6. Занятие

13 октября 2025 г. 12:41

Подготовка к КР

И.1 решить ДУ 1-го порядка

а) $\underbrace{e^{-y}}_{M(x,y)}dx - \underbrace{(2y + xe^{-y})}_{N(x,y)}dy = 0$

1) Проверим на ДУ в п.д:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -e^{-y}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -e^{-y}$$

условие выполн-ся.

2) Общий вид ур-я:

$F(x,y) = C$ Тогда

а) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = e^{-y} = M(x,y)$

б) $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -2y - xe^{-y} = N(x,y)$

3) Выберем усл-е а, тогда:

$$F(x,y) = \int e^{-y}dx = e^{-y}\int dx = xe^{-y} + C(y)$$

4) Получаемое выр-е:

1) продифф по y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -xe^{-y} + C'(y)$$

2) приравняем получ выр-е к $N(x,y)$:

$$-xe^{-y} + C'(y) = -2y - xe^{-y}$$

$C'(y) = -2y$, $C'(y)$ не зависит от x

5) Найти:

$$C(y) = \int -2y\,dy = -2\frac{y^2}{2} = -y^2$$

6) Подставим получ. выр-е в п3:

$$F(x,y) = xe^{-y} - y^2$$

7) Общее решение:

$F(x,y) = C$, $\Rightarrow xe^{-y} - y^2 = C$

Ответ: $xe^{-y} - y^2 = C$

б) $y' = \dfrac{3y - x^2}{x}$

1) Определим тип ДУ:

$* \; y' = \dfrac{3y}{x} - x = \dfrac{3}{x}\cdot y - x = a(x)y - b(x)$ – линейное неоднородное ДУ.

Решим методом подстановки:

2) Представим:

$y = u(x)\cdot v(x) = u\cdot v$

Тогда: $y' = u'v + v'u$

3) Подставим получ. выр-е в $*$:

$u'v + v'u = \frac{3}{x}u\cdot v - x$

$u'v + u(v' - \frac{3}{x}v) = -x$

4) Вычислим $v(x)$ из усл-я:

$v' - \frac{3}{x}v = 0$ (приравн скоб. к 0)

ДУ 1-го порядка

1) $v' = \frac{3}{x}\cdot v = \varphi(x)\cdot\psi(v)$

5) Подст. получ. зн-е v в п.3:

$u'\cdot x^3 = -x \quad |: x^3$

$u' = -\frac{1}{x^2}$

6) Вычислим:

$$u = -\int\frac{1}{x^2} = -\frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{x} + C.$$

7) Подставим зн-я для u и v в п2:

$$\underbrace{y = uv = \left(\frac{1}{x} + C\right)\cdot x^3}_{\text{Общее решение ЛНДУ}}$$

8) Проверить возможно потер-е решения:

ДУ 1-го порядка

1) $v' = \frac{3}{x} \cdot v = \varphi(x) \cdot \psi(v)$

2) $\frac{dv}{dx} = \frac{3}{x} \cdot v \quad \Big| \cdot dx, \ :v$

3) $\int \frac{dv}{v} = \int 3 \frac{dx}{x}$

4) $\ln|v| = 3\ln|x|$ (C не пишем!)

$v = x^3$

Общее решение ЛНДУ

⑧ Проверить возможно потер-е решения:

$: v, x^3$

1) $v = 0, x = 0$:

2) $v = 0, \Rightarrow y = 0$

$y = 0 \Rightarrow \quad y' = \frac{3y - x^2}{x}; \ 0 \neq -\frac{x^2}{x} = -x$ не тождество

3) $x = 0$ – не решение по усл-ю

Т.о потер-х решений нет

Ответ: $y = \left(\frac{1}{x} + C\right) \cdot x^3$

Часть 2. Решить задачу Коши:

$y'' = x^2 \quad y(1) = 2, \ y'(1) = -1$

① Решим ДУ-2-го порядка:

$y' = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_1$

$$\underbrace{y = \int\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) dx = \frac{1}{3}\frac{x^4}{4} + C_1 x + C_2}_{\text{общее реш-е ДУ-2 порядка}}$$

② Решим задачу Коши:

Для этого подст. нач. усл-я в соотв-е выр-я (решаем СЛАУ):

$$\begin{cases} 2 = \frac{1}{12} + C_1 + C_2 \\ -1 = \frac{1}{3} + C_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 2 - \frac{1}{12} - C_1 \\ C_1 = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow C_2 = 2 - \frac{1}{12} + \frac{4}{3} = \frac{24 - 1 + 16}{12} = \frac{39}{12} = \frac{13}{4}$$

Т.о. реш-е зад. Коши:

$y = \frac{x^4}{12} - \frac{4}{3}x + \frac{13}{4}$, Ответ: $y = \frac{x^4}{12} - \frac{4}{3}x + \frac{13}{4}$