随机信号分析

随机信号的时域分析

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

November 8, 2020

目录

第二次教案下载二维码

Github 下载

第 2 章 随机信号的时域分析

智慧树课堂二维码和项目地址

图 1: 《随机信号分析》课程号:k213654

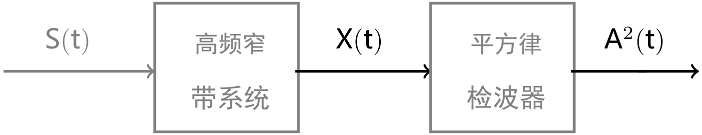
Github 项目地址

下载地址：

https://github.com/zggl/random-signal-processing2020-autumn

目录

在许多实际应用中，也常常在高频窄带滤波器的输出端接入一平方律检波器如图 2 所示，在平方律检波器输出端便得到 $X(t)$ 包络的平方 $A^2(t)$。



$$X(t) = A(t)\cos\left[\omega_0 t + \Phi(t)\right]$$

图 2: 平方律检波器

前面已经推导出当窄带随机过程为一具有零均值、方差为 σ^2 的平稳高斯噪声时, 其包络 $A(t)$ 的一维概率密度为瑞利分布。

$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{a_t^2}{2\sigma^2}\right\}, a_t \geqslant 0. \tag{1}$$

应用求随机变量函数分布的方法, 很容易求出包络平方的一维概率密度。令

$$U(t) = A^2(t) \tag{2}$$

则在时刻 t 的采样有

$$\begin{cases} U_t = g(A_t) = A_t^2, & A_t \geqslant 0 \\ A_t = h(U_t) = \sqrt{U_t}, & U_t \geqslant 0. \end{cases} . \tag{3}$$

其雅可比行列式为

$$J = \frac{1}{2\sqrt{U_t}} \tag{4}$$

于是包络平方的一维概率密度为

$$f_U(u_i) = |J| f_A(A_t) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left\{-\frac{u_t}{2\sigma^2}\right\}, \quad u_t \geqslant 0. \tag{5}$$

上式表明, U_i 服从指数分布。

实际中, 为了分析方便, 常应用归一化随机变量。令归一化随机变量 $V_t = \frac{U_1}{\sigma^2}$, 则可得到 V_t 的概率密度为

$$f_V(v_t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{v_1}{2}}, \quad v_t \geqslant 0. \tag{6}$$

当窄带随机过程为余弦信号加窄带高斯噪声时, 即

$$X(t) = a\cos\omega_0 t + N(t) = A(t)\cos\left[\omega_0 t + \Phi(t)\right], \tag{7}$$

其中 a, ω_0 为已知常数, $N(t)$ 为具有零均值、方差 σ^2 的窄带高斯噪声。根据 **??** 节分析的结果可知, $X(t)$ 的包络服从广义瑞利分布, 即

$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} I_0\left(\frac{a a_t}{\sigma^2}\right)\exp\left\{-\frac{a_t^2 + a^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad a_t \geqslant 0. \tag{8}$$

仿照 1 节中的方法, 不难导出包络平方 $U^2 = A^2$ 的一维概率密度为

$$f_U(u_i) = \frac{1}{2\sigma^2} I_0\left[\frac{a\sqrt{u_t}}{\sigma^2}\right]\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[u_t + a^2\right]\right\}, \quad u_t \geqslant 0. \tag{9}$$

令 $V_t = \frac{U_t}{\sigma^2}$, 可得归一化随机变量 V 的概率密度函数为

$$f_V(v_i) = \frac{1}{2} I_0\left[\frac{\sqrt{v_t} a}{\sigma}\right] \exp\left\{-\frac{v_t + a^2/\sigma^2}{2}\right\}, \quad v_t \geqslant 0. \tag{10}$$

1. χ^2 分布

在有些应用中, 例如在信号检测中, 为了改进检测性能, 经常采用所谓视频积累技术, 即对包络的平方进行独立采样后再积累, 如图 3 所示, 这时输出的随机变量习惯上记为 χ^2, 它的概率密度习惯上称之为 χ^2 分布如图所示, 让一个具有零均值和方差 σ^2 的平稳窄带实高斯噪声 $N(t)$ 通过一平方律检波器, 而检波器输出的是 $N(t)$ 的包络平方 $A^2(t)$。然后对随机过程 $A^2(t)$ 进行独立采样, 得到 m 个独立的随机变量
$A_i^2 = A^2(t_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$, 经归化以后送入累加器。下面讨论累加器输出端随机变量 χ^2 的概率密度。为了避免混淆, 在下面的推导中, 用 V 来代替 χ^2。

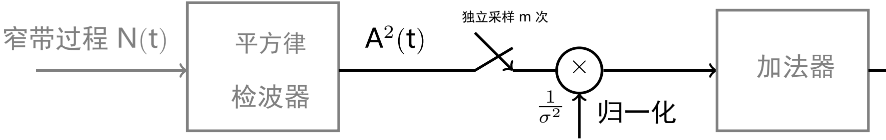


图 3: 视频积累技术

由于窄带过程 $N(t)$ 的包络 A 和它的一对垂直分量 $A_c(t), A_s(t)$ 有如下关

$$A^2(t) = A_c^2(t) + A_s^2(t), \tag{11}$$

式中 $A_c(t), A_s(t)$ 是零均值、方差为 σ^2 的平稳高斯过程。$A^2(t)$ 经采样后, 加法器的输出

$$V = \sum_{i=1}^{m} \left(A_{ci}'^2 + A_{si}'^2\right). \tag{12}$$

式中 A_{ci}', A_{si}' 是将 A_{ci}, A_{si} 归一化以后的随机变量。

由于 A'_{ci}, A'_{si} 都是同分布的高斯变量, 故上式又可表示为式中每一个 X_i 都是同分布的标准高斯变量 (零均值、方差为 1), 且各 X_i 相互独立。为了书写简单, 用 n 代替上式中的 $2m$, 可得

$$V = \sum_{i=1}^{2m} X_i^2. \tag{13}$$

于是, 求 V 的概率密度便归结为求 n 个独立同分布高斯变量平方和的概率密度为此, 首先求每一随机变量 X_i^2 的概率密度。

已知标准高斯随机变量 X_i 的概率密度为

$$f_X(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x_i^2}{2}\right\}. \tag{14}$$

令 $Y_i = X_i^2$, 不难求出 Y_i 的概率密度

$$f_{Y_i}(y_i) = |J| f_X(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi_i}} e^{-\frac{y_i}{2}}, \quad y_i \geqslant 0. \tag{15}$$

从而得到 Y_i 的特征函数为

$$Q_{Y_i}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_i}(y_i)\, e^{iw_i} dy_i$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y_i^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} - ju\right) y_i\right\} dy_i = (1-2ju)^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

由于 $V = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, 利用特征函数的性质: 独立随机变量之和的特征函数等于各随机变量特征函数的乘积。便可得到 V 的特征函数为

$$Q_V(u) = \prod_{i=1}^{n} Q_{Y_i}(u) = (1-2ju)^{-\frac{n}{2}} \quad (17)$$

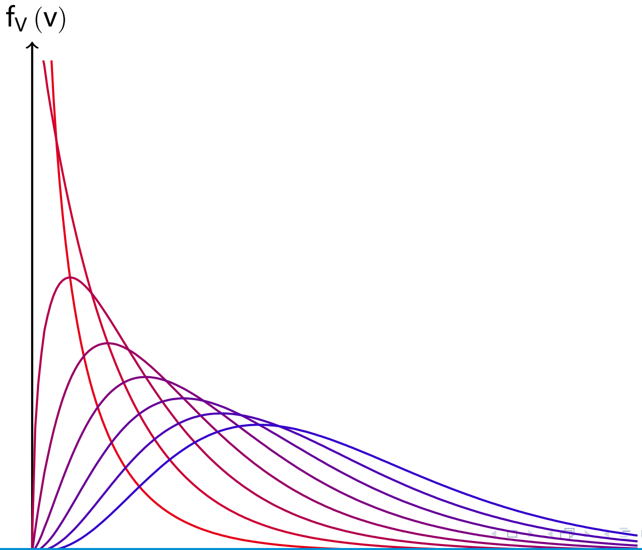
上式进行傅里叶逆变换, 便可求得 V 的概率密度为

$$f_V(v) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} 2^{-\frac{n}{2}} v^{\left(\frac{\pi}{2}-1\right)} e^{-\frac{x}{2}}, \quad v \geqslant 0. \tag{18}$$

式中, $\Gamma(\cdot)$ 为 Γ 函数, 满足

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{(\alpha-1)} e^{-t} dt. \tag{19}$$

称 $f_v(v)$ 为 n 个自由度的 χ^2 分布。图 4 画出了几个不同自由度下 $f_v(v)$ 的图形。


$f_V(v)$

χ^2 分布具有下列性质
1° 两个独立的 χ^2 变量之和仍为 χ^2 变量。若它们各自的自由度分别为 n_1 和 n_2, 则它们的和变量为具有 (n_1+n_2) 个自由度的 χ^2 分布 $2n$ 个自由度的 χ^2 变量的均值 $E[V]=n$, 方差 $D[V]=2n$。
2. 非中心 χ^2 分布
若窄带过程 $N'(t)$ 为余弦信号 $N'(t)$ 与窄带高斯噪声 $N(t)$ 之和, 则加法器输出的就是非中心 χ^2 分布。

(1) 信号包络为常数的情况
设信号

$$s(t) = a\cos(\omega_0 t + \pi/4) \tag{20}$$

包络 a 为常数, 则有

$$\begin{aligned} s(t) &= a\cos\frac{\pi}{4}\cos\omega_0 t + a\sin\frac{\pi}{4}\sin\omega_0 t \\ &= a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\omega_0 t + a\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\omega_0 t. \end{aligned} \tag{21}$$

若令 $s = a\sqrt{2}/2$, 则

$$s(t) = s\cos\omega_0 t + s\sin\omega_0 t. \tag{22}$$

又由于

$$N(t) = n_e(t)\cos\omega_0 t - n_3(t)\sin\omega_0 t. \tag{23}$$

代入 $N(t)$ 得

$$\begin{aligned} N'(t) &= s(t) + N(t) \\ &= [s + n_c(t)]\cos\omega_0 t - [s + n_s(t)]\sin\omega_0 t \\ &= A_c(t)\cos\omega_0 t - A_3(t)\sin\omega_0 t. \end{aligned} \tag{24}$$

而 $N(t)$ 的包络的平方

$$A^2(t) = A_c^2(t) + A_s^2(t) = [s + n_\varepsilon(t)]^2 + [s + n_s(t)]^2 . \tag{25}$$

仿照求 x^2 分布的方法, 加法器输出端的随机变量 V' 应为

$$V' = \sum_{i=1}^{n} (s + X_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} Y \tag{26}$$

式中 X_i 为同分布的独立高斯变量 (均值为零、方差为 sigma_2), s 为常数。

为了导出 V 的概率密度，首先求 $Y_i = (s + X_i)^2$ 的概率密度和特征函数。令

$$R_i = s + X_i. \tag{27}$$

显然，R_i 的概率密度为

$$f_{R_i}(r_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(r_i - s)^2}{2\sigma^2}\right\}. \tag{28}$$

则 $Y' = R^2$ 的概率密度为

$$f_{\gamma_i}(y_i') = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma^2 y_i'}}\left\{\exp\left[-\frac{\left(\sqrt{y_i'}-s\right)^2}{2\sigma^2}\right]+\exp\left[-\frac{\left(-\sqrt{y_i'}-s\right)^2}{2\sigma^2}\right]\right\}. \tag{29}$$

将上式中指数的平方项展开, 并利用双曲余弦函数 $2\cosh(b) = e^s + e^{-s}$, 可得

$$f_{Y_i}(y_i') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y_i'}}\exp\left\{-\frac{y_i'+s^2}{2\sigma^2}\right\}\cosh\left(\frac{s\sqrt{y_i'}}{\sigma^2}\right). \tag{30}$$

由于 X, Y 为独立同分布的, 则 $Y_i = (s + X_i)^z$ 也是独立同分布的。而 $V' = \sum_{i=1}^{n} Y_i'$, 于是 V 的特征函数为

$$Q_{V'}(u) = \prod_{i=1}^{n} Q_{Y_i'}(u) = \left(\frac{1}{1 - j2\sigma^2 u}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{ns^2}{2\sigma^2} + \frac{ns^2}{2\sigma^2(1 - j2\sigma^2 u)}\right. . \tag{31}$$

对上式作傅里叶逆变换, 可得 V 的概率密度为

$$f_{V'}(v') = \frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{v'}{\lambda'^2}\right)^{\frac{n-2}{4}} \exp\left\{-\frac{\lambda'+v'}{2\sigma^2}\right\} I_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{\sqrt{v'\lambda'}}{\sigma^2}\right), \quad v' \geqslant 0. \tag{32}$$

式中, $\lambda' = s^2 n$ 定义为非中心参量, $I_n(\cdot)$ 为第一类 n 阶修正贝塞尔函数。

定义归一化变量 $V = V'/\sigma^2$, 那么

$$V = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{s}{\sigma} + \frac{X_i}{\sigma} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} R_i'^2. \tag{33}$$

其中变量 R 是均值为 s/σ、方差为 1 的相互独立的高斯变量。

易证 V 的概率密度为

$$f_V(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{\lambda}\right)^{\frac{n-2}{4}} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} - \frac{v}{2}\right\} I_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{v\lambda}), \quad v \geqslant 0. \tag{34}$$

上式是 n 个自由度的非中心 χ^2 分布。其中非中心参量 $\lambda = ns^2/\sigma^2$ 表示视频积累后的功率信噪比。

图 5 画出了不同信噪比 λ 和样本数 n 情况下的非中心 χ^2 函数。

图 5: 非中心 χ^2 分布: a) v $= 4, \lambda = 2..6$, b) v $= 2..6, \lambda = 2$

(2) 信号包络不为常数的情况
给定信号

$$s(t) = a(t)\cos\left(\omega_0 t + \pi/4\right), \tag{35}$$

包络 $a(t)$ 为确定函数, 则有

$$\begin{aligned} s(t) &= a(t)\cos\frac{\pi}{4}\cos\omega_0 t + a(t)\sin\frac{\pi}{4}\sin\omega_0 t \\ &= a(t)\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\omega_0 t + a(t)\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\omega_0 t. \end{aligned} \tag{36}$$

又由于

$$N(t) = n_c(t)\cos\omega_0 t - n_s(t)\sin\omega_0 t. \tag{37}$$

代入 $N'(t)$ 得

$$\begin{aligned} N'(t) = s(t) + N(t) &= \left[a(t)\frac{\sqrt{2}}{2} + n_e(t)\right]\cos\omega_0 t - \left[a(t)\frac{\sqrt{2}}{2} + n_1(t)\right]\sin\omega_0 t \\ &= A_c(t)\cos\omega_0 t - A_s(t)\sin\omega_0 t. \end{aligned} \tag{38}$$

而 $N(t)$ 的包络的平方

$$
\begin{aligned}
A^2(t) &= A_c^2(t) + A_0^2(t) \\
&= \left[a(t)\frac{\sqrt{2}}{2} + n_c(t)\right]^2 + \left[a(t)\frac{\sqrt{2}}{2} + n_3(t)\right]^2.
\end{aligned} \tag{39}
$$

在 $t_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 时刻对 $A^2(t)$ 进行独立的采样, 令 $s = a(t)$ 仿照求 χ^2 分布的方法, 加法器输出端的随机变量 Q' 应为

$$
Q' = \sum_{i=1}^{n} (s_i + X_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \tag{40}
$$

式中 s 是对信号包络 $a(t)$ 的第 i 次采样, 是确定值。

由于单个样本 $Y_i = (s_i + X_i)^2$ 的特征函数, 可以直接应用上面信号包络为常量的推导结果

$$Q_Y^*(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - j2\sigma^2 u}} \exp\left\{-\frac{s_1^2}{2\sigma^2} + \frac{s_1^2}{2\sigma^2\left(1 - j2\sigma^2 u\right)}\right\}. \tag{41}$$

又因为 Y_i^* $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 相互独立, 面 $Q' = \sum_{k=1}^{n} Y_i$, 于是 Q' 的特征函数为

$$Q_\alpha(u) = \prod_{i=1}^{n} Q_{Y_i'}(u) = \left(\frac{1}{1 - j2\sigma^2 u}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n} s_i^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i^2}{2\sigma^2\left(1 - j2\sigma^2 u\right)}\right\}. \tag{42}$$

对上式作傅里叶逆变换可得 Q' 的概率密度

$$f_\alpha(q') = \frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{q'}{\lambda'^2}\right)^{\frac{n-2}{4}} \exp\left\{-\frac{\lambda'+q'}{2\sigma^2}\right\} . I_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{\sqrt{q'\lambda'}}{\sigma^2}\right), \quad q' \geqslant 0. \tag{43}$$

将式 (43) 与式 (32) 对照可见, Q' 与 V' 具有相同的概率密度, 不同的只是此时的非中心参量 $\lambda' = \sum_{i=1}^{n} s_i^2$, 类似地, 定义归一化参量 $Q = Q'/\sigma^2$, 于是可得

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{s_i}{\sigma} + \frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \tag{44}$$

令

$$Z_i = \frac{s_i}{\sigma} + \frac{X_i}{\sigma}. \tag{45}$$

则 $Z_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是具有均值 s_i/σ 和单位方差的独立高斯变量。于是, 可得具有 n 个自由度的非中心 χ^2 分布为

$$f_Q(q)=\frac{1}{2}\left(\frac{q}{\lambda}\right)^{\frac{n-2}{4}}\exp\left\{-\frac{\lambda}{2}-\frac{q}{2}\right\}I_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{Q\lambda}). \tag{46}$$

式中 $\lambda=\sum_{i=1}^{n}s_i^2/\sigma^2$ 为非中心参量。
不难证明, 两个统计独立的非中心 χ^2 随机变量之和仍为非中心 χ^2 随机变量。

若它们的自由度分别为 n_1 乐 n_2, 非中心参量分别为 λ_1 和 λ_2, 则和变量的自由度为 $n = n_1 + n_2$, 非中心参量为 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$。
设图 **??** 中加至平方律检波器输入端的窄带随机过程 $X(t)$ 为

$$X(t) = a\cos(\omega_0 t + \theta) + N(t), \tag{47}$$

其中 $a\cos(\omega_b t + \theta)$ 为随相余弦信号, a 和 ω_0 为常数。$N(t)$ 是零均值、方差为 σ^2 的稳窄带高斯噪声, 其功率谱关于 ω_0 偶对称。$X(t)$ 经检波并作归一化处理以后, 独立采样 m 次, 求累加器输出端随机变量的概率密度及其参数。

解: 先将 $N(t)$ 表示为

$$N(t)=A_c(t)\cos\omega_0 t-A_s(t)\sin\omega_0 t, \tag{48}$$

若用 $A(t)$ 表示窄带随机过程 $X(t)$ 的包络, 那么在平方律检波器的输出端, 可得到包络平方为

$$A^2(t)=[a\cos\theta+A_c(t)]^2+[a\sin\theta+A_0(t)]^2. \tag{49}$$

于是, 加法器输出端随机变量 V 为

$$V=\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{m}(a\cos\theta+A_{ci})^2.+\sum_{i=1}^{m}(a\sin\theta+A_{ai})^2\right], \tag{50}$$

式中 $A_\sigma=A_e(t_i)$ 和 $A_{si}=A_s(t_i)$ 分别表示 $A_e(t)$ 和 $A_s(t)$ 在 t_1 时刻的状态。

根据 $A_c(t), A_s(t)$ 的有关性质可知, 各个 A_{ci}, A_{si} 是同分布的独立标准高斯变量。对照式 (33) 可知, 上式中两个和式分别是自由度为 m 的非中心 χ^2 变量, 它们的非中心参量 λ_1 和 λ_2 分别为

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(a\cos\theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2}\cos^2\theta \\ \lambda_2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(a\sin\theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2}\sin^2\theta \end{cases} . \tag{51}$$

由于这两个非中心 χ^2 随机变量也彼此独立, 因而它们的和变量 V 也是非中心 χ^2 随机变量, 自由度 $n = 2m$,

非中心参量 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{ma^2}{\sigma^2}$, 便可得到 V 的概率密度函数为

$$f_V(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{\lambda}\right)^{\frac{m-1}{2}} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} - \frac{v}{2}\right\} I_{m-1}(\sqrt{v\lambda}), \quad v \geqslant 0. \tag{52}$$

而非中心参量与自由度之比 $\lambda/n = a^2/2\sigma^2$, 正好是检波器输入端的功率信噪比。

目录

证明

① $H\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \frac{1-\cos t}{t}.$

② $H\left[e^{j\omega_0 t}\right] = -je^{i\omega_0 t}, \omega_0 > 0.$

③ $H^{-1}\left[\frac{\sin t}{t}\sin 200\pi t\right] = \frac{\sin t}{t}\cos 200\pi t.$

④ $H\left[e^{j\omega_0 t}\right] = -je^{j\omega_0 t}, \omega_0 > 0.$

⑤ $H^{-1}\left[\frac{1}{\pi t}\right] = \delta(t).$

⑥ $H^{-1}\left[\frac{\sin t}{t}\cos 200\pi t\right] = -\frac{\sin t}{t}\sin 200\pi t.$

证明: ① 偶函数的希尔伯特变换为奇函数。② 奇函数的希尔伯特变换为偶函数。 当 τ, ω_0 满足什么条件时, 能使 $y(t) = \frac{\sin(\pi t/\tau)}{\pi t/\tau} e^{j\omega_0 t} = Sa(\pi t/\tau)\, e^{j\omega_0 t}$ 为解析信号。画出 $Sa(\pi t/\tau)$ 和 $y(t)$ 的频谱图。

调频信号 $s(t) = \cos[\omega_0 t + m(t)]$, 当 ① $\frac{d\,m(t)}{dt} \ll \omega_0$ 时, 为窄带信号, 求 (1) 的包络和预包络。 已知随机过程

$$X(t) = [X_1(t) \quad X_2(t) \quad X_1(t+\tau) \quad X_2(t+\tau)]^T. \tag{53}$$

式中 $X_1(t)$ 为平稳标准高斯过程, $X_2(t)$ 为 $X_1(t)$ 的希尔伯特变换。证明

$$E\left[X(t)X^T(t)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & R_1(\tau) & \hat{R}_1(\tau) \\ 0 & 1 & -\hat{R}_1(\tau) & R_1(\tau) \\ R_1(\tau) & -\hat{R}_1(\tau) & 1 & 0 \\ \hat{R}_1(\tau) & R_1(\tau) & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{54}$$

其中 $R_1(\tau) = E[X_1(t)X_1(t+\tau)]$。

已知平稳过程 $X(t)$ 的功率谱密度 $G_X(\omega)$, 如图 6 所示。求随机过程 $W(t)$ 的功率谱密度, 并画图表示。

$$W(t) = X(t)\cos\omega_0 t - \hat{X}(t)\sin\omega_0 t. \tag{55}$$

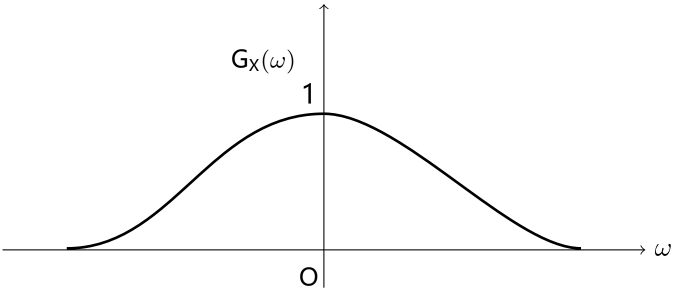


图 6:

零均值窄带平稳过程 $X(t)=A(t)\cos\omega_0 t-B(t)\sin\omega_0 t$ 的功率谱密度 $G_X(\omega)$ 在频带内关于中心频率 ω 偶对称，其中 $A(t), B(t)$ 为平稳过程。① 证明: $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)=R_A(\tau)\cos\omega_0\tau$。② 求 $X(t)$ 自相关函数的包络和预包络。 已知零均值窄带平稳噪声 $X(t)=A(t)\cos\omega_0 t-B(t)\sin\omega_0 t$, 其功率谱密度如图 7 所示。画出下列情况下随机过程 $A(t), B(t)$ 各自的功率谱密度:

(1) $\omega_0=\omega_1$;

(2) $\omega_0=\omega_2$;

(3) $\omega_0=(\omega_1+\omega_2)/2$.

判断上述每种情况下, 过程 $A(t), B(t)$ 是否互不相关, 并给出理由。

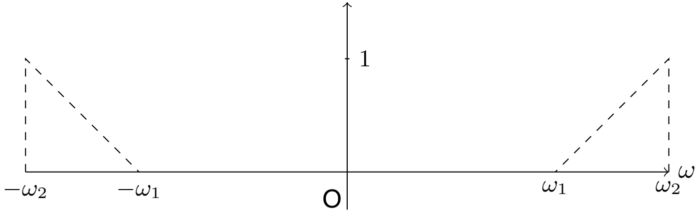


图 7:

已知平稳噪声 N(t) 的功率谱密度, 如图 8 所示。求窄带过程

$$X(t) = N(t)\cos(\omega_0 t + \theta) - N(t)\sin(\omega_0 t + \theta) \tag{56}$$

的功率谱密度 $G_X(m)$, 并画图表示。其中 $a_n > a_1$ 为常数, 服从 $(0, 2\pi)$ 上的均匀分布, 且与噪声 N(t) 独立。

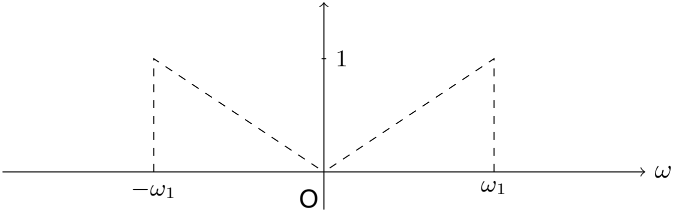


图 8:

已知零均值, 方差为 σ^2 的窄带高斯平稳过程 $X(t)=A_e(t)\cos\omega_0 t-A_s(t)\sin\omega_0 t$, 其中 $A_c(t), A_s(t)$ 为过程的一对垂直分解。证明: $R_X(\tau)=R_{A_c}(\tau)\cos\omega_0\tau-R_{A_cA_s}(\tau)\sin\omega_0\tau$。

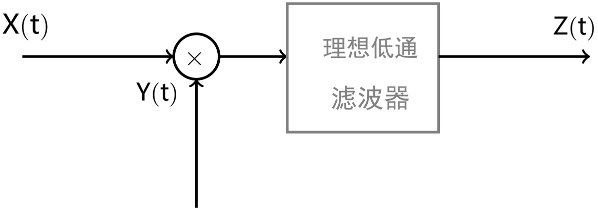


图 9:

证明: 零均值, 方差为 1 的窄带平稳高斯过程, 其任意时刻的包络平方的数学期望为 2, 方差为 4。 已知窄带高斯平稳过程 $X(t) = A(t)\cos\left[\omega_0 t + \Phi(t)\right]$, 包络 $A(t)$ 在任意时刻 t 的采样为随机变量 A, 求 A 的均值和方差。

如图 9 所示, 同步检波器的输入 X(t) 为窄带平稳噪声, 其自相关函数为

$$R_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\beta|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \beta \ll \omega_0. \tag{57}$$

若另一输入

$$Y(t) = A \sin(\omega_0 t + \theta), \tag{58}$$

其中 A 为常数, 服从 $(0, 2\pi)$ 上的均匀分布, 且与噪声 X(t) 独立。求检波器输出 Z(t) 的平均功率。

如图 10 所示，系统 1 是线性系统的传递函数，关于中心频率 ω 偶对称，系统 2 是线性系统的传递函数为 $-\mathrm{jsgn}(\omega)$，系统 3 为线性微分系统。输入 $N(t)$ 为物理谐密度为 N_0 的白噪声，且系统 1 输出 $X(t)$ 的自相关函数的包络为 $\exp\left\{-\tau^2\right\}$。整个系统进入稳态。

① 判断 $X(t)$ 和 $Z(t)$ 分别服从什么分布，给出理由.
② 证明 $Z(t)$ 是严平稳过程。
③ 求 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数，$Y(t)$ 的功率谱密度，
④ 写出 $Z(t)$ 一维概率密度表达式。
⑤ 判断同一时刻，$Y(t)$ 和 $Z(t)$ 是否独立，给出理由。

图 10:

如图 11 所示，系统输入 $N(t)$ 为物理谱密度为 N_0 的白噪声，对包络平方检波后的过程进行二次独立采样，求积累后的输出 $X(t)$ 的分布平方律。

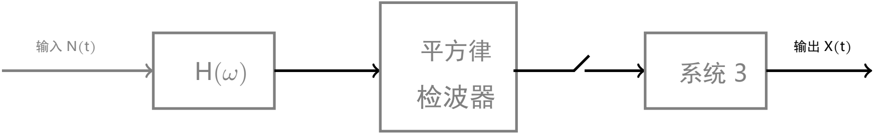


图 11: