

# 4

## 随机信号通过线性系统的分析

随机信号 (Stochastic Signals) 通过线性系统 (Linear Systems) 的分析是信号进行统计处理的基础。由于随机信号不能像确定信号 (Deterministic Signals) 那样用明确的数学表达式来描述，只能用概率统计的方法进行描述，因此，研究随机信号通过线性系统的输出，也只能从分析系统输出的统计特性入手。直接获取系统输出的概率分布一般比较困难，但在许多实际应用中，如果知道了系统输出的一些统计特性（如均值相关函数、功率谱密度函数等）往往就能解决问题。本章首先介绍信号与系统的基本概念、分类和特点；然后分别从连续系统、离散系统两方面，分析随机信号通过线性时不变系统的统计特性，重点介绍系统输出的一阶和二阶统计特性；在此基础上，介绍平稳随机序列的另一种分析方法及随机序列参数模型的概念；介绍随机信号通过线性时变系统的一阶和二阶输出统计特性；最后给出随机信号通过非线性系统的几种常用分析方法。

### 4.1 信号与系统概述

#### 4.1.1 信号及其分类

信号是信息的表现形式，通常反映为随着自变量变化而变化的某种物理量。在数学上，信号一般可以表示成单个或多个自变量的函数。如：电信号可以看作是电流或电压随时间变化的函数，语音信号可以看作是声压随时间变化的函数，而图像信号可以看作是像素灰度随坐标位置变化的函数。自变量可以是时间，也可以是距离、高度、温度等，为了表述方便，这里将这些变量都统称为时间，这样信号就可以理解为随时间变化的函数，称为时间信号，简称信号。

根据信号的函数特点及其频谱分布特性,一般对信号进行如下分类。

► 确定信号与随机信号

根据信号变化规律是否可预知,可以将信号分为确定信号和随机信号。能够用确定的数学表达式来描述变化规律的信号称为确定信号,如我们熟知的正弦信号、指数信号等。对于这类信号,给定一个时刻,就有一个确定的值与之对应。而对于随机信号,其变化规律是不可预知的,不能用明确的数学表达式进行描述,因此也是不可重现的,如接收机内部的热噪声、地震波信号等。对于这类信号,即使在相同的条件下,每次观测到的信号(称为样本函数)也是不同的,只能通过概率统计的方法,分析多次观测得到的样本函数才能掌握它们的变化规律。还有一些信号,其本质是随机信号,但信号的表现形式却类似确定信号,如随机相位信号  $s(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ , 其表征信号的参数  $A$  和  $\omega$  是常量,但参数  $\phi$  是随机量,每次观测到的样本函数均是正弦波,但观测之前具体是什么相位的正弦波不可预测,因此该信号也是随机信号。更进一步,如果由随机信号所确定的任意维概率密度函数都满足时延不变性,该随机信号又称为严格平稳随机信号;如果仅有一阶和二阶统计量满足时延不变性,则称之为广义平稳随机信号;不具有上述特性的随机信号则称为非平稳随机信号。此外,随机信号还可以根据分布特性分为高斯信号与非高斯信号等由于信号在传输过程中一般会受到周围环境的各种干扰及系统内部热噪声的影响,实际系统输出的信号多为随机信号,或者是确定信号与随机信号的叠加。

► 连续信号与离散信号

根据函数自变量的取值是否连续,可以将信号分为连续信号和离散信号。除了若干个不连续点外,在自变量范围内的任何时刻都能连续取值的信号称为连续信号,如正弦信号、单位阶跃信号等。连续信号的函数值既可以是连续的也可以是离散的,函数值连续取值的信号称为模拟信号,而只能取特定离散值的称为离散信号。离散信号的自变量只能在一些规定的离散时刻才能取值,而在其他时刻则没有定义。离散信号可以由连续信号经过抽样后得到,也有些信号本身就是离散信号,如国家按年度统计的国民生产总值、股票交易数据、公司按月统计的销售额等。如果离散信号的函数值可连续取值,则称为抽样信号,若只能取离散值,则称为数字信号或时间序列。

► 周期信号与非周期信号

根据信号按一定间隔是否周期重复,可以将信号分为周期信号与非周期信号。如果信号  $s(t)$  按一定的时间间隔  $T$  周而复始的变化,即  $s(t) = s(t + kT)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ 。则称信号  $s(t)$  为周期信号,  $T$  为信号的周期,如正弦信号

$s(t) = A \cos(\omega t + \phi)$  就是一个周期为  $2\pi/\omega$  的周期信号。而非周期信号, 如指数信号, 则不具有这种周而复始变化的特性。

► 能量信号与功率信号

根据信号的能量或功率是否为有限值, 可以将信号分为能量信号与功率信号。下式分别定义信号的能量和平均功率:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt. \quad (4.1)$$

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t) dt. \quad (4.2)$$

能量  $E < +\infty$  的信号称为能量信号; 不满足能量有限, 但满足  $P < +\infty$  的信号称为功率信号。根据定义可知, 能量信号的平均功率为零, 周期信号一般都是功率信号, 而非周期信号则可能是能量信号, 也可能是功率信号。

► 基带信号与高频带通信号

这两个概念是从信号的时间域对信号进行分类。根据信号频谱的分布特性, 也可以将信号分为基带信号与高频带通信号。频谱主要集中在零值附近的信号称为基带信号。如果信号的频谱主要集中在以  $\pm\omega_0$  为中心频率、带宽为  $\Delta\omega$  的范围内, 则该信号称为高频带通信号。根据带宽  $\Delta\omega$  相对载波  $\omega_0$  的比例关系, 又可进一步将信号进行划分。一般将该比例在 1% 以内的信号称为窄带信号, 常规的通信、雷达等系统中涉及的信号大多为窄带信号; 该比例在 1%-20% 之间的信号称为宽带信号; 超过 20% 的称为超宽带信号。窄带信号通常可表示为如下形式:

$$s(t) = a(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)] \quad (4.3)$$

式中  $a(t)$  和  $\theta(t)$  相对于载波变化缓慢, 均为基带慢变信号。为了便于分析和处理问题, 通常又将上式表示成复信号的形式:

$$\tilde{s}(t) = a(t)e^{j[\omega_0 t + \theta(t)]} = \tilde{a}(t)e^{j\omega_0 t}, \quad (4.4)$$

其中

$$\tilde{a}(t) = a(t)e^{j\theta(t)} = a(t) \cos \theta(t) + ja(t) \sin \theta(t) = s_I(t) + js_Q(t), \quad (4.5)$$

称为信号  $s(t)$  的复包络,  $s_I(t)$  和  $s_Q(t)$  称为信号  $s(t)$  的两个正交分量。

对于任意实信号  $s(t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$ , 其复表示为

$$\tilde{s}(t) = s(t) + j\hat{s}(t), \quad -\infty < t < +\infty, \quad (4.6)$$

其中  $\hat{s}(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau$ , 如为  $s(t)$  的希尔伯特变换。 $\tilde{s}(t)$  也称为  $s(t)$  的解析信号或信号预包络。

### 4.1.2 系统及其分类

系统一般定义为由若干个相互联系的事物组成的具有特定功能的整体，它是个应用非常广泛的概念。在信号处理领域，系统可以看作是能够导致任何一种信号变换的过程。对于任何一个系统，不管其内部结构如何，都存在一个输入信号和一个经过系统变换而与输入信号相关联的输出信号，或者是多个输入信号和多个与之相关联的输出信号，前者称为单输入单输出系统，后者则称为多输入多输出系统，如图 4-1 所示。根据系统处

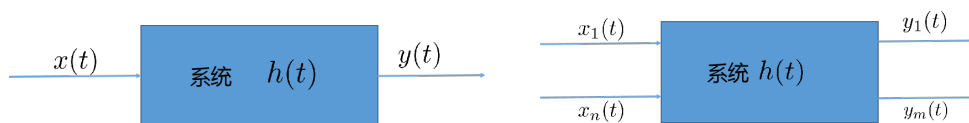


图 4-1 SISO 和 MIMO 系统

理的信号形式的不同及具有的某些性质，可以将系统分为如下几类：

#### 1. 连续系统与离散系统

如果系统的输入和输出均为连续的信号，称这样的系统为连续系统。输入和输出均为离散信号的系统称为离散系统。由两者混合组成的系统则称为混合系统。

#### 2. 记忆系统与无记忆系统

若某一时刻系统的输出只与该时刻系统的输入有关，称这样的系统为无记忆系统。反之，若某一时刻系统的输出还与其他时刻的输入有关，则称为记忆系统。常见的无记忆系统有电阻器、检波器、限幅器等，记忆系统有积分器、累积器和平滑器等。

#### 3. 线性系统与非线性系统

能同时满足齐次性和叠加性的系统称为线性系统。其中的齐次性是指，当输入被扩大  $k$  倍后，系统的输出也相应地被扩大  $k$  倍；叠加性是指，当有多个输入同时作用于系统时，系统的输出等于各个输入单独作用后系统的输出之和。也就是说，对于线性系统，如果输入  $X_1(t)$  对应的系统输出为  $Y_1(t)$ ，输入  $X_2(t)$  对应的系统输出为  $Y_2(t)$ ，则输入  $k_1x_1(t) + k_2x_2(t)$  对应的输出为  $k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$ 。不满足该性质的系统就称为非线性系统。

#### 4. 变系统与时不变系统

如果系统的输出与输入的起始作用时间无关，当输入被延时，系统的输出仅作相应的延时而波形不变，这样的系统称为时不变系统。即对于时不变系统，如果输入  $X(t)$  延时到  $x(t - \tau)$ ，输出则从  $y(t)$  延时到  $y(t - \tau)$ 。系统的输出波形与输入的起始作用时间有关的系统就称为时变系统。

#### 5. 系统与不稳定系统

如果有界的输入，系统的输出也有界，这样的系统为稳定系统。如果系统对有界输入的输出是无限值，则为不稳定系统。显然，只有稳定系统才具有实际应用价值。

#### 6. 因果系统与非因果系统

系统的输出与输入是相关的，如果系统在任一时刻的输出只与该时刻及该时刻以前的输入有关，而与该时刻以后的输入无关，称这样的系统为因果系统。如果输出还跟当前时刻以后的输入有关，则这样的系统称为非因果系统。根据定义，所有的无记忆系统都是因果系统。记忆系统则可能是因果系统，如积分器、累积器等；也可能是非因果系统，如平滑器、一些事后分析系统等。

#### 7. 可逆系统与不可逆系统

如果对不同的输入系统能产生不同的输出，即根据系统的输出能唯一确定输入，称这样的系统为可逆系统。根据输出不能唯一确定输入的系统称为不可逆系统。对于任何可逆系统，均存在一个该系统的逆系统，将它与原系统级联后，能恢复出原系统的输入。可逆系统在实际中有着很多非常重要的应用，其中最典型的就是一些通信系统中的一些处理器件，如发送端的编码器、调制器等都是可逆系统，其对应的逆系统为接收端的解码器、解调器。

#### 8. 最小相移系统与非最小相移系统

以上是根据系统的时域特性对系统进行分类。如果从系统的复频域上看，一个系统是因果稳定的线性时不变系统，则要求连续系统的所有极点必须位于  $S$  平面的虚轴左侧，或者离散系统的所有极点必须位于  $Z$  平面的单位圆内，而对系统的零点没有限制在此基础上，根据系统零点的分布情况，可以定义出最小相位系统。

##### 定义 4.1 最小相移系统

如果系统的所有零点也都位于  $S$  平面的虚轴左侧或者  $Z$  平面的单位圆内，则称该因果稳定的线性时不变系统为最小相移系统，否则，只要有一个零点位于  $S$  平面的虚轴右侧或者  $Z$  平面的单位圆外，就称为非最小相移系统。可见，最小相移系统一定存在逆系统，而且该逆系统既是因果稳定系统，也是最小相移系统。

此外，根据输入信号、系统和输出信号之间的关系，如果已知一个输入信号，将其通过一个已知的系统来寻求输出信号，一般称之为滤波；如果已知一个输入信号，根据其通过一个系统的输出信号来寻求系统传输函数，称之为系统辨识；如果根据一个已知系统的输出信号来恢复出系统的输入信号，则称之为逆滤波；如果根据一个系统的部分特性和系统输出信号来确定系统传输函数并恢复出输入信号，则称之为盲均衡和盲分离。

## 4.2 随机信号通过线性时不变系统

上节中我们讨论了信号与系统的一些概念、分类和特点,有关确定信号通过线性系统的分析已经在信号与系统的相关课程中作了介绍。而实际应用中的信号大多是随机信号,这里我们利用信号与系统、随机过程等课程中的相关知识,分析随机信号通过线性时不变系统的统计特性,重点介绍系统输出的一阶和二阶统计特性。

考虑随机信号  $\{X(t)\}$  通过一个连续线性时不变系统,系统的冲激响应为  $h'(t)$  输出为随机信号  $\{Y(t)\}$ ,如图 4-2 所示。由于随机信号  $\{X(t)\}$  可以看作是大量样本函数的集

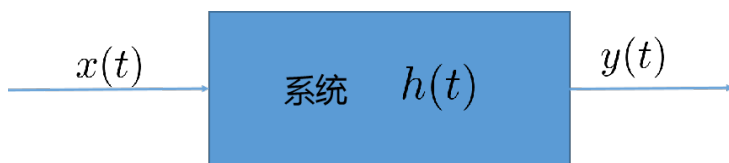


图 4-2 随机信号通过线性时不变系统示意图

合,每个样本函数  $x(t)$  对应每次试验的结果,均为确定的时间函数当样本函数  $X(t)$  通过系统时,其输出  $y(t)$  与输入  $x(t)$  之间存在如下卷积关系:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \quad (4.7)$$

如果  $x(t), h(t)$  绝对可积,即系统是稳定的,且傅里叶变换分别为  $X(\omega), H(j\omega)$ ,则  $y(t)$  的傅里叶变换  $Y(\omega)$  满足如下等式:

$$Y(\omega) = H(j\omega)X(\omega) \quad (4.8)$$

其中,  $H(j\omega)$  又称为线性时不变线性系统的传输函数,它与系统的冲激响应  $h(t)$  构成傅里叶变换对,关系如下:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (4.9)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)e^{-j\omega t} d\omega. \quad (4.10)$$

这样,对于  $\{X(t)\}$  的一系列样本函数  $X(t)$ ,系统输出端就会得到一系列新的样本函数  $y(t)$ ,这些样本函数就构成随机信号  $\{Y(t)\}$ 。

### 4.2.1 系统输出的均值

根据 (4.7) 式, 输出  $\{Y(t)\}$  的均值可表示为

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) E\{x(t-\tau)\} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) m_X(t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.11)$$

当输入位  $\{X(t)\}$  广义平稳时,  $m_X(t) = m_X$ , 则

$$m_Y(t) = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau = m_X H(0) = m_Y. \quad (4.12)$$

可见, 此时输出均值也与时间无关。

### 4.2.2 系统输出的自相关函数和功率谱密度函数

根据 (4.7) 式, 输出  $\{Y(t)\}$  的自相关函数可表示成

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= E\{Y(t_1)Y(t_2)\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) E\{X(t_1-\tau_1)X(t_2-\tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(t_1-\tau_1, t_2-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

当输入  $\{X(t)\}$  广义平稳,  $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau)$ , 则

$$R_Y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(\tau - \tau_1 + \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = R_Y(\tau). \quad (4.14)$$

此时输出  $\{Y(t)\}$  的均方值, 即平均功率为

$$\begin{aligned} E\{Y^2(t)\} &= R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(-\tau_1 + \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(-\tau_1 + \tau_2)| d\tau_1 d\tau_2 \\ &\leq R_X(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau_1) h(\tau_2)| d\tau_1 d\tau_2 \\ &= R_X(0) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau \right)^2 < +\infty. \end{aligned} \quad (4.15)$$

(4.12) 式、(4.14) 式以及上式 (4.15) 表明: 如果广义平稳随机信号  $\{X(t)\}$  通过线性时不变系统, 则输出随机信号也广义平稳。进一步, 根据维纳-辛钦定理, 即功率谱密度函

数与自相关函数是一组傅里叶变换对, 对 (4.14) 式两边进行傅里叶变换, 可得到输出  $\{Y(t)\}$  的功率谱密度函数

$$\begin{aligned}
 S_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_Y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(\tau - \tau_1 + \tau_2) e^{-j\omega\tau} d\tau_1 d\tau_2 d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) e^{-j\omega\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) R_X(\tau - \tau_1 + \tau_2) d\tau_1 d\tau d\tau_2. \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

定义  $R_1(t) = R_X(t) * h(t)$ , 则  $R_1(t)$  的傅里叶变换为  $H(j\omega)S_X(\omega)$ , 上式可进一步表示为

$$\begin{aligned}
 S_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) \int_{-\infty}^{+\infty} R_1(\tau + \tau_2) e^{-j\omega\tau} d\tau d\tau_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) H(j\omega) S_X(\omega) e^{j\omega\tau_2} d\tau_2 \\
 &= H(-j\omega) H(j\omega) S_X(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_X(\omega), \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

其中  $S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$  为广义平稳输入  $\{X(t)\}$  的功率谱密度函数上式表明, 广义平稳随机信号通过线性时不变系统, 输出功率谱密度等于输入功率谱密度乘以系统传输函数模的平方。可见, 输出功率谱密度只与系统的幅频特性有关, 而与系统的相频特性无关。

#### 4.2.3 系统输入与输出的互相关函数和互功率谱密度函数

根据 (4.7) 式, 输入  $\{X(t)\}$  与输出  $\{Y(t)\}$  之间的互相关函数可表示为

$$\begin{aligned}
 R_{XY}(t_1, t_2) &= E\{X(t_1)Y(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) E\{X(t_1)X(t_2 - \tau_2)\} d\tau_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) R_X(t_1, t_2 - \tau_2) d\tau_2. \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{YX}(t_1, t_2) &= E\{Y(t_1)X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) E\{X(t_2)X(t_1 - \tau_1)\} d\tau_1 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) R_X(t_1 - \tau_1, t_2) d\tau_1. \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

当输入  $\{X(t)\}$  广义平稳,  $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau)$ , 则

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) R_X(\tau + \tau_2) d\tau_2 = R_{XY}(\tau). \quad (4.20)$$

$$R_{YX}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) R_X(\tau - \tau_1) d\tau_1 = R_{YX}(\tau) = R_{XY}(-\tau). \quad (4.21)$$



上式表明, 广义平稳随机信号通过线性时不变系统, 其输入与输出联合广义平稳。同样, 对以上等式两边进行傅里叶变换, 可得输入与输出之间的互功率谱密度函数:

$$\begin{aligned} S_{XY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) R_X(\tau + \tau_2) e^{-j\omega\tau} d\tau_2 d\tau \\ &= H(-j\omega) S_X(\omega). \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} S_{YX}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{YX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) R_X(\tau - \tau_1) e^{-j\omega\tau} d\tau_1 d\tau \\ &= H(j\omega) S_X(\omega). \end{aligned} \quad (4.23)$$

结合 (4.17) 式, 有如下关系式成立:

$$S_Y(\omega) = H(-j\omega)H(j\omega)S_X(\omega) = H(j\omega)S_{XY}(\omega) = H(-j\omega)S_{YX}(\omega). \quad (4.24)$$

综上所述, 当广义平稳随机信号  $\{X(t)\}$  通过线性时不变系统, 系统输出广义平稳, 且输出与输入联合广义平稳。输出以及输入、输出之间的统计关系具体可如图 4-4 所示。

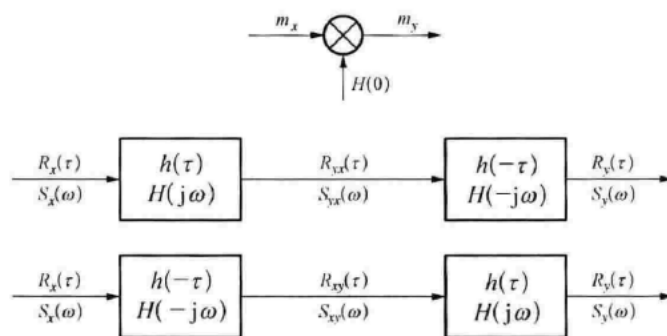


图 4-3 广义平稳随机信号通过线性时不变系统示意图

上述分析虽然基于物理不可实现的线性时不变系统, 但是当广义平稳随机信号通过物理可实现的线性时不变系统时, 相关结论仍然成立, 只是此时  $h(t) = 0, t < 0$ . 而当系统输入  $\{X(t)\}$  只从  $t = 0$  时刻开始加入, 即  $x(t) = 0, t < 0$ , 结论就有所不同了。此时输

出  $\{Y(t)\}$  的均值、相关函数分别为

$$m_Y(t) = E\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^t h(\tau) E\{X(t-\tau)\} d\tau = m_X \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau. \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= E\{Y(t_1)Y(t_2)\} \\ &= \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(\tau_1) h(\tau_2) E\{X(t_1-\tau_1)X(t_2-\tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(\tau-\tau_1+\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{t_2} h(\tau_2) Y(t_1) d\tau_2 = \int_{-\infty}^{t_2} h(\tau_2) E\{X(t_1)X(t_2-\tau_2)\} d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{t_2} h(\tau_2) R_X(\tau+\tau_2) d\tau_2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} R_{YX}(t_1, t_2) &= E\{X(t_2)Y(t_1)\} = \int_{-\infty}^{t_2} h(\tau_1) E\{X(t_2)X(t_1-\tau_1)\} d\tau_1 \\ &= \int_{-\infty}^{t_1} h(\tau_1) R_X(\tau-\tau_1) d\tau_1. \end{aligned} \quad (4.28)$$

根据上述公式, 尽管输入  $\{X(t)\}$  广义平稳, 但输出  $\{Y(t)\}$  的均值不再是常数, 而与时间  $t$  有关, 且自相关函数跟时间差值  $T$  以及时间  $t_1$  和  $t_2$  都有关, 说明系统输出不再是平稳的。

#### 4.2.4 系统输出的概率密度

以上仅从系统输出的均值、相关函数及相应的功率谱密度分析了随机信号通过线性时不变系统后的统计特性, 但若希望知道更多的统计特性, 就需要知道系统输出的概率密度函数。根据系统输出与输入的积分关系 (4.7) 式, 可将其写成求和的形式以便分析:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(\tau_i)x(t-\tau_i)\Delta\tau_i, \quad (4.29)$$

其中  $\Delta\tau_i = \tau_{i+1} - \tau_i$  足够小。可见, 系统输出是输入的线性组合, 利用随机变量的线性变换的概率密度函数与随机变量的概率密度函数之间的关系 (即相差一个雅可比列式系数, 见 (1.82) 式), 就可计算出系统输出的概率密度函数。如果系统输入是高斯信号, 由于高斯变量的线性组合仍然是高斯变量, 系统输出也是高斯信号。描述高斯信号的分布特性则比较简单, 此时只需要计算出系统输出的均值和相应的相关函数, 就可得到任意维的概率密度函数。

### 4.3 随机序列通过线性时不变系统

研究随机序列通过线性时不变系统, 分析输出统计特性的方法与上节中讨论连续随机信号的方法类似。随机序列  $\{X(n)\}$  通过一个冲激响应为  $h(n)$  的离散线性时不变系统, 输出为随机序列  $\{Y(n)\}$ 。由于随机序列  $\{X(n)\}$  同样可以看作是大量样本序列的集合, 每个样本序列  $x(n)$  对应每次试验的结果, 均为确定的时间序列当样本序列  $x(n)$  通过系统时, 其输出  $Y(n)$  与输入  $X(n)$  之间存在如下卷积关系:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k). \quad (4.30)$$

如果  $X(n), h(n)$  绝对可和, 且傅里叶变换分别为  $X(\Omega), H(j\Omega)$ , 则  $Y(n)$  的傅里叶变换  $Y(\Omega)$  满足如下等式:

$$Y(\Omega) = H(j\Omega)X(\Omega). \quad (4.31)$$

其中, 系统传输函数  $H(j\Omega)$  与冲激响应  $h(n)$  构成傅里叶变换对, 满足如下关系:

$$H(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\Omega n}. \quad (4.32)$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(j\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega. \quad (4.33)$$

对于  $\{X(t)\}$  的一系列样本序列  $X(n)$ , 系统输出端就会得到一系列新的样本序列  $y(n)$ , 这些样本序列就构成随机序列  $\{Y(t)\}$ 。此外, 在 (4.30) 式中, 当系统是物理可实现的线性时不变系统时,  $h(k) = 0, k < 0$ 。

#### 4.3.1 系统输出的均值

$$\begin{aligned} m_Y(n) &= E\{Y(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)E\{x(n-k)\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)m_X(n-k). \end{aligned} \quad (4.34)$$

当输入位  $\{X(n)\}$  广义平稳,  $m_X(n) = m_X$ , 则

$$m_Y(n) = m_X \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) = m_X H(0) = m_Y. \quad (4.35)$$

此时输出均值与时间无关。

### 4.3.2 系统输出的自相关函数和功率谱密度函数

$$\begin{aligned}
 R_Y(n_1, n_2) &= E\{Y(n_1)Y(n_2)\} \\
 &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_1)h(k_2)E\{x(n_1-k_1)x(n_2-k_2)\} \\
 &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_1)h(k_2)R_X(n_1-k_1, n_2-k_2). \tag{4.36}
 \end{aligned}$$

当输入  $\{X(t)\}$  广义平稳, 则

$$R_Y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_1)h(k_2)R_X(m-k_1+k_2) = R_Y(m). \tag{4.37}$$

得出的均方值 (即平均功率) 为

$$\begin{aligned}
 E\{Y^2(n)\} &= R_Y(0) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_1)h(k_2)R_X(-k_1+k_2) \\
 &\leq \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} |h(k_1)h(k_2)R_X(-k_1+k_2)| \\
 &\leq R_X(0) \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} |h(k_1)h(k_2)| \\
 &= R_X(0) \left( \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} |h(k_1)| \right)^2 < +\infty. \tag{4.38}
 \end{aligned}$$

由 (4.35) 式及上面两式, 我们可得如下结论: 当广义平稳随机序列  $\{X(t)\}$  仅从  $t_0$  时刻开始就加入到线性时不变系统, 其输出随机序列也广义平稳; 同样, 利用维纳——辛钦公式, 即功率谱密度函数与自相关函数是一组傅里叶变换对, 对上式两边进行傅里叶变

换, 可得输出  $\{Y(t)\}$  的功率谱密度函数

$$\begin{aligned}
 S_Y(\Omega) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_Y(m) e^{-j\Omega m} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_1) h(k_2) R_X(m - k_1 + k_2) e^{-j\Omega m} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} h(k_2) e^{-j\Omega m} \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} h(k_1) R_X(m + k_2 - k_1) \\
 &= \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_2) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-j\Omega m} R_X(m + k_2) \\
 &= \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_2) H(j\Omega) S_X(\Omega) e^{j\Omega k_2} \\
 &= H(j\Omega) S_X(\Omega) H(-j\Omega) = |H(j\Omega)|^2 S_X(\Omega).
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

其中  $R_1(n) = R_X(n) * h(n)$ ,  $S_X(\Omega) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} R_X(m) e^{-j\Omega m}$  为广义平稳输入,  $\{X(t)\}$  的功率谱密度函数。可见, 输出功率谱密度只与系统的幅频特性有关, 而与系统的相频特性无关。

### 4.3.3 系统输入与输出的互相关函数和互功率谱密度函数

$$\begin{aligned}
 R_{XY}(n_1, n_2) &= E\{X(n_1)Y(n_2)\} = \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_2) E\{X(n_1)X(n_2 - k_2)\} \\
 &= \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_2) R_X(n_1, n_2 - k_2).
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
 R_{YX}(n_1, n_2) &= E\{Y(n_1)X(n_2)\} = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} h(k_1) E\{X(n_2)X(n_1 - k_1)\} \\
 &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} h(k_1) R_X(n_1 - k_1, n_2).
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

当输入  $\{X(t)\}$  广义平稳, 则

$$R_{XY}(n_1, n_2) = \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_2) R_X(m + k_2) = R_{XY}(m). \tag{4.42}$$

$$R_{YX}(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} h(k_1) R_X(m - k_1) = R_{YX}(m) = R_{XY}(-m). \tag{4.43}$$

对以上等式两边进行傅里叶变换, 可得输入与输出之间的互功率谱密度函数

$$\begin{aligned} S_{XY}(\Omega) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{XY}(m) e^{-iam} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\Sigma=-\infty}^{+\infty} h(k_2) R_X(m+k_2) e^{-iam} \\ &= H(-j\Omega) S_X(\Omega). \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} S_{YX}(\Omega) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{YX}(m) e^{-iam} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\Sigma=-\infty}^{+\infty} h(k_1) R_X(m-k_1) e^{-im} \\ &= H(j\Omega) S_X(\Omega). \end{aligned} \quad (4.45)$$

结合 (4.39) 式, 有如下关系式:

$$S_Y(\Omega) = H(-j\Omega)H(j\Omega)S_X(\Omega) = H(-j\Omega)S_{YX}(\Omega) = H(j\Omega)S_{XY}(\Omega). \quad (4.46)$$

综上所述, 我们可以得到与连续随机信号相类似的结论: 当广义平稳随机序列  $x(n)$  从  $-\infty$  时刻开始就加入到线性时不变系统, 则系统输出广义平稳, 且输出与输入联合广义平稳。系统输出以及系统输入、输出之间的统计关系也可参照图 2.3 所示。但是, 如果广义平稳随机序列  $\{X(n)\}$  是从  $n=0$  时刻开始加入系统, 即  $X(n)=0, n<0$ , 此时系统输出不再平稳。

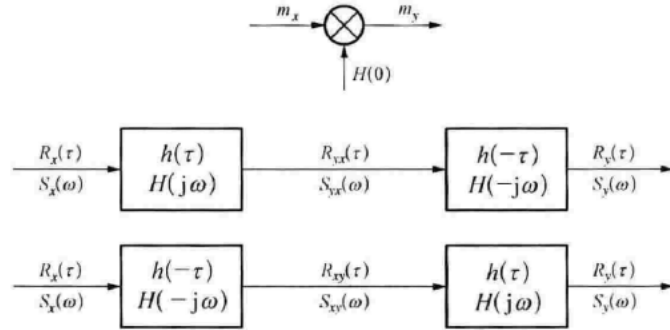


图 4-4 广义平稳随机信号通过线性时不变系统的示意图

#### 4.4 白噪声通过线性时不变系统

白噪声是实际应用中最常遇见的一种噪声, 它是一种广义平稳的随机过程。其特殊的统计特性使它在线性系统的分析应用中起着非常重要的作用。白噪声  $\{N(t)\}$  的均值为零, 功率谱密度均匀分布在无限宽的频带范围内, 即

$$S_n(\omega) = \frac{N_0}{2}, \quad -\infty < \omega < +\infty, \quad (4.47)$$

其中  $N_0$  为常数白噪声的”白”字是借用了光学中白光的概念, 白光的光谱覆盖了所有可见光的频率。不具有上述均匀功率谱的噪声称为色噪声。根据维纳-辛钦定理, 我们可以进一步得到白噪声的自相关函数以及相关系数

$$R_N(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2} \delta(\tau). \quad (4.48)$$

$$\rho_N(\tau) = \frac{R_N(\tau)}{R_N(0)} = \begin{cases} 1, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases}. \quad (4.49)$$

上式表明, 白噪声在任意相邻时刻的取值都是不相关的, 且平均功率  $R_0(0)$  无限大。然而, 上述定义白噪声只是一种理想化的噪声模型, 在实际中是不可能存在的因为实际系统的带宽总是有限的, 有限带宽系统中白噪声的平均功率不可能是无限大的通常情况下, 只要平稳随机过程的功率谱密度在比系统带宽大得多的频率范围内近似均匀分布, 就可以将其视为白噪声, 这种白噪声通常又被称为带白噪声。

#### 4.4.1 系统输出的一般特性及等效噪声带宽

作为一种特殊的广义平稳随机过程, 白噪声通过线性时不变系统后的输出同样具有 4.3 节中所列举的一系列统计特性。根据 (4.11), ..., (4.23) 式, 我们可得如下结论:

$$m_Y = m_N \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau = m_N H(0) = 0. \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) \delta(\tau - \tau_1 + \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) h(\tau + \tau_2) d\tau_2. \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$S_Y(\omega) = \frac{N_0}{2} |H(j\omega)|^2. \quad (4.52)$$

$$R_{NY}(x) = \frac{N_0}{2} h(-\tau) = R_{YN}(-\tau). \quad (4.53)$$

$$S_{NY}(\omega) = \frac{N_0}{2} H(-j\omega) = S_{YN}(-\omega). \quad (4.54)$$

由 (4.52) 式可知, 白噪声通过线性时不变系统后, 输出一般不再具有均匀分布的功率谱密度, 而是由系统的幅频响应来决定, 输出一般是色噪声。此时, 输出噪声的平均功率为

$$\begin{aligned} R_Y(0) &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(\tau) d\tau = \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{N_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (4.55)$$

上式中利用了实际系统的冲激响应一般为实函数的性质。

在实际应用中,为了便于计算系统的输出噪声功率,人们引入了等效噪声带宽的概念。用一个具有矩形幅频响应的理想系统来替代实际系统,当白噪声激励这个理想系统时,输出噪声的功率谱密度在通带范围内均匀分布。若输出噪声的平均功率等于实际系统输出的平均功率,且理想系统  $H_e(j\omega)$  在通带范围内的幅度值等于实际系统幅频响应的最大值,则理想系统的带宽  $\Delta\omega_e$  就定义为实际系统的等效噪声带宽,如图 4-5。此时

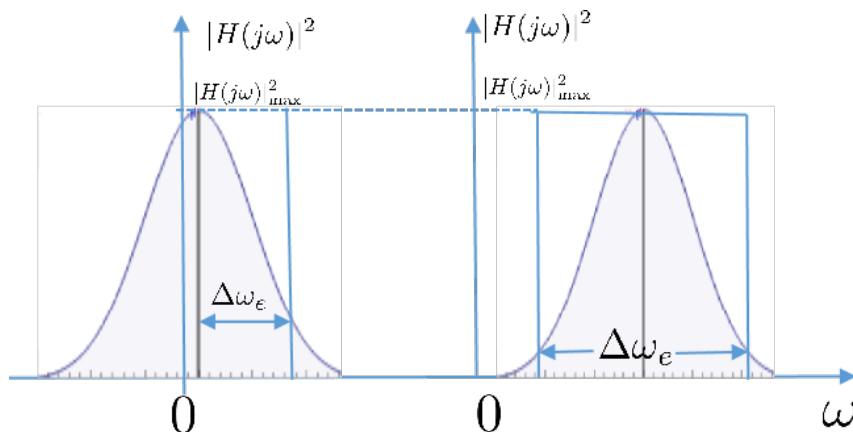


图 4-5 系统的等效噪声带宽 a) 低通系统 b) 带通系统

输出噪声的平均功率为

$$\begin{aligned} R_Y(0) &= \frac{N_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} |H_e(j\omega)|^2 d\omega = \frac{N_0}{2\pi} \Delta\omega_e |H(j\omega)|_{\max}^2 \\ &= \frac{N_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (4.56)$$

解得

$$\Delta\omega_e = \frac{1}{|H(j\omega)|_{\max}^2} \int_0^{+\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega. \quad (4.57)$$

此外,根据 (4.51) 式和 (4.52) 式,我们可以通过用白噪声激励一个线性时不变系统的方法,来产生具有特定二阶统计特性的平稳随机过程,这是个信号建模问题。但由于输出的功率谱密度只提供了系统的幅度信息,缺少相位信息,我们只能据此得到最小相移系统。反过来,如果知道了平稳随机过程的二阶统计特性,将其激励一个线性时不变系统来产生一个白噪声信号,则称之为对随机过程进行预白化。由 (4.53) 式和 (4.54) 式,我们还可以看到:系统输出与输入之间的互相关函数(或互功率谱密度)等于系统的冲激响应(或传输函数)乘上一个常数。也就是说,当白噪声激励一个未知的线性时不变系统时,可以通过估计系统输出与白噪声之间的互相关函数(或互功率谱密度)来估计系统的冲激响应(或传输函数),这是一个系统辨识问题。



### 4.4.2 白噪声通过理想低通系统

图 4-6 所示为一个理想的低通系统，系统的幅频响应为

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} A, & |\omega| \leq \Delta\omega \\ 0, & |\omega| > \Delta\omega \end{cases} \quad (4.58)$$

当白噪声通过该系统，输出的功率谱密度函数和自相关函数可以分别表示

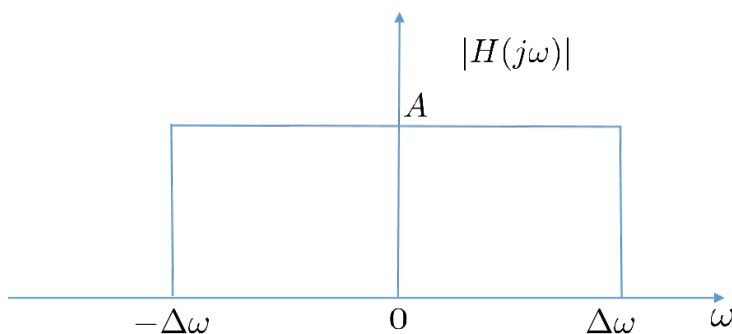


图 4-6 系统的等效噪声带宽

$$S_Y(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0 A^2}{2}, & |\omega| \leq \Delta\omega \\ 0, & |\omega| > \Delta\omega \end{cases} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \frac{N_0 A^2}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0 A^2}{2\pi} \int_0^{\Delta\omega} \cos \omega\tau d\omega \\ &= \frac{N_0 A^2 \Delta\omega}{2\pi} \cdot \frac{\sin \Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau} = R_Y(0) \cdot \frac{\sin \Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

此时系统的等效噪声带宽为

$$\Delta\omega_e = \frac{1}{A^2} \int_0^{\Delta\omega} A^2 d\omega = \Delta\omega. \quad (4.61)$$

此外，根据 (4.60) 式可以进一步得到如下结论当  $\tau = k\pi/\Delta\omega$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时， $R_Y(\tau) = 0$ ，即白噪声通过理想低通系统后，输出在  $\pi/\Delta\omega$  间隔上抽样得到的各个样本之间是互不相关的。

### 4.4.3 白噪声通过理想带通系统

图 2.6 所示为一个理想的带通系统，系统的幅频响应为

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} A, & |\omega \pm \omega_0| \leq \frac{\Delta\omega}{2} \\ 0, & |\omega \pm \omega_0| > \frac{\Delta\omega}{2} \end{cases} \quad (4.62)$$

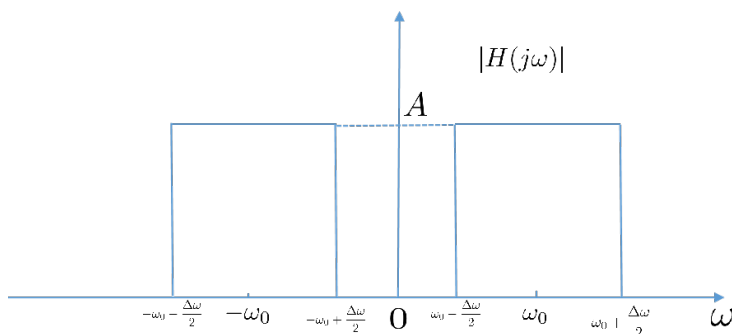


图 4-7 理想的带通系统

当白噪声通过该系统，输出的功率谱密度函数和自相关函数可以分别表示为：

$$S_Y(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0 A^2}{2}, & |\omega \pm \omega_0| \leq \frac{\Delta\omega}{2} \\ 0, & |\omega \pm \omega_0| > \frac{\Delta\omega}{2} \end{cases} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \frac{N_0 A^2}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \cos \omega \tau d\omega \\ &= \frac{N_0 A^2}{2\pi\tau} \sin\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)\tau - \frac{N_0 A^2}{2\pi\tau} \sin\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right)\tau \\ &= \frac{N_0 A^2}{\pi\tau} \sin \frac{\Delta\omega\tau}{2} \cos \omega_0\tau \\ &= \frac{N_0 A^2 \Delta\omega}{2\pi} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{\Delta\omega\tau}{2}} \cos \omega_0\tau \\ &= R_Y(0) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{\Delta\omega\tau}{2}} \cos \omega_0\tau. \end{aligned} \quad (4.64)$$

此时，系统的等效噪声带宽为

$$\Delta\omega_e = \frac{1}{A^2} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} A^2 d\omega = \Delta\omega. \quad (4.65)$$

#### 4.4.4 白噪声通过具有高斯频率特性的带通系统

由多级单调谐中频放大器级联构成的系统，其幅频特性近似具有高斯特性。图 4-8 所示的是一个具有高斯频率特性的带通系统，系统的幅频响应为

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} A \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\beta^2}\right], & \omega > 0. \\ A \exp\left[-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{2\beta^2}\right], & \omega < 0. \end{cases} \quad (4.66)$$

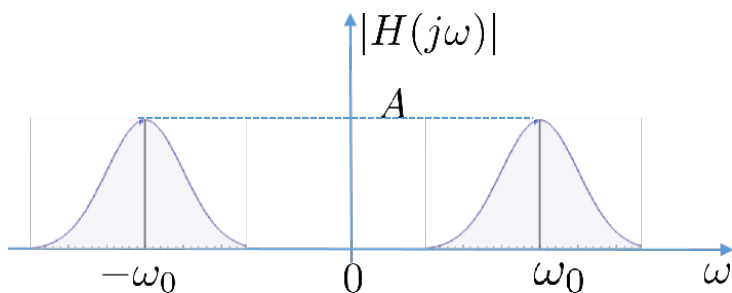


图 4-8 具有高斯频率特性的带通系统

当白噪声通过该系统，输出的功率谱密度函数为

$$S_Y(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0 A^2}{2} \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\beta^2}\right], & \omega > 0 \\ \frac{N_0 A^2}{2} \exp\left[-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{\beta^2}\right], & \omega < 0 \end{cases}. \quad (4.67)$$

如果将  $S_Y(\omega)$  看作是基带信号  $S_1(\tau)$  经过上变频后的带通信号，即

$$s_1(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N_0 A^2 \exp\left(-\frac{\omega^2}{\beta^2}\right) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (4.68)$$

此时输出的自相关函数可表示为

$$R_Y(\tau) = s_1(\tau) \cos \omega_0 \tau = \frac{N_0 A^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\omega^2}{\beta^2}\right) e^{j\omega\tau} d\omega \cos \omega_0 \tau. \quad (4.69)$$

利用  $\exp(-a^2 t^2)$  和  $\frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a^2}\right)$  为对傅里叶变换对，则

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \frac{N_0 A^2}{2\pi} \beta \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{\beta^2 \tau^2}{4}\right) \cos \omega_0 \tau \\ &= \frac{N_0 A^2 \beta}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\beta^2 \tau^2}{4}\right) \cos \omega_0 \tau. \end{aligned} \quad (4.70)$$

此时，系统的等效噪声带宽为

$$\Delta\omega_e = \frac{1}{A^2} \int_0^{+\infty} A^2 \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\beta^2}\right] d\omega = \sqrt{\pi} \beta. \quad (4.71)$$

## 4.5 白噪声序列和平稳随机序列的参数模型

与连续的白噪声相对应，白噪声序列  $\{W(n)\}$  是具有如下统计特性的零均值广义平稳随机序列：

$$\begin{aligned} R_W(m) &= \sigma_W^2 \delta(m). \\ S_W(\Omega) &= \sigma_W^2, \quad -\pi \leq \Omega \leq \pi. \end{aligned} \quad (4.72)$$

当白噪声序列通过离散线性时不变系统时, 根据前面章节中的结论, 输出噪声序列是广义平稳的, 且与输入序列联合平稳, 其具体统计特性可参照式与连续的白噪声相类似, 我们也可以用白噪声序列激励一个离散的最小相移系统进行信号建模, 产生具有特定二阶统计特性的平稳随机序列。在实际应用中, 为了便于对问题的分析和处理, 线性时不变系统的传递函数通常用一个有限阶数的有理函数来近似表示。相应地, 系统的输出序列也就可以用有限个参数来描述, 该有理函数称为平稳随机序列的参数模型。这种通过建立合适的参数模型来分析平稳随机序列的方法, 因其频谱分辨率高, 已成为现代谱分析中的一种重要方法。这里只介绍三种最常用的参数模型。

考虑具有如下有限阶数的离散线性时不变系统

$$H(j\Omega) = \frac{1 + \sum_{k=1}^q b_k e^{-j\Omega k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j\Omega k}} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k e^{-j\Omega k}}{\sum_{k=0}^p a_k e^{-j\Omega k}}. \quad (4.73)$$

其中  $a_0 = b_0 = 1$ , 其他参数由输出序列  $\{Y(n)\}$  的二阶统计特性 (自相关函数或者功率谱函数) 决定. 写成  $Z$  变换的形式

$$H(z) = \frac{1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} = \frac{\prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^p (1 - \alpha_k z^{-1})}, \quad (4.74)$$

其中  $\alpha_k, \beta_k$  分别为系统的极点和零点, 为保证系统的因果稳定性, 这里要求  $|\alpha_k| < 1$ .

### 4.5.1 自回归滑动平均模型

如果系数  $a_1, \dots, a_p$  和  $b_1, \dots, b_q$  不全为零, 且  $a_p \neq 0, b_q \neq 0$  时, 此时系统存在零点也存在极点。当白噪声序列  $\{w(n)\}$  激励上述系统后, 系统输出序列  $\{Y(n)\}$  与输入  $\{w(n)\}$  之间的关系可由如下差分方程表示

$$\begin{aligned} y(n) &= -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \dots - a_p y(n-p) \\ &\quad + w(n) + b_1 w(n-1) + b_2 w(n-2) + \dots + b_q w(n-q) \\ &= \sum_{k=0}^q b_k w(n-k) - \sum_{k=1}^p a_k y(n-k). \end{aligned} \quad (4.75)$$

称为平稳随机序列  $\{Y(n)\}$  的  $p$  阶自回归  $q$  阶滑动平均模型 (ARMA). 由该模型表征的平稳随机序列  $\{Y(n)\}$ , 也即系统输出的功率谱密度函数和自相关函数分别为

$$S_Y(\Omega) = \sigma_w^2 \frac{\left| \sum_{k=0}^q b_k e^{-i\Omega k} \right|^2}{\left| \sum_{k=0}^p a_k e^{-i\Omega k} \right|^2}. \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} R_Y(m) &= R_Y(n_1 - n_2) = E \left\{ y(n_2) \left[ \sum_{k=0}^q b_k w(n_1 - k) - \sum_{k=1}^p a_k y(n_1 - k) \right] \right\} \\ &= \sum_{k=0}^q b_k R_{wy}(m - k) - \sum_{k=1}^p a_k R_Y(m - k) \\ &= \sum_{k=0}^q b_k \sigma_w^2 h(k - m) - \sum_{k=1}^p a_k R_Y(m - k). \end{aligned} \quad (4.77)$$

上式利用了 4.3 节中的结论

$$R_{wy}(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) R_w(m + k) = \sigma_w^2 h(-m). \quad (4.78)$$

其中系统的冲激响应  $h(n)$  可根据 (4.73) 式表示成

$$h(n) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k h(n - k) + b_n, & 0 \leq n \leq q \\ -\sum_{k=1}^p a_k h(n - k), & n > q \\ 0, & n < 0 \end{cases}. \quad (4.79)$$

### 4.5.2 自回归模型

当系数  $b_1, \dots, b_q$  均为零且  $a_p \neq 0$  时, 系统为全极点系统, 其传输函数和冲激响应分别为

$$H(j\Omega) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-i\Omega k}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^p a_k e^{-i\Omega k}}. \quad (4.80)$$

$$h(n) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k h(n - k) + \delta(n), & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}. \quad (4.81)$$

系统输出序列  $\{Y(n)\}$  与白噪声序列  $\{W(n)\}$  的当前值和  $\{Y(n)\}$  的  $p$  个过去值有关, 即

$$y(n) = w(n) - \sum_{k=1}^p a_k y(n - k), \quad (4.82)$$

称为平稳随机序列  $\{Y(n)\}$  的  $p$  阶自回归模型 (Auto Regressive model, AR), 记为  $\text{AR}(p)$ . 可见  $\text{AR}(p)$  模型是由  $\text{ARMA}(p, q)$  模型经过  $q = 0$  退化而来. 相应地, 由该模型表征的平稳随机序列  $\{Y(n)\}$ , 即系统输出的功率谱密度函数和自相关函数可表示为

$$S_Y(\Omega) = \frac{\sigma_w^2}{\left| \sum_{k=0}^p a_k e^{-iak} \right|^2}. \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} R_Y(m) &= R_Y(n_1 - n_2) = E \left\{ y(n_2) \left[ w(n_1) - \sum_{k=1}^p a_k y(n_1 - k) \right] \right\} \\ &= R_{wy}(m) - \sum_{k=1}^p a_k R_Y(m - k) \\ &= \sigma_m^2 h(-m) - \sum_{k=1}^p a_k R_Y(m - k). \end{aligned} \quad (4.84)$$

### 4.5.3 滑动平均模型

当系数  $a_1, \dots, a_p$  均为零且  $b_q \neq 0$  时, 系统为全零点系统, 其传输函数和冲激响应分别为

$$\begin{aligned} H(j\Omega) &= 1 + \sum_{k=1}^q b_k e^{-i\Omega k} = \sum_{k=0}^q b_k e^{iak}. \\ h(n) &= \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq q \\ 0, & n < 0, n > q \end{cases}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

此时,  $\{Y(n)\}$  仅与白噪声序列  $\{W(n)\}$  的当前值和  $q$  个过去值有关, 即

$$y(n) = w(n) + \sum_{k=1}^q b_k w(n - k) = \sum_{k=0}^q b_k w(n - k), \quad (4.86)$$

称为平稳随机序列  $\{Y(n)\}$  的  $q$  阶滑动平均模型 (Moving Average model, MA), 记为  $\text{MA}(q)$ . 同样,  $\text{MA}(q)$  模型可以看作是由  $\text{ARMA}(p, q)$  模型经过  $p = 0$  退化而来, 相应地, 由该模型表征的平稳随机序列  $\{Y(n)\}$ , 即系统输出的功率谱密度函数和自相关函数可分别表示为

$$S_Y(\Omega) = \sigma_W^2 \left| \sum_{k=0}^q b_k e^{-j\Omega k} \right|^2. \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} R_Y(m) &= R_Y(n_1 - n_2) = E \left\{ Y(n_2) \sum_{k=0}^q b_k W(n_1 - k) \right\} \\ &= \sum_{k=0}^q b_k R_{wy}(m - k) = \sum_{k=0}^q b_k \sigma_W^2 h(k - m). \end{aligned} \quad (4.88)$$

#### 4.5.4 三种模型间的联系

在上文、中，我们提到 AR 模型和 MA 模型是 ARMA 模型分别在不同条件下的特例，除此之外，这三种模型之间还可以相互等价。下面我们就以 MA 模型为例，证明一个有限阶的 MA( $q$ ) 模型可以等价于一个无穷阶的 AR 模型。

对 (4.86) 式两边取 Z 变换

$$Y(z) = H(z)W(z) = \prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1}) W(z), \quad (4.89)$$

其中  $Y(z)$  和  $W(z)$  分别为  $y(n)$  和  $W(n)$  的 Z 变换。若系统  $H(z)$  具有可逆性，即其零点  $|\beta_k| < 1$ ，序列  $\{W(n)\}$  可以看成是序列  $\{Y(n)\}$  激励其逆系统  $H_{inv}$  的输出，即

$$W(z) = H_{inv} Y(z) = \frac{Y(z)}{\prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1})}, \quad (4.90)$$

利用系统的稳定性条件和下面的公式

$$\frac{1}{1 - \beta_k z^{-1}} = \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_k^i z^{-i} = 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_k^i z^{-i}, \quad (4.91)$$

将其代入 (4.90) 式得

$$W(z) = \prod_{k=1}^q \left( 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_k^i z^{-i} \right) Y(z) = \left( 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon_i z^{-i} \right) Y(z). \quad (4.92)$$

比较上式与 (4.82) 式，两者在形式上完全一致，这就证明，一个可逆的有限阶 MA 模型可以等价于一个无穷阶的 AR 模型。同样，可以用类似的分析方法得到如下结论：一个可逆的有限阶 MA 模型或 ARMA 模型可以等价于一个无穷阶的 AR 模型，一个稳定的有限阶 AR 模型或 ARMA 模型也可以等价于一个无穷阶的 MA 模型。

## 4.6 随机信号通过线性时变系统

前面几节讨论的都是随机信号通过线性时不变系统的输出特性。而当随机信号通过的是线性时变系统时, 此时系统的输出跟输入的起始作用时间有关, 输出与输入之间的关系可以表示成

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, \tau)x(\tau)d\tau, \quad (4.93)$$

其中  $h(t, \tau)$  为时变系统的冲激响应,  $\tau$  表示系统输入端出现冲激的时刻,  $t$  表示响应出现的时刻。当该系统为因果系统时, 有  $h(t, \tau) = 0, t < \tau$ 。

采用类似的分析方法, 可得系统输出的一阶和二阶统计特性分别为

$$m_Y(t) = E\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, \tau)E\{X(\tau)\}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, \tau)m_X(\tau)d\tau. \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= E\{Y(t_1)X(t_2)\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1, \tau_1)h(t_2, \tau_2)E\{X(\tau_1)X(\tau_2)\}d\tau_1d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1, \tau_1)h(t_2, \tau_2)R_X(\tau_1, \tau_2)d\tau_1d\tau_2. \end{aligned} \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= E\{X(t_1)Y(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_2, \tau_2)E\{x(t_1)x(\tau_2)\}d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_2, \tau_2)R_X(t_1, \tau_2)d\tau_2. \\ R_{YX}(t_1, t_2) &= E\{Y(t_1)X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1, \tau_1)E\{Y(\tau_1)X(t_2)\}d\tau_1 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1, \tau_1)R_X(\tau_1, t_2)d\tau_1. \end{aligned} \quad (4.96)$$

以冲激响应  $h(t, \tau) = f(t)\delta(t - \tau_0)$  的幅度调制系统为例, 假设一广义平稳的随机信号  $\{X(t)\}$  通过该时变系统, 此时系统的输出  $y(t) = f(t)x(t)$ , 则其一阶、二阶统计特性分别为

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E\{Y(t)\} = f(t)m_X. \\ R_Y(t_1, t_2) &= E\{Y(t_1)Y(t_2)\} = f(t_1)f(t_2)R_X(t_1 - t_2). \\ R_{XY}(t_1, t_2) &= E\{X(t_1)Y(t_2)\} = f(t_2)R_X(t_1 - t_2) \\ R_{YX}(t_1, t_2) &= E\{Y(t_1)X(t_2)\} = f(t_1)R_X(t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (4.97)$$

可见, 即使输入  $\{X(t)\}$  广义平稳, 输出  $\{Y(t)\}$  的均值也不再是常数, 而与时间  $t$  有关, 且自相关函数和互相关函数跟时间  $t_1, t_2$  都有关, 系统输出不再广义平稳。



## 4.7 随机信号通过非线性系统

除了线性系统外,实际工程应用中还会遇到各种各样的非线性系统。非线性系统又分为无记忆的与有记忆的,由于有记忆的非线性系统讨论起来十分复杂,本节只讨论无记忆的非线性系统。此时系统的输出只与同一时刻的输入有关,而与输入的过去或未来值无关。常见的无记忆非线性系统有检波器、限幅器等。与线性系统不同,研究随机信号通过非线性系统输出的一阶、二阶统计特性,除了要知道输入的一阶、二阶统计特性外,还需要知道输入的其他统计特性。为非线性系统寻找一种具有一般性的分析方法比较困难,本节仅对几种较为成熟的非线性系统分析方法作一些讨论,并假定非线性系统具有如下的传输特性:

$$y = g(x). \quad (4.98)$$

### 4.7.1 直接计算法

所谓直接计算法,是指直接根据无记忆非线性变换函数  $g(\cdot)$  及输入  $\{X(t)\}$  的有关统计性质直接去计算输出  $\{Y(t)\}$  的统计特征。根据定义,输出  $\{Y(t)\}$  的均值、 $n$  阶原点矩及自相关函数可分别表示为

$$m_Y(t) = E\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x; t) dx. \quad (4.99)$$

$$E\{Y^n(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g^n(x) f_X(x; t) dx. \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= E\{Y(t_1)Y(t_2)\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1)g(x_2)f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (4.101)$$

式中  $x_1 = x(t_1)$ ,  $x_2 = x(t_2)$ ,  $f_X(x; t)$ ,  $f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$  分别为输入  $\{X(t)\}$  的一维和二维概率密度函数。

当输入  $\{X(t)\}$  严格平稳,此时上面公式可进一步表示为

$$m_Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx = m_Y. \quad (4.102)$$

$$E\{Y^n(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g^n(x) f_X(x) dx. \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1)g(x_2)f_X(x_1, x_2; t_1 - t_2) dx_1 dx_2 \\ &= R_Y(t_1 - t_2) = R_Y(\tau). \end{aligned} \quad (4.104)$$

由此, 若已知输入  $\{X(t)\}$  的概率密度函数, 可计算出输出  $\{Y(t)\}$  的均值和自相关函数, 输出的功率谱密度函数  $S_Y(\omega)$ , 则通过自相关函数的傅里叶变换得到。但由于这种方法要计算二重积分, 因此只适用于概率密度函数和非线性变换函数比较简单的情況。

**例 4.2** 零均值平稳高斯噪声  $\{X(t)\}$  输入到单向检波器, 即

$$g(x) = \begin{cases} bx, & x \geq 0, b > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

试求输出  $\{Y(t)\}$  的均值、自相关函数及功率谱密度函数与输入之间的关系。

利用零均值平稳高斯噪声的概率密度函数

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right). \quad (4.105)$$

$$f_X(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_X^2\sqrt{1-\rho_X^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho_X(\tau)x_1x_2}{2\sigma_X^2[1-\rho_X^2(\tau)]}\right\}. \quad (4.106)$$

和 (4.102) 式、(4.104) 式, 可得

$$m_Y = \frac{b}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \int_0^{+\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right) dx = \frac{b\sigma_X}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.107)$$

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{b^2 x_1 x_2}{2\pi\sigma_X^2\sqrt{1-\rho_X^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho_X(\tau)x_1x_2}{2\sigma_X^2[1-\rho_X^2(\tau)]}\right\} dx_1 dx_2 \\ &= \frac{2b^2\sigma_X^2[1-\rho_X^2(\tau)]^{3/2}}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} z_1 z_2 \exp\{-z_1^2 - z_2^2 + 2\rho_X(\tau)z_1 z_2\} dz_1 dz_2. \end{aligned} \quad (4.108)$$

利用定积分公式

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} xy \exp(-x^2 - y^2 - 2xy \cos \phi) dx dy = \frac{1}{4 \sin^2 \phi} \left(1 - \frac{\pi}{2} \cot \phi\right). \quad (4.109)$$

及相关系数的性质, 即  $|\rho_X(\tau)| \leq 1$ , 可令  $-\rho_X(\tau) = \cos \phi$ , 式 (4.108) 可进一步表示为

$$R_Y(\tau) = \frac{b^2\sigma_X^2}{2\pi} \left\{ [1-\rho_X^2(\tau)]^{1/2} + \frac{\pi}{2} \rho_X(\tau) \right\}. \quad (4.110)$$

为计算输出功率谱密度, 利用如下公式将自相关函数重新表示, 即当  $-1 \leq \gamma \leq 1$  时, 有

$$\sqrt{1-\gamma^2} = 1 - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^4}{2 \cdot 4} - \frac{\gamma^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots \quad (4.111)$$

则

$$R_Y(\tau) = \frac{b^2 \sigma_X^2}{2\pi} \left[ 1 + \frac{\pi}{2} \rho_X(\tau) - \frac{1}{2} \rho_X^2(\tau) - \frac{1}{2 \times 4} \rho_X^4(\tau) + \cdots \right]. \quad (4.112)$$

考虑到  $|\rho_X(\tau)| \leq 1$  其高次幂项的值很小, 可将上式作近似处理, 即

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &\approx \frac{b^2 \sigma_X^2}{2\pi} + \frac{b^2 \sigma_X^2}{4} \rho_X(\tau) - \frac{b^2 \sigma_X^2}{4\pi} \rho_X^2(\tau) \\ &= \frac{b^2 \sigma_X^2}{2\pi} + \frac{b^2}{4} R_X(\tau) - \frac{b^2}{4\pi \sigma_X^2} R_X^2(\tau). \end{aligned} \quad (4.113)$$

对上式作傅里叶变换, 可得到输出功率谱密度函数

$$S_Y(\omega) = \frac{b^2 \sigma_X^2}{2\pi} \delta(\omega) + \frac{b^2}{4} S_X(\omega) - \frac{b^2}{4\pi \sigma_X^2} [S_X(\omega) * S_X(\omega)]. \quad (4.114)$$

## 4.7.2 特征函数法

对确定信号的分析可以在时域进行, 也可以在变换域进行。同样, 对于随机信号的分析也可以在时域和变换域进行。上文已经介绍了在时域中的随机信号分析, 下面就其在变换域中的分析进行讨论。

假设非线性变换  $g(x)$  的傅里叶变换存在, 即

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-j\omega x} dx. \quad (4.115)$$

称  $G(j\omega)$  为非线性系统  $g(x)$  对应的传输函数。根据随机变量一维和二维特性函数的定义

$$C_X(\omega) = E \{ e^{j\omega X} \}; \quad (4.116)$$

$$C_X(\omega_1, \omega_2) = E \{ e^{j(\omega_1 X_1 + \omega_2 X_2)} \}. \quad (4.117)$$

系统输出的均值和自相关函数可表示为

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x; t) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) f_X(x; t) e^{j\omega x} dx d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) C_X(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (4.118)$$

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1) g(x_2) f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega_1) G(j\omega_2) E \{ e^{j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} \} d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega_1) G(j\omega_2) C_X(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2. \end{aligned} \quad (4.119)$$

若考虑输入  $\{X(t)\}$  是零均值单位方差的高斯平稳信号, 此时

$$C_X(\omega_1, \omega_2) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 R_X(\tau)] \right\}. \quad (4.120)$$

将其代入 (4.119) 式, 并利用指数展开公式, 可进一步得到如下的结论:

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega_1) G(j\omega_2) \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 R_X(\tau)] \right\} d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega_1) G(j\omega_2) \exp \left( -\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \right) \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{R_X^k(\tau)}{k!} (-\omega_1\omega_2)^k \right] d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k R_X^k(\tau)}{k!(2\pi)^2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) \omega^k e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega \right]^2. \end{aligned} \quad (4.121)$$

### 4.7.3 普赖斯定理

当输入的特征函数和非线性变换函数比较复杂时, 直接利用特征函数法中的公式计算自相关函数有时比较困难。普赖斯 (Price) 定理运用特征函数法, 给出了输入为高斯过程, 输出自相关函数与输入相关系数之间的关系。利用由该定理引出的“导数算法”往往可以使计算大为简化。

假定输入  $\{X(t)\}$  为高斯平稳信号, 均值为  $\mu$ , 方差为  $\sigma_X^2$ , 相关系数为  $\rho_X(\tau)$ . 其二维概率密度函数和特征函数分别为

$$\begin{aligned} f_X(x_1, x_2; \tau) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X^2 \sqrt{1 - \rho_X^2(\tau)}} \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 - 2\rho_X(\tau)(x_1 - \mu)(x_2 - \mu)}{2\sigma_X^2 [1 - \rho_X^2(\tau)]} \right\}. \end{aligned} \quad (4.122)$$

$$C_X(\omega_1, \omega_2) = \exp [j\mu(\omega_1 + \omega_2)] \exp \left\{ -\frac{\sigma_X^2}{2} [\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\rho_X(\tau)] \right\}. \quad (4.123)$$

对上式两边求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k C_X}{\partial \rho_X^k(\tau)} &= (-1)^k \sigma_X^{2k} \omega_1^k \omega_2^k \exp [j\mu(\omega_1 + \omega_2)] \exp \left\{ -\frac{\sigma_X^2}{2} [\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\rho_X(\tau)] \right\} \\ &= (-1)^k \sigma_X^{2k} \omega_1^k \omega_2^k C_X(\omega_1, \omega_2). \end{aligned} \quad (4.124)$$

将  $C_X(\omega_1, \omega_2)$  代入 (4.119) 式, 并对两边求导, 可得到如下结论:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^k R_Y(\tau)}{\partial \rho_X^k(\tau)} &= \frac{\partial^k}{\partial \rho_X^k(\tau)} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega_1) G(j\omega_2) C_X(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \right\} \\ &= \frac{(-1)^k \sigma_X^{2k}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1^k \omega_2^k G(j\omega_1) G(j\omega_2) \exp[j\mu(\omega_1 + \omega_2)] \\ &\quad \cdot \exp\left\{-\frac{\sigma_X^2}{2} [\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\rho_X(\tau)]\right\} d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \frac{(-1)^k \sigma_X^{2k}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1^k \omega_2^k G(j\omega_1) G(j\omega_2) C_X(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (4.125)\end{aligned}$$

更进一步, 因为

$$g^{(k)}(x) = \frac{\partial^k g(x)}{\partial x^k} = \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) e^{j\omega x} d\omega \right] = \frac{j^k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^k G(j\omega) e^{j\omega x} d\omega. \quad (4.126)$$

(4.125) 可进一步表示成另一形式, 即

$$\begin{aligned}\frac{\partial^k R_Y(\tau)}{\partial \rho_X^k(\tau)} &= \frac{(-1)^k \sigma_X^{2k}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1^k \omega_2^k G(j\omega_1) G(j\omega_2) \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1, x_2; \tau) e^{j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} dx_1 dx_2 d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \sigma_X^{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g^{(k)}(x_1) g^{(k)}(x_2) f_X(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2. \quad (4.127)\end{aligned}$$

(4.125) 式及 (4.127) 式即 Price 定理。根据 Price 定理, 形成如下的“导数算法”, 即求解  $R_Y(\tau)$  相当于求解由 (4.125) 式或 (4.127) 式表示的微分方程, 该方程的起始条件可由下面公式得到

$$\left. \frac{\partial^r R_Y(\tau)}{\partial \rho_X^r(\tau)} \right|_{\rho_X(\tau)=0} = \sigma_X^{2r} m_r^2, \quad r = 0, 1, \dots, k-1 \quad (4.128)$$

式中  $m_Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} g^{(r)}(x) \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_X^2}\right] dx$ .

由 Price 定理导出的“导数算法”解决某些问题是很方便的, 它特别适用于非线性变换函数  $g(x)$  经多次求导后能得到  $\delta$  函数的情况, 但前提是输入必须是高斯随机信号。

**例 4.3** 零均值平稳高斯噪声  $\{X(t)\}$  输入到理想硬限幅器, 即  $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ . 试求输出  $\{Y(t)\}$  的自相关函数与输入之间的关系。

因为  $g^{(1)}(x) = 2\delta(x)$ , 利用 (4.127) 式可得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial \rho_X(\tau)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4\delta(x_1)\delta(x_2)}{2\pi\sqrt{1-\rho_X^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\rho_X(\tau)}{2\sigma_X^2[1-\rho_X^2(\tau)]}\right\} dx_1 dx_2 \\ &= \frac{2}{\pi\sqrt{1-\rho_X^2(\tau)}}. \end{aligned} \quad (4.129)$$

对上式求积分, 可得到  $R_Y(\tau)$  为

$$R_Y(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho_X(\tau)}{\sqrt{1-\rho_X^2(\tau)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_X(\tau) + C_1. \quad (4.130)$$

根据 (4.128) 式求边界条件为

$$\begin{aligned} R_Y(\tau)|_{\rho_X(\tau)=0} &= \frac{1}{2\pi\sigma_X^2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right) dx \right]^2 \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_X^2} \left[ \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right) dx - \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right) dx \right]^2 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.131)$$

代入 (4.130) 式, 求得  $C_1 = 0$ , 最终  $R_Y(\tau)$  为

$$R_Y(\tau) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_X(\tau). \quad (4.132)$$

#### 4.7.4 级数展开法

不论是直接算法还是特征函数法, 在积分不易计算时都可以采用把非线性变换函数作级数展开的方法来近似求解。假定非线性变换函数  $g(x)$  可以在  $x = 0$  附近展成泰勒级数

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k. \quad (4.133)$$

由需要, 可将 (4.133) 式的  $g(x)$  近似表示为有限项之和, 即

$$g(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n. \quad (4.134)$$

此时输出的均值可表示为

$$m_Y(t) = E\{Y(t)\} = \sum_{k=0}^n a_k E\{x^k(t)\}. \quad (4.135)$$

输出的自相关函数为

$$R_Y(t_1, t_2) = E\{Y(t_1)Y(t_2)\} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n a_k a_i E\{x^k(t_1)x^i(t_2)\}. \quad (4.136)$$

可见, 采用级数展开法, 此时输出的均值和自相关函数可以直接表示为输入各阶矩的线性组合, 但当级数展开的项超过三个时, 计算就会显得十分复杂。

**例 4.4** 零均值平稳高斯噪声  $\{X(t)\}$  输入到一指数系统, 即  $g(x) = b^x, b > 0$ , 试求输出  $\{Y(t)\}$  的自相关函数与输入之间的关系。

因为  $g^{(k)}(x) = g(x)(\ln b)^k$ , 对  $g(x)$  泰勒级数展开可得

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln b)^k}{k!} x^k. \quad (4.137)$$

根据 (4.133) 式, 可得

$$R_Y(\tau) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n \frac{(\ln b)^k}{k!} \frac{(\ln b)^i}{i!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_1^k x_2^i}{2\pi\sigma_X^2 \sqrt{1-\rho_X^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho_X(\tau)x_1x_2}{2\sigma_X^2 [1-\rho_X^2(\tau)]}\right\} dx_1 dx_2. \quad (4.138)$$

如果只考虑  $g(x)$  泰勒级数展开的前三项, 即

$$g(x) \approx 1 + (\ln b)x + \frac{(\ln b)^2}{2}x^2 \triangleq 1 + b_1x + b_2x^2. \quad (4.139)$$

利用零均值高斯变量  $x$  的矩特性:

$$E\{X^n\} = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)\sigma_X^n, & n = 2m \\ 0, & n = 2m+1 \end{cases} \quad (4.140)$$

$$E\{X_1X_2X_3X_4\} = E\{X_1X_2\}E\{X_3X_4\} + E\{X_1X_3\}E\{X_2X_4\} + E\{X_1X_4\}E\{X_2X_3\}. \quad (4.141)$$



则 (4.138) 式可近似表示成



$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &\approx \sum_{k=0}^2 \sum_{i=0}^2 b_k b_i E\{X^k(t_1)X^i(t_2)\} \\ &= 1 + b_2 E\{X^2(t_2)\} + b_1^2 E\{X(t_1)X(t_2)\} + b_2 E\{x^2(t_1)\} + b_2^2 E\{X^2(t_1)X^2(t_2)\} \\ &= 1 + 2b_2\sigma_X^2 + b_1^2\sigma_X^2\rho_X(\tau) + b_2^2\sigma_X^4 + 2b_2^2\sigma_X^4\rho_X^2(\tau). \end{aligned} \quad (4.142)$$

## 小结

本章首先介绍了信号与系统的基本概念、分类和特点；其次分别从时间域和频率域分析了平稳随机信号通过线性时不变系统后，系统输出与输入的一阶、二阶统计量之间的关系，得到了一系列的结论；然后将其应用到对白噪声这种特殊的随机过程通过线性系统后的分析，给出了等效噪声带宽的概念；紧接着利用相同的方法分析了随机序列通过线性时不变系统后的特性，得到了类似的一些结论；并在其基础上，引入了通过建立随机序列参数模型来分析平稳随机序列统计特性的方法，介绍了 ARMA、AR、MA 三种模型的概念及其之间的联系；随后介绍了随机信号通过线性时变系统的一阶、二阶输出统计特性；最后针对无记忆的非线性系统，给出了随机信号通过系统后的几种较为成熟的分析方法。然而，针对非平稳随机信号以及有记忆的非线性等更复杂的系统的处理，限于篇幅没有涉及，感兴趣的读者可查阅相关的文献和书籍。



## 4.8 习题

 **练习 4.1**  已知系统的单位冲激响应  $h(t) = 5e^{-3}U(t)$ , 输入信号为  $X(t) = M + 4\cos(2t + \Phi)$ , 其中  $M$  是随机变量,  $\Phi$  是  $(0, 2\pi)$  上均匀分布的随机变量, 且  $M$  和  $\Phi$  独立。求输出信号的表达式。

 **练习 4.2**  已知线性系统的单位冲激响应



$$h(t) = [5\delta(t) + 3][U(t) - U(t - 1)]. \quad (4.143)$$

输入信号为  $X(t) = 4\sin(2\pi t + \Phi)$ , 其中  $\Phi$  是  $(0, 2\pi)$  上均匀分布的随机变量。求输出信号的表达式均值和方差。

 **练习 4.3**  已知系统的单位冲激响应为

- (1)  $h(t) = e^{-2t}U(t)$ ;
- (2)  $h(t) = e^{-t} \sin t U(t)$ ;
- (3)  $h(t) = te^{-2}U(t)$ ;
- (4)  $h(t) = \delta(t) + e^{-2}U(t)$ .

当输入平稳信号  $X(t)$  的自相关函数为  $R_X(\tau) = 4 + e^{-|\tau|}$  时, 求系统输出的均值和方差。

 **练习 4.4**  已知有限时间积分系统的单位冲激响应为  $h(t) = (1 - t)[U(t) - U(t - 1)]$ , 系统输入功率谱密度为  $10V^2/\text{Hz}$  的高斯白噪声, 求系统输出的 (总) 平均功率, 交流功率和输入输出互相关函数。



练习 4.5 已知系统的单位冲激响应  $h(t) = (1-t)[U(t) - U(t-1)]$ , 信号的自相关函数为  $R_X(\tau) = 2\delta(\tau) + 9$ , 求系统输出的直流功率和相关函数。

练习 4.6 已知系统的输入信号是物理谱密度为  $N_0$  的白噪声, 系统为一带通滤波器, 如图 4-9 所示。求系统输出的 (总) 噪声平均功率。

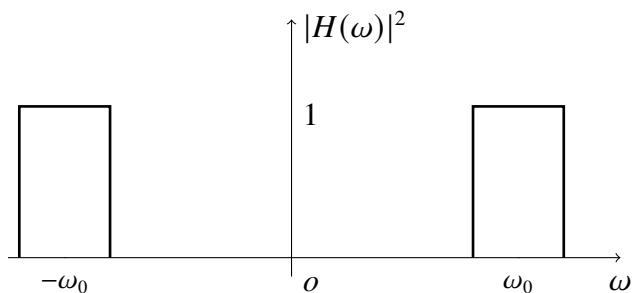


图 4-9

练习 4.7 已知如图 4-10 所示的线性系统, 系统输入信号是物理谱密度为  $N_0$  的白噪声, 求:  
① 系统的传递函数  $H(\omega)$ 。输出  $Z(t)$  的均方值, 其中

$$\int_0^\infty \frac{[\sin(ax)]^2}{x^2} dx = \int_0^\infty a^2 [\text{Sa}(ax)]^2 dx = \frac{\pi}{2} |a|. \quad (4.144)$$

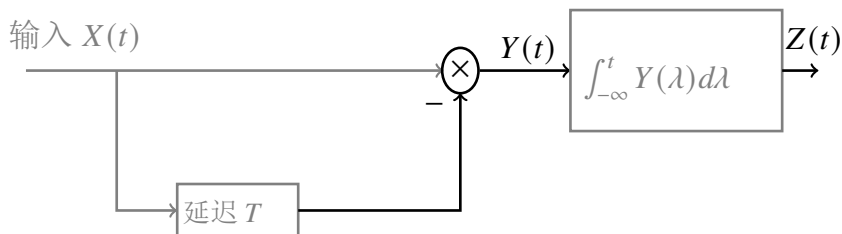


图 4-10

练习 4.8 已知某积分电路输入输出之间满足关系

$$Y(t) = \int_{t-T}^t X(t') dt'. \quad (4.145)$$

式中  $T$  是指积分时间常数。若输入和输出信号皆为平稳过程, 证明输出功率谱密度满足

$$G_Y(\omega) = G_X(\omega) \frac{\left[ \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right]^2}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}. \quad (4.146)$$

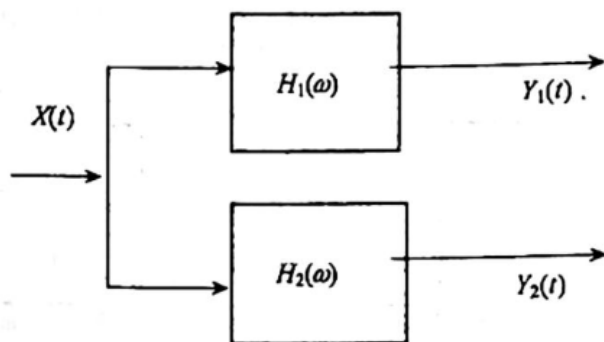


图 4-11

练习 4.9 如图 4-11 所示的某单输入双输出的线性系统

① 若输入信号  $X(t)$  宽平稳, 证明输出  $Y_1(t)$  和  $Y_2(t)$  的互谱密度满足

$$G_{Y_1 Y_2}(\omega) = G_X(\omega) H_1^*(\omega) H_2(\omega) \quad (4.147)$$

② 若输入信号为零均值平稳高斯过程, 为使得  $Y_1(t)$  和  $Y_2(t)$  相互独立, 求传递函数  $H_1(\omega)$  和  $H_2(\omega)$  应满足什么条件, 并画图说明。

练习 4.10 单位冲激响应  $h(t)$  如图 4-12 所示的线性系统, 若输入为功率谱密度为  $2\text{V}^2/\text{Hz}$  的白噪声, 求:

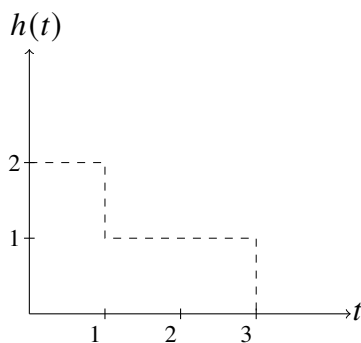


图 4-12

① 系统的等效噪声带宽。② 系统输出的平均功率。

练习 4.11 已知系统的输入为单位谱密度的白噪声, 输出的功率谱密度为

$$G_Y(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9} \quad (4.148)$$

求此稳定系统的单位冲激响应  $h(t)$ 。

练习 4.12 已知系统输入信号的功率谱密度为设计一稳定的线性系统  $H(\omega)$ , 使得系统的输出为单位谱密度的白噪声。

练习 4.13 已知平稳随机信号  $X(t)$  在  $\tau = 0$  时刻加到传递函数  $H(s) = s^{-1}$  的零初始条件的积分器上。

① 若  $X(t)$  的自相关函数为  $R_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$ , 求输出  $Y(t)$  的均方值。

② 若  $X(t)$  的自相关函数为  $R_X(\tau) = \delta(\tau)$ , 求输出  $Y(t)$  的自相关函数。

练习 4.14 功率谱密度为  $N_0/2$  的白噪声作用于  $|H(0)| = 2$  的低通网络上, 等效噪声带宽为 2MHz。若在  $1\Omega$  电阻上的输出平均功率为 0.1W, 求  $N_0$  的值。

练习 4.15 已知线性系统的输入信号是功率谱密度为  $N_0/2$  的白噪声, 现用一等效系统的传递函数  $H_e(\omega)$  来代替原系统的传递函数  $H(\omega)$ , 等效原则为

$$H_e(\omega) = \begin{cases} H(\omega_0), & |\omega| \leq \Omega \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (4.149)$$

此时记系统的输出为  $Y(t)$ 。

① 求使得  $E[Y(t)] = E[Y^2(t)]$  时, 等效系统的带宽。

② 若已知  $H(\omega) = \frac{\beta}{j\omega+2}$ , 求原系统  $H(\omega)$  的等效噪声带宽。

练习 4.16 已知一零均值平稳随机信号  $X(t)$  的自相关函数为  $R_X(\tau)$ , 相应的功率谱密度为  $G_X(\omega)$ , 且  $G_X(\omega) \leq G_X(0)$ 。若通过线性低通滤波器  $H(\omega)$ , 输出为  $Y(t)$ , 且系统  $H(\omega)$  的 3dB 带宽小于  $X(t)$  的等效噪声带宽。证明:

(1)  $\tau_X B_X = \tau_Y B_Y$ , (2)  $\frac{\tau_Y}{\tau_X} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} |H(0)|^2$ , 其中  $\tau_X, \tau_Y; B_X, B_Y; \sigma_X^2, \sigma_Y^2$  分别为输入信号和输出信号的相关时间, 等效噪声带宽和方差。

练习 4.17 已知线性系统的单位冲激响应为  $h(t)$ , 系统输入  $X(t)$  为零均值, 自相关函数  $R_X(\tau) = \delta(\tau)$  的平稳高斯过程。若要使  $X(t_1)$  和  $Y(t_1)$  相互独立,  $h(t)$  应满足什么条件?

练习 4.18 如图 4-13 所示的线性系统, 系统输入  $W(t)$  是零为 1 的白噪声, 且  $h(t) = e^{-t}U(t)$ 。

① 判断  $X(t)$  和  $Y(t)$  分别服从什么分布, 给出理由。

② 证明  $Y(t)$  是严平稳过程。

③ 求  $W(t)$  和  $X(t)$  的互相关函数,  $Y(t)$  的功率谱密度。

④ 写出  $Y(t)$  的一维概率密度表达式。

⑤ 判断同一时刻  $X(t)$  和  $Y(t)$  是否独立, 给出理由。

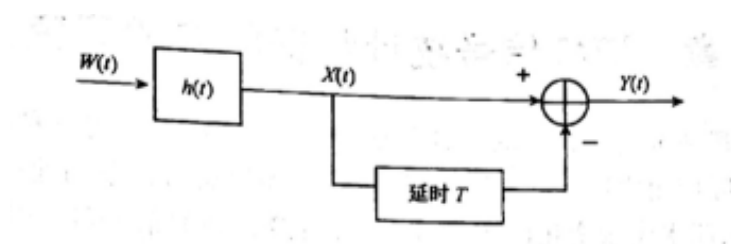


图 4-13