Диффуры КР 2-й Этап
вариант 11 (26)

а) $y'(\ln y - 4\cos x) = 2x - 4y\sin x$

б) $x\,dx = (y\cdot e^{2y} + x^2)\,dy$

Задача определить тип (с док-вом) и найти общее решение каждого ДУ 1-го порядка.

Типы ДУ, которые мы изучили на ЛК:

1) ДУ с РП:

$$P(x)\cdot Q(y)\,dx + R(x)\cdot S(y)\,dy = 0$$

или

$$y' = \varphi(x)\cdot\psi(y)$$

2) Однородные ДУ:

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ – однор-е ДУ 1-го п, если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородны и общей степени.

$M(x,y)$ – одн, если $M(kx,ky) = k^n\cdot M(x,y)$ и $n \geq 0$, n- степень однородности

3) Линейные ДУ:

$y' = a(x)\cdot y + \boxed{b(x)}$ – лин. ДУ относ y

$x' = a(y)\cdot x + \boxed{b(y)}$ – лин ДУ относ x.

если $= 0$, то ДУ ещё и однородно

линейность в том, что неизв. ф-я $y(x)$ и её пр-е $y^{(i)}(x)$ – линейны (их степень 1 и они не перемножаются)

Пример ЛДУ 2-го пор:

$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, здесь y'', y' и y – все 1-й степени (не путать с порядком)

Общий вид ЛДУ через оператор: $L(y(x)) = f(x)$, где $L = L_n(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + A_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + A_n(x)y$

линейный оператор диф-я

4) ДУ Бернулли:

$y'(x) = a(x)y + b(x)\cdot y^n$ – ДУ Б. по y

$x'(y) = a(y)x + b(y)x^n$ – ДУ Б. по x

$n \neq 0, 1$

5) ДУ в полн. дифф.:

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ – ДУ в П.Д, если $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

Дальше лишь идут комбинации и повышение порядка

Диффуры КР 2-й Этап
вариант 11 (26)

а) $y'(\ln y - 4\cos x) = 2x - 4y\sin x$

б) $x\,dx = (y\cdot e^{2y} + x^2)\,dy$

а) $y'(\ln y - 4\cos x) = 2x - 4y\sin x \quad |\cdot dx$

$$\underbrace{(\ln y - 4\cos x)}_{M(x,y)}dy + \underbrace{(4y\sin x - 2x)}_{N(x,y)}dx = 0$$

Проверим на ДУ в ПД:

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial x} = 0 - 4\cdot(-\sin x) = 4\sin x$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial y} = 4\sin x - 0 = 4\sin x$

$\Rightarrow$ это ДУ в ПД, т.к. $\frac{\partial M(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial y}$

$$\int(4y\sin x - 2x)dx = 4y\int\sin x\,dx - 2\int x = 4y\cdot(-\cos x) - 2\frac{x^2}{2} + C(y) = F(x,y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \ln y - 4\cos x;\quad -4\cos x + C'(y) = \ln y - 4\cos x, \Rightarrow C'(y) = \ln(y)$$

$$C(y) = \int\ln y\,dy = y\ln y - \int y\cdot d\ln y = y\ln y - \int y\cdot\frac{1}{y}dy = y\ln y - y, \Rightarrow \boxed{F(x,y) = -4y\cos x - x^2 + y\ln y - y}$$

б) $x\,dx = (y\cdot e^{2y} + x^2)\,dy$

$$\underbrace{(y\cdot e^{2y} + x^2)}_{M(x,y)}dy + \underbrace{(-x)}_{N(x,y)}dx = 0$$

Проверим на ДУ в П.Д:

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial x} = 2x$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial y} = 0$

$\Rightarrow$ это не ДУ в П.Д

Проверим на однородность:

$M(kx,ky) = ky\cdot e^{2ky} + k^2x^2 = k\cdot y\cdot(e^{2y})^k + k^2x^2 = k^0\cdot M(x,y)$

$N(kx,ky) = -kx = k^1\cdot M(x,y)$

$\Rightarrow$ ДУ – неоднородное и нелинейно

М.б. оно приводится к лин. ур-ю

$x\,dx = (ye^{2y} + x^2)dy \quad |:x\,dy$

$\frac{dx}{dy} = \frac{ye^{2y} + x^2}{x}$

$x'(y) = x + \frac{1}{x}ye^{2y} \quad |\cdot x$ (получили ДУ Бернулли)

$x\cdot x'(y) = x^2 + ye^{2y}$

Пусть $z(y) = x^2, \Rightarrow z'(y) = 2x\cdot x'$:

$\frac{1}{2}\cdot z'(y) = z + ye^{2y}, \Rightarrow$ это ЛДУ относ $z(y)$:

Решим ЛДУ методом Лагранжа (вариации)

$\frac{1}{2}z'(y) - z = 0$

$\frac{1}{2}\frac{dz}{dy} = z \quad |\cdot\frac{2dy}{z}$

$\frac{dz}{z} = 2dy$

$\int\frac{dz}{z} = \int 2dy;\ \ln|z| = 2y + C(y);\ \boxed{z = e^{2y + C(y)}}$

$\frac{1}{2}z'(y) - z = ye^{2y}$

$\frac{1}{2}\cdot(e^{2y + C(y)})' - e^{2y + C(y)} = ye^{2y}$

$\frac{1}{2}\cdot e^{2y + C(y)}\cdot(2y + C(y))' - e^{2y + C(y)} = ye^{2y}$

$\frac{1}{2}e^{2y}\cdot e^{C(y)}\cdot(2 + C'(y)) - e^{2y}\cdot e^{C(y)} = ye^{2y}$

$e^{2y}\left(\frac{1}{2}\cdot e^{C(y)}\cdot(2 + C'(y)) - e^{C(y)}\right) = ye^{2y}$

$e^{2y}\left(\frac{1}{2}e^{C(y)}\cdot(2 + C'(y)) - e^{C(y)} - y\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^{2y} = 0 \\ \frac{1}{2}e^{C(y)}\cdot(2 + C'(y)) - e^{C(y)} - y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \in \varnothing \\ e^{C(y)} + \frac{1}{2}e^{C(y)}\cdot C'(y) - e^{C(y)} = y \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^{C(y)})' = y;\ (e^{C(y)})' = 2y, \Rightarrow e^{C(y)} = \int 2y\,dy = 2\cdot\frac{y^2}{2} + C = y^2 + C, \Rightarrow$

$\Rightarrow C(y) = \ln(y^2 + C),\ z = e^{2y + \ln(y^2 + C)} = e^{2y}\cdot(y^2 + C).$

Вернемся к исх. перем:

$\begin{cases} z = e^{2y}\cdot(y^2 + C) \\ z = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = e^{2y}(y^2 + C), \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{e^{2y}(y^2 + C)}}$ – общее решение ДУ.