3. ДУ 1 порядка разрешенные относ. производной, привод к ур. с разд перем, привод к однородным, лин. 1 п.

13 октября 2025 г. 12:41

дифур вида: $y' = f(ax+by+c)$ м.б. прив. к ДУ с разд. перем. с помощью замены $z(x) = ax + by(x) + c$:

$z'(x) = a + b \cdot y'(x)$, $\Rightarrow$ $y'(x) = \frac{z'(x) - a}{b}$

$\frac{z' - a}{b} = f(z)$

$y' = f(ax+by+c)$

$z' = a + by' = a + bf(z)$; $\frac{dz}{dx} = \frac{a + bf(z)}{1}$

$dz = \frac{dx}{a+bf(z)}$ – ДУ с разд. перем.

Пр.

Дано: $y' = (2x+y)^2$. Привести к ДУ с разд. перем.

$z(x) = 2x + y(x)$

$z' = 2 + y'$, $y' = z' - 2$

$z' - 2 = z^2$

$\frac{dz}{dx} = z^2 + 2$; $dz = \frac{dx}{z^2+2}$ – ДУ с разд. перем.

Дифф ур-я, привод к однор. ур-м

дифур вида: $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ м.б. прив-но к однородному 1-го порядка с помощью замены $\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$, где u и v – новые аргументы.

Числа α и β такие, что ф-я в правой части ур-я стала однородной

Этого можно добиться, если α и β – решения СЛАУ:

$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$ Геометрически это озн. перенос к.к. в точку пересечения прямых $a_1x + b_1y + c = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Дано: $y' = \frac{x+y-3}{x-y-1}$. Привести ур-я к однородному ДУ.

$\begin{cases} x(u) = u + \alpha \\ y(v) = v + \beta \end{cases}$, $\begin{cases} \alpha + \beta - 3 = 0 \\ \alpha - \beta - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta - 3 = 0 \\ 2\alpha - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 3 - \alpha = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$

Используем замену:

$x = u + \alpha = u + 2 \Rightarrow dx = du$
$y = v + \beta = v + 1 \quad dy = dv$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} = \frac{(u+2) + (v+1) - 3}{(u+2) - (v+1) - 1}$; $\frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u-v}$ – одноp-е ДУ 1-го пор-ка

Линейные ДУ 1-го порядка

$\boxed{О}$ лин. ДУ

– ДУ наз-ся линейным, если неизв-я ф-я и её произв-я входят в ур-е линейно

Лин. ДУ 1-го порядка имеет вид:

Методом вариации произв. постоянной (метод Лагранжа)

Метод позволяет свести решение неоднородного линейного ДУ к решению 2-х ДУ с раздел. переменными.

Алгоритм решения линейного неоднородного ДУ методом вариации произв. пост-й:

1. Привести ур-е к виду *, указать тип ур-я.
2. Записать соотв. однородное ДУ 1-го порядка: $y' = a(x) \cdot y$. Это ур-е явл. ур-м с разд. перем.
3. Решить полученное однородное ур-е, записать его решение в виде: $y = \Phi(x, C)$
4. В получ. реш. заменить произв. пост C на неизв. ф-ю $C(x)$
5. Подставить решение из п.4 в ур-е *, и выразить из него $C'(x)$
6. Найти $C(x)$: $C(x) = \int C'(x)dx + C$
7. Подст. найденное выр-е для $C(x)$ в реш. из п.4. Это реш-е исх-го лин-го ур-я.
8. Проверить возможно потер. решения.
9. Записать в ответ общее решение ДУ.

Метод подстановки (метод Бернулли)

Идея: замена $y(x) = u(x) \cdot v(x)$

Алгоритм решения лин. неодн. ДУ методом подстановки:

1. Привести ур-е к виду *, указать тип ур-я.
2. Представить $y = u \cdot v$, тогда $y' = u' \cdot v + uv'$
3. Подст. получ. в *:

   $u' \cdot v + u \cdot v' = a(x) \cdot u \cdot v + b(x)$
   $u' \cdot v + u[v' - a(x)v] = b(x)$
4. Найти ф-цию v, обращ. в ноль выр-е, стоящее в скобках:

   $v' - a(x) \cdot v = 0$ – ДУ с разд. перем. Получится $v = \varphi(x)$. Константу интегр-я C при этом не пишут
5. Подст. получ. ф-ю v в ур-е из п.3, получится:

   $u' \cdot \varphi(x) = b(x)$ или $u' = \frac{b(x)}{\varphi(x)}$
6. Найти u: $u = \int u' dx + C$
7. Подст. найд. выр-я для u и v в $y = u \cdot v$. Это реш-е исх. лин. ур-я.
8. Проверить возм. потер. решения
9. Записать в ответ общее решение ДУ.

ур-е линейно

Лин. ДУ 1-го порядка имеет вид:

$y' = a(x) \cdot y + b(x)$ * – линейно по $y(x)$

или

$x' = a(y) \cdot x + b(y)$ – линейно по $x(y)$

$\boxed{O}$ Если ф-ция $b(x) = 0$, то ДУ наз-ся линейным однородным ур-м, иначе линейно неоднородным.

Замечание. Линейное одноp. ДУ = ДУ с разд. перем.

Линейные ДУ 1-го порядка могут быть решены методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа) или метод подстановки (метод Бернулли)