随机信号分析

随机信号的时域分析

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

November 2, 2020

目录

第二次教案下载二维码

Github 下载

第 2 章 随机信号的时域分析

智慧树课堂二维码和项目地址

图 1: 《随机信号分析》课程号:k213654

Github 项目地址

下载地址：
https://github.com/zggl/random-signal-processing2020-autumn

目录

如同复随机变量一样，复随机过程的引人在信号的统计分析中也是必要的。复随机过程表示为 $\{Z(t) = X(t) + jY(t)\}$，其中 $\{X(t)\}$ 为复随机过程的实部，而 $\{Y(t)\}$ 则为随机过程的虚部，$\{X(t)\}$，$\{Y(t)\}$ 都是实随机过程。因此，在 $t_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 时刻，由 $\{Z(t)\}$ 所确定的 $2n$ 维随机变量，其相应的概率密度函数可用

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n; y_1, y_2, \cdots, y_m; t'_1, t'_2, \cdots, t'_m\right). \tag{1}$$

表示。

在不少的实际问题中，可能会涉及同时存在的一个以上的随机过程，其中最简单的情况是同时存在两个随机过程 $\{X(t)\}, \{Y(t)\}$ 可以用以下的 $n+m$ 维随机变量的联合概率密度去描述它们

$$\begin{aligned} & f_{XY}(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n; y_1, y_2, \cdots, y_m; t'_1, t'_2, \cdots, t'_m) \\ & = f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) \times f_Y(y_1, y_2, \cdots, y_n; t'_1, t'_2, \cdots, t'_m) . \end{aligned} \tag{2}$$

显然，n, m 愈大，这种描述将愈精细。如果对于 n 和 m 取自然数中的任意值，有

$$\begin{aligned} & f_{XY}(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n; y_1, y_2, \cdots, y_m; t'_1, t'_2, \cdots, t'_m) \\ & = f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) \times f_Y(y_1, y_2, \cdots, y_m; t'_1, t'_2, \cdots, t'_m) . \end{aligned} \tag{3}$$

那么 $\{X(t)\}$ 和 $\{Y(t)\}$ 彼此统计独立。如果两个过程的联合概率密度函数与时间起点无关，这样的过程称为联合平稳的随机过程。

1. 随机过程的统计特性

对于随机过程而言，常常应用的统计特性有均值、方差、自相关函数及相关系数等，它们是由随机变量的相应数字特征推广而来。为了更好地说明随机过程的统计特性，首先引入集平均和时间平均的概念。与概率论一样，所谓集平均是指随机过程的各类统计特征是随机过程的集合均值。

此外，我们经常用到的还有随机过程的时间均值。时间均值是对于随机过程的每一个实现而言的。如随机过程 $\{X(t)\}$ 的某一个实现 $x^{(k)}(t)$, 其相应的各类时间均值如下：

时间平均均值

$$\left\langle X^{(k)}(t)\right\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^{(k)}(t)dt. \tag{4}$$

时间平均二阶矩

$$\left\langle \left[X^{(k)}(t)\right]\right\rangle^{2} = \lim_{\tau\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[x^{(k)}(t)\right]^{2}dt. \tag{5}$$

时间平均相关函数

$$\left\langle X^{(k)}(t)X^{(k)}(t-\tau)\right\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^{(k)}(t)x^{(k)}(t-\tau)dt. \tag{6}$$

当然，时间平均统计特征的概念亦适用于联合随机过程 $\{X(t)\}\{Y(t)\}$ 时，其时间平均互相关。

$$\left\langle X^{(k)}(t)Y^{(k)}(t-\tau)\right\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^{(k)}(t)y^{(k)}(t-\tau)dt. \quad (7)$$

基于上述表达式，还可以得到其他各种不同的时间平均统计特征。

根据随机过程的时间平均统计特性的定义，一般情况下，随机过程的各类统计特性的时间平均不等于集平均，对平稳随机过程亦然。若随机过程 $\{X(t)\}$ 的某一个实现 $x^{(k)}(t)=A_k, A_k$ 为随机变量 A 的相应取值，随机量 A 的概率密度函数为 $f(A)$, 则对于 $x^{(k)}(t)$ 而言，其时间平均均值为 A_k, 而集平均均值则为

$$\int Af(A)dA = m_A. \quad (8)$$

因此，对于这样的随机过程而言，一般来说，$E\{X(t)\} \neq \langle Y(t)\rangle$. 各态历经随机过程的定义为：平稳随机过程的所有各类集平均统计特征，以概率 1 等于由任意实现得到的相应的时间平均统计特征。

具有各态历经性的随机过程给研究分析随机过程的各类集平均统计特性带来了极大的方便，这时，只要根据随机过程的某一个实现的相应的时间平均统计特性就可以求得集平均统计特性。利用集平均，我们可以定义如下的随机过程统计特性：

随机过程的均值

$$E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;t)dx = m_X(t). \tag{9}$$

随机过程的方差

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\{X(t)\} = E\left\{[X(t)-m_X(t)]^2\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x-m_X(t)]^2 f(x;t)dx \\ &= \sigma_X^2(t).\end{aligned} \tag{10}$$

随机过程的自相关函数

$$\begin{aligned}E\{X(t_1)X(t_2)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2 f(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1dx_2 \\ &= R_X(t_1,t_2).\end{aligned} \tag{11}$$

以上定义的随机过程的均值、方差、自相关函数是集平均意义下的均值、方差与自相关函数。

显然，随机过程 $\{X(t)\}$ 的自相关函数满足对称性，即

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2, t_1). \tag{12}$$

对于非平稳随机过程而言，随机过程的均值、方差及自相关函数都是 t 的函数，这时，$R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau)$ 可记为 $R_X(t = t_1, t_1 - t_2 = \tau) = R_X(t = t_1, \tau)$, 即可用 $R_X(t, \tau)$ 表示非平稳随机过程的自相关函数。

对于严格平稳随机过程而言，由于

$$\begin{aligned} &f(x_1; t) = f(x_1; t + \tau) = f(x_1) \\ &f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; t_1 - t_2 = \tau) = f(x_1, x_2; \tau). \end{aligned} \tag{13}$$

因此，过程的均值是与 t 无关的常量，而 $R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau)$ 只与 $\tau = t_1 - t_2$ 有关，而与 t_1 无关

对于广义平稳随机过程而言，根据其定义，均值应是与 t 无关的常量，自相关函数应是 $t_1 - t_2 = \tau$ 的函数，而与 t_1 无关。

除了相关函数外，还经常用到相关系数。随机过程的相关系数

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{E\{[x(t_1) - m_X(t_1)][x(t_2) - m_X(t_2)]\}}{\sqrt{\sigma_X^2(t_1)}\sqrt{\sigma_X^2(t_2)}}. \tag{14}$$

对于平稳随机过程而言, $R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau), \tau = t_1 - t_2, m_X(t_1) = m_X(t_2) = m_X, \sigma_X(t_1) = \sigma_X(t_2) = \sigma_X$, 则得

$$\rho_X(\tau) = \frac{R_X(\tau) - m_X^2}{\sigma_X^2}. \tag{15}$$

若有两个随机过程 $\{X(t)\}, \{y(t)\}$，定义前者对于后者的互相关函数为

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E\{x(t_1)\,y(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 y_2 f(x_1,y_2;t_1,t_2)\,dx_1 dy_2. \tag{16}$$

而后者对于前者的互相关函数为

$$R_{YX}(t_1,t_2) = E\{y(t_1)\,x(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y_1 x_2 f_{XY}(y_1,x_2;t_1,t_2)\,dy_1 dx_2. \tag{17}$$

显然，过程的互相关函数不具有对称性，即

$$R_{XY}(t_1,t_2) \neq R_{XY}(t_2,t_1), \quad R_{YX}(t_1,t_2) \neq R_{YX}(t_2,t_1). \tag{18}$$

如果过程的互相关函数满足

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1,t_2) = R_{XY}(t_1 - t_2 = \tau) = R_{XY}(\tau). \\ R_{YX}(t_1,t_2) = R_{YX}(t_1 - t_2 = \tau) = R_{YX}(\tau). \end{aligned} \tag{19}$$

那么，这样的随机过程是联合广义平稳的。
除了相关函数外，还经常用到协方差函数。随机过程的协方差函数的定义为

$$\begin{aligned} C_X(t_1,t_2) &= E\{(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))\} \\ &= R_X(t_1,t_2) - m_X(t_1)\, m_X(t_2). \end{aligned} \tag{20}$$

显然，自协方差函数亦具有对称性。

对于平稳随机过程而言

$$C_X(t_1, t_2) = C_X(t_1 - t_2) = C_X(\tau) = R_X(\tau) - m_X^2. \tag{21}$$

当 $m_X = 0$ 时,

$$C_X(\tau) = R_X(\tau). \tag{22}$$

另外，当 $t_2 = t_1 = t$ 时，由 (20) 式得

$$C_X(t, t) = \mathrm{Var}\{X(t)\}. \tag{23}$$

对于联合随机过程 $\{X(t)\}\{Y(t)\}$, 其互协方差函数的定义为

$$\begin{aligned} C_{XY}(t_1,t_2) &= E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][Y(t_2)-m_Y(t_2)]\} \\ &= R_{XY}(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_Y(t_2) \\ C_{YX}(t_1,t_2) &= E\{[y(t_1)-m_Y(t_1)][x(t_2)-m_X(t_2)]\} \\ &= R_{YX}(t_1,t_2)-m_Y(t_1)m_X(t_2). \end{aligned} \tag{24}$$

显见，互协方差函数不具有对称性。

对于平稳随机过程而言，$\mathbf{m}_X(t_1)$ 和 $\mathbf{m}_Y(t_2)$ 均为常数，分别记为 m_X 和 m_Y, 则

$$\begin{aligned} C_{YX}(t_1,t_2) = C_Y(t_1-t_2) = R_{XY}(\tau)-m_Xm_Y. \\ C_{XY}(t_1,t_2) = C_{YX}(t_1-t_2) = R_{XY}(\tau)-m_Ym_X. \end{aligned} \tag{25}$$

信号处理中还经常用到复随机过程。复随机过程 $\{Z(t) = X(t) + jY(t)\}$，其中位 $\{X(t)\}, \{Y(t)\}$ 都是实随机过程。

复随机过程的均值定义

$$m_Z(t) = E\{Z(t)\} = E\{x(t) + jy(t)\} = m_X(t) + jm_Y(t). \tag{26}$$

复随机过程的方差定义

定义

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\{Z(t)\} &= E\left\{|Z(t) - m_Z(t)|^2\right\} \\ &= E\left\{[Z(t) - m_Z(t)]\,[Z(t) - m_Z(t)]\right. \\ &= \mathrm{Var}\{X(t)\} + \mathrm{Var}\{Y(t)\}. \end{aligned} \tag{27}$$

复随机过程的自相关函数

复随机过程的自相关函数定义为

$$\begin{aligned} R_Z(t_1, t_2) &= E\{Z(t_1) Z^*(t_2)\} \\ &= R_X(t_1, t_2) + R_y(t_1, t_2) \\ &\quad + j\left[R_{YX}(t_1, t_2) - R_{XY}(t_1, t_2)\right]. \end{aligned} \tag{28}$$

复随机过程 $\{Z(t)\}$ 的自相关函数不具有对称性。
平稳复随机过程 $\{Z(t)\}$ 的自相关函数

$$\begin{aligned} R_Z(t_1, t_2) &= R_Z(t_1 - t_2) = R_Z(\tau) \\ &= R_X(\tau) + R_y(\tau) + j\left[R_{YX}(\tau) - R_{XY}(\tau)\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

复随机过程的协方差函数定义为

$$\begin{aligned} C_Z(t_1, t_2) &= E\{[Z(t_1) - m_Z(t_1)][Z(t_2) - m_Z(t_2)]\} \\ &= R_Z(t_1, t_2) - m_Z(t_1) m_Z(t_2). \end{aligned} \tag{30}$$

两个复随机过程 $\{Z_1(t)\}, \{Z_2(t)\}$ 的互协方差函数定义为

$$\begin{aligned} C_{Z_1Z_2}(t_1, t_2) &= E\{[Z_1(t_1) - m_{Z_1}(t_1)][Z_2(t_2) - m_{Z_2}(t_2)]\} \\ &= R_{Z_1Z_2}(t_1, t_2) - m_{Z_1}(t_1) m_{Z_2}^*(t_2). \end{aligned} \tag{31}$$

对于平稳复随机过程而言

$$
\begin{aligned}
C_Z(t_1, t_2) &= C_Z(t_1 - t_2) = C_Z(\tau) = R_Z(\tau) - |m_Z|^2 \\
C_{Z_1 Z_2}(t_1, t_2) &= C_{Z_1 Z_2}(t_1 - t_2) \\
&= C_{Z_1 Z_2}(\tau) = R_{Z_1 Z_2}(\tau) - m_{Z_1} m_{Z_2}.
\end{aligned} \tag{32}
$$

随机序列 $\{X(n)\}$ 可看作是一般随机过程 $\{X(n)\}$ 一种特殊的清况，当 t 为离散取值时的随机过程即为随机序列 $\{X(n)\}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$。以上所有一般随机过程的有关统计特性定义同样适用于随机序列。

目录

前面讨论了单个随机过程的统计特性。在实际应用中，常需要研究两个或多个过程的统计特性。

如图 2，它收到的通常是混入噪声的信号，从噪声中检出有用信号，除了考虑噪声和信号各自的统计特性外，还要研究它们联合的统计特性。

图 2: 接收机模块

1. 两个随机过程的联合分布

设有两个随机过程

$$\langle X(t), t \in T\rangle \text{ 和} \langle Y(t), t \in T\} \tag{33}$$

的概率密度分别为

$$f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n), \quad f_Y(y_1, y_2, \cdots, y_n; t'_1, t'_2, \cdots, t'_m). \tag{34}$$

(1) 两个过程的 $n+m$ 维联合分布函数

$$\begin{aligned} &F_{XY}(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n; t_1, \cdots, t_n, t'_1, \cdots, t'_m) \\ =&P\{X(t_1) \leqslant x_1, \cdots, X(t_n) \leqslant x_n, Y(t'_1) \leqslant y_1, \cdots, Y(t'_n) \leqslant y_m\}. \end{aligned} \tag{35}$$

(2) 两个过程的 n + m 维联合概率密度

$$f_{XY}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m,t_1,\cdots,t_n,t_1',\cdots,t_m') = \frac{\partial^{n+m}F_{XY}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n,t_1',\cdots,t_m')}{\partial x_1\cdots\partial x_n\partial y_1\cdots\partial y_m}. \tag{36}$$

(3) 随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的独立

若对任意的 m,n, $X(t)$ 和 $Y(t)$ 都有

$$F_{XY}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n,t_1',\cdots,t_n') = F_X(x_1,\cdots,x_n,t_1,\cdots,t_n)\times F_Y(y_1,\cdots,y_n,t_1',\cdots,t_n'). \tag{37}$$

或

$$
\begin{aligned}
f_{XY}(x_1,\cdots,\quad & x_n,y_1,\cdots,y_m,t_1,\cdots,t_n,t_1',\cdots+,t_m') \\
& = f_X\left(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n\right) \\
& \quad \times f_Y\left(y_1,\cdots,y_m,t_1',\cdots,t_m'\right).
\end{aligned}
\tag{38}
$$

成立, 则称随机过程 X(t) 和 Y(t) 是独立的。

(4) 联合严平稳

联合严平稳

若两个过程任意 $n+m$ 维联合分布均不随时间平移而变化，则称这两个过程为联合严平稳。

2. 两个随机过程的相关和正交

(1) 互相关函数

定义两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数为

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)Y(t_2)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf_{xy}(x,y;t_1,t_2)\,dxdy. \tag{39}$$

式中 $X(t_1), Y(t_2)$ 是过程 $X(t), Y(t)$ 在 t_1, t_2 时刻的状态。

(2) 互协方差函数

两个过程的互协方差函数

定义两个过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互协方差函数为

$$
\begin{aligned}
C_{XY}(t_1,t_2) &= E\{[X(t_1)-m_X(t_1)]\cdot[Y(t_2)-m_Y(t_2)]\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x-m_X(t_1)][y-m_Y(t_2)] \\
&\qquad f_{XY}(x,y;t_1,t_2)\,dxdy. \qquad (40)
\end{aligned}
$$

式中 $m_X(t_1)$ 和 $m_Y(t_2)$ 分别是随机变量 $X(t_1)$ 和 $Y(t_2)$ 的数学期望。上式也可写成

$$
C_{XY}(t_1,t_2) = R_{XY}(t_1,t_2) - m_X(t_1)\,m_Y(t_2)\,. \qquad (41)
$$

(3) 两个过程正交

两个随机过程正交

若两个过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 对任意两个时刻 t_1, t_2 都有

$$R_{XY}(t_1, t_2) = 0 \quad \text{或} \quad C_{XY}(t_1, t_2) = -m_X(t_1)\, m_Y(t_2). \tag{42}$$

则称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 两个过程正交。

随机过程在同一时刻的状态正交

若仅在同一时刻 t 存在

$$R_{XY}(t, t) = 0, \tag{43}$$

则称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 两个过程在同一时刻的状态正交。

注解——互相关函数上的内积可以诱导出范数

随机变量 X 和 Y 可以被认为是无限维向量空间中的向量，空间中的向量赋以为内积运算, 也即 $\langle X, Y\rangle = E[XY]$. 内积可以诱导出范数; 随机变量 X 范数是 $||X|| \triangleq \sqrt{E[X^2]}$.

内积运算也满足对称性、线性性和非负性。

当 $\langle X, Y\rangle = E[XY] = 0$，称随机变量 X 和 Y 正交. 任意两个时刻 t_1, t_2 随机变量 X 和 Y 正交，则称 X(t) 和 Y(t) 两个过程正交。

(4) 两个过程互不相关

随机过程互不相关

若两个过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$) 对任意两个时刻 t_1, t_2 都有

$$C_{XY}(t_1, t_2) = 0 \quad 或 \quad R_{XY}(t_1, t_2) = m_X(t_1)\, m_Y(t_2)\,. \tag{44}$$

则称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 两个过程互不相关。

两个过程在同一时刻的状态互不相关

若两个过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$) 仅在同一时刻 t 存在

$$C_{XY}(t, t) = 0, \tag{45}$$

则称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 两个过程在同一时刻的状态互不相关。

例 .1

对于平稳随机过程，规定标准正交随机变量的随机函数形式 [?] 为

$$\xi_{\mathsf{m}} = \mathsf{cas}(\mathsf{m}\Theta), \quad (\mathsf{m} = 1, 2, \cdots, \mathsf{M}) \tag{46}$$

式中:

- Θ 为基本随机变量，是区间 $[-\pi, \pi]$ 的均匀分布;
- 函数 $\mathsf{cas}(\mathsf{mx}) = \sqrt{2}\,\mathsf{sin}(\mathsf{x} + \frac{\pi}{4})$ 为 Hartley 正交基

函数 (标准正交随机变量,
即

$$\mathsf{E}[\xi_{\mathsf{m}}] = 0, \quad \mathsf{E}[\xi_{\mathsf{m}}\xi_{\mathsf{k}}] = \delta_{\mathsf{mk}}).$$

容易验证 [?] 式 (46) 构造的随机函数形式满足标准正交随机变量的条件，其标准正交随机变量 $\xi_m(m=1,2,\cdots,M)$ 一般为非高斯分布。

构造一组高斯标准正交随机变量

利用式 (46) 中标准正交随机变量的随机函数形式，即可构造一组高斯标准正交 (独立) 随机变量 [?]，即

$$\xi_m=\Phi^{-1}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{\mathrm{cas}(m\Theta)}{\sqrt{2}}\right)\right],(m=1,\cdots,M) \quad (47)$$

式 (47) 中: Φ^{-1} 为标准高斯随机变量分布函数的反函数

$$\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{-t^2}{2}}dt.$$

3. 两个随机过程的联合平稳

联合宽平稳 (或联合平稳)

若两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 各自宽平稳, 且它们的互相关函数仅是单变量的函数, 即

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E\left[X(t_1)\,Y(t_2)\right] = R_{XY}(\tau), \quad \tau = t_2 - t_1. \tag{48}$$

则称过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$联合宽平稳 (或联合平稳).

2) 性质

两个联合平稳过程的互相关函数和互协方差函数的性质

1° 互相关函数和互协方差函数不存在偶对称, 它们满足 (注意下标)

$$\begin{cases} R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \\ C_{XY}(\tau) = C_{YX}(-\tau) \end{cases} . \tag{49}$$

2° 互相关函数和互协方差函数的取值满足

$$\begin{cases} |R_{XY}(\tau)|^2 \leqslant R_X(0)R_Y(0). \\ |C_{XY}(\tau)|^2 \leqslant C_X(0)C_y(0) = \sigma_X^2\sigma_Y^2. \end{cases} . \tag{50}$$

$$\begin{cases} |R_{XY}(\tau)| \leqslant \frac{1}{2}\left[R_X(0)+R_Y(0)\right] \\ |C_{xy}(\tau)| \leqslant \frac{1}{2}\left[C_X(0)+C_Y(0)\right] = \frac{1}{2}\left[\sigma_X^2+\sigma_Y^2\right]. \end{cases} \quad (51)$$

(3) 两个联合平稳过程的互相关系数

$$\rho_{XY}(\tau) = \frac{C_{XY}(\tau)}{\sqrt{C_X(0)C_Y(0)}} = \frac{R_{NY}(\tau) - m_X m_Y}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (52)$$

为两个联合平稳过程 X(t) 和 Y(t) 的互相关系数。

由性质 2° 易得 $|\rho_{XY}(\tau)| \leqslant 1$, 且 $\rho_{XY}(\tau) = 0$ 时, 两个平稳过程 X(t) 和 Y(t) 线性不相关。

例 .2

已知随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是平稳随机过程, 当

$$(1)\begin{cases} X(t) = U\sin t + V\cos t \\ Y(t) = W\sin t + V\cos t \end{cases}, \tag{53}$$

$$(2)\begin{cases} X(t) = A\cos t + B\sin t \\ Y(t) = A\cos 2t + B\sin 2t \end{cases}, \tag{54}$$

式中

- U, V, W 是均值为 0, 方差为 6, 且互不相关的随机变量;
- A, B 是均值为 0, 方差为 3, 且互不相关的随机变量。判断 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是否联合平稳, 给出理由。

解:
① 过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数为

$$\begin{aligned}
R_{XY}(t,t+\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] \\
&= E\{(U\sin t + V\cos t)[W\sin(t+\tau) + V\cos(t+\tau)]\} \\
&= E[UW\sin t\sin(t+\tau) + UV\sin t\cos(t+\tau) \\
&\quad + VW\cos t\sin(t+\tau) + V^2\cos t\cos(t+\tau)] \\
&= 0+0+0+E\left[V^2\right]\cos t\cos(t+\tau) \\
&= 6\cdot\frac{1}{2}[\cos(2t+\tau)+\cos t] \\
&= 3\cos(2t+\tau)+3\cos t.
\end{aligned} \tag{55}$$

可见, 此互相关函数是变量 t,τ 的二元函数, 故 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 不是联合平稳的。

② 过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数为

$$\begin{aligned}
R_{XY}(t, t+\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] \\
&= E\{(A\cos t + B\sin t)[A\cos 2(t+\tau) + B\sin 2(t+\tau)]\} \\
&= E\left[A^2 \cos t\cos 2(t+\tau) + AB\cos t\sin 2(t+\tau)\right. \\
&\qquad \left. + AB\sin t\cos 2(t+\tau) + B^2 \sin t\sin 2(t+\tau)\right] \\
&= E\left[A^2\right][\cos t\cos 2(t+\tau) + \sin t\sin 2(t+\tau)] + 0 + 0 \\
&= 3\cos(t+2\tau).
\end{aligned} \tag{56}$$

可见，此互相关函数也是变量 t, τ 的二元函数，故过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 也不是联合平稳的。

例 .3

对于联合平稳的实随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$, 计算

$$E\left[\left(\frac{X(t)}{\sqrt{R_X(0)}} \pm \frac{Y(t+\tau)}{\sqrt{R_Y(0)}}\right)^2\right]. \tag{57}$$

证明: 式中 $R_X(0)$ 和 $R_Y(0)$ 分别为随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的均方值, 即

$$R_X(0) = E\left[X^2(t)\right], \quad R_Y(0) = E\left[Y^2(t+\tau)\right]. \tag{58}$$

本题只限于讨论实随机过程, 就是说 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 皆为时间 t 的实函数。而实函数的平方是非负的, 则

$$E\left[\left(\frac{X(t)}{\sqrt{E\left[X^2(t)\right]}} \pm \frac{Y(t+\tau)}{\sqrt{E\left[Y^2(t+\tau)\right]}}\right)^2\right] \geqslant 0. \tag{59}$$

将不等式 (59) 在边展开, 得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{E}\left[X^2(t)\right]}{\mathrm{E}\left[X^2(t)\right]} \pm 2\frac{\mathrm{E}[X(t)Y(t+\tau)]}{\sqrt{\mathrm{E}\left[X^2(t)\right]\mathrm{E}\left[Y^2(t+\tau)\right]}} + \frac{\mathrm{E}\left[Y^2(t+\tau)\right]}{\mathrm{E}\left[Y^2(t+\tau)\right]} \geqslant 0 \\
&\Rightarrow 2 \pm 2\frac{R_{XY}(\tau)}{\sqrt{\mathrm{E}\left[X^2(t)\right]\mathrm{E}\left[Y^2(t+\tau)\right]}} \geqslant 0 \\
&\Rightarrow |R_{XY}(\tau)| \leqslant \sqrt{\mathrm{E}\left[X^2(t)\right]\mathrm{E}\left[Y^2(t+\tau)\right]} \\
&\Rightarrow |R_{XY}(\tau)|^2 \leqslant R_X(0)R_Y(0).
\end{aligned} \tag{60}$$

目录

前面讨论的过程都是实随机过程, 即其样本函数是时间的实函数. 这种表示方法的优点是直观，易于接受。

复随机过程

但在某些情况下，如在高频窟带随机信号的处理中，将信号表示成复函数形式更为方便。将这种用复函数表示的随机过程称为复随机过程。

复随机过程的定义类似于实随机过程, 是随时间变化的复随机变量。

定义 .1 复随机变量

定义复随机变量 Z 为

$$Z = X + jY \tag{61}$$

式中, X 和 Y 都为实随机变量。

实质上, 复随机变量 Z 是实随机变量 X 和 Y 所组成的二维随机变量, 故 Z 的统计特性可以用 X 和 Y 的联合分布来完整地描述。

将实随机变量的数学期望、方差和相关等概念推广到复随机变量中去时, 必须遵循的原则是: 当 $Y = 0$ 时, 复随机变量 Z 等于实随机变量 X。

(1) 复随机变量 Z 的数学期望

$$m_Z = E[Z] = E[X] + jE[Y] = m_X + jm_Y. \tag{62}$$

(2) 复随机变量 Z 的方差

$$D_Z = D[Z] = E\left[|Z - m_Z|^2\right] = E\left[|\tilde{Z}|^2\right]. \tag{63}$$

式中 $\tilde{Z} = Z - m_Z$, 且有

$$D_z = D_x + D_Y. \tag{64}$$

(3) 两个复随机变量 Z_1

$$C_{Z_1Z_2} = E\left[(Z_1 - m_{Z_1})^* (Z_2 - m_{Z_2})\right] = E\left[\tilde{Z}_1\tilde{Z}_2\right], \tag{65}$$

式中 "*" 表示共轭, $Z_1 = X_1 + jY_1, Z_2 = X_2 + jY_2$。当 $Z_1 = Z_2 = Z$ 时, $C_{Z_1Z_2} = E\left[|\tilde{Z}|^2\right] = D_Z$.

还可以把协方差写成下面的形式:

$$C_{Z_1Z_2} = C_{X_1X_2} + C_{Y_1Y_2} + j\,(C_{X_1Y_2} - C_{Y_1X_2}), \tag{66}$$

式中 $C_{X_1X_2}, C_{Y_1Y_2}, C_{X_1Y_2}, C_{Y_1X_2}$ 分别是 $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2), (X_1, Y_2), (Y_1, X_2)$ 的协方差。

(5) (4) 两个复随机变量 Z_1

若两个复随机变量 $Z_1 = X_1 + jY_1, Z_2 = X_2 + jY_2$ 满足

$$f_{X_1Y_1X_2Y_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) = f_{X_1Y_1}(x_1, y_1)\, f_{X_2Y_2}(x_2, y_2). \tag{67}$$

则称 Z_1, Z_2 相互独立。

(5) 两个复随机变量 Z_1

若两个复随机变量 Z_1, Z_2 满足

$$C_{Z_1Z_2} = E\left[(Z_1 - m_{Z_1})^* (Z_2 - m_{Z_2})\right] = 0. \tag{68}$$

则称 Z_1, Z_2 互不相关。

(5) (6) 两个复随机变量 Z_1

若两个复随机变量 Z_1, Z_2 满足

$$R_{Z_1Z_2} = E\left[Z_1^* Z_2\right] = 0. \tag{69}$$

2. 复随机过程

复随机过程为

$$Z(t) = X(t) + jY(t) \tag{70}$$

式中 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 都是实随机过程。复随机过程 $Z(t)$ 的统计特性可由 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的 $2n$ 维联合分布完整描述，其概率密度为

$$f_{XY}(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n; t_1, \cdots, t_n, t_1', \cdots, t_n). \tag{71}$$

$$m_Z(t) = E[Z(t)] = E[X(t) + jY(t)] = m_X(t) + jm_Y(t). \tag{72}$$

$$D_Z(t) = E\left[\left|Z(t) - m_Z(t)\right|^2\right] = E\left[\left|\tilde{Z}(t)\right|^2\right]. \tag{73}$$

式中 $\tilde{Z}(l) = Z(t) - m_Z(t)$, 且有

$$D_Z(t) = D_X(t) + D_Y(t). \tag{74}$$

(3) 复随机过程 $Z(t)$ 的自相关函数

$$R_Z(t,t+\tau)=E\left[Z^*(t)Z(t+\tau)\right]. \tag{75}$$

(4) 复随机过程 $Z(t)$ 自协方差系数

$$\begin{aligned} C_Z(t,t+\tau) &= E\left\{\left[Z(t)-m_2(t)\right]\cdot\left[Z(t+\tau)-m_Z(t+\tau)\right]\right\} \\ &= E\left[Z^*(t)Z(t+\tau)\right]. \end{aligned} \tag{76}$$

$$C_Z(t,t)=D_Z(t). \tag{77}$$

(5) 复随机过程 $Z(t)$ 宽平稳

若复随机过程 $Z(t)$ 满足下面两个条件：

$$\begin{aligned} m_Z(t) &= m_Z \\ R_Z(t, t+\tau) &= R_Z(\tau) \end{aligned} \tag{78}$$

则称此随机过程 $Z(t)$ 宽平稳。

(6) 两个复随机过程 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 的互相关函数和互协方差函数

$$\begin{aligned} R_{Z_1Z_2}(t, t+\tau) &= E\left[Z_1^*(t)Z_2(t+\tau)\right] \\ C_{Z_1Z_2}(t, t+\tau) &= E\left\{\left[Z_1(t) - m_{Z_1}(t)\right] \cdot \left[Z_2(t+\tau) - m_{Z_2}(t+\tau)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{79}$$

(7) 两个复随机过程 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 的联合平稳

两个复随机过程 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 各自平稳，且它们的互相关函数满足

$$R(t, t+\tau) = R_{Z_1Z_2}(\tau), \tag{80}$$

则称这两个复随机过程联合平稳。

(8) 两个复随机过程 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 的互不相关

若两个复随机过程 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 满足

$$C_{Z_1Z_2}(t, t+\tau) = 0, \tag{81}$$

则称这两个复随机过程互不相关。

(9) 两个复随机过程 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t+\tau)$ 的正交

若两个复随机过番 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t+\tau)$ 满足

$$R_{Z_2Z_2}(t, t+\tau) = 0, \tag{82}$$

则称这两个复随机过程正交。

例 .1

已知复随机过程 $V(t)$ 由 N 个复信号之和组成, 即

$$V(t)=\sum_{n=1}^{N}A_n\exp\left[j\left(\omega_0 t+\Phi_n\right)\right],\quad n=1,2,\cdots,N. \tag{83}$$

其中 ω_0 为常数, 表示每个复信号的角频率; A_n 是随机变量, 表示第 n 个复信号的幅度: Φ_n 是服从 $(0,2\pi)$ 上均匀分布的随机变量, 表示第 n 个复信号的相位。若相位 $\Phi_n(n=1,2,\cdots,N)$ 之间相互独立, 且幅度 A_n 和 Φ_n 之间也是相互独立的, 求复过程 $V(t)$ 的自相关函数。

解：由复过程的自相关系数定义

$$
\begin{aligned}
R_V(t, t+\tau) &= F\left[V^*(t)V(t+\tau)\right] \\
&= F\left\{\sum_{n=1}^{N} A_n \exp\left[-j\left(\omega_0 t + \Phi_n\right)\right].\right.
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{m=1}^{N} A_m \exp_i^- j\left(\omega_0(t+\tau) + \Phi_m\right) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{E_L^- A_n A_n \operatorname{tr} p\left[j\left(\Phi_m - \Phi_n\right)\right]\right. \quad (84
$$

$$
\times \exp\left(j\omega_0\tau\right)
$$

$$
= R_V(\tau).
$$

由已知的独立条件可得

$$\begin{aligned} R_V(\tau) &= \exp(j\omega_0\tau)\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} E\left[A_n A_m \exp\left[j\left(\Phi_m-\Phi_n\right)\right]\right] \\ &= \exp(j\omega_0\tau)\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{E\left(A_n A_m\right) E\left[\exp\left[j\left(\Phi_m-\Phi_n\right)\right]\right]\right\}. \end{aligned} \tag{85}$$

且

$$E\left\{\exp\left[j\left(\Phi_m-\Phi_n\right)\right]\right\} = \begin{cases} E\left[e^{j0}\right] = 1, & m = n \\ E\left[e^{j\Phi_m}\right] E\left[e^{-j\Phi_n}\right] = 0, & m \neq n \end{cases}. \tag{86}$$

所以

$$R_V\langle\tau\rangle = \exp(j\omega_0\tau)\sum_{n=1}^{N} E\left[A_n^2\right]. \tag{87}$$

目录

在本书中，我们还可能会用到随机过程积分和微分的特性，下面给出它们的定义和一些基本性质。

过程 $\{X(t)\}$ 的可微性

随机过程 $\{X(t)\}$ 的可微性定义如下：随机过程 $\{X(t)\}$ 在时刻 t 处满足下述关系：

$$\lim_{T\to 0} E\left\{\left[\frac{x(t+T)-x(t)}{T}-x'(t)\right]^2\right\}=0, \tag{88}$$

则称在 t 时刻 $\{X(t)\}$ 可微，$\{X'(t)\}$ 为其导数。

$\{X'(t)\}$ 具有如下的数字特征

$$E\{X'(t)\} = m'_X(t). \tag{89}$$

$$R_{X'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \tag{90}$$

$$E\{X'(t)\} = 0. \tag{91}$$

$$R_X(t_1, t_2) = R_{X'}(\tau) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T^2} R_{X_T}(\tau), \tag{92}$$

其中 $R_{X_T}(\tau) = 2R_X(\tau) - R_X(\tau - T) - R_X(\tau + T)$。

将上式中的 $R_X(\tau - T)$ 及 $R_X(\tau + T)$ 按泰勒级数展开，忽略三次以上的微分项，可得 $R_{X'}(\tau) = -R''_X(\tau)$.

随机过程 $\{X(t)\}$ 的 n 阶导数 $\{X^{(n)}(t)\}$(假定每一步都必须满足均方可微), 根据均方可微的规则，可以推得

$$R_X^{(n)}(t_1, t_2) = \frac{\partial^{2n} R_X(t_1, t_2)}{\partial t_1^{(n)} \partial t_2^{(n)}}. \tag{93}$$

若 $\{X(t)\}$ 为平稳随机过程，那么 $R_{X^{(n)}}(\tau) = (-1)^n R_X^{2n}(\tau)$.

随机过程的均方积分定义：已知随机过程 $\{X(t)\}$ 且

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k')(t_k - t_{k-1}). \tag{94}$$

其中 $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ 是在 $[a, b]$ 内划分的小区间, $t_{k-1} < t_k' < t_k$.

均方积分

如果存在随机过程的样本函数的定积分 $\int_a^b x(t)dt$ 满足

$$\lim_{\substack{\Delta i_k \to 0 \\ n \to +\infty}} E\left\{\left[\sum_{k=1}^{n} x\left(t_k'\right)\Delta t_k - \int_a^b x(t)dt\right]^2\right\} = 0. \qquad (95)$$

那么 $\int_a^b x(t)dt$ 记为随机过程 $\{X(t)\}$ 在 $[a, b]$ 区间内的均方积分.

由于在信号统计分析中，经常涉及随机过程通过线性时变系统以后的有关统计性质，因此，有必要研究 $\{X(t)\}$ 通过冲击响应为 $h(t, t')$ 的线性系统输出的统计特性这时，将涉及随机积分 $\int_a^b h(t, v)x(v)dv$.

随机序列均方差下的随机积分

同样，首先定义

$$y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} h\left(t, v_k\right) x\left(v_k'\right)\left(v_k - v_{k-1}\right), \tag{96}$$

式中，$\Delta v_k = v_k - v_{k-1}, v_{k-1} < v_k' < v_k$，$\lim_{\Delta v_k \to 0} \left| y_n(t) - \int_a^b h(t,v)x(v)dv \right|^2 = 0$，则 $\int_a^b h(t,v)x(v)dv$ 是均方差下的随机积分。

目录

高斯随机过程的来源

在信号的统计分析与处理中，最经常遇到的随机过程是高斯随机过程。在一定的条件下，大量统计独立的随机变量 X_i 之和 $Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$; 当 $n \to +\infty$ 时，Z_n 的分布趋于高斯分布。

根据这一定理，由无数微观粒子的不规则运动产生的热噪声、散弹噪声等属于高斯随机过程。

而许多干扰，如云雨杂波，地物杂波等也往往近似为高斯随机过程。在高斯假设的前提下，往往可以得到随机信号分析与处理的解析解。

高斯随机过程的定义如下

在任意时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_n (n = 1, 2, \cdots)$, $\{x(t)\}$ 所形成的 n 维随机变量，其概率密度函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 为高斯分布

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |C_X|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(X - m_X)^{\top} C_X^{-1} (X - m_X)\right]. \tag{97}$$

其中 $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$, $m_X = E\{x\} = [E\{x_1\}, E\{x_2\}, \cdots, E\{x_n\}]^T$, $C_X = E\left\{(X - m_X)(X - m_X)^T\right\}$ 是随机过程 $\{X(t)\}$ 为高斯过程。

高斯随机过程具有以下性质 1

(1) 对于高斯随机过程来说，如果知道了 $E\{X(t)\}$ 及 $C_X(t_1, t_2)$，其中 t_1, t_2 为任意值，随机过程的整个概率特性也就被决定。

高斯随机过程具有以下性质 2

(2) 若高斯随机过程是广义平稳的，那么，它一定是严格平稳的，其输出仍然是高斯随机过程。

高斯随机过程具有以下性质 3

(3) 一个高斯随机过程经过任意线性变换 (如线性相加、线性放大、微分、积分)，其输出仍然是高斯随机过程。

中心极限定理的结果

大量独立的、均匀微小的随机变量之和近似地服从高斯分布。

高斯分布是在实际应用中最常遇到的、最重要的分布。同样, 在电子系统中遇到最多的过程也是高斯过程。

如电路中最常见的电阻热噪声、电子管 (或晶体管) 的散粒噪声, 如大气和宇宙噪声, 以及许多积极干扰、消极干扰 (包括云雨杂波、地物杂波等) 也都可以近似为高斯过程。

另一方面, 只有高斯过程的统计特性最简便, 故常用作噪声的理论模型。

高斯过程将是以后各章中的一个主要研讨对象。

高斯过程的自相关

$$\begin{aligned} C_X(t_i, t_k) &= C_{ik} \\ &= E\left[\left[X(t_i) - m_X(t_i)\right]\left[X(t_k) - m_X(t_i)\right]\right] \\ &= R_X(t_i, t_k) - m_X(t_i)\, m_X(t_k)\,. \end{aligned} \tag{98}$$

从定义式中可看出，高斯过程的 n 维分布完全由均值矢量 $\mathbf{M}_X$ 与协方差矩阵 $\mathbf{C}$ 所确定，且有关时间 $(t_1, \cdots, t_n)$ 的因素，全部包含在 $\mathbf{M}_X$ 和 $\mathbf{C}$ 中。

(3) 平稳高斯过程

高斯过程是宽平稳的

若高斯过程 $X(t)$ 的数学期望是常数, 自相关函数只与时间差值 τ 有关, 即满足

$$\begin{cases} m_X(t) = m_X \\ R_X(t_i, t_k) = R_X(\tau_{k-i}) \\ E\left[X^2(t)\right] = R_X(0) < \infty \end{cases}, \quad \tau_{k-i} = t_k - t_i \ . \ i, k = 1, 2, \cdots, n, \cdots \tag{99}$$

则此高斯过程是宽平稳的。

(4) 平稳高斯过程的 n 维特征函数

n 维特征函数

$$Q(u_1, \cdots, u_n; \tau_1, \cdots, \tau_{n-1}) = \exp\left[jm_X \sum_{i=1}^{n} u_i \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C(\tau_{k-i})\, u_i u_k \right].$$

2. 高斯过程的性质

(1) 高斯过程的宽平稳与严平稳等价

证明：在高斯过程 n 维概率密度中，与时间有关的两个参量 $\mathbf{M}_X$ 和 $\mathbf{C}$。因为高斯过程宽平稳，所以其均值矢量 $\mathbf{M}_X = [m_X, m_X, ..., m_X]^T$ 为常数矢量，矩阵 $\mathbf{C}$ 中的每一个元素 C_{ik} 仅取决于时间差 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n-1}$，而与时间的起点无关，即

$$C_u = C(t_i, t_k) = R(\tau_{k-i}) - m_X^2, i; k = 1, 2, \cdots, n \tag{100}$$

因此，宽平稳高斯过程的 n 维概率密度仅仅是时间差的函数。

严平稳的高斯过程

严平稳的高斯过程

$$f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = f_X\big(x_1, x_2, \cdots, x_n; \tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n-1}\big). \tag{101}$$

当高斯过程 $X(t)$ 的 n 维概率密度的取样点 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 在时间轴上作任意 Δt 平移后，由于时间差 $\tau'_{\mu-i} = (t_k + \Delta t) - (t_i + \Delta t) = t_k - t_i = \tau_{k-i}$ 不随时间平移 Δt 变化，

过程 $X(t)$ 的 n 维概率密度也不随时间平移 Δt 变化。据严平稳定义可知，满足上述条件的过程是严平稳的。

(2) 高斯过程不同时刻状态间的互不相关和独立等价

证明: 设高斯过程 $X(t)$ 的 n 个不同时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的状态为 $X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)$。由高斯过程定义可知, 它们都是高斯变量。

当所有状态互不相关时, 协方差矩阵

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2(t_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_X^2(t_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_X^2(t_n) \end{bmatrix}, \text{其中} \tag{102}$$

$$\begin{cases} C_{it} = C_X(t_i, t_k) = E\{[X(t_i) - m_X(t_i)][X(t_k) - m_X]\}. \\ C_n = C_X(t_i, t_i) = E\left\{[X(t_i) - m_X(t_i)]^2\right\} = \sigma_X^2(t_i). \end{cases} \tag{103}$$

代入 n 维概率密度表达式, 并展开

$$
\begin{aligned}
& f_X\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, t_1, t_2, \cdots, t_n\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_X\left(t_1\right)\sigma_X\left(t_2\right)\cdots\sigma_X\left(t_n\right)} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i - m_X\left(t_i\right)\right)^2}{\sigma_X^2\left(t_i\right)}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X\left(t_i\right)} \exp\left[-\frac{\left(x_i - m_X\left(t_i\right)\right)^2}{2\sigma_X^2\left(t_i\right)}\right] \\
&= f_X\left(x_1, t_1\right) f_X\left(x_2; t_2\right)\cdots f_X\left(x_n, t_n\right).
\end{aligned}
\tag{104}
$$

由上式可见, 在 $C_{ik} = 0\,(i \neq k)$ 的条件下, n 维概率密度等于 n 个一维概率密度的乘积, 满足独立的条件。

对高斯过程来说, 不同时刻状态间的互不相关与独立是等价的。

(3) 平稳高斯过程与确定信号之和仍是高斯过程

在通信、雷达等系统中, 从噪声 $X(t)$ 背景中接收、检测有用信号 $s(t)$ 时, 往往需要处理的是噪声与信号叠加在一起的随机信号而噪声 $X(t)$, 常常认为是高斯过程。

证明: 设合成的随机信号 $Y(t) = X(t) + s(t)$。若已知 $f_X(x;t)$ 为噪声 $X(t)$ 的一维概率密度; 因 $s(t)$ 是确定信号, 故其概率密度可表示为 $\delta[s - s(t)]$ 利用独立和的卷积公式, 可得到合成信号 $Y(t)$ 的一维概率密度为

$$f_Y(y;t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x;t)\delta[y - s(t) - x]dx = f_X[y - s(t)]. \quad (105)$$

可见, 当 $f_X(x;t)$ 为高斯分布时, 合成信号的一维分布 $f_X(y;t)$ 服从高斯分布。

同理可得, 合成信号 $Y(t)$ 的二维概率密度

$$f_Y(y_1, y_2; t_1, t_2) = f_X(y_1 - s(t_1), y_2 - s(t_2)). \tag{106}$$

也是服从高斯分布的。

依此类推, 只要用 $y_i - s_i(t)$ 代替 x_i, 就可得到合成信号 $Y(t)$ 的 n 维概率密度, 即合成信号的 n 维分布也是服从高斯分布的。

$$f_Y(y_1, \cdots, y_a, t_1, \cdots, t_n) = f_X(y_1 - s(t_1), \cdots, y_n - s(t_n)). \tag{107}$$

还应指出, 虽然平稳高斯过程与确定信号之和的概率分布仍为高斯分布, 但是, 一般情况下的合成信号不再是平稳过程而平稳高斯过程与随相余弦信号的合成, 虽已不再服从高斯分布, 可却是宽平稳的随机过程。

(4) 若高斯序列矢量 $\{\mathbf{X}(n)\}$ 均方收敛于高斯分布的随机矢量 X

证明：设 k 维高斯序列矢量 $\{\mathbf{X}(n)\} = \begin{pmatrix} \{\mathbf{X}_1(n)\} \\ \{\mathbf{X}X_2(n)\} \\ \vdots \\ \{\mathbf{X}X_k(n)\} \end{pmatrix}_{k\times 1}$ 均方收敛于 k 维随机矢量 $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix}_{k\times 1}$，其中高斯序列矢量 $\{\mathbf{X}(n)\}$ 的每个分量 $\{\mathbf{X}_i(n)\}$ 都是高斯序列，它均方收敛于随机矢量 $\mathbf{X}$ 的分量 $\mathbf{X}_i$。

若 $\{\mathbf{X}(n)\}$ 和 $\mathbf{X}$ 的均值矢量和方差阵分别记为

$$E[\{\mathbf{X}(n)\}] = \begin{bmatrix} m_1(n) \\ m_2(n) \\ \vdots \\ m_k(n) \end{bmatrix} = \mathbf{M}(n), \quad E[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_k \end{bmatrix} = \mathbf{M}. \tag{108}$$

由于高斯序列矢量 $\{\mathbf{X}(n)\}$ 的每个分量 $\{\mathbf{X}_i(n)\}$ 均方收敛于随机矢量 $\mathbf{X}$ 的分量 $\mathbf{X}_i$, 即

$$\lim_{n\to\infty} E\left[|X_i(n) - X_i|^2\right] = 0, \quad i = 1, \cdots, k \tag{109}$$

根据均方连续的推论 2 可知, 随机序列 $\{\mathbf{X}_i(n)\}$ 的数学期望也连续, 即

$$\lim_{n\to\infty} E\left[X_i(n)\right] = E\left[X_i\right], \quad i = 1, \cdots, k \tag{110}$$

则

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} m_i(n) = m_i, \quad i, j = 1, \cdots, k \\ &\lim_{n\to\infty} C_{ij}(n) = C_{ij}. \end{aligned} \tag{111}$$

高斯随机序列矢量 $\{\mathbf{X}(n)\}$ 的均值矢量和方差阵有

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{M}(n) = \mathbf{M}. \\ \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{C}(n) = \mathbf{C}. \end{cases} \tag{112}$$

高斯过程的 k 维特征函数

以 $Q_n(u_1, u_2, \cdots, u_k)$ 和 $Q_X(u_1, u_2, \cdots, u_k)$ 分别代表 $\{\mathbf{X}(n)\}$ 和 $\mathbf{X}$ 的 k 维特征函数, 对照上述两式 (112) 右端, 可得

$$Q_X(u_1, u_2, \cdots, u_k) = \exp\left[j\mathbf{U}^T\mathbf{M} - \frac{1}{2}\mathbf{U}^T\mathbf{C}\mathbf{U}\right], \tag{113}$$

所以, $\mathbf{X}$ 也是 k 维高斯分布的随机矢量。

(5) 均方可微高斯过程的导数是高斯过程

证明: 设高斯过程 $\{X(t)\}, t \in T$ 在 T 上均方可微。在 T 上任取 t_i, 使 $\{t_1+\Delta t, \cdots, t_i+\Delta t, \cdots, t_k+\Delta\} \in T$, 构造随机矢量

$$\left[\frac{X(t_1+\Delta t)-X(t_1)}{\Delta t}, \cdots, \frac{X(t_i+\Delta t)-X(t_i)}{\Delta t}, \right.$$
$$\left. \cdots, \frac{X(t_k+\Delta t)-X(t_t)}{\Delta t}\right]^T$$

上式是 k 维高斯矢量 $[X(t_1), \cdots, X(t_i), \cdots, X(t_k)]^T$ 的线性组合, 所以也是 k 维高斯矢量。

由于高斯过程 $\mathbf{X}(t)$ 均方可微, 故对每个 t 而言, $\frac{X(t_i+\Delta t)-X(t_i)}{\Delta t}$ 均方收敛于 $X'(t_i)\ (i=1,\cdots,k)$.

根据性质 (4), 上式构造的高斯矢量的均方极限 $[X'(t_1), X'(t_2), \cdots, X'(t_k)]^\top$. 也是 k 维高斯随机矢量, 即 $\mathbf{X}'(t)$ 是一个高斯随机过程。

(6) 均方可积高斯过程的积分是高斯过程

高斯过程 $\mathbf{X}(t)$ 的均方积分为

$$Y(t)=\int_a^t X(\lambda)d\lambda, \quad a,t\in T. \qquad (114)$$

证明：对任意的 $t_1, t_2, \cdots, t_k \in T$，使 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $[a, t]$ 区间上的一系列采样点，即 $a = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < t_3 (j = 1, \cdots, k)$。

构造一个线性组合，令

$$\sum_{i=0}^{m_j} X(\lambda_i) \Delta\lambda_i = Y(n_j), \quad j = 1, \cdots, k \tag{115}$$

由于 $\mathbf{X}(t)$ 是高斯过程、$\mathbf{X}(\lambda_i)$ 是高斯变量，因此 $\mathbf{X}(\lambda_i)$ 的线性组合 $\{Y(n_j)\}$ 也是高斯变量，而 $\{Y(n_j)\}, n_j = 0, 1, 2, \cdots$ 为高斯序列。

所以, $[\{Y(n_1)\},\{Y(n_2)\},\cdots,\{Y(n_k)\}]^T$ 所组成的随机矢量是 k 维高斯序列矢量。

据随机过程积分的定义, 由于 $\mathbf{X}(t)$ 在 T 上均方可积, 故对每个 t_j 而言, 有

$$\mathrm{l}\cdot\mathrm{i}\cdot\mathrm{m}Y(n_j)=1\cdot\mathrm{i}\cdot\mathrm{m}\sum_{nj+0}^{n_j}X(\lambda_i)\Delta\lambda_i=\int_a^{u_j}X(\lambda)d\lambda=Y(t_j) \tag{116}$$

即高斯序列 $\{Y(n_j)\}$ 均方收敛于 $Y(t_j)$ $(j=1,\cdots,k)$.

由性质 (4) 可得，高斯序列矢量 $[\{Y(n_1)\},\{Y(n_2)\},\cdots,\{Y(n_k)\}]^T$ 的均方极限 $[Y(t_1),Y(t_2),\cdots,Y(t_k)]^T$ 也是 k 维高斯矢量，即 $\mathbf{Y}(t)$ 为高斯过程。

同理，可以证明在确定区间 $[a,b]$ 上，高斯过程 $\mathbf{X}(t)$ 与权函数 $h(\lambda,t)$ (它是 λ, t 的连续函数) 乘积的积分

$$Y(t)=\int_a^b X(\lambda)h(\lambda,t)d\lambda \tag{117}$$

仍为高斯过程。这样，若高斯过程 $\mathbf{X}(t)$ 在 $-\infty<t<\infty$ 上均方可积，则

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda)h(\lambda,t)d\lambda \tag{118}$$

例 .1

已知平稳高斯过程 $\mathbf{X}(t)$ 的均值为零，它的自相关函数 $R_X(\tau)=\frac{1}{4}\exp(-2|\tau|)$。求在 t_1 时刻，$\mathbf{X}(t_1)$ 取值在 0.5 与 1 之间的概率。

解：高斯过程 $\mathbf{X}(t)$ 在 t_1 时刻的状态为高斯变量 $\mathbf{X}(t_1)$，其均值 $m_x=0$，均方值 $R_X(0)=1/4$，方差 $\sigma_X^2=R_X(0)-m_X^2=1/4$。则

$$
\begin{aligned}
P\left\{0.5\leqslant X\left(t_1\right)\leqslant 1\right\}&=P\left\{\sigma_X\leqslant X\left(t_1\right)\leqslant 2\sigma_X\right\}\\
&=\Phi\left(\frac{2\sigma_X-m_X}{\sigma_X}\right)-\Phi\left(\frac{\sigma_X-m_X}{\sigma_X}\right)\\
&=\Phi(2)-\Phi(1)=0.1359. \qquad (119)
\end{aligned}
$$

例 .2

已知随机过程 $\mathbf{X}(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$，其中 A 与 B 是相互独立的高斯变量，且 $E[A] = E[B] = 0, E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2$，$\omega_0$ 为常数。求此随机过程 $\mathbf{X}(t)$ 的一维和二维概率密度。

分析

在任意时刻 t 对过程 $\mathbf{X}(t)$ 进行采样，由于它是高斯变量 A 与 B 的线性组合，故 $\mathbf{X}(t)$ 也是个高斯变量。从而可知，$\mathbf{X}(t)$ 是一高斯过程。

为确定高斯过程 $\mathbf{X}(t)$ 的概率密度，只要求出 $\mathbf{X}(t)$ 的均值和协方差函数即可。

可求得 $\mathbf{X}(t)$ 的均方值和方差为

$$
\begin{aligned}
E[X(t)] &= E\left[A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\right] \\
&= E[A]\cos\omega_0 t + E[B]\sin\omega_0 t = 0. \\
R_X(t, t+\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] \\
&= E\left[(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t)\left(A\cos\omega_0(t+\tau)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + B\sin\omega_0(t+\tau)\right)\right] \\
&= E\left[A^2\right]\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) \\
&\qquad + E[B]^2\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau) \\
&\qquad + E[AB]\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau) \\
&\qquad + E[AB]\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau).
\end{aligned}
\tag{120}
$$

因 A 与 B 独立, 有 $E[AB] = E[A]E[B] = 0$, 则

$$\begin{aligned} R_X(t, t+\tau) &= E\left[A^2\right] \cos\omega_0 t \cos\omega_0 (t+\tau) \\ &\quad + E\left[B^2\right] \sin\omega_0 t \sin\omega_0 (t+\tau) \\ &= \sigma^2 \cos\omega_0 \tau = R_X(\tau). \end{aligned} \tag{121}$$

可求得 $\mathbf{X}(t)$ 的均方值和方差为

$$\psi_X^2 = R_X(0) = \sigma^2 < \infty, \quad \sigma_X^2 = R_X(0) - m_X^2 = \sigma^2. \tag{122}$$

由上可知, 高斯过程 $\mathbf{X}(t)$ 为平稳过程, 其一维概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \tag{123}$$

其二维均值矢量和协方差矩阵为

$$\mathsf{M}_\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{C} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2 \cos\omega_0\tau \\ \sigma^2 \cos\omega_0\tau & \sigma^2 \end{pmatrix}, \tag{124}$$

则其二维概率密度为

$$f_\mathsf{X}(x_1, x_2, \tau) = \frac{\exp\left(-\frac{x_1^2 - 2x_1x_2\cos\omega_0\tau + x_2^2}{2\sigma^2(1-\cos^2\omega_0\tau)}\right)}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\cos^2\omega_0\tau}}. \tag{125}$$

目录

研究随机过程的统计特性, 从理论上说需要知道过程的 n 维概率密度或 n 维分布函数, 或者要知道所有样本函数.

这一点在实际问题中往往办不到, 因为这需要对一个过程进行大量重复的实验或观察, 甚至要求实验次数 $N \to \infty$ 才能达到需要。因而, 促使人们提出这样一个问题, 能否用在一段时间范围内观察到的一个样本函数作为提取整个过程数字特征的充分依据?

遍历过程

俄国概率学家的辛钦证明: 当具备一定的补充条件时, 有一种平稳随机过程, 对其任一个样本函数所作的各种时间平均, 从概率意义上趋近于此过程的各种统计平均对具有这一特性的随机过程, 称之为具有各态历经性的随机过程 (或遍历过程)。

字面理解

这类过程的各个样本函数都同样地经历了整个过程的所有可能状态。

因此，这类随机过程的任何一个样本函数中含有整个过程的全部统计信息，即可以用它的任何一个样本函数的时间平均来代替它的统计平均。

例 .1

例如，在较长时间 T 内观测一个二极管工作在稳定状态下的噪声输出电压。欲求时间平均，从理论上本应该

$$\overline{x_k(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T x_k(t)dt \tag{126}$$

如图 3 所示，由于 $x_k(t)$ 是噪声电压，所以写不出样本函数 $x_k(t)$ 的表达式。

因此，只有对 $x_k(t)$ 进行采样。将 T 分成 n 等份 (这个 n 应相当大)，对在 T 时间内采得的 n 个电压值 $x_1, \cdots, x_n$ 进行算术平均

$$\overline{x'_k(t)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \approx \overline{x_k(t)}. \tag{127}$$

以算术平均 $\overline{x_k'(t)}$ 来近似时间平均 $\overline{x_k(t)}$.

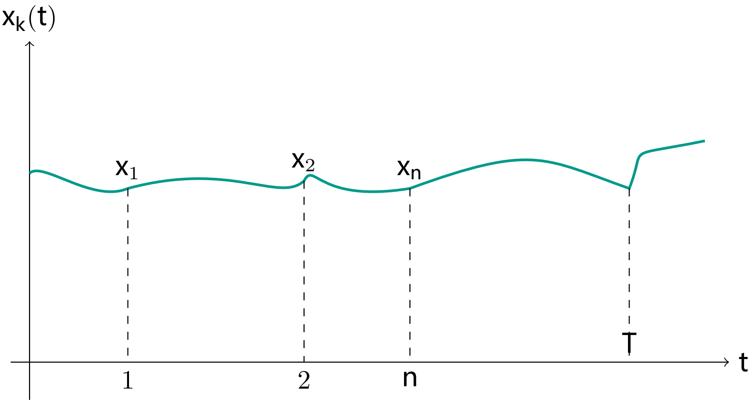

图 3: 噪声电压

在工作条件不变的情况下, 假如对同一个工作在稳定状态下的噪声二极管进行 n 次独立重复的试验, 取出它的 n 条样本函数, 如图 4 所示, 并对任一时刻 t' 的状态 $\mathbf{X}(t')$ 的所有取值进行统计平均

$$E[X(t')] = \sum_{j=1}^{n} x_j' P\left\{X(t') = x_j'\right\} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j'. \tag{128}$$

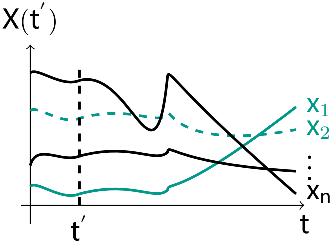

图 4: n 条样本函数

均值各态历经性

如果 T 取得相当长，这些样本函数可以看成是从 $x_k(t)$ 上一段段截取下来的，又由于工作在稳定状态下，可以把它看成是平稳的，所以其特性与起点无关。

只要 n 取得相当大，就找不出任何理由说，前一种方法得到的时间平均 $x(t)$ 与后一方法得到的统计平均值 $E[X(t')]$ 有什么差别？也就是说，当 $T \to \infty, n \to \infty$ 时，在概率意义下，下式成立

$$P\left\{E[X(t)] = \overline{x_k(t)}\right\} = 1. \tag{129}$$

噪声电压在时间上的平均值与它的统计平均值相等，这就是所谓的均值各态历经性。

1. 严各态历经过程

如果一个平稳随机过程 $\mathbf{X}(t)$, 它的各种时间平均 (时间足够长) 以概率 1 收敛于相应的统计平均, 即

$$P\{\lim_{n\to\infty} \text{各种时间平均} = \text{相应的统计平均}\} = 1. \tag{130}$$

n 是样本数，则称过程 $\mathbf{X}(t)$ 具有严格的各态历经性, 或称此过程为严 (或狭义) 各态历经过程。

如同在前面讨论随机过程的平稳性时曾经指出的理由一样, 工程上往往只在相关理论的范围内考虑各态历经过程, 称之为宽 (或广义) 各态历经过程。

2. 宽各态历经过程

随机过程的时间平均概念

一般来说, 若对一个确定的时间函数 $\mathbf{X}(t)$, 求时间均值, 即

$$\overline{X(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)dt = m. \tag{131}$$

随机过程 $X(t)$ 的时间平均

但由于随机过程 $X(\zeta,t)$ 是随时间变化的随机变量, 对不同的试验结果 $\zeta_k \in \Omega$, 有不同的确定时间函数 $x_k(t)$ 与其对应。

对不同的试验结果 $\zeta_k \in \Omega$, 过程 $X(\zeta, t)$ 求时间均值

$$\begin{aligned} \overline{X(t)} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(\zeta, t)dt = M(\zeta), \end{aligned} \tag{132}$$

则 $M(\zeta)$ 是个随机变量, 对每一个试验结果 $\zeta_k \in \Omega$, 都有一个确定值 m_k 与其对应。其中符号 $\overline{(\cdot)}$ 表示求时间平均。

(2) 时间自相关

确定函数 X(t) 的时间自相关

若对确定函数 X(t) 求时间自相关, 则

$$\overline{X(t)X(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)x(t+\tau)dt = f(\tau), \qquad (133)$$

其结果 $f(\tau)$ 是个确定的时间函数。

随机过程 X(t) 求时间自相关

$$\overline{X(t)X(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)X(t+\tau)dt. \qquad (134)$$

化简得

$$\overline{X(t)X(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(\zeta,t)X(\zeta,t+\tau)dt \\ = f(\zeta,\tau). \tag{135}$$

由于 $f(\zeta,\tau)$ 对每一个试验结果 $\zeta_i \in \Omega$ 而言，都有一个确定的时间函数 $f_i(\tau)$ 与其对应，所以，随机过程的时间自相关函数一般是个随机过程。

(3) 宽各态历经的定义

定义 .2 均值的各态历经性

设 $\mathbf{X}(t)$ 是一个平稳随机过程, 如果

$$\overline{X(t)} = E[X(t)] = m_X \tag{136}$$

以概率 1 成立, 则称随机过程 $X(t)$ 的均值具有各态历经性.

定义 .3 自相关函数的各态历经性

如果

$$\overline{X(t)X(t+\tau)} = E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau). \tag{137}$$

以概率 1 成立, 则称过程 X(t) 的自相关函数具有各态历经性.

过程 X(t) 均方值的各态历经性

若 $\overline{X(t)X(t+\tau)}$ 在 $\tau = 0$ 时, 上式成立, 则称过程 X(t) 的均方值具有各态历经性。

定义 .4 事件独立

如果过程 $X(t)$ 的均值和自相关函数都具有各态历经性, 则称 $X(t)$ 为宽 (或广义) 各态历经过程。

今后, 凡提到“各态历经”一词时, 除非特别指出, 否则皆指宽各态历经过程。

3. 各态历经性的实际意义

(1) 随机过程的各态历经性具有重要的实际意义

对一般随机过程而言，其时间平均是个随机变量。可是，对各态历经过程来说，由上述定义时间平均，得到的结果趋于一个非随机的确定量，见式 (136) 由式(129) 和式 (136) 可得

$$P\left\{\overline{X(t)} = \overline{x_k(t)}\right\} = 1. \tag{138}$$

即

$$\overline{X(t,\zeta)} \overset{a.\ e.}{=\!=} \overline{x_k(t)}. \tag{139}$$

上式表明: 各态历经过程诸样本函数的时间平均，实际上可认为是相同的。因此，各态历经过程的时间平均就可由它的任一样本函数的时间平均来表示。

对各态历经过程可以直接用它的任一个样本函数的时间平均来代替对整个过程统计平均的研究，故有

$$E[X(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt. \tag{140}$$

$$R_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt. \tag{141}$$

举例

实际上，这也正是引出各态历经性概念的重要目的，从而给解决许多工程问题带来极大的方便。例如，测得接收机的噪声，用一般的方法，就需要用数量极多的相同的接收机，在同一条件下同时进行测量和记录，用统计方法算出所需的数学期望、相关函数等数字特征;

利用噪声过程的各态历经性则可以只用一部接收机，在不变的条件下，对其输出噪声作长时间的记录，后用求时间平均的方法，即可求出数学期望、相关函数等数字特征，这就使得工作大大地简化。

当然，在实际工作中，由于对随机过程的观察时间总是有限的，因此，用有限的时间代替无限长的时间，会给结果带来一定的误差，然而，只要所取时间足够长，结果定能满足实际要求。

(2) 噪声电压 (或电流) 各态历经过程 $X(t)$ 的物理意义

电子技术中, 代表噪声电压 (或电流) 的各态历经过程 $X(t)$, ① 数学期望代表噪声电压 (或电流) 的直流分量 $\overline{X(t)} = E[X(t)] = m_X$. ② 均方值代表噪声电压 (或电流) 消耗在 1 欧姆电阻上的总平均功率。
令 $\tau = 0$, 则自相关函数有

$$\begin{aligned} R_X(0) &= \lim \frac{1}{2T}\int_{T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt\Big|_{\tau=0} \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt. \end{aligned} \tag{142}$$

可见, $R_X(0)$ 代表噪声电压 (或电流) 消耗在 1 Ω 电阻上的总平均功率。

噪声电压 (或电流) 的交流平均功率

③ 方差代表噪声电压 (或电流) 消耗在 1 电阻上的交流平均功率。

$$\sigma_X^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [x(t) - m_X]^2 \, dt, \tag{143}$$

σ_X^2 代表噪声电压 (或电流) 消耗在 1Ω 电阻上的交流平均功率。标准差 σ_X 则代表噪声电压 (或电流) 的有效值。

例 .2

设随机过程 $X(t) = a\cos(\omega_0 t + \Phi)$, 式中 a, ω_0 皆为常数, 是服从 $(0, 2)$ 上均匀分布的随机变量。判断 $X(t)$ 是否宽各态历经, 给出理由。

解: 由于

$$
\begin{aligned}
\overline{X(t)} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a\cos(\omega_0 t + \Phi)\,dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{a\cos\Phi\sin\omega_0 T}{\omega_0 T} = 0. \\
\overline{X(t)X(t+\tau)} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a\cos(\omega_0 t + \Phi) \\
&\qquad \cdot a\cos[\omega_0(t+\tau) + \Phi]\,dt \\
&= \frac{a^2}{2}\cos\omega_0 t.
\end{aligned}
\tag{144}
$$

由例 2.4 的结果, 可得

$$\begin{aligned} \overline{X(t)} &= E[X(t)] = 0. \\ \overline{X(t)X(t+\tau)} &= E[X(t)X(t+\tau)] \\ &= \frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau. \end{aligned} \tag{145}$$

所以, 过程 $X(t)$ 具有宽各态历经性。

例 .3

随机过程 $X(t)=Y$, 其中 Y 是方差不为零的随机变量。讨论过程的各态历经性。

解: 由例 2.5 可知

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E[Y] = \text{常数}. \\ E[X(t)X(t+\tau)] &= E\left[Y^2\right] = \text{常数}. \end{aligned} \tag{146}$$

故过程 $X(t)$ 为宽平稳的。然而, 因

$$\overline{X(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} Y dt = Y. \tag{147}$$

可见, $X(t)$ 的时间均值是个随机变量 Y, 时间均值随 Y 的取值不同而变化, $Y=\overline{X(t)} \neq E[X(t)]$. 所以, $X(t)$ 不是宽各态历经过程。此例表明: 平稳过程不一定具有各态历经性。

4. 随机过程具备各态历经性的条件

(1) 各态历经过程一定是平稳过程
各态历经过程一定是平稳随机过程, 但平稳随机过程并不一定具备各态历经性。

说明

由均值各态历经定义可知, 时间均值必定是个与时间无关的常数; 由时间自相关各态历经的定义可知, 时间自相关函数必定只是时间差 τ 的单值函数。

等价说法

这就是说, 因为各态历经过程的数学期望是个常数, 其相关函数仅是 τ 的单值函数, 所以, 它必定是个平稳随机过程。但平稳过程不一定具有各态历经性, 如例 **2.16** 所示情况。

平稳随机过程的均值具有各态历经性的充要条件

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left[R_X(\tau)-m_X^2\right]d\tau=0. \tag{148}$$

(3) 自相关函数 $R_X(\tau)$ 的各态历经性定理

平稳随机过程自相关函数具有各态历经性的充要条件为

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left[R_\Phi(\tau)-E^2[\Phi(t)]\right]dz=0, \tag{149}$$

式子中

$$\begin{aligned}\Phi(t)&=X(t+\tau_1)X(t).\\ R_\Phi(\tau)&=E[\Phi(t+\tau)\Phi(t)].\\ E[\Phi(t)]&=E[X(t+\tau_1)X(t)]=R_X(\tau_1).\end{aligned} \tag{150}$$

(4) 平稳高斯过程的各态历经性定理

平稳高斯过程 Φ 具有各态历经性的充分条件为

$$\int_0^{\infty} |R_X(\tau)|\,d\tau < \infty, \tag{151}$$

上式在平稳高斯过程的均值为零, 自相关函数 $R_X(\tau)$ 连续的条件下, 可以证明。

在实际应用中, 要想从理论上确切地证明一个平稳过程是否满足这些条件, 并非易事。事实上, 由于同一随机过程中各样本都出于同一随机因素, 因而各样本函数都具有相同的概率分布特性, 可以认为所遇到的大多数平稳过程都具有各态历经性。

常凭经验把各态历经性作为一种假设，然后，再根据实验来检验此假设是否合理。

例 .4

已知随机电报信号 $X(t)$ 的均值和相关函数分别为 $E[X(t)] = 0$ 和 $R_X(\tau) = e^{-a|\tau|}$，判断 $X(t)$ 是否均值各态历经，给出理由。

由均值的各态历经性定理

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left[e^{-\alpha|\tau|}-0^2\right]d\tau=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}e^{-a\tau}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)d\tau$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{aT}-\frac{1-e^{-2aT}}{2a^2T^2}\right]=0.$$

因此, X(t) 的均值具有各态历经性。

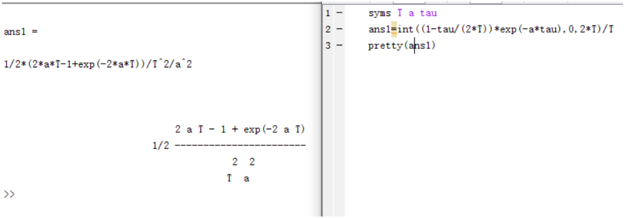

图 5: 各态历经中积分的计算