5. ДУ-1 порядка неразрешенные относительно производной. Задача Коши

13 октября 2025 г. 12:41

Дифф ур-я 1-го порядка неразрешенные относительно производной

– характ-ся тем, что из него не м.б. легко выражена пр-я y'.

Одним из методов реш-я таких ДУ явл-ся применение математических преобразований, целью которых явл-ся выр-е пр-й из ДУ. В рез-те получается одно или несколько ДУ вида: $y' = f_i(x,y)$, $i = 1,2\ldots$

Пример 1:

Дано: $(y')^2 + xy = y^2 + xy'$

$$(y')^2 - xy' = y^2 - xy$$

$$(y')^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x\cdot y' + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2 = y^2 - 2\cdot\frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2$$

$$\left(y' - \frac{1}{2}x\right)^2 - \frac{1}{4}x^2 = \left(y - \frac{1}{2}x\right)^2 - \frac{1}{4}x^2, \quad \left(y' - \frac{1}{2}x\right)^2 = \left(y - \frac{1}{2}x\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y' - \frac{1}{2}x = y - \frac{1}{2}x \\ y' - \frac{1}{2}x = -y + \frac{1}{2}x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y' = y \\ y' = x - y \end{array}\right.$$

Получили 2 ДУ, разреш. относ-но пр-й:

1) $y' = y$ – ДУ с разд. переменными
2) $y' = x - y$ – линейное неоднородное ДУ.

При интегр. ДУ 1) получ. $y = Ce^x$ при инт. ДУ 2) $y' = -y + x$ получ. $y = x - 1 + C\cdot e^{-x}$

Ответ: $y = Ce^x$, $y = x - 1 + Ce^{-x}$

Метод введения параметра

Алгоритм:

Легко выр-ся y: $y = f(x, y')$; x: $x = f(y, y')$

1. Разр. ДУ относ y: $y = f(x, y')$ | относ x: $x = f(y, y')$

2. Ввести параметр $p = y' \frac{dy}{dx}$, тогда получится: $y = f(x,p)$ | $x = f(y,p)$

3. Взять полный дифф правой и левой частей ур-я получится:
$$dy = \frac{\partial f(x,p)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,p)}{\partial x}dp \qquad dx = \frac{\partial f(y,p)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(y,p)}{\partial p}dp$$

4. Сделать замену в левой части ДУ:
$dy = p\,dx$, получ-ся: $$p\,dx = \frac{\partial f(x,p)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}dp$$
$dx = \frac{dy}{p}$, получ-ся: $$\frac{dy}{p} = \frac{\partial f(y,p)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(y,p)}{\partial p}dp$$
получили ДУ 1-го порядка, разр. относ-но произв-й.

5. Решить полученное ДУ, записать его решение:
$x = \varphi(p, C)$ | $y = \varphi(p, C)$

6. Записать решение исходного ДУ в параметр. форме:
$$\begin{cases} x = \varphi(p,C) \\ y = f(\varphi(p,C),p) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = f(\varphi(p,C),p) \\ y = \varphi(p,C) \end{cases}$$

$\boxed{\text{T}}$ Теорема Коши (Т сущ-я и единств. реш. ДУ)

дано: $y' = f(x,y)$

Если $f(x,y)$ непрер. в нек-й обл-ти D, сод. т. $P_0 = (x_0, y_0)$, и удовл. в D условию Липшица*, то в достаточно малом интервале $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, $h > 0$ сущ. ед-е реш-е ур-я $y' = f(x,y)$, удовл. условию $y(x_0) = y_0$.

Существов-е решения при этом утв-ся на достаточно малом интервале, а единств-ть в пределах рассм. обл-ти

* Усл-е Липшица:

Пусть $F(x,y)$ огр. и непр. в обл-ти $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Она удовл. усл. Липшица по y в G, если $\exists L = const \ge 0 : \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D$ и
$$|F(x,y_2) - F(x,y_1)| \le \underset{\text{конст. Липшица ф } F(x,y) \text{ в } D}{L} \cdot |y_2 - y_1|$$

$$|F(x,y_2) - F(x,y_1)| = \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \cdot |y_2 - y_1| \le L \cdot |y_2 - y_1|$$

Утв-я:

1) Если ф-я $f(x,y)$ непр., то в инт. $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, $h > 0$ сущ. реш-е ДУ.
2) Если кроме этого, сущ. огр-я непр. частн. произв. $\frac{\partial f}{\partial y}$ в рассм. обл-ти, то это реш-е явл-ся единств.

6. Записать решение исходного ДУ в параметр. форме:

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = f(\varphi(p,C), p) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = f(\varphi(p,C), p) \\ y = \varphi(p, C) \end{cases}$$

7. Проверить потер-е реш-я: все потер-е реш-я вида $p = \dots$, подставляются в выражение из п. 2 алгоритма и принимают вид: $y = \dots$ или $x = \dots$ Затем следует проверка подстановкой в исходное ДУ.

8. Записать общее решение ДУ

Условия существование и единственности решения дифф ур-я 1-го порядка. Задача Коши

При решении практ. з-ч, как правило, необ-мо найти не общее, а частные реш-я ДУ, соотв определенным априори изв. условиям. Обычно это так называемые начальные условия, ком. нала-ся на искомую ф-цию $y(x)$ в заданной т. x_0.

$\boxed{О}$ Задача Коши:
Задачей Коши для ДУ 1-го называется задача об отыскании частного решения ДУ, удовл. начальному условию $y(x_0) = y_0$, где x_0, y_0 заданы.