2. Лекция (15.09)

22 сентября 2025 г. 7:21

Дифф-е ур-я 1-го порядка, разрешенные относительно производной

$\boxed{\text{О}}$ „Диффуры с раздел. перем":

Дифференциальное ур-е $y' = f(x,y)$ называется дифференц. ур-я с разделяющимися переменными, если его можно привести к виду:

$$P(x) \cdot Q(y) dx + R(x) S(y) dy = 0$$

или

$$y' = \varphi(x) \cdot \psi(y) \quad (*)$$

Алгоритм решения ДУ с разд. переменными:

1. Привести ур-е к виду $*$, указать тип ур-я
2. Представить y' в виде $\frac{dy}{dx}$
3. Умножить или разделить обе части ур-я на такие выр-я, чтобы слева оказались только ф-ции y и дифференциал dy, а справа — ф-ции только x и дифференциал dx.
При разделении переменных числовые лучше оставлять справа.
4. Проинтегр-ть левую по y, а правую по x. Константу интегр-я C записать справа. Результат интегрирования — решение ДУ.
5. Проверить потерянные решения.
Такие решения могут быть из-за ф-ций, обращ. в 0 выр-я, обращ. в 0 знам-ль, сокращенные при решении.
Проверка через подстановку.
6. Записать в ответ общее реш-е ДУ.

Пр1

Дано: $x \cdot y + (x+1) y' = 0$

$-(x+1) y' = xy$

1) $y' = -\frac{xy}{x+1}$

2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{x+1}$

2) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{xy}{x+1}$

3) $dy\,(x+1) = -dx\,(xy) \quad \Big|: (x+1)$

$dy = -dx\,\dfrac{xy}{x+1} \quad \Big|: y$

$\dfrac{1}{y}dy = -dx\,\dfrac{x}{x+1}$

$$\int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{x}{x+1}dx$$

$$\ln|y| + C_1 = -\int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = -x + \ln|x+1| + C_2$$

$$\ln|y| = \ln|x+1| - x + C$$

$$y = e^{\ln|x+1| - x + C}$$

$$\boxed{y = e^{-x} \cdot (x+1) \cdot C}$$

Пр 2

Дано: $\sqrt{y^2+1}\,dx = x \cdot y \cdot dy$

$\dfrac{1}{x}\sqrt{y^2+1}\,dx = y\,dy$

$\dfrac{y}{\sqrt{y^2+1}}dy = \dfrac{1}{x}dx$

$$\int \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}dy \overset{1}{=} \int \frac{1}{x}dx \;{}^{2}$$

1) $\displaystyle\int \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}dy = \left[d(y^2+1) = 2y\right] = \int \frac{\frac{1}{2}d(y^2+1)}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{y^2+1}}{\frac{1}{2}} + C_1 = \sqrt{y^2+1} + C_1$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C_2$

$\sqrt{y^2+1} + C_1 = \ln|x| + C_2$

$\sqrt{y^2+1} = \ln|x| + C, \quad x = 0$

$\boxed{O}$ Одноp-е дифф. ур-я 1-го порядка

Ф-ция $M(x,y)$ называется однородной ф-цией своих аргументов степени n, если для $\forall k$: $M(kx, ky) = k^n M(x,y)$

Пр 1

$M(x,y) = x^2 + xy$, докажите однородность

$M(x,y) = x^2 + xy$, докажите однородность

$M(kx,ky) = k^2x^2 + k^2xy = k^2(x^2+xy) = k^2 M(x,y)$, =>

=> $M(x,y)$ – однородная ф-я степени 2.

$\boxed{O}$ однор-е ДУ 1-го порядка:

ДУ вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, называется однородным ДУ 1-го порядка, если

$M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные ф-ции одинаковой степени.

Такое ДУ может быть определено в виде:

$y' = f(x,y)$ где $f(x,y)$ – одноp-я ф-я своих арг-в 0-й степени.

Замечание: можно предст и так $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ $**$

Дано:

$y' = \frac{x+y}{x-y}$. Доказать однородность ДУ. Привести ДУ к виду $**$.

$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$

$f(kx,ky) = \frac{k(x+y)}{k(x-y)} = k^0 \cdot \frac{x+y}{x-y}$, => $f(x,y)$ – одноp-я ф-я степени 0.

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

$$y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Трюк с заменой $z(x) = \frac{y}{x}$

$z(x) = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + x'z = z'x + z$

$y' = z'x + z$

$$\underbrace{z'x + z}_{y'} = \underbrace{f(z)}_{f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$z' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\varphi(x)}\underbrace{(f(z) - z)}_{\psi(z)}$ – ДУ с разд. перем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}(f(z) - z)$$

$$\frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x}$$

Алгоритм решения однородного ДУ 1-го порядка

1. Привести к виду **, указать тип ур-я
2. Сделать замену $z(x)=\frac{y}{x}$, $y'=z'x+z$
3. Подставить получ. выр-я в ДУ **, получится $z'=\frac{1}{x}(f(z)-z)$ — ДУ с разд. перем.
4. Решить ДУ
5. Сделать обр. замену
6. Поиск потер. реш-й
7. Записать в ответ общее решение ДУ.

Пр 3

$y'=\dfrac{1+y/x}{1-y/x}$. Решить ДУ.

$z(x)=\frac{y}{x}$

$y'=z'x+z$

$z'x+z=f(z)$

$z'=\frac{1}{x}(f(z)-z)$

$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}(f(z)-z)$

$\frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x}$

$\dfrac{dz}{\frac{1+z}{1-z}-z}=\frac{dx}{x}$

$\int\dfrac{dz}{\frac{1+z}{1-z}-z}=\int\frac{dx}{x}$

1) $\int\dfrac{dz}{\frac{1+z}{1-z}-z}=\int\dfrac{dz}{\frac{1+z-z+z^2}{1-z}}=\int\frac{1-z}{1+z^2}dz=$

$=\int\frac{1}{1+z^2}dz-\int\frac{z}{1+z^2}dz=\operatorname{arctg}z-\frac{1}{2}\ln|1+z^2|+C_1$

2) $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C_2$

$\operatorname{arctg}z-\frac{1}{2}\ln|1+z^2|+C_1=\ln|x|+C_2$

$\operatorname{arctg}z-\frac{1}{2}\ln|1+z^2|=\ln|x|+C$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{y^2}{x^2}\right|=\ln|x|+C$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln|y^2+x^2|+\frac{1}{2}\ln|x^2|=\ln|x|+C$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln|y^2+x^2|-\frac{1}{2}\ln|x^2|+\ln|x|+C$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln|y^2+x^2|-\ln|x|+\ln|x|+C$$

$$\boxed{2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln|y^2+x^2|+2C}$$