随机信号分析

随机信号的时域分析

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

November 17, 2020

目录

第二次教案下载二维码

Github 下载

第 2 章 随机信号的时域分析

智慧树课堂二维码和项目地址

图 1: 《随机信号分析》课程号:k213654

Github 项目地址

下载地址：
https://github.com/zggl/random-signal-processing2020-autumn

目录

信号的解析形式

谱信号的特征

我们知道, 实信号频谱的数学模型是含有正负频率的双边谱.

单边谱信号

然而在实际应用中, 其负频率 $(\omega < 0)$ 是物理不可实现的。由于实信号的双边谱是关于 0 上的竖轴偶对称。

因此, 采用其单边谱的信号形式, 既可简化对问题的分析, 又可恢复原信号。下面对只含正频域部分的信号—单边谱信号进行讨论。

(1) 单边谱信号在时域是复信号

设单边谱信号的傅里叶变换为

$$f(t) \underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftharpoons}} F(\omega),\ \omega > 0 \tag{1}$$

由于

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{2}$$

则

$$f^*(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} F^*(\omega)e^{-j\omega t}d\omega \tag{3}$$

因为 $f^*(t) \neq f(t)$, 所以单边谱信号在时域是个复信号。

(2) 从实信号中分解出单边谱信号

设 $s(t)$ 为具有连续频谱的实信号

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega, \tag{4}$$

式中 $S(\omega)$ 为信号 $s(t)$ 的频谱。

由傅里叶变换可以证明, 当 $s^*(t) = s(t)$ 时, 有

$$S^*(\omega) = S(-\omega) \tag{5}$$

所以实信号 $s(t)$ 的频谱 $S(\omega)$ 是 ω 的复函数。

若将 $S(\omega)$ 傅里叶逆变换分解成正负两频域部分积分之和

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} S(\omega)e^{jax}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
&\xlongequal{\omega'=-\omega} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right] + \left[\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} S\left(-\omega'\right)e^{-j\omega t}d\omega'\right] \\
&= \left[\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right] + \left[\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} S\left(\omega'\right)e^{j\omega t}d\omega'\right]^{*} \\
&= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} 2S(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right] \\
&= \mathrm{Re}[\tilde{s}(t)].
\end{aligned}
\tag{6}
$$

单边信号 $\tilde{s}(t)$ 的表达式

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} 2S(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{7}$$

$\tilde{s}(t)$ 被称为实信号 $s(t)$ 的解析信号，或 $s(t)$ 的预包络。

$\tilde{s}(t)$ 还具有如下的单边频谱 $\widetilde{S}(\omega)$

$$\begin{aligned}\widetilde{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} 2S(\omega)e^{j\omega t}d\omega\, e^{-j\omega t}dt \\ &= 2\int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega\ e^{-j\omega t}dt \\ &= 2\int_0^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt.\end{aligned} \tag{8}$$

单边频谱

$$\tilde{S}(\omega) = 2S(\omega)U(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}, U(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}$$

实信号 s(t) 的解析形式

实信号 s(t) 可用一个仅含其正频率成分的解析信号的实部来表示，即 $s(t) = \mathrm{Re}[\tilde{s}(t)]$。

2. 解析信号的表示方法

单边谱信号在时域是个复信号，实信号 s(t) 的解析信号可以表示为

$$\tilde{s}(t) = \mathrm{Re}[\tilde{s}(t)] + j\,\mathrm{Im}[\tilde{s}(t)] \tag{9}$$

由 $\mathrm{Re}[\tilde{s}(t)] = s(t)$, 再令单边信号的虚部记为 $\hat{s}(t)$

$$\mathrm{Im}[\tilde{s}(t)] = \hat{s}(t). \tag{10}$$

即解析信号 $s(t)$ 的虚部用符号 $\hat{s}(t)$ 表示, 则

$$\tilde{s}(t) = s(t) + j\hat{s}(t). \tag{11}$$

上式是解析信号 $s(t)$ 的一般表达式。

虚部 $\hat{s}(t)$ 的求取

式中的虚部 $\hat{s}(t)$ 又如何求得呢?

频域表达

从频域关系出发，解析信号 $\tilde{s}(t)$ 的频谱 $\tilde{S}(\omega)$ 满足 $\tilde{S}(\omega) = 2S(\omega)U(\omega)$。

已知的傅里叶逆变换

$$U(\omega) \underset{F}{\overset{F^{-1}}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{2}\left[\delta(t) - \frac{1}{j\pi t}\right]. \tag{12}$$

(12)中复函数的计算基础

$$\oint_{|z|<0.2} \frac{1}{j\pi z} e^{-j\omega z} dz = \frac{1}{j\pi} \oint_{|z|<0.2} \frac{1}{z} e^{-j\omega z} dz = \frac{2j\pi}{j\pi} = 2. \tag{13}$$

解析信号的时域表达

$$\tilde{s}(t) = s(t) * \left[\delta(t) - \frac{1}{j\pi t}\right] = s(t) + j\left[s(t) * \frac{1}{\pi t}\right]. \tag{14}$$

实信号 s(t) 的希尔伯特 (Hilbert) 变换

实信号 s(t) 单边谱的虚部

$$\begin{aligned}\hat{s}(t) &= s(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t-\tau)}{\tau} d\tau.\end{aligned} \tag{15}$$

上式称为实信号 s(t) 的希尔伯特 (Hilbert) 变换，记作 $\hat{s}(t) = H[s(t)]$。

结论

对于任何一个实信号 $s(t)$, 都可以分解出一个单边谱的解析信号 $\tilde{s}(t)$ 与其对应。

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} 2S(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{16}$$

解析信号 $\tilde{s}(t)$ 是个复信号, 其实部为原信号 $s(t)$, 虚部为原信号 $s(t)$ 的希尔伯特变换 $\hat{s}(t)$。

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}[\tilde{s}(t)] = \hat{s}(t) &= s(t) * \frac{1}{\pi t} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(t-\tau)}{\tau}d\tau.\end{aligned} \tag{17}$$

解析信号的作用

解析信号是最常用的复信号之一, 它在分析窄带随机信号中起着重要作用.

希尔伯特变换的作用

希尔伯特变换是应用解析信号, 分析系统时必不可少的数学工具.

复信号的解析形式表示

用解析形式表示复信号的方法称为希尔伯特表示法。

希尔伯特变换的几个重要性质

1. 希尔伯特变换相当于一个正交滤波器

希尔伯特变换是 $s(t)$ 和 $1/\pi t$ 的卷积, 根据线性系统的输出特征, 可以将 $\hat{s}(t)$ 看成是 $s(t)$ 通过一个具有冲激响应为的线性滤波器, 如图 2 所示。

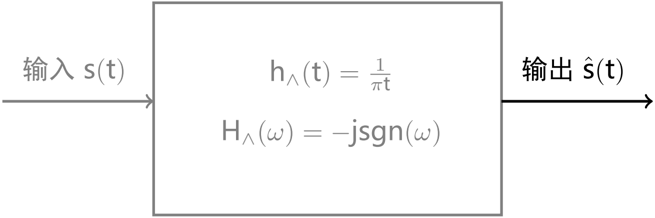


图 2: 希尔伯特变换

$\mathrm{j}\frac{1}{\pi t}$ 和 $\mathrm{sgn}(\omega)$ 的傅里叶变换关系

$$\mathrm{j}\frac{1}{\pi t} \underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftharpoons}} \mathrm{sgn}(\omega), \tag{18}$$

式中 sgn(a) 为符号函数。

满足的条件

$$\mathrm{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > 0 \\ -1, & \omega < 0 \end{cases} \tag{19}$$

$$\frac{1}{\pi t} \underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftharpoons}} -\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(\omega). \tag{20}$$

线性滤波器的传递函数

线性滤波器的传递函数 (频率响应) 为

$$\mathrm{H}_{\wedge}(\omega) = -\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(\omega). \tag{21}$$

线性滤波器的幅频特性

$$|\mathrm{H}_{\wedge}(\omega)| = 1, \tag{22}$$

线性滤波器的相频特性

$$\theta_{\mathrm{H}_{\wedge}(\omega)} = \begin{cases} -\pi/2, & \omega > 0 \\ +\pi/2, & \omega < 0 \end{cases}. \tag{23}$$

滤波器输出信号 $\hat{s}(t)$ 相应的频谱

$$
\begin{aligned}
S(\omega) &= H_\Lambda(\omega)S(\omega) = -j\mathrm{sgn}(\omega)S(\omega) \\
&= \begin{cases} -jS(\omega), & \omega > 0 \\ jS(\omega), & \omega < 0 \end{cases} .
\end{aligned} \tag{24}
$$

由式 (24) 可见, 通过此滤波器的信号, 其所有频率分量的幅度响应为常值 1.

希尔伯特变换是一个正交滤波器

而在相位上, 所有正频率分量移相 $-\pi/2$, 所有负频率分量移相 $+\pi/2$。因此说, 希尔伯特变换是一种正交变换, 它的作用相当于一个正交滤波器, 如图 26 中所示的一次变换。

2. 两次希尔伯特变换相当于一个倒相器

若对 s(t) 进行两次希尔伯特变换，则相当于信号 s(t) 通过两个级联的 hA(t) 网络。即

$$\hat{\hat{s}}(t) = H\{H[s(t)]\} = H[\hat{s}(t)] = \hat{s}(t) * \frac{1}{\pi t} = s(t) * \frac{1}{\pi t} * \frac{1}{\pi t} \tag{25}$$

$$\hat{\hat{S}}(\omega) = \hat{S}(\omega)[-j\text{sgn}(\omega)] = S(\omega)[-j\text{sgn}(\omega)][-j\text{sgn}(\omega)] = -S(\omega) \tag{26}$$

$\hat{\hat{s}}(t)$ 和 s(t) 的时域关系

$$\hat{\hat{s}}(t) = H\{H[s(t)]\} = H[\hat{s}(t)] = -s(t) \tag{27}$$

如图 26 所示，两次希尔伯特变换将信号 s(t) 翻转了 $180°$。

3. 希尔伯特逆变换等于负的希尔伯特正变换

定义希尔伯特逆变换为

$$s(t) = H^{-1}[\hat{s}(t)]. \tag{28}$$

由式 (27) 可得

$$H[\hat{s}(t)] = -s(t) \Rightarrow s(t) = -H[\hat{s}(t)]. \tag{29}$$

对比式 (28) 和式 (29) 可知

$$s(t) = -H[\hat{s}(t)]. \tag{30}$$

希尔伯特逆变换等于负的希尔伯特正变换

$$\mathrm{H}^{-1}[\cdot] = -\mathrm{H}[\cdot]. \tag{31}$$

希尔伯特逆变换的公式

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathrm{H}^{-1}[\hat{s}(t)] = -\mathrm{H}[\hat{s}(t)] \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{s}(t-\tau)}{\tau} dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{s}(t+\tau)}{\tau} d\tau. \end{aligned} \tag{32}$$

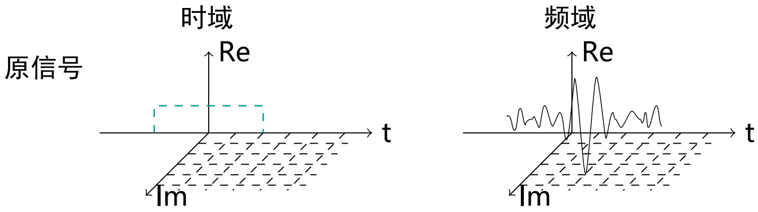
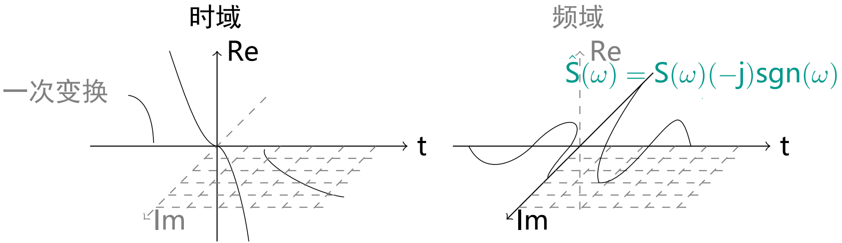
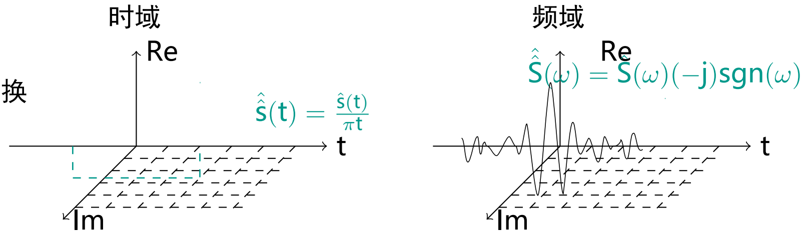


图 3: 希尔伯特变换 (子图 1-1,1-2)



希尔伯特变换 (子图 2-1,2-2)

二次变换



希尔伯特变换 (子图 3-1,3-2)

例 .1

求 $\cos\Omega t, \sin\Omega t$ 的希尔伯特变换。

解:

①

$$H[\cos\Omega t] = \cos\Omega t * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos[\Omega(t-\tau)]}{\tau}d\tau. \tag{33}$$

举例

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}[\cos\Omega t] &= \cos\Omega t * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos[\omega(t-\tau)]}{\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\tau}\cos\Omega\cos\Omega\tau + \frac{1}{\tau}\sin\Omega t\sin\Omega\tau\right]\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\cos\Omega t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\Omega\tau}{\tau}\mathrm{d}\tau\right. \\
&\qquad \left. + \sin\Omega t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\Omega\tau}{\tau}\mathrm{d}\tau\right].
\end{aligned} \tag{34}
$$

由于 $\frac{\cos\Omega\tau}{\tau}$ 是 τ 的奇函数, 所以第一项积分为 0, 而 $\frac{\sin\Omega\tau}{\tau}$ 是 τ 的偶函数, 所以

$$\mathrm{H}[\cos\Omega t] = \frac{2}{\pi}\sin\Omega t\int_0^\infty \frac{\sin\Omega\tau}{\tau}d\tau. \tag{35}$$

其中

$$\int_0^\infty \frac{\sin\Omega\tau}{\tau}d\tau = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\Omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \Omega > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \Omega < 0 \end{cases}. \tag{36}$$

所以

$$\mathrm{H}[\cos\Omega t] = \mathrm{sgn}(\Omega)\sin\Omega t = \begin{cases} \sin\Omega t, & \Omega > 0 \\ -\sin\Omega t, & \Omega < 0 \end{cases}. \tag{37}$$

$$H[\cos\Omega t] = \mathrm{sgn}(\Omega)\sin\Omega t = \begin{cases} \sin\Omega t, & \Omega > 0 \\ -\sin\Omega t, & \Omega < 0 \end{cases}. \tag{38}$$

② 对上式两端再求一次 Hilbert 变换

$$H^2[\cos\Omega t] = H\{H[\cos\Omega t]\} = H[\mathrm{sgn}(\Omega)\sin\Omega t] = \mathrm{sgn}(\Omega)H[\sin\Omega t]. \tag{39}$$

利用性质 2 可知, 两次希尔伯特变换相当于倒相器, 则

$$H\{H[\cos\Omega t]\} = -\cos\Omega t. \tag{40}$$

由上述两式综合可得

$$\mathrm{sgn}(\Omega)H[\sin\Omega t] = H\{H[\cos\Omega t]\} = -\cos\Omega t. \tag{41}$$

结论

$$\begin{aligned} H[\sin\Omega t] &= -\mathrm{sgn}(\Omega)\cos\Omega t \\ &= \begin{cases} -\cos\Omega t, & \Omega > 0 \\ \cos\Omega t, & \Omega < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{42}$$

例 .2

设限带信号

$$\begin{cases} s_1(t) = a(t)\cos\omega_0 t \\ s_2(t) = a(t)\sin\omega_0 t \end{cases} \tag{43}$$

其中 a(t) 为低频限带信号, 其频谱为

$$A(\omega), \quad |\omega| < \frac{\Delta\omega}{2} < \omega_0, \tag{44}$$

求 $s_1(t), s_2(t)$ 的 Hilbert 变换。

解: ① 利用傅里叶变换的相乘性质, 有

$$\mathsf{s}_1(\mathsf{t}) = \mathsf{a}(\mathsf{t})\cos\omega_0\mathsf{t} \underset{\mathsf{F}^{-1}}{\overset{\mathsf{F}}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{2\pi}\mathsf{A}(\omega) * \pi\left[\delta\left(\omega-\omega_0\right)+\delta\left(\omega+\omega_0\right)\right]$$
$$\mathsf{S}_1(\omega) = \frac{1}{2}\left[\mathsf{A}\left(\omega-\omega_0\right)+\mathsf{A}\left(\omega+\omega_0\right)\right] \tag{45}$$

如图 4 所示，由于 $\frac{\Delta\omega}{2} < \omega_0$，可得

$$\mathsf{S}_1(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathsf{A}\left(\omega-\omega_0\right), & \omega > 0 \\ \frac{1}{2}\mathsf{A}\left(\omega+\omega_0\right), & \omega < 0 \end{cases} \tag{46}$$

举例

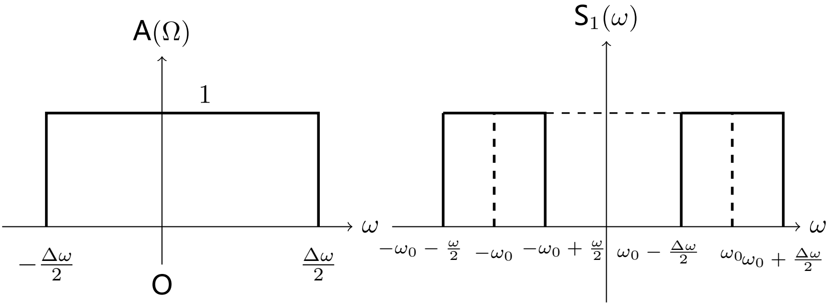

A(Ω)
1
ω
$-\frac{\Delta\omega}{2}$
O
$\frac{\Delta\omega}{2}$
S₁(ω)
ω
$-\omega_0-\frac{\omega}{2}$
$-\omega_0$
$-\omega_0+\frac{\omega}{2}$
$\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}$
ω_0
$\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}$

图 4: 例 6. 2 图

其希尔伯特变换的频谱

$$\hat{S}_1(\omega) = -\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(\omega) S_1(\omega) = \begin{cases} -\frac{\mathrm{j}}{2} A(\omega-\omega_0), & \omega > 0 \\ \frac{\mathrm{j}}{2} A(\omega+\omega_0), & \omega < 0 \end{cases} \tag{47}$$

取 $\hat{S}_1(\omega)$ 的傅里叶逆变换

可得

$$\begin{aligned} \hat{s}_1(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(\omega) S_1(\omega) e^{\mathrm{j}\omega t} d\omega \\ &= -\frac{\mathrm{j}}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} A(\omega-\omega_0) e^{\mathrm{j}at} d\omega\right] + \frac{\mathrm{j}}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} A(\omega+\omega_0) e^{\mathrm{j}\omega t} d\omega\right] \\ &= -\frac{\mathrm{j}}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega-\omega_0) e^{\mathrm{j}\omega t} d\omega\right] + \frac{\mathrm{j}}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega+\omega_0) e^{\mathrm{j}\omega t} d\omega\right]. \end{aligned} \tag{48}$$

利用傅里叶变换的频移性质

$$\begin{aligned}\hat{s}_1(t) &= H\left[a(t)\cos\omega_0 t\right] = -\frac{j}{2}a(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{j}{2}a(t)e^{-j\omega_0 t} \\ &= \frac{j}{2}\left(e^{-j\omega_0 t} - e^{j\omega_0 t}\right)a(t) = a(t)\sin\omega_0 t.\end{aligned} \tag{49}$$

③ 利用 Hilbert 性质二次变换的性质

可得

$$\begin{aligned}\hat{s}_2(t) &= H\left[a(t)\sin\omega_0 t\right] = H\left\{H\left[a(t)\cos\omega_0 t\right]\right\} \\ &= -a(t)\cos\omega_0 t.\end{aligned} \tag{50}$$

目录

1. 频窄带信号

所谓高频窄带信号是指信号的中心频率 ω_0 位于高频段的窄带信号。这类信号的频带 $\Delta\omega$ 远远小于其中心频率 ω_0, 即 $\Delta\omega \ll \omega_0$。

诸如雷达、通信等电子系统中的一些高频信号大多可以近似认为是高频窄带信号。

这类信号的典型频谱如图 5(a) 所示。如果在示波器上观察这类窄带信号，它的波形或多或少地有点像正弦波，如图 5(b) 所示。但它的振幅、相位不是常数，而是随 t 变化的函数这类窄带信号 $s(t)$ 可以表示为

$$s(t) = a(t)\cos\left[\omega_0 t + \varphi(t)\right], \tag{51}$$

式中 $a(t)$ 是信号 $s(t)$ 的振幅调制，称为包络函数。$\phi(t)$ 是信号 $s(t)$ 的相位调制，称为相位函数。

相对载波 $\cos\omega t$ 来讲，$a(t)$ 与 $\phi(t)$ 都是慢变化的时间函数。

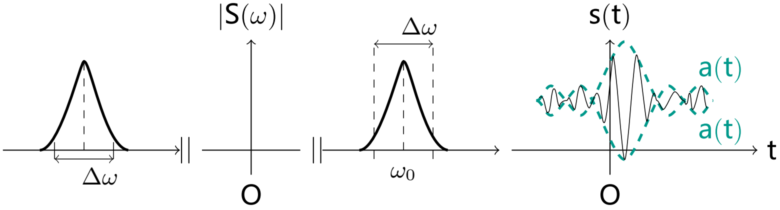


图 5: 高频窄带信号

将上式展开后的结果

$$\begin{aligned} s(t) &= a(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \\ &= a(t)\cos\varphi(t)\cos\omega_0 t - a(t)\sin\varphi(t)\sin\omega_0 t \\ &= m_c(t)\cos\omega_0 t - m_s(t)\sin\omega_0 t, \end{aligned} \tag{52}$$

其中的垂直分量 $m_c(t)$ 和 $m_s(t)$

$$\begin{cases} m_c(t) = a(t)\cos\varphi(t) \\ m_s(t) = a(t)\sin\varphi(t) \end{cases} \tag{53}$$

可见 $m_c(t), m_s(t)$ 相对 $\cos\omega_0 t$ 来讲都是低频信号, 且 $m_c(t)$ 与 $m_s(t)$ 在几何上彼此正交。

2. 高频窄带信号的复指数形式

s(t) 的希尔伯特变换为

$$\begin{aligned}\hat{s}(t) &= H\left[m_c(t)\cos\omega_0 t - m_s(t)\sin\omega_0 t\right] \\ &= H\left[m_c(t)\cos\omega_0 t\right] - H\left[m_s(t)\sin\omega_0 t\right].\end{aligned} \tag{54}$$

$m_c(t)$ 和 $m_s(t)$ 均为低频限带信号

即满足

$$\begin{aligned} m_c(t) &\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftharpoons}} M_c(\omega), \quad |\omega| < \frac{\Delta\omega_c}{2} < \omega_0 \quad \text{(低频限带)} \\ m_s(t) &\underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftharpoons}} M_s(\omega), \quad |\omega| < \frac{\Delta\omega_s}{2} < \omega_0 \quad \text{(低频限带)}\ . \end{aligned} \tag{55}$$

可得 s(t) 的希尔伯特变换 (由例 26 的结论)

$$
\begin{aligned}
\hat{s}(t) &= H\left[m_c(t)\cos\omega_0 t\right] - H\left[m_s(t)\sin\omega_0 t\right] \\
&= m_c(t)\sin\omega_0 t + m_s(t)\cos\omega_0 t \\
&= a(t)\cos\varphi(t)\sin\omega_0 t + a(t)\sin\varphi(t)\cos\omega_0 t \\
&= a(t)\sin\left[\omega_0 t + \varphi(t)\right].
\end{aligned}
\tag{56}
$$

s(t) 的解析形式可以用复指数表示形式

$$
\begin{aligned}
\tilde{s}(t) &= s(t) + j\hat{s}(t) \\
&= a(t)\cos\left[\omega_0 t + \varphi(t)\right] + ja(t)\sin\left[\omega_0 t + \varphi(t)\right] \\
&= a(t)e^{j[\omega_0 t + \phi(t)]} \\
&= m(t)e^{j\omega_0 t} = \tilde{s}_k(t),
\end{aligned}
\tag{57}
$$

其中，式中

$$
m(t) = a(t)e^{j\varphi(t)}, \tag{58}
$$

通常, 将 $m(t)$ 称为信号 $s(t)$ 的复包络, 而将 $e^{j\omega_0 t}$ 称为复载频。$a(t)$ 称为包络, 解析信号 $\tilde{s}(t)$ 称为预包络。

复包络展开

$$m(t) = a(t)\cos\varphi(t) + ja(t)\sin\varphi(t) = m_c(t) + jm_s(t). \quad (59)$$

可见, 包络 $a(t)$, 复包络 $m(t)$ 相对 $\cos\omega_0 t$ 来讲, 都是低频限带信号。

误差分析

(1) 误差产生的原因

从复指数形式的推导过程可以看出，尽管解析信号 $\tilde{s}(t)$ 是复信号，但要将它表示成复指数形式，还必须满足 $m_c(t), m_s(t)$ 均为低频限带信号的条件。如果不满足此条件，就不能由解析信号推出复指数表示。即不满足 $m_c(t)$ 和 $m_s(t)$ 低频限带信号的条件，其解析信号表示与复指数表示仍存在一定的误差。

(2) 误差的计算

下面举例，在频域上对解析信号与复指数信号进行比较，计算它们之间的误差。

设一实信号 $s(t) = a(t)\cos\omega_0 t$, 其复包络 $m(t) = a(t)$, 复包络的频谱 $M(\omega)$ 不满足低频限带条件, 如图 6 所示

$$m(t) \underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftharpoons}} M(\omega), \quad |\omega| < \Delta\omega \nless \omega_0. \tag{60}$$

实信号 $s(t)$ 频谱

$$S(\omega) = \frac{1}{2}\left[M(\omega+\omega_0) + M(\omega-\omega_0)\right]. \tag{61}$$

① s(t) 的解析信号形式

$$\bar{s}(t) = s(t) + j\hat{s}(t). \tag{62}$$

解析信号的频谱

$$\widetilde{S}(\omega) = 2S(\omega)U(\omega) = [M(\omega + \omega_0) + M(\omega - \omega_0)]\, U(\omega). \tag{63}$$

② s(t) 的复指数表示

$$\bar{s}_{复}(t) = m(t)e^{j\omega_0 t}. \tag{64}$$

复信号频谱

$$\tilde{S}_{复}(t)(\omega) = M(\omega - \omega_0). \tag{65}$$

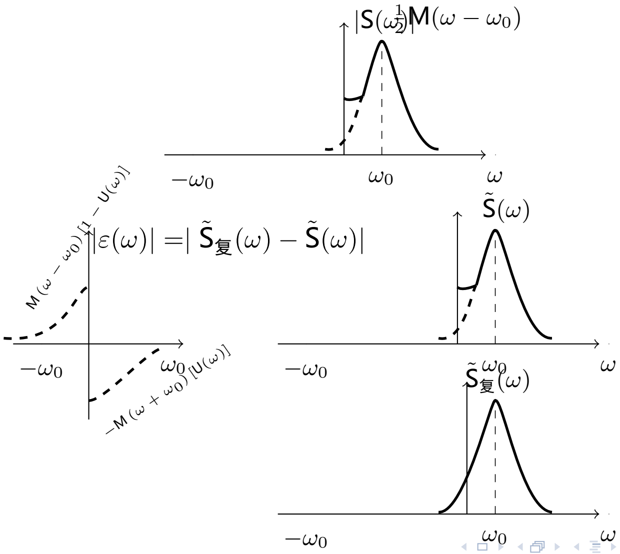
比较复信号频谱与解析信号频谱间的误差, 如图 6和7 所示, 有带

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= \mathcal{S}_{复}(\omega) - \mathsf{S}(\omega) \\ &= \mathsf{M}\left(\omega-\omega_0\right)\left[1-\mathsf{U}(\omega)\right] - \mathsf{M}\left(\omega+\omega_0\right)\mathsf{U}(\omega). \end{aligned} \tag{66}$$

这个误差在时域的表达式为

$$\epsilon(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty} M(\omega)e^{i(\omega+\omega_0)t}d\omega\right]. \tag{67}$$

图 6: 误差分析


$|S(\omega)|$
$\frac{1}{2}M(\omega-\omega_0)$
$-\omega_0$
ω_0
ω
$M(\omega-\omega_0)[1-U(\omega)]$
$|\varepsilon(\omega)| = |\tilde{S}_{复}(\omega) - \tilde{S}(\omega)|$
$-M(\omega+\omega_0)[U(\omega)]$
$-\omega_0$
ω_0
$\tilde{S}(\omega)$
$-\omega_0$
ω_0
ω
$\tilde{S}_{复}(\omega)$
$-\omega_0$
ω_0
ω

(3) 误差分析

如图 6和 7 所示, 误差 $\varepsilon(t)$ 的大小取决于 $M(\omega)$ 中 $|\omega| > \omega_0$ 尾部所包含的能量。若尾部能量为零, 则误差 $\varepsilon(t)$ 为零。

解析形式表示成复数形式的要求

若要将 s(t) 的解析形式表示成复数形式，则要求复包络 m(t) 必须是个低频限带信号, 即必须满足

$$M(\omega) = 0, \quad |\omega| > \Delta\omega, \Delta\omega < \omega_0 \tag{68}$$

也即 $\varepsilon(t) = 0$。可见, 此条件与前面从解析形式推导到复指数形式过程中的条件是一致的。

复信号直接替代其解析信号的情况

情形 1

对于一般窄带信号而言, 即使复包络 $m(t)$ 不是限带, 但如果能使 $\omega_0 \gg \Delta\omega$, 使得尾部能量很小, 误差 $\varepsilon(t)$ 也很小, 则用 $s(t)$ 的复指数信号替代 $s(t)$ 的解析信号也是允许的。

情形 2

当然, 对于一个理想的高频窄带信号来讲, 由于 $\omega_0 \gg \Delta\omega$, 且复包络 $m(t)$ 又是限带的, 可以用指数形式的复信号直接替代其解析信号。

若已知高频窄带信号复包络的频谱 $M(\omega)$, 有

$$\tilde{s}_{复}(t) = m(t)e^{j\omega_0 t} \overset{F}{\underset{F^{-1}}{\rightleftharpoons}} \widetilde{S}_{复}(\omega) = M(\omega - \omega_0), \tag{69}$$

则

$$\tilde{s}^*_{复}(t) \overset{F}{\underset{F^{-1}}{\rightleftharpoons}} \tilde{S}^*_{复}(-\omega) = M^*(-\omega - \omega_0) \tag{70}$$

由于可以用复指数形式代替其解析形式 $\tilde{s}(t) = \tilde{s}_{复}(t)$, 则

$$s(t) = \mathrm{Re}[\tilde{s}(t)] = \mathrm{Re}\left[\tilde{s}_{复}(t)\right] = \frac{1}{2}\left[\tilde{s}_{复}(t) + \tilde{s}_{复^*}(t)\right] \tag{71}$$

则高频窄带信号的频谱可以表示为

$$S(\omega) = \frac{1}{2}\left[M(\omega - \omega_0) + M^*(-\omega - \omega_0)\right] \tag{72}$$

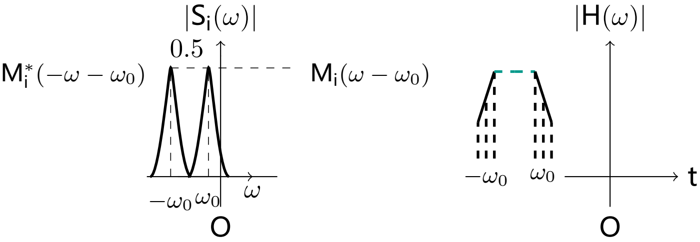


图 8: 高频窄带信号通过窄带系统

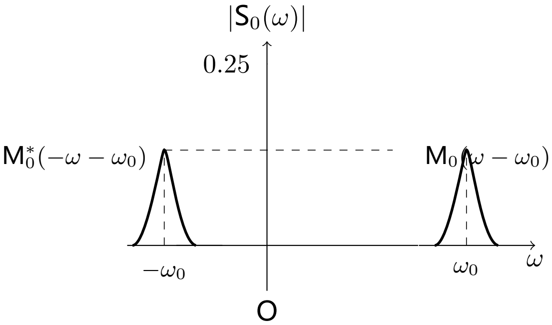


图 9: 高频窄带信号通过窄带系统

窄带信号的复数表示方法同样可以应用到窄带系统上，以简化对系统的分析当复包络 $m(t)$ 是低频限带信号时，无论是高频窄带信号还是高频窄带系统，都可以直接用指数形式替代其解析形式。

下面就讨论高频窄带信号通过相同中心频率的高频窄带系统的一种简便分析方法。

输入的高频窄带信号

$$s_i(t) = \mathrm{Re}\left[s_i(t)\right] = \mathrm{Re}\left[m_i(t)e^{iv}\right], \tag{73}$$

则其频谱可表示为

$$S_i(\omega) = \frac{1}{2}\left[M_i\left(\omega - \omega_0\right) + M_i^*\left(-\omega - \omega_0\right)\right]. \tag{74}$$

高频窄带系统的冲激响应和传递函数为

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \mathrm{Re}[\tilde{h}(t)] = \mathrm{Re}\left[h_m(t)e^{j\omega_0 t}\right] \\
H(\omega) &= \frac{1}{2}\left[H_m(\omega-\omega_0) + H_m^*(-\omega-\omega_0)\right],
\end{aligned} \tag{75}
$$

其中 $h_m(t), H_m(\omega)$ 分别为窄带系统的复包络及其频谱。

$s_0(t)$ 下系统的输出

$$
\begin{aligned}
s_0(t) &= s_i(t) * h(t) \\
S_0(\omega) &= S_i(\omega)H(\omega).
\end{aligned} \tag{76}
$$

将输入窄带信号和窄带系统的频谱 $S_0(\omega)$ 代入上式 (76), 得

$$\begin{aligned} S_0(\omega) = \frac{1}{4}&\left[M_i(\omega-\omega_0)+M_i^*(-\omega-\omega_0)\right] \\ &\qquad\qquad \left[H_m(\omega-\omega_0)+H_m^*(-\omega-\omega_0)\right] \\ = \frac{1}{4}&\left[M_i(\omega-\omega_0)H_m(\omega-\omega_0)+M_i(\omega-\omega_0)H_m^*(-\omega-\omega_0)\right. \\ &\quad +M_i^*(-\omega-\omega_0)H_m(\omega-\omega_0) \\ &\quad \left.+M_i^*(-\omega-\omega_0)H_m^*(-\omega-\omega_0)\right]. \end{aligned} \tag{77}$$

由于 $s(t)$ 的复包络 $m_i(t)$ 是低频限带信号, 其频谱 $M_i(\omega)$ 如图10和11 所示

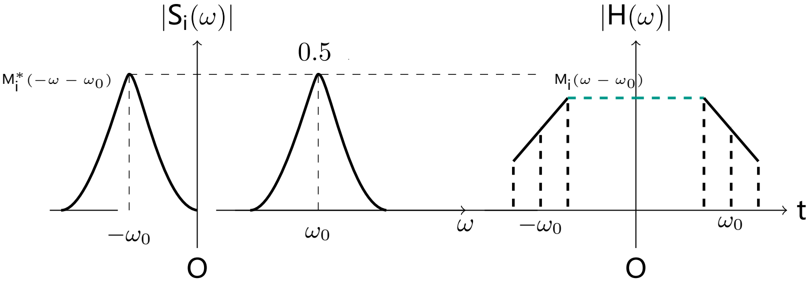


图 10: 高频窄带信号通过窄带系统

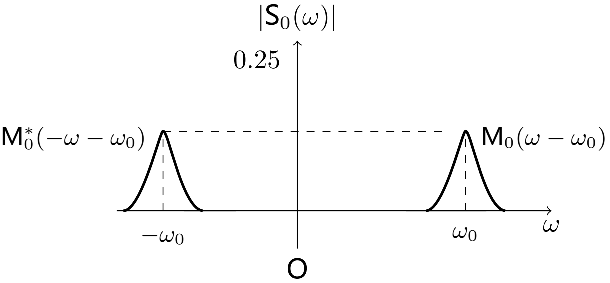


图 11: 高频窄带信号通过窄带系统

$$\begin{cases} \mathsf{M}_\mathsf{i}^*(-\omega-\omega_0)\,\mathsf{H}_\mathsf{m}(\omega-\omega_0)=0 \\ \mathsf{M}_\mathsf{i}(\omega-\omega_0)\,\mathsf{H}_\mathsf{m}^*(-\omega-\omega_0)=0 \end{cases} \tag{78}$$

由图可知, 式 (78) 显然成立。

$\mathsf{S}_0(\omega)$ 的结果

$$\begin{aligned} \mathsf{S}_0(\omega)=\frac{1}{4}\Big[&\mathsf{M}_\mathsf{i}(\omega-\omega_0)\,\mathsf{H}_\mathsf{m}(\omega-\omega_0) \\ &+\mathsf{M}_\mathsf{i}^*(-\omega-\omega_0)\,\mathsf{H}_\mathsf{m}^*(-\omega-\omega_0)\Big]. \end{aligned} \tag{79}$$

相应的输出信号

$$s_0(t) = \frac{1}{4}\left[m_i(t) * h_m(t)\right] e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{4}\left[m_i(t) * h_m(t)\right]^* e^{-jw_0 t} \tag{80}$$

又因为

$$s_o(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{s}_o(t)\right] = \frac{1}{2}\left[\tilde{s}_o(t) + \tilde{s}_o^*(t)\right]. \tag{81}$$

可得

$$\tilde{s}_o(t) = \frac{1}{2}\left[m_i(t) * h_m(t)\right] e^{j\omega_0 t}. \tag{82}$$

式 (82) 表明, 输出 $s_o(t)$ 也是一高频窄带信号, 且其复包络

$$m_0(t) = m_i(t) * \frac{h_m(t)}{2}, \tag{83}$$

即输出的复包络 $m_0(t)$ 可由输入信号的复包络 $m_i(t)$ 与系统冲激响应的复包络 $h_m(t)/2$ 求得。

输出 $s_o(t)$ 也可写成

$$s_0(t) = \mathrm{Re}\left[m_0(t)e^{j\omega_0 t}\right]. \tag{84}$$

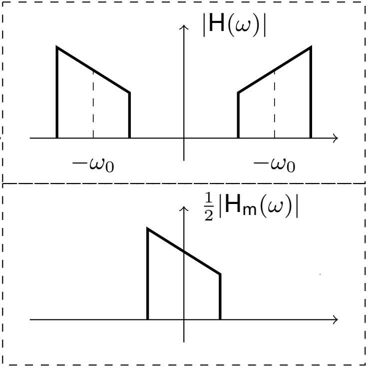
结果表明, 一个高频窄带信号通过高频窄带系统, 可以作如图 12 所示的等效, 即可以等效为信号的复包络通过一个冲激响应为 $h_m(t)/2$ 的低通系统。

即输出的复包络 $m_0(t)$ 仅由输入信号的复包络 $m_i(t)$ 与系统冲激响应的复包络 $h_m(t)/2$ 卷积而成。

这种处理方法使我们对高频窄带信号通过高频窄带系统这类问题的分析与运算大为简化。

避免了高频信号与高频冲激响应卷积时的麻烦的高频项处理。

$s_i(t) = \mathrm{Re}[m_i(t)e^{j\omega_0 t}]$ $\rightarrow$



$\rightarrow$ $s_i(t) = \mathrm{Re}[m_o(t)e^{j\omega_0 t}]$

$m_i(t)$

$m_o(t)$

图 12: 运算的简化

X(t) 的希尔伯特变换

实随机过程的解析形式 (或解析过程) 为

$$\mathring{X}(t) = X(t) + j\hat{X}(t), \tag{85}$$

称为 X(t) 的希尔伯特变换, 其中

$$\hat{X}(t) = X(t) * \frac{1}{\pi t}. \tag{86}$$

由于希尔伯特变换的线性性质, $1/\pi t$ 可以看成一线性系统的冲激响应。

因此, $Y(t)$ 可以看成是输入 $X(t)$ 下线性系统 $h_\lambda(t)$ 的输出, 即

$$Y(t) = X(t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{X}(t). \tag{87}$$

如图 13 所示。正是利用这一等效, 使得在下一节中应用解析过程来分析窄带随机后号变得是十分方便。

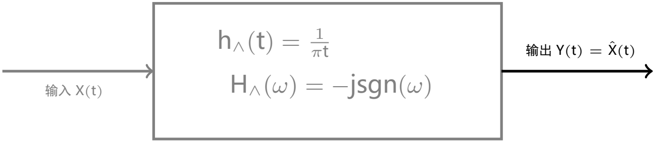


图 13: 解析过程

希尔伯特变换

希尔伯特变换是一种线性变换，那么随机信号通过线性系统的结论在此解析过程的性质可应用。

若 $X(t)$ 为宽平稳 (实) 过程，则 $\hat{X}(t)$ 也是宽平 (实) 过程且 $X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 联合宽平稳。

2° 实随机过程

证: 从图 13 不难看出

$$G_{X}(\omega)=G_{X}(\omega)\left|H_{\wedge}(\omega)\right|^{2} \tag{88}$$

$$|H_{\Lambda}(\omega)|=|-j\mathrm{sgn}(\omega)|=1. \tag{89}$$

因此

$$G_{\hat{X}}(\omega)=G_{X}(\omega)\Rightarrow R_{X}(\tau)=R_{X}(\tau). \tag{90}$$

$X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 的互相关函数等于 $X(t)$ 自相关函数的希尔伯特变换。

据线性系统输入输出随机信号之间互相关函数的性质，有

$$\begin{aligned} R_{X\hat{X}}(\tau) &= E[X(t)\hat{X}(t+\tau)] = R_X(\tau) * h_\Lambda(\tau) = R_X(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} \\ &= \bar{R}_X(\tau). \\ R_{\hat{X}X}(\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau) * h_\Lambda(-\tau) \\ &= -R_X(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = -\hat{R}_X(\tau). \end{aligned} \tag{91}$$

且有

$$R_{X\hat{X}}(\tau) = -R_{\hat{X}X}(\tau). \tag{92}$$

由此可得 $X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 的互功率谱密度为

$$\begin{aligned} G_{X\hat{X}}(\omega) &= F\left[R_{X\hat{X}}(\tau)\right] = F\left[\hat{R}_X(\tau)\right] \\ &= -j\,\mathrm{sgn}(\omega)G_X(\omega) = \begin{cases} -j\,G_X(\omega), & \omega > 0 \\ j\,G_X(\omega), & \omega < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{93}$$

4° $X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 的互相关函数是 τ 的奇函数

$$R_{X\hat{X}}(-\tau) = R_X(-\tau) * h_{\wedge}(-\tau). \tag{94}$$

且 $R_X(\tau)$ 是偶函数, 则

$$\begin{aligned} R_{X\hat{X}}(-\tau) &= R_X(-\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) \\ &= R_X(\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) = -\hat{R}_X(\tau) = -R_{X\hat{X}}(\tau). \end{aligned} \tag{95}$$

同理可证

$$R_{X\hat{X}}(-\tau) = -R_{\hat{X}X}(\tau). \tag{96}$$

5° 随机过程程 $R_{X\hat{X}}$ 和 $R_{\hat{X}X}(\tau)$ 在任何同一时刻的两个状态正交

证: 因为 $R_{X\hat{X}}(\tau), R_{X\hat{X}}(\tau)$ 是 τ 的奇函数, 所以当 $\tau = 0$ 时, 有

$$\begin{cases} R_{X\hat{X}}(0) = 0 \\ R_{\hat{X}X}(0) = 0 \end{cases} \tag{97}$$

上式说明, 过程 X(t) 与 $\hat{X}(t)$ 在任何同一时刻 ($\tau = 0$) 的两个状态正交, 即

$$R_{X\hat{X}}(0) = E[\hat{X}(t)X(t)] = 0. \tag{98}$$

6° 解析过程的功率谱密度只存在于正频域

按照复随机过程自相关函数的定义，解析过程 $\tilde{X}(t)$ 的自相关函数为

$$
\begin{aligned}
R_X(\tau) &= E[\bar{X}(t)\cdot\tilde{X}(t+\tau)] \\
&= E\{[X(t)-j\hat{X}(t)][X(t+\tau)+j\hat{X}(t+\tau)]\} \\
&= R_X(\tau)+R_X(\tau)+j\left[R_{X\hat{X}}(\tau)-R_{\hat{X}X}(\tau)\right].
\end{aligned}
\tag{99}
$$

再应用性质 2° 和 3° 可得

$$
R_X(\tau)=2\left[R_X(\tau)+j\hat{R}_X(\tau)\right]=2\tilde{R}_X(\tau). \tag{100}
$$

解析过程 $\tilde{X}(t)$ 的功率谐密度

对式 (100) 两边求傅里叶变换, 可得解析过程 $\tilde{X}(t)$ 的功率谐密度为

$$
\begin{aligned}
G_{\tilde{X}}(\omega) &= 2\left\{G_X(\omega) + jF\left[\hat{R}_X(\tau)\right]\right\} \\
&= 2\left\{G_X(\omega) + j\left[-j\,\mathrm{sgn}(\omega)G_X(\omega)\right]\right\} \\
&= 2\left[G_X(\omega) + \mathrm{sgn}(\omega)G_X(\omega)\right] \\
&= \begin{cases} 4G_X(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{101}
$$

上式表明, 解析过程的功率谱密度只存在于正频域, 即它是单边带的功率谱密度其强度等于原实过程功率谱密度强度的 4 倍。$G_X(\omega) \leftrightarrows G_X(\omega)$ 的关系如图 14 所示。

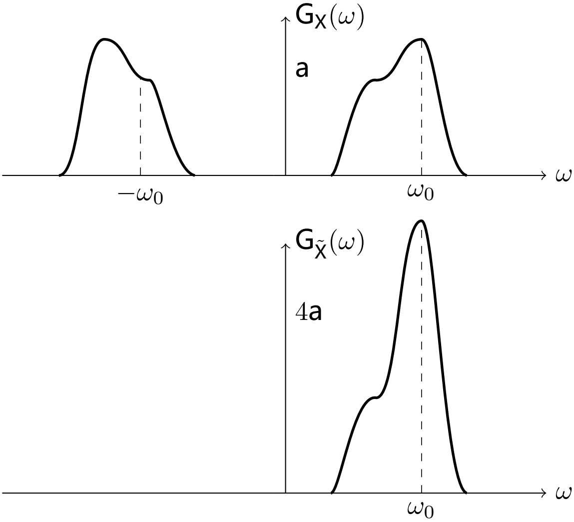


图 14: 解析过程的功率谱

目录

窄带随机过程的数学模型及复指数形式

1. 窄带随机过程的数学模型

在雷达、通信等许多电子系统中, 通常是用一个宽带随机信号来激励一个窄带滤波器。此时, 在滤波器输出端得到的便是一个窄带随机信号。

典型窄带随机过程的功率谱密度及样本函数图

若用一示波器来观测它的某次输出的波形 (某个样本), 则可以看到, 它的样本接近于一个正弦波, 但此正弦波的幅度和相位都在作缓慢的随机变化, 典型窄带随机过程的功率谱密度及样本函数图形如图 15 所示。

将图 15(b) 中的样本函数的图形与图 5(b) 所示的波形进行比较, 可知窄带随机过程的一个样本函数就是一个高频窄带信号。

因此, 对应于某次观测试验结果, 样本函数可写成

$$x_k(t) = a_k(t)\cos\left[\omega_0 t + \varphi_k(t)\right], \quad \zeta_k \in \Omega \tag{102}$$

所有样本函数的总体—窄带随机过程, 则可写成

$$X(t) = A(t)\cos\left[\omega_0 t + \Phi(t)\right], \tag{103}$$

上式就是窄带随机过程常用的数学模型。

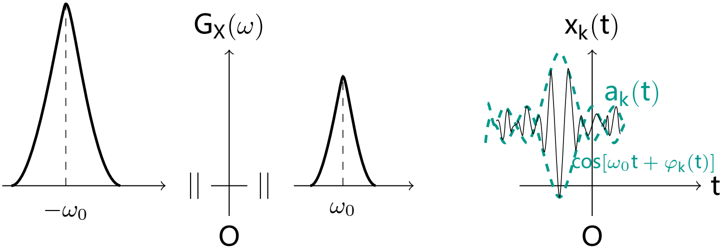


图 15: 窄带随机过程

由于 $a_k(t), \varphi(t)$ 相对 $\cos\omega_0 t$ 来说是慢变化的时间函数，所以 $A(t), \Phi(t)$ 相对常数来说就是慢变化的随机过程。于是，我们就可以把窄带随机过程看成是一个随机调幅和随机调相的准正弦振荡。