2022 年秋练习

一、（10 分）简述一维搜索中三点二次插值法和 0.618 法的基本思想.

二、（15 分）分别用阻尼牛顿法、FR 共轭梯度法、DFP 方法求解

$$f(x)=2x_1^2+x_2^2-2x_1x_2-4x_2+3$$

的极小点，取初始点 $x^1=(1,1)^T$**，结束精度为**10^{-2}.

三、（10 分）已知约束优化问题

$$\begin{aligned} \min\ & (x_1-3)^2+(x_2-2)^2 \\ s.t.\ & x_1^2+x_2^2\le 5 \\ & x_1+2x_2=4 \\ & x_1,x_2\ge 0, \end{aligned}$$

1. 验证 $\bar{x}=(2,1)^T$ 是否为上述问题的 ***K-T*** 点？

2. 如果 $\bar{x}=(2,1)^T$ 是上述问题的 ***K-T*** 点，进一步验证 $\bar{x}=(2,1)^T$ 是否是上述问题的最优解？

四、**(15 分)** 证明题：

1． 证明公式

$$H_{k+1}=H_k+\frac{(\Delta x^k-H_k\Delta g^k)(\Delta x^k)^T}{(\Delta x^k)^T\Delta g^k}$$

满足拟牛顿条件（拟牛顿方程）；

2． 设 $f(x)=\frac{1}{2}x^TAx+b^Tx+c$， $b,x\in R^n,c\in R,A$ 是 ***n*** 阶对称正定矩阵，

$p^1,p^2,\ldots,p^n$ 为一组 ***A*** 共轭非零向量，证明 $f(x)$ 的最小值点为

$$x^*=\sum_{i=1}^{n}\frac{-\left(p^i\right)^Tb}{\left(p^i\right)^TAp^i}p^i.$$

五、**（10 分）**用 ***Zoutendijk*** 可行方向法求解如下列问题

$$\begin{aligned}\min\ & x_1^2+4x_2^2\\ s.t.\ & x_1+x_2\ge 1\\ & 15x_1+10x_2\ge 12\\ & x_1\ge 0\\ & x_2\ge 0\end{aligned}$$

的最优解和最优值，取初始点 $x^1=(\frac{2}{5},\frac{3}{5})^T$ ，结束精度为10^{-2}.

六、(**10** 分）给定如下非线性规划问题

$$\begin{aligned}\min\ & \|x\|_\infty\\ s.t.\ & Ax=b\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{m\times n},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^m,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ ，

1. 将上面问题转化为线性规划模型；

2. 写出转化后线性规划模型的对偶问题**.**

七、(**10** 分，**专业型**研究生做）以对数函数作为障碍函数的内点法求解下述

问题的最优解和最优值**.**

$$\begin{aligned}\min\ & f(x)=\frac{1}{12}\left(x_1+1\right)^3+x_2\\ s.t.\ & x_1-1\ge 0\\ & x_2\ge 0.\end{aligned}$$

八、**(20** 分，**专业型**研究生做）已知线性规划：

$$\begin{aligned}\min\ & -x_1+2x_2+x_3\\ s.t.\ & -2x_1+x_2-x_3\le 4\\ & x_1+2x_2=6\\ & x_1,x_2,x_3\ge 0.\end{aligned}$$

1. 用大 **M** 法求解所给线性规划的最优解和最优值；

2. 求出所给线性规划的对偶问题的最优解**.**

九、(**10** 分，**学术型**研究生做）以倒数函数作为障碍函数的内点法求解下述

问题的最优解和最优值**.**

$$
\begin{aligned}
&\min\ f(x)=\frac{1}{12}\left(x_1+1\right)^3+x_2\\
&s.t.\quad x_1-1\ge 0\\
&\qquad\ \ x_2\ge 0.
\end{aligned}
$$

十、（**20** 分，**学术型**研究生做）已知线性规划：

$$
\begin{aligned}
&\min\ -4x_1-6x_2+6x_3\\
&s.t.\ \ 2x_1-x_2+x_3\ge 1\\
&\qquad x_1+2x_2-2x_3\le 2\\
&\qquad -x_1\le 1\\
&\qquad x_1\le 0, x_2, x_3\ge 0.
\end{aligned}
$$

1. 用大 **M** 法求解所给线性规划的最优解和最优值；
求出所给线性规划的对偶问题的最优解.