

# 4

## 随机信号通过线性系统的分析

随机信号通过线性系统的分析是信号进行统计处理的基础。由于随机信号不能像确定信号那样用明确的数学表达式来描述，只能用概率统计的方法进行描述，因此，研究随机信号通过线性系统的输出，也只能从分析系统输出的统计特性入手。直接获取系统输出的概率分布一般比较困难，但在许多实际应用中，如果知道了系统输出的一些统计特性（如均值相关函数、功率谱密度函数等）往往就能解决问题。本章首先介绍信号与系统的基本概念、分类和特点；然后分别从连续系统、离散系统两方面，分析随机信号通过线性时不变系统的统计特性，重点介绍系统输出的一阶和二阶统计特性；在此基础上，介绍平稳随机序列的另一种分析方法及随机序列参数模型的概念。

### 4.1 信号与系统概述

#### 4.1.1 信号及其分类

信号是信息的表现形式，通常反映为随着自变量变化而变化的某种物理量。在数学上，信号一般可以表示成单个或多个自变量的函数。如：电信号可以看作是电流或电压随时间变化的函数，语音信号可以看作是声压随时间变化的函数，而图像信号可以看作是像素灰度随坐标位置变化的函数。自变量可以是时间，也可以是距离、高度、温度等，为了表述方便，这里将这些变量都统称为时间，这样信号就可以理解为随时间变化的函数，称为时间信号，简称信号。

根据信号的函数特点及其频谱分布特性，一般对信号进行如下分类。

- 确定信号与随机信号

根据信号变化规律是否可预知, 可以将信号分为确定信号和随机信号。能够用确定的数学表达式来描述变化规律的信号称为确定信号, 如我们熟知的正弦信号、指数信号等。对于这类信号, 给定一个时刻, 就有一个确定的值与之对应。而对于随机信号, 其变化规律是不可预知的, 不能用明确的数学表达式进行描述, 因此也是不可重现的, 如接收机内部的热噪声、地震波信号等。对于这类信号, 即使在相同的条件下, 每次观测到的信号(称为样本函数)也是不同的, 只能通过概率统计的方法, 分析多次观测得到的样本函数, 才能掌握它们的变化规律。还有一些信号, 其本质是随机信号, 但信号的表现形式却类似确定信号, 如随机相位信号  $s(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ , 其表征信号的参数  $A$  和  $\omega$  是常量, 但参数  $\phi$  是随机量, 每次观测到的样本函数均是余弦波, 但观测之前具体是什么相位的余弦波不可预测, 因此该信号也是随机信号。更进一步, 如果由随机信号所确定的任意维概率密度函数都满足时延不变性, 该随机信号又称为严格平稳随机信号; 如果仅有一阶和二阶统计量满足时延不变性, 则称之为广义平稳随机信号; 不具有上述特性的随机信号则称为非平稳随机信号。此外, 还可以根据分布特性, 将随机信号分为高斯信号与非高斯信号等。由于信号在传输过程中一般会受到周围环境的各种干扰及系统内部热噪声的影响, 实际系统输出的信号多为随机信号, 或者是确定信号与随机信号的叠加。

► 连续信号与离散信号

根据函数自变量的取值是否连续, 可以将信号分为连续信号和离散信号。除了若干个不连续点外, 在自变量范围内的任何时刻都能连续取值的信号称为连续信号, 如正弦信号、单位阶跃信号等。连续信号的函数值既可以是连续的, 也可以是离散的, 函数值连续取值的信号称为模拟信号, 而只能取特定离散值的称为离散信号, 它的自变量只能在一些规定的离散时刻才能取值, 而在其他时刻则没有定义。离散信号可以由连续信号经过抽样后得到, 也有些信号本身就是离散信号, 如国家按年度统计的国民生产总值、股票交易数据、公司按月统计的销售额等。如果离散信号的函数值可连续取值, 则称为抽样信号, 若只能取离散值, 则称为数字信号或时间序列。

► 周期信号与非周期信号

根据信号按一定间隔是否周期重复, 可以将信号分为周期信号与非周期信号。如果信号  $s(t)$  按一定的时间间隔  $T$  周而复始的变化, 即  $s(t) = s(t + kT)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ 。则称信号  $s(t)$  为周期信号,  $T$  为信号的周期, 如正弦信号  $s(t) = A \cos(\omega t + \phi)$  就是一个周期为  $2\pi/\omega$  的周期信号。而非周期信号, 如指数信号, 则不具有这种周而复始变化的特性。

► 能量信号与功率信号

根据信号的能量或功率是否为有限值, 可以将信号分为能量信号与功率信号。下式分别定义信号的能量与平均功率:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt. \quad (4.1)$$

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t) dt. \quad (4.2)$$

能量  $E < +\infty$  的信号称为能量信号; 不满足能量有限, 但满足  $P < +\infty$  的信号称为功率信号。根据定义可知, 能量信号的平均功率为零, 周期信号一般都是功率信号, 而非周期信号则可能是能量信号, 也可能是功率信号。上面的概念是从信号的时间域对信号进行分类。

► 基带信号与高频带通信号

根据信号频谱的分布特性, 也可以将信号分为基带信号与高频带通信号。频谱主要集中在零值附近的信号称为基带信号。如果信号的频谱主要集中在以  $\pm\omega_0$  为中心频率、带宽为  $\Delta\omega$  的范围内, 则该信号称为高频带通信号。根据带宽  $\Delta\omega$  相对载波  $\omega_0$  的比例关系, 又可进一步将信号进行划分。一般将该比例在 1% 以内的信号称为窄带信号, 常规的通信、雷达等系统中涉及的信号大多为窄带信号; 该比例在 1%-20% 之间的信号称为宽带信号; 超过 20% 的称为超宽带信号。窄带信号通常可表示为如下形式:

$$s(t) = a(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)] \quad (4.3)$$

式中  $a(t)$  和  $\theta(t)$  相对于载波变化缓慢, 均为基带慢变信号。为了便于分析和处理问题, 通常又将上式表示成复信号的形式:

$$\tilde{s}(t) = a(t)e^{j[\omega_0 t + \theta(t)]} = \tilde{a}(t)e^{j\omega_0 t}, \quad (4.4)$$

其中

$$\tilde{a}(t) = a(t)e^{j\theta(t)} = a(t) \cos \theta(t) + ja(t) \sin \theta(t) = s_I(t) + js_Q(t), \quad (4.5)$$

称为信号  $s(t)$  的复包络,  $s_I(t)$  和  $s_Q(t)$  称为信号  $s(t)$  的两个正交分量。

对于任意实信号  $s(t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$ , 其复表示为

$$\tilde{s}(t) = s(t) + j\hat{s}(t), \quad -\infty < t < +\infty, \quad (4.6)$$

其中  $\hat{s}(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau$ , 如为  $s(t)$  的希尔伯特变换。 $\tilde{s}(t)$  也称为  $s(t)$  的解析信号或信号预包络。

### 4.1.2 系统及其分类

系统一般定义为由若干个相互联系的事物组成的具有特定功能的整体，它是个应用非常广泛的概念。在信号处理领域，系统可以看作是能够导致任何一种信号变换的过程。对于任何一个系统，不管其内部结构如何，都存在一个输入信号和一个 (经过系统变换而与输入信号相关联的) 输出信号，或者是多个输入信号和多个与之相关联的输出信号，前者称为单输入单输出系统，后者则称为多输入多输出系统，如图 4-1 所示。根

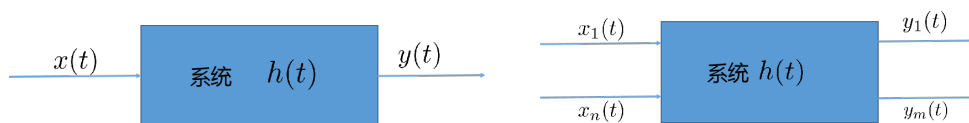


图 4-1 SISO 和 MIMO 系统

据系统处理的信号形式的不同及具有的某些性质，可以将系统分为如下 8 类：

#### 1. 连续系统与离散系统

如果系统的输入和输出均为连续信号，称这样的系统为连续系统。输入和输出均为离散信号的系统称为离散系统。由两者混合组成的系统则称为混合系统。

#### 2. 记忆系统与无记忆系统

若某一时刻系统的输出只与该时刻系统的输入有关，称这样的系统为无记忆系统。反之，若某一时刻系统的输出还与其他时刻的输入有关，则称为记忆系统。常见的无记忆系统有电阻器、检波器、限幅器等，记忆系统有积分器、累积器和平滑器等。

#### 3. 线性系统与非线性系统

能同时满足齐次性和叠加性的系统称为线性系统。其中的齐次性是指，当输入被扩大  $k$  倍后，系统的输出也相应地被扩大  $k$  倍；叠加性是指，当有多个输入同时作用于系统时，系统的输出等于各个输入单独作用后系统的输出之和。也就是说，对于线性系统，如果输入  $X_1(t)$  对应的系统输出为  $Y_1(t)$ ，输入  $X_2(t)$  对应的系统输出为  $Y_2(t)$ ，则输入  $k_1x_1(t) + k_2x_2(t)$  对应的输出为  $k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$ 。不满足该性质的系统就称为非线性系统。

#### 4. 时变系统与时不变系统

如果系统的输出与输入的起始作用时间无关，当输入被延时，系统的输出仅作相应的延时而波形不变，这样的系统称为时不变系统。即对于时不变系统，如果输入  $X(t)$  延时到  $x(t - \tau)$ ，输出则从  $y(t)$  延时到  $y(t - \tau)$ 。系统的输出波形与输入的起始作用时间有关的系统就称为时变系统。

#### 5. 稳定系统与不稳定系统

如果输入有界，系统的输出也有界，这样的系统为稳定系统。如果系统对有界输入的输出是无限值，则为不稳定系统。显然，只有稳定系统才具有实际应用价值。

#### 6. 因果系统与非因果系统

系统的输出与输入是相关的，如果系统在任一时刻的输出只与该时刻及该时刻以前的输入有关，而与该时刻以后的输入无关，称这样的系统为因果系统。如果输出还跟当前时刻以后的输入有关，则这样的系统称为非因果系统。根据定义，所有的无记忆系统都是因果系统。记忆系统则可能是因果系统，如积分器、累积器等；也可能是非因果系统，如平滑器、一些事后分析系统等。

#### 7. 可逆系统与不可逆系统

如果对不同的输入系统能产生不同的输出，即根据系统的输出能唯一确定输入，称这样的系统为可逆系统。根据输出不能唯一确定输入的系统称为不可逆系统。对于任何可逆系统，均存在一个该系统的逆系统，将它与原系统级联后，能恢复出原系统的输入。可逆系统在实际中有着很多非常重要的应用，其中最典型的就是一些通信系统中的一些处理器件，如发送端的编码器、调制器等都是可逆系统，其对应的逆系统为接收端的解码器、解调器。

以上是根据系统的时域特性对系统进行分类。从频率域来分。

#### 8. 最小相移系统与非最小相移系统

如果从系统的复频域上看，一个系统是因果稳定的线性时不变系统，则要求连续系统的所有极点必须位于  $S$  平面的虚轴左侧，或者离散系统的所有极点必须位于  $Z$  平面的单位圆内，而对系统的零点没有限制在此基础上，根据系统零点的分布情况，可以定义出最小相位系统。

##### 定义 4.1 最小相位系统

如果系统的所有零点也都位于  $S$  平面的虚轴左侧或者  $Z$  平面的单位圆内，则称该因果稳定的线性时不变系统为最小相位系统，否则，只要有一个零点位于  $S$  平面的虚轴右侧或者  $Z$  平面的单位圆外，就称为非最小相位系统。可见，最小相位系统一定存在逆系统，而且该逆系统既是因果稳定系统，也是最小相位系统。

此外，根据输入信号、系统和输出信号之间的关系，如果已知一个输入信号，将其通过一个已知的系统来寻求输出信号，一般称之为滤波；如果已知一个输入信号，根据其通过一个系统的输出信号来寻求系统传输函数，称之为系统辨识；如果根据一个已知系统的输出信号来恢复出系统的输入信号，则称之为逆滤波；如果根据一个系统的部分特性和系统输出信号来确定系统传递函数并恢复出输入信号，则称之为盲均衡和盲分离。

### 4.1.3 线性时不变系统

#### (1) 线性时不变冲激响应

根据冲激函数  $\delta(t)$  的性质

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau, \quad (4.7)$$

带入式  $y(t) = L[x(t)]$ , 并考虑运用线性算子对时间  $t$  进行运算, 故有

$$\begin{aligned} y(t) &= L(x(t)) = L\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)L[\delta(t-\tau)]d\tau, \end{aligned} \quad (4.8)$$

定义其中的函数  $h(t) = L[\delta(t)]$ , 函数  $h(t)$  是线性系统在输入冲激  $\delta(t)$  情况下的输出, 所以通常称  $h(t)$  为线性系统的冲激响应, 它是反映系统时域特性的函数。于是线性系统的输出为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t, \tau)d\tau \quad (4.9)$$

#### (2) 线性时不变系统

若输入信号  $x(t)$  有时移, 使系统输出  $y(t)$  有一个相同的时间移动, 即

$$y(t-\tau) = L[\delta(t-\tau)], \quad (4.10)$$

则这个系统的算子  $L(\cdot)$  就称为线性时不变系统。因此, 线性时不变系统的冲激响应也应满足下式

$$h(t-\tau) = L[\delta(t-\tau)], \quad (4.11)$$

故可得: 一个线性时不变系统的输出响应为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (4.12)$$

变量也可置换, 写成

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau; \quad (4.13)$$



**注 4.2.** 线性时不变系统的输出响应 (4.12) 和 (4.13) 等价。

线性时不变系统的输出响应 (4.12) 和 (4.13) 经常被记作

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (4.14)$$

上式表明线性时不变系统的响应完全由系统的输入  $x(t)$  与系统的冲激响应  $h(t)$  所确定。

对式 (4.14) 作傅氏变换, 则  $Y(\omega)$ ,  $X(\omega)$ ,  $H(\omega)$  三者之间在频域中的关系为

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega), \quad (4.15)$$

式中  $H(\omega)$  称系统的传递函数, 传递函数与系统的冲激响应构成一对傅里叶变换, 即

$$h(t) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} H(\omega). \quad (4.16)$$

(3) 系统的稳定性和物理可实现

(1) 稳定系统

#### 定义 4.3 系统的稳定

若一个线性时不变系统, 对任意有界输入, 其输出均有界, 则称此系统是稳定的。♣

根据定义 4.3, 寻找使得系统稳定的条件。若输入信号有界, 则必有正常数  $A$  存在, 使得对于所有的  $t$ , 有  $|x(t)| \leq A < \infty$  成立。由式 (4.13) 可知, 对所有的  $t$ , 显然有下式成立。

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau \leq A \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau. \quad (4.17)$$

如果要求系统稳定, 即要求输出有界,  $|y(t)| \leq B < \infty$ , 则稳定系统的冲激应满足下述条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty, \quad (4.18)$$

即冲激响应  $h(t)$  绝对可积。

(2) 物理可实现性 (因果性)

工程上为使系统在物理上有可实现性, 必须要求系统在考察 ( $t = 0$ ) 以前不产生响应, 即系统具有因果性。也就是说系统的冲激响应  $h(t)$  函数应满足

$$h(t) = 0, \quad t < 0. \quad (4.19)$$

所有实际运行的物理可实现系统都是因果的, 都满足上式。于是, 对于物理可实现系统来说, 有

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (4.20)$$

物理可实现系统的传递函数为

$$H(\omega) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (4.21)$$

上式也可以用复频率 ( $s = \sigma + j\omega$ ) 表示, 若以  $s$  代替  $H(\omega)$  中的  $j\omega$ , 则有

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt. \quad (4.22)$$

### (3) 稳定的物理可实现系统

#### 定义 4.4 稳定的物理可实现系统

若物理可实现系统的传递函数  $H(s)$  的所有极点都位于  $S$  平面的左半平面 (不含虚轴), 则称此系统为“稳定的物理可实现系统”。

#### 例 4.1.1

某系统的传递函数用拉氏变换形式表示, 讨论其稳定性。

$$(1) H_1(s) = \frac{1}{a+s}, \quad a > 0; \quad (2) H_2(s) = \frac{1}{a-s}, \quad a > 0.$$

解: ①  $H_1(s)$  的极点  $s_1 = -a < 0$  在左半平面, 冲激响应为  $h_1(t) = e^{-at} (t > 0)$ , 此系统的冲激响应绝对可积, 所以此系统是稳定的。

②  $H_2(s)$  的极点  $s_2 = a > 0$  在右半平面, 相应的冲激响应  $h_2(t) = e^{at} (t > 0)$ , 此系统的冲激响应非绝对可积, 所以此系统是不稳定的。

## 4.2 随机信号通过线性时不变系统

上节中我们讨论了信号与系统的一些概念、分类和特点, 有关确定信号通过线性系统的分析已经在信号与系统的相关课程中作了介绍。而实际应用中的信号大多是随机信号, 这里我们利用信号与系统、随机过程等课程中的相关知识, 分析随机信号通过线性时不变系统的统计特性, 重点介绍系统输出的一阶和二阶统计特性。

考虑随机信号  $\{X(t)\}$  通过一个连续线性时不变系统, 系统的冲激响应为  $h(t)$ , 输出为随机信号  $\{Y(t)\}$ , 如图 4-2 所示。由于随机信号  $\{X(t)\}$  可以看作是大量样本函数的集合, 每个样本函数  $x(t)$  对应每次试验的结果, 均为确定的时间函数。当样本函数  $X(t)$  通过系统时, 其输出  $y(t)$  与输入  $x(t)$  之间存在如下卷积关系:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau. \quad (4.23)$$



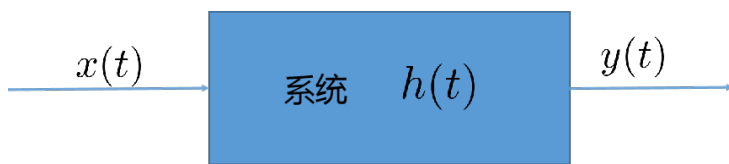


图 4-2 随机信号通过线性时不变系统示意图

如果  $x(t)$  和  $h(t)$  绝对可积, 即系统是稳定的, 且傅里叶变换分别为  $X(\omega), H(\omega)$ , 则  $y(t)$  的傅里叶变换  $Y(\omega)$  满足如下等式:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega), \quad (4.24)$$

其中,  $H(\omega)$  又称为时不变线性系统的传递函数, 传递与系统的冲激响应  $h(t)$  构成傅里叶变换对, 关系如下:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \Rightarrow H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt. \quad (4.25)$$

$$H^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{j\omega t} dt \quad (4.26)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.27)$$

即

$$h(t) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} H(\omega). \quad (4.28)$$

这样, 对于  $\{X(t)\}$  的一系列样本函数  $x(t)$ , 系统输出端就会得到一系列新的样本函数  $y(t)$ , 这些样本函数就构成随机信号  $\{Y(t)\}$ 。

### 4.2.1 系统输出的均值

根据 (4.23) 式, 输出  $\{Y(t)\}$  的均值可表示为

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)E\{X(t-\tau)\}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)m_X(t-\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (4.29)$$

当输入  $\{X(t)\}$  广义平稳时,  $m_X(t) = m_X$ , 则由式 (4.25), 可得

$$m_Y(t) = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)d\tau = m_X H(0) = m_Y. \quad (4.30)$$

可见, 此时输出均值也与时间无关。

### 4.2.2 系统输出的自相关函数和功率谱密度函数

根据 (4.23) 式, 输出  $\{Y(t)\}$  的自相关函数可表示成

$$\begin{aligned}
 R_Y(t_1, t_2) &= E\{Y(t_1)Y(t_2)\} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)E\{X(t_1-\tau_1)X(t_2-\tau_2)\}d\tau_1d\tau_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(t_1-\tau_1, t_2-\tau_2)d\tau_1d\tau_2.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

当输入  $\{X(t)\}$  广义平稳,  $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(\tau)$ , 则

$$R_Y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(\tau + \tau_1 - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 = R_Y(\tau). \tag{4.32}$$

此时输出  $\{Y(t)\}$  的均方值, 即平均功率为

$$\begin{aligned}
 E\{Y^2(t)\} &= R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1d\tau_2 \\
 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(\tau_2 - \tau_1)|d\tau_1d\tau_2 \\
 &\leq R_X(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau_1)h(\tau_2)|d\tau_1d\tau_2 \\
 &= R_X(0) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau \right)^2 < +\infty.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

(4.30) 式、(4.32) 式以及式 (4.33) 表明: 如果广义平稳随机信号  $\{X(t)\}$  通过线性时不变系统, 则输出随机信号也广义平稳。

进一步, 根据维纳-辛钦定理, 即功率谱密度函数与自相关函数是一组傅里叶变换对, 对 (4.32) 式两边进行傅里叶变换, 可得到输出  $\{Y(t)\}$  的功率谱密度函数

$$\begin{aligned}
 G_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_Y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\
 &\stackrel{(4.32)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(\tau - \tau_1 + \tau_2)e^{-j\omega\tau}d\tau_1d\tau_2d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2)e^{-j\omega\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1)R_X(\tau - \tau_1 + \tau_2)d\tau_1d\tau d\tau_2.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

定义  $R_1(t) = R_X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(t - \tau_1)h(\tau_1)d\tau_1$ , 则  $R_1(t)$  的傅里叶变换为  $H(\omega)G_X(\omega)$ ,

上式可进一步表示为

$$\begin{aligned}
 G_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) \int_{-\infty}^{+\infty} R_1(\tau + \tau_2) e^{-j\omega\tau} d\tau d\tau_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) H(\omega) G_X(\omega) e^{j\omega\tau_2} d\tau_2 \\
 &= H(-\omega) H(\omega) G_X(\omega) \\
 &= |H(\omega)|^2 G_X(\omega),
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

其中  $G_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$  为广义平稳输入  $\{X(t)\}$  的功率谱密度函数。式(4.35)表明,广义平稳随机信号通过线性时不变系统,输出功率谱密度等于输入功率谱密度乘以系统传输函数模的平方。可见,输出功率谱密度只与系统的幅频特性有关,而与系统的相频特性无关。

### 4.2.3 系统输入与输出的互相关函数和互功率谱密度函数

根据(4.23)式,输入  $\{X(t)\}$  与输出  $\{Y(t)\}$  之间的互相关函数  $R_{XY}(t_1, t_2)$ ,  $R_{YX}(t_1, t_2)$  可表示为

$$\begin{aligned}
 R_{XY}(t_1, t_2) &= E\{X(t_1)Y(t_2)\} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) E\{X(t_1)X(t_2 - \tau_2)\} d\tau_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) R_X(t_1, t_2 - \tau_2) d\tau_2.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
 R_{YX}(t_1, t_2) &= E\{Y(t_1)X(t_2)\} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) E\{X(t_2)X(t_1 - \tau_1)\} d\tau_1 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) R_X(t_1 - \tau_1, t_2) d\tau_1.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

当输入  $\{X(t)\}$  广义平稳,  $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau)$ , 则

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) R_X(\tau + \tau_2) d\tau_2 = R_{XY}(\tau). \tag{4.38}$$

$$R_{YX}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) R_X(\tau - \tau_1) d\tau_1 = R_{YX}(\tau) = R_{XY}(-\tau). \tag{4.39}$$

上式表明, 广义平稳随机信号通过线性时不变系统, 其输入与输出联合广义平稳。同样,

对以上等式两边进行傅里叶变换, 可得输入与输出之间的互功率谱密度函数:

$$\begin{aligned} G_{XY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) R_X(\tau + \tau_2) e^{-j\omega\tau} d\tau_2 d\tau \\ &= H(-\omega) G_X(\omega). \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} G_{YX}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{YX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) R_X(\tau - \tau_1) e^{-j\omega\tau} d\tau_1 d\tau \\ &= H(\omega) G_X(\omega). \end{aligned} \quad (4.41)$$

结合 (4.35) 式, 有如下关系式成立:

$$\begin{aligned} G_Y(\omega) &= H(-\omega) H(\omega) G_X(\omega) = H(\omega) G_{XY}(\omega) \\ &= H(-\omega) G_{YX}(\omega). \end{aligned} \quad (4.42)$$

综上所述, 当广义平稳随机信号  $\{X(t)\}$  通过线性时不变系统, 系统输出广义平稳, 且输出与输入联合广义平稳。输出以及输入、输出之间的统计关系具体可如图 4-3 所示。

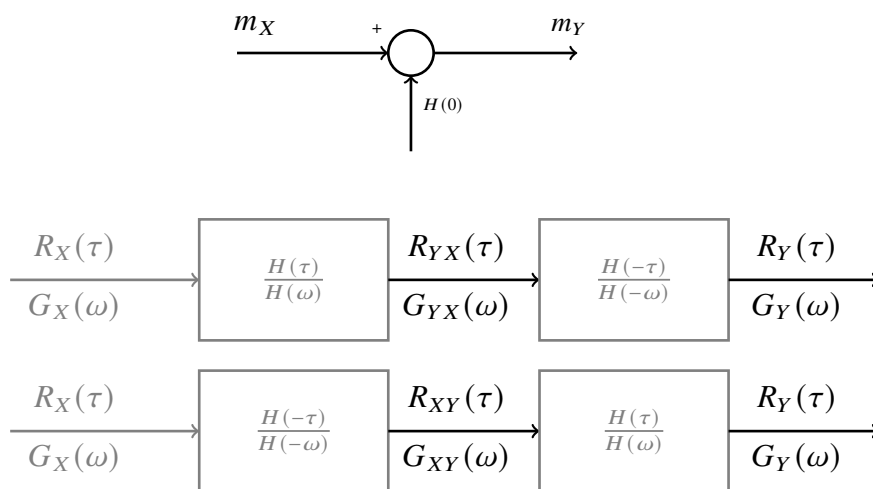


图 4-3 广义平稳随机信号通过线性时不变系统示意图

#### 4.2.3.1 物理可实现的线性时不变系统的平稳性

上述分析虽然基于物理不可实现的线性时不变系统, 但是当广义平稳随机信号通过物理可实现的线性时不变系统时, 相关结论仍然成立, 只是此时  $h(t) = 0, t < 0$ . 而当系统输入  $\{X(t)\}$  只从  $t = 0$  时刻开始加入, 即  $x(t) = 0, t < 0$ , 结论就有所不同了。

(1) 输入  $\{X(t)\}$  广义平稳, 但输出  $\{Y(t)\}$  的均值不再是常数, 这种条件下的系统输

出不再是平稳的。此时输出  $\{Y(t)\}$  的均值和相关函数分别为

$$m_Y(t) = E\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^t h(\tau) E\{X(t-\tau)\} d\tau = m_X \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau. \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= E\{Y(t_1)Y(t_2)\} \\ &= \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(\tau_1) h(\tau_2) E\{X(t_1-\tau_1)X(t_2-\tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(\tau - \tau_1 + \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= E\{X(t_1)Y(t_2)\} = \int_{-\infty}^{t_2} h(\tau_2) E\{X(t_1)X(t_2-\tau_2)\} d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{t_2} h(\tau_2) R_X(\tau + \tau_2) d\tau_2. \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} R_{YX}(t_1, t_2) &= E\{X(t_2)Y(t_1)\} = \int_{-\infty}^{t_1} h(\tau_1) E\{X(t_2)X(t_1-\tau_1)\} d\tau_1 \\ &= \int_{-\infty}^{t_1} h(\tau_1) R_X(\tau - \tau_1) d\tau_1. \end{aligned} \quad (4.46)$$

根据上述公式, 尽管输入  $\{X(t)\}$  广义平稳, 但输出  $\{Y(t)\}$  的均值不再是常数, 而与时间  $t$  有关, 且自相关函数跟时间差值  $T$  以及时间  $t_1$  和  $t_2$  都有关, 说明这种条件下的系统输出不再是平稳的。

(2) 若输入  $X(t)$  是宽平稳的, 则系统输出  $Y(t)$  也是宽平稳的, 且输入与输出联合平稳。

若  $X(t)$  宽平稳, 则有

$$\begin{cases} E[X(t)] = m_X (\text{常数}) \\ R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau), \quad \tau = t_2 - t_1 \\ R_X(0) = E[X^2(t)] < \infty \end{cases} \quad (4.47)$$

利用时域分析的结果, 可得

$$E[Y(t)] = \int_0^{\infty} h(\tau) E[X(t-\tau)] d\tau = m_X \int_0^{\infty} h(\tau) d\tau = m_Y. \quad (4.48)$$

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \int_0^{\infty} h(u) R_X(\tau - u) du = R_X(\tau) * h(\tau) = R_{XY}(\tau). \quad (4.49)$$

$$R_{YX}(t_1, t_2) = \int_0^{\infty} h(u) R_X(\tau + u) du = R_X(\tau) * h(-\tau) = R_{YX}(\tau). \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(u) h(v) R_X(t_2 - t_1 - v + u) du dv \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(u) h(v) R_X(\tau - v + u) du dv = R_Y(\tau). \end{aligned} \quad (4.51)$$

此外, 系统输出的均方值为

$$\begin{aligned}
 E[Y^2(t)] &= |E[Y^2(t)]| = \left| \int_0^\infty \int_0^\infty h(u)h(v)R_X(u-v)dudv \right| \\
 &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |h(u)||h(v)||R_X(u-v)|dudv \\
 &\leq R_X(0) \int_0^\infty \int_0^\infty |h(u)||h(v)|dudv \\
 &= R_X(0) \int_0^\infty |h(u)|du \cdot \int_0^\infty |h(v)|dv.
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

如果系统是稳定的, 则由  $\int_0^\infty |h(\tau)|d\tau < \infty$ , 可推出

$$|E[Y^2(t)]| < \infty \tag{4.53}$$

① 由 (4.48), (4.51) 和 (4.53), 可证, 输出  $Y(t)$  是宽平稳过程。

② 由 (4.49) 或 (4.50) 可证, 输入与输出之间是联合宽平稳的。

若用卷积形式, 则上述各式可表示成

$$R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) \tag{4.54}$$

$$R_{YX}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau) \tag{4.55}$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau) = R_{XY}(\tau) * h(-\tau) = R_{YX}(\tau) * h(\tau). \tag{4.56}$$

(3) 若输入  $X(t)$  是严平稳的, 则输出  $Y(t)$  也是严平稳的。

证: 因为是线性时不变系统, 可证对于任何时移  $\tau$ , 都有

$$Y(t+\tau) = L[X(t+\tau)] \tag{4.57}$$

成立。系统算子不变, 输出  $Y(t+\tau)$  和输入  $X(t+\tau)$  之间的关系与  $Y(t)$ ,  $X(t)$  之间的是完一样的。当  $X(t+\tau)$  与  $X(t)$  具有相同的概率密度函数时,  $Y(t+\tau)$  与  $Y(t)$  也具有相同概率密度函数, 所以  $Y(t)$  也是严平稳的。

(4) 若输入  $X(t)$  是宽各态历经的, 则输出  $Y(t)$  也是宽各态历经的。

证: 由随机过程的宽各态历经定义, 输入  $X(t)$  满足

$$\begin{cases} \overline{X(t)} = m_X. \\ \overline{X(t)X(t+\tau)} = R_X(\tau). \end{cases} \tag{4.58}$$

则输出  $Y(t)$  的时间平均  $\overline{Y(t)}$  为

$$\begin{aligned}
 \overline{Y(t)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Y(t) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[ \int_0^\infty h(u) X(t-u) du \right] dt \\
 &= \int_0^\infty \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t-u) dt \right] h(u) du \\
 &= \int_0^\infty m_X h(u) du = m_Y.
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{Y(t)Y(t+\tau)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Y(t)Y(t+\tau) dt \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty h(u)h(v) \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t-u)X(t+\tau-v) dt \right] du dv \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty h(u)h(v) R_X(\tau+u-v) du dv \\
 &= R_Y(\tau),
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

故  $Y(t)$  是宽各态历经的。

**例 4.5** 低通 RC 电路是由电源  $X(t)$ ，电阻  $R$  和电容  $C$  组成的简单电路，已知输入信号  $X(t)$  是宽平稳的双侧信号，其均值为  $m_X$ ，求输出均值。

解：由电路知，可得此系统的冲激响应为  $h(t) = be^{-bt}U(t)$ ，其中  $b = 1/RC$ ，则其输出均值为

$$m_Y = m_X \int_0^\infty be^{-bu} du = -m_X e^{-bu} \Big|_0^\infty = m_X. \tag{4.61}$$

**例 4.6** 若上例中  $X(t)$  是自相关函数为  $\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$  的白噪声，① 求输出的自相关函数，② 输出的平均功率，③ 输入与输出间的互相关函数  $R_{XY}(\tau)$  和  $R_{YX}(\tau)$ 。

解：由题意知  $R_X(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$ ，则输出自相关函数  $R_Y(\tau)$  为

$$\begin{aligned}
 R_Y(\tau) &= E[Y(t_1)Y(t_2)] = E \left[ \int_{-\infty}^\infty h(u) \left[ \int_{-\infty}^\infty h(v) X(t_1-u) X(t_2-v) dv \right] du \right] \\
 &= \int_0^\infty h(u) \int_0^\infty h(v) E[X(t_1-u)X(t_2-v)] dv du \\
 &= \int_0^\infty h(u) h(v) R_X(t_1, t_2) dv du
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

则

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \int_0^\infty h(u) \left[ \int_0^\infty \frac{N_0}{2} \delta(\tau + u - v) h(v) dv \right] du \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^\infty h(u) h(\tau + u) du, \end{aligned} \quad (4.63)$$

上式说明：当输入是白噪声时，输出信号的自相关函数正比于系统冲激响应的卷积。

$$R_Y(\tau) = \frac{N_0}{2} \int_0^\infty (be^{-bu}) U(u) (be^{-b(\tau+u)}) U(\tau+u) du. \quad (4.64)$$

将上式分别按  $\tau \geq 0$  与  $\tau < 0$  两种情况求解。

① 当  $\tau \geq 0$  时，有

$$R_Y(\tau) = \frac{N_0 b^2}{2} e^{-b\tau} \int_0^\infty e^{-2bu} du = \frac{N_0 b}{4} e^{-b\tau}. \quad (4.65)$$

② 当  $\tau < 0$  时，由自相关函数的偶对称性，得到输出的自相关函数

$$R_Y(\tau) = R_Y(-\tau) = \frac{N_0 b}{4} e^{b\tau}. \quad (4.66)$$

合并  $\tau \geq 0$  与  $\tau < 0$  时的结果，得到输出的自相关函数

$$R_Y(\tau) = \frac{N_0 b}{4} e^{-b|\tau|}, \quad |\tau| < \infty. \quad (4.67)$$

③ 在上式中令  $\tau = 0$ ，即可得输出的平均功率为

$$E[Y^2(t)] = R_Y(0) = \frac{bN_0}{4}. \quad (4.68)$$

由于  $b$  是时间常数  $RC$  的倒数， $b = 1/RC$ ，因此，也与电路的带宽  $\Delta f$  有关，其中

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{b}{2\pi}. \quad (4.69)$$

于是输出平均功率又可写成

$$E[Y^2(t)] = \frac{\pi N_0}{2} \Delta f. \quad (4.70)$$

由此可见，该电路的输出平均功率随着电路的带宽变宽而线性地增大。

④ 输入和输出的互相关函数为

$$\begin{aligned} R_{XY}(\tau) &= \int_0^\infty \frac{N_0}{2} \delta(\tau - u) h(u) du = \frac{N_0}{2} h(\tau) U(\tau) \\ &= \begin{cases} \frac{N_0}{2} h(\tau), & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.71)$$



同理

$$\begin{aligned}
 R_{YX}(\tau) &= \int_0^\infty \frac{N_0}{2} \delta(\tau + u) h(u) du = \frac{N_0}{2} h(-\tau) U(-\tau) \\
 &= \begin{cases} 0 & \tau > 0 \\ \frac{N_0}{2} h(-\tau) & \tau \leq 0 \end{cases}
 \end{aligned} \quad (4.72)$$

**例 4.7** 在例 4.6 中, 假设  $X(t)$  的自相关函数为  $R_X(\tau) = \frac{\beta N_0}{4} e^{-\beta\tau}$ , 式中  $\beta \neq b$ , 求输出的自相关函数。

$$\begin{aligned}
 R_Y(\tau) &= E[Y(t_1)Y(t_2)] = E\left[\int_{-\infty}^\infty h(u) \left[\int_{-\infty}^\infty h(v) X(t_1 - u) X(t_2 - v) dv\right] du\right] \\
 &= \int_0^\infty h(u) \int_0^\infty h(v) E[X(t_1 - u) X(t_2 - v)] dv du \\
 &= \int_0^\infty h(u) \int_0^\infty h(v) R_X(t_1, t_2) dv du
 \end{aligned} \quad (4.73)$$

则对于输入  $X(t)$  的自相关函数为  $R_X(\tau) = \frac{\beta N_0}{4} e^{-\beta\tau}$ , 输出的自相关函数可以写成

$$\begin{aligned}
 R_Y(\tau) &= \int_0^\infty \int_0^\infty R_X(\tau + u - v) h(u) h(v) du dv \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta N_0}{4} e^{-\beta|\tau + u - v|} b e^{-bu} \cdot b e^{-bv} du dv.
 \end{aligned} \quad (4.74)$$

当  $\tau > 0$  时, 考虑到  $u, v$  均在 0 和  $\infty$  之间变化, 故先对  $v$  积分较方便。

$$\begin{aligned}
 R_Y(\tau) &= \frac{\beta N_0 b^2}{4} \int_0^\infty e^{-bu} \left[ \int_0^{\tau+u} e^{-\beta(\tau+u-v)} e^{-bv} dv + \int_{\tau+u}^\infty e^{\beta(\tau+u-v)} e^{-bv} dv \right] du \\
 &= \frac{\beta N_0 b^2}{4(b^2 - \beta^2)} \left( e^{-\beta\tau} - \frac{\beta}{b} e^{-b\tau} \right), \quad \tau \geq 0
 \end{aligned} \quad (4.75)$$

因自相关函数为  $\tau$  的偶函数, 所以  $\tau < 0$  时的  $R_Y(\tau)$  表达式能直接由  $R_Y(-\tau)$  时的表达写出。综合可得

$$R_Y(\tau) = \frac{b^2 \beta N_0}{4(b^2 - \beta^2)} \left( e^{-\beta|\tau|} - \frac{\beta}{b} e^{-b|\tau|} \right). \quad (4.76)$$

为了做比较, 上式可写为

$$R_Y(\tau) = \left( \frac{b N_0}{4} e^{-b|\tau|} \right) \cdot \left\{ \left[ \frac{1}{1 - b^2/\beta^2} \right] \left[ 1 - \frac{b}{\beta} e^{-(\beta-b)|\tau|} \right] \right\}, \quad (4.77)$$

式中的第一项因子是白噪声输入时系统输出的自相关函数, 第二项因子是非白噪声输入时系统输出的自相关函数附加的相乘因子。显然, 当  $\beta/b \rightarrow \infty$  时, 有

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} R_Y(\tau) = \frac{b N_0}{4} e^{-b|\tau|}, \quad (4.78)$$

关于  $Y$  的自相关函数  $R_Y(\tau)$  趋近于第一项因子。

由此可知, 当  $\beta$  较  $b$  大很多时, 第二项因子接近于 1,  $R_Y(\tau)$  趋近于第一项因子—白噪声输入时, 系统输出的自相关函数。由于  $\beta$  正比于输入信号的带宽  $b$ , 正比于系统的带宽, 因此, 由上面讨论, 可以得到: 在输入信号的带宽远大于系统带宽的情况下, 分析系统输出的统计特性时, 可利用白噪声来近似输入的随机信号。这既可以节省工作量, 又不会使精度降低太多。

例如, 在带宽为 10MHz 的高增益宽带放大器中, 最重要的噪声来源是第一级的热噪声, 这种热噪声的带宽可以到 1000Hz, 因此, 若取  $b/\beta$  为 0.01, 那么用白噪声近似热噪声时, 其误差不超过 1%。

#### 4.2.4 系统输出的概率密度

以上仅从系统输出的均值、相关函数及相应的功率谱密度三方面, 分析了随机信号通过线性时不变系统后的统计特性, 但若希望知道更多的统计特性, 就需要知道系统输出的概率密度函数。根据系统输出与输入的积分关系 (4.23) 式, 可将其写成求和的形式, 便于分析:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(\tau_i)x(t-\tau_i)\Delta\tau_i, \quad (4.79)$$

其中  $\Delta\tau_i = \tau_{i+1} - \tau_i$  足够小。可见, 系统输出是输入的线性组合, 利用随机变量的线性变换的概率密度函数与随机变量的概率密度函数之间的关系 (即相差一个雅可比系数行列式, 见 (1.82) 式), 就可计算出系统输出的概率密度函数。如果系统输入是高斯信号, 由于高斯变量的线性组合仍然是高斯变量, 系统输出也是高斯信号。描述高斯信号的分布特性则比较简单, 此时只需要计算出系统输出的均值和相应的相关函数, 就可得到任意维的概率密度函数。

### 4.3 随机序列通过线性时不变系统

研究随机序列通过线性时不变系统, 分析输出统计特性的方法, 类似于上节中讨论连续随机信号的方法。

随机序列  $\{X(n)\}$  通过一个冲激响应为  $h(n)$  的离散线性时不变系统, 输出为随机序列  $\{Y(n)\}$ 。由于随机序列  $\{X(n)\}$  同样可以看作是大量样本序列的集合, 每个样本序列  $x(n)$  对应每次试验的结果, 均为确定的时间序列。当样本序列  $x(n)$  通过系统时, 其输

出  $Y(n)$  与输入  $X(n)$  之间存在如下卷积关系:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k). \quad (4.80)$$

如果  $X(n), h(n)$  绝对可和, 且傅里叶变换分别为  $X(\Omega), H(\Omega)$ , 则  $Y(n)$  的傅里叶变换  $Y(\Omega)$  满足如下等式:

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega), \quad (4.81)$$

其中, 系统传递函数  $H(\Omega)$  与冲激响应  $h(n)$  构成傅里叶变换对, 满足如下关系:

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\Omega n}. \quad (4.82)$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega. \quad (4.83)$$

也即

$$h(n) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} H(\Omega). \quad (4.84)$$

对于  $\{X(t)\}$  的一系列样本序列  $x(n)$ , 系统输出端就会得到一系列新的样本序列  $y(n)$ , 这些样本序列就构成随机序列  $\{Y(t)\}$ . 此外, 在 (4.80) 式中, 当系统是物理可实现的线性时不变系统时,  $h(k) = 0, k < 0$ .

### 4.3.1 系统输出的均值

$$\begin{aligned} m_Y(n) &= E\{Y(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)E\{x(n-k)\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)m_X(n-k). \end{aligned} \quad (4.85)$$

当输入  $\{X(n)\}$  广义平稳时,  $m_X(n) = m_X$ , 则

$$m_Y(n) = m_X \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) = m_X H(0) = m_Y. \quad (4.86)$$

此时输出均值与时间无关。

### 4.3.2 系统输出的自相关函数 $R_Y(n_1, n_2)$ 和功率谱密度函数 $G_Y(\Omega)$

$$\begin{aligned}
 R_Y(n_1, n_2) &= E\{Y(n_1)Y(n_2)\} \\
 &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_1)h(k_2)E\{X(n_1-k_1)X(n_2-k_2)\} \\
 &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_1)h(k_2)R_X(n_1-k_1, n_2-k_2). \quad (4.87)
 \end{aligned}$$

当输入  $\{X(t)\}$  广义平稳时, 则

$$R_Y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_1)h(k_2)R_X(m-k_1+k_2) = R_Y(m), m \in \mathbb{Z}. \quad (4.88)$$

得出的均方值 (即平均功率) 为

$$\begin{aligned}
 E\{Y^2(n)\} &= R_Y(0) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_1)h(k_2)R_X(-k_1+k_2) \\
 &\leq \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} |h(k_1)h(k_2)R_X(-k_1+k_2)| \\
 &\leq R_X(0) \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} |h(k_1)h(k_2)| \\
 &= R_X(0) \left( \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} |h(k_1)| \right)^2 < +\infty. \quad (4.89)
 \end{aligned}$$

由 (4.86) 式及上面两式, 我们可得如下结论: 当广义平稳随机序列  $\{X(t)\}$  仅从  $t_0$  时刻开始就加入到线性时不变系统, 其输出随机序列也广义平稳; 同样, 利用维纳——辛钦公式, 即功率谱密度函数与自相关函数是一组傅里叶变换对, 对上式两边进行傅里叶变换, 可得输出  $\{Y(t)\}$  的功率谱密度函数

$$\begin{aligned}
 G_Y(\Omega) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_Y(m)e^{-j\Omega m} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_1)h(k_2)R_X(m-k_1+k_2)e^{-j\Omega m} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_2)e^{-j\Omega m} \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} h(k_1)R_X(m+k_2-k_1), m \in \mathbb{Z} \quad (4.90)
 \end{aligned}$$

继续化简功率谱密度函数，得

$$\begin{aligned}
 G_Y(\Omega) &= \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_2) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-j\Omega m} R_1(m+k_2) \\
 &= \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_2) H(\Omega) G_X(\Omega) e^{j\Omega k_2} \\
 &= H(\Omega) G_X(\Omega) H(-\Omega) = |H(\Omega)|^2 G_X(\Omega).
 \end{aligned}$$

其中  $R_1(n) = R_X(n) * h(n)$ ,  $G_X(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_X(m) e^{-j\Omega m}$  为广义平稳输入,  $\{X(t)\}$  的功率谱密度函数。可见，输出功率谱密度只与系统的幅频特性有关，而与系统的相频特性无关。

#### 4.3.3 系统输入与输出的互相关函数和互功率谱密度函数

$$\begin{aligned}
 R_{XY}(n_1, n_2) &= E\{X(n_1)Y(n_2)\} = \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_2) E\{X(n_1)X(n_2-k_2)\} \\
 &= \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_2) R_X(n_1, n_2-k_2). \tag{4.91}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{YX}(n_1, n_2) &= E\{Y(n_1)X(n_2)\} = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} h(k_1) E\{X(n_2)X(n_1-k_1)\} \\
 &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} h(k_1) R_X(n_1-k_1, n_2). \tag{4.92}
 \end{aligned}$$

当输入  $\{X(t)\}$  广义平稳时， $R_X(n_1, n_2) = R_X(n_1, n_2) = R_X(m)$ ，则

$$R_{XY}(n_1, n_2) = \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_2) R_X(m+k_2) = R_{XY}(m). \tag{4.93}$$

$$R_{YX}(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} h(k_1) R_X(m-k_1) = R_{YX}(m) = R_{XY}(-m). \tag{4.94}$$

对以上等式两边进行傅里叶变换, 可得输入与输出之间的互功率谱密度函数

$$\begin{aligned}
 G_{XY}(\Omega) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{XY}(m) e^{-j\Omega m} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_2) R_X(m+k_2) e^{-j\Omega m} \\
 &= H(-\Omega) G_X(\Omega). \\
 G_{YX}(\Omega) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{YX}(m) e^{-j\Omega m} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} h(k_1) R_X(m-k_1) e^{-j\Omega m} \\
 &= H(\Omega) G_X(\Omega).
 \end{aligned}$$

结合 (4.90) 式, 有如下关系式:

$$G_Y(\Omega) = H(-\Omega)H(\Omega)G_X(\Omega) = H(-\Omega)G_{YX}(\Omega) = H(\Omega)G_{XY}(\Omega). \quad (4.95)$$

综上所述, 我们可以得到与连续随机信号相类似的结论: 当广义平稳随机序列  $x(n)$  从  $-\infty$  时刻开始就加入到线性时不变系统, 则系统输出广义平稳, 且输出与输入联合广义平稳。系统输出以及系统输入、输出之间的统计关系也可参照图 4-3 所示。但是, 如果广义平稳随机序列  $\{X(n)\}$  是从  $n=0$  时刻开始加入系统, 即  $X(n)=0, n<0$ , 此时系统输出不再平稳。

## 4.4 色噪声的产生与白化滤波器

下面将讨论在理论和实际应用中具有重要意义的两个问题。其一, 如何设计一个线性系统, 使其输入为白噪声时, 能输出具有指定功率谱密度的色噪声; 其二, 如何设计一个线性系统, 使其在输入为色噪声时, 能输出白噪声。如图 4-4 所示

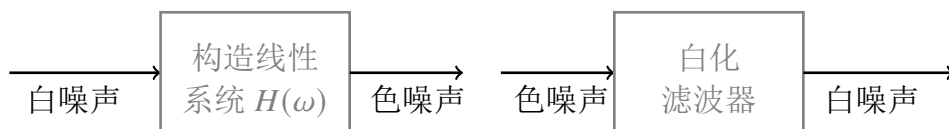


图 4-4 色噪声的产生和白化滤波器

### 1. 色噪声的产生

当具有单位功率谱密度的白噪声通过一个功率传递函数为  $|H(\omega)|$  的线性系统后, 其输出的功率谱密度为

$$G_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot 1, \quad (4.96)$$

上式表明白噪声通过任一线性系统后, 由于输出的功率谱密度取决于系统的功率传递函数  $|H(\omega)|^2$ , 所以输出的功率谱密度不再是常数, 即不再是白噪声。

若我们需要产生 (或模拟) 一个指定功率谱密度的色噪声, 可以由给定的功率谱密度

$$G_Y(\omega) = H(\omega)H^*(\omega) \quad (4.97)$$

来设计一个线性系统的传递函数  $H(\omega)$ , 然后用白噪声去激励所设计的系统, 由输出端所获得的色噪声  $G_Y(\omega)$ 。注意: 所涉及的系统必须是物理可实现的稳定系统, 即选择的  $H(\omega)$  必满足稳定的物理可实现条件。

为了便于讨论, 将传递函数用复频率来表示, 以  $s$  代替  $H(\omega)$  中的  $j\omega$ , 以  $-s^2$  代替  $G_X(\omega)$  中的  $\omega^2$ , 即 ( $s = j\omega, s^2 = -\omega^2$ ), 则有

$$G_Y(s) = H(s)H(-s) \quad (4.98)$$

因此, 我们可以利用白噪声源和线性系统产生具有指定功率谱密度的色噪声, 方法如下

① 将指定色噪声的功率谱密度  $G_Y(s)$  分解成 (示例代码见图 4-5)

$$G_Y(s) = \tilde{G}_Y(s)\tilde{G}_Y(-s). \quad (4.99)$$

② 根据物理可实现稳定系统的条件, 在  $\tilde{G}_Y(s)$  和  $\tilde{G}_Y(-s)$  中选择满足所有极点都位于  $S$  左半平面 (不包含虚轴) 的一个为  $H(s)$ 。

#### 例 4.4.1

设计一稳定的线性系统, 使其在单位白噪声激励下的输出功率谱为

$$G_Y(\omega) = \frac{25\omega^2 + 49}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9} \quad (4.100)$$

解: 输出的功率谱密度  $G_Y(\omega)$  的复频域表达式 ( $s = -j\omega, s^2 = -\omega^2$ ) 为

$$G_Y(s) = \frac{49 - 25s^2}{s^4 - 10s^2 + 9} \quad (4.101)$$

将  $G_Y(\omega)$  进行谱分解

$$G_Y(s) = \frac{(7+5s)(7-5s)}{(1-s^2)(9-s^2)} = \frac{(7+5s)(7-5s)}{(1+s)(1-s)(3+s)(3-s)} \quad (4.102)$$

令

$$\tilde{G}_Y(s) = \frac{(5s+7)}{(s+1)(s+3)}, \quad \tilde{G}_Y(-s) = \frac{-(5s-7)}{(s-1)(s-3)} \quad (4.103)$$

因  $\tilde{G}_Y(s)$  位于  $S$  平面的所有极点  $s_1 = -1, s_2 = -3$  均在左半平面, 所以选  $\tilde{G}_Y(s)$  为  $H(s)$ , 即

$$H(s) = \tilde{G}_Y(s) = \frac{(5s+7)}{(s+1)(s+3)} \quad (4.104)$$

所设计系统的传递函数为

$$H(\omega) = \frac{(5j\omega+7)}{(j\omega+1)(j\omega+3)} \quad (4.105)$$

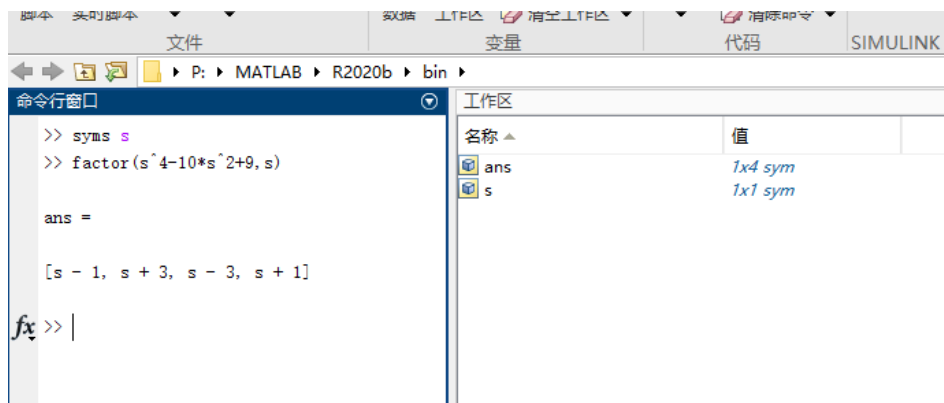


图 4-5  $s^4 - 10s^2 + 9$  的分解

## 2. 白化滤波器

在随机信号处理中, 往往会遇到等待处理的随机信号是非白噪声信号, 这样会给问题的解决带来困难。克服这一困难的措施之一是对色噪声进行白化处理。所谓白化处理就是设计一个稳定的线性滤波器, 使输入色噪声的系统输出是白噪声, 这实质上是求上一节问题的逆。我们称完成这一功能的系统为白化滤波器。色噪声白化的方法为:

① 先将色噪声的有理谱  $G_X(s)$  分解为 (若色噪声的谱密度不是有理函数, 常用有理函数来逼近)

$$G_X(s) = \widetilde{G}_X(s)\widetilde{G}_X(-s) \quad (4.106)$$

② 令系统的传递函数为

$$H(s) = \frac{1}{\widetilde{G}_X(s)} \quad \text{或} \quad H(s) = \frac{1}{\widetilde{G}_X(-s)} \quad (4.107)$$

要求  $H(s)$  是稳定的因果系统的传递函数 (即在虚轴与右半平面无极点)。



③ 虽然输入系统的是色噪声, 但系统输出信号的功率谱密度是

$$G_Y(s) = H(s)H(-s)G_X(s) = \frac{1}{\widetilde{G_X(s)}\widetilde{G_X(-s)}} \cdot \widetilde{G_X(s)}\widetilde{G_X(-s)} = 1 \quad (4.108)$$

可见系统输出的是单位谱的白噪声。

由于白噪声具有数学运算简单等特点, 因而白化滤波器在信号检测、估计等方面得到广泛应用。

## 4.5 白噪声通过线性时不变系统

白噪声是实际应用中最常遇见的一种噪声, 它是一种广义平稳的随机过程。其特殊的统计特性使它在线性系统的分析应用中起着非常重要的作用。白噪声  $\{N(t)\}$  的均值为零, 功率谱密度均匀分布在无限宽的频带范围内, 即

$$G_N(\omega) = \frac{N_0}{2}, \quad -\infty < \omega < +\infty, \quad (4.109)$$

其中  $N_0$  为常数。白噪声的”白”字是借用了光学中白光的概念, 白光的光谱覆盖了所有可见光的频率。不具有上述均匀功率谱的噪声称为色噪声。根据维纳-辛钦定理, 我们可以进一步得到白噪声  $N(t)$  的自相关函数  $R_N(\tau)$  以及自相关系数  $\rho_N(\tau)$ :

$$R_N(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_N(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2} \delta(\tau). \quad (4.110)$$

$$\rho_N(\tau) = \frac{R_N(\tau)}{R_N(0)} = \begin{cases} 1, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases}. \quad (4.111)$$

上式表明, 白噪声在任意相邻时刻的取值都是不相关的, 且平均功率  $R_N(0)$  无限大。然而, 上述定义白噪声只是一种理想化的噪声模型, 在实际中是不可能存在的, 因为实际系统的带宽总是有限的, 有限带宽系统中白噪声的平均功率不可能是无限大的。通常情况下, 只要平稳随机过程的功率谱密度在比系统带宽大得多的频率范围内近似均匀分布, 就可以将其视为白噪声, 这种白噪声通常又被称为带白噪声。

### 4.5.1 系统输出的一般特性及等效噪声带宽

作为一种特殊的广义平稳随机过程, 白噪声通过线性时不变系统后, 系统的输出  $Y(t)$  和 4.3 节中所列举的一系列统计特性一致。根据 (4.29), ..., (4.41) 式, 我们可得如下

结论:

$$m_Y = m_N \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau = m_N H(0) = 0. \quad (4.112)$$

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) \delta(\tau - \tau_1 + \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) h(\tau + \tau_2) d\tau_2. \end{aligned} \quad (4.113)$$

$$G_Y(\omega) = \frac{N_0}{2} |H(\omega)|^2. \quad (4.114)$$

$$R_{NY}(\tau) = \frac{N_0}{2} h(-\tau) = R_{YN}(-\tau). \quad (4.115)$$

$$G_{NY}(\omega) = \frac{N_0}{2} H(-\omega) = G_{YN}(-\omega). \quad (4.116)$$

由 (4.114) 式可知, 白噪声通过线性时不变系统后, 输出一般不再具有均匀分布的功率谱密度, 而是由系统的幅频响应来决定, 输出一般是色噪声。此时, 输出噪声的平均功率为

$$\begin{aligned} E[Y^2(t)] &= R_Y(0) \\ &\stackrel{(4.114)}{=} \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(\tau) d\tau = \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{N_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega, \end{aligned}$$

式 (4.117) 的计算利用了实际系统的冲激响应一般为实函数的性质。



**注 4.8.** 在实际应用中, 为了便于计算系统的输出噪声功率, 人们引入了等效噪声带宽的概念, 用一个具有矩形幅频响应的理想系统来替代实际系统。当白噪声激励这个理想系统时, 输出噪声的功率谱密度在通带范围内均匀分布。

如果白噪声通过频率响应为矩形的理想系统, 那么输出的信号就是个“限带白噪声”。而利用白噪声作为背景和数学模型, 又将会给随机信号的分析带来极大地方便。在实际应用中, 为了分析的方便, 通常会将一个频率响应为矩形的理想系统来代替实际系统。而白噪声通过这个系统的输出, 就等效成了一个限带白噪声。因此, 理想系统的带宽就是等效出来的限带白噪声功率谱的带宽, 用  $\Delta\omega_e$  表示等效噪声带宽。若输出噪声的平均功率等于实际系统输出的平均功率, 且理想系统  $H_e(\omega)$  在通带范围内的幅度值等于实际系统幅频响应的最大值, 则理想系统的带宽  $\Delta\omega_e$  就定义为实际系统的等效噪声带宽, 如图 4-6, 此时输出噪声的平均功率为

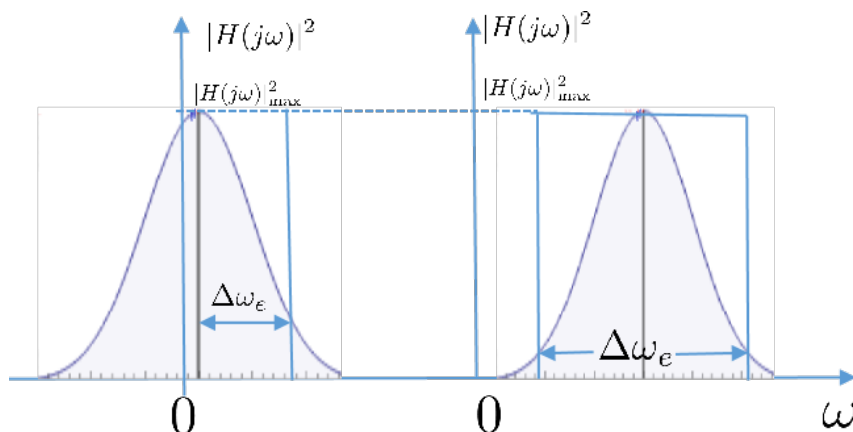


图 4-6 系统的等效噪声带宽 a) 低通系统 b) 带通系统

$$\begin{aligned}
 R_Y(0) &= \frac{N_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} |H_e(\omega)|^2 d\omega = \frac{N_0}{2\pi} \Delta\omega_e |H(\omega)|_{\max}^2 \\
 &= \frac{N_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega.
 \end{aligned} \tag{4.117}$$

解得

$$\Delta\omega_e = \frac{\int_0^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}{|H(\omega)|_{\max}^2}. \tag{4.118}$$

此外, 根据 (4.113) 式和 (4.114) 式, 我们可以通过用白噪声激励一个线性时不变系统的方法, 来产生具有特定二阶统计特性的平稳随机过程, 这是个信号建模问题。但由于输出的功率谱密度只提供了系统的幅度信息, 缺少相位信息, 我们只能据此得到最小相位系统。反过来, 如果知道了平稳随机过程的二阶统计特性, 将其激励一个线性时不变系统来产生一个白噪声信号, 则称之为对随机过程进行预白化。由自相关函数 (4.115) 式和功率谱函数 (4.116) 式, 我们还可以看到: 系统输出与输入之间的互相关函数 (或互功率谱密度) 等于系统的冲激响应 (或传递函数) 乘上一个常数。也就是说, 当白噪声激励一个未知的线性时不变系统时, 可以通过估计系统输出与白噪声之间的互相关函数 (或互功率谱密度) 来估计系统的冲激响应 (或传输函数), 这是一个系统辨识问题。

#### 4.5.2 白噪声通过理想低通系统

图 4-7 所示为一个理想的低通系统, 系统的幅频响应为

$$|H(\omega)| = \begin{cases} A, & |\omega| \leq \Delta\omega \\ 0, & |\omega| > \Delta\omega \end{cases} \tag{4.119}$$

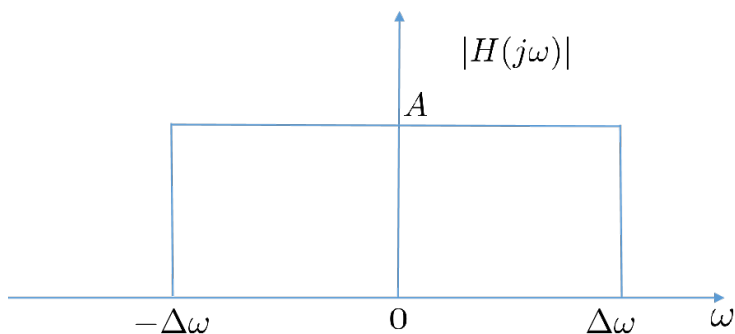


图 4-7 系统的等效噪声带宽

当白噪声通过该系统，输出的功率谱密度函数和自相关函数可以分别表示

$$G_Y(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0 A^2}{2}, & |\omega| \leq \Delta\omega \\ 0, & |\omega| > \Delta\omega \end{cases} \quad (4.120)$$

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \frac{N_0 A^2}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0 A^2}{2\pi} \int_0^{\Delta\omega} \cos \omega\tau d\omega \\ &= \frac{N_0 A^2 \Delta\omega}{2\pi} \cdot \frac{\sin \Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau} = R_Y(0) \cdot \frac{\sin \Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau}. \end{aligned} \quad (4.121)$$

此时系统的等效噪声带宽为

$$\Delta\omega_e = \frac{1}{A^2} \int_0^{\Delta\omega} A^2 d\omega = \Delta\omega. \quad (4.122)$$

此外，根据 (4.121) 式可以进一步得到如下结论：当  $\tau = k\pi/\Delta\omega$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时， $R_Y(\tau) = 0$ ，即白噪声通过理想低通系统后，输出在  $\pi/\Delta\omega$  间隔上抽样，得到的各个样本之间是互不相关的。

### 4.5.3 白噪声通过理想带通系统

图 4-8 所示为一个理想的带通系统，系统的幅频响应为

$$|H(\omega)| = \begin{cases} A, & |\omega \pm \omega_0| \leq \frac{\Delta\omega}{2} \\ 0, & |\omega \pm \omega_0| > \frac{\Delta\omega}{2} \end{cases} \quad (4.123)$$

当白噪声通过该系统，系统输出的功率谱密度函数  $G_Y(\omega)$  和自相关函数  $R_Y(\tau)$  可

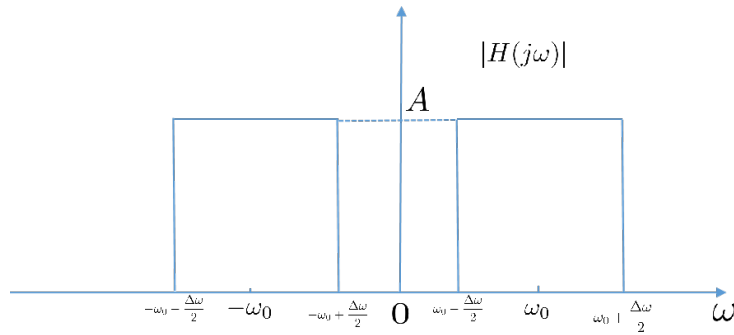


图 4-8 理想的带通系统

以分别表示为:

$$\begin{aligned}
 R_Y(\tau) &= \frac{N_0 A^2}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \cos \omega \tau d\omega \\
 &= \frac{N_0 A^2}{2\pi\tau} \sin\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)\tau - \frac{N_0 A^2}{2\pi\tau} \sin\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right)\tau \\
 &= \frac{N_0 A^2}{\pi\tau} \sin \frac{\Delta\omega\tau}{2} \cos \omega_0\tau \\
 &= \frac{N_0 A^2 \Delta\omega}{2\pi} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{\Delta\omega\tau}{2}} \cos \omega_0\tau \\
 &= R_Y(0) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{\Delta\omega\tau}{2}} \cos \omega_0\tau.
 \end{aligned} \tag{4.124}$$

$$G_Y(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0 A^2}{2}, & |\omega \pm \omega_0| \leq \frac{\Delta\omega}{2} \\ 0, & |\omega \pm \omega_0| > \frac{\Delta\omega}{2} \end{cases}. \tag{4.125}$$

此时, 系统的等效噪声带宽为

$$\Delta\omega_e = \frac{1}{A^2} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} A^2 d\omega = \Delta\omega. \tag{4.126}$$

#### 4.5.4 白噪声通过具有高斯频率特性的带通系统

由多级单调谐中频放大器级联构成的系统, 其幅频特性近似具有高斯特性。图 4-9 所示的是一个具有高斯频率特性的带通系统, 系统的幅频响应为

$$|H(\omega)| = \begin{cases} A \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\beta^2}\right], & \omega > 0. \\ A \exp\left[-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{2\beta^2}\right], & \omega < 0. \end{cases} \tag{4.127}$$

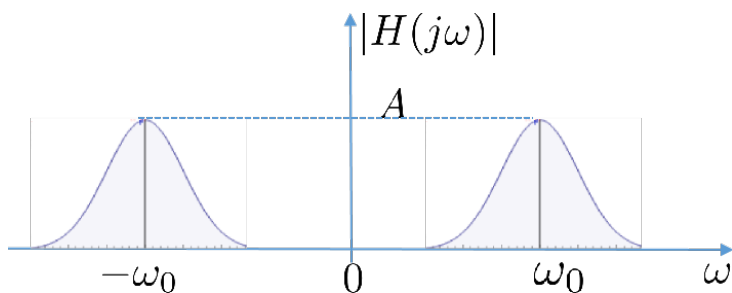


图 4-9 具有高斯频率特性的带通系统

当白噪声通过该系统，输出的功率谱密度函数为

$$G_Y(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0 A^2}{2} \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\beta^2}\right], & \omega > 0 \\ \frac{N_0 A^2}{2} \exp\left[-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{\beta^2}\right], & \omega < 0 \end{cases}. \quad (4.128)$$

如果将  $G_Y(\omega)$  看作是基带信号  $s_1(\tau)$  经过上变频后的带通信号，即

$$s_1(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N_0 A^2 \exp\left(-\frac{\omega^2}{\beta^2}\right) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (4.129)$$

此时输出的自相关函数可表示为

$$R_Y(\tau) = s_1(\tau) \cos \omega_0 \tau = \frac{N_0 A^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\omega^2}{\beta^2}\right) e^{j\omega\tau} \cos \omega_0 \tau d\omega. \quad (4.130)$$

利用  $\exp(-a^2 t^2)$  和  $\frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a^2}\right)$  为傅里叶变换对，也即

$$\exp(-a^2 t^2) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a^2}\right) \quad (4.131)$$

则

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \frac{N_0 A^2}{2\pi} \beta \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{\beta^2 \tau^2}{4}\right) \cos \omega_0 \tau \\ &= \frac{N_0 A^2 \beta}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\beta^2 \tau^2}{4}\right) \cos \omega_0 \tau. \end{aligned} \quad (4.132)$$

此时，系统的等效噪声带宽为

$$\Delta\omega_e = \frac{1}{A^2} \int_0^{+\infty} A^2 \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\beta^2}\right] d\omega = \sqrt{\pi} \beta. \quad (4.133)$$

## 4.6 白噪声序列和平稳随机序列的参数模型 \*

与连续的白噪声相对应，白噪声序列  $\{W(n)\}$  是具有如下统计特性的零均值广义平稳随机序列：

$$\begin{aligned} R_W(m) &= \sigma_W^2 \delta(m). \\ S_W(\Omega) &= \sigma_W^2, \quad -\pi \leq \Omega \leq \pi. \end{aligned} \quad (4.134)$$

当白噪声序列通过离散线性时不变系统时，根据前面章节中的结论，输出噪声序列是广义平稳的，且与输入序列联合平稳，其具体统计特性可参照式 (4.116)。与连续的白噪声相类似，我们也可以用白噪声序列激励一个离散的最小相位系统进行信号建模，产生具有特定二阶统计特性的平稳随机序列。

在实际应用中，为了便于对问题的分析和处理，线性时不变系统的传递函数通常用一个有限阶数的有理函数来近似表示。相应地，系统的输出序列也就可以用有限个参数来描述，该有理函数称为平稳随机序列的参数模型。这种通过建立合适的参数模型来分析平稳随机序列的方法，因其频谱分辨率高，已成为现代谱分析中的一种重要方法。这里只介绍三种最常用的参数模型。

考虑具有如下有限阶数的离散线性时不变系统

$$H(\Omega) = \frac{1 + \sum_{k=1}^q b_k e^{-j\Omega k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j\Omega k}} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k e^{-j\Omega k}}{\sum_{k=0}^p a_k e^{-j\Omega k}}. \quad (4.135)$$

其中  $a_0 = b_0 = 1$ ，其他参数由输出序列  $\{Y(n)\}$  的二阶统计特性（自相关函数或者功率谱函数）决定。写成  $Z$  变换的形式

$$H(z) = \frac{1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} = \frac{\prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^p (1 - \alpha_k z^{-1})}, \quad (4.136)$$

其中  $\alpha_k, \beta_k$  分别为系统的极点和零点，为保证系统的因果稳定性，这里要求  $|\alpha_k| < 1$ 。

### 4.6.1 自回归滑动平均模型

如果系数  $a_1, \dots, a_p$  和  $b_1, \dots, b_q$  不全为零，且  $a_p \neq 0, b_q \neq 0$  时，此时系统存在零点也存在极点。当白噪声序列  $\{w(n)\}$  激励上述系统后，系统输出序列  $\{Y(n)\}$  与输入  $\{w(n)\}$  之间的关系可由如下差分方程表示

$$\begin{aligned} y(n) &= -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \dots - a_p y(n-p) \\ &\quad + w(n) + b_1 w(n-1) + b_2 w(n-2) + \dots + b_q w(n-q) \\ &= \sum_{k=0}^q b_k w(n-k) - \sum_{k=1}^p a_k y(n-k). \end{aligned} \quad (4.137)$$

称为平稳随机序列  $\{Y(n)\}$  的  $p$  阶自回归  $q$  阶滑动平均模型 (ARMA). 由该模型表征的平稳随机序列  $\{Y(n)\}$ , 也即系统输出的功率谱密度函数和自相关函数分别为

$$G_Y(\Omega) = \sigma_w^2 \frac{\left| \sum_{k=0}^q b_k e^{-j\Omega k} \right|^2}{\left| \sum_{k=0}^p a_k e^{-j\Omega k} \right|^2}. \quad (4.138)$$

$$\begin{aligned} R_Y(m) &= R_Y(n_1 - n_2) = E \left\{ y(n_2) \left[ \sum_{k=0}^q b_k w(n_1 - k) - \sum_{k=1}^p a_k y(n_1 - k) \right] \right\} \\ &= \sum_{k=0}^q b_k R_{wy}(m - k) - \sum_{k=1}^p a_k R_Y(m - k) \\ &= \sum_{k=0}^q b_k \sigma_w^2 h(k - m) - \sum_{k=1}^p a_k R_Y(m - k). \end{aligned} \quad (4.139)$$

上式利用了 4.3 节中的结论

$$R_{wy}(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) R_w(m + k) = \sigma_w^2 h(-m), \quad (4.140)$$

其中, 系统的冲激响应  $h(n)$  可根据 (4.135) 式表示成下式

$$h(n) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k h(n - k) + b_n, & 0 \leq n \leq q \\ -\sum_{k=1}^p a_k h(n - k), & n > q \\ 0, & n < 0 \end{cases}. \quad (4.141)$$

#### 4.6.2 自回归模型

当系数  $b_1, \dots, b_q$  均为零且  $a_p \neq 0$  时, 系统为全极点系统, 其传输函数和冲激响应分别为

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j\Omega k}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^p a_k e^{-j\Omega k}}. \quad (4.142)$$

$$h(n) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k h(n - k) + \delta(n), & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}. \quad (4.143)$$

系统输出序列  $\{Y(n)\}$  与白噪声序列  $\{W(n)\}$  的当前值和  $\{Y(n)\}$  的  $p$  个过去值有关, 即

$$y(n) = w(n) - \sum_{k=1}^p a_k y(n - k), \quad (4.144)$$



称为平稳随机序列  $\{Y(n)\}$  的  $p$  阶自回归模型 (Auto Regressive model, AR), 记为  $AR(p)$ . 可见  $AR(p)$  模型是由  $ARMA(p, q)$  模型经过  $q = 0$  退化而来。相应地, 由该模型表征的平稳随机序列  $\{Y(n)\}$ , 即系统输出的功率谱密度函数和自相关函数可表示为

$$G_Y(\Omega) = \frac{\sigma_w^2}{\left| \sum_{k=0}^p a_k e^{-j\Omega k} \right|^2}. \quad (4.145)$$

$$\begin{aligned} R_Y(m) &= R_Y(n_1 - n_2) = E \left\{ y(n_2) \left[ w(n_1) - \sum_{k=1}^p a_k y(n_1 - k) \right] \right\} \\ &= R_{wy}(m) - \sum_{k=1}^p a_k R_Y(m - k) \\ &= \sigma_m^2 h(-m) - \sum_{k=1}^p a_k R_Y(m - k). \end{aligned} \quad (4.146)$$

### 4.6.3 滑动平均模型

当系数  $a_1, \dots, a_p$  均为零, 且  $b_q \neq 0$  时, 系统为全零点系统, 其传输函数和冲激响应分别为

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= 1 + \sum_{k=1}^q b_k e^{-j\Omega k} = \sum_{k=0}^q b_k e^{j\Omega k}. \\ h(n) &= \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq q \\ 0, & n < 0, n > q \end{cases}. \end{aligned} \quad (4.147)$$

此时,  $\{Y(n)\}$  仅与白噪声序列  $\{W(n)\}$  的当前值和  $q$  个过去值有关, 即

$$y(n) = w(n) + \sum_{k=1}^q b_k w(n - k) = \sum_{k=0}^q b_k w(n - k), \quad (4.148)$$

称为平稳随机序列  $\{Y(n)\}$  的  $q$  阶滑动平均模型 (Moving Average model, MA), 记为  $MA(q)$ . 同样,  $MA(q)$  模型可以看作是由  $ARMA(p, q)$  模型经过  $p = 0$  退化而来, 相应地, 由该模型表征的平稳随机序列  $\{Y(n)\}$ , 即系统输出的功率谱密度函数和自相关函数可分别表示为

$$G_Y(\Omega) = \sigma_W^2 \left| \sum_{k=0}^q b_k e^{-j\Omega k} \right|^2. \quad (4.149)$$

$$\begin{aligned} R_Y(m) &= R_Y(n_1 - n_2) = E \left\{ Y(n_2) \sum_{k=0}^q b_k W(n_1 - k) \right\} \\ &= \sum_{k=0}^q b_k R_{wy}(m - k) = \sum_{k=0}^q b_k \sigma_W^2 h(k - m). \end{aligned} \quad (4.150)$$

#### 4.6.4 三种模型间的联系

在上节, 我们提到 AR 模型和 MA 模型是 ARMA 模型分别在不同条件下的特例, 除此之外, 这三种模型之间还可以相互等价。下面我们就以 MA 模型为例, 证明一个有限阶的 MA( $q$ ) 模型可以等价于一个无穷阶的 AR 模型。

对 (4.148) 式两边取 Z 变换

$$Y(z) = H(z)W(z) = \prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1}) W(z), \quad (4.151)$$

其中  $Y(z)$  和  $W(z)$  分别为  $y(n)$  和  $W(n)$  的 Z 变换。若系统  $H(z)$  具有可逆性, 即其零点  $|\beta_k| < 1$ , 序列  $\{W(n)\}$  可以看成是序列  $\{Y(n)\}$  激励其逆系统  $H_{inv}$  的输出, 即

$$W(z) = H_{inv} Y(z) = \frac{Y(z)}{\prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1})}, \quad (4.152)$$

利用系统的稳定性条件和下面的公式

$$\frac{1}{1 - \beta_k z^{-1}} = \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_k^i z^{-i} = 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_k^i z^{-i}, \quad (4.153)$$

将其代入 (4.152) 式得



$$W(z) = \prod_{k=1}^q \left( 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_k^i z^{-i} \right) Y(z) = \left( 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon_i z^{-i} \right) Y(z). \quad (4.154)$$



比较上式与 (4.144) 式, 两者在形式上完全一致, 这就证明, 一个可逆的有限阶 MA 模型可以等价于一个无穷阶的 AR 模型。同样, 可以用类似的分析方法得到如下结论: 一个可逆的有限阶 MA 模型或 ARMA 模型可以等价于一个无穷阶的 AR 模型, 一个稳定的有限阶 AR 模型或 ARMA 模型也可以等价于一个无穷阶的 MA 模型。

## 小结

本章首先介绍了信号与系统的基本概念、分类和特点；其次分别从时域和频域两方面分析了平稳随机信号通过线性时不变系统后，系统输出与输入的一阶、二阶统计量之间的关系，得到了一系列的结论；然后将其应用到对白噪声这种特殊的随机过程通过线性系统后的分析，给出了等效噪声带宽的概念；紧接着利用相同的方法，分析了随机序列通过线性时不变系统后的特性分析，得到了类似的一些结论；并在其基础上，引入了通过建立随机序列参数模型来分析平稳随机序列统计特性的方法，介绍了 ARMA、AR、MA 三种模型的概念及其之间的联系；然而，针对非平稳随机信号以及有记忆的非线性等更复杂的系统的处理，限于篇幅没有涉及，感兴趣的读者可查阅相关的文献和书籍。



## 4.7 习题

 **练习 4.1**  已知系统的单位冲激响应  $h(t) = 5e^{-3t}U(t)$ ，输入信号为  $X(t) = M + 4\cos(2t + \Phi)$ ，其中  $M$  是随机变量， $\Phi$  是  $(0, 2\pi)$  上均匀分布的随机变量，且  $M$  和  $\Phi$  独立。求输出信号的表达式。

 **练习 4.2**  已知线性系统的单位冲激响应



$$h(t) = [5\delta(t) + 3][U(t) - U(t - 1)]. \quad (4.155)$$


输入信号为  $X(t) = 4\sin(2\pi t + \Phi)$ ，其中  $\Phi$  是  $(0, 2\pi)$  上均匀分布的随机变量。求输出信号的表达式均值和方差。

 **练习 4.3**  已知系统的单位冲激响应为

- (1)  $h(t) = e^{-2t}U(t)$ ;
- (2)  $h(t) = e^{-2t}\sin tU(t)$ ;
- (3)  $h(t) = te^{-2t}U(t)$ ;
- (4)  $h(t) = \delta(t) + e^{-3t}U(t)$ .

当输入平稳信号  $X(t)$  的自相关函数为  $R_X(\tau) = 4 + e^{-|\tau|}$  时，求系统输出的均值和方差。

 **练习 4.4**  已知有限时间积分系统的单位冲激响应为  $h(t) = (1 - t)[U(t) - U(t - 0.5)]$ ，系统输入功率谱密度为  $10V^2/Hz$  的高斯白噪声，求系统输出的 (总) 平均功率，交流功率和输入输出互相关函数。

 **练习 4.5** 已知系统的单位冲激响应  $h(t) = (1 - t)[U(t) - U(t - 1)]$ ，信号的自相关函数为  $R_X(\tau) = 2\delta(\tau) + 9$ ，求系统输出的直流功率和相关函数。

**练习 4.6** 已知系统的输入信号是物理谱密度为  $N_0$  的白噪声, 系统为一带通滤波器, 如图 4-10 所示。求系统输出的 (总) 噪声平均功率。

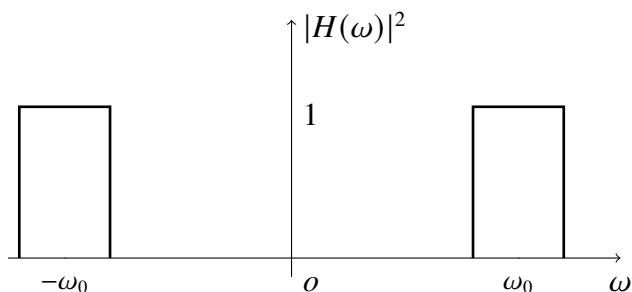


图 4-10

**练习 4.7** 已知如图 4-11 所示的线性系统, 系统输入信号是物理谱密度为  $N_0$  的白噪声, 求:  
① 系统的传递函数  $H(\omega)$ 。输出  $Z(t)$  的均方值, 其中

$$\int_0^{\infty} \frac{[\sin(ax)]^2}{x^2} dx = \int_0^{\infty} a^2 [\text{Sa}(ax)]^2 dx = \frac{\pi}{2} |a|. \quad (4.156)$$

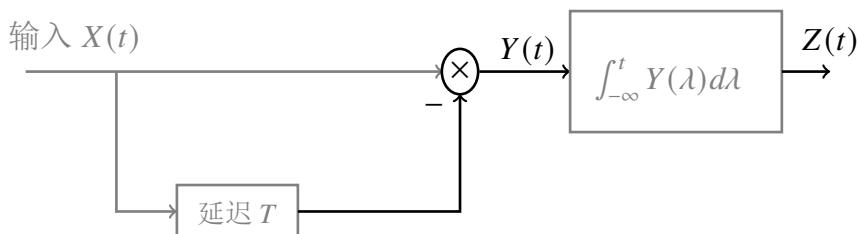


图 4-11

**练习 4.8** 已知某积分电路输入输出之间满足关系

$$Y(t) = \int_{t-T}^t X(t') dt'. \quad (4.157)$$

式中  $T$  是指积分时间常数。若输入和输出信号皆为平稳过程, 证明输出功率谱密度满足

$$G_Y(\omega) = G_X(\omega) \frac{\left[ \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right]^2}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}. \quad (4.158)$$

**练习 4.9** 如图 4-12 所示的某单输入双输出的线性系统

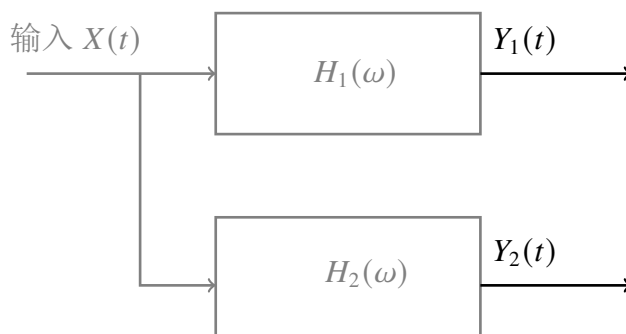


图 4-12

① 若输入信号  $X(t)$  宽平稳, 证明输出  $Y_1(t)$  和  $Y_2(t)$  的互谱密度满足

$$G_{Y_1 Y_2}(\omega) = G_X(\omega) H_1^*(\omega) H_2(\omega) \quad (4.159)$$

② 若输入信号为零均值平稳高斯过程, 为使得  $Y_1(t)$  和  $Y_2(t)$  相互独立, 求传递函数  $H_1(\omega)$  和  $H_2(\omega)$  应满足什么条件, 并画图说明。

 **练习 4.10**  单位冲激响应  $h(t)$  如图 4-13 所示的线性系统, 若输入为功率谱密度为  $2V^2/\text{Hz}$  的白噪声, 求:

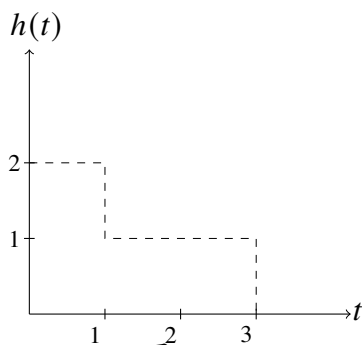




图 4-13

① 系统的等效噪声带宽。② 系统输出的平均功率。

 **练习 4.11**  已知系统的输入为单位谱密度的白噪声, 输出的功率谱密度为

$$G_Y(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9}. \quad (4.160)$$

求此稳定系统的单位冲激响应  $h(t)$ 。

练习 4.12 已知系统输入信号的功率谱密度为设计一稳定的线性系统  $H(\omega)$ , 使得系统的输出为单位谱密度的白噪声。

练习 4.13 已知平稳随机信号  $X(t)$  在  $\tau = 0$  时刻加到传递函数  $H(s) = s^{-1}$  的零初始条件的积分器上。

① 若  $X(t)$  的自相关函数为  $R_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$ , 求输出  $Y(t)$  的均方值。

② 若  $X(t)$  的自相关函数为  $R_X(\tau) = \delta(\tau)$ , 求输出  $Y(t)$  的自相关函数。

练习 4.14 功率谱密度为  $N_0/2$  的白噪声作用于  $|H(0)| = 2$  的低通网络上, 等效噪声带宽为 2MHz。若在  $1\Omega$  电阻上的输出平均功率为 0.1W, 求  $N_0$  的值。

练习 4.15 已知线性系统的输入信号是功率谱密度为  $N_0/2$  的白噪声, 现用一等效系统的传递函数  $H_e(\omega)$  来代替原系统的传递函数  $H(\omega)$ , 等效原则为

$$H_e(\omega) = \begin{cases} H(\omega_0), & |\omega| \leq \Omega \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (4.161)$$

此时记系统的输出为  $Y(t)$ 。

① 求使得  $E[Y(t)] = E[Y^2(t)]$  时, 等效系统的带宽。

② 若已知  $H(\omega) = \frac{\beta}{j\omega+2}$ , 求原系统  $H(\omega)$  的等效噪声带宽。

练习 4.16 已知一零均值平稳随机信号  $X(t)$  的自相关函数为  $R_X(\tau)$ , 相应的功率谱密度为  $G_X(\omega)$ , 且  $G_X(\omega) \leq G_X(0)$ 。若通过线性低通滤波器  $H(\omega)$ , 输出为  $Y(t)$ , 且系统  $H(\omega)$  的 3dB 带宽小于  $X(t)$  的等效噪声带宽。证明:

(1)  $\tau_X B_X = \tau_Y B_Y$ , (2)  $\frac{\tau_Y}{\tau_X} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} |H(0)|^2$ , 其中  $\tau_X, \tau_Y; B_X, B_Y; \sigma_X^2, \sigma_Y^2$  分别为输入信号和输出信号的相关时间, 等效噪声带宽和方差。

练习 4.17 已知线性系统的单位冲激响应为  $h(t)$ , 系统输入  $X(t)$  为零均值, 自相关函数  $R_X(\tau) = \delta(\tau)$  的平稳高斯过程。若要使  $X(t_1)$  和  $Y(t_1)$  相互独立,  $h(t)$  应满足什么条件?

练习 4.18 如图 4-14 所示的线性系统, 系统输入  $W(t)$  是零为 1 的白噪声, 且  $h(t) = e^{-t}U(t)$ 。

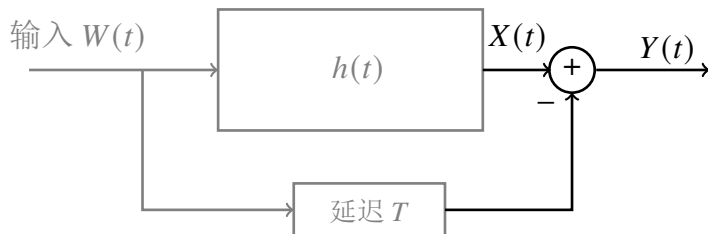


图 4-14

- ① 判断  $X(t)$  和  $Y(t)$  分别服从什么分布, 给出理由。
- ② 证明  $Y(t)$  是严平稳过程。
- ③ 求  $W(t)$  和  $X(t)$  的互相关函数,  $Y(t)$  的功率谱密度。
- ④ 写出  $Y(t)$  的一维概率密度表达式。
- ⑤ 判断同一时刻  $X(t)$  和  $Y(t)$  是否独立, 给出理由。