

# 6

## 窄带随机信号

通信、雷达和广播电视等信息传输系统以及传输的信号均满足窄带条件: 中心频率  $\omega_0$  远大于谱宽  $\Delta\omega$ , 即  $\omega_0 \gg \Delta\omega$ 。这类信号和系统分别称为窄带信号和窄带系统。其频率有选择性。工作在高频或中频的无线电系统, 多数都是窄带系统。

类似地, 一个随机信号的功率谱密度, 只要分布在高频载波  $\omega_0$  附近的一个“窄随机过程”。在信息传输系统中, 特别是接收机中经常遇到的随机信号, 都是窄带随机式及随机过程的复数表示法, 因此, 本章首先介绍这些方法, 然后再将这些方法应用到窄带随机过程的分析中去。

### 6.1 预备知识

#### 6.1.1 信号的解析形式

##### 1. 单边谱信号

我们知道, 实信号频谱的数学模型是含有正负频率的双边谱, 然而在实际应用中, 其负频率 ( $\omega < 0$ ) 是物理不可实现的。由于实信号的双边谱是关于 0 上的竖轴偶对称, 因此, 采用其单边谱的信号形式, 既可简化对问题的分析, 又可恢复原信号。下面对只含正频域部分的信号—单边谱信号进行讨论。

(1) 单边谱信号在时域是复信号

设单边谱信号的傅里叶变换为

$$f(t) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} F(\omega), \omega > 0 \quad (6.1)$$

由于

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (6.2)$$

则

$$f^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega, \quad (6.3)$$

因为  $f^*(t) \neq f(t)$ , 所以单边谱信号在时域内的表示是个复信号。

(2) 从实信号中分解出单边谱信号

设  $s(t)$  为具有连续频谱的实信号

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (6.4)$$

式中  $S(\omega)$  为信号  $s(t)$  的频谱。由傅里叶变换, 可以证明, 当  $s^*(t) = s(t)$  时, 有

$$S(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t) (e^{j\omega t})^* dt = S^*(\omega), \quad (6.5)$$

所以实信号  $s(t)$  的频谱  $S(\omega)$  有性质 (6.5), 可知实信号  $s(t)$  的频谱  $S(\omega)$  是  $\omega$  的复函数。

将  $S(\omega)$  用傅里叶逆变换分解成正负两频域部分积分的和, 得到实信号  $s(t)$ ,

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &\stackrel{\omega'=-\omega}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(-\omega') e^{-j\omega' t} d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega') e^{j\omega' t} d\omega' \right]^* \\ &= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] = \operatorname{Re}[\tilde{s}(t)], \end{aligned} \quad (6.6)$$

其中单边谱信号

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (6.7)$$

式 (6.7) 和式 (6.4) 只在积分上下限和被积函数有区别; 单边谱信号  $\tilde{s}(t)$  被称为实信号  $s(t)$  的解析信号, 或  $s(t)$  的预包络。此外,  $\tilde{s}(t)$  还具有如下的单边频谱

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2S(\omega) e^{j\omega t} d\omega e^{-j\omega t} dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt. \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\tilde{S}(\omega) = 2S(\omega)U(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}, U(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

所以, 实信号  $s(t)$  可用一个仅含其正频率成分的解析信号  $\tilde{s}(t)$  的实部来表示, 即  $s(t) = \text{Re}[\tilde{s}(t)]$ 。

## 2. 解析信号的表示方法。

由于单边谱信号  $\tilde{s}(t)$  在时域是个复信号, 所以根据复数的性质,  $s(t)$  的解析信号  $\tilde{s}(t)$  可以表示为

$$\tilde{s}(t) = \text{Re}[\tilde{s}(t)] + j \text{Im}[\tilde{s}(t)] \in \mathbb{C} \times T. \quad (6.10)$$

由  $\text{Re}[\tilde{s}(t)] = s(t)$ , 再令

$$\text{Im}[\tilde{s}(t)] = \hat{s}(t). \quad (6.11)$$

即解析信号  $s(t)$  的虚部用符号  $\hat{s}(t)$  表示, 则

$$\tilde{s}(t) = s(t) + j\hat{s}(t), \quad (6.12)$$

上式是解析信号  $\tilde{s}(t)$  的一般表达式, 然而, 式中的虚部  $\hat{s}(t)$  该如何求呢?

从频域关系出发, 解析信号  $\tilde{s}(t)$  的频谱  $\tilde{S}(\omega)$  满足 (6.9) 关系式  $\tilde{S}(\omega) = 2S(\omega)U(\omega)$ , 对等式两边进行傅里叶逆变换。由于


$$U(\omega) \xrightleftharpoons[F]{F^{-1}} \frac{1}{2} \left[ \delta(t) - \frac{1}{j\pi t} \right], \quad (6.13)$$

则解析信号的时域表达式为

$$\tilde{s}(t) = s(t) * \left[ \delta(t) - \frac{1}{j\pi t} \right] = s(t) + j \left[ s(t) * \frac{1}{\pi t} \right]. \quad (6.14)$$

不难得到

$$\hat{s}(t) = s(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t - \tau)}{\tau} d\tau, \quad (6.15)$$

 **注 6.1.** 式 (6.13) 中复函数的计算基础:

$$\oint_{|z|<0.2} \frac{1}{j\pi z} e^{-j\omega z} dz = \frac{1}{j\pi} \oint_{|z|<0.2} \frac{1}{t} e^{-j\omega z} dz = \frac{2j\pi}{j\pi} = 2. \quad (6.16)$$

### 定义 6.2 希尔伯特变换

给定实信号  $s(t)$ , 解析信号  $\tilde{s}(t)$  的频谱  $\tilde{S}(\omega)$  关系式为  $\tilde{S}(\omega) = 2S(\omega)U(\omega)$ , 时域表达式由 (6.14) 给出, 则实信号  $s(t)$  的希尔伯特 (Hilbert) 变换  $\hat{s}(t)$  可由式 (6.14) 给出, 简记作  $\hat{s}(t) = H[s(t)]$ 。

**结论** 对于任何一个实信号  $s(t)$ , 都可以分解出一个单边谱的解析信号  $\tilde{s}(t)$  与其对应。此解析信号是个复信号, 其实部为原信号  $s(t)$ , 虚部为原信号  $s(t)$  的希尔伯特变换  $\hat{s}(t)$ 。

### 6.1.2 希尔伯特变换的性质

解析信号是最常用的复信号之一,它在分析窄带随机信号中起着重要作用,希尔伯特变换是应用解析信号时必不可少的数学工具,因此有时也将用解析形式表示复信号的方法称为希尔伯特表示法。由定义,希尔伯特变换 (6.15) 有以下几个重要性质。

#### 1. 希尔伯特变换相当于一个正交滤波器。

希尔伯特变换 (6.15) 是  $s(t)$  和  $1/\pi t$  的卷积,根据线性系统的输出特征,可以将  $\hat{s}(t)$  看成是  $s(t)$  通过一个具有冲激响应为  $h_{\wedge} = \frac{1}{\pi t}$  的线性滤波器,如图 6-1 所示

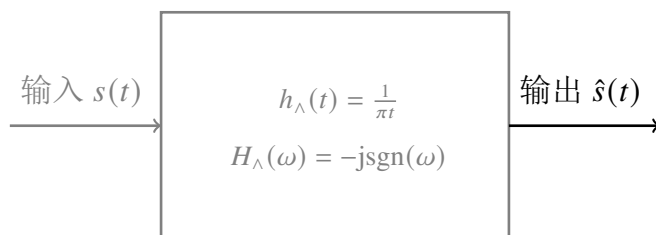


图 6-1 希尔伯特变换

由于如下的傅里叶变换对存在,即

$$j \frac{1}{\pi t} \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} \operatorname{sgn}(\omega), \quad (6.17)$$

式中  $\operatorname{sgn}(\omega)$  为符号函数,满足

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > 0 \\ -1, & \omega < 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

等价地,有如下的傅里叶变换对

$$\frac{1}{\pi t} \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} -j \operatorname{sgn}(\omega). \quad (6.19)$$

则图 6-1 所示的线性滤波器的传递函数 (频率响应) 为

$$H_{\wedge}(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega). \quad (6.20)$$

其幅频特性和相频特性分别为

$$|H_{\wedge}(\omega)| = 1, \theta_{H_{\wedge}(\omega)} = \begin{cases} -\pi/2, & \omega > 0 \\ +\pi/2, & \omega < 0 \end{cases}. \quad (6.21)$$

与滤波器输出信号  $\hat{s}(t)$  相应的频谱为

$$\hat{S}(\omega) = H_{\Lambda}(\omega)S(\omega) = -j\text{sgn}(\omega)S(\omega) = \begin{cases} -jS(\omega), & \omega > 0 \\ jS(\omega), & \omega < 0 \end{cases}. \quad (6.22)$$

由式 (6.22) 可见, 通过此滤波器的信号, 其所有频率分量的幅度响应为 1. 而在相位上, 所有正频率分量移相  $-\pi/2$ , 所有负频率分量移相  $+\pi/2$ . 因此说, 希尔伯特变换是一种正交变换, 它的作用相当于一个正交滤波器, 一次变换如图 6-2 中所示。

## 2. 两次希尔伯特变换相当于一个倒相器。

若对  $s(t)$  进行两次希尔伯特变换, 则相当于信号  $s(t)$  通过两个级联的  $h_{\Lambda}(t)$  网络, 即

$$\hat{\hat{s}}(t) = H\{H[s(t)]\} = H[\hat{s}(t)] = \hat{s}(t) * \frac{1}{\pi t} = s(t) * \frac{1}{\pi t} * \frac{1}{\pi t} \quad (6.23)$$

$$\hat{\hat{S}}(\omega) = \hat{S}(\omega)[-j\text{sgn}(\omega)] = S(\omega)[-j\text{sgn}(\omega)][-j\text{sgn}(\omega)] = -S(\omega) \quad (6.24)$$

从而得到时域关系

$$\hat{\hat{s}}(t) = H\{H[s(t)]\} = -s(t). \quad (6.25)$$

如图 6-2 所示, 两次希尔伯特变换将信号  $s(t)$  翻转了  $180^\circ$ 。

## 3. 希尔伯特逆变换等于负的希尔伯特正变换 $H^{-1} = -H$ 。

定义希尔伯特逆变换为

$$s(t) = H^{-1}[\hat{s}(t)]. \quad (6.26)$$

由式 (6.25) 可得

$$s(t) = -H[\hat{s}(t)]. \quad (6.27)$$

对比式 (6.26) 和式 (6.27) 可知

$$H^{-1}[\hat{s}(t)] = -H[\hat{s}(t)]. \quad (6.28)$$

即希尔伯特逆变换等于负的希尔伯特正变换

$$H^{-1}[\cdot] = -H[\cdot]. \quad (6.29)$$

因此, 希尔伯特逆变换的公式为

$$s(t) = H^{-1}[\hat{s}(t)] = -H[\hat{s}(t)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{s}(t-\tau)}{\tau} d\tau$$

$$\stackrel{x=-\tau}{=} -\frac{1}{\pi} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{\hat{s}(t+x)}{-x} d-x \quad (6.30)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{s}(t+x)}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{s}(t+\tau)}{\tau} d\tau. \quad (6.31)$$

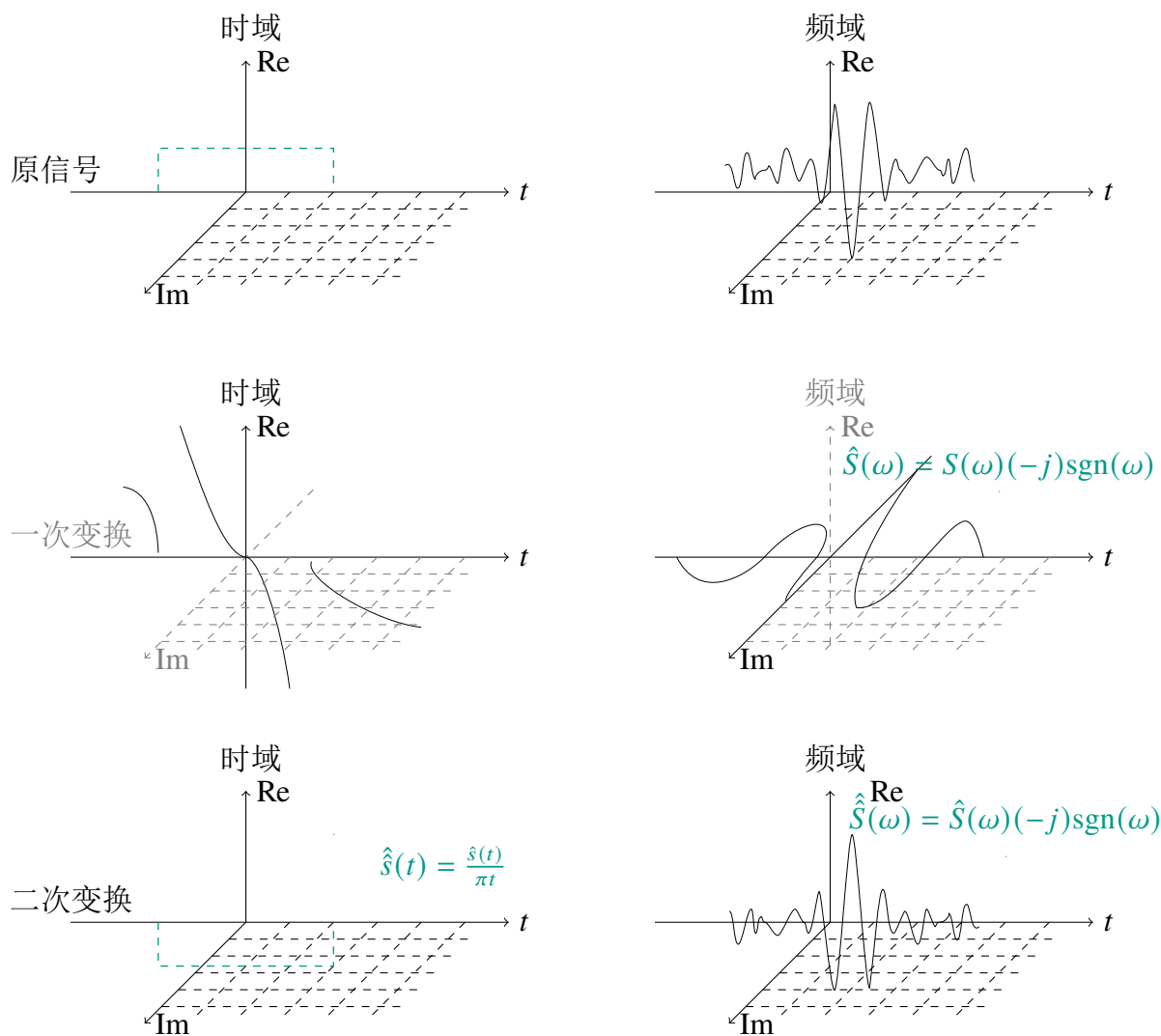


图 6-2 希尔伯特变换

**例 6.3** 求  $\cos \Omega t, \sin \Omega t$  的希尔伯特变换。

解:

①  $H[\cos \Omega t]$  的计算:

$$\begin{aligned}
 H[\cos \Omega t] &= \cos \Omega t * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[\Omega(t-\tau)]}{\tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\tau} \cos \Omega \cos \Omega \tau + \frac{1}{\tau} \sin \Omega t \sin \Omega \tau \right] d\tau \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \cos \Omega t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \Omega \tau}{\tau} d\tau + \sin \Omega t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Omega \tau}{\tau} d\tau \right].
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

由于  $\frac{\cos \Omega \tau}{\tau}$  是  $\tau$  的奇函数, 所以第一项积分为 0, 而  $\frac{\sin \Omega \tau}{\tau}$  是  $\tau$  的偶函数, 所以


$$H[\cos \Omega t] = \frac{2}{\pi} \sin \Omega t \int_0^{\infty} \frac{\sin \Omega \tau}{\tau} d\tau. \quad (6.33)$$

其中

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \Omega \tau}{\tau} d\tau = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\Omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \Omega > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \Omega < 0 \end{cases}. \quad (6.34)$$

所以

$$H[\cos \Omega t] = \operatorname{sgn}(\Omega) \sin \Omega t = \begin{cases} \sin \Omega t, & \Omega > 0 \\ -\sin \Omega t, & \Omega < 0 \end{cases}. \quad (6.35)$$

 **注 6.4.** *sine* 积分函数定义 [GautschiW1972] 为

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt \quad (6.36)$$

对于 (6.34),

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \Omega \tau}{\tau} d\tau = \int_0^{\infty} \frac{\sin \Omega \tau}{\Omega \tau} d\Omega \tau = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \quad (6.37)$$

可以使用指令 `sinint(inf)` 求  $\operatorname{Si}(x), x > 0$  的结果。

② 对上式两端再求一次 Hilbert 变换, 有

$$H\{H[\cos \Omega t]\} = H[\operatorname{sgn}(\Omega) \sin \Omega t] = \operatorname{sgn}(\Omega) H[\sin \Omega t]. \quad (6.38)$$

利用性质 2 可知, 两次希尔伯特变换相当于倒相器, 则

$$H\{H[\cos \Omega t]\} = -\cos \Omega t. \quad (6.39)$$

综合上述两式 (6.38) 和 (6.39), 可得

$$\operatorname{sgn}(\Omega) H[\sin \Omega t] = H\{H[\cos \Omega t]\} = -\cos \Omega t. \quad (6.40)$$

则有

$$H[\sin \Omega t] = -\operatorname{sgn}(\Omega) \cos \Omega t = \begin{cases} -\cos \Omega t, & \Omega > 0 \\ \cos \Omega t, & \Omega < 0 \end{cases} \quad (6.41)$$

**例 6.5** 设限带信号

$$\begin{cases} s_1(t) = a(t) \cos \omega_0 t \\ s_2(t) = a(t) \sin \omega_0 t \end{cases} \quad (6.42)$$

其中  $a(t)$  为低频限带信号, 其频谱为

$$A(\omega), |\omega| < \frac{\Delta \omega}{2} < \omega_0 \quad (6.43)$$

求  $s_1(t), s_2(t)$  的 Hilbert 变换。

解: ① 利用傅里叶变换的相乘性质, 有

$$\begin{aligned} a(t) \cos \omega_0 t &\xrightarrow[F^{-1}]{F} \frac{1}{2\pi} A(\omega) * \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ S_1(\omega) &= \frac{1}{2} [A(\omega - \omega_0) + A(\omega + \omega_0)] \end{aligned} \quad (6.44)$$

如图 6-3 所示, 由于  $\frac{\Delta\omega}{2} < \omega_0$ , 可得

$$S_1(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} A(\omega - \omega_0), & \omega > 0 \\ \frac{1}{2} A(\omega + \omega_0), & \omega < 0 \end{cases} \quad (6.45)$$

所以其希尔伯特变换的频谱为

$$\hat{S}_1(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) S_1(\omega) = \begin{cases} -\frac{j}{2} A(\omega - \omega_0), & \omega > 0 \\ \frac{j}{2} A(\omega + \omega_0), & \omega < 0 \end{cases} \quad (6.46)$$

取  $\hat{S}_1(\omega)$  的傅里叶逆变换可得

$$\begin{aligned} \hat{s}_1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -j \operatorname{sgn}(\omega) S_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= -\frac{j}{2} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} A(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \right] + \frac{j}{2} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 A(\omega + \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \right] \\ &= -\frac{j}{2} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \right] + \frac{j}{2} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega + \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \right]. \end{aligned} \quad (6.47)$$

② 利用傅里叶变换的频移性质

$$\begin{aligned} \hat{s}_1(t) &= H[a(t) \cos \omega_0 t] = -\frac{j}{2} a(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{j}{2} a(t) e^{-j\omega_0 t} \\ &= \frac{j}{2} (e^{-j\omega_0 t} - e^{j\omega_0 t}) a(t) = a(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (6.48)$$

③ 利用 Hilbert 性质和二次变换的性质, 可得

$$\hat{s}_2(t) = H[a(t) \sin \omega_0 t] = H\{H[a(t) \cos \omega_0 t]\} = -a(t) \cos \omega_0 t. \quad (6.49)$$

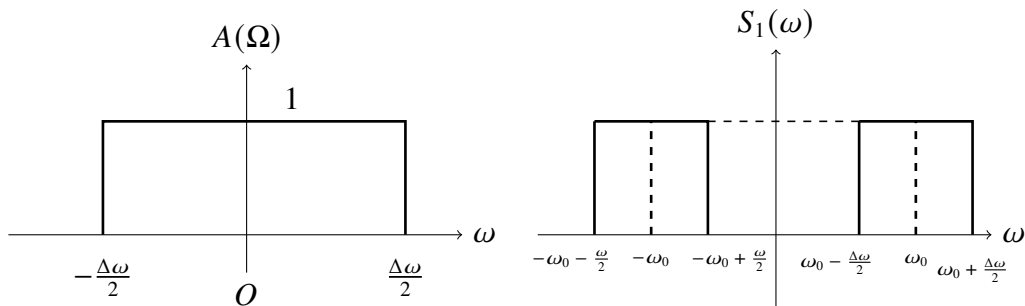


图 6-3 例 6.5 图



### 6.1.3 高频窄带信号的复指数形式

#### 1. 高频窄带信号

##### 定义 6.6 高频窄带信号

高频窄带信号是指信号的中心频率  $\omega_0$  位于高频段的窄带信号。

这类信号的频带  $\Delta\omega$  远远小于其中心频率  $\omega_0$ , 即  $\Delta\omega \ll \omega_0$ 。诸如雷达、通信等电子系统中的一些高频信号, 大多可以近似认为是高频窄带信号。这类信号的典型频谱如图 6-4(a) 所示。如果在示波器上观察这类窄带信号, 它的波形或多或少地有点像正弦波, 如图 6-4(b) 所示。但它的振幅、相位不是常数, 而是随时间  $t$  变化的函数。这类窄带信号  $s(t)$  可以表示为

$$s(t) = a(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (6.50)$$

式中  $a(t)$  是信号  $s(t)$  的振幅调制, 称为包络函数。  $\varphi(t)$  是信号  $s(t)$  的相位调制, 称为相位函数, 相对载波  $\cos \omega_0 t$  来讲,  $a(t)$  与  $\phi(t)$  都是慢变化的时间函数。

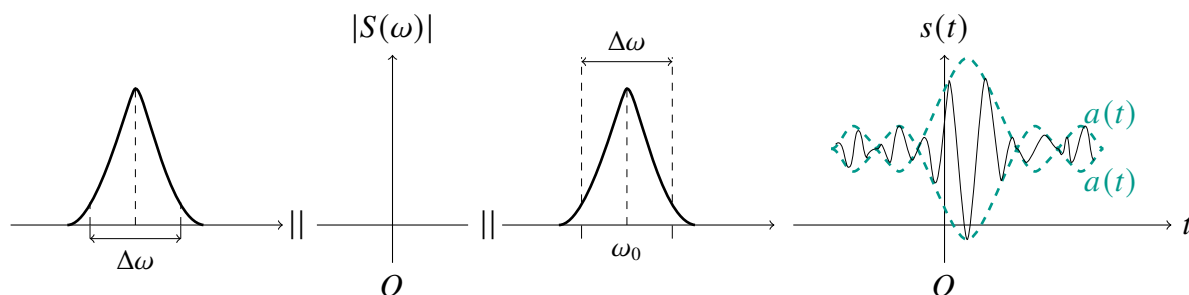


图 6-4 高频窄带信号

如果将上式展开, 则

$$\begin{aligned} s(t) &= a(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] \\ &= \underbrace{a(t) \cos \varphi(t)}_{m_c(t)} \cos \omega_0 t - \underbrace{a(t) \sin \varphi(t)}_{m_s(t)} \sin \omega_0 t \\ &= m_c(t) \cos \omega_0 t - m_s(t) \sin \omega_0 t, \end{aligned} \quad (6.51)$$

其中

$$\begin{cases} m_c(t) = a(t) \cos \varphi(t) \\ m_s(t) = a(t) \sin \varphi(t) \end{cases} \quad (6.52)$$

可见, 将正弦和余弦看成是函数基中的基函数,  $m_c(t)$  和  $m_s(t)$  相对  $\cos \omega_0 t$  来讲都是低频信号, 且  $m_c(t)$  和  $m_s(t)$  在几何上彼此正交。

## 2. 高频窄带信号的复指数形式

信号  $s(t)$  的希尔伯特变换为

$$\begin{aligned}\hat{s}(t) &= H[m_c(t) \cos \omega_0 t - m_s(t) \sin \omega_0 t] \\ &= H[m_c(t) \cos \omega_0 t] - H[m_s(t) \sin \omega_0 t].\end{aligned}\quad (6.53)$$

如果  $m_c(t), m_s(t)$  均为低频限带信号, 即满足

$$\begin{aligned}m_c(t) &\xLeftrightarrow[F]{F^{-1}} M_c(\omega), \quad |\omega| < \frac{\Delta\omega_c}{2} < \omega_0 \quad (\text{低频限带}) \\ m_s(t) &\xLeftrightarrow[F]{F^{-1}} M_s(\omega), \quad |\omega| < \frac{\Delta\omega_s}{2} < \omega_0 \quad (\text{低频限带}).\end{aligned}\quad (6.54)$$

由例 6-2 的结论, 可得  $s(t)$  的希尔伯特变换

$$\begin{aligned}\hat{s}(t) &= H[m_c(t) \cos \omega_0 t] - H[m_s(t) \sin \omega_0 t] \\ &= m_c(t) \sin \omega_0 t + m_s(t) \cos \omega_0 t \\ &= a(t) \cos \varphi(t) \sin \omega_0 t + a(t) \sin \varphi(t) \cos \omega_0 t \\ &= a(t) \sin [\omega_0 t + \varphi(t)].\end{aligned}\quad (6.55)$$

此时,  $s(t)$  的解析形式可以用复指数表示为

$$\begin{aligned}\tilde{s}(t) &= s(t) + j\hat{s}(t) = a(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] + ja(t) \sin [\omega_0 t + \varphi(t)] \\ &= a(t) e^{j[\omega_0 t + \varphi(t)]} = m(t) e^{j\omega_0 t} = \tilde{s}_{\text{复}}(t),\end{aligned}\quad (6.56)$$

式中

$$m(t) = a(t) e^{j\varphi(t)}, \quad (6.57)$$

通常, 将  $m(t)$  称为信号  $s(t)$  的复包络, 而将  $e^{j\omega_0 t}$  称为复载频。 $a(t)$  称为包络, 解析信号  $\tilde{s}(t)$  称为预包络。复包络  $m(t)$  可展开为

$$m(t) = a(t) \cos \varphi(t) + ja(t) \sin \varphi(t) = m_c(t) + jm_s(t). \quad (6.58)$$

可见, 相对  $\cos \omega_0 t$  来讲, 包络  $a(t)$  和复包络  $m(t)$  都是低频限带信号。

## 误差分析

## (1) 误差产生的原因

从复指数形式的推导过程可以看出, 尽管解析信号  $\tilde{s}(t)$  是复信号, 但要将它表示成复指数形式, 还必须满足  $m_c(t), m_s(t)$  均为低频限带信号的条件。如果不满足此条件, 就不能由解析信号推出复指数表示。即不满足  $m_c(t)$  和  $m_s(t)$  低频限带信号的条件, 其解析信号表示与复指数表示仍存在一定的误差。

## (2) 误差的计算

下面举例, 在频域上对解析信号  $\tilde{s}(t)$  与复指数信号  $\tilde{s}_{\text{复}}(t)$  进行比较, 计算它们之间的误差。

**例 6.7** 设一实信号  $s(t) = a(t) \cos \omega_0 t$ , 其复包络  $m(t) = a(t)$ , 复包络的频谱  $M(\omega)$  不满足低频限带条件, 如图 6-5 所示

$$m(t) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} M(\omega), \quad |\omega| < \Delta\omega \not\ll \omega_0. \quad (6.59)$$

实信号  $s(t)$  频谱

$$S(\omega) = \frac{1}{2} [M(\omega + \omega_0) + M(\omega - \omega_0)]. \quad (6.60)$$

①  $s(t)$  的解析信号

$$\tilde{s}(t) = s(t) + j\hat{s}(t). \quad (6.61)$$

解析信号的频谱

$$\tilde{S}(\omega) = 2S(\omega)U(\omega) = [M(\omega + \omega_0) + M(\omega - \omega_0)]U(\omega). \quad (6.62)$$

②  $s(t)$  的复指数表示为

$$\tilde{s}_{\text{复}}(t) = m(t)e^{j\omega_0 t}. \quad (6.63)$$

复信号频谱

$$\tilde{S}_{\text{复}}(t)(\omega) = M(\omega - \omega_0). \quad (6.64)$$

比较复信号频谱与解析信号频谱间的误差, 如图 6-5 所示, 有

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= \tilde{S}_{\text{复}}(\omega) - \tilde{S}(\omega) \\ &= M(\omega - \omega_0)[1 - U(\omega)] - M(\omega + \omega_0)U(\omega). \end{aligned}$$

这个误差在时域的表达式为

$$\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ \int_{-\infty}^{-\omega_0} M(\omega) e^{i(\omega + \omega_0)t} d\omega \right]. \quad (6.65)$$

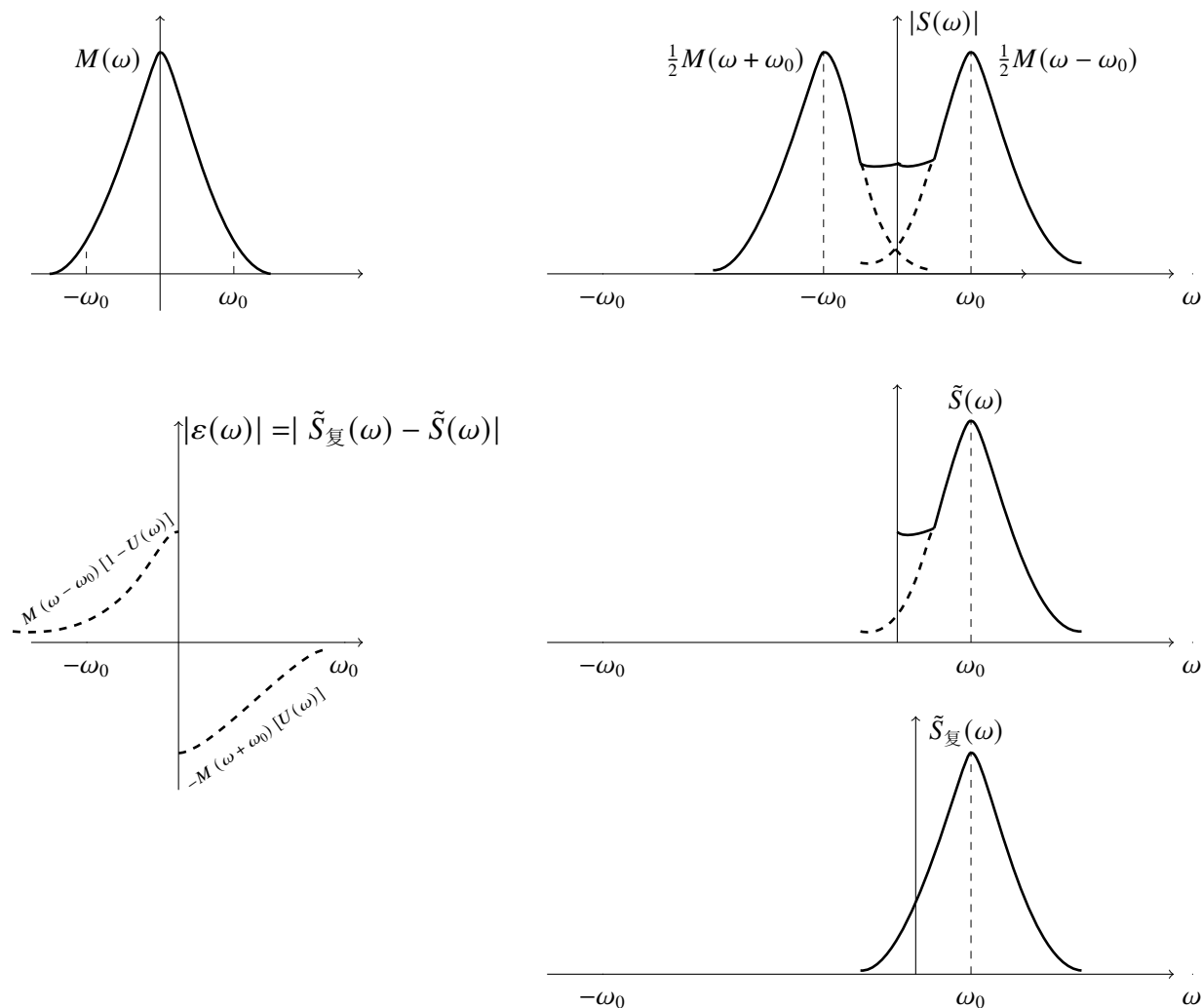


图 6-5 误差分析

### (3) 误差分析

如图 6-5 所示, 误差  $\varepsilon(t)$  的大小取决于  $M(\omega)$  中  $|\omega| > \omega_0$  尾部所包含的能量。若尾部能量为零, 则误差  $\varepsilon(t)$  为零。因此, 若要将  $s(t)$  的解析形式表示成复数形式, 则要求复包络  $m(t)$  必须是个低频限带信号, 即必须满足

$$M(\omega) = 0, \quad |\omega| > \Delta\omega, \Delta\omega < \omega_0 \quad (6.66)$$

也即  $\varepsilon(t) = 0$ 。可见, 此条件与前面从解析形式推导到复指数形式过程中的条件是一致的。

对于一般窄带信号而言, 即使复包络  $m(t)$  不是限带, 但如果能使  $\omega_0 \gg \Delta\omega$ , 使得尾部能量很小, 误差  $\varepsilon(t)$  也很小, 则用  $s(t)$  的复指数信号替代  $s(t)$  的解析信号也是允许的。

当然, 对于一个理想的高频窄带信号来讲, 由于  $\omega_0 \gg \Delta\omega$ , 且复包络  $m(t)$  又是限带的, 可以用指数形式的复信号直接替代其解析信号。

**例 6.8** 若已知高频窄带信号复包络的频谱  $M(\omega)$ , 有

$$\tilde{s}_{\text{复}}(t) = m(t)e^{j\omega_0 t} \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} \tilde{S}_{\text{复}}(\omega) = M(\omega - \omega_0), \quad (6.67)$$

给出高频窄带信号频谱的复指数表示形式。

则

$$\tilde{s}_{\text{复}}^*(t) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} \tilde{S}_{\text{复}}^*(-\omega) = M^*(-\omega - \omega_0) \quad (6.68)$$

由于可以用复指数形式代替其解析形式  $\tilde{s}(t) = \tilde{s}_{\text{复}}(t)$ , 则

$$s(t) = \text{Re}[\tilde{s}(t)] = \text{Re}[\tilde{s}_{\text{复}}(t)] = \frac{1}{2} [\tilde{s}_{\text{复}}(t) + \tilde{s}_{\text{复}}^*(t)] \quad (6.69)$$

则高频窄带信号的频谱可以表示为

$$S(\omega) = \frac{1}{2} [M(\omega - \omega_0) + M^*(-\omega - \omega_0)] \quad (6.70)$$

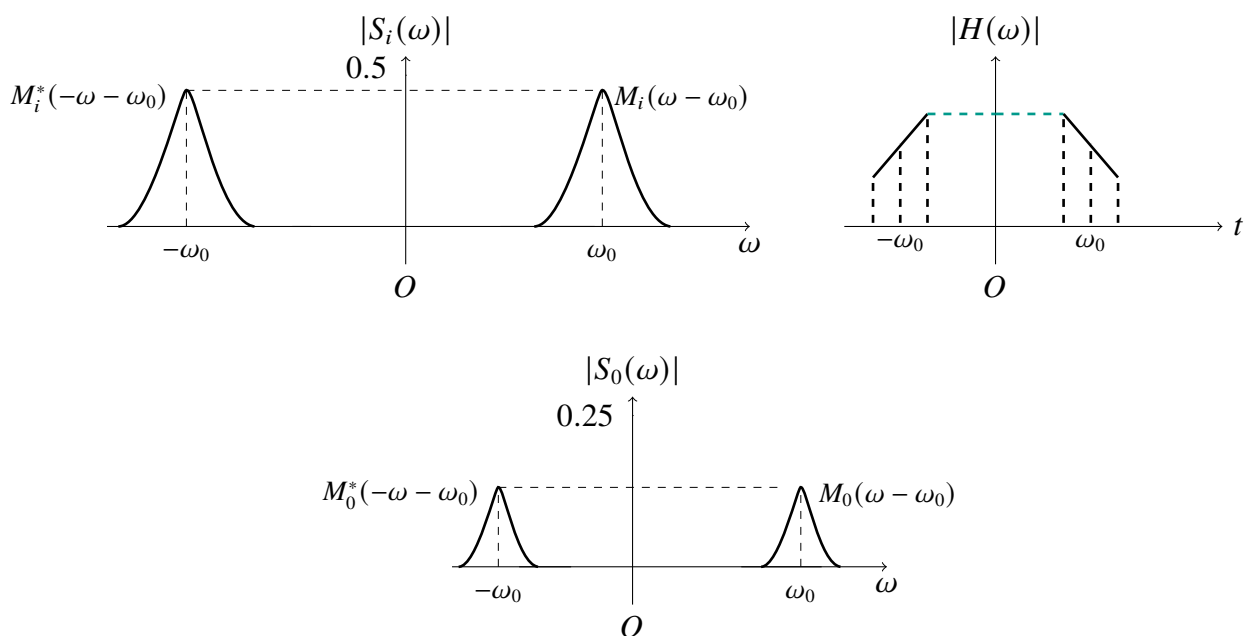


图 6-6 高频窄带信号通过窄带系统

### 6.1.4 高频窄带信号通过窄带系统

窄带信号的复数表示方法同样可以应用到窄带系统上, 以简化对系统的分析当复包络  $m(t)$  是低频限带信号时, 无论是高频窄带信号还是高频窄带系统, 都可以直接用指数形式替代其解析形式。下面就讨论高频窄带信号通过相同中心频率的高频窄带系统的一种简便分析方法。

设输入的高频窄带信号为

$$s_i(t) = \text{Re} [\tilde{s}_i(t)] = \text{Re} [m_i(t)e^{j\omega_0 t}], \quad (6.71)$$

则其频谱可表示为

$$S_i(\omega) = \frac{1}{2} [M_i(\omega - \omega_0) + M_i^*(-\omega - \omega_0)]. \quad (6.72)$$

高频窄带系统的冲激响应和传递函数为

$$\begin{aligned} h(t) &= \text{Re}[\tilde{h}(t)] = \text{Re} [h_m(t)e^{j\omega_0 t}] \\ H(\omega) &= \frac{1}{2} [H_m(\omega - \omega_0) + H_m^*(-\omega - \omega_0)]. \end{aligned} \quad (6.73)$$

其中  $h_m(t)$ ,  $H_m(a)$  分别为窄带系统的复包络及其频谱。

则系统的输出为

$$\begin{aligned} s_o(t) &= s_i(t) * h(t) \\ S_o(\omega) &= S_i(\omega)H(\omega). \end{aligned} \quad (6.74)$$

将输入窄带信号和窄带系统的频谱代入上式, 得

$$\begin{aligned} S_o(\omega) &= \frac{1}{4} [M_i(\omega - \omega_0) + M_i^*(-\omega - \omega_0)] [H_m(\omega - \omega_0) + H_m^*(-\omega - \omega_0)] \\ &= \frac{1}{4} [M_i(\omega - \omega_0) H_m(\omega - \omega_0) + M_i(\omega - \omega_0) H_m^*(-\omega - \omega_0) \\ &\quad + M_i^*(-\omega - \omega_0) H_m(\omega - \omega_0) + M_i^*(-\omega - \omega_0) H_m^*(-\omega - \omega_0)] \end{aligned} \quad (6.75)$$

由于  $s_i(t)$  的复包络  $m_i(t)$  是低频限带信号, 其频谱  $M_i(\omega)$  如图 6-6 所示

$$\begin{cases} M_i^*(-\omega - \omega_0) H_m(\omega - \omega_0) = 0 \\ M_i(\omega - \omega_0) H_m^*(-\omega - \omega_0) = 0 \end{cases} \quad (6.76)$$

由图可知, 式 (6.76) 显然成立。所以

$$S_o(\omega) = \frac{1}{4} [M_i(\omega - \omega_0) H_m(\omega - \omega_0) + M_i^*(-\omega - \omega_0) H_m^*(-\omega - \omega_0)]. \quad (6.77)$$

相应的输出信号为

$$s_o(t) = \frac{1}{4} \{ [m_i(t) * h_m(t)] e^{j\omega_0 t} + [m_i(t) * h_m(t)]^* e^{-j\omega_0 t} \} \quad (6.78)$$

又因为

$$\tilde{s}_o(t) = \text{Re} [\tilde{s}_o(t)] = \frac{1}{2} [\tilde{s}_o(t) + \tilde{s}_o^*(t)] . \quad (6.79)$$

可得

$$\tilde{s}_o(t) = \frac{1}{2} [m_i(t) * h_m(t)] e^{j\omega_0 t} . \quad (6.80)$$

式表明, 输出  $s_o(t)$  也是一高频窄带信号, 且其复包络

$$m_o(t) = m_i(t) * \frac{1}{2} h_m(t), \quad (6.81)$$

即输出的复包络  $m_o(t)$  可由输入信号的复包络  $m_i(t)$  与系统冲激响应的复包络  $h_m(t)/2$  求得, 因此, 输出  $s_o(t)$  也可写成

$$s_o(t) = \text{Re} [m_o(t) e^{j\omega_0 t}] . \quad (6.82)$$

结果表明, 一个高频窄带信号通过高频窄带系统, 可以作如图 6-7 所示的等效, 即可以等效为信号的复包络通过一个冲激响应为  $h_m(t)/2$  的低通系统。即输出的复包络  $m_o(t)$  仅由输入信号的复包络  $m_i(t)$  与系统冲激响应的复包络  $h_m(t)/2$  卷积而成。这种处理方法使我们对高频窄带信号通过高频窄带系统这类问题的分析与运算大为简化, 避免了高频信号与高频冲激响应卷积时高频项处理的麻烦。

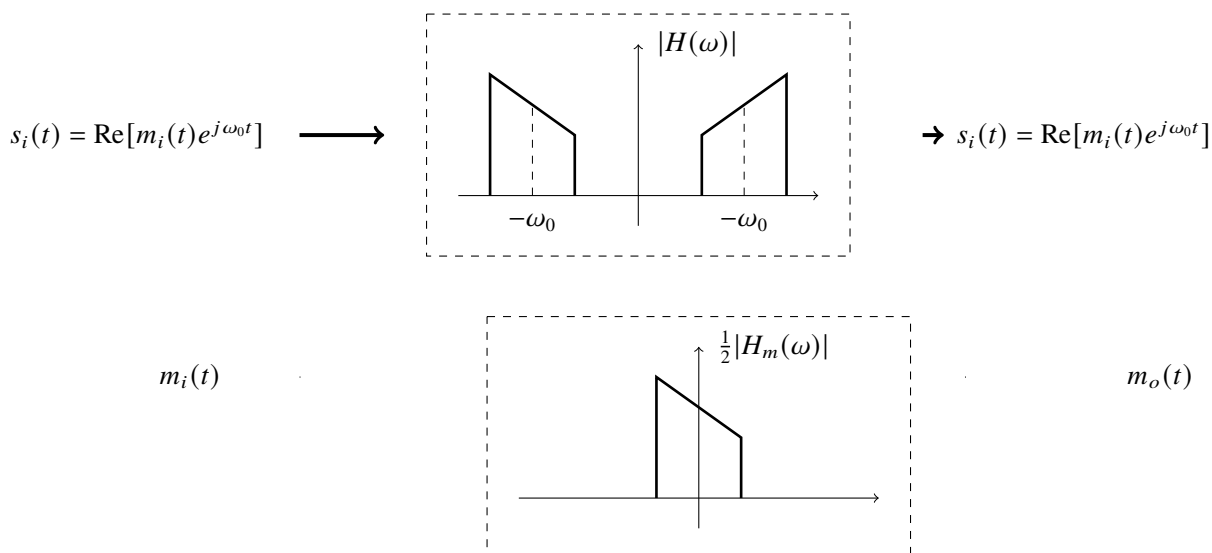


图 6-7 运算的简化

### 6.1.5 随机过程的解析形式及其性质

实随机过程  $X(t)$  的解析形式 (或解析过程) 为

$$\tilde{X}(t) = X(t) + j\hat{X}(t), \quad (6.83)$$

其中

$$\hat{X}(t) = X(t) * \frac{1}{\pi t}. \quad (6.84)$$

称为  $X(t)$  的希尔伯特变换,

由于希尔伯特变换具有线性性质,  $1/\pi t$  可以看成一线性系统的冲激响应。因此,  $\hat{X}(t)$  可以看成是在输入  $X(t)$  下线性系统  $h_\Lambda(t)$  的输出, 即

$$Y(t) = X(t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{X}(t). \quad (6.85)$$

如图 6-8 所示。正是利用这一等效公式, 使得在下一节中应用解析过程来分析窄带随机信号变得是十分方便。

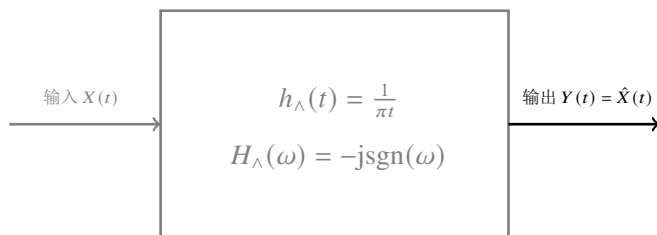


图 6-8 解析过程

既然希尔伯特变换是一种线性变换, 那么随机信号通过线性系统的结论在此解析过程的性质亦可应用。

1° 若  $X(t)$  为宽平稳 (实) 过程, 则  $\hat{X}(t)$  也是宽平 (实) 过程且  $X(t)$  与  $\hat{X}(t)$  联合宽平稳。

2° 实随机过程  $X(t)$  和它的  $\hat{X}(t)$  具有相同的自相关函数和功率谱密度。

证: 从图 6-8 不难看出

$$\begin{aligned} G_{\hat{X}}(\omega) &= G_X(\omega) |H_\Lambda(\omega)|^2, \\ |H_\Lambda(\omega)| &= |-j\text{sgn}(\omega)| = 1. \end{aligned} \quad (6.86)$$

因此

$$G_{\hat{X}}(\omega) = G_X(\omega) \Rightarrow R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau). \quad (6.87)$$



3°  $X(t)$  与  $\hat{X}(t)$  的互相关函数  $R_{X\hat{X}}(\tau)$  等于  $X(t)$  自相关函数的希尔伯特变换。据线性系统输入输出随机信号之间互相关函数的性质, 有

$$\begin{cases} R_{X\hat{X}}(\tau) = E[X(t)\hat{X}(t+\tau)] = R_X(\tau) * h_\Lambda(\tau) = R_X(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = \hat{R}_X(\tau). \\ R_{\hat{X}X}(\tau) = E[\hat{X}(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau) * h_\Lambda(-\tau) = -R_X(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = -\hat{R}_X(\tau). \end{cases} \quad (6.88)$$

且有

$$R_{X\hat{X}}(\tau) = -R_{\hat{X}X}(\tau). \quad (6.89)$$

由此可得  $X(t)$  与  $\hat{X}(t)$  的互功率谱密度为

$$\begin{aligned} G_{X\hat{X}}(\omega) &= F[R_{X\hat{X}}(\tau)] = F[\hat{R}_X(\tau)] \\ &= -j\text{sgn}(\omega)G_X(\omega) = \begin{cases} -jG_X(\omega), & \omega > 0 \\ jG_X(\omega), & \omega < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.90)$$

4°  $X(t)$  与  $\hat{X}(t)$  的互相关函数是  $\tau$  的奇函数。

证: 由于

$$R_{X\hat{X}}(-\tau) = R_X(-\tau) * h_\Lambda(-\tau). \quad (6.91)$$

且  $R_X(\tau)$  是偶函数, 则

$$R_{X\hat{X}}(-\tau) = R_X(-\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) = R_X(\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) = -\hat{R}_X(\tau) = -R_{X\hat{X}}(\tau). \quad (6.92)$$

同理可证

$$R_{X\hat{X}}(-\tau) = -R_{X\hat{X}}(\tau). \quad (6.93)$$

5° 随机过程  $R_{X,\hat{X}}(\tau), R_{\hat{X},X}(\tau)$  在任何同一时刻的两个状态正交。

证: 因为  $R_{X\hat{X}}(\tau), R_{\hat{X}X}(\tau)$  是  $\tau$  的奇函数, 所以当  $\tau = 0$  时, 有

$$\begin{cases} R_{X\hat{X}}(0) = 0 \\ R_{\hat{X}X}(0) = 0 \end{cases} \quad (6.94)$$

上式说明, 过程  $X(t)$  与  $\hat{X}(t)$  在任何同一时刻 ( $\tau = 0$ ) 的两个状态正交, 即

$$R_{X\hat{X}}(0) = E[X(t)\hat{X}(t)] = 0. \quad (6.95)$$

6° 解析过程的功率谱密度只存在于正频域。

按照复随机过程自相关函数的定义, 解析过程  $\tilde{X}(t)$  的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_{\tilde{X}}(\tau) &= E[\tilde{X}^*(t) \cdot \tilde{X}(t+\tau)] \\ &= E\{[X(t) - j\hat{X}(t)][X(t+\tau) + j\hat{X}(t+\tau)]\} \\ &= R_X(\tau) + R_{\hat{X}}(\tau) + j[R_{X\hat{X}}(\tau) - R_{\hat{X}X}(\tau)]. \end{aligned} \quad (6.96)$$

再应用性质 2° 和 3°, 可得

$$R_{\tilde{X}}(\tau) = 2 [R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)] = 2\tilde{R}_X(\tau). \quad (6.97)$$

对式 (6.97) 两边求傅里叶变换, 可得解析过程  $\tilde{X}(t)$  的功率谱密度

$$\begin{aligned} G_{\tilde{X}}(\omega) &= 2 \{G_X(\omega) + jF[\hat{R}_X(\tau)]\} \\ &= 2 \{G_X(\omega) + j[-j\operatorname{sgn}(\omega)G_X(\omega)]\} \\ &= 2 [G_X(\omega) + \operatorname{sgn}(\omega)G_X(\omega)] \\ &= \begin{cases} 4G_X(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.98)$$

上式表明, 解析过程的功率谱密度只存在于正频域, 即它是单边带的功率谱密度其强度等于原实过程功率谱密度强度的 4 倍。  $G_X(\omega)$  与  $G_{\tilde{X}}(\omega)$  的关系如图 6-9 所示。

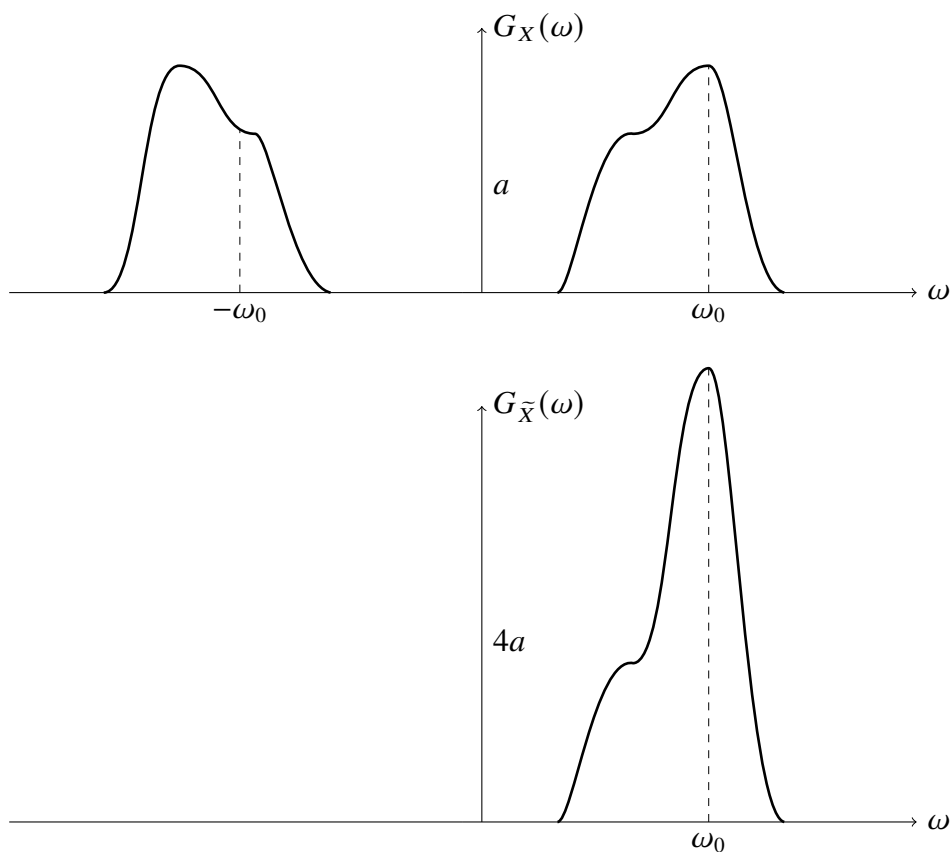


图 6-9 解析过程的功率谱

## 6.2 窄带随机过程

### 6.2.1 窄带随机过程的数学模型及复指数形式

#### 1. 窄带随机过程的数学模型

在雷达、通信等许多电子系统中, 通常是用一个宽带随机信号来激励一个窄带滤波器。此时, 在滤波器输出端得到的便是一个窄带随机信号, 若用一示波器来观测它的某次输出的波形 (某个样本), 则可以看到, 它的样本接近于一个正弦波, 但此正弦波的幅度和相位都在作缓慢的随机变化, 典型窄带随机过程的功率谱密度及样本函数图形如图 6-10 所示

我们将图 6-10(b) 中的样本函数的图形与图 6-4(b) 所示的波形进行比较, 可知窄带随机过程的一个样本函数就是一个高频窄带信号。因此, 对应于某次观测试验结果, 样本函数可写成

$$x_k(t) = a_k(t) \cos [\omega_0 t + \varphi_k(t)], \quad \zeta_k \in \Omega \quad (6.99)$$

而所有样本函数的总体—窄带随机过程, 则可写成

$$X(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)]. \quad (6.100)$$

上式就是窄带随机过程常用的数学模型。

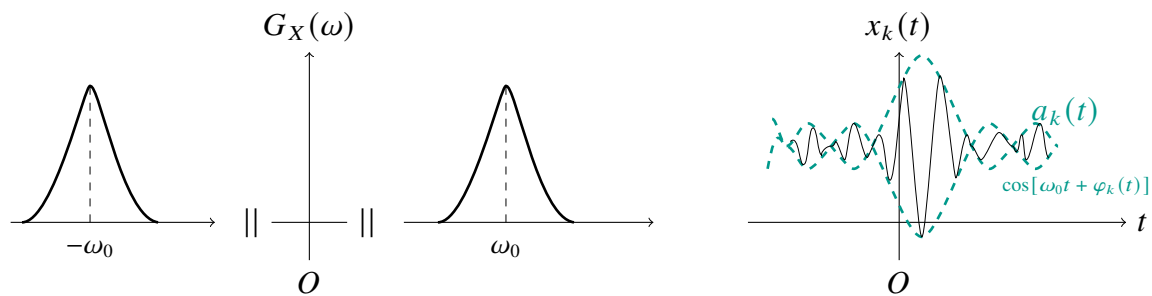


图 6-10 窄带随机过程

由于  $a_k(t)$  和  $\varphi(t)$  相对  $\cos \omega_0 t$  来说是慢变化的时间函数, 所以  $A(t)$  和  $\Phi(t)$  相对常数来说就是慢变化的随机过程。于是, 我们就可以把窄带随机过程看成是一个随机调幅和随机调相的准正

#### 2. 窄带随机过程的复指数形式

若将高频窄带信号的复指数形式应用到窄带随机过程中, 则

$$\tilde{X}(t) = A(t)e^{j\Phi(t)}e^{j\omega_0 t} = M(t)e^{j\omega_0 t}, \quad (6.101)$$

式中  $M(t)$  称为  $X(t)$  的复包络,  $A(t)$  称为包络,  $\Phi(t)$  称为相位,  $e^{j\omega_0 t}$  称之为复载频。且  $M(t) = A(t)e^{j\Phi(t)}$ , 如果此窄带随机过程  $X(t)$  是平稳过程, 那么用复指数形式表示后, 其统计特性如下:

(1) 自相关函数

$$\begin{aligned} R_{\tilde{X}}(\tau) &= E \left[ \tilde{X}^*(t) \tilde{X}(t+\tau) \right] \\ &= E \left[ M^*(t) e^{-j\omega_0 t} M(t+\tau) e^{j\omega_0(t+\tau)} \right] \\ &= E \left[ M^*(t) M(t+\tau) \right] e^{j\omega_0 \tau} \\ &= R_M(\tau) e^{j\omega_0 \tau}. \end{aligned} \quad (6.102)$$

(2) 功率谱密度

若傅里叶变换对  $R_M(\tau) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} G_M(\omega)$ , 则有

$$G_{\tilde{X}}(\omega) = G_M(\omega - \omega_0). \quad (6.103)$$

因为  $R_{\tilde{X}}(\tau) = 2 [R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)]$ , 可得

$$R_{\tilde{X}}(\tau) + R_{\tilde{X}}^*(\tau) = 2 [R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)] + 2 [R_X(\tau) - j\hat{R}_X(\tau)]. \quad (6.104)$$

由上式解得

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \frac{1}{4} [R_{\tilde{X}}(\tau) + R_{\tilde{X}}^*(\tau)] = \frac{1}{4} [R_M(\tau) e^{j\omega_0 \tau} + R_M^*(\tau) e^{-j\omega_0 \tau}], \\ G_X(\omega) &= \frac{1}{4} [G_{\tilde{X}}(\omega) + G_{\tilde{X}}^*(-\omega)] = \frac{1}{4} [G_M(\omega - \omega_0) + G_M^*(-\omega - \omega_0)]. \end{aligned} \quad (6.105)$$

由此得出  $X(t)$  与  $\tilde{X}(t)$  及  $M(t)$  在频域上的关系, 如图 6-11 所示。

## 6.2.2 窄带随机过程的“垂直”分解

统计分析的对象是随机函数。为了更方便的对窄带随机过程进行统计分析, 先将窄带随机过程中的随机函数与非随机函数以不同的因式表示, 分解开后表达, 故有

$$\begin{aligned} X(t) &= A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)] \\ &= A(t) \cos \Phi(t) \cos \omega_0 t - A(t) \sin \Phi(t) \sin \omega_0 t \\ &= A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t = [A_c(t), A_s(t)] [\cos \omega_0 t, -\sin \omega_0 t]^T, \end{aligned} \quad (6.106)$$

上式中,  $\cos \omega_0 t$  和  $\sin \omega_0 t$  都是非随机函数, 而随机函数为

$$\begin{cases} A_c(t) = A(t) \cos \Phi(t) \\ A_s(t) = A(t) \sin \Phi(t) \end{cases} \quad (6.107)$$

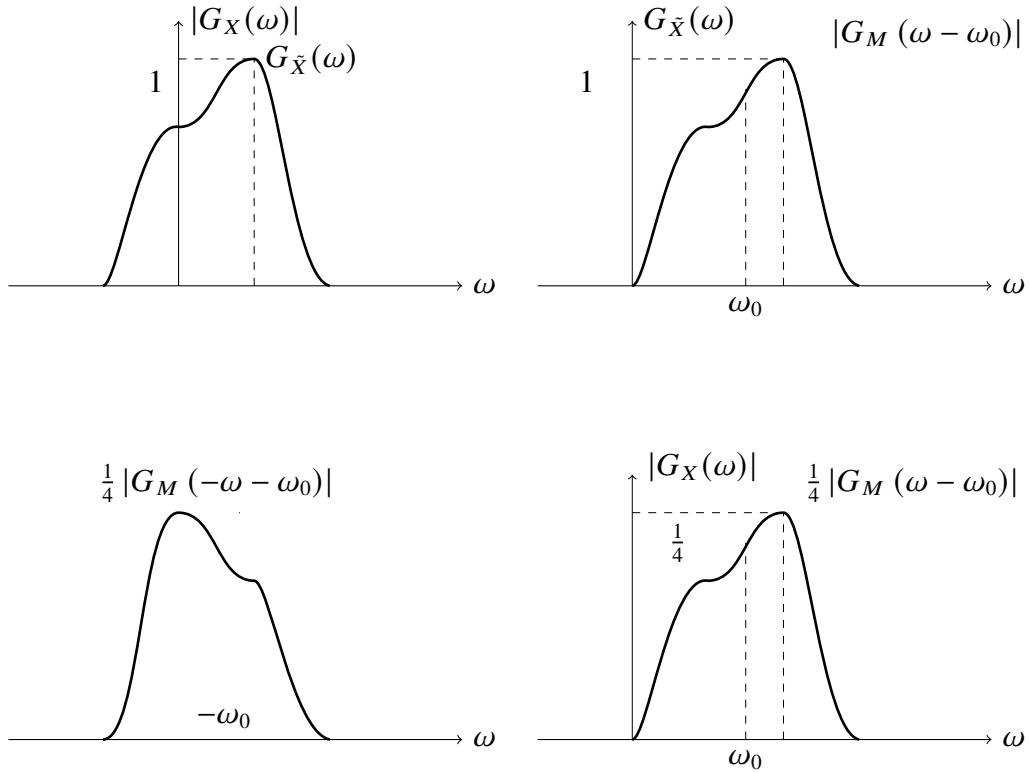


图 6-11 窄带随机过程的功率谱

若将窄带过程的复数形式分解为

$$\tilde{X}(t) = A(t)e^{j\Phi(t)}e^{j\omega_0 t} = M(t)e^{j\omega_0 t}, \quad (6.108)$$

其中  $M(t) = A(t)e^{j\Phi(t)}$ ,  $\tilde{X}(t)$  中的随机分量是  $\tilde{X}(t)$ , 而  $\tilde{X}(t)$  又可分解为

$$M(t) = [A(t) \cos \Phi(t) + jA(t) \sin \Phi(t)] = A_c(t) + jA_s(t), \quad (6.109)$$

其中

$$\begin{cases} A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)} \\ \Phi(t) = \tan^{-1} \frac{A_s(t)}{A_c(t)} = \arctan \frac{A_s(t)}{A_c(t)} \end{cases} \quad (6.110)$$

可见, 窄带随机过程  $X(t)$  的包络过程的垂直分解  $A(t)$ , 相位  $\Phi(t)$  完全可由  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  确定。且  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  是一对在几何上正交的分量。如图 6-12 所示。

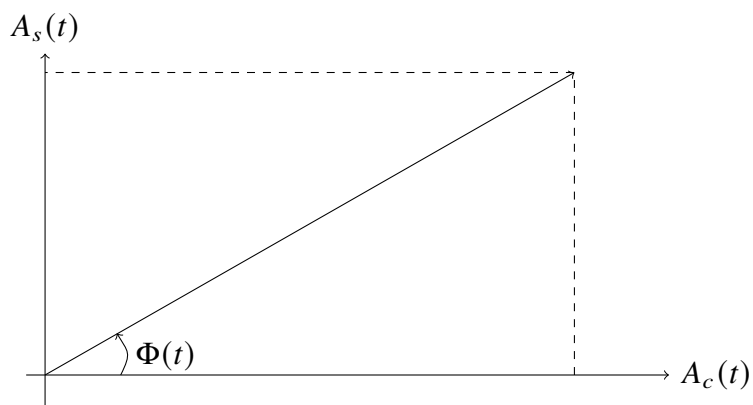


图 6-12 窄带过程的垂直分解

为了与统计意义上的“正交”有所区别,今后我们把几何意义上的“正交”改称为“垂直”,称  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  为一对垂直分量。

经过以上分析可知,  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  包含了窄带随机过程  $X(t)$  的所有随机因素。因此,下面讨论窄带随机过程  $X(t)$  的统计特性,主要就是讨论这一对垂直分量  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  的统计特性及它们与过程  $X(t)$  之间的统计关系。

在讨论统计特性之前,先导出  $X(t)$ ,  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  之间的函数关系如下

$$\begin{cases} X(t) = A_c(t) \cos \omega_0(t) - A_s(t) \sin \omega_0 t \\ \hat{X}(t) = A_c(t) \sin \omega_0(t) + A_s(t) \cos \omega_0 t \\ A_c(t) = X(t) \cos \omega_0(t) + \hat{X}(t) \sin \omega_0 t \\ A_s(t) = \hat{X}(t) \cos \omega_0(t) - X(t) \sin \omega_0 t \end{cases} \quad (6.111)$$

### 6.2.3 窄带随机过程的统计分析

若窄带随机过程  $X(t)$  是零均值平稳的实过程,且功率谱密度如图 6-13 所示,满足

$$G_X(\omega) = \begin{cases} G_X(\omega), & \begin{pmatrix} \Omega < \omega - \omega_0 < \Delta\omega - \Omega \\ -\Delta\omega + \Omega < \omega + \omega_0 < \Omega \end{pmatrix} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (6.112)$$



图 6-13 零均值平稳窄带实随机过程的频谱

这里  $\Omega$  和  $\Delta\omega$  皆为正实常数,  $\Delta\omega \ll \omega_0$ 。则  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  这对垂直分量有下面的性质:

- 1)  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  均为实随机过程。
- 2)  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  的期望  $A(t)$  和  $A(t)$  的期望均为 0, 即满足

$$E[A_c(t)] = E[A_s(t)] = 0. \quad (6.113)$$

- 3)  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  的自相关函数

①  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  各自平稳, 它们的自相关函数为

$$R_{A_c}(\tau) = R_{A_s}(\tau) = R_X(\tau) \cos \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \sin \omega_0 \tau. \quad (6.114)$$

② 当  $\tau = 0$  时, 有

$$R_{A_c}(0) = R_{A_s}(0) = R_X(0). \quad (6.115)$$

即

$$E[A_c^2(t)] = E[A_s^2(t)] = E[X^2(t)], \quad (6.116)$$

表示  $X(t)$ ,  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  三者的平均功率皆相等。由于都是零均值, 因此三者的方差相同, 即

$$\sigma_{A_c}^2 = \sigma_{A_s}^2 = \sigma_X^2. \quad (6.117)$$

- 4)  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  的功率谱密度

$$G_{A_c}(\omega) = G_{A_s}(\omega) = L_p[G_X(\omega - \omega_0) + G_X(\omega + \omega_0)]. \quad (6.118)$$

其中  $L_p[\cdot]$  表示一低通滤波器。

证: 由于

$$\begin{aligned} R_{A_c}(\tau) &= R_X(\tau) \cos \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \sin \omega_0 \tau \\ &= \frac{1}{2} R_X(\tau) [e^{j\omega_0 \tau} + e^{-j\omega_0 \tau}] + \frac{1}{2j} \hat{R}_X(\tau) [e^{j\omega_0 \tau} - e^{-j\omega_0 \tau}]. \end{aligned} \quad (6.119)$$

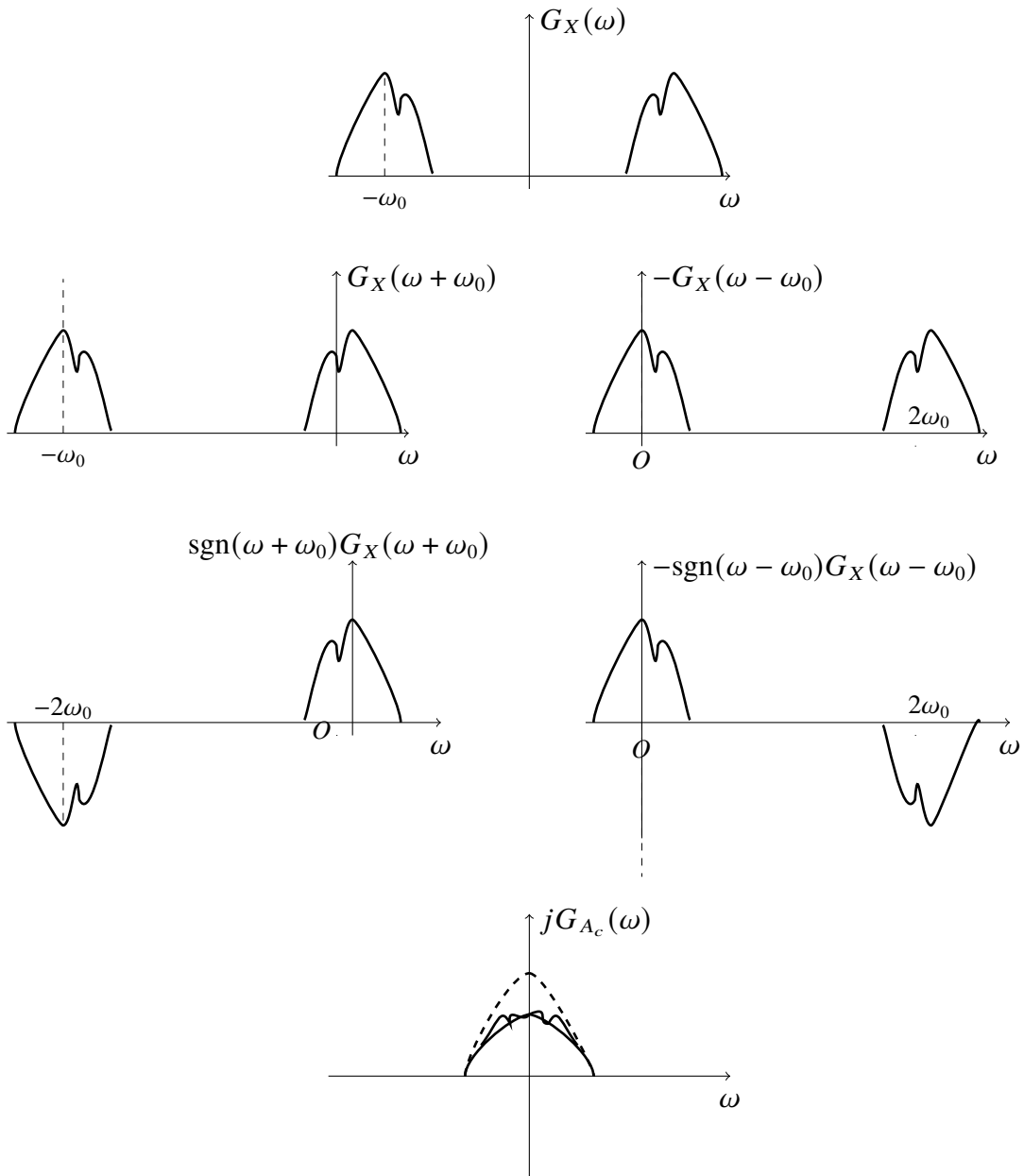


图 6-14 垂直分量的功率谱密度



两边取傅里叶变换, 并利用  $F[\hat{R}_X(\tau)] = -j\text{sgn}(\omega)G_X(\omega)$ , 可得

$$G_{A_c}(\omega) = \frac{1}{2} [G_X(\omega - \omega_0) + G_X(\omega + \omega_0)] + \frac{1}{2} [-\text{sgn}(\omega - \omega_0) G_X(\omega - \omega_0) + \text{sgn}(\omega + \omega_0) G_X(\omega + \omega_0)]. \quad (6.120)$$

上式各项所对应的功率谱密度如图 6-14 所示。从图形中可以直接得出

$$G_{A_c}(\omega) = L_p [G_X(\omega - \omega_0) + G_X(\omega + \omega_0)]. \quad (6.121)$$

同理可得

$$G_{A_s}(\omega) = L_p [G_X(\omega - \omega_0) + G_X(\omega + \omega_0)]. \quad (6.122)$$

这说明,  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  都是低频限带过程。

5)  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  的互相关函数

①  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  联合平稳, 它们的互相关函数为

$$\begin{cases} R_{A_c A_s}(\tau) = -R_X(\tau) \sin \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \cos \omega_0 \tau \\ R_{A_s A_c}(\tau) = R_X(\tau) \sin \omega_0 \tau - \hat{R}_X(\tau) \cos \omega_0 \tau \\ R_{A_s A_s}(\tau) = -R_{A_c A_s}(\tau) \end{cases} \quad (6.123)$$

② 互相关函数  $R_{A_c A_s}(\tau)$ ,  $R_{A_s A_c}(\tau)$  均是  $\tau$  的奇函数。

$$\begin{cases} R_{A_c A_s}(\tau) = -R_{A_c A_s}(-\tau) \\ R_{A_s A_c}(\tau) = -R_{A_s A_c}(-\tau) \end{cases} \quad (6.124)$$

③ 当  $\tau = 0$  时, 有

$$R_{A_c A_s}(0) = 0 \quad (6.125)$$

说明随机过程  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  在同一时刻的两个状态 (随机变量) 之间是相互正交的。

因为  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  的均值皆为 0, 所以当  $\tau = 0$  时, 也有

$$C_{A_c A_s}(0) = 0. \quad (6.126)$$

说明随机过程  $A_c(t)$ ,  $A_s(t)$  在同一时刻的两个状态 (随机变量) 之间是不相关的。

6)  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  的互谱密度

① 功率谱密度  $G_X(\omega)$  相对于中心频率  $\omega_0$  非偶对称时, 如图 6-15(a) 所示

$$G_{A_c A_s}(\omega) = -jL_p [G_X(\omega + \omega_0) - G_X(\omega - \omega_0)] = -G_{A_s A_c}(\omega). \quad (6.127)$$

证: 由  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  的互相关函数

$$\begin{aligned} R_{A_c A_s}(\tau) &= -R_X(\tau) \sin \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \cos \omega_0 \tau \\ &= -\frac{1}{2j} R_X(\tau) [e^{j\omega_0 \tau} - e^{-j\omega_0 \tau}] + \frac{1}{2} \hat{R}_X(\tau) [e^{j\omega_0 \tau} + e^{-j\omega_0 \tau}]. \end{aligned} \quad (6.128)$$

两边取傅里叶变换, 并利用  $F[\hat{R}_X(\tau)] = -j \operatorname{sgn}(\omega) G_X(\omega)$ , 可得

$$\begin{aligned} G_{A_c A_s}(\omega) &= -\frac{1}{2j} [G_X(\omega - \omega_0) - G_X(\omega + \omega_0)] \\ &\quad + \frac{1}{2} [-j \operatorname{sgn}(\omega - \omega_0) G_X(\omega - \omega_0) - j \operatorname{sgn}(\omega + \omega_0) G_X(\omega + \omega_0)]. \end{aligned} \quad (6.129)$$

$$\begin{aligned} jG_{A_c A_s}(\omega) &= -\frac{1}{2} [G_X(\omega - \omega_0) - G_X(\omega + \omega_0)] \\ &\quad + \frac{1}{2} [\operatorname{sgn}(\omega - \omega_0) G_X(\omega - \omega_0) + \operatorname{sgn}(\omega + \omega_0) G_X(\omega + \omega_0)] \end{aligned} \quad (6.130)$$

上式各项所对应的功率谱密度图形如图 6-15 所示。

从图上易证

$$jG_{A_c A_s}(\omega) = L_p [G_X(\omega + \omega_0) - G_X(\omega - \omega_0)]. \quad (6.131)$$

即有

$$G_{A_c A_s}(\omega) = -jL_p [G_X(\omega + \omega_0) - G_X(\omega - \omega_0)]. \quad (6.132)$$

同理可得

$$G_{A_s A_c}(\omega) = jL_p [G_X(\omega + \omega_0) - G_X(\omega - \omega_0)]. \quad (6.133)$$

②  $G_X(\omega)$  相对于中心频率  $\omega$  偶对称时, 如图 6-16(a) 所示。

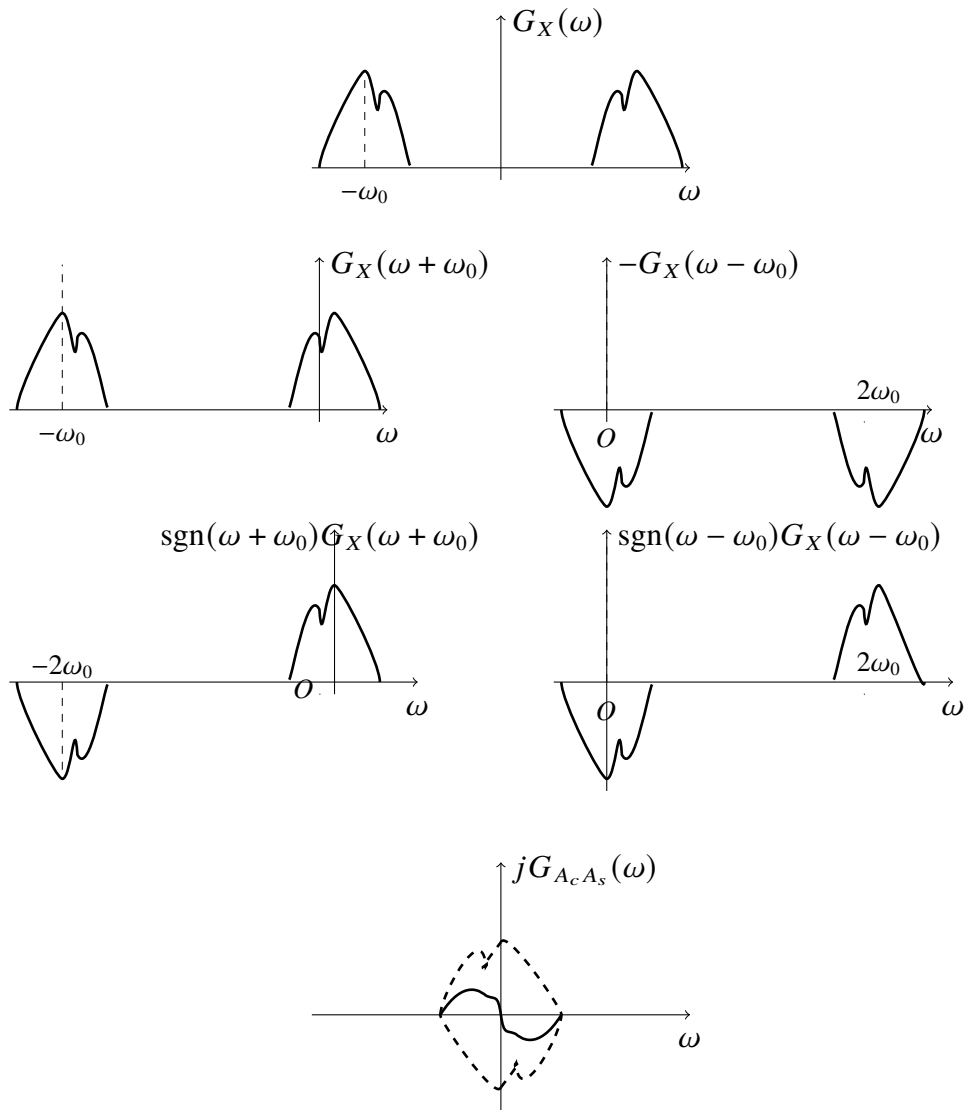


图 6-15 垂直分量的互谱密度

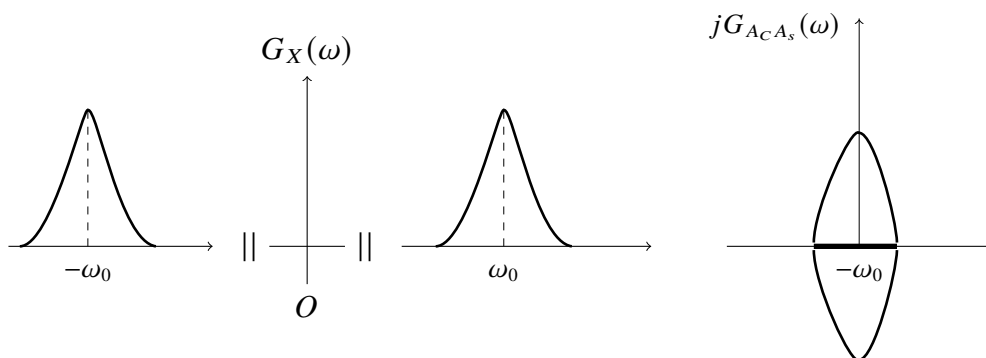
从图中可以看出, 各项叠加后恰好互相抵消, 如图 6-16(b) 所示。所以有

$$G_{A_c A_s}(\omega) = 0. \quad (6.134)$$

由上式可推出, 对任意  $\tau$  值

$$R_{A_c A_s}(\tau) = 0. \quad (6.135)$$

说明当  $X(t)$  具有对称于的功率谱密度时, 随机过程  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  正交, 此处正交是指随机过程正交, 当然可以推出  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  在同一时刻也是正交的。

图 6-16  $G_X(\omega)$  相对于中心频率  $\omega_0$  偶对称

由于  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  的均值皆为 0, 同样可以证明: 当  $X(t)$  具有对称于  $m$  的功率谱密度时, 两个随机过程  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  互不相关。仿照上述性质的证明方法, 可以证明 (过程略), 窄带随机过程  $X(t)$  的自相关函数为

$$R_X(\tau) = R_{A_c}(\tau) \cos \omega_0 \tau - R_{A_c A_s}(\tau) \sin \omega_0 \tau. \quad (6.136)$$

### 6.3 窄带高斯过程包络与相位的分布

在许多电子系统或电路中, 经常遇到用一个宽带随机过程  $N(t)$  激励一个高频窄带系统 (或简称窄带滤波器) 的情况, 如图 6-17 所示。由第四章的结论可知, 该情况下系统输出的随机过程都可以认为是一个窄带高斯过程。因此, 窄带高斯过程是通信和电子系统中最常遇到的随机信号模型, 研究窄带高斯过程具有实际意义。

根据上一节 6.2 的分析, 可将任一平稳窄带高斯过程  $X(t)$  表示为准正弦振荡的形式

$$X(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)], \quad (6.137)$$

其中  $A(t)$  和  $\Phi(t)$  分别是  $X(t)$  的包络和相位, 它们都是低频限带过程;  $\omega_0$  是  $X(t)$  的载波频率。

许多实际应用中, 常常需要检测出包络  $A(t)$  或相位  $\Phi(t)$  的信息。若将窄带随机信号  $X(t)$  送入一个包络检波器, 则在检波器输出端可得到包络  $A(t)$ ; 若将  $X(t)$  送入一个相位检波器, 便可检测出  $X(t)$  的相位信息, 如图 6-17 所示。由于  $A(t)$  和  $\Phi(t)$  都是  $X(t)$  的非线性变换, 推导它们的多维概率密度函数十分困难。本书将只限于推导它们的一维和二维概率密度函数。

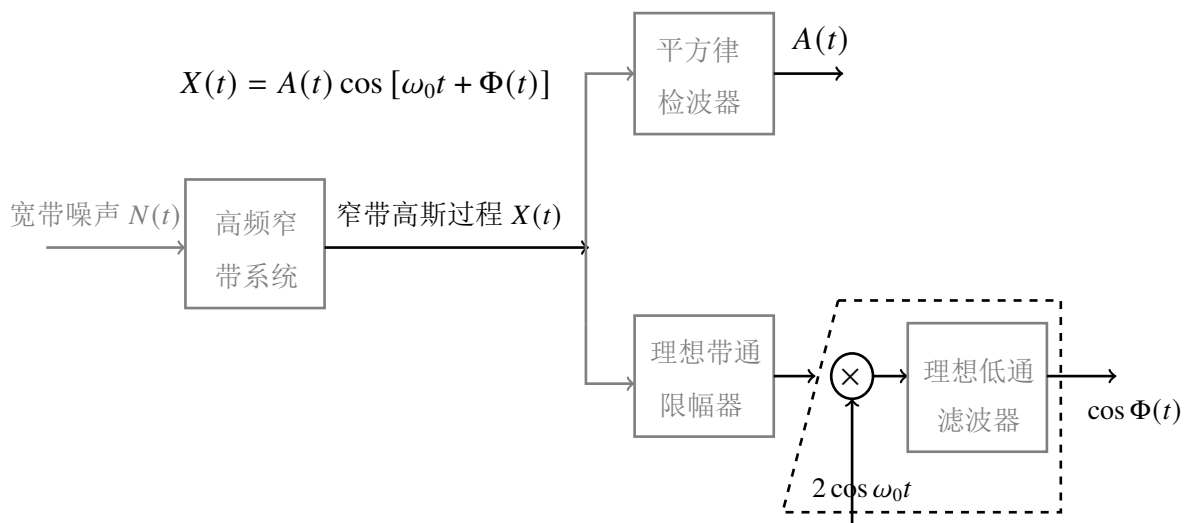


图 6-17 窄带高斯过程的包络与相位

### 6.3.1 包络和相位的一维概率分布

#### 例 6.3.1

设  $X(t)$  是一个窄带平稳高斯实随机过程, 具有零均值和方差 2。现求其包络  $A(t)$  和  $\Phi(t)$  的一维概率密度。

**分析:** 任一给定的时刻, 对  $A(t)$  和  $\Phi(t)$  采样, 便可得到随机变量  $A_t$  和  $\Phi_t$ 。求  $X(t)$  包络  $A(t)$  和  $\Phi(t)$  的一维概率密度就是求  $A_t$  和  $\Phi_t$  的概率密度  $f_A(a_i)$  和  $f_\varphi(\varphi)$ 。

由窄带过程的垂直分解,  $X(t)$  可以表示成

$$X(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)] = A_c(t) \cos \omega_0 t - A_0(t) \sin \omega_0 t. \quad (6.138)$$

由上节内容,  $A(t)$ ,  $\Phi(t)$  和  $A_c(t)$  和  $A_{st}(t)$  具有如下关系

$$\begin{cases} A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_{st}^2(t)} \\ \Phi(t) = \tan^{-1} \frac{A_{st}(t)}{A_c(t)} = \arctan \frac{A_{st}(t)}{A_c(t)} \end{cases}. \quad (6.139)$$

则  $A_t$  和  $\Phi_t$  以及  $A_{ct}$  和  $A_{st}$  满足

$$\begin{cases} A_t = g_1(A_{ct}, A_{st}) = \sqrt{A_{ct}^2 + A_{st}^2} \\ \Phi_t = g_2(A_{ct}, A_{st}) = \arctan \frac{A_{st}}{A_{ct}} \end{cases}. \quad (6.140)$$

其中  $A_{ct}$  和  $A_{st}$  为垂直分量  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  在固定时刻的采样, 也都是随机变量。则反变换关系为

$$\begin{cases} A_{ct} = h_1(A_t, \Phi_t) = A_t \cos \Phi_t \\ A_{st} = h_2(A_t, \Phi_t) = A_t \sin \Phi_t \end{cases} \quad (6.141)$$

求解思路:

① 首先根据已知的窄带高斯过程垂直分量  $A_c(t), A_s(t)$  的统计特性, 来研究  $A_{ct}$  和  $A_{st}$  的统计特性, 从而得到  $A_{ct}A_{st}$  的联合概率密度  $f_{A_cA_s}(a_{ct}, a_{st})$ 。

② 从  $f_{A_cA_s}(a_{ct}, a_{st})$  出发, 利用雅可比变换, 得到  $A_t, \Phi_t$  的联合概率密度  $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$ 。

③ 最后对联合概率密度  $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$  积分, 求边缘概率密度  $f_A(a_t)$  和  $f_\Phi(\varphi_i)$ 。

具体步骤为:

1. 求  $f_{A_cA_s}(a_{ct}, a_{st})$

首先根据已知的窄带高斯过程垂直分量  $A_c(t), A_s(t)$  的统计特性, 来研究  $A_{ct}, A_{st}$  以下的统计特性, 从而得到  $A_{ct}, A_{st}$  的联合概率密度  $f_{A_cA_s}(a_{ct}, a_{st})$ 。

2°  $A_{ct}$  和  $A_{st}$  都是高斯随机变量。

已知  $X(t)$  是一个平稳高斯过程, 由于  $X(t)$  是  $\hat{X}(t)$  的线性变换, 所以  $X(t)$  也是平稳高斯过程。 $A_c(t), A_s(t)$  均为  $X(t), \hat{X}(t)$  的线性组合, 故  $A_c(t), A_s(t)$  也是平稳高斯过程, 所以  $A_{ct}, A_{st}$  均为高斯变量。

3°  $A_{ct}$  和  $A_{st}$  的均值皆为零。

根据  $A_c(t), A_s(t)$  的性质, 有  $E[A_c(t)] = E[A_s(t)] = 0$ , 所以

$$E[A_{ct}] = E[A_{st}] = 0. \quad (6.142)$$

4°  $A_{ct}$  和  $A_{st}$  具有相同的方差, 并且等于  $X(t)$  的方差  $\sigma^2$ 。

根据  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  的性质, 有  $\sigma_{A_c}^2 = \sigma_{A_s}^2 = \sigma_X^2$ , 所以

$$\sigma_{A_c}^2 = \sigma_{A_s}^2 = \sigma_X^2 = \sigma^2. \quad (6.143)$$

5°  $A_{ct}$  和  $A_{st}$  相互独立。

根据  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  的性质可知, 同一时刻的两个状态互不相关, 满足  $C_{A_cA_s}(0) = 0$ 。即  $A_{ct}$  和  $A_{st}$  互不相关。而对于高斯随机变量来说, 互不相关与统计独立等价,  $A_{ct}$  和  $A_{st}$  相互独立。

① 根据以上的性质可知,  $A_{ct}$  和  $A_{st}$  是均值皆为零, 方差皆为  $\sigma^2$  的高斯变量, 且相互

独立。则其联合概率密度为

$$\begin{aligned}
 f_{A_c A_s}(a_{ct}, a_{st}) &= f_{A_c}(a_{ct}) f_{A_s}(a_{st}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{a_{ct}^2}{2\sigma^2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{a_{st}^2}{2\sigma^2}\right] \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{a_{ct}^2 + a_{st}^2}{2\sigma^2}\right].
 \end{aligned} \tag{6.144}$$

② 求  $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$

从  $f_{A_c A_s}(a_{ct}, a_{st})$  出发, 利用雅可比变换, 得  $A_t$  和  $\Phi_t$  的联合概率密度  $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$ 。根据雅可比变换

$$f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) = |J| f_{A_c A_s}(a_t \cos \varphi_t, a_t \sin \varphi_t), \tag{6.145}$$

其中雅可比行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial a_t} & \frac{\partial h_1}{\partial \varphi_t} \\ \frac{\partial h_2}{\partial a_t} & \frac{\partial h_2}{\partial \varphi_t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_t & -a_t \sin \varphi_t \\ \sin \varphi_t & a_t \cos \varphi_t \end{vmatrix} = a_t \geq 0. \tag{6.146}$$

则  $A_t$  和  $\Phi_t$  的联合概率密度为

$$f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) = \begin{cases} \frac{a_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{a_t^2}{2\sigma^2}\right\}, & a_t \geq 0, 0 \leq \varphi_t \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}. \tag{6.147}$$

由上式可见,  $A_t$  和  $\Phi_t$  的联合概率密度  $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$  与  $\Phi_t$  无关。

③ 求  $f_A(a_t)$  和  $f_\Phi(\varphi_t)$ 。

最后对  $A_t$  和  $\Phi_t$  的联合概率密度  $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$  积分, 求边缘概率密度  $f_A(a_t)$  和  $f_\Phi(\varphi_t)$ 。

①  $A_t$  的概率密度为

$$\begin{aligned}
 f_A(a_t) &= \int_0^{2\pi} f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) d\varphi_t \\
 &= f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\varphi_t \\
 &= \frac{a_t}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{a_t^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad a_t \geq 0.
 \end{aligned} \tag{6.148}$$

上式给出了包络  $A(t)$  的一维概率密度表达式, 通常称它为瑞利概率密度或简称瑞利分布。

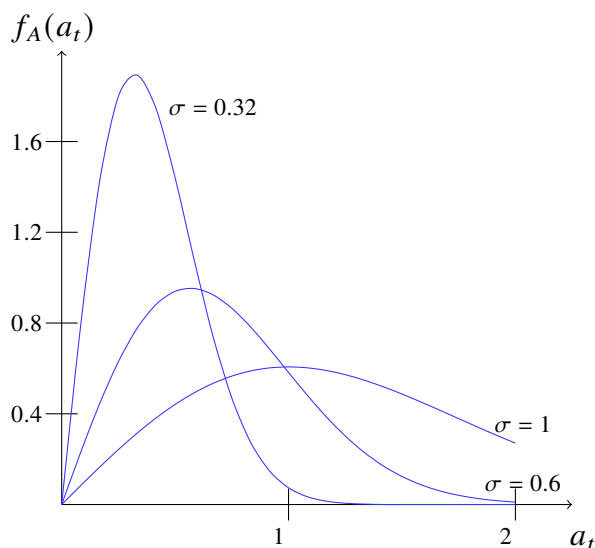


图 6-18 瑞利分布

②  $\Phi_t$  的概率密度为

$$f_{\phi}(\varphi_t) = \int_0^{\infty} f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) da_t = \frac{1}{2\pi}, 0 \leq \varphi_t \leq 2\pi. \quad (6.149)$$

可见, 相位  $\Phi(t)$  的一维概率密度为  $(0, 2\pi)$  区间上的均匀分布。

③ 由  $A_t, \Phi_t$  的概率密度表达式, 易得

$$f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) = f_A(a_t) f_{\Phi}(\varphi_t). \quad (6.150)$$

上式说明, 随机变量  $A_t, \Phi_t$  相互独立, 即随机过程  $A(t)$  与  $\Phi(t)$  在同一时刻相互独立。但应注意, 这并不意味着随机过程  $A(t)$  与  $\Phi(t)$  相互独立。

### 6.3.2 包络和相位各自的二维概率分布

若平稳高斯过程  $X(t)$  在  $t_1$  和  $t_2$  时刻采样为

$$\begin{cases} X(t_1) = A(t_1) \cos[\omega_0 t_1 + \Phi(t_1)] = A_c(t_1) \cos \omega_0 t_1 - A_s(t_1) \sin \omega_0 t_1 \\ X(t_2) = A(t_2) \cos[\omega_0 t_2 + \Phi(t_2)] = A_c(t_2) \cos \omega_0 t_2 - A_s(t_2) \sin \omega_0 t_2 \end{cases} \quad (6.151)$$

为了便于表示, 把包络  $A(t)$  在  $t_1, t_2$  时刻采样的随机变量  $A(t_1), A(t_2)$  简记为  $A_1, A_2$ ; 把相位  $\Phi(t)$  在  $t_1, t_2$  时刻采样的随机变量  $\Phi(t_1), \Phi(t_2)$  简记为  $\Phi_1, \Phi_2$ ; 把垂直分量  $A_c(t)$  在  $t_1, t_2$  时刻采样的随机变量  $A_c(t_1), A_c(t_2)$  简记为  $A_{c1}, A_{c2}$ ; 垂直分量  $A_s(t)$  在  $t_1, t_2$  时刻采



样的随机变量  $A_s(t_1), A_s(t_2)$  简记为  $A_{s1}, A_{s2}$ 。现在求随机过程  $A(t)$  与  $\Phi(t)$  各自的二维概率密度  $f_A(a_1, a_2)$  和  $f_\Phi(\varphi_1, \varphi_2)$ 。

1. 求  $f_{A_c A_s}(a_{c1}, a_{s1}, a_{c2}, a_{s2})$ 。

由上已知  $A_c(t), A_s(t)$  都是平稳高斯过程, 具有零均值和相同的方差  $\sigma^2$ 。因此, 可得  $A_{c1}, A_{s1}, A_{c2}, A_{s2}$  为同分布的高斯变量, 具有相同的零均值和相同的方差  $\sigma^2$ 。现在, 我们讨论一种最简单, 也是实际中最常见的情况, 即假定窄带随机过程  $X(t)$  的功率谱密度  $G_X(\omega)$  关于载波频率  $\omega_0$  偶对称, 如图 6-16 所示。根据 6.2.3 节的分析可知, 两个随机过程  $A_c(t), A_s(t)$  正交且互不相关, 满足  $R_{A_c A_s}(\tau) = 0$ , 皆为高斯过程, 则两个过程  $A_c(t), A_s(t)$  是统计独立的。所以四维高斯变量  $(A_{c1}, A_{s1}, A_{c2}, A_{s2})$  的联合概率密度, 可以用二维概率密度来表示, 即二维高斯变量  $(A_{c1}, A_{s2})$  的协方差矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} C_{A_{c1}A_{c1}} & C_{A_{c1}A_{c2}} \\ C_{A_{c2}A_{c1}} & C_{A_{c2}A_{c2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{A_c}(0) & C_{A_c}(\tau) \\ C_{A_c}(-\tau) & C_{A_c}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & R_{A_c}(\tau) \\ R_{A_c}(\tau) & \sigma^2 \end{bmatrix}. \quad (6.152)$$

上式应用了平稳高斯过程  $A_c(t)$  的  $C_{A_c}(\tau) = R_{A_c}(\tau)$  和  $C_{A_c}(0) = \sigma^2$  的性质。因为二维高斯变量  $(X, Y)$  的联合概率密度形式为

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_X^2\sigma_Y^2 - C_{XY}^2}} \exp \left[ -\frac{\sigma_Y^2(x - m_X)^2 - 2C_{XY}(x - m_X)(y - m_Y) + \sigma_X^2(y - m_Y)^2}{2(\sigma_X^2\sigma_Y^2 - C_{XY}^2)} \right]. \quad (6.153)$$

所以二维高斯变量  $(A_{c1}, A_{c2})$  的联合概率密度为

$$f_{A_c}(a_{c1}, a_{c2}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^4 - R_{A_c}^2(\tau)}} \exp \left[ -\frac{\sigma^2 a_{c1}^2 - 2R_{A_c}(\tau)a_{c1}a_{c2} + \sigma^2 a_{c2}^2}{2[\sigma^4 - R_{A_c}^2(\tau)]} \right]. \quad (6.154)$$

同理可得, 二维高斯变量  $(A_{s1}, A_{s2})$  的联合概率密度为

$$f_{A_s}(a_{s1}, a_{s2}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)}} \exp \left[ -\frac{\sigma^2 a_{s1}^2 - 2R_{A_s}(\tau)a_{s1}a_{s2} + \sigma^2 a_{s2}^2}{2[\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \right]. \quad (6.155)$$

应用性质  $R_{A_c}(\tau) = R_A(\tau)$ , 可得四维高斯变量  $(A_{c1}, A_{c2}, A_{s1}, A_{s2})$  的联合概率密度为

$$\begin{aligned} f_{A_c A_s}(a_{c1}, a_{s1}, a_{c2}, a_{s2}) &= f_{A_c}(a_{c1}, a_{c2}) f_{A_s}(a_{s1}, a_{s2}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 [\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \exp \left[ -\frac{\sigma^2 (a_{c1}^2 + a_{c2}^2 + a_{s1}^2 + a_{s2}^2) - 2R_{A_c}(\tau)(a_{c1}a_{c2} + a_{s1}a_{s2})}{2[\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \right]. \end{aligned} \quad (6.156)$$

2. 求  $f_{A\Phi}(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2)$

$A_{c1}, A_{s1}, A_{c2}, A_{s2}$  和  $A_1, \Phi_1, A_2, \Phi_2$  的关系为

$$\begin{cases} A_{c1} = h_1(A_1, \Phi_1) = A_1 \cos \Phi_1 \\ A_{s1} = h_2(A_1, \Phi_1) = A_1 \sin \Phi_1 \\ A_{c2} = h_3(A_2, \Phi_2) = A_2 \cos \Phi_2 \\ A_{s2} = h_4(A_2, \Phi_2) = A_2 \sin \Phi_2 \end{cases} \quad (6.157)$$

雅可比行列式为

$$J = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -A_1 \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & A_1 \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_2 & -A_2 \sin \varphi_2 \\ 0 & 0 & \sin \varphi_2 & A_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} = a_1 a_2 \geq 0. \quad (6.158)$$

四维随机变量  $(A_1, \Phi_1, A_2, \Phi_2)$  的联合概率密度为

$$\begin{aligned} f_{A\Phi}(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2) &= |J| f_{A_c A_s}(a_{c1}, a_{s1}, a_{c2}, a_{s2}) \\ &= \begin{cases} \frac{a_1 a_2}{(2\pi)^2 [\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \exp \left[ -\frac{\sigma^2(a_1^2 + a_2^2) - 2R_{A_c}(\tau) a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{2[\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \right] \\ a_1, a_2 \geq 0; 0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi \\ 0, \quad \text{其他} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.159)$$

3. 求  $A(t)$  和  $\Phi(t)$  各自的二维联合概率密度  $f_A(a_1, a_2), f_\Phi(\varphi_1, \varphi_2)$

$$\begin{aligned} f_A(a_1, a_2) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{A\Phi}(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 \\ &= \begin{cases} \frac{a_1 a_2}{[\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} I_0 \left\{ \frac{a_1 a_2 R_{A_c}(\tau)}{[\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \right\} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2(a_1^2 + a_2^2)}{2[\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \right\}, a_1, a_2 \geq 0 \\ 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.160)$$

式  $I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[x \cos \varphi] d\varphi$ , 是第一类零阶修正贝塞尔函数,

$$f_\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{cases} \frac{[\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]}{4\pi\sigma^2} \left[ \frac{(1-\beta)^{\frac{1}{2}} + \beta(\pi - \arccos \beta)}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \right], 0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi, \\ \end{cases} \quad (6.161)$$

其中

$$\beta = \frac{R_{A_c}(\tau)}{\sigma^2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (6.162)$$

若令  $q = \varphi_2$ , 不难看出

$$f_{A\Phi}(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2) \neq f_A(a_1, a_2) f_\Phi(\varphi_1, \varphi_2). \quad (6.163)$$

这一特例说明, 窄带随机过程的包络  $A(t)$  和相位更  $\Phi(t)$  彼此不是独立的。

### 6.3.3 随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布

假设

$$X(t) = s(t) + N(t), \quad (6.164)$$

其中信号  $s(t)$  为随相余弦信号

$$s(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta), \quad (6.165)$$

式中  $a, \omega_0$ . 随机变量  $\theta$  服从  $(0, 2\pi)$  区间上的均匀分布。其中噪声  $N(t)$  为功率谱密度关于中心频率偶对称、零均值、方差为  $\sigma^2$  的平稳窄带高斯实过程。

显然这里  $X(t)$  是一个窄带随机过程。若要求  $X(t)$  的包络及相位的概率密度函数, 则可以仿照前面的方法, 将窄带高斯噪声  $N(t)$  表示为

$$N(t) = A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t. \quad (6.166)$$

将随相余弦信号  $s(t)$  表示为

$$s(t) = a \cos \theta \cos \omega_0 t - a \sin \theta \sin \omega_0 t. \quad (6.167)$$

代入  $X(t)$ , 得

$$X(t) = s(t) + N(t) = [a \cos \theta + A_c(t)] \cos \omega_0 t - [a \sin \theta + A_s(t)] \sin \omega_0 t. \quad (6.168)$$

令

$$\begin{cases} A'_c(t) = a \cos \theta + A_c(t) \\ A'_s(t) = a \sin \theta + A_s(t) \end{cases}. \quad (6.169)$$

则

$$X(t) = A'_c(t) \cos \omega_0 t - A'_s(t) \sin \omega_0 t. \quad (6.170)$$

由 6.2 节的结论可知,  $A'_c(t), A'_s(t)$  都是低频限带过程, 它们随时间的变化  $\cos \omega_0 t$  要缓慢得多。

若将  $X(t)$  表示为准正弦振荡的形式

$$X(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)] \quad (6.171)$$

则  $X(t)$  的包络和相位  $A(t), \Phi(t)$  为

$$\begin{cases} A(t) = \sqrt{[A'_c(t)]^2 + [A'_s(t)]^2} \\ \Phi(t) = \arctan [A'_s(t)/A'_c(t)] \end{cases}. \quad (6.172)$$

易知  $A(t), \Phi(t)$  也都是慢变化随机过程。下面, 求  $A(t), \Phi(t)$  是  $A'_c(t), A'_s(t)$  的一维概率密度  $A'_c(t)$  和  $A'_s(t)$ 。

已知  $A(t), \Phi(t)$  是  $A'_c(t), A'_s(t)$  的函数, 而  $A'_c(t)$  和  $A'_s(t)$  又是随机相位  $\theta$  的函数, 所以  $A(t), \Phi(t)$  也是随机相位  $\theta$  的函数。

1) 求  $A'_c(t), A'_s(t)$  在给定  $\theta$  条件下的二维条件概率密度  $f(a'_{ct}/\theta, a'_{st}/\theta)$

给定  $\theta$  值的条件下,  $t$  时刻对  $A'_c(t), A'_s(t)$  的采样用  $A'_{ct}/\theta, A'_{st}/\theta$  表示。下面讨论  $A'_{ct}/\theta, A'_{st}/\theta$  的统计特性。

1°  $A'_{ct}/\theta$  和  $A'_{st}/\theta$  都是高斯变量, 且相互独立。

由  $A'_c(t), A'_s(t)$  和  $A_c(t), A_s(t)$  的关系, 可得

$$\begin{cases} A'_{ct} = a \cos \theta + A_{ct} \\ A'_{st} = a \sin \theta + A_{st} \end{cases} \quad (6.173)$$

因为  $A_{ct}$  和  $A_{st}$  是独立高斯变量, 从上式便可推出  $A'_{ct}/\theta, A'_{st}/\theta$  也是独立高斯变量。

2°  $A'_{ct}/\theta, A'_{st}/\theta$  的均值。

由  $A_{ct}$  和  $A_{st}$  的均值皆为零, 可得

3°  $A'_{ct}/\theta, A'_{st}/\theta$  的方差。由  $A_{ct}$  和  $A_{st}$  的均值皆为  $\sigma^2$ , 可得

$$D[A'_c/\theta] = D[A'_{st}/\theta] = \sigma^2 \quad (6.174)$$

由上述三个结论可得  $A'_c(t), A'_s(t)$  在给定条件下的二维条件概率密度为

$$f(a'_{ct}/\theta, a'_{st}/\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ (a'_{ct} - a \cos \theta)^2 + (a'_{st} - a \sin \theta)^2 \right] \right\} \quad (6.175)$$

2) 求  $A(t)$  和  $\Phi(t)$  在给定  $\theta$  条件下的二维条件概率密度  $f(a_t/\theta, \varphi/\theta)$ 。  $A'_c, A'_s, A_t$  和  $\Phi_t$  的关系如下

$$\begin{cases} A'_{ct} = h_1(A_t, \Phi_t) = A_t \cos \Phi_t \\ A'_{st} = h_2(A_t, \Phi_t) = A_t \sin \Phi_t \end{cases} \quad (6.176)$$

利用雅可比变换,  $J = a \geq 0$ , 便可得  $A$ , 在给定条件下的二维条件概率密度。

3) 求包络  $A(t)$  的一维概率密度  $f_A(a_t)$

对二维条件概率密度积分, 得到边缘条件概率密度为

$$\begin{aligned} f(a_t/\theta) &= \int_0^{2\pi} f(a_t/\theta, \varphi_i/\theta) d\varphi_i \\ &= \frac{a_t}{\sigma^2} I_0 \left( \frac{aa_t}{\sigma^2} \right) \exp \left\{ -\frac{a_t^2 + a^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad a_t \geq 0, \end{aligned} \quad (6.177)$$

式中  $I_0(\cdot)$  是第一类零阶修正贝塞尔函数。

由上式可见,  $f(a_t/\theta)$  与  $\theta$  无关, 就是无条件分布  $f_A(a_t)$ 。于是, 可得随相余弦信号加窄带高斯噪声的包络  $A(t)$  的一维概率密度为

$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} I_0\left(\frac{aa_t}{\sigma^2}\right) \exp\left\{-\frac{a_t^2 + a^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad a_t \geq 0. \quad (6.178)$$

当随相余弦信号不存在, 即幅度  $a = 0$  时, 式 (6.178) 便退化为式 (6.177), 即  $A_t$  服从瑞利分布。所以, 称式 (6.178) 为广义瑞利概率密度或莱斯概率密度, 简称莱斯分布。 $a/\sigma$  表示信号幅度与窄带噪声标准差之比, 简称信噪比, 记为  $r$ 。

下面讨论在不同的信噪比  $r$  条件下包络的一维概率密度。为此, 将第一类零阶修正贝塞尔函数  $I_0(x)$  展开成无穷级数为

① 由于  $x \ll 1$  时

$$I_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}. \quad (6.179)$$

② 当  $r \gg 1$  时

$$f_A(a_t) \approx \frac{a_t}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{a_t^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad a_t \geq 0. \quad (6.180)$$

这就是说, 当信噪比很小时, 包络  $A(t)$  的一维概率密度趋近于瑞利分布

③ 由于  $r \ll 1$  时

$$I_0(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x. \quad (6.181)$$

在大信噪比条件下 ( $r \gg 1$ ), 包络  $A(t)$  的一维概率密度为

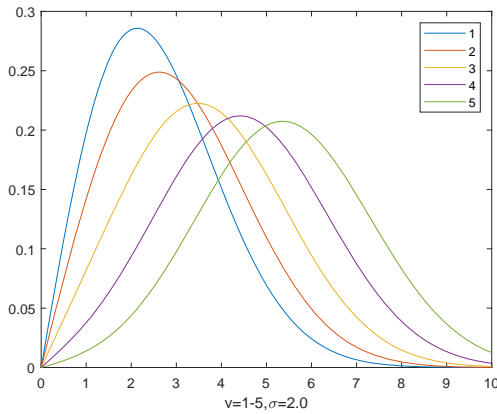
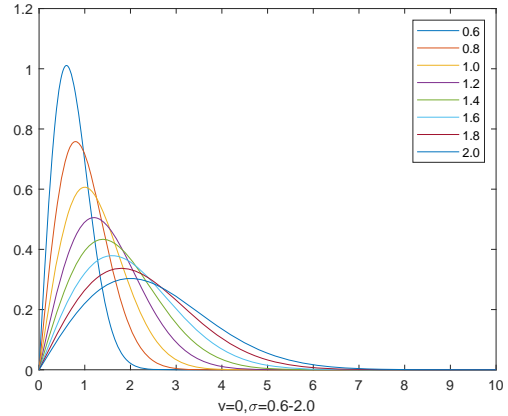
$$f_A(a_t) \approx \sqrt{\frac{a_t}{2\pi a}} \cdot \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(a_t - a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad a_t \geq 0. \quad (6.182)$$

从上式中可见, 此概率密度在  $a_t = a$  处取最大值。当  $a_t$  偏离  $a$  时, 它很快下降, 且  $\sqrt{\frac{a_t}{2\pi a}}$  改变的速度比  $\exp\left\{-\frac{(a_t - a)^2}{2\sigma^2}\right\}$  的衰减速度要慢很多, 特别是在  $a$  的附近, 即当  $a_t$  偏离  $a$  很小时, 可以近似地认为  $\sqrt{\frac{a_t}{2\pi a}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 。

于是,  $f_A(a)$  可以近似为

$$f_A(a_t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(a_t - a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad a_t \geq 0. \quad (6.183)$$

上式说明, 在大信噪比的条件下, 在  $a$  附近个包络的一维概率密度近似为高斯分布。以上导出了包络  $A(t)$  的一维概率密度函数, 并得到了在大信噪比和小信噪比条件下它的近似式。图 6-20 所示为不同信噪比条件下莱斯分布的图形。

图 6-19 莱斯分布在不同  $\nu$  下的密度函数图 6-20 莱斯分布在不同  $\sigma$  下的密度函数

4) 求相位  $\Phi(t)$  的一维概率密度  $f_{\Phi}(\varphi/\theta)$

对二维条件概率密度积分, 得到边缘条件概率密度为

$$\begin{aligned}
 f_{\Phi}(\varphi_t/\theta) &= \int_0^{\infty} f(a_t/\theta, \varphi_t/\theta) da_t \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{a_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [a_t^2 + a^2 - 2aa_t \cos(\theta - \varphi_t)]\right\} a_t \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{a_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [a_t^2 - 2aa_t \cos(\theta - \varphi_t) \right. \\
 &\quad \left. + (a \cos(\theta - \varphi_t))^2 - (a \cos(\theta - \varphi_t))^2 + a^2]\right\} da_t \\
 &= \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{a^2 - [a \cos(\theta - \varphi_t)]^2}{2\sigma^2}\right\} \\
 &\quad \int_0^{\infty} \frac{a_t}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{[a_t - a \cos(\theta - \varphi_t)]^2}{2\sigma^2}\right\} da_t \\
 &= \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\} + \frac{r \cos(\theta - \varphi_t)}{\sqrt{2\pi}} \Phi[r \cos(\theta - \varphi_t)] \\
 &\quad \exp\left\{-\frac{1}{2} [r^2 - r^2 \cos^2(\theta - \varphi_t)]\right\}, \tag{6.184}
 \end{aligned}$$

式中  $\Phi(\cdot)$  是概率积分函数。上式是  $f_{\Phi}(\varphi_t/\theta)$  的一般表示式。

下面讨论在不同信噪比条件下,  $\Phi_t$  的概率密度形式

① 当信噪比  $r = 0$  时, 即不存在信号的情况下

$$f_{\Phi}(\varphi_t/\theta) = f_{\Phi}(\varphi_t) = \frac{1}{2\pi}. \tag{6.185}$$

这时, 随机相位为均匀分布。

② 当  $\theta - \varphi \ll 1$  时, 即信噪比很大时

$$\begin{cases} \sin(\theta - \varphi_t) \approx \theta - \varphi_t \\ \cos(\theta - \varphi_t) \approx 1 \end{cases} \quad (6.186)$$

可以看出,  $f_{\Phi}(\varphi/\theta)$  的图形关于对称, 并在  $\varphi_t = \theta$  处取得最大值。

显然, 上式为高斯概率密度形式, 其均值为  $\theta$ , 方差为  $1/r^2$ 。

结论: 在信噪比极小时, 相位  $\Phi_t$  接近于均匀分布; 随信噪比的增加,  $f_{\Phi}(\varphi_i/\theta)$  逐渐接近于高斯分布; 在信噪比很大 ( $r^2 \gg 1$ ) 时,  $f_{\Phi}(\varphi_i/\theta)$  在  $\theta$  值附近服从高斯分布。由于方差  $1/r^2$  与信噪比  $r$  成反比, 所以当  $r \rightarrow \infty$  时,  $f_{\Phi}(q/\theta)$  趋于  $\delta(\theta - \varphi)$ 。图 6-21 所示为不同信噪比条件下相位  $\Phi(t)$  的一维分布图。

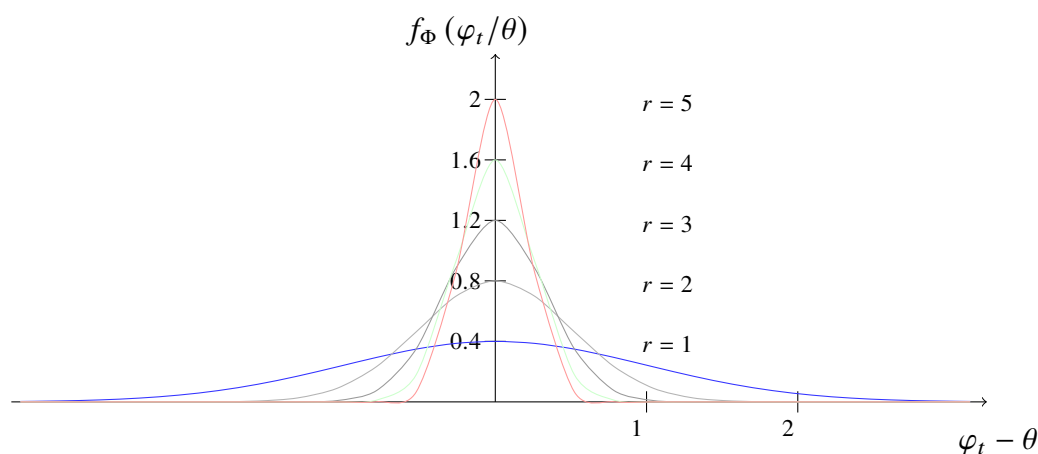


图 6-21  $f_{\Phi}(\varphi_2/\theta)$  的分布

## 6.4 窄带高斯过程包络平方的概率分布

在许多实际应用中, 也常常在高频窄带滤波器的输出端接入一平方律检波器如图 6-22 所示, 在平方律检波器输出端便得到  $X(t)$  包络的平方  $A^2(t)$ 。

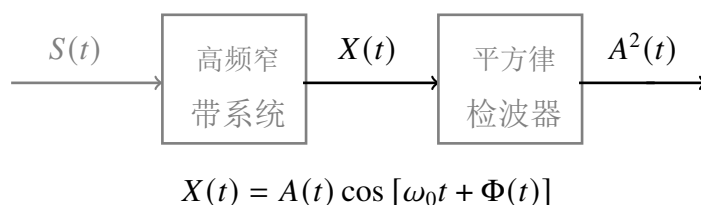


图 6-22 平方律检波器

### 6.4.1 窄带高斯噪声包络平方的分布

前面已经推导出当窄带随机过程为一具有零均值、方差为  $\sigma^2$  的平稳高斯噪声时, 其包络  $A(t)$  的一维概率密度为瑞利分布。

$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{a_t^2}{2\sigma^2}\right\}, a_t \geq 0. \quad (6.187)$$

应用求随机变量函数分布的方法, 很容易求出包络平方的一维概率密度。令

$$U(t) = A^2(t) \quad (6.188)$$

则在时刻  $t$  的采样有

$$\begin{cases} U_t = g(A_t) = A_t^2, & A_t \geq 0 \\ A_t = h(U_t) = \sqrt{U_t}, & U_t \geq 0. \end{cases} \quad (6.189)$$

其雅可比行列式为

$$J = \frac{1}{2\sqrt{U_t}} \quad (6.190)$$

于是包络平方的一维概率密度为

$$f_U(u_t) = |J|f_A(A_t) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left\{-\frac{u_t}{2\sigma^2}\right\}, u_t \geq 0. \quad (6.191)$$

上式表明,  $U_t$  服从指数分布。

实际中, 为了分析方便, 常应用归一化随机变量。令归一化随机变量  $V_t = \frac{U_t}{\sigma^2}$ , 则得到  $V_t$  的概率密度为

$$f_V(v_t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{v_t}{2}}, v_t \geq 0. \quad (6.192)$$

### 6.4.2 余弦信号加窄带高斯噪声包络平方的概率分布

当窄带随机过程为余弦信号加窄带高斯噪声时, 即

$$X(t) = a \cos \omega_0 t + N(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)], \quad (6.193)$$

其中  $a, \omega_0$  为已知常数,  $N(t)$  为具有零均值、方差  $\sigma^2$  的窄带高斯噪声。根据 6-3 节分析的结果可知,  $X(t)$  的包络服从广义瑞利分布, 即

$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} I_0\left(\frac{aa_t}{\sigma^2}\right) \exp\left\{-\frac{a_t^2 + a^2}{2\sigma^2}\right\}, a_t \geq 0. \quad (6.194)$$

仿照 6.4.1 节中的方法, 不难导出包络平方  $U^2 = A^2$  的一维概率密度为

$$f_U(u_t) = \frac{1}{2\sigma^2} I_0\left[\frac{a\sqrt{u_t}}{\sigma^2}\right] \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [u_t + a^2]\right\}, u_t \geq 0. \quad (6.195)$$



令  $V_t = \frac{U_t}{\sigma^2}$ , 可得归一化随机变量  $V$  的概率密度函数为

$$f_V(v_t) = \frac{1}{2} I_0 \left[ \frac{\sqrt{v_t} a}{\sigma} \right] \exp \left\{ -\frac{v_t + a^2/\sigma^2}{2} \right\}, \quad v_t \geq 0. \quad (6.196)$$

### 6.4.3 卡方分布和非中心卡方分布

#### 1. $\chi^2$ 分布

在有些应用中, 例如在信号检测中, 为了改进检测性能, 经常采用所谓视频积累技术, 即对包络的平方进行独立采样后再积累, 如图 6-23 所示, 这时输出的随机变量习惯上记为  $\chi^2$ , 它的概率密度习惯上称之为  $\chi^2$  分布。如图 6-23 所示, 让一个具有零均值和方差  $\sigma^2$  的平稳窄带实高斯噪声  $N(t)$  通过一平方律检波器, 而检波器输出的是  $N(t)$  的包络平方  $A^2(t)$ 。然后对随机过程  $A^2(t)$  进行独立采样, 得到  $m$  个独立的随机变量  $A_i^2 = A^2(t_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), 经归化以后送入累加器。下面讨论累加器输出端随机变量  $\chi^2$  的概率密度。为了避免混淆, 在下面的推导中, 用  $V$  来代替  $\chi^2$ 。

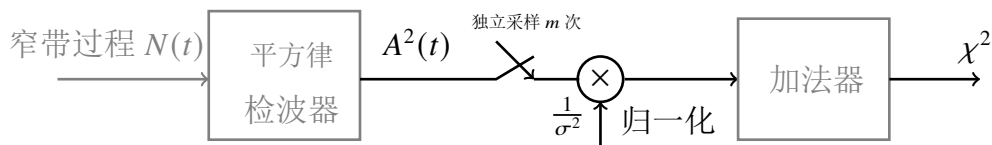


图 6-23 视频积累技术

由于窄带过程  $N(t)$  的包络  $A$  和它的一对垂直分量  $A_c(t), A_s(t)$  有如下关

$$A^2(t) = A_c^2(t) + A_s^2(t), \quad (6.197)$$

式中  $A_c(t), A_s(t)$  是零均值、方差为  $\sigma^2$  的平稳高斯过程。 $A^2(t)$  经采样后, 加法器的输出

$$V = \sum_{i=1}^m (A_{ci}^2 + A_{si}^2). \quad (6.198)$$

式中  $A'_{ci}, A'_{si}$  是将  $A_{ci}, A_{si}$  归一化以后的随机变量。由于  $A'_{ci}, A'_{si}$  都是同分布的高斯变量, 故上式又可表示为

$$V = \sum_{i=1}^{2m} X_i^2 \quad (6.199)$$

式中每一个  $X$ , 都是同分布的标准高斯变量 (零均值、方差为 1), 且各  $X$ , 相互独立。为了书写简单, 用  $n$  代替上式中的  $2m$ , 可得

$$V = \sum_{i=1}^{2m} X_i^2. \quad (6.200)$$

于是, 求  $V$  的概率密度便归结为求  $n$  个独立同分布高斯变量平方和的概率密度为此, 首先求每一随机变量  $X_i^2$  的概率密度。已知标准高斯随机变量  $X_i$  的概率密度为

$$f_X(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x_i^2}{2}\right\}. \quad (6.201)$$

令  $Y_i = X_i^2$ , 不难求出  $Y_i$  的概率密度

$$f_{Y_i}(y_i) = |J| f_X(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi_i}} e^{-\frac{y_i}{2}}, \quad y_i \geq 0. \quad (6.202)$$

从而得到  $Y_i$  的特征函数为

$$\begin{aligned} Q_{Y_i}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_i}(y_i) e^{jw_i y_i} dy_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y_i^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} - ju\right) y_i\right\} dy_i = (1 - 2ju)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (6.203)$$

由于  $V = \sum_{i=1}^n Y_i$ , 利用特征函数的性质: 独立随机变量之和的特征函数等于各随机变量特征函数的乘积。便可得到  $V$  的特征函数为

$$Q_V(u) = \prod_{i=1}^n Q_{Y_i}(u) = (1 - 2ju)^{-\frac{n}{2}} \quad (6.204)$$

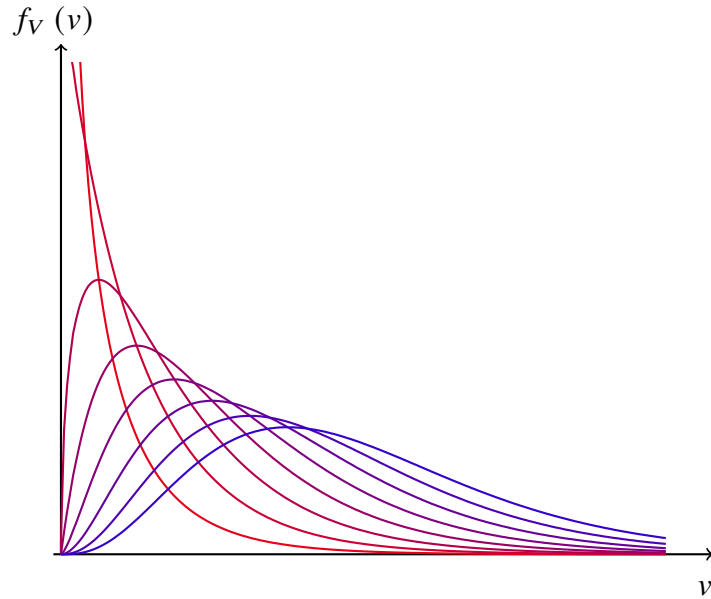
上式进行傅里叶逆变换, 便可求得  $V$  的概率密度为

$$f_V(v) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} 2^{-\frac{n}{2}} v^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{-\frac{v}{2}}, \quad v \geq 0. \quad (6.205)$$

式中,  $\Gamma(\cdot)$  为  $\Gamma$  函数, 满足

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{(\alpha-1)} e^{-t} dt. \quad (6.206)$$

称  $f_v(v)$  为  $n$  个自由度的  $\chi^2$  分布。图 6-24 画出了几个不同自由度下  $f_v(v)$  的图形。

图 6-24 几个不同自由度下的  $\chi^2$  分布

$\chi^2$  分布具有下列性质

1° 两个独立的  $\chi^2$  变量之和仍为  $\chi^2$  变量。若它们各自的自由度分别为  $n_1$  和  $n_2$ , 则它们的和变量为具有  $(n_1 + n_2)$  个自由度的  $\chi^2$  分布  $2n$  个自由度的  $\chi^2$  变量的均值  $E[V] = n$ , 方差  $D[V] = 2n$ 。

2. 非中心  $\chi^2$  分布

若窄带过程  $N'(t)$  为余弦信号  $N'(t)$  与窄带高斯噪声  $N(t)$  之和, 则加法器输出的就是非中心  $\chi^2$  分布。

(1) 信号包络为常数的情况

设信号

$$s(t) = a \cos(\omega_0 t + \pi/4) \quad (6.207)$$

包络  $a$  为常数, 则有

$$\begin{aligned} s(t) &= a \cos \frac{\pi}{4} \cos \omega_0 t + a \sin \frac{\pi}{4} \sin \omega_0 t \\ &= a \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega_0 t + a \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (6.208)$$

若令  $s = a\sqrt{2}/2$ , 则

$$s(t) = s \cos \omega_0 t + s \sin \omega_0 t. \quad (6.209)$$

又由于

$$N(t) = n_e(t) \cos \omega_0 t - n_3(t) \sin \omega_0 t. \quad (6.210)$$

代入  $N(t)$  得

$$\begin{aligned} N'(t) &= s(t) + N(t) \\ &= [s + n_c(t)] \cos \omega_0 t - [s + n_s(t)] \sin \omega_0 t \\ &= A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (6.211)$$

而  $N(t)$  的包络的平方

$$A^2(t) = A_c^2(t) + A_s^2(t) = [s + n_c(t)]^2 + [s + n_s(t)]^2. \quad (6.212)$$

仿照求  $\chi^2$  分布的方法, 加法器输出端的随机变量  $V'$  应为

$$V' = \sum_{i=1}^n (s + X_i)^2 = \sum_{i=1}^n Y_i \quad (6.213)$$

式中  $X_i$  为同分布的独立高斯变量 (均值为零、方差为  $\sigma^2$ ),  $s$  为常数。为了导出  $V$  的概率密度, 首先求  $Y_i = (s + X_i)^2$  的概率密度和特征函数。令

$$R_i = s + X_i. \quad (6.214)$$

显然,  $R_i$  的概率密度为

$$f_{R_i}(r_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(r_i - s)^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (6.215)$$

则  $Y' = R^2$  的概率密度为

$$f_{Y_i}(y'_i) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma^2 y'_i}} \left\{ \exp \left[ -\frac{(\sqrt{y'_i} - s)^2}{2\sigma^2} \right] + \exp \left[ -\frac{(-\sqrt{y'_i} - s)^2}{2\sigma^2} \right] \right\}. \quad (6.216)$$

将上式中指数的平方项展开, 并利用双曲余弦函数  $2 \cosh(b) = e^s + e^{-s}$ , 可得

$$f_{Y_i}(y'_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y'_i}} \exp \left\{ -\frac{y'_i + s^2}{2\sigma^2} \right\} \cosh \left( \frac{s\sqrt{y'_i}}{\sigma^2} \right). \quad (6.217)$$

由于  $X, Y$  为独立同分布的, 则  $Y_i = (s + X_i)^2$  也是独立同分布的。而  $V' = \sum_{i=1}^n Y'_i$ , 于是  $V$  的特征函数为

$$Q_{V'}(u) = \prod_{i=1}^n Q_{Y'_i}(u) = \left( \frac{1}{1 - j2\sigma^2 u} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{ns^2}{2\sigma^2} + \frac{ns^2}{2\sigma^2(1 - j2\sigma^2 u)} \right\}. \quad (6.218)$$

对上式作傅里叶逆变换, 可得  $V$  的概率密度为

$$f_{V'}(v') = \frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{v'}{\lambda'^2} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp \left\{ -\frac{\lambda' + v'}{2\sigma^2} \right\} I_{\frac{n}{2}-1} \left( \frac{\sqrt{v'\lambda'}}{\sigma^2} \right), \quad v' \geq 0. \quad (6.219)$$

式中,  $\lambda' = s^2 n$  定义为非中心参量,  $I_n(\cdot)$  为第一类  $n$  阶修正贝塞尔函数。

定义归一化变量  $V = V'/\sigma^2$ , 那么

$$V = \sum_{i=1}^n \left( \frac{s}{\sigma} + \frac{X_i}{\sigma} \right)^2 = \sum_{i=1}^n R_i'^2. \quad (6.220)$$

其中变量  $R$  是均值为  $s/\sigma$ 、方差为 1 的相互独立的高斯变量。易证  $V$  的概率密度为

$$f_V(v) = \frac{1}{2} \left( \frac{v}{\lambda} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} - \frac{v}{2} \right\} I_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{v\lambda}), \quad v \geq 0. \quad (6.221)$$

上式是  $n$  个自由度的非中心  $\chi^2$  分布。其中非中心参量  $\lambda = ns^2/\sigma^2$  表示视频积累后的功率信噪比。图 6-25 画出了不同信噪比  $\lambda$  和样本数  $n$  情况下的非中心  $\chi^2$  函数。(2) 信号

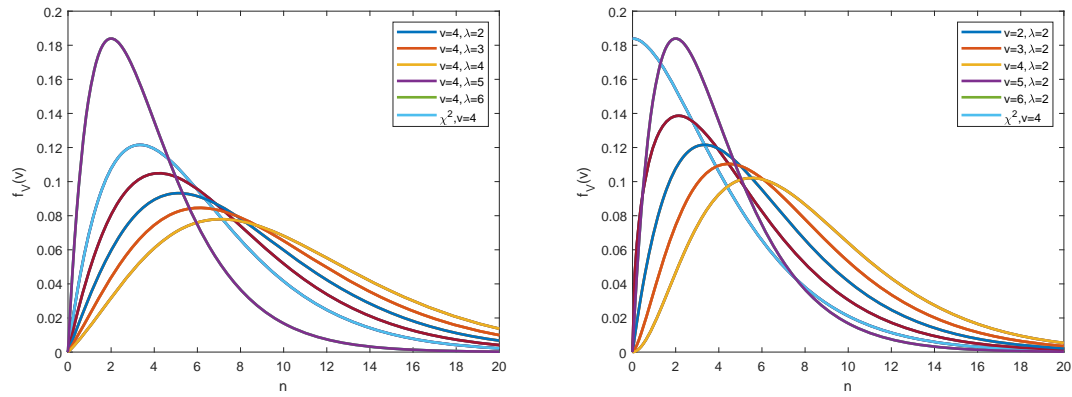


图 6-25 非中心  $\chi^2$  分布: a)  $v = 4, \lambda = 2..6$ , b)  $v = 2..6, \lambda = 2$

包络不为常数的情况

给定信号

$$s(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \pi/4), \quad (6.222)$$

包络  $a(t)$  为确定函数, 则有

$$\begin{aligned} s(t) &= a(t) \cos \frac{\pi}{4} \cos \omega_0 t + a(t) \sin \frac{\pi}{4} \sin \omega_0 t \\ &= a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega_0 t + a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (6.223)$$

又由于

$$N(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t. \quad (6.224)$$

代入  $N'(t)$  得

$$\begin{aligned} N'(t) &= s(t) + N(t) = \left[ a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + n_e(t) \right] \cos \omega_0 t - \left[ a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + n_1(t) \right] \sin \omega_0 t \\ &= A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (6.225)$$

而  $N(t)$  的包络的平方

$$\begin{aligned} A^2(t) &= A_c^2(t) + A_s^2(t) \\ &= \left[ a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + n_c(t) \right]^2 + \left[ a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + n_3(t) \right]^2. \end{aligned} \quad (6.226)$$

在  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 时刻对  $A^2(t)$  进行独立的采样, 令  $s = a(t)$ , 仿照求  $\chi^2$  分布的方法, 加法器输出端的随机变量  $Q'$  应为

$$Q' = \sum_{i=1}^n (s_i + X_i)^2 = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad (6.227)$$

式中  $s$  是对信号包络  $a(t)$  的第  $i$  次采样, 是确定值。由于单个样本  $Y_i = (s_i + X_i)^2$  的特征函数, 可以直接应用上面信号包络为常量的推导结果

$$Q_Y^*(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - j2\sigma^2 u}} \exp \left\{ -\frac{s_1^2}{2\sigma^2} + \frac{s_1^2}{2\sigma^2 (1 - j2\sigma^2 u)} \right\}. \quad (6.228)$$

又因为  $Y_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 相互独立, 而  $Q' = \sum_{k=1}^n Y_i$ , 于是  $Q'$  的特征函数为

$$Q_\alpha(u) = \prod_{i=1}^n Q_{Y_i}(u) = \left( \frac{1}{1 - j2\sigma^2 u} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^n s_i^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n s_i^2}{2\sigma^2 (1 - j2\sigma^2 u)} \right\}. \quad (6.229)$$

对上式作傅里叶逆变换可得  $Q'$  的概率密度

$$f_\alpha(q') = \frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{q'}{\lambda'^2} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp \left\{ -\frac{\lambda' + q'}{2\sigma^2} \right\} \cdot I_{\frac{n}{2}-1} \left( \frac{\sqrt{q'\lambda'}}{\sigma^2} \right), \quad q' \geq 0. \quad (6.230)$$

将式 (6.230) 与式 (6.219) 对照可见,  $Q'$  与  $V'$  具有相同的概率密度, 不同的只是此时的非中心参量  $\lambda' = \sum_{i=1}^n s_i^2$ , 类似地, 定义归一化参量  $Q = Q'/\sigma^2$ , 于是可得

$$Q = \sum_{i=1}^n \left( \frac{s_i}{\sigma} + \frac{X_i}{\sigma} \right)^2 \quad (6.231)$$

令

$$Z_i = \frac{s_i}{\sigma} + \frac{X_i}{\sigma}. \quad (6.232)$$

则  $Z_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是具有均值  $s_i/\sigma$  和单位方差的独立高斯变量。于是, 可得具有  $n$  个自由度的非中心  $\chi^2$  分布为

$$f_Q(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{q}{\lambda} \right)^{\frac{n-2}{2}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} - \frac{q}{2} \right\} I_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{Q\lambda}), \quad (6.233)$$

式中  $\lambda = \sum_{i=1}^n s_i^2/\sigma^2$  为非中心参量。

不难证明, 两个统计独立的非中心  $\chi^2$  随机变量之和仍为非中心  $\chi^2$  随机变量。

若它们的自由度分别为  $n_1$  和  $n_2$ , 非中心参量分别为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ , 则和变量的自由度为  $n = n_1 + n_2$ , 非中心参量为  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ 。

**例 6.9** 设图 6-2 中加至平方律检波器输入端的窄带随机过程  $X(t)$  为

$$X(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta) + N(t), \quad (6.234)$$

其中  $a \cos(\omega_0 t + \theta)$  为随相余弦信号,  $a$  和  $\omega_0$  为常数。  $N(t)$  是零均值、方差为  $\sigma^2$  的稳态窄带高斯噪声, 其功率谱关于  $\omega_0$  偶对称。  $X(t)$  经检波并作归一化处理以后, 独立采样  $m$  次, 求累加器输出端随机变量的概率密度及其参数。

解: 先将  $N(t)$  表示为

$$N(t) = A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (6.235)$$

若用  $A(t)$  表示窄带随机过程  $X(t)$  的包络, 那么在平方律检波器的输出端, 可得到包络平方为

$$A^2(t) = [a \cos \theta + A_c(t)]^2 + [a \sin \theta + A_s(t)]^2. \quad (6.236)$$

于是, 加法器输出端随机变量  $V$  为

$$V = \frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^m (a \cos \theta + A_{ci})^2 + \sum_{i=1}^m (a \sin \theta + A_{si})^2 \right], \quad (6.237)$$

式中  $A_{ci} = A_c(t_i)$  和  $A_{si} = A_s(t_i)$  分别表示  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  在  $t_i$  时刻的状态。根据  $A_c(t), A_s(t)$  的有关性质可知, 各个  $A_{ci}, A_{si}$  是同分布的独立标准高斯变量。对照式 (6.220) 可知, 上式中两个和式分别是自由度为  $m$  的非中心  $\chi^2$  变量, 它们的非中心参量  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  分别为

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m (a \cos \theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2} \cos^2 \theta \\ \lambda_2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m (a \sin \theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2} \sin^2 \theta \end{cases}. \quad (6.238)$$

由于这两个非中心  $\chi^2$  随机变量也彼此独立, 因而它们的和变量  $V$  也是非中心  $\chi^2$  随机变量, 自由度  $n = 2m$ , 非中心参量  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{ma^2}{\sigma^2}$ , 便可得到  $V$  的概率密度函数为

$$f_V(v) = \frac{1}{2} \left( \frac{v}{\lambda} \right)^{\frac{m-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} - \frac{v}{2} \right\} I_{m-1}(\sqrt{v\lambda}), \quad v \geq 0. \quad (6.239)$$

而非中心参量与自由度之比  $\lambda/n = a^2/2\sigma^2$ , 正好是检波器输入端的功率信噪比。

## 6.5 习题

练习 6.1 证明

- ①  $H\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \frac{1-\cos t}{t}$ .
- ②  $H\left[e^{j\omega_0 t}\right] = -je^{j\omega_0 t}, \omega_0 > 0$ .
- ③  $H^{-1}\left[\frac{\sin t}{t} \sin 200\pi t\right] = \frac{\sin t}{t} \cos 200\pi t$ .
- ④  $H\left[e^{j\omega_0 t}\right] = -je^{j\omega_0 t}, \omega_0 > 0$ .
- ⑤  $H^{-1}\left[\frac{1}{\pi t}\right] = \delta(t)$ .
- ⑥  $H^{-1}\left[\frac{\sin t}{t} \cos 200\pi t\right] = -\frac{\sin t}{t} \sin 200\pi t$ .

练习 6.2 证明: ① 偶函数的希尔伯特变换为奇函数。② 奇函数的希尔伯特变换为偶函数。

练习 6.3 当  $\tau, \omega_0$  满足什么条件时, 能使  $y(t) = \frac{\sin(\pi t/\tau)}{\pi t/\tau} e^{j\omega_0 t} = \text{Sa}(\pi t/\tau) e^{j\omega_0 t}$  为解析信号。画出  $\text{Sa}(\pi t/\tau)$  和  $y(t)$  的频谱图。

练习 6.4 调频信号  $s(t) = \cos[\omega_0 t + m(t)]$ , 当 ①  $\frac{dm(t)}{dt} \ll \omega_0$  时, 为窄带信号, 求  $s(t)$  的包络和预包络。

练习 6.5 已知随机过程

$$X(t) = [X_1(t) \quad X_2(t) \quad X_1(t+\tau) \quad X_2(t+\tau)]^T. \quad (6.240)$$

式中  $X_1(t)$  为平稳标准高斯过程,  $X_2(t)$  为  $X_1(t)$  的希尔伯特变换。证明

$$E[X(t)X^T(t)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & R_1(\tau) & \hat{R}_1(\tau) \\ 0 & 1 & -\hat{R}_1(\tau) & R_1(\tau) \\ R_1(\tau) & -\hat{R}_1(\tau) & 1 & 0 \\ \hat{R}_1(\tau) & R_1(\tau) & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.241)$$

其中  $R_1(\tau) = E[X_1(t)X_1(t+\tau)]$ 。

练习 6.6 已知平稳过程  $X(t)$  的功率谱密度  $G_X(\omega)$ , 如图 6-26 所示。求随机过程  $W(t)$  的功率谱密度, 并画图表示。

$$W(t) = X(t) \cos \omega_0 t - \hat{X}(t) \sin \omega_0 t. \quad (6.242)$$



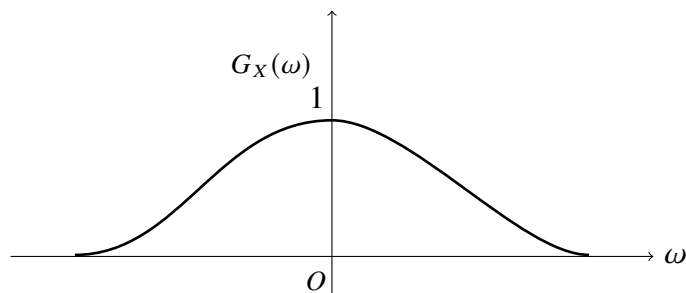


图 6-26

练习 6.7 零均值窄带平稳过程  $X(t) = A(t) \cos \omega_0 t - B(t) \sin \omega_0 t$  的功率谱密度  $G_X(\omega)$  在频带内关于中心频率  $\omega$  偶对称, 其中  $A(t), B(t)$  为平稳过程。① 证明:  $X(t)$  的自相关函数  $R_X(\tau) = R_A(\tau) \cos \omega_0 \tau$ 。② 求  $X(t)$  自相关函数的包络和预包络。

练习 6.8 已知零均值窄带平稳噪声  $X(t) = A(t) \cos \omega_0 t - B(t) \sin \omega_0 t$ , 其功率谱密度如图 6-27 所示。画出下列情况下随机过程  $A(t), B(t)$  各自的功率谱密度:

- (1)  $\omega_0 = \omega_1$ ;
- (2)  $\omega_0 = \omega_2$ ;
- (3)  $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2) / 2$ .

判断上述每种情况下, 过程  $A(t), B(t)$  是否互不相关, 并给出理由。

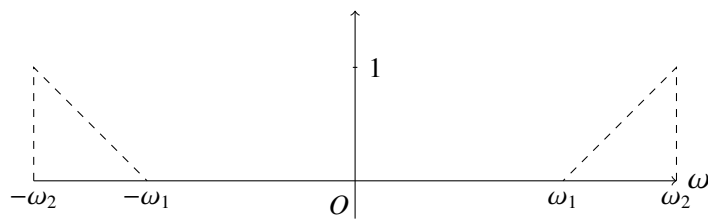


图 6-27

练习 6.9 已知平稳噪声  $N(t)$  的功率谱密度, 如图 6-28 所示。求窄带过程

$$X(t) = N(t) \cos (\omega_0 t + \theta) - N(t) \sin (\omega_0 t + \theta) \quad (6.243)$$

的功率谱密度  $G_X(m)$ , 并画图表示。其中  $a_n > a_1$  为常数, 服从  $(0, 2\pi)$  上的均匀分布, 且与噪声  $N(t)$  独立。

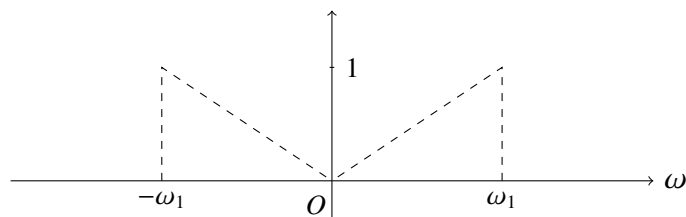


图 6-28

- 练习 6.10 已知零均值, 方差为  $\sigma^2$  的窄带高斯平稳过程  $X(t) = A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t$ , 其中  $A_c(t), A_s(t)$  为过程的一对垂直分解。证明:  $R_X(\tau) = R_{A_c}(\tau) \cos \omega_0 \tau - R_{A_c A_s}(\tau) \sin \omega_0 \tau$ 。

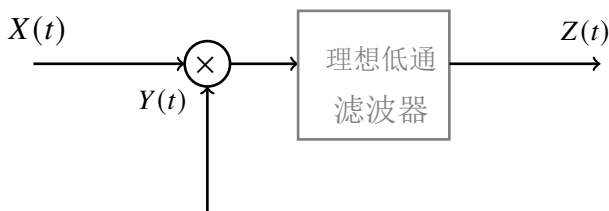


图 6-29

- 练习 6.11 证明: 零均值, 方差为 1 的窄带平稳高斯过程, 其任意时刻的包络平方的数学期望为 2, 方差为 4。
- 练习 6.12 已知窄带高斯平稳过程  $X(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)]$ , 包络  $A(t)$  在任意时刻  $t$  的采样为随机变量  $A_t$ , 求  $A_t$  的均值和方差。
- 练习 6.13 如图 6-29 所示, 同步检波器的输入  $X(t)$  为窄带平稳噪声, 其自相关函数为

$$R_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\beta|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \beta \ll \omega_0. \quad (6.244)$$

若另一输入

$$Y(t) = A \sin (\omega_0 t + \theta), \quad (6.245)$$

其中  $A$  为常数, 服从  $(0, 2\pi)$  上的均匀分布, 且与噪声  $X(t)$  独立。求检波器输出  $Z(t)$  的平均功率。

- 练习 6.14 如图 6-30 所示, 系统 1 是线性系统的传递函数, 关于中心频率  $\omega$  偶对称, 系统 2 是线性系统的传递函数为  $-j \operatorname{sgn}(\omega)$ , 系统 3 为线性微分系统。输入  $N(t)$  为物理谱密度

为  $N_0$  的白噪声, 且系统 1 输出  $X(t)$  的自相关函数的包络为  $\exp\{-\tau^2\}$ 。整个系统进入稳态。

- ① 判断  $X(t)$  和  $Z(t)$  分别服从什么分布, 给出理由。
- ② 证明  $Z(t)$  是严平稳过程。
- ③ 求  $X(t)$  和  $Y(t)$  的互相关函数,  $Y(t)$  的功率谱密度,
- ④ 写出  $Z(t)$  一维概率密度表达式。
- ⑤ 判断同一时刻,  $Y(t)$  和  $Z(t)$  是否独立, 给出理由。



图 6-30

**练习 6.15** 如图 6-31 所示, 系统输入  $N(t)$  为物理谱密度为  $N_0$  的白噪声, 对包络平方检波后的过程进行二次独立采样, 求积累后的输出  $X(t)$  的分布平方律。

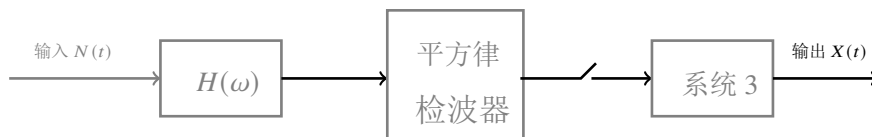


图 6-31