2021年秋练习

一、(10分)设函数 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^{\ 2}+\dfrac{3}{2}x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+x_2x_3-4x_3-2x_1+2021$.

（1）判断该函数的凹凸性；

（2）写出该函数在点 $x=(1,1,1)^T$ 处的牛顿方向，并证明该方向为下降方向.

二、(10分)简答题.

（1）写出一维搜索算法中牛顿迭代法的迭代公式，并分析牛顿法局部二阶收敛的原因；

（2）简述黄金分割算法中缩短区间思想的理论基础，并给出黄金分割算法的基本原则.

三、(15分）给定无约束优化问题

$$\min\ f(x)=x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4x_1+2021$$

（1）利用 DFP 方法求解该问题，初始点为 $x^1=(1,1)^T$，停止精度为 $\varepsilon=10^{-6}$.

（2）验证由 DFP 方法得到的第一个下降方向 d^1 和第二个下降方向 d^2 关于目标函数的 Hessian 矩阵是共轭的.

四、(10分）某人根据医嘱，每天需补充 ***A***、***B***、***C*** 三种营养，***A*** 不少于 **80** 单位，***B*** 不少于 **150** 单位，***C*** 不少于 **180** 单位。此人准备每天从六种食物中摄取这三种营养成分。已知六种食物每百克的营养成分含量及食物价格如下表，建立此人在满足健康需要的基础上花费最少的数学模型（只建立模型，不需求解）.

营养成分	六种食物每百克的营养成分含量						需要量
	食物 1	食物 2	食物 3	食物 4	食物 5	食物 6	
A	13	25	14	40	8	11	80
B	24	9	30	25	12	15	150
C	18	7	21	34	10	0	180
食物单价（元/100g）	0.5	0.4	0.8	0.9	0.3	0.2	

五、(10 分）用 Zoutendijk 可行方向法求解下列非线性规划问题，初始点取

$x^1=(0,0)^T$，仅迭代 1 步.

$$\begin{aligned}&\min\ \frac{1}{2}x_1^2+x_2^2-x_1x_2-2x_1-x_2+2021\\&s.t.\ 3x_1+x_2\le 3\\&\quad\ \ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{aligned}$$

六、（15 分）已知线性规划：

$$\begin{aligned}&\min\ 2x_1+3x_2+4x_3\\&s.t.\ \ x_1+2x_2+x_3\ge 3\\&\qquad 2x_1-x_2+3x_3\ge 4\\&\qquad x_1,x_2,x_3\ge 0,\end{aligned}$$

（1）用对偶单纯形法求解所给线性规划的最优解和最优值；

（2）利用对偶理论求出所给规划的对偶问题的最优解;

（3）写出上述规划的对偶规划.

七、（10 分，专业型研究生做）已知如下约束优化问题

$$\begin{aligned}&\min f(x)=x_1^2+4x_2^2\\&s.t.\ \ 3x_1+4x_2\ge 13.\end{aligned}$$

利用外点罚函数法求解上述问题的最优解和最优值.

八、（20 分，专业型研究生做）证明题.

（1）给定如下非线性凸规划问题

$$\begin{aligned}&\min\ \ f(x)\\&s.t.\ \ Ax=b\end{aligned}$$

其中 $\bar{x}$ 为上述问题的 K-T 点，证明 $\bar{x}$ 也是上述问题的全局最优解。

（2）对二元正定二次函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^TAx+b^Tx+c$，证明：利用最速下降法产生的点列有如下结论：偶数点列均在一条直线上，且过最优点.

九、（10 分，学术型研究生做）给定约束优化问题

$$\begin{aligned}&\min f(x)=x_1^2+4x_2^2\\&s.t.\ \ 3x_1+4x_2\ge 13.\end{aligned}$$

利用对数障碍函数法求解上述问题的最优解和最优值.

十、（20 分，学术型研究生做）证明题.

（1）给定如下非线性凸规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

其中 $\bar{x}$ 为上述问题的 **K-T** 点，证明 $\bar{x}$ 也是上述问题的全局最优解。

（2）对二元正定二次函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^T Ax+b^T x+c$，证明：利用最速下降法产生的点列有如下结论：奇数点列均在一条直线上，且过最优点.