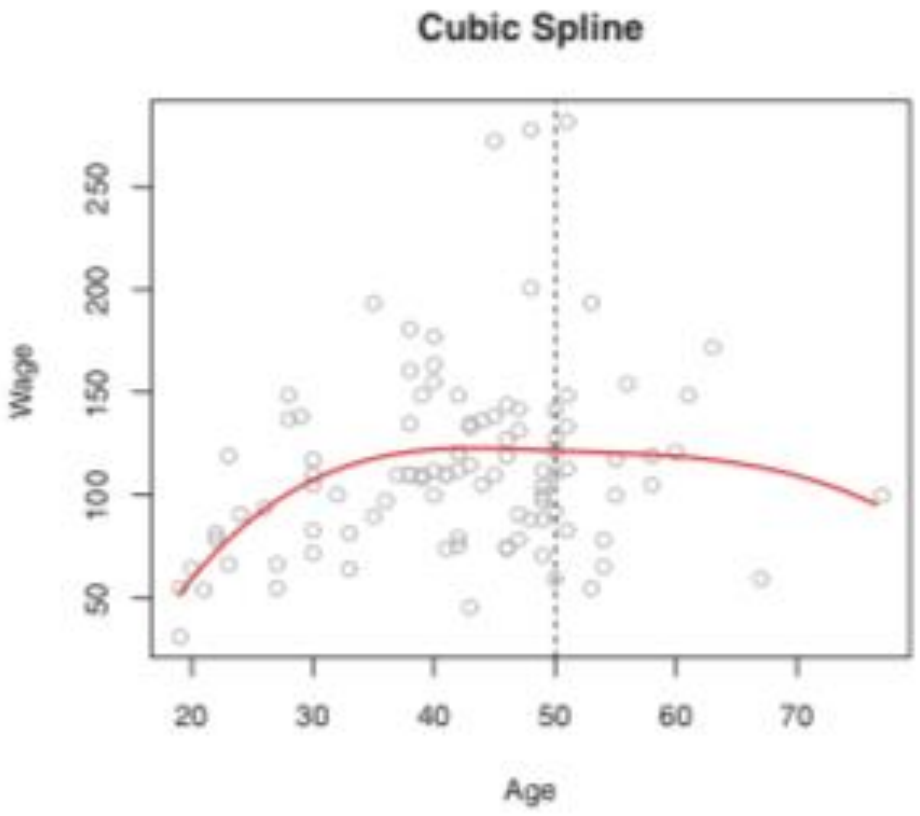
1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Será que dá para melhorar?
Será que podemos suavizar mais a curva?
E se adicionássemos mais uma restrição?

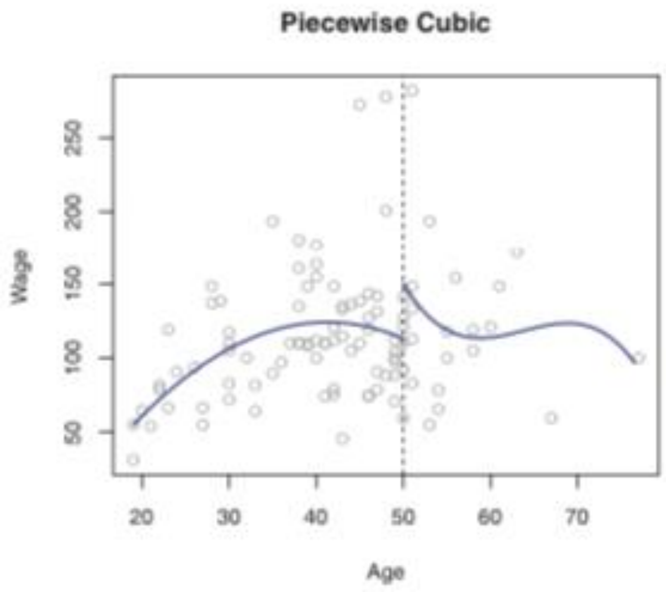
1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Será que dá para melhorar? Será que podemos suavizar mais a curva? E se adicionássemos mais uma restrição? E se a segunda derivada no ponto c=50 também tivesse que ser igual nas duas curvas?

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models



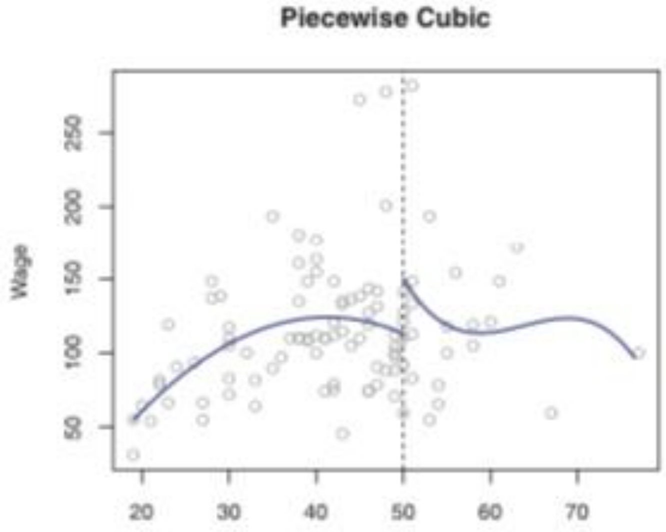
1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models



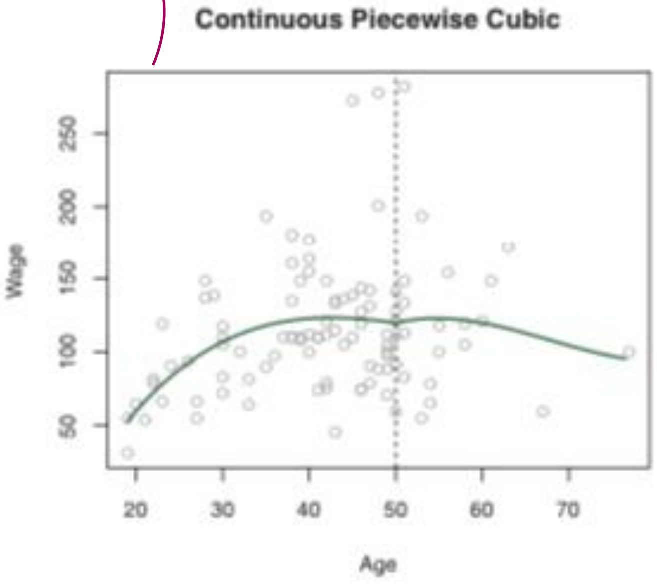
Sem restrição

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

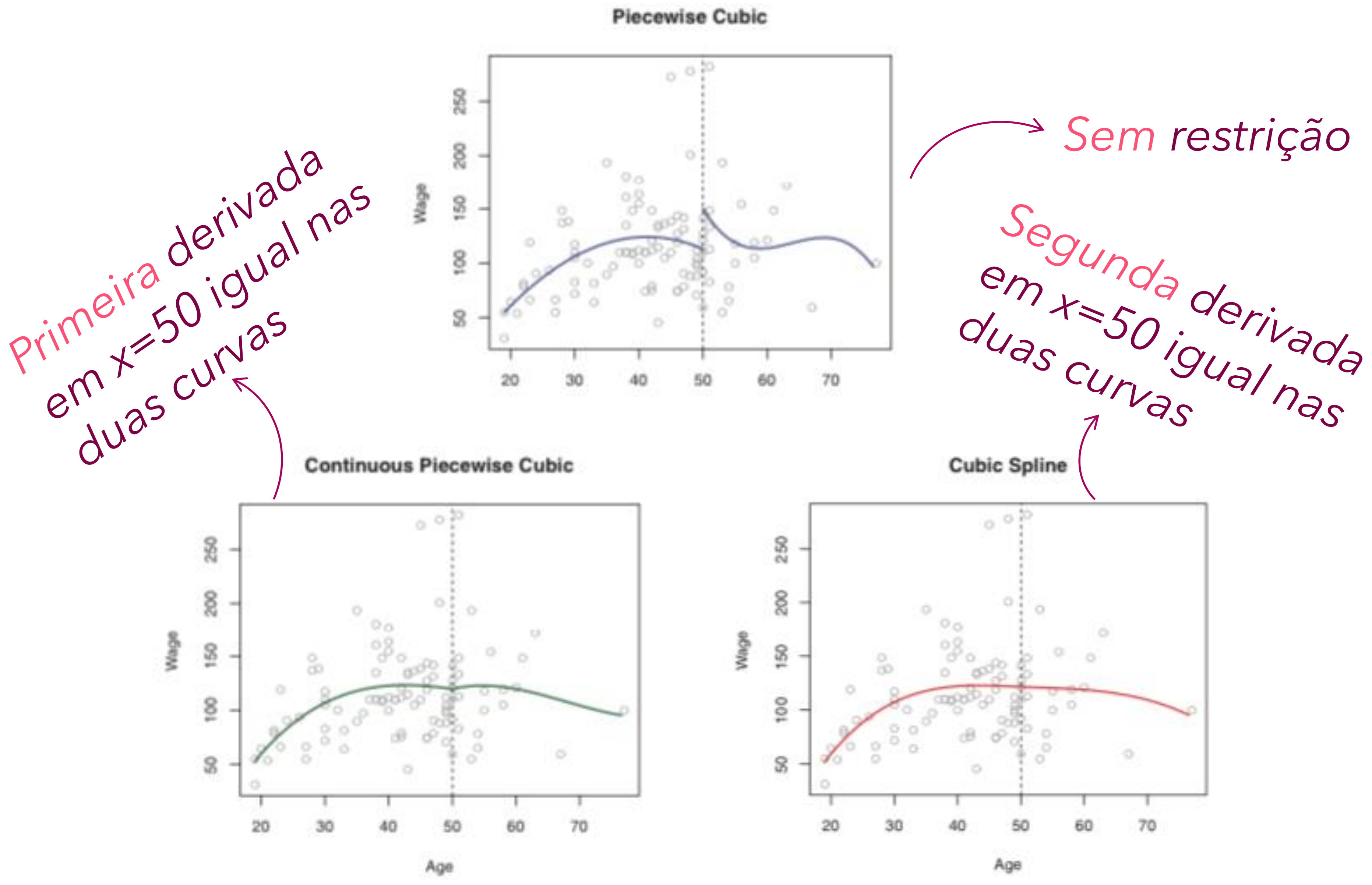
Primeira derivada em x=50 igual nas duas curvas



Sem restrição



1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models



1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Resumidamente, conseguimos obter:

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Resumidamente, conseguimos obter:

Flexibilidade

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Resumidamente, conseguimos obter:

Flexibilidade

Continuidade

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Resumidamente, conseguimos obter:

Flexibilidade

Continuidade

Suavidade

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Agora, podemos generalizar nosso modelo de cubic splines para k knots.

$$y_i=\beta_0+\beta_1 x_i+\beta_2 x_i^2+\beta_3 x_i^3+\beta_4 b(x_i)+\ldots+\beta_{k+3} b_{k+3}(x_i)+\varepsilon_i \quad (7.9)$$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

K + 4 parâmetros?

Da onde veio essa equação?

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

A equação 7.9 veio da equação genérica de basis function que já vimos. Nós aplicamos uma função ou transformação a x_i e calculamos um parâmetro β para cada fator $b(x_i)$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Recapitulando

Ou seja, ao invés de ajustar um modelo linear a x, nós ajustamos um modelo linear a $b_1(x), b_2(x), \ldots, b_k(x)$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 b_1(x_i) + \beta_2 b_2(x_i) + \ldots + \beta_k b_k(x_i) + \varepsilon_i \quad (7.7)$$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Recapitulando

Ou seja, ao invés de ajustar um modelo linear a x, nós ajustamos um modelo linear a $b_1(x), b_2(x), \ldots, b_k(x)$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 b_1(x_i) + \beta_2 b_2(x_i) + \ldots + \beta_k b_k(x_i) + \varepsilon_i \quad (7.7)$$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Recapitulando

Ou seja, ao invés de ajustar um modelo linear a x, nós ajustamos um modelo linear a $b_1(x), b_2(x), \dots, b_k(x)$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 b_1(x_i) + \beta_2 b_2(x_i) + \dots + \beta_k b_k(x_i) + \varepsilon_i \quad (7.7)$$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Recapitulando

Ou seja, ao invés de ajustar um modelo linear a x, nós ajustamos um modelo linear a $b_1(x), b_2(x), \ldots, b_k(x)$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 b_1(x_i) + \beta_2 b_2(x_i) + \ldots + \beta_k b_k(x_i) + \varepsilon_i \quad (7.7)$$

$$b_1(x_i) = x_i$$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Recapitulando

Ou seja, ao invés de ajustar um modelo linear a x, nós ajustamos um modelo linear a $b_1(x), b_2(x), \ldots, b_k(x)$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 b_1(x_i) + \beta_2 b_2(x_i) + \ldots + \beta_k b_k(x_i) + \varepsilon_i \quad (7.7)$$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Recapitulando

Ou seja, ao invés de ajustar um modelo linear a x, nós ajustamos um modelo linear a $b_1(x), b_2(x), \ldots, b_k(x)$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 b_1(x_i) + \beta_2 b_2(x_i) + \ldots + \beta_k b_k(x_i) + \varepsilon_i \quad (7.7)$$

$b_2(x_i) = x_i^2$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Além disso, se quisermos colocar k cortes no intervalo de x, teremos que colocar uma restrição em cada um desses knots para garantir que a curva que vamos ajustar aos dados será suave e contínua.

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

As k restrições são funções de x_i. Para cada uma delas, vamos estimar um parâmetro. Além dessas k funções, temos no caso da cubic spline a constante β_0, o parâmetro β_1 de x_i, β_2 de x_i^2 e β_3 de x_i^3.

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Vamos ver novamente nossa equação da cubic spline com k knots

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Vamos ver novamente nossa equação da cubic spline com k knots

$$y_i=\beta_0+\beta_1 x_i+\beta_2 x_i^2+\beta_3 x_i^3+\beta_4 b(x_i)+\ldots+\beta_{k+3} b_{k+3}(x_i)+\varepsilon_i \quad (7.9)$$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Vamos ver novamente nossa equação da cubic spline com k knots

$$y_i=\underbrace{\beta_0+\beta_1 x_i+\beta_2 x_i^2+\beta_3 x_i^3}+\beta_4 b(x_i)+\ldots+\beta_{k+3} b_{k+3}(x_i)+\varepsilon_i \quad (7.9)$$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Vamos ver novamente nossa equação da cubic spline com k knots

$$y_i = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3}_{\mathbf{4}} + \beta_4 b(x_i) + \ldots + \beta_{k+3} b_{k+3}(x_i) + \varepsilon_i \quad (7.9)$$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Vamos ver novamente nossa equação da cubic spline com k knots

$$y_i=\underbrace{\beta_0+\beta_1 x_i+\beta_2 x_i^2+\beta_3 x_i^3}_{4}+\underbrace{\beta_4 b(x_i)+\ldots+\beta_{k+3} b_{k+3}(x_i)}+\varepsilon_i \quad (7.9)$$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Vamos ver novamente nossa equação da cubic spline com k knots

$$y_i = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3}_{4} + \underbrace{\beta_4 b(x_i) + \ldots + \beta_{k+3} b_{k+3}(x_i)}_{k} + \varepsilon_i \quad (7.9)$$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Falta ainda determinar as k funções para garantir a continuidade da curva nos k pontos de corte de maneira suave

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 + \underbrace{\beta_4 b_4(x_i) + \ldots + \beta_{k+3} b_{k+3}(x_i)}_{\mathbf{k}} + \varepsilon_i \quad (7.9)$$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Tínhamos visto que forçar a primeira e a segunda derivadas no knot era capaz de gerar uma curva contínua e suave.
Vamos ver agora uma outra forma para gerar esses resultados com uma única restrição em vez de duas para cada ponto k.

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

A função "truncated power" pode ser definida como

$$h(x, \xi) = \begin{cases} (x - \xi)^3 & \text{, se } x > \xi \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

onde ξ é o valor do knot. No caso do polinômio de terceiro grau a função h(.) vai gerar continuidade da primeira e segunda derivada.

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generalized Additive Models

Considerações Importantes:

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generalized Additive Models

Considerações Importantes:

Para flexibilizar a hipótese de linearidade podemos recorrer a uma regressão polinomial de grau d ou a uma Spline

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generalized Additive Models

Considerações Importantes:

No entanto, para dar mais flexibilidade ao modelo polinomial, é necessário aumentar bastante a potência e isso gera parâmetros mais instáveis.

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generalized Additive Models

Considerações Importantes:

Ao mesmo tempo, a Cubic Splines consegue trazer a flexibilidade desejada aumentando a quantidade de knots.

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. Splines
5. Local Regression
6. Generalized Additive Models

Considerações Importantes:

Mais especificamente, basta acrescentar mais knots nas regiões que apresentam mais variações no comportamento.

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

1°) Pegamos nosso modelo linear clássico $y = \beta_0 - \beta_1 x$ *e acrescentamos* x^2 *e* x^3

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

1º) Pegamos nosso modelo linear clássico $y = \beta_0 + \beta_1 x$ *e acrescentamos* x^2 *e* x^3

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$$

1. Introdução

2. Regressão Polinomial

3. Step Functions

4. Splines

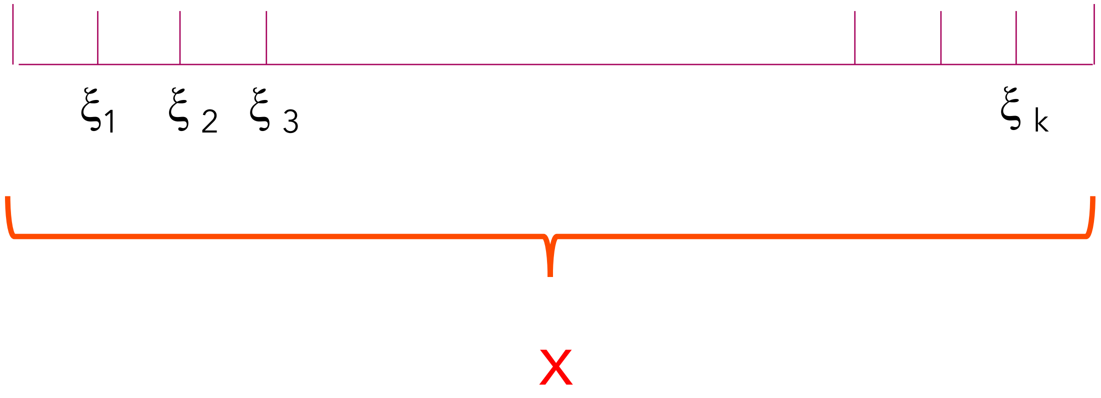
5. Local Regression

6. Generilize Additive Models

2º) Para dar mais flexibilidade, dividimos o intervalo x em k knots

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

2°) Para dar mais flexibilidade, dividimos o intervalo x em k knots



1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

3º) Para cada pedaço do intervalo X, formado pelos k knots, impõe-se uma trunked function que garante a continuidade e suavidade das cubic splines

$$h(x, \xi) = \begin{cases} (x - \xi)^3 & \text{, se } x > \xi \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

1. Introdução
2. Regressão Polinomial
3. Step Functions
4. **Splines**
5. Local Regression
6. Generilize Additive Models

Agora, podemos generalizar nosso modelo de cubic splines para k knots.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 + \beta_4 h(x_i, \xi_1) + \ldots + \beta_{k+3} h(x_i, \xi_k) + \varepsilon_i$$