1. Введение

8 сентября 2025 г. 14:37

Дифференц. ур-я:
Экзамен + Курсовая
Расширенная система автоматов (получать 80%+)

Диф. ур-я (ДУ) – являются одним из основных математ. понятий примен. при решении практ. задач. Это объясняется тем, что при исследовании физических процессов часто выявл. связь процессов с произв (или дифф-м)

... исслед-е физ процесса нужно разд на 2 этапа:

1. Составление ДУ, которое опис проц. (реш-ся в к-х физики, мат модел, спец. курсах)
2. Нахождение решения ДУ:
   нах-е зависимости характ. процесс
   решается в нашем курсе

Основные понятия и обозн-я:

Обозначения прим. в курсе:

x – незав. переменная

$y(x)$ – неизв-я ф-я

$y', y'', \dots y^{(n)}$ – произв-я от y

$dy, d^2y, \dots d^ny$ – дифф. ф-ции y

Опр 1

ДУ – называется ур-е, в котором неизв ф-я входит под знаком произв. или дифф-ла.

Опр 2

порядок ДУ – это порядок или номер старшей пр-й (или dy) неизв. ф-ции вход в ур-е

ДУ n-го порядка:

$$F(x, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0$$

Опр 3

ДУ – наз-ся разрешенной отн-но произв-й, если из него может быть выр-но в явном виде старшая произв-я.

Общий вид ДУ n-го порядка разреш отн пр-й:

$$F(x, y, y', \dots y^{(n)})$$

$$y^{(n)} = f(x, y, y' \dots y^{(n-1)})$$

$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$

Опр 4

Процесс нахожд. реш-я ДУ наз-ся интегрирование ДУ

Опр 5

Решение ДУ – функция опред внек-й области и достаточное число раз диф-ма, которая при подстановке в ДУ обращает его в тождество

Решение ДУ неявного вида:

$\Phi(x, y) = 0$ – назыв. интегралом ДУ

а график решения – интегр. кривой.

Пример 1: Доказать что y - являя решением ДУ 2-го порядка:

$y = \cos x + 2\sin x$; $y'' + y = 0$

Решение:

Для док-ва подставим y в ДУ, для этого сначала найдём её первую и 2-ю пр-ю:

$y' = -\sin x + 2\cos x$

$y'' = -\cos x - 2\sin x$

$y'' + y = -\cos x - 2\sin x + \cos x + 2\sin x = 0$

$0 = 0$

Т.к. получили тождество ф-я явл-ся решением ДУ.

Важно заметить:

Т.к решение ДУ связан с н-кр-м интегрированием будет получено ∞ мн-во решений (т.к. C – может быть любой)

(н-кр-е интегр-е даст также И констант интегр-я свободных для выбора)

Опр 6

Общим решением ДУ называется мн-во, содержащее все решения ДУ.

Общее решение ДУ n-порядка имеющ. неявный вид:

$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots C_n)$

назыв-ся общим интегралом

$\Psi(x, y, C_1, C_2, \dots C_n)$

называется общим интегралом

а график называется семейством интегр-х кривой.

Частное решение

назыв-ся реш, получ. из общего решения за счет произв-го выбора зн-й постоянных. Как правило опр-ся из условий.

Пр2:

Дано: $y'' + y = 0$

Общее решение ДУ имеет вид:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Найти частные реш. при условии:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Решение

$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$

$y'(0) = -C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = C_2 = 2,$

Значит из 2 условия нашли C_2.

$y = C_1 \cos x + 2 \sin x$

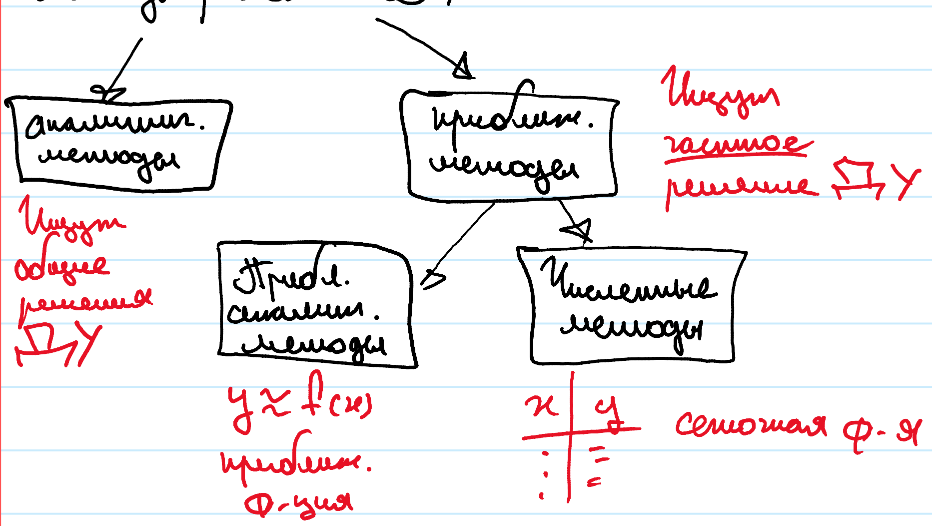
$y(0) = 1$

$C_1 \cos 0 + 2 \sin 0 = 1$

$C_1 = 1$

частное решение: $y = \cos x + 2 \sin x$

Методы решения ДУ:



Общий вид ДУ 1-го порядка:

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{(форма 1)}$$

или

$$y' = f(x, y) \quad \text{(форма 2)}$$

Часто ДУ 1-го порядка в заданной форме явно содержащей дифференциал неизв. ф-ии
$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (форма 3)

Очевидно что из ф.2 легко перейти к ф1 и наоборот.

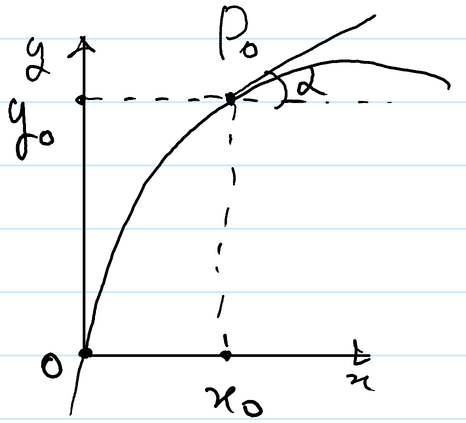
Пр2

$y' = f(x,y) \to \frac{dy}{dx} = f(x,y)$

$dy = f(x,y)dx \to \overbrace{-f(x,y)}^{M(x,y)}dx + \overbrace{1}^{N(x,y)}dy = 0$

Аналогично наоборот

Решение ДУ 1-го порядка содержит 1 постоянную:
$\Phi(x,y,C_1)=0$
Но обычно если можно, то решение выражают через y.



$y=\varphi(x)$ — график решения ДУ $y'=f(x,y)$ (интегральная кривая)

$tg\alpha = f(x_0,y_0)$

Исходя из геом. смысла произв-й. в т. P_0 касательная к интегр-й прямой имеет тангенс угла наклона равный $f(P_0)$

Направления касат. к инт. кривым образуют поле направления.
Построить поле напр-я:
- это значит вычислить тангенс угла наклона к интегр. прямым

Геометр. место точек плоскости xy, в котором поле напр-й постоянно (касат-не под 1 углом) называется изоклиной.

котором поле напр-й постоянно (касат под 1 углом) называется изоклиной.

Метод позволяет построить семейство интегральных кривых без нахожд-я решения ДУ:

Алгоритм:

1. Записать ур-е изоклиной:

$\boxed{f(x, y) = k}$, $k = const$

2. Задать несколько допуст. зн-й k, записать соотв. ур-я и построить изоклину на пл-ти.

Замечание:

если возможно рассмотреть k разных знаков и $k = 0$

3

а) Представим каждое число k в виде дроби:

$$k = \begin{cases} \frac{k}{1}, k \geq 0 \\ \frac{|k|}{-1}, k \leq 0 \end{cases}$$

б) Отложим числит. ур по верт оси, а знаменатель по гориз. оси.

в) На получ. отр. постр. прямоуг. и проведем его диаг из нач. коорд., построенная диаг имеет тот же угол наклона, что и касат. к инт. кривым вдоль изоклины ур-я $f(x, y) = k$

г) Нанести касат. на соотв. изоклины, используя паралл. перенос

4. Строим инт. кривую.