2022 年春练习

一、(10 分) 某公司有 6 个建筑工地要开工，每个工地的位置(用平面坐标系 *a*, b 表示, 距离单位:千米)及水泥日用量 d (吨) 由表 1 给出。目前有两个临时料场位于 A(5,1), B(2,7), 日储量各有 20 吨。假设从料场到工地之间均有直线道路相连。试制定每天的供应计划，即从 A, B 两料场分别向各工地运送多少吨水泥, 使总的吨千米数最小。(只建模不求解)

表 1：工地位置(*a*, b)及水泥日用量 d

	1	2	3	4	5	6
a	1.25	8.75	0.5	5.75	3	7.25
b	1.25	0.75	4.75	5	6.5	7.25
d	3	5	4	7	6	11

二、(10 分) 分别简述一维搜索方法中的二次插值法和三次插值法的基本思想，并指出与二次插值法相比，三次插值法的优势是什么？

三、(10 分) 设 $f(x)=1/2x^T Ax+b^T x+c$，其中 $A\in R^{n\times n}$对称正定,$b\in R^n$,$c\in R$.

(1) 利用最优性条件求解 $f(x)$ 的最优解.

(2) 证明用牛顿法从任意初始点可一步迭代达到 $f(x)$ 的最优解.

四、 (15 分) 设 $f(x)=1/2x^T Ax+b^T x+c$，其中 $A\in R^{n\times n}$对称正定, $b\in R^n$, $c\in R$.

共轭梯度法中搜索方向 $p^{k+1}=-\nabla f(x^{k+1})+\alpha_k p^k, k=1,2,\ldots,n\text{-}1$，其中

$\alpha_k=\dfrac{\nabla f(x^{k+1})^T Ap^k}{(p^k)^T Ap^k}$, 问: FR 共轭梯度法中 α_k 的计算公式是什么？并给出具体的推导过程.

五、(10 分) 求解下列约束优化问题的 K-T 点.

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2+x_2 \\ s.t.\ & x_1^2+x_2^2\text{-}9\le 0 \\ & x_1+x_2-1\le 0 \end{aligned}$$

六、(15 分) 给定下列问题：

$$
\begin{aligned}
\min\ \ & f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \\
s.t.\ \ & x_1 + x_2 \le 2 \\
& x_1 + 5x_2 \le 5 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

取初始点 $x^{(1)} = (0,0)^T$，用 **Zoutendijk** 可行方向法求解该问题的最优解和最优值.

七、(20 分) (专业型研究生做) 给定下列线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\min\ \ & 4x_1 + x_2 + x_3 \\
s.t.\ \ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

(1) 写出该问题的对偶问题；
(2) 利用两阶段法求解该问题的最优解和最优值；
(3) 利用对偶理论求解对偶问题的最优解和最优值.

八、(10 分) (专业型研究生做) 用外点罚函数法求解下面的问题：

$$
\begin{aligned}
\min\ \ & x_1^2 + x_2^2 \\
s.t.\ \ & x_1 + x_2 - 1 \ge 0
\end{aligned}
$$

九、(20 分) (学术型研究生做) 给定如下线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\min\ \ & -2x_1 - x_2 \\
s.t.\ \ & x_1 + x_2 \ge 2 \\
& x_1 - x_2 \ge 1 \\
& x_1 \le 3 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

(1) 写出该问题的对偶问题；
(2) 利用大 M 法求解该问题的最优解和最优值；
(3) 利用对偶理论求解对偶问题的最优解和最优值.

十、(10 分) (学术型研究生做) 用对数障碍函数法求解下面的问题：

$$
\begin{aligned}
\min\ \ & x_1^3 + x_2^3 \\
s.t\ \ & x_1 + x_2 - 1 \ge 0
\end{aligned}
$$