3. ДУ с РП

22 сентября 2025 г. 16:34

$$y' = \varphi(x)\,\psi(y) \quad *$$

Пример

$$\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy$$

① Выразим y' как $\frac{dy}{dx}$

$$\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy \;\Big|\, : dx$$

$$\sqrt{y^2+1} = xy\,\frac{dy}{dx}$$

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\varphi(x)}\,\underbrace{\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}}_{\psi(y)}$$ Это ДУ с РП в виде $(*)$

2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\,\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}$$

3) Разделим исходное на $x\,dx$ и $y\,dy$:

$$dy = \frac{1}{x}\,\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}\,dx$$

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\,dy = \frac{1}{x}\,dx$$

4) $$\int \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(y^2+1)}{\sqrt{y^2+1}} = \ln|x| + C_1$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{y^2+1}}{\frac{1}{2}} + C_2 = \ln|x| + C_1$$

$$\sqrt{y^2+1} = \ln|x| + C$$

5) Поиск потерянных решений:

$\frac{\sqrt{y^2+1}}{y} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{y^2+1} = 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = -1 \\ y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow y = \varnothing \in \mathbb{R}$ (написать подробно)

$xy = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$

$x = 0$:

$\sqrt{y^2+1}\, d(0) = y \cdot 0\, dy$

$0 = 0$, $x=0$ возможно потер. реш-е

$y = 0$:

$\sqrt{0^2+1}\, dx = 0 \cdot x \cdot d(0)$

$dx \neq 0$, $\Rightarrow y = 0$ не явл-ся решением ДУ т.к. не получим тождество

т.к. $\ln(x)$ $x=0$ не определён, $x=0$ – потерянное решение ДУ.

Ответ: $\sqrt{y^2+1} = \ln|x| + C$

Однородные ДУ 1-го порядка (ОДУ)

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$; Замена $z(x) = \frac{y}{x}$; $\quad y = z(x) \cdot x$ $\quad *$

$y' = z'x + z$

Пр1

$\frac{y'}{y} = \frac{\ln y - \ln x}{x}$

1) Выразим y':

$y' = \frac{y}{x}(\ln y - \ln x) = \underbrace{\frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}}_{\text{ф-ция от } \frac{y}{x}}$, $\Rightarrow$ это ОДУ

2) Сделаем замену в $(*)$

$\underbrace{z'x + z}_{y'} = \underbrace{z \cdot \ln z}_{f(\frac{y}{x})}$

3) Выразим z'

$$z' = \frac{1}{x}(z\ln z - z)$$

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$$

4) Решим получ. ДУ с РП

1) $z' = \frac{1}{x} z(\ln(z) - 1)$

2) $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} z(\ln(z) - 1)$

3) $\frac{dz}{z(\ln(z)-1)} = \frac{dx}{x}$

$$\int \frac{dz}{z(\ln(z)-1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$d(\ln z) = \frac{1}{z} dz$$

$$\int \frac{d\ln(z)}{\ln(z)-1} = \int \frac{d(\ln(z)-1)}{\ln(z)-1} = \ln|\ln(z)-1| + C_2$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_1$$

$$\ln|\ln(z)-1| = \ln|x| + C$$

$$\ln(z) - 1 = x \cdot e^C$$

константы

$$\ln z - 1 = xC$$

– так нельзя, лучше 1-й вариант (т.к. $e^C \neq 0$, а C вполне м.б.$=0$)

5) Сделаем обратную замену

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = Cx + 1$$

6) Пот. решения.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} z(\ln(z)-1) = 0 \\ z = \frac{y}{x} \end{cases} \\ x = 0 \end{array}\right.$$

1) $z(\ln(z)-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ \ln(z) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ z = e \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ y = ex \end{array}\right.$

$y' = \ln y - \ln x$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln y - \ln x}{x}$$

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = Cx + 1$$

Проверяем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \text{— не реш.} \\ y = ex \\ x = 0 \text{ — не реш.} \end{array}\right.$

$y = ex$:

$$\frac{(ex)'}{ex} = \frac{\ln(ex) - \ln(x)}{x}$$

$$\frac{e}{ex} = \frac{\ln \frac{ex}{x}}{x}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{\ln e}{x}$$

$\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$, $\Rightarrow$ $y = ex$ возможно пом. решение

$$\ln \frac{ex}{x} = Cx + 1$$

$$\ln e = Cx + 1$$

$$1 = Cx + 1$$

$Cx = 0$, C может быть 0, значит $y = ex$ не помер.