4. ДУ 1 порядка разр отн произв. ДУ Бернулли. ДУ в полных дифф. Интегрирующий множитель

13 октября 2025 г.   12:41

Дифф. ур-я Бернулли

[О] дифф. ур. Бернулли
– ДУ называется ДУ Бернулли, если оно м.б. записано в виде:

$y' = a(x)y + b(x)\cdot y^n, \quad n \neq 0,1$ * ДУ Б. по $y(x)$

$x' = a(y)x + b(y)x^n, \quad n \neq 0,1$ ДУ Б. по $x(y)$

ДУ Бернулли приводится к лин. неодн. заменой: $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}}$:

$z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$, тогда $z' = (1-n)y^{-n}y' \Rightarrow y' = \frac{z'\cdot y^n}{1-n}$

$\frac{z'\cdot y^n}{1-n} = a(x)y + b(x)y^n$

$\frac{z'y^n}{(1-n)y^n} = a(x)\cdot\frac{y}{y^n} + b(x)$

$\frac{z'}{1-n} = a(x)\cdot z + b(x) \Rightarrow z' = (1-n)(a(x)z + b(x))$ – линейное неодн. ДУ

Алгоритм решения ДУ Бернулли:

1. Привести ур-е к виду *, указать тип ур-я
2. Разделить обе части ур-я на y^n.
3. Сделать замену:
   $z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$, тогда $z' = (1-n)y^{-n}\cdot y' \Rightarrow y' = \frac{z'\cdot y^n}{1-n}$
4. Подстав. получ. выр-я в ур-е из п.2. Получится линейное неоднородное ДУ.
5. Решить линейное ДУ любым методом. Найти его решение $z = \varphi(x, C)$
6. Сделать обр-ю замену: $y^{1-n} = \varphi(x, C)$
7. Проверить возм. потер. решения
8. Записать в ответ общее решение ДУ.

Дифф. ур-я в полных дифф-х:

[О] ДУ вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ *, называется ДУ в полных дифф-х, если его левая часть представ. собой полн. дифф некоторой ф-ции $F(x,y)$.

Это условие будет вып-ся если верно: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ **.

Зам.: его реш. явл-ся неявн. ф-я $F(x,y) = C$ для которой верно:
$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ и $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

Алгоритм решения ДУ в полных дифф:

1. Привести ур-е к виду: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ и проверить условие:
   $\partial M(x,y)\ \ \partial N(x,y)$

4. Продифф получ. выр-е в сл-е а) по y, а в сл-е б) по x.
   Приравнять в случае а) получ. произв. к $N(x,y)$ и выразить из р-ва $C'(y)$, а в случае б) получ. произв. к $M(x,y)$ и выразить из р-ва $C'(x)$.
5. Найти
   а) $C(y) = \int C'(y)dy$ (конст. интегр. не писать)
   б) $C(x) = \int C'(x)dx$
6. Записать ф-цию $F(x,y)$
7. Записать в ответ общее решение ДУ.

[О] Интегр. множ. для ур-я $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ называется такая ф-ция $\mu(x,y) \neq 0$, после умнож-я на которую, ур-е превращ. в ур-е в полных дифференц.

Если ф-ии $M(x,y)$ и $N(x,y)$ в уравнении имеют непрерыв. частные произв. и не обращ-ся в 0 одновременно, то интегр. множ. сущ-т. Однако нет общего метода для его отыскания.

Частные случаи отыскания интегр. множ-ля:

1) Если $\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)} = \varphi(x)$ явл-ся ф. аргумента x, то $\mu(x,y) = e^{\int\varphi(x)dx}$

2) Если $\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{-M(x,y)} = \varphi(y)$ явл-ся ф. арг. y, то $\mu(x,y) = e^{\int\varphi(y)dy}$

В общем сл-е:

$$N(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x} - M(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y} = \mu(x,y)\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)$$

1. Привести ур-е к виду: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ и проверить условие:
$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, если верно, то указать тип ДУ.

2. Записать вид искомого решения: $F(x,y) = C$ и соотв. усл-я:

а) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$

б) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

3. Выбр. для поиска реш-я ∀ из условий а) или б). Найти из выбр-го условия ф-цию $F(x,y)$, проинтегрировав левую и правую части по x или y соотв.:

а) $F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + C(y)$

б) $F(x,y) = \int N(x,y)\,dy + C(x)$