

# 信息学竞赛 - 提高组

分治与倍增算法

归并排序与快速幂

## 本章内容

1. 归并排序原理与实现
2. 逆序对问题求解
3. 快速幂算法原理
4. 麦森数计算
5. 火柴排队问题

## 目标

- 掌握分治思想在排序中的应用
- 理解倍增思想在幂运算中的优化
- 能够应用这些算法解决实际问题

# 归并排序

## 基本思想

分治策略 (Divide and Conquer):

1. 分解: 将待排序序列分成两个子序列
2. 解决: 递归地对子序列进行排序
3. 合并: 将两个有序子序列合并成一个有序序列

时间复杂度:

- 最优:  $O(n \log n)$
- 最差:  $O(n \log n)$
- 平均:  $O(n \log n)$

空间复杂度:  $O(n)$



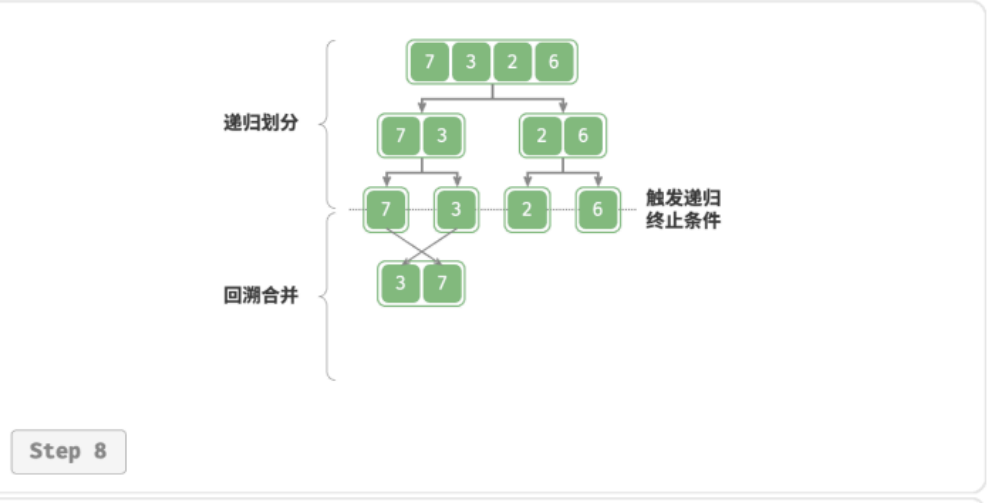
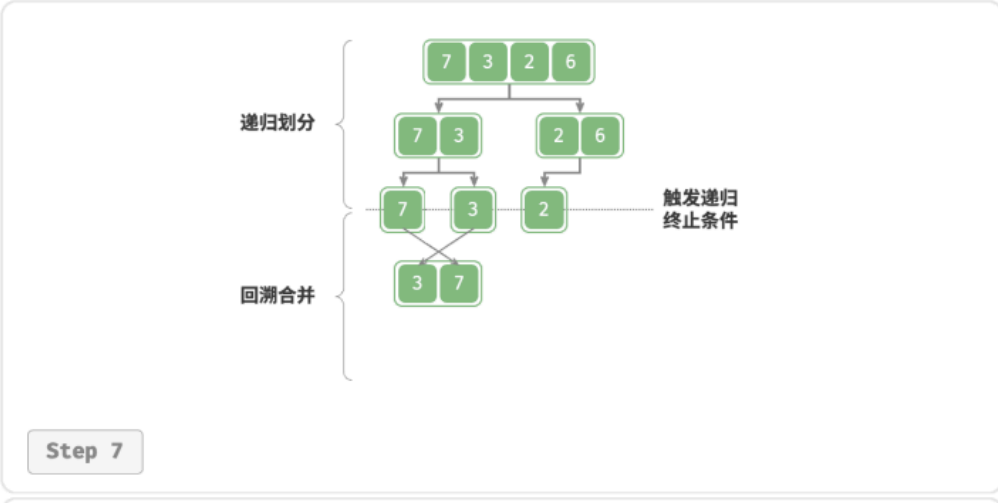
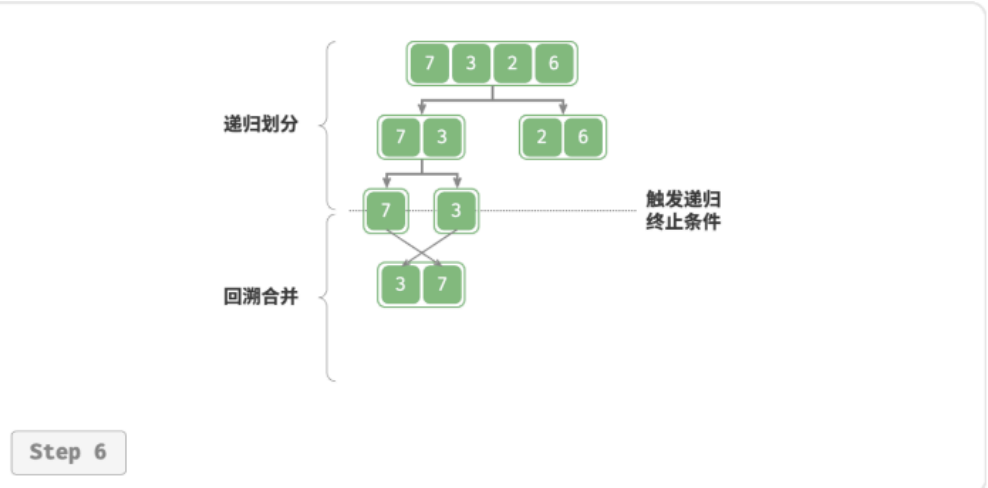
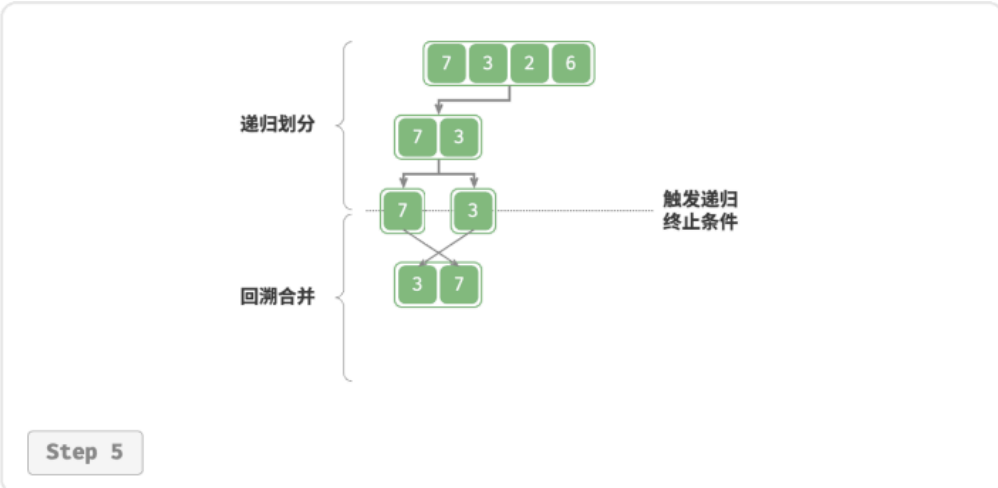




图 11-11 归并排序步骤

# 归并排序原理

## 分治过程推导

设待排序数组为  $arr[0 \dots n - 1]$

### 1. 分解:

- 计算中点  $mid = \lfloor \frac{0+(n-1)}{2} \rfloor$
- 左子数组:  $arr[0 \dots mid]$
- 右子数组:  $arr[mid + 1 \dots n - 1]$

### 2. 递归排序:

- $mergeSort(arr, 0, mid)$
- $mergeSort(arr, mid + 1, n - 1)$

### 3. 合并:

# 归并排序代码实现

```
const int N = 100010;
int a[N], temp[N];

void mergeSort(int l, int r) {
    if (l >= r) return;

    int mid = (l + r) >> 1;
    mergeSort(l, mid);
    mergeSort(mid + 1, r);

    // 合并两个有序子数组
    int k = 0, i = l, j = mid + 1;
    while (i <= mid && j <= r) {
        if (a[i] <= a[j]) temp[k++] = a[i++];
        else temp[k++] = a[j++];
    }

    // 处理剩余元素
    while (i <= mid) temp[k++] = a[i++];
    while (j <= r) temp[k++] = a[j++];

    // 复制回原数组
    for (i = l, j = 0; i <= r; i++, j++)
        a[i] = temp[j];
}
```

# 逆序对问题

## P1908 逆序对

### 题目描述

给定一个序列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 求逆序对的数量。

**逆序对:** 如果  $i < j$  且  $a_i > a_j$ , 则  $(a_i, a_j)$  是一个逆序对。

**数据范围:**  $1 \leq n \leq 5 \times 10^5$ ,  $|a_i| \leq 10^9$

## 逆序对求解思路

### 暴力解法（不可行）

枚举所有  $i < j$  的组合，检查是否  $a_i > a_j$

时间复杂度： $O(n^2)$ ，对于  $n = 5 \times 10^5$  会超时

### 归并排序优化

在归并排序的合并过程中统计逆序对数量：

### 关键观察:

- 当  $a[i] > a[j]$  时,  $a[i]$  及  $a[i]$  之后的所有元素都与  $a[j]$  构成逆序对
- 逆序对数量增加:  $mid - i + 1$

时间复杂度:  $O(n \log n)$

## 逆序对代码实现

```
long long mergeSortAndCount(int l, int r) {  
    if (l >= r) return 0;  
  
    int mid = (l + r) >> 1;  
    long long res = mergeSortAndCount(l, mid) + mergeSortAndCount(mid + 1, r);  
  
    int k = 0, i = l, j = mid + 1;  
    while (i <= mid && j <= r) {  
        if (a[i] <= a[j]) {  
            temp[k++] = a[i++];  
        } else {  
            // 当a[i] > a[j]时, 统计逆序对  
            res += mid - i + 1;  
            temp[k++] = a[j++];  
        }  
    }  
  
    while (i <= mid) temp[k++] = a[i++];  
    while (j <= r) temp[k++] = a[j++];  
  
    for (i = l, j = 0; i <= r; i++, j++)  
        a[i] = temp[j];  
  
    return res;  
}
```

# 快速幂算法

## 问题背景

计算  $a^b \bmod m$ , 其中  $a, b, m$  都是整数

**暴力解法:** 循环  $b$  次乘法, 时间复杂度  $O(b)$

当  $b$  很大时 (如  $b = 10^9$ ), 暴力方法不可行

## 快速幂思想

倍增思想：利用二进制分解指数

数学原理：

- $a^b = a^{b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + \dots + b_k \cdot 2^k}$
- $a^b = a^{b_0 \cdot 2^0} \times a^{b_1 \cdot 2^1} \times \dots \times a^{b_k \cdot 2^k}$

其中  $b_i$  是  $b$  的二进制表示的第  $i$  位

## 快速幂推导过程

### 二进制分解

设  $b = (b_k b_{k-1} \dots b_1 b_0)_2$ , 其中  $b_i \in \{0, 1\}$

则:

$$a^b = a^{\sum_{i=0}^k b_i \cdot 2^i} = \prod_{i=0}^k a^{b_i \cdot 2^i}$$

## 计算策略:

1. 从低位到高位处理  $b$  的二进制位
2. 维护当前位的权重  $base = a^{2^i}$
3. 如果当前位为 1, 将结果乘以  $base$

时间复杂度:  $O(\log b)$

## 快速幂代码实现

```
// 计算  $a^b \% \text{mod}$ 
long long fastPow(long long a, long long b, long long mod) {
    long long res = 1;
    while (b > 0) {
        // 如果当前二进制位为1, 乘上对应的 $a^{(2^k)}$ 
        if (b & 1) {
            res = res * a % mod;
        }
        // a倍增:  $a^{(2^k)} \rightarrow a^{(2^{k+1})}$ 
        a = a * a % mod;
        // 处理下一位
        b >>= 1;
    }
    return res;
}
```

## P1226 【模板】快速幂

### 题目描述

给定三个整数  $a, b, p$ , 求  $a^b \bmod p$  的值。

### 数据范围：

- $1 \leq a, b, p \leq 10^9$

## 参考代码

```
int main() {  
    long long a, b, p;  
    cin >> a >> b >> p;  
  
    long long res = 1;  
    while (b) {  
        if (b & 1) res = res * a % p;  
        a = a * a % p;  
        b >>= 1;  
    }  
  
    cout << res % p << endl;  
    return 0;  
}
```

## P1045 麦森数

### 题目描述

形如  $2^P - 1$  的素数称为麦森数。计算  $2^P - 1$  的位数和最后 500 位数字。

数据范围:  $1000 \leq P \leq 3100000$

## 麦森数求解思路

### 1. 计算位数

根据对数性质:

- $2^P - 1$  的位数等于  $\lfloor P \cdot \log_{10} 2 \rfloor + 1$

### 2. 计算后500位

- 使用高精度乘法 + 快速幂
- 只保留后500位数字
- 注意减1时的借位处理

## 关键技巧:

- 高精度数组存储大数
- 快速幂优化计算过程
- 只维护必要的位数以减少计算量

## 麦森数代码实现

```
const int LEN = 500; // 只计算500位

// 高精度乘法 (只保留后LEN位)
void multiply(int a[], int b[]) {
    int temp[LEN * 2] = {0};
    for (int i = 0; i < LEN; i++)
        for (int j = 0; j < LEN; j++)
            if (i + j < LEN * 2)
                temp[i + j] += a[i] * b[j];

    // 处理进位
    for (int i = 0; i < LEN; i++) {
        if (i + 1 < LEN * 2) temp[i + 1] += temp[i] / 10;
        a[i] = temp[i] % 10;
    }
}
```

```
int main() {
    int p;
    cin >> p;

    // 计算位数
    int digits = (int)(p * log10(2)) + 1;
    cout << digits << endl;

    // 快速幂计算2^p
    int base[LEN] = {0}, res[LEN] = {0};
    base[0] = 2, res[0] = 1;    // 初始化为2 , 初始化为1

    while (p > 0) {
        if (p & 1) multiply(res, base);
        multiply(base, base);
        p >>= 1;
    }

    // 减1处理
    res[0] -= 1;
    for (int i = 0; i < LEN; i++)
        if (res[i] < 0)
            res[i] += 10, res[i + 1] -= 1;

    // 输出后500位
    for (int i = LEN - 1, cnt = 0; i >= 0; i--, cnt++) {
        cout << res[i];
        if ((cnt + 1) % 50 == 0) cout << endl;
    }

    return 0;
}
```

## P1966 火柴排队

### 题目描述

有两盒火柴，每盒有  $n$  根。每根火柴有一个高度。现在要按高度对齐两盒火柴，求最少交换次数。

数据范围：  $1 \leq n \leq 10^5$ ，  $0 \leq \text{火柴高度} \leq 2^{31} - 1$

## 问题分析

### 关键观察

1. **最优匹配**: 最小化  $\sum (a_i - b_i)^2$  时, 应该让  $a$  和  $b$  都按相同顺序排序
2. **问题转化**: 求通过交换相邻元素, 将一个排列变为另一个排列的最小交换次数
3. **逆序对联系**: 最小交换次数等于逆序对数量

## 求解步骤

1. 对两个数组分别离散化
2. 建立映射关系
3. 求逆序对数量

时间复杂度:  $O(n \log n)$

## 火柴排队代码实现

```
const int N = 100010, MOD = 99999997;  
  
struct Node {  
    int val, id;  
    bool operator<(const Node &other) const { return val < other.val; }  
} a[N], b[N];  
  
int n;  
int c[N], temp[N], pos[N];  
long long ans = 0;
```

```
// 归并排序求逆序对
void mergeSort(int l, int r) {
    if (l >= r) return;

    int mid = (l + r) >> 1;
    mergeSort(l, mid), mergeSort(mid + 1, r);

    int k = 0, i = l, j = mid + 1;
    while (i <= mid && j <= r) {
        if (c[i] <= c[j])
            temp[k++] = c[i++];
        else {
            ans = (ans + mid - i + 1) % MOD;
            temp[k++] = c[j++];
        }
    }

    while (i <= mid) temp[k++] = c[i++];
    while (j <= r) temp[k++] = c[j++];

    for (i = l, j = 0; i <= r; i++, j++)
        c[i] = temp[j];
}
```

```
int main() {
    cin >> n;

    // 读入数据
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        cin >> a[i].val, a[i].id = i;
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        cin >> b[i].val, b[i].id = i;

    // 离散化处理
    sort(a + 1, a + n + 1);
    sort(b + 1, b + n + 1);

    // 建立映射关系
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        pos[a[i].id] = i;
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        c[b[i].id] = pos[i];

    // 求逆序对数量
    mergeSort(1, n);

    cout << ans % MOD << endl;
    return 0;
}
```



# 算法复杂度对比

算法	时间复杂度	空间复杂度	适用场景
归并排序	$O(n \log n)$	$O(n)$	稳定排序，求逆序对
快速幂	$O(\log b)$	$O(1)$	大数幂运算
暴力幂	$O(b)$	$O(1)$	$b$ 很小的情况

## 复习要点

### 归并排序核心

1. 分治思想：分解-解决-合并
2. 稳定性：相等元素相对位置不变
3. 逆序对统计：合并过程中的关键计数

### 快速幂核心

1. 二进制分解：将指数按二进制位拆分
2. 倍增思想： $a^{2^k} = (a^{2^{k-1}})^2$
3. 模运算性质： $(a \times b) \bmod m = [(a \bmod m) \times (b \bmod m)] \bmod m$

## 练习题推荐

1. P1177 **【模板】** 排序：归并排序基础
2. P1908 逆序对：归并排序应用
3. P1226 **【模板】** 快速幂：快速幂基础
4. P1045 麦森数：高精度+快速幂
5. P1966 火柴排队：离散化+逆序对

**掌握分治与倍增，高效解决复杂问题!**