

20251025 CSP-J 公开模拟赛

P14304 【MX-J27-T1】分块

题目描述

小 L 喜欢分块，于是小 L 给了你一个正整数 n ，你需要统计有多少个不超过 n 的正整数 x 满足 $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ 是 x 的因数。

因为小 L 怕你浑水摸鱼，所以小 L 给了你 q 组不同的询问 n_1, \dots, n_q ，每组询问的 n_i 可能不同。你需要对每个 $n = n_i$ 求出正确答案。

题面中的 $\lfloor \cdot \rfloor$ 为向下取整符号， $\lfloor a \rfloor$ 表示最大的不超过 a 的整数。例如， $\lfloor 1.9 \rfloor = 1$ ， $\lfloor 7 \rfloor = 7$ ，而 $\lfloor \pi \rfloor = 3$ 。

输入格式

第一行，一个整数 q 。

接下来 q 行，第 i 行一个正整数 n_i ，表示第 i 组询问对应的 n 的值。

输出格式

输出共 q 行。

第 i 行输出一个整数，表示 $n = n_i$ 时小 L 的问题的答案。

输入输出样例 #1

输入 #1

1	5
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15

输出 #1

1	1
2	3
3	5
4	7
5	9

说明/提示

【样例解释 #1】

对 $n = 6$ ，共有 5 个不超过 6 的正整数 x 符合题意：

- 若 $x = 1$ ， $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 1$ ，由于 1 是 1 的因数，所以 $x = 1$ 符合条件；
- 若 $x = 2$ ， $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 1$ ，由于 1 是 2 的因数，所以 $x = 2$ 符合条件；
- 若 $x = 3$ ， $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 1$ ，由于 1 是 3 的因数，所以 $x = 3$ 符合条件；
- 若 $x = 4$ ， $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2$ ，由于 2 是 4 的因数，所以 $x = 4$ 符合条件；
- 若 $x = 5$ ， $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2$ ，由于 2 不是 5 的因数，所以 $x = 5$ 不符合条件；
- 若 $x = 6$ ， $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2$ ，由于 2 是 6 的因数，所以 $x = 6$ 符合条件。

类似地，可以得到 n 取 1, 3, 10, 15 时的答案分别为 1, 3, 7 和 9。

【数据范围】

本题共 10 个测试点，每个 10 分。

对于所有数据，保证：

- $1 \leq q \leq 10^5$ ；
- $1 \leq n_i \leq 10^{18}$ 。

测试点编号	$n_i \leq$	$q \leq$	特殊性质
1 ~ 2	10^6	10	有
3	\wedge	\wedge	无
4	\wedge	10^5	\wedge
5	10^{11}	10	有
6	\wedge	10^5	\wedge
7 ~ 8	\wedge	\wedge	无
9 ~ 10	10^{18}	\wedge	\wedge

- 特殊性质：保证 n_i 是完全平方数。

P14304 【MX-J27-T1】 分块

■ 题意

给定一个整数 n ，计算满足特定条件的整数数量。具体来说，对于每个整数 d ，当 $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = d$ 时，需要统计满足条件的 x 的个数。

数据范围： T 组测试数据， n 的范围未明确给出，但算法需要高效处理。

■ 分析

对于每个满足 $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = d$ 的整数 d , x 的取值范围为 $[d^2, (d+1)^2 - 1]$ 。在该区间内满足条件的 x 个数为：
 $\left\lfloor \frac{(d+1)^2 - 1}{d} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{d^2 - 1}{d} \right\rfloor = d + 2 - \left\lfloor d - \frac{1}{d} \right\rfloor = d + 2 - (d - 1) = 3$

设 d_0 为最大的满足 $(d+1)^2 - 1 < n$ 的整数，则：

- 对于 $d = 1$ 到 d_0 ，每个 d 贡献 3 个满足条件的 x
- 对于 $d = d_0 + 1$ ，需要特殊处理，计算其贡献

计算 d_0 可以使用二分查找法，找到最大的 d 满足 $d^2 + 2d \leq n$ 。

时间复杂度： $O(T \log n)$ ，其中 T 为测试数据组数。

■ 参考代码

```
1  #include<bits/stdc++.h>
2  #define int long long
3  using namespace std;
4
5  int T, n, ans;
6
7  signed main() {
8      ios::sync_with_stdio(false);
9      cin.tie(0); cout.tie(0);
10
11     cin >> T;
12     while(T--) {
13         cin >> n;
14         int l = 1, r = sqrt(n), mid;
15
16         // 二分查找最大的 d 满足 d^2 + 2d <= n
17         while(l < r) {
18             mid = (l + r) / 2;
19             if(mid * mid + 2 * mid <= n) {
20                 l = mid + 1;
21             } else {
22                 r = mid;
23             }
24         }
25         l--;
26
27         ans = 3 * l; // 前 d0 个 d 各贡献 3 个 x
28
29         // 特殊处理 d = d0 + 1 的情况
30         for(int i = 0; i < 3; i++) {
31             if((l + 1) * (l + 1) + i * (l + 1) <= n) {
32                 ans++;
33             }
34         }
35
36         cout << ans << "\n";
37     }
```

```
38     return 0;
39 }
```

P14305 【MX-J27-T2】 转换

题目描述

给出一个仅包含 `char`、`bool`、`int`、`long long`、`float`、`double` 六种类型的变量和 `+`、`*`、`,` 三种运算符的表达式。你希望求出该表达式运算结果的类型。

在 C++ 里，编译器在表达式求值时，如果发现参与运算的对象类型不一致，会尝试进行隐式类型转换。在本题里，我们只考虑在 `+` 或 `*` 运算中，部分编译器会自动完成的类型转换操作：

- 对两个相同类型的变量 `a, b`，表达式 `a+b` 和 `a*b` 的返回值的类型同时与 `a, b` 的类型相同。
- 所有占用字节数小于 `int` 字节数的类型（如 `char`）会自动转换为 `int`。
- 对两个整型的运算，编译器会将其转化为 **精度更高（占用字节数更多）的数据类型** 进行运算。
 - 如对于表达式 `c+d`，若 `c, d` 分别为 `int` 和 `long long` 类型，编译器会先将 `c` 转换为 `long long` 类型，然后做 `long long` 类型的加法，运算结果也为 `long long` 类型。
 - 对两个浮点类型的运算，其规则类似。
- 当整数类型和浮点类型同时参与运算时，所有整数类型都会转换为其中 **精度最高的浮点类型**。
 - 如对于表达式 `e*f`，若 `e, f` 分别为 `long long` 和 `float` 类型，编译器会先将 `e` 转换为 `float` 类型，然后做 `float` 类型的乘法，运算结果也为 `float` 类型。

表达式 `f, g` 的返回值为 `g`。因此，`,` 运算的运算结果类型与其第二个运算对象相同。注意，运算 `,` 的优先级低于运算 `+` 与 `*`。

为了方便，我们只给出表达式中每个变量的类型，而不涉及其变量名称。也就是说，表达式总形如

$$l_1o_1l_2o_2\ldots l_{n-1}o_{n-1}l_n$$

的形式，其中 l_i, o_i 都是字符串，满足 $l_i \in \{\text{char}, \text{bool}, \text{int}, \text{longlong}, \text{float}, \text{double}\}$ ，表示第 i 个变量对应的类型名称（特别地，`long long` 用不带空格的 `longlong` 表示）；且 $o_i \in \{+, *, ,\}$ ，表示表达式中第 i 个运算符的类型。

输入格式

本题有多组测试数据。

第一行，两个整数 c, T ，分别表示测试点编号与测试数据组数。接下来输入每组测试数据。样例满足 $c = 0$ 。

对于每组测试数据：

- 仅一行，包含一个字符串 s ，表示给定的表达式。

保证 s 可以写为 $l_1o_1l_2o_2\ldots l_{n-1}o_{n-1}l_n$ 的形式，该形式在【题目描述】中有对应的更严格的约束。

输出格式

对于每组测试数据：

- 输出一行一个字符串，表示给定的表达式的运算结果的类型（类似地，若运算结果的类型为 `long long`，输出不带空格的 `longlong`）。

输入输出样例 #1

输入 #1

```
1 0 5
2 char
3 int+bool
4 float*int+longlong
5 int+char*bool+double
6 float+bool*double,int*longlong+char
```

输出 #1

```
1 char
2 int
3 float
4 double
5 longlong
```

说明/提示

【样例解释 #1】

对于第一组数据，没有任何运算符，因此返回值类型即为唯一的变量的类型 `char`。

对于第二组数据，由于 `bool` 会自动转换为 `int`，`int` 与 `int` 加法，返回值类型仍然为 `int`。

对于第三组数据，先计算 `float*int` 得到 `float` 类型，再计算 `float+longlong` 得到 `float` 类型。

对于第四组数据，先计算 `char*bool` 得到 `int` 类型，再计算 `int+int+double` 得到 `double` 类型。

对于第五组数据，先计算 `bool*double` 和 `int*longlong` 得到 `float+double,longlong+char`，再计算 `float+double` 和 `longlong+char` 得到 `double,longlong`，最终返回值的类型为 `longlong`。

【数据范围】

本题共 10 个测试点，每个 10 分。

令 n 为表达式中的运算对象数量。对于所有数据，保证：

- $1 \leq T \leq 10$;
- $1 \leq n \leq 10^5$;
- 输入字符串总可以写为 $l_1o_1l_2o_2\ldots l_{n-1}o_{n-1}l_n$ 形式，其中：

- $l_i \in \{\text{char}, \text{bool}, \text{int}, \text{longlong}, \text{float}, \text{double}\};$
- $o_i \in \{+, *, , \}$ 。

测试点编号	$n \leq$	特殊性质
1	2	无
2 ~ 3	100	无
4	10^5	ABC
5	\wedge	AB
6	\wedge	AC
7	\wedge	A
8	\wedge	B
9	\wedge	C
10	\wedge	无

- 特殊性质 A：不存在类型 `float` 和 `double`。
- 特殊性质 B：不存在类型 `char` 和 `bool`。
- 特殊性质 C：不存在运算符 `,`。

P14305 【MX-J27-T2】 转换

■ 题意

给定 T 个表达式字符串，每个字符串包含变量类型（如 `char`、`bool`、`int` 等）和运算符（如逗号 `,`、乘号 `*`、加号 `+` 等）。需要根据优先级规则确定每个表达式的最终类型。规则包括：

- 变量类型有优先级：`char, bool` < `int` < `longlong` < `float` < `double`。
- 运算符 `,` 会忽略之前的内容（重置当前类型）。
- 运算符 `*` 和 `+` 会将当前类型为 `char` 或 `bool` 的变量转换为 `int`。

■ 分析

核心思路是通过遍历表达式字符串，根据规则动态更新当前类型优先级。使用一个变量 `ans` 记录当前最高优先级：

- 初始化 `ans = 0`。
- 遍历字符串的每个字符：
 - 遇到 `,`（逗号）时，重置 `ans = 0`。
 - 遇到类型关键字（如 `c` 对应 `char`）时，更新 `ans` 为对应优先级的最大值。
 - 遇到运算符 `*` 或 `+` 时，若当前优先级低于 `int`，则强制提升为 `int`。

- 最终根据 ans 的值输出类型名称。

时间复杂度： $O(T \times |s|)$ ，其中 $|s|$ 为字符串长度，每个字符处理一次。

■ 参考代码

```
1  #include<bits/stdc++.h>
2  #define ll long long
3  using namespace std;
4
5  ll c, T, ans;
6  string s;
7
8  int main() {
9      ios::sync_with_stdio(false);
10     cin.tie(0);
11     cout.tie(0);
12     cin >> c >> T;
13     while (T--) {
14         cin >> s;
15         ans = 0;
16         for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
17             if (s[i] == '.') ans = 0; // 逗号, 忽略前面内容
18             if (s[i] == 'c') ans = max(1ll, ans); // char 优先级为1
19             if (s[i] == 'b' && s[i + 1] == 'o') ans = max(2ll, ans); // bool 优先级为2
20             if (s[i] == 'i' && s[i + 1] == 'n') ans = max(3ll, ans); // int 优先级为3
21             if (s[i] == '*' || s[i] == '+') ans = max(3ll, ans); // * 或 + 强制提升为
int
22             if (s[i] == 'l' && s[i + 1] == 'o') ans = max(4ll, ans); // longlong 优先
级为4
23             if (s[i] == 'f') ans = max(5ll, ans); // float 优先级为5
24             if (s[i] == 'd') ans = max(6ll, ans); // double 优先级为6
25         }
26         if (ans == 1) puts("char");
27         else if (ans == 2) puts("bool");
28         else if (ans == 3) puts("int");
29         else if (ans == 4) puts("longlong");
30         else if (ans == 5) puts("float");
31         else puts("double");
32     }
33     return 0;
34 }
```

P14306 【MX-J27-T3】 旋律

题目描述

风铃草有一段旋律，旋律可以用 n 个正整数 a_1, a_2, \dots, a_n 描述。

风铃草喜欢更加悠长的旋律；但音符之间过大的差异又会破坏一段旋律整体的和谐。为此，她定义一段旋律序列的**和谐度**为序列的长度乘以 k (k 为正整数常数) 再减去序列内元素的极差。

给定 k ，你需要选出序列 a_1, \dots, a_n 的一个**非空子序列**，最大化它的**和谐度**。你只需要求出最大的和谐度即可。

【提示】

一个序列 a_1, \dots, a_n 的极差定义为 a 中最大值减最小值得到的结果。换句话说，它等于 $\max(a_1, \dots, a_n) - \min(a_1, \dots, a_n)$ 。

序列 a 是序列 b 的非空子序列，当且仅当 a 非空，且在 b 中删去任意若干个（可能为 0 个）元素后， b 可以变为 a 。

输入格式

本题有多组测试数据。

第一行，两个整数 c, T ，分别表示测试点编号与测试数据组数。接下来输入每组测试数据。样例满足 $c = 0$ 。

对于每组测试数据：

- 第一行，两个正整数 n 和 k ，分别表示旋律序列的长度和给定的常数。
- 第二行， n 个正整数 a_1, a_2, \dots, a_n 。

输出格式

对于每组测试数据：

- 输出一行一个整数，表示所有非空子序列的和谐度的最大值。

输入输出样例 #1

输入 #1

1	0 2
2	3 3
3	3 1 8
4	6 1
5	1 1 4 5 1 4

输出 #1

1	4
2	3

说明/提示

【样例解释 #1】

对于第一组数据， $a = [3, 1, 8]$ ， $k = 3$ 。考虑枚举所有的非空子序列：

1. 选择子序列 $[a_1]$ ，和谐度为 $3 \times 1 - (3 - 3) = 3$;
2. 选择子序列 $[a_1, a_2]$ ，和谐度为 $3 \times 2 - (3 - 1) = 4$;
3. 选择子序列 $[a_1, a_2, a_3]$ ，和谐度为 $3 \times 3 - (8 - 1) = 2$;
4. 选择子序列 $[a_1, a_3]$ ，和谐度为 $3 \times 2 - (8 - 3) = 1$;
5. 选择子序列 $[a_2]$ ，和谐度为 $3 \times 1 - (1 - 1) = 3$;
6. 选择子序列 $[a_2, a_3]$ ，和谐度为 $3 \times 2 - (8 - 1) = -1$;
7. 选择子序列 $[a_3]$ ，和谐度为 $3 \times 1 - (8 - 8) = 3$ 。

因此，和谐度最大的非空子序列为 $[a_1, a_2]$ 即 $[3, 1]$ ，其和谐度为 4。

对于第二组数据，和谐度最大的非空子序列为 $[1, 1, 1]$ ，其和谐度为 3。

【数据范围】

本题共 20 个测试点，每个 5 分。

对于所有数据，保证：

- $1 \leq T \leq 10$;
- $1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq k \leq 10^8$;
- $1 \leq a_i \leq 10^8$ 。

::cute-table{tuack}

测试点编号	$n \leq$	特殊性质
1 ~ 2	5	无
3 ~ 4	18	^
5	1000	A
6	^	B
7 ~ 8	^	C
9 ~ 11	^	无
12 ~ 13	10^5	A
14 ~ 15	^	B
16 ~ 17	^	C
18 ~ 20	^	无

- 特殊性质 A：保证数列 a 是一个公差非负的等差数列。换句话说，存在一个整数 $d \geq 0$ ，满足对所有 $1 \leq i < n$ ，都有 $a_{i+1} - a_i = d$ 。
- 特殊性质 B：保证 $k = 10^8$ 。
- 特殊性质 C：保证 $k = 1$ 且 $1 \leq a_i \leq n$ 。

P14306 【MX-J27-T3】 旋律

■ 题意

给定 T 组测试数据，每组数据包含一个序列 a_1, a_2, \dots, a_n 和一个正整数 k 。需要选出一个非空子序列，使得和谐度 $L \times k - (max - min)$ 最大，其中 L 是子序列长度， max 和 min 分别是子序列中的最大值和最小值。

数据范围： T 组数据， n 的具体范围未明确，但算法需高效处理 n 较大的情况。

■ 分析

由于和谐度只与子序列的最小值和最大值有关，与元素顺序无关，因此先将序列升序排序。排序后，最优解一定对应一个连续子数组（因为添加中间元素可能增加长度而不增加极差，或净收益为正）。

设排序后的序列为 b_1, b_2, \dots, b_n ($b_i \leq b_{i+1}$)。对于连续子数组 $[i, j]$ ，和谐度为：

$$(j - i + 1) \times k - (b_j - b_i)$$

直接枚举所有子数组的复杂度为 $O(n^2)$ ，需优化。

考虑差分：极差 $b_j - b_i = \sum_{k=i+1}^j (b_k - b_{k-1})$ 。定义贡献值 $w_k = k - (b_k - b_{k-1})$ ($k \geq 2$)，则和谐度可表示为：

$$k + \sum_{k=i+1}^j w_k$$

其中 k 对应长度为 1 的子序列基础值。问题转化为求 w 数组的最大子段和。使用动态规划：

- 状态 f_i 表示以 w_i 结尾的最大子段和
- 转移： $f_i = \max(f_{i-1} + w_i, 0)$
- 答案： $\max(k, k + \max_i f_i)$

时间复杂度：排序 $O(n \log n)$ ，动态规划 $O(n)$ ，总复杂度 $O(n \log n)$ 。

■ 参考代码

```
1  #include<bits/stdc++.h>
2  #define int long long
3  using namespace std;
4  const int N = 1e6 + 5;
5  int T, n, k, a[N], f[N], ans;
6
7  signed main() {
8      scanf("%lld", &T);
9      while (T--) {
10         scanf("%lld%lld", &n, &k);
11         for (int i = 1; i <= n; i++) scanf("%lld", &a[i]);
12         sort(a + 1, a + n + 1);
13         ans = k;
14         f[1] = 0;
15         for (int i = 2; i <= n; i++) {
16             f[i] = max(f[i - 1] + k - (a[i] - a[i - 1]), 0LL);
17             ans = max(ans, k + f[i]);
18         }
19         printf("%lld\n", ans);
20     }
21     return 0;
```

P14307 【MX-J27-T4】点灯

题目描述

有一个由 n 座城市构成的国家，其城市之间将由 m 条双向道路互相连接，第 i 条道路连接城市 u_i 和城市 v_i ；但由于工程延期，第 i 条道路只在第 w_i 天及以后开放。保证这些双向道路两两不同，每条道路连接两个不同的城市，且在所有道路开放后，从城市 1 出发可以到达其余所有城市。

每座城市都设有若干街灯，用于夜间照明。每个夜晚降临后，每位点灯人仅点亮自己所在城市的灯；而日出后，点灯人又会熄灭自己所在城市的灯。初始时，有充分多的点灯人在城市 1。这被记作第 0 夜。

为了给国家的每座城市照明，每位点灯人**必须**在每天白天沿城市之间的道路移动。具体地，对每个正整数 t ，设第 $t - 1$ 夜某位点灯人在城市 x ，则他在第 t 天**必须**沿着某条一端为城市 x 且已经开放（即 w 值不超过 t ）的道路，随后恰好在第 t 夜到达道路的另一个端点。如果有多条不同的道路，则每位点灯人会独立地随机选择一条；特别地，如果这样的道路不存在，则这位点灯人会失望地离开这个国家。

你想知道是否存在一个非负整数 d ，满足在第 d 夜，所有城市内的灯都被点亮；换句话说，在第 d 夜，每个城市内都存在至少一位点灯人。如果存在，你还希望找到符合条件的最小可能的 d 。

出于某些原因，给定一个参数 $o \in \{0, 1\}$ ，你只需要在 d 存在时输出 $o \cdot d$ 的值即可。

输入格式

本题有多组测试数据。

第一行，两个整数 c, T ，分别表示测试点编号与测试数据组数。接下来输入每组测试数据。样例满足 $c = 0$ 。

对于每组测试数据：

- 第一行，三个正整数 n, m 和 o ，分别表示城市数量，道路数量，和给定的参数。
- 接下来 m 行，第 i 行包含三个整数 u_i, v_i, w_i 。

保证这些双向道路两两不同，每条道路连接两个不同的城市，且在所有道路开放后，从城市 1 出发可以到达其余所有城市。

输出格式

对于每组测试数据，输出一行一个整数：

- 若存在满足条件的非负整数 d ，则输出满足条件的最小可能的 d 与 o 的乘积；
- 若不存在满足条件的非负整数 d ，输出 -1 。

输入输出样例 #1

输入 #1

1	0	2	
2	4	4	1
3	2	1	2
4	1	3	1
5	1	4	1
6	3	4	2
7	3	2	1
8	1	2	2
9	1	3	3

输出 #1

1	3
2	-1

说明/提示

【样例解释 #1】

对于第一组测试数据：

- 在第 0 夜，只有第 1 个城市存在充分多的点灯人，灯亮的城市为第 1 个城市。
- 在第 1 天，第 1 个城市的点灯人全部移动至城市 3 和 4。注意，点灯人不能移动到城市 2，因为道路 (1, 2) 在第 $w = 2$ 天后才建设完成。因此，在第 1 夜，灯亮的城市为第 3, 4 个城市；由于点灯人数量充分多，所以必然有一些点灯人到达城市 3，而另外一些点灯人到达城市 4。
- 在第 2 天，第 3 个城市的点灯人全部移动到城市 1, 4，而第 4 个城市的点灯人全部移动到城市 1, 3。因此，在第 2 夜，灯亮的城市有第 1, 3, 4 个城市。
- 在第 3 天，第 1 个城市的点灯人全部移动到城市 2, 3, 4，第 3 个城市的点灯人全部移动到城市 1, 4，而第 4 个城市的点灯人全部移动到城市 1, 3。因此，在第 3 夜，所有城市的灯都被点亮。

因此， $d = 3$ ，输出 $o \cdot d$ 即 3。

对于第二组测试数据，在第 1 天，城市 1 邻接的所有道路都未开放，因此所有点灯人都无法移动，他们会离开这个国家。因此，不存在符合条件的非负整数 d ，输出 -1 。

【数据范围】

本题共 25 个测试点，每个 4 分。

对于所有数据，保证：

- $1 \leq T \leq 10$;
- $2 \leq n \leq 2.5 \times 10^4$;
- $n - 1 \leq m \leq 5 \times 10^4$;
- $o \in \{0, 1\}$;
- 对所有 $1 \leq i \leq m$, $1 \leq u_i, v_i \leq n$, $u_i \neq v_i$, $1 \leq w_i \leq 10^9$;
- 保证双向道路两两不同;

- 保证在所有道路开放后，从城市 1 出发可以到达其余所有城市。

测试点编号	$n \leq$	$m \leq$	$o =$	特殊性质
1 ~ 2	10	20	1	A
3 ~ 4	10^3	2×10^3	\wedge	B
5 ~ 6	\wedge	\wedge	0	无
7 ~ 8	\wedge	\wedge	1	\wedge
9 ~ 11	2.5×10^4	5×10^4	0	B
12 ~ 14	\wedge	\wedge	\wedge	无
15 ~ 16	\wedge	\wedge	1	B
17 ~ 19	10^4	2×10^4	\wedge	C
20 ~ 21	2.5×10^4	5×10^4	\wedge	\wedge
22 ~ 25	\wedge	\wedge	\wedge	无

- 特殊性质 A：保证 $w_i \leq 2 \times 10^5$ 。
- 特殊性质 B：保证 w_i 全部相等。
- 特殊性质 C：保证非负整数 d 存在。

P14307 【MX-J27-T4】 点灯

■ 题意

给定一个由 n 个城市和 m 条双向道路组成的图，每条道路有一个开放时间 w_i ，表示在第 w_i 天及以后才能使用。点灯人从城市 1 开始，每天必须沿开放的道路移动到一个相邻城市。目标是找到最小的非负整数 d ，使得在第 d 夜，每个城市都有至少一个点灯人。如果存在 d ，输出 $o \cdot d$ ；否则输出 -1 。

数据范围： T 组测试数据， $2 \leq n \leq 2.5 \times 10^4$ ， $n - 1 \leq m \leq 5 \times 10^4$ ， $o \in \{0, 1\}$ ， $1 \leq w_i \leq 10^9$ 。

■ 分析

关键观察：点灯人可以通过在一条边上来回移动来增加路径长度，但不会改变路径长度的奇偶性。因此，对于每个城市，我们只需要关心从城市 1 到达该城市的路径长度的奇偶性。

解决方案：

- 使用分层图模型，将每个城市拆分为两个状态：表示到达该城市时路径长度为偶数的状态和路径长度为奇数的状态。
- 定义 $dis[i][0]$ 为从城市 1 到城市 i 的偶数长度最短路径值， $dis[i][1]$ 为奇数长度最短路径值。

- 通过 Dijkstra 算法计算这些最短路径，考虑边的开放时间限制：当通过一条边时，如果当前路径长度小于边的开放时间 w_i ，则需要通过来回移动增加路径长度，直到满足开放时间。具体地，如果当前长度 $t < w_i$ ，则调整后的长度 $t' = t + 2 \cdot \lceil (w_i - t) / 2 \rceil$ ，确保 $t' \geq w_i$ 且奇偶性不变。
- 计算完所有 $dis[i][0]$ 和 $dis[i][1]$ 后，对于每个城市，我们关心的是能够到达该城市的最小 d ，即 d 必须大于等于所有城市所需的最小路径长度。因此，取所有 $dis[i][0]$ 的最大值 max_even 和所有 $dis[i][1]$ 的最大值 max_odd ，然后 $d = \min(max_even, max_odd)$ 。
- 如果存在城市无法通过任何路径到达（即 $dis[i][0]$ 和 $dis[i][1]$ 均为无穷大），则无解，输出 -1 。
- 此外，需要检查初始条件：如果从城市 1 出发的所有边都要求 $w_i > 0$ ，则点灯人无法在第一天移动，因此无解。

时间复杂度：使用 Dijkstra 算法，每个节点有两个状态，因此时间复杂度为 $O((n + m) \log n)$ 。

■ 参考代码

```

1  #include <bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  typedef long long ll;
4  const int N = 25005;
5  const ll INF = 0x7fffffffll * 100;
6
7  struct Edge {
8      int v, w;
9  };
10
11 vector<Edge> graph[N];
12 ll dis[N][2];
13 bool vis[N][2];
14
15 struct Node {
16     int u, op;
17     ll dist;
18     bool operator<(const Node& other) const {
19         return dist > other.dist;
20     }
21 };
22
23 int main() {
24     int c, T;
25     scanf("%d %d", &c, &T);
26     while (T--) {
27         int n, m, o;
28         scanf("%d %d %d", &n, &m, &o);
29         for (int i = 1; i <= n; i++) {
30             graph[i].clear();
31             dis[i][0] = dis[i][1] = INF;
32             vis[i][0] = vis[i][1] = false;
33         }
34
35         bool flag = false;
36         for (int i = 0; i < m; i++) {

```

```

37         int u, v, w;
38         scanf("%d %d %d", &u, &v, &w);
39         graph[u].push_back({v, w});
40         graph[v].push_back({u, w});
41         if ((u == 1 || v == 1) && w == 0) {
42             flag = true;
43         }
44     }
45
46     if (!flag) {
47         printf("-1\n");
48         continue;
49     }
50
51     priority_queue<Node> pq;
52     dis[1][0] = 0;
53     pq.push({1, 0, 0});
54
55     while (!pq.empty()) {
56         Node current = pq.top();
57         pq.pop();
58         int u = current.u;
59         int op = current.op;
60         ll dist = current.dist;
61
62         if (vis[u][op]) continue;
63         vis[u][op] = true;
64
65         for (const Edge& e : graph[u]) {
66             int v = e.v;
67             int w = e.w;
68             ll new_dist = dist;
69             if (new_dist < w) {
70                 ll diff = w - new_dist;
71                 if (diff % 2 == 0) {
72                     new_dist = w;
73                 } else {
74                     new_dist = w + 1;
75                 }
76             }
77             new_dist += 1;
78             int new_op = new_dist % 2;
79             if (new_dist < dis[v][new_op]) {
80                 dis[v][new_op] = new_dist;
81                 pq.push({v, new_op, new_dist});
82             }
83         }
84     }
85
86     ll max_even = 0, max_odd = 0;
87     bool possible = true;
88     for (int i = 1; i <= n; i++) {

```

```
89         if (dis[i][0] == INF && dis[i][1] == INF) {
90             possible = false;
91             break;
92         }
93         if (dis[i][0] != INF) {
94             max_even = max(max_even, dis[i][0]);
95         }
96         if (dis[i][1] != INF) {
97             max_odd = max(max_odd, dis[i][1]);
98         }
99     }
100
101     if (!possible) {
102         printf("-1\n");
103     } else {
104         ll d = min(max_even, max_odd);
105         printf("%lld\n", o * d);
106     }
107 }
108 return 0;
109 }
```