# 6. Диффуры высших порядков

13 октября 2025 г. 12:41

Диф. ур-е n-го порядка в общем случае имеет вид:

$F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)})$ - ур-е разрем. отн. произв.

Решение ДУ имеет вид: $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots C_n) = 0$ и зависит от $n$ произв-х пост-х;

Случаи интегр-я ДУ высших порядков (продолжение)

**Случай I**

ДУ: $y^{(n)} = f(x)$, решение $n$ кратное интегр-е левой и правой частей ДУ

Дано: $y''' = \sin x$

$\int y''' dx = \int \sin x \, dx \to y'' = -\cos x + C_1$

$\int y'' dx = \int (-\cos x + C_1) dx \to y' = -\sin x + C_1 x + C_2$

$\int y' dx = \int (-\sin x + C_1 x + C_2) dx \to \boxed{y = -\cos x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3}$

В остальных случаях нужны "специальные замены"

Общий алгоритм реш-я ДУ высшего порядка вкл-е исп-я замен:

1. Понизить порядок ДУ до 1-го, используя необх-е замены.
2. Решить ДУ 1-го порядка.
3. Сделать обр-е замены. Если необх-мо опять понизить порядок (то д. п1-2). Всего нужно решить $n$ ДУ 1-го порядка
4. Выписать все реш-я ДУ. Хотя бы одно должно содержать $n$ произвольных постоянных.
5. Проверить потерянные решения.
6. Записать ответ.

**Случай II:**

ДУ имеет вид: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)} \dots y^{(n)}) = 0$ – ДУ не содержит $y$.

Замена:

Вводится новая ф-я: $z(x) = y^{(k)}$, тогда $y^{(k+1)} = z'$ и т.д...

**Случай III:**

ДУ имеет вид: $F(y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$ – ДУ не содержит $x$

Замена

Вводится новая ф-я: $p(y) = y'$, тогда

$y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot y' = p'p$ и т.д...

**Случай IV**

ДУ явл-ся однородным относ-но $y$ и произв-х, а это значит, оно не мен-ся в рез-те одновр. замены $y$ на $k \cdot y$, $y'$ на $ky'$ и т.д..., где $k$ – любое число $\neq 0$

Замена:

Вводится новая ф-я: $z(x) = \frac{y'}{y}$ или $y' = z \cdot y$, тогда

$y'' = (z \cdot y)' = z'y + y'z = z'y + \underset{(zy)z}{y'z} = z'y + z^2 y$ ...

# Задача Коши для ДУ высших порядков

$\boxed{О}$ Задача Коши (ДУ $n$-го порядка):
- Задачей Коши для ДУ называется задача об отыскании частного реш-я ДУ, удовлетворяющего $n$ начальным условиям, где $n$ – порядок ДУ.

$\boxed{О}$ Начальные усл-я:
- это усл-я на ф-цию $y$ и её произв-е до $n-1$ порядка вкл., заданные в одной и той же точке $x_0$, называемой начальной.

Поставить задачу Коши для ДУ – это значит задать начальные усл-я.

$\boxed{Пр}$ Записать ДУ 4-го порядка в общем виде. Поставить з-чу Коши:

$y^{IV} = f(x, y, y', y'', y''')$
$y(x_0) = a,$
$y'(x_0) = b,$
$y''(x_0) = c,$
$y'''(x_0) = d,$ $x_0, a, b, c, d$ – некоторые числа.

$\boxed{Т}$ Коши (Т сущ. и единств. реш-я ДУ)

Дано: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)})$

Если в нек-й обл-ти $D$, содерж-й точку $P_0 = (x_0, a, b, c \dots s)$, ф-ция $f(x, y, y', \dots y^{(n-1)})$, является непрерывной ф-цией своих аргументов и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго, то в достаточно малом интервале $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, $h > 0$, существует единств. реш-е ДУ $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)})$, удовл. нач. условиям:

$y(x_0) = a$
$y'(x_0) = b$
$y''(x_0) = c$
$\dots$
$y^{(n-1)}(x_0) = s$

Замечание: усл. Липшица м.б. заменено на сущ-е огр-х частных пр-х 1-го пор-ка по всем арг-м, начиная с $y$: $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ в обл-ти $D$.

Утв-я:
1. Решение сущ. на инт., если ф-я $f(x, y, y', \dots y^{(n-1)})$ непрерывна.
2. Решение единств. в обл-ти $D$, если существуют огр-е непрер. частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''} \dots \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$