

# 随机信号分析

## 随机信号的时域分析

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

November 15, 2020

# 目录

- 1 马尔可夫过程
  - 马尔可夫序列的性质
- 2 马尔可夫链
  - 马氏链的有限维分布
  - 马氏链的平稳分布与遍历性
- 3 马尔可夫过程
  - 独立增量过程
  - 泊松过程
- 4 泊松过程的统计特性
  - 半随机电报信号的功率谱密度
  - 散粒噪声  $X(t)$  的统计特性

## 第二次教案下载二维码

Github 下载



## 第 2 章 随机信号的时域分析

## 智慧树课堂二维码和项目地址



图 1:《随机信号分析》课程号:k213654



Github 项目地址

下载地址:

<https://github.com/zggl/random-signal-processing2020-autumn>

# 目录

- 1 马尔可夫过程
  - 马尔可夫序列的性质
- 2 马尔可夫链
  - 马氏链的有限维分布
  - 马氏链的平稳分布与遍历性
- 3 马尔可夫过程
  - 独立增量过程
  - 泊松过程
- 4 泊松过程的统计特性
  - 半随机电报信号的功率谱密度
  - 散粒噪声  $X(t)$  的统计特性



马尔可夫过程按其状态空间和时间参数集  $T$  是连续还是离散可分成四类。

表 1: 马尔可夫过程的分类

分类名称 \ 时间参数集 $T$	状态空间 $I$	
	离散	连续
离散 ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )	马尔可夫链	马尔可夫序列
连续 ( $t \geq 0$ )	可列马尔可夫过程	马尔可夫过程







对于连续型随机变量, 由上式可得

$$f_X(x_n|x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1) = f_X(x_n|x_{n-1}), \quad (2)$$

因此, 利用条件概率的性质

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_X(x_n|x_{n-1}, \dots, x_1) \cdots f_X(x_2|x_1) f_X(x_1). \quad (3)$$

结合式 (2) 可得

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_X(x_n|x_{n-1}) f_X(x_{n-1}|x_{n-2}) \cdots f_X(x_2|x_1) f_X(x_1). \quad (4)$$

和初始概率密度  $f_X(x_1)$  所确定。

$$\begin{aligned} f_X(x_n | x_{n-1}, \dots, x_2, x_1) &= \frac{f_X(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)}{f_X(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} \\ &= f_X(x_n | x_{n-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

## 马尔可夫序列的性质

1° 马尔可夫序列的子序列仍为马尔可夫序列

给定  $n$  个任意整数  $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ , 有

$$f_X(x_{k_n} | x_{k_{n-1}}, \cdots, x_{k_1}) = f_X(x_{k_n} | x_{k_{n-1}}). \quad (6)$$

马尔可夫序列通常由上式来定义, 但用式 (2) 定义更为紧凑。

2° 马尔可夫序列按其相反方向组成的遵序列仍为马尔可夫序列

对任意的整数  $n$  和  $k$ , 有

$$f_X(x_n | x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}) = f_X(x_n | x_{n+1}). \quad (7)$$

证: 由式 (4) 知

$$\begin{aligned} f_X(x_n | x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}) &= \frac{f_X(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k})}{f_X(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k})} \\ &= \frac{f_X(x_{n+k} | x_{n+k-1}) f_X(x_{n+k-1} | x_{n+k-2}) \cdots f_X(x_{n+1} | x_n) f_X(x_n)}{f_X(x_{n+k} | x_{n+k-1}) f_X(x_{n+k-1} | x_{n+k-2}) \cdots f_X(x_{n+2} | x_{n+1}) f_X(x_{n+1})} \\ &= \frac{f_X(x_{n+1} | x_n) f_X(x_n)}{f_X(x_{n+1})} = \frac{f_X(x_{n+1}, x_n)}{f_X(x_{n+1})} \\ &= f_X(x_n | x_{n+1}). \end{aligned} \quad (8)$$

### 3° 马氏序列的条件数学期望满足

$$E[X_n | X_{n-1}, \dots, X_1] = E[X_n | X_{n-1}]. \quad (9)$$

如果马尔可夫序列满足

$$E[X_n | X_{n-1}, \dots, X_1] = X_{n-1}. \quad (10)$$

则称此随机序列为“鞅”。

## 4° 马尔可夫序列中（若现在已知则未来与过去无关）

若  $n > x > s$ , 则假定  $X$  已知条件下, 随机变量  $X_n$  与  $X$  是独立的。满足

$$f_X(x_n, x_s | x_r) = f_X(x_n | x_r) f_X(x_s | x_r). \quad (11)$$

证: 由式 (4) 知

$$\begin{aligned} f_X(x_n, x_s | x_r) &= \frac{f_X(x_n | x_r) f_X(x_r | x_s) f_X(x_s)}{f_X(x_r)} \\ &= \frac{f_X(x_n | x_r) f_X(x_r, x_s)}{f_X(x_r)} \\ &= f_X(x_n | x_r) f_X(x_s | x_r). \end{aligned} \quad (12)$$

可把上述结论推广到具有任意个过去与未来随机变量的情况。

## 5° 多重马尔可夫序列

马尔可夫序列的概念可以推广。

满足式 (1) 的随机序列称为 1 重马尔可夫序列。对于任意  $n$ , 满足

$$F_X(x_n | x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1) = F_X(x_n | x_{n-1}, x_{n-2}) \quad (13)$$

的随机序列称为 2 重马尔可夫序列。依此类推, 可定义多重马尔可夫序列。



## 6° 齐次马尔可夫序列

对一般马尔可夫序列而言, 条件概率密度  $f_X(x_n|x_{n-1})$  是  $x$  和  $n$  的函数, 如果条件概率密度  $f_X(x_n|x_{n-1})$  与  $n$  无关, 则称马尔可夫序列是齐次的。用记号

$$f_{X_n}(x|X_{n-1} = x_0) = f_X(x|x_0). \quad (14)$$

表示  $x_{n-1} = x_0$  条件下,  $X_n$  的条件概率密度。

## 7° 平稳马尔可夫序列

如果一个马尔可夫序列是齐次的, 并且所有的随机变量  $X_n$  具有相同的概率密度, 则称马尔可夫序列为平稳的。我们可以用更精确的记号  $f_X(x)$  来表示此概率密度, 则要求这个函数与  $n$  无关。不难证明, 在一个齐次马尔可夫序列中, 若最初的两个随机变量  $X_1$  和  $X_2$  具有相同的概率密度, 则此序列是平稳的。

## 8° 切普曼——柯尔莫哥洛夫 (Chapman-Kolmogorov) 方程

若一个马尔可夫序列的转移概率密度满足

$$f_X(x_n|x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_n|x_r) f_X(x_r|x_1) dx. \quad (15)$$

其中  $n > r > s$  为任意整数, 则称该方程为切普曼——柯尔莫哥洛夫方程。

证: 对任意三个随机变量  $X_n, X_r, X_s, n > r > s$ , 有

$$\begin{aligned}
 f_X(x_n|x_s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_n, x_r|x_s) dx_r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_X(x_n, x_r, x_s)}{f_X(x_s)} dx_r \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_X(x_n|x_r, x_s) f_X(x_r, x_s)}{f_X(x_s)} dx_r \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_n|x_r, x_s) f_X(x_r|x_s) dx_r \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_n|x_r) f_X(x_r|x_s) dx_r.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

最后一步应用了无后效性, 即  $f_X(x_n|x_r, x_s) = f_X(x_n|x_r)$ 。

反复应用切普曼-柯尔莫哥洛夫方程, 我们可根据相邻随机变量的转移概率密度, 求得  $X$  条件下  $X$  的转移概率密度

## 9° 高斯-马尔可夫序列

如果一个  $n$  维随机序列矢量  $\{X(n)\}$  既是高斯序列, 又是马尔可夫序列, 则称它为高斯-马尔可夫序列。高斯-马尔可夫序列的高斯特性决定了它幅度的概率密度分布, 而马尔可夫特性则决定了它在时间上的传播。这种模型常用在运动目标导弹和飞机) 的轨迹测量中。

# 目录

- 1 马尔可夫过程
  - 马尔可夫序列的性质
- 2 马尔可夫链
  - 马氏链的有限维分布
  - 马氏链的平稳分布与遍历性
- 3 马尔可夫过程
  - 独立增量过程
  - 泊松过程
- 4 泊松过程的统计特性
  - 半随机电报信号的功率谱密度
  - 散粒噪声  $X(t)$  的统计特性

## 定义 .2



可用公式表示为

$$\begin{aligned} P \{X_{m+k} = a_j | X_m = a_i, X_{m-1} = a_p, \dots, X_1 = a_q\} \\ = P \{X_{m+k} = a_j | X_m = a_i\} \end{aligned} \quad (17)$$

实际上, 过程  $X(t)$  是状态离散的随机序列  $\{X_n\}$ , 所以上式可以看成由式 (1) 演变而来。



## 2. 马氏链的转移概率

### (1) 马氏链的转移概率

马氏链“在  $m$  时刻出现的状态为  $a_i$  的条件下,  $t_m + k$  时刻出现的状态为  $a_j$ ”的条件概率可用  $p_{ij}(m, m + k)$  表示, 即

$$p_{ij}(m, m + k) = P \{X_{m+k} = a_j | X_m = a_i\} \quad (18)$$

式中  $i, j = 1, 2, \dots, N$ , 且  $m, k$  皆为正整数, 则称  $p_{ij}(m, m + k)$  为马氏链的转移概率。一般而言,  $p_{ij}(m, m + k)$  不仅依赖于  $i, j, k$ , 而且还依赖于  $m$ 。若  $p(m, m + k)$  与  $m$  无关, 则称此马氏链为齐次的。齐次马氏链讨论通常将“齐次”二字省去。

## 随机信号分析

## 随机矩阵

此矩阵决定了状态  $X_1, X_2, \dots, X_N$  转移的概率法则, 具有下列两个性质:

$$\begin{aligned} 1^\circ 0 \leq p_{ij} \leq 1 \\ 2^\circ \sum_{i=1}^N p_{ij} = 1 \end{aligned} \quad (21)$$

表示转移概率矩阵是一个每行元素之和为 1 的非负元素矩阵。

因  $p$  为条件概率, 故性质 1 是显然的, 性质 2 可由下式推得:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N p_{ij} &= \sum_{j=1}^N P \{X_{m+1} = a_j | X_m = a_i\} \\ &= P \{X_{m+1} = a_1 | X_m = a_i\} + \dots \\ &+ P \{X_{m+1} = a_N | X_m = a_i\} = 1. \end{aligned} \quad (22)$$

### (3) n 步转移概率及其转移概率矩阵

与一步转移概率类似, 当  $k = n$  时, 定义马氏链的  $n$  步转移概率  $p_{ij}(n)$  为

$$p_{ij}(n) = p_{ij}(m, m+n) = p(X_{m+n} = a_j | X_m = a_i), \quad n \geq 1. \quad (23)$$

表明马氏链在时刻  $t_m$  的状态为  $a_i$  的条件下, 经过  $n$  步转移到达状态  $a_j$  的概率。对应的  $n$  步转移概率矩阵为

$$P(n) = \begin{bmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \cdots & p_{1N}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & \cdots & p_{2N}(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{N1}(n) & p_{N2}(n) & \cdots & p_{NN}(n) \end{bmatrix} \quad \text{..} \quad (24)$$

它也是随机矩阵.

显然具有如下性质

$$\begin{aligned} 1^\circ & 0 \leq p_{ij}(n) \leq 1 \\ 2^\circ & \sum_{j=1}^N p_{ij}(n) = 1 \end{aligned} \quad (25)$$

$n = 1$  时,  $p_{ij}$  就是一步转移概率, 即  $p_{ij}(n) = p_{ij}(1) = p_{ij} = p_{ij}(m, m+1)$ 。通常还规定

$$p_{ij}(0) = p_{ij}(m, m) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (26)$$

#### (4) n 步转移概率与一步转移概率的关系

对于 n 步转移概率, 有切普曼-柯尔莫哥洛夫方程的离散形式:

$$p_{ij}(n) = p_{ij}(l+k) = \sum_{r=1}^N p_{ir}(l)p_{rj}(k), \quad n = l+k \quad (27)$$

其中利用马氏链的无后效性与齐次性

可得

$$\begin{cases} P\{X_{m+l+k} = a_j | X_{m+l} = a_r, Z_m = a_i\} = p_{rj}(k) \\ P\{X_{m+l} = a_r | X_m = a_i\} = p_{ir}(l) \end{cases} \quad (29)$$

式 (27) 表明: 由于马氏链的无后效性与齐次性, 该链从状态  $a_i$  经过  $n$  步转移到达状态  $a_j$  这一事件  $(a_i \xrightarrow{n} a_j)$ , 等效于该链先由状态  $a_i$  经过步转移到达状态  $a_r$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ), 再由状态  $a_r$  经过  $k$  步转移到达状态  $a_j$  事件  $(a_i \xrightarrow{l} a_r \xrightarrow{k} a_j)$ , 也就是说, 只要  $a_r, r \in I = \{1, 2, \dots, N\}$  中有一个事件  $(a_i \xrightarrow{l} a_r \xrightarrow{k} a_j)$  发生, 则事件  $(a_i \xrightarrow{n} a_j)$  就必发生。因此事件的概率是  $r \in I$  中所有事件  $(a_i \xrightarrow{l} a_r \xrightarrow{k} a_j)$  概率的和。



当  $l = 1, k = 1$  时

$$p_{ij}(2) = \sum_{r=1}^N p_{ir}(1)p_{rj}(1) = \sum_{r=1}^N p_{ir}p_{rj}. \quad (30)$$

当  $L = 1, k = 2$  时

$$p_{ij}(3) = \sum_{r=1}^N p_{ir}(1)p_{rj}(2) = \sum_{r=1}^N p_{ir} \sum_{k=1}^N p_{rk}p_{kj}. \quad (31)$$

以此类推

$$p_{ij}(n) = \sum_{r=1}^N p_{ir}(1)p_{rj}(n-1) = \sum_{r=1}^N p_{ir}p_{rj}(n-1). \quad (32)$$

同理，可得离散切普曼-柯尔莫哥洛夫方程的矩阵形式：

$$P(n) = P(l + k) = P(l)P(k). \quad (33)$$

当  $n = 2$  时

$$P(2) = P(1)P(1) = [P(1)]^2 = P^2. \quad (34)$$

步转移概率矩阵  $P(1)$  简写为  $P$ 。

当  $n = 3$  时

$$P(3) = P(1)P(2) = P(1)[P(1)]^2 = P^3. \quad (35)$$

$$P(n) = P(1)P(n-1) = \dots = P^n. \quad (36)$$

当  $n$  为任意正整数时——

上式表明:  $n$  步转移概率矩阵等于一步转移概率矩阵的  $n$  次方。  
由此可见, 以步转移概率  $p$  为元素的转移概率矩阵  $P$  决定了马氏链状态转移过程的概率法则。

## (5) 马氏链的有限维分布

### 1) 初始分布

马氏链在  $t = 0$  时所处状态  $a_i$  的概率, 通常被称作“初始概率”。

$$p_i(0) = p\{X_0 = a_i\} = p_i, \quad i \in I = \{1, \dots, N\} \quad (37)$$

且有  $0 \leq p_i \leq 1, \sum_{i=1}^N p_i = 1$  成立。

而对于  $N$  个状态而言, 所有初始概率的集合  $p$  称为马氏链的“初始分布”

$$\{p_i\} = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_N). \quad (38)$$

## 2) 马氏链的一维分布

马氏链在第  $n$  步所处状态为  $a_j$  的无条件概率称为马氏链的“一维分布”，也称为“状态概率”。表示为

$$p\{X_n = a_j\} = p_j(n), \quad j \in I = \{1, \dots, N\} \quad (39)$$

且有  $0 \leq p(n) \leq 1, p(n) = 1$  成立

## 马氏链的一维分布

由全概率公式, 一维分布可表示为

$$P_j(n) = \sum_{i=1}^N P \{X_n = a_j | X_s = a_i\} P \{X_s = a_i\} \quad (40)$$

$$= \sum_{i=1}^N p_i(s) p_{ij}(n-s), i, j \in I. \quad (41)$$

上式给出了不同时刻一维分布  $p_i(s)$ ,  $p_j(n)$  以及  $(n-s)$  步转移概率  $p_{ij}(n-s)$  之间的关系

当  $s$

$$p_j(n) = \sum_{i=1}^N p_i p_{ij}(n), \quad j \in I. \quad (42)$$

当  $s$

$$p_j(n) = \sum_{i=1}^N p_i(n-1) p_{ij}, \quad j \in I. \quad (43)$$

若将一维分布表示成矢量形式

$$\mathbf{p}(n) = \begin{bmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \\ \vdots \\ p_N(n) \end{bmatrix}_{N \times 1} \quad (44)$$

称之为“一维分布矢量”或“状态概率矢量”。且其递推公式(40)可表示为

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{P}^T(n-s)\mathbf{p}(s). \quad (45)$$



### 3) n 维分布

齐次马氏链在  $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$  时刻分别取得状态  $a_{i_0}, a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{(n-1)}}$ , ( $i_0, i_1, \dots, i_{n-1} \in I$ )。这一事件的概率为  $P\{X_0 = a_{i_0}, X_1 = a_{i_1}, \dots, X_{n-1} = a_{i_{(n-1)}}\}$ , 称为马氏链的  $n$  维分布。由全概率公式和无后效性可证

$$\begin{aligned}
 & P\{X_0 = a_{i_0}, X_1 = a_{i_1}, \dots, X_{n-1} = a_{i_{(n-1)}}\} \\
 &= P\{X_0 = a_{i_0}\} P\{X_1 = a_{i_1} | X_0 = a_{i_0}\} \\
 &\cdots P\{X_{n-1} = a_{i_{(n-1)}} | X_0 = a_{i_0}, \dots, X_{n-2} = a_{i_{(n-2)}}\} \\
 &= P\{X_0 = a_{i_0}\} P\{X_1 = a_{i_1} | X_0 = a_{i_0}\} \\
 &\cdots P\{X_{n-1} = a_{i_{(n-1)}} | X_{n-2} = a_{i_{(n-2)}}\} \\
 &= p_{i_0} p_{i_1, i_1} \cdots p_{i_{(n-2)}, i_{(n-1)}}.
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

由于  $l = \{1, \dots, N\}$ ,  $a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i(n-1)}$  分别可以是  $N$  个状态中的任意一个, 因此, 这种  $n$  维分布可以有多种。  
通过马氏链的一维分布和  $n$  维分布的讨论可知, 马氏链的任意有限维分布完全可以由初始分布和一步转移概率矩阵所确定, 因此, 初始分布和一步转移概率矩阵是描述马氏链的统计特性的两个重要的分布特征。马氏链在研究质点的随机运动、自动控制、通信技术、气象预报和生物遗传工程等方面皆有广泛的应用。

## 下面是马氏链应用的一些例子

## 例 .1

设质点  $M$  在直线段上作随机游动, 如图 3 所示。假定质点  $M$  只能停留在  $1, 2, \dots, N$  点上, 且只在  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  时刻发生游动。游动的概率法则是:

- ① 若质点  $M$  原来处于  $2, \dots, N-1$  这些点上, 则分别以  $(0 < 1)$  的概率向右移动一步或以  $q(q = 1 - p)$  的概率向左移动一步。
- ② 若质点  $M$  原来处于  $1$  点, 则以概率  $1$  移动到  $2$  点。
- ③ 若质点  $M$  原来处于  $N$  点, 则以概率  $1$  移动到  $N-1$  点上。求其转移概率矩阵。





图 2: 质点 M 的随机游动

解: 若以  $X_n = i (i = 1, 2, \dots, N)$  表示质点  $M$  在时刻  $t_n$  位于点, 则不难看出  $X_1, X_2, \dots$  是一个齐次马氏链。由于其一步转移概率力为

$$\begin{cases} p_{t,i+1} = p, & 2 \leq i \leq N-1 \\ p_{i,t-1} = q, & 2 \leq i \leq N-1 \\ p_{i,j} = 0, & j \neq i+1, i-1 \\ p_{12} = p_{N,N-1} = 1 \end{cases} \quad (47)$$

故质点 M 游动的转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ q & 0 & p & & & 0 \\ & q & & \ddots & & \\ & & \ddots & & p & \\ 0 & & & & q & 0 & p \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

$P$  为  $N \times N$  阶方阵。因为质点不能越过 1 和  $N$  两端点, 将 1 和  $N$  这两点称为反射壁 (或反射状态), 故称上述游动为一维不可越壁的随机游动, 它仅是一维随机游动的一种。

如果我们改变质点游动的概率法则 (即转移概率) 就可得到不同类型的随机游动过程。若游动的概率法则改动为:  $n$  当质点  $M$  一旦到达 1 点或  $N$  点, 就永远停留在 1 或  $N$  处, 其他不变。我们将 1 和  $N$  这两点称为吸收壁, 因此得到的是带有两个吸收壁的随机游动。它也是一个齐次马氏链, 由于其一步转移概率为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ q & 0 & p & & & & 0 \\ & q & & \ddots & & & \\ & & \ddots & & p & & \\ 0 & & & & q & 0 & p \\ & & & & 0 & 1 & \end{pmatrix}. \quad (49)$$

它仍是  $N \times N$  阶方阵。

## 例 .2

在某数字通信系统中传递 0、1 两种信号, 且传递要经过若干级。因为系统中存在噪声, 各级将会造成错误。若某级输入 0、1 数字信号后, 其输出不产生错误的概率为  $p$  (即各级正确传递信息的概率), 产生错误的概率为  $q = 1 - p$ 。该级的输入状态和输出状态构成了一个两状态的马氏链, 它的一步转移概率矩阵为



$$P = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}, \quad (50)$$

于是, 二步转移概率矩阵为

$$P(2) = (P)^2 = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^2 + q^2 & 2pq \\ 2pq & p^2 + q^2 \end{bmatrix}. \quad (51)$$



## 例 .3

天气预报问题。若明天是否降雨只与今天的天气 (是否有雨) 有关, 而与以往的天气无关。并设今日有雨而明日也有雨的概率为 0.6, 今日无雨而明日有雨的概率为 0.3。另外, 假定将“有雨”称作“1”状态天气, 而把“无雨”称为“2”状态天气, 则本例属于一个两状态的马氏链。

① 试求其一步至四步转移概率矩阵。

$$\begin{aligned} p_{11} &= 0.6, & p_{12} &= 1 - 0.6 = 0.4 \\ p_{21} &= 0.3, & p_{22} &= 1 - 0.3 = 0.7 \end{aligned} \quad (52)$$

② 今日有雨而后日 (第三日) 仍有雨的概率为多少?

③ 今日有雨而第四日无雨的概率为多少?

④ 今日无雨而第五日有雨的概率为多少？

解：由题可知，一步转移概率为

① 此马氏链的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \quad (53)$$

二步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}(2) = (\mathbf{P})^2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.52 \\ 0.39 & 0.61 \end{bmatrix} \quad (54)$$

三步转移概率矩阵为

$$\begin{aligned} P(3) &= (P)^3 = (P)^2 P = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.52 \\ 0.39 & 0.61 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.444 & 0.556 \\ 0.417 & 0.583 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (55)$$

四步转移概率矩阵为

- ② 今日有雨而第三日仍有雨的概率为  $p_{11}(2) = 0.48$ .
- ③ 今日有雨而第四日无雨的概率为  $p_{12}(3) = 0.556$ .
- ④ 今日无雨而第五日有雨的概率为  $p_{21}(4) = 0.4251$ .

### 定义 .3

平稳分布 1 若一个马氏链的概率分布  $P\{X = a_i\} = p_i$  满足

$$p_j = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}, \quad j \in I. \quad (56)$$

其中  $p_j \geq 0, \sum p_j = 1$  成立。则称  $\{p_j\} = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  为该马氏链的“平稳分布”。

对于平稳分布  $\{p_j\}$  有

$$p_j = \sum_{i \in I} \left( \sum_{k \in I} p_i p_k \right) p_{ij} = \sum_{k \in I} p_k \left( \sum_{i \in I} p_{ki} p_{ij} \right) = \sum_{k \in I} p_k p_{kj}^{(2)}, j \in I. \quad (57)$$

类似可推

$$p_j = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}^{(n)}, j \in I. \quad (58)$$

比较式 (56) 与式 (58) 可知, 对平稳分布而言, 无论是一步转移到状态  $a_j$  还是  $n$  步转移到状态  $a_j$ , 其概率分布不变, 与转移时间  $n$  无关。

推论: 如果齐次马氏链的初始分布  $\{p_i\}$  是平稳分布, 则对  $n \geq 1$  步后,  $X_n$  的分布也是平稳分布, 其中  $p_i = P\{X_0 = a_i\}$ ,  $p_j(n) = P\{X_n = a_j\}$

证: 由式(42) 与式 (58)可得

$$p_j(n) = \sum_{i=1}^N p_i p_{ij}(n) = p_j, \quad j \in I. \quad (59)$$

若用概率矢量表示, 则有

$$p(n) = p(0) = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{bmatrix}_{N \times 1}. \quad (60)$$

## 定义 .4

链的平稳分布 1 若齐次马氏链的概率分布不随时间  $n$  的变化而改变, 即满足式 (59) 或式 (60), 则称此链为平稳马氏链。称  $\{p_j\} = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  为该链的平稳分布。



由于  $p_1(n) = P\{X_n = a_j\}$ ,  $p_j = P\{X_0 = a_j\}$ , 由式 (7-51) 可得  $p_j(n) = p_i$ , 即  $P\{X_n = a_j\} = P\{X_0 = a_j\}$ , 表示平稳马氏链的一维分布不随时间  $n$  的变化而改变。

若对平稳马氏链的  $m$  维分布在时间上平移  $n$ , 可得

$$\begin{aligned} & P\{X_{0+n} = a_{i0}, X_{1+n} = a_{i1}, \dots, X_{m-1+n} = a_{i(m-1)}\} \\ &= P\{X_{0+n} = a_{i0}\} P\{X_{1+n} = a_{i1} | X_0 = a_{i0}\} \cdots P\{X_{m-1+n} = a_{i(m-1)} | X_{m-2+n} = a_{i(m-2)}\} \\ &= a_{i(m-2)} = p_{i0}(n) p_{i0,i1} \cdots p_{i(m-2),i(m-1)}. \end{aligned} \quad (61)$$

对于平稳马氏链,  $p_{i0}(n) = p_{i0}(0) = p_i$ , 则

$$\begin{aligned} & P\{X_{0+n} = a_{i0}, X_{1+n} = a_{i1}, \dots, X_{m-1+n} = a_{i(m-1)}\} \\ &= p_{i0} p_{i0,i} \cdots p_{i(m-2),i(m-1)} \\ &= P\{X_0 = a_{i0}, X_1 = a_{i1}, \dots, X_{m-1} = a_{i(m-1)}\} \\ &= a_{i(m-1)}. \end{aligned} \quad (62)$$

可见, 该马氏链的  $m$  维分布也不随时间的平移而变化, 说明平稳马氏链是个平稳过程。



## (2) 遍历性

例 43 中的马氏链, 求得的各步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}, \mathbf{P}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.52 \\ 0.39 & 0.61 \end{bmatrix}, \mathbf{P}^{(3)} =, \mathbf{P}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.4332 & 0.5668 \\ 0.4251 & 0.5749 \end{bmatrix} \quad (63)$$

可以看出,随着步长  $n$  增大,此马氏链的转移概率  $p_1$  与  $p_{21}, p_{12}$  与  $p_{22}$  差距越来越小。

设想若取  $n \rightarrow \infty$ , 则必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix}. \quad (64)$$

即不论从哪个状态  $i$  出发, 只要终点状态  $j$  相同, 则其转移概率相同。

## 定义 .5

马氏链的遍历性 1 如果一个齐次马氏链对于一切状态  $i$  和  $j$ , 存在不依赖于的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = p_j, \quad (65)$$

则称此马氏链具有遍历性。这里的  $p(n)$  为此链的  $n$  步转移概率。



由上述定义可知, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $n$  步转移概率  $p_{ij}(n)$  趋近于一个与初始状态  $i$  无关的力。换言之, 不论过程自哪一状态  $i$  出发, 当转移步数  $n$  充分大时, 转移到达状态  $j$  的概率都趋近于  $p_j$ 。对  $\forall j \in I, p_j$ , 是一种概率分布  $\{p_j\}$ , 满足

$$\sum_{j=1}^N p_j = 1. \quad (66)$$

此时  $p_{ij}$  称为极限分布。

比较前面介绍的平稳分布可以看出, 马氏链的遍历性可以导致  $n \rightarrow \infty$  的平稳性, 因此平稳分布就是具有遍历性的马氏链的极限分布。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_N \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_N \end{bmatrix}. \quad (67)$$

物理上可以理解为: 不管初始状态如何, 系统经过一段时间后 ( $n \rightarrow \infty$ ) 走到稳定状态 (平稳状态), 系统的宏观状态不再随时间变化, 即系统处于各个状态的概率不再随时间变化, 是一平稳分布

以上给出了马氏链具有遍历性的基本定义, 下面的定理给出马氏链具有遍历性的一个简单的充分条件以及求极限分布  $\{p_i\}$  的方法。

定理 (有限马氏链具有遍历性的充分条件): 对于一有限状态的马氏链, 若存在正整数  $m$ , 使所有的状态满足

$$p_u(m) > 0, \quad i, j \in I \quad (68)$$

则此链是遍历的。

由于遍历性的马氏链的极限分布  $\{p\}$  就是平稳马氏链中的平稳分布, 可推出极限分布  $\{p_j\}$  是下面方程组的唯一解。

$$\left\{ \begin{array}{l} p_y = \sum_{i=1}^N p_i p_{ij} \\ \sum_{j=1}^N p_j = 1 \end{array} \right. \text{ 或 } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p} = \mathbf{P}^\top \mathbf{p} \\ \sum_{j=1}^N p_j = 1 \end{array} \right. , \quad \text{其中 } \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{bmatrix} \quad (69)$$

## 例 .4

设有三个状态  $\{1, 2, 3\}$  的马氏链, 它的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix}, 0 < p < 1, q = 1 - p \quad (70)$$

① 问此链是否具有遍历性? ② 求其极限分布  $\{p\}$ 。



解: ① 显然, 当  $m = 1$  时, 有  $P(1) = P$ , 因  $P$  中三个元素  $p_{13}, p_{22}, p_{31}$  为零, 不满足有限马氏链具有遍历性的充分条件。当  $m = 2$  时, 由于

$$P(2) = (P)^2 = \begin{bmatrix} q^2 + pq & pq & p^2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \\ q^2 & pq & pq + p^2 \end{bmatrix} \quad (71)$$

的元素皆大于零, 满足遍历的充分条件, 所以此马氏链具有遍历性。

## ② 据式 (69) 有方程组

$$\begin{cases} p_1 = p_1 p_{11} + p_2 p_{21} + p_3 p_{31} \\ p_2 = p_1 p_{12} + p_2 p_{22} + p_3 p_{32} \\ p_3 = p_1 p_{13} + p_2 p_{23} + p_3 p_{33} \end{cases} \quad \text{且} \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad (72)$$

将已知条件代入方程组 将已知条件代入上式可得

$$\begin{cases} p_1 = p_1 q + p_2 q \\ p_2 = p_1 p + p_3 q \\ p_3 = p_2 p + p_3 p \end{cases} \quad \text{A} \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad (73)$$

由此解得

$$p_1 = \left[ 1 + \frac{p}{q} + \left( \frac{p}{q} \right)^2 \right]^{-1}, \quad p_2 = \frac{p}{q} p_1, \quad p_3 = \left( \frac{p}{q} \right)^2 p_1 \quad (74)$$

可归纳为

$$p_j = \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \left( \frac{p}{q} \right)^3} \left( \frac{p}{q} \right)^{j-1}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (75)$$

若  $p = q = 1/2$ , 则得  $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$ .

### 例 .5

设有两个状态  $\{1, 2\}$  的马氏链, 一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I. \quad (76)$$



试问此链是否具有遍历性, 为什么?

解: 因为

$$\begin{cases} \mathbf{P}(1) = \mathbf{P} = \mathbf{I} \\ \mathbf{P}(2) = (\mathbf{P})^2 = \mathbf{I} \\ \mathbf{P}(3) = (\mathbf{P})^3 = \mathbf{I} \\ \dots \\ \mathbf{P}(n) = (\mathbf{P})^n = \mathbf{I}. \end{cases} \quad (77)$$

无论  $n$  为多大, 始终有  $p_{12}(n) = p_{21}(n) = 0$ , 不能满足遍历性的充分条件, 故此链不具有遍历性。

# 目录

- 1 马尔可夫过程
  - 马尔可夫序列的性质
- 2 马尔可夫链
  - 马氏链的有限维分布
  - 马氏链的平稳分布与遍历性
- 3 马尔可夫过程
  - 独立增量过程
  - 泊松过程
- 4 泊松过程的统计特性
  - 半随机电报信号的功率谱密度
  - 散粒噪声  $X(t)$  的统计特性

## 定义 .6

马尔可夫过程 1 设有一随机过程  $X(t), t \in T$ , 若在  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n (t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n \in T)$  时刻, 对  $X(t)$  观测得到相应的观测值  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  满足条件

$$\begin{aligned} P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) \\ = x_{n-1}, X(t_{n-2}) = x_{n-2}, \dots, X(t_1) = x_1 \\ = P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \end{aligned} \quad (78)$$

其中  $F_X(x_n; t_n | x_{n-1}, \dots, x_2, x_1; t_{n-1}, \dots, t_2, t_1)$  代表  $X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_2) = x_2, X(t_1) = x_1$  的条件下,  $n$  时刻  $X(t_n)$ , 取  $x_n$  值的条件分布函数。

若把  $t_{n-1}$  看作“现在”，因为  $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$ ，则  $t$  就可看成“将来”  $t_2, \cdots + y_{n-2}$  就当作“过去”。

因此上述定义中的条件可表述为：在“现在”状态  $X(t_{x-1})$  取值为  $x_{n-1}$  的条件下，“将来状态  $X(t_n)$  与“过去”状态  $X(t_{s-2}), X(t_{n-3}), \cdots, X(t_1)$  是无关的。



## 马尔可夫过程的另一种表述

$$F_X(x_n; t_n | x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1; t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_2, t_1) \\ = F_X(x_n; t_n | x_{n-1}; t_{n-1}) \quad (79)$$

则称此类过程为具有马尔可夫性质 (无后效性) 的过程或马尔可夫过程, 简称马氏过程。

### 定义 .7

马尔可夫过程的条件概率分布——转移概率分布 1 马氏过程的转移概率分布为

$$F_X(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) = P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \quad (80)$$

$$F_X(x; t | x_0; t_0) = P\{X(t) \leq x | X(t_0) = x_0\}, \quad t > t_0 \quad (81)$$

转移概率分布是条件概率分布。

对  $X$  而言, 它是一个分布函数, 有以下性质

$$1^\circ F_X(x, t | x_0; t_0) \geq 0$$

$$2^\circ F_X(\infty, t | x_0, t_0) = 1$$

$$3^\circ F_X(-\infty; t | x_0; t_0) = 0$$

$4^\circ F_X(x; t | x_0; t_0)$  是关于  $x$  的单调非降、右连续的函数.

5° 分布函数满足切普曼-科尔莫哥洛夫方程

$$\begin{cases} F_X(x; t | x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x; t | x_1, t_1) dF_X(x_1, t_1 | x_0; t_0) \\ dF_X(x_1; t_1 | x_0, t_0) = f_X(x_1; t_1 | x_0; t_0) dx_1, \quad t_0 < t_1 < t \end{cases} \quad (82)$$

应用全概率公式, 可以证明上式成立。



此时, 无后效性可表示为

$$\begin{aligned} f_X(x_n; t_n | x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1; t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_2, t_1) \\ = f_X(x_n; t_n | x_{n-1}; t_{n-1}). \end{aligned} \quad (86)$$

马氏过程的转移概率密度也满足切普曼-科尔莫哥洛夫方程

$$\begin{aligned} f_X(x_n; t_n | x_k, t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_n; t_n | x_r; t_r) f_X(x_r; t_r | x_k; t_k) dx_r, \\ t_n > t_r > t_k. \end{aligned} \quad (87)$$



若马氏过程的转移概率分布  $F_X(x; t|x_0; t_0)$  或转移概率密度  $f_X(x; t|x_0; t_0)$ , 只与转移前后的状态  $x_0, x$  及相应的时间差  $t - t_0 = \tau$  有关, 而与  $t_0, t$  无关多。即

$$F_X(x_3 t|x_0; t_0) = F_X(x|x_0; \tau) \quad (90)$$

或

$$f_X(x_7 t|x_0; t_0) = f_X(x|x_0; \tau). \quad (91)$$

具有这种特性的马氏过程称为齐次马尔可夫过程。

## 2. 马尔可夫过程的统计特性及性质

由前面的内容可知, 随机过程的统计特性可由有限维联合概率分布来近似地描述。对于马尔可夫过程  $X(t)$  来说, 其  $n$  维概率密度可以表示为

$$\begin{aligned}
 & f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\
 &= f_X(x_n; t_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \\
 & \quad f_X(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \\
 &= \dots \\
 &= f_X(x_n; t_n | x_{n-1}; t_{n-1}) \\
 & \quad f_X(x_{n-1}; t_{n-1} | x_{n-2}; t_{n-2}) \cdots f_X(x_2; t_2 | x_1; t_1) f_X(x_1; t_1) \\
 &= f_X(x_1; t_1) \prod_{i=1}^{n-1} f_X(x_{i+1}, t_{i+1} | x_i; t_i), t_1 < t_2 < \dots < t_n.
 \end{aligned}$$

(92)

# 马氏过程的几个性质

当取  $t_1$  为初始时刻时,  $f_X(x_1 : t)$  表示初始概率分布 (密度)。上式表明: 马氏过程的统计特性完全由它的初始概率分布 (密度) 和转移概率分布 (密度) 所确定。

## 1° 逆方向的马尔可夫过程仍为马尔可夫过程

对任意的整数  $n$  和  $k$ , 有

$$\begin{aligned} f_X(x_n + t_n | x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}, t_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{n+k}) \\ = f_X(x_n, t_n | x_{n+1}, t_{n+1}). \end{aligned} \quad (93)$$



证:

$$f_X(x_n; t_n | x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}; t_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{n+k}) \quad (94)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{f_X(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}; t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+k})}{f_X(x_{n+1}, \dots, x_{n+k}, t_{n+1}, \dots, t_{n+k})} \\ &= \frac{f_X(x_n; t_n) f_X(x_{n+1}; t_{n+1} | x_n; t_n)}{f_X(x_{n+1}; t_{n+1})} \quad (95) \\ &= \frac{f_X(x_{n+1}, x_n, t_{n+1}, t_n)}{f_X(x_{n+1}; t_{n+1})} \\ &= f_X(x_n; t_n | x_{n+1}; t_{n+1}). \end{aligned}$$

## 2° 若马尔可夫过程的现在状态

将来状态与过去状态无关。若  $t_n > t_r > t_s$ , 则在已知  $X$  (过程在  $t_n$  时刻的状态) 的条件下, 随机变量  $X_n$  和  $X_n$  是独立的, 满足

$$f_X(x_n, x_s; t_n, t_s | x_r, t_r) = f_X(x_n; t_n | x_r, t_r) f_X(x_s; t_s | x_r, t_r). \quad (96)$$

3° 若对每个  $t \leq t_1 < t_2$ ,  $X(t_2) - X(t_1)$  与  $X(t)$  皆是独立的, 则过程  $X(t)$  是马氏过程。

## 4° 由转移概率密度的无后效性

可推出

$$E[X(t_n) | X(t_{n-1}), \dots, X(t_1)] = E[X(t_n) | X(t_{n-1})]. \quad (97)$$

# 概述

## 定义 .8

设有一个随机过程  $X(t)$ ,  $t \in T$ , 如果对任意的时刻  $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < b$  过程的增量  $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$  是相互独立的随机变量, 则称  $X(t)$  为独立增量过程, 又称为可加过程。

若由独立增量过程  $X(t), t \in T$ , 构造一个新过程  $Y(t) = X(t) - X(t_0), t \in T$ , 则新过程  $Y(t)$  也是一个独立增量过程, 不仅与  $X(t)$  有相同的增量规律, 而且有  $P\{Y(t_0) = 0\} = 1$ 。所以, 对一般的独立增量过程  $X(t)$ , 均假设 (规定) 其初始概率分布为  $P\{X(t_0) = 0\} = 1$ 。



由定义可见, 独立增量过程有这样的特点: 在任一时间间隔上, 过程状态的改变并不影响将来任一时间间隔上过程状态的改变(称为无后效性)。从而决定了独立增量过程是一种特殊的马尔可夫过程。

因此, 同马尔可夫过程一样, 独立增量过程的有限维分布可由它的初始概率分布  $P\{X(t_0) < x_0\}$  及一切增量的概率分布唯确定。这里  $t$  为过程的初始时刻。

# 独立增量过程的性质

1° 独立增量过程  $X(t)$  是一种特殊的马尔可夫过程

证: 设增量为  $Y(t_i) = X(t_i) - X(t_{i-1}), i = 1, 2, \dots, n_0$ 。由于  $X(t)$  为独立增量过程, 故增量  $Y(t_1) = X(t_1) - X(t_0), Y(t_2) = X(t_2) - X(t_1), \dots, Y(t_n) = X(t_n) - X(t_{n-1})$  为相互独立的随机变量。因此有

$$f_Y(y_1, y_2, \dots, y_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_1(y_1; t_1) f_2(y_2; t_2) \cdots f_n(y_n; t_n). \quad (98)$$

由  $X(t_0) = C$ , 并利用多维随机变量的函数变换

$$\begin{aligned} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= f_Y(y_1, y_2, \dots, y_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ &= f_1(y_1; t_1) f_2(y_2; t_2) \cdots f_n(y_n; t_n) \\ &= f_1(x_1; t_1) f_2(x_2 - x_1; t_2, t_1) \cdots \end{aligned} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} f_X(x_n; t_n | x_{n-1}, \dots, x_1; t_{n-1}, \dots, t_1) &= \frac{f_X(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n; t_1, \dots, t_{n-1}, t_n)}{f_X(x_1, \dots, x_{n-1}; t_1, \dots, t_{n-1})} \\ &= \frac{f_1(x_1; t_1) \cdots f_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}; t_{n-1}, t_{n-2}) f_n(x_n - x_{n-1}; t_n, t_{n-1})}{f_1(x_1; t_1) \cdots f_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}; t_{n-1}, t_{n-2})} \\ &= f_n(x_n - x_{n-1}; t_n, t_{n-1}) \\ &= f_X(x_n; t_n | x_{n-1}; t_{n-1}). \end{aligned} \quad (100)$$

可见, 在  $x_1$  已知条件下,  $x_n$  与  $x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$  无关, 因此  $X(t)$  是马尔可夫过程。

## 2° 独立增量过程的有限维分布由它的初始概率分布和所有增量的概率分布唯一确定

证: 设  $Y(t_0) = X(t_0)$ ,  $Y(t_i) = X(t_i) - X(t_{i-1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 增量  $Y(t_i)$  的概率分布函数可写成  $F_i(y_i, t_i)$ 。由

$$\left\{ \begin{array}{l} X(t_0) = Y(t_0) \\ X(t_1) = X(t_1) - X(t_0) + X(t_0) \\ \quad = Y(t_1) + Y(t_0) \\ X(t_2) = X(t_2) - X(t_1) + X(t_1) - X(t_0) + X(t_0) \\ \quad = Y(t_2) + Y(t_1) + Y(t_0) \quad \vdots \\ X(t_n) = Y(t_n) + Y(t_{n-1}) + \dots + Y(t_1) + Y(t_0) \\ \quad = \sum_{i=0}^n Y(t_i). \end{array} \right. \quad (101)$$

则独立增量过程  $X(t)$  的  $n + 1$  维概率分布为

$$\begin{aligned}
 F_X(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; t_0, t_1, t_2, \dots, t_n) \\
 &= P\{X(t_0) \leq x_0, X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \\
 &= P\left\{Y(t_0) \leq x_0, Y(t_1) + Y(t_0) \leq x_1, Y(t_2) + Y(t_1) + Y(t_0) \leq x_2, \right. \\
 &\quad \left. \dots, \sum_{i=0}^n Y(t_i) \leq x_n\right\}.
 \end{aligned} \tag{102}$$



利用条件概率表示  $n$  维分布的方法及马氏过程的无后效性，有

$$\begin{aligned}
 F_X(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; t_0, t_1, t_2, \dots, t_n) \\
 &= P\{Y(t_0) \leq x_0\} P\{Y(t_1) + Y(t_0) \leq x_1 | Y(t_0) = y_0\} \\
 &P\{Y(t_2) + Y(t_1) + Y(t_0) \leq x_2 | Y(t_0) + Y(t_1) = y_0 + y_1\} \cdots \\
 &P\left\{\sum_{i=0}^n Y(t_i) \leq x_n \mid \sum_{i=0}^{n-1} Y(t_i)\right. \\
 &\quad \left.= P\{Y(t_0) \leq x_0\} P\{Y(t_1) \leq x_1 - y_0\}\right. \\
 &P\{Y(t_2) \leq x_2 - (y_0 + y_1)\} \cdots P\left\{Y(t_n) \leq x_n - \sum_{i=0}^{n-1} y_i\right\} \\
 &= F_X(x_0; t_0) F_1(x_1 - y_0; t_1) F_2(x_2 - (y_0 + y_1); t_2) \\
 &\cdots F_n\left(x_n - \sum_{i=0}^{n-1} y_i; t_n\right).
 \end{aligned}$$

因为

$$x_0 = y_0 = 0, \quad y_1 = x_1, \quad y_1 + y_2 = x_2, \quad \cdots, \quad \sum_{i=0}^{n-1} y_i = x_{n-1}. \quad (104)$$

且当  $X(t_0) = 0$  时,  $F_X(x_0; t_0) = P\{X(t_0) = 0\} = 1$ , 则

$$\begin{aligned} F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) &= F_X(x_1; t_1) F_2(x_2 - x_1; t_2) \\ &\quad \cdots F_n(x_n - x_{n-1}; t_n) \\ &= F_X(x_1; t_1) \prod_{k=2}^n F_k(x_k - x_{k-1}; t_k). \end{aligned} \quad (105)$$

上式说明, 用一维增量概率分布  $F_k(x_k - x_{k-1}; t_k)$  ( $k = 2, \cdots, n$ ) 与  $X(t)$  的初始分布  $F_X(x_1; t_1)$  就可以充分描述一个独立增量过程的  $n$  维分布如果独立增量过程  $X(t)$  的增量  $X(t) - X(t-1)$  的分布只与时间差  $t_i, t_{i-1}$  有关, 而与  $t_i, t_{i-1}$  本身无关, 则称  $X(t)$  为齐次独立增量过程或平稳独立增量过程。

在日常生活及工程技术领域中,常常需要研究这样一类问题,即研究在一定时间间隔  $[0, t)$  内某随机事件出现次数的统计规律。

## 计数过程的问题

例如：公用事业中，某个固定的时间间隔  $[0, t)$  内，光顾某商店的顾客数；通过某交叉路口的电车、汽车数；某船舶甲板“上浪”的次数；某电话总机接到的呼唤次数；电子技术中散粒噪声的冲激脉冲个数；数字通讯中已编码信号的误码个数等。

## 1. 计数过程

定义：某事件  $A$  在  $[t_0, t)$  内出现的总次数所组成的过程  $\{X(t), t \geq t_0 \geq 0$  称为计数过程。

任何一个计数过程  $X(t)$  应满足下列条件：

- 1°  $X(t)$  是一个正整数。
- 2° 如果有两个时刻  $t_1, t_2$ , 且  $t_2 > t_1$ , 则  $K(t) = x(t)$ 。
- 3° 当  $t_2 > t_1$  时,  $X(t_2) - X(t_1)$  代表在时间间隔  $(t_1, t_2)$  内事件  $A$  出现的次数。

在计数过程中, 如果在不相交叠的时间间隔内事件  $A$  出现的次数是相互独立的, 则该计数过程为独立增量过程。即当  $t_1 < t_2$  时,  $[t_1, t_2)$  和  $[t_3, t_4)$  为两个不相交叠的时间间隔,  $[t_1, t_2)$  内事件  $A$  出现的次数为  $X(t_2) - X(t_1)$ ,  $[t_3, t_4)$  内事件  $A$  出现的次数为  $X(t_4) - X(t_3)$ , 若  $X(t_2) - X(t_1)$  与  $X(t_4) - X(t_3)$  相互独立, 则  $X(t)$  为独立增量过程。

计数过程中, 如果在  $[t_1, t_1 + x)$  内事件  $A$  出现的次数仅与时间差  $x$  有关, 而与起始时间  $t_1$  无关, 也即  $[X(t_1 + x) - X(t_1)]$  仅与  $x$  有关而与  $t_1$  无关, 则称该过程为齐次或平稳增量计数过程。

## 2 泊松过程的概念

定义: 若有一随机计数过程  $\{X(t), t \geq t_0 \geq 0\}$ , 满足下列假设:

1° 从  $t_0$  开始观察事件, 即  $X(t_0) = 0$ 。

2° 对任意时刻  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_0$ , 出现事件次数  $X(t_{i-1}, t_i) = X(t_i) - X(t_{i-1})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 相互独立, 且出现次数  $X(t_{i-1}, t_i)$  仅与时间差  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$  有关, 而与起始时间  $t_1$  无关。

### 概念 3

3° 对于充分小的  $\Delta t$ , 在  $\Xi[t, t + \Delta t)$  内出现事件一次的概率为

$$P_1(t, t + \Delta t) = P\{X(t, t + \Delta t) = 1\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t). \quad (106)$$

其中  $o(\Delta)$  是在  $\Delta t \rightarrow 0$  时关于  $\Delta$  的高阶无穷小量, 常数  $\lambda > 0$  称为过程  $X(t)$  的强度。

## 事件两次及两次以上的概率

4° 对于充分小的  $\Delta t$ , 在  $[t, t + \Delta t)$  内出现事件两次及两次以上的概率为

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{\infty} P_j(t, t + \Delta t) &= \sum_{j=2}^{\infty} P\{X(t, t + \Delta t) = j\} \\ &= 0(\Delta t). \end{aligned} \quad (107)$$

此概率与出现一次的概率相比, 可以忽略不计。若将上述两式结合起来, 可得到在  $[t, t + \Delta t)$  内不出现事件 (或出现事件零次) 的概率为

# 泊松过程定义

$$\begin{aligned}
 P\{X(t, t + \Delta t) = 0\} &= P_0(t, t + \Delta t) \\
 &= 1 - \left[ P_1(t, t + \Delta t) + \sum_{j=2}^{\infty} P_j(t, t + \Delta t) \right] \\
 &= 1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t).
 \end{aligned}
 \tag{108}$$

则称此过程为泊松过程。泊松过程是计数过程, 也是重要的独立增量过程。



泊松过程在任意两时刻  $t_1 < t_2$  所得随机变量的增量  $X(t_1, t_2) = X(t_2) - X(t_1)$  服从期望为  $(t_2 - t_1)$  的泊松分布, 即对于  $k = 0, 1, 2, \dots$ , 有

$$P_k(t_1, t_2) = P\{X(t_1, t_2) = k\} = \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}, \quad (109)$$

则该过程在  $[t_0, t)$  内出现事件  $k$  次的概率为

$$\begin{aligned} P_k(t_0, t) &= P\{X(t_0, t) = k\} \\ &= \frac{[\lambda(t - t_0)]^k}{k!} e^{-\lambda(t - t_0)}, t > t_0, k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (110)$$

证: ① 首先确定  $P_0(t_0, t)$ , 对于充分小的  $\Delta t > 0$ , 由于

$$\begin{aligned} X(t_0, t + \Delta t) &= X(t + \Delta t) - X(t_0) \\ &= X(t + \Delta t) - X(t) + X(t) - X(t_0) \\ &= X(t, t + \Delta t) + X(t_0, t). \end{aligned} \quad (111)$$

故

$$\begin{aligned} P_0(t_0, t + \Delta t) &= P\{X(t_0, t + \Delta t) = 0\} \\ &= P\{[X(t_0, t) + X(t, t + \Delta t)] = 0\} \\ &= P\{X(t_0, t) = 0, X(t, t + \Delta t) = 0\}. \end{aligned} \quad (112)$$

由泊松过程定义可知, 满足条件 2, 则

$$\begin{aligned}
 P_0(t_0, t + \Delta t) &= P\{X(t_0, t) = 0\} P\{X(t, t + \Delta t) = 0\} \\
 &= P_0(t_0, t) P_0(t, t + \Delta t) \\
 &= P_0(t_0, t) [1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t)].
 \end{aligned} \tag{113}$$

即  $P_0(t_0, t + \Delta t) - P_0(t_0, t) = P_0(t_0, t) [-\lambda \Delta t - o(\Delta t)]$ 。

两边除以  $\Delta t$ , 并令  $\Delta t \rightarrow 0$ , 便可得到  $P_0(t_0, t)$  满足的微分方程

$$\frac{dP_0(t_0, t)}{dt} = -\lambda P_0(t_0, t). \quad (114)$$

因为  $P_0(t_0, t_0) = P\{X(t_0, t_0) = 0\} = 1$ , 将它看作初始条件, 即可由上式解得

$$P_0(t_0, t) = e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t > t_0. \quad (115)$$

② 确定  $P_1(t_0)$ 

先考虑

$$\begin{aligned}
 & P_1(t_0, t + \Delta t) \\
 &= P\{X(t_0, t + \Delta t) = 1\} \\
 &= P\{X(t_0, t) + X(t, t + \Delta t) = 1\} \\
 &= P\{X(t_0, t) = 1, X(t, t + \Delta t) = 0\} + P\{X(t_0, t) = 0, X(t, t + \Delta t) = 1\} \\
 &= P_1(t_0, t) P_0(t, t + \Delta t) + P_0(t_0, t) P_1(t, t + \Delta t).
 \end{aligned} \tag{116}$$

再将  $P_0(t_0, t)$  代入上式, 经适当整理后, 两边除以  $\Delta t$ , 并令  $\delta t \rightarrow 0$ , 即可得  $P_1(t_0, t)$  的微分方程

$$\frac{dP_1(t_0, t)}{dt} = -\lambda P_1(t_0, t) + \lambda e^{-\lambda(t-t_0)} \tag{117}$$

因为  $P_1(t_0, t_0) = P\{X(t_0, t_0) = 1\} = 0$ , 将它作为初始条件, 可求得上式解为

$$P_1(t_0, t) = \lambda(t - t_0)e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t > t_0 \quad (118)$$

③ 重复上述方法, 可求得在  $[t_0, t)$  内事件出现  $k$  次的概率

$$\begin{aligned} P_k(t_0, t) &= P\{X(t_0, t) = k\} \\ &= \frac{[\lambda(t - t_0)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t > t_0, k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (119)$$

当取  $t_0 = 0$  时, 有

$$P_k(0, t) = P\{X(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, t > 0, k = 0, 1, 2, \dots \quad (120)$$

此式表明: 对于固定的  $t$ , 与泊松过程相应的随机变量  $X(t)$  服从参数为  $\lambda t$  的泊松分布。而  $A$  就是在  $[0, t)$  内出现事件次数的数学期望。换言之, 强度  $\lambda$  就是单位时间内出现事件次数的数学期望。

由于泊松过程是一个计数过程, 泊松过程  $X(t)$  的每一个样本函数  $x(t)$  都呈阶梯形 (图 4), 它在每个随机点处产生单位为 “1” 的阶跃。



图 3: 质点 M 的随机游动

对于给定的  $t$ ,  $X(t)$  等于在时间间隔  $[0, t)$  内的随机点数。所以泊松过程

$$X(t) = \sum_i U(t - t_i), \quad (121)$$

其中  $t_i$  是随机变量。



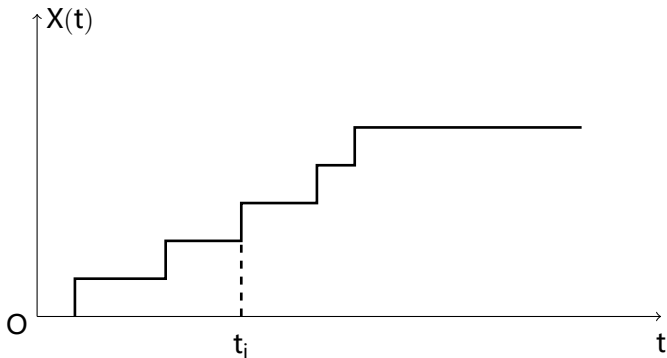


图 4: 泊松过程的样本函数示意图

# 目录

- 1 马尔可夫过程
  - 马尔可夫序列的性质
- 2 马尔可夫链
  - 马氏链的有限维分布
  - 马氏链的平稳分布与遍历性
- 3 马尔可夫过程
  - 独立增量过程
  - 泊松过程
- 4 泊松过程的统计特性
  - 半随机电报信号的功率谱密度
  - 散粒噪声  $X(t)$  的统计特性

### 3. 泊松过程的统计特性

#### (1) 数学期望

若将时间  $t$  固定, 则随机过程  $X(t)$  就是一个泊松分布的随机变量, 因此

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} kP\{X(t) = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda t e^{-\lambda} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \right] = \lambda t e^{-\lambda} [e^{\lambda}] = \lambda t. \end{aligned} \quad (122)$$

同理引用式 (109), 随机过程的增量  $X(t_2) - X(t_1)$  的期望为

$$E[X(t_2) - X(t_1)] = \sum_{k=0}^{\infty} kP\{X(t_2, t_1) = k\} = \lambda(t_2 - t_1). \quad (123)$$



同理, 过程  $X(t)$  的方差、过程增量  $X(t_2) - X(t_1)$  的均方值和方差为

$$D[X(t)] = E[X(t)^2] - E^2[X(t)] = \lambda^2 t^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t \quad (125)$$

$$E\{[X(t_2) - X(t_1)]^2\} = \lambda^2 (t_2 - t_1)^2 + \lambda(t_2 - t_1) \quad (126)$$

$$D[X(t_2) - X(t_1)] = \lambda(t_2 - t_1). \quad (127)$$

### 3) 自相关函数

由定义  $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$  可知

① 若  $t_2 > t_1 > 0$ , 如图 5 所示, 由于时间间隔  $t_1$  和  $t_2$  相互重叠, 则增量  $X(t_1)$  和  $X(t_2)$  相互不独立, 但时间间隔  $t_2 - t_1$  与  $t_1$  不重叠。因此将增量  $X(t_2)$  变换成两个独立的增量之和。

$$X(t_2) = [X(t_2) - X(t_1)] + X(t_1). \quad (128)$$

因此有

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E\{X(t_1)[X(t_2) - X(t_1) + X(t_1)]\} \\ &= E[X(t_1)]E[X(t_2) - X(t_1)] + E[X^2(t_1)] \\ &= \lambda_1 \lambda (t_2 - t_1) + \lambda^2 t_1^2 + \lambda_1 \\ &= \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_1, \quad t_2 > t_1 > 0 \end{aligned} \quad (129)$$

## ② $t_1 > t_2 > 0$ 时的情况

$$R_X(t_1, t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_2, \quad t_1 > t_2 > 0. \quad (130)$$

综合上述两式, 则有

$$R_X(t_1, t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min(t_1, t_2). \quad (131)$$

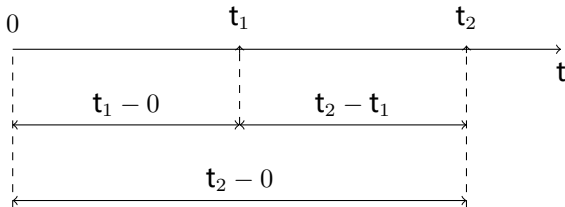


图 5: 时间关系图

泊松过程的应用实例—电报信号在随机点密度  $A$  为常数的均匀情况下, 来研究下述泊松过程的两个应用实例。

半随机电报信号  $X(t)$  是只取  $+1$  或  $-1$  的随机过程,  $X(t)$  的一条样本函数曲线如图 6 所示。

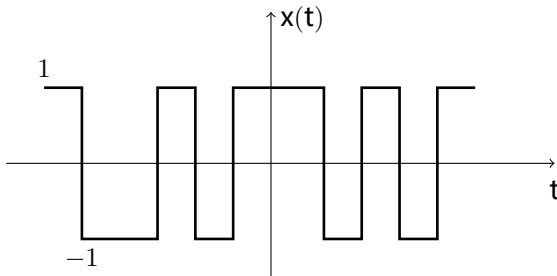


图 6: 半随机电报信号的样本函数

若在时间间隔  $(0, t)$  内, 信号时刻点的总数为偶数 (或 0), 则过程  $X(t) = +1$ ; 若为奇数, 则  $X(t) = -1$ 。



类似地, 在  $(0, t)$  内有奇数个变号点的概率为

$$\begin{aligned} P\{X(t) = -1\} &= P_1(0, t) + P_3(0, t) + \dots \\ &= e^{-\lambda} \left[ \lambda t + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots \right] = e^{-\lambda t} \text{sh}(\lambda t). \end{aligned} \quad (132)$$

即

$$\begin{cases} P\{X(t) = 1\} &= e^{-\lambda t} \text{ch}(\lambda t) \\ P\{X(t) = -1\} &= e^{-\lambda t} \text{sh}(\lambda t) \end{cases} \quad (133)$$

## 2) 半随机电报信号的均值

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= 1 \cdot P\{X(t) = 1\} + (-1) \cdot P\{X(t) = -1\} \\ &= e^{-\lambda}[\operatorname{ch}(\lambda t) - \operatorname{sh}(\lambda t)] = e^{-2\lambda}, \end{aligned} \quad (134)$$

其中

$$P\{X(t_1), X(t_2)\} = P\{X(t_2) | X(t_1)\} P\{X(t_1)\}. \quad (135)$$

### 3) 半随机电报信号的自相关函数

$$R_X(t_1, t_2) = \sum_{\substack{X(t_1)=\pm 1 \\ X(t_2)=\pm 1}} X(t_1) X(t_2) P\{X(t_1), X(t_2)\}. \quad (136)$$

其中

$$P\{X(t_1), X(t_2)\} = P\{X(t_2) | X(t_1)\} P\{X(t_1)\}. \quad (137)$$

① 假设  $t_2 - t_1 = \tau > 0$  且  $X(t_1) = 1$ , 若  $X(t_2) = 1$ , 则在间隔  $(t_2, t_1)$  内有偶数个变号点。故

$$P\{X(t_2) = 1 | X(t_1) = 1\} = P\{X(t) = 1\} = e^{-\lambda} \text{ch}(\lambda t). \quad (138)$$

又由于  $P\{X(t_1) = 1\} = e^{-\lambda t_1} \text{ch}(\lambda t_1)$ , 就可得到

$$P\{X(t_1) = 1, X(t_2) = 1\} = e^{-\lambda \tau} \text{ch}(\lambda \tau) e^{-\lambda_1 \text{ch}(\lambda t_1)}. \quad (139)$$

## 类似地结果

$$\begin{cases} P\{X(t_2) = -1 | X(t_1) = -1\} = P\{X(\tau) = 1\} = e^{-\lambda\tau} \text{ch}(\lambda\tau) \\ P\{X(t_2) = -1 | X(t_1) = 1\} = P\{X(\tau) = -1\} = e^{-\lambda\tau} \text{sh}(\lambda\tau) \\ P\{X(t_2) = 1 | X(t_1) = -1\} = P\{X(\tau) = -1\} = e^{-\lambda\tau} \text{sh}(\lambda\tau) \end{cases} \quad (140)$$

因此有

$$\begin{cases} P\{X(t_1) = -1, X(t_2) = -1\} = e^{-\lambda\tau} \text{ch}(\lambda\tau) e^{-\lambda t_1} \text{sh}(\lambda t_1) \\ P\{X(t_1) = 1, X(t_2) = -1\} = e^{-\lambda\tau} \text{sh}(\lambda\tau) e^{-\lambda t_1} \text{ch}(\lambda t_1) \\ P\{X(t_1) = -1, X(t_2) = 1\} = e^{-\lambda\tau} \text{sh}(\lambda\tau) e^{-\lambda t_1} \text{sh}(\lambda t_1) \end{cases} \quad (141)$$

## Y(t) 的自相关函数

$$\begin{aligned}
 R_X(t_1, t_2) &= \sum_{X(t_1)=\pm 1} X(t_1) X(t_2) P\{X(t_1), X(t_2)\} \\
 &= 1 \cdot 1 \cdot P\{X(t_1) = 1, X(t_2) = 1\} \\
 &\quad + (-1) \cdot (-1) \cdot P\{X(t_1) = -1, X(t_2) = -1\} \quad (142) \\
 &\quad + 1 \cdot (-1) \cdot P\{X(t_1) = 1, X(t_2) = -1\} \\
 &\quad + (-1) \cdot 1 \cdot P\{X(t_1) = -1, X(t_2) = 1\} \\
 &= e^{-2\lambda} t_2 - t_1 = \tau > 0.
 \end{aligned}$$

## ② $t_1 - t_2$

$$R_X(t_1, t_2) = e^{-2\lambda\tau}, \quad t_1 - t_2 = \tau > 0. \quad (143)$$

所以, 综合①②可得  $X(t)$  的自相关函数的最终表达式

$$R_X(t_1, t_2) = e^{-2\lambda|t_1 - t_2|} = e^{-2\lambda|\tau|} = R_X(\tau). \quad (144)$$

由上式可见, 半随机电报信号的自相关函数仅与时间差  $\tau$  有关, 而与时刻点  $t_1$  本身无关, 如图 7 所示。

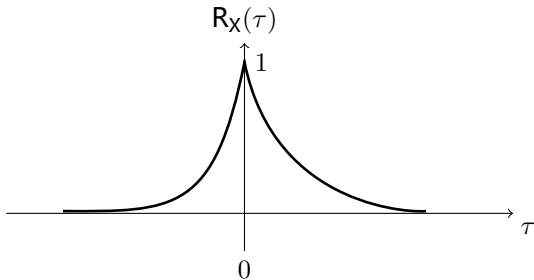


图 7: 半随机电报信号的自相关函数





假定上述的半随机电报信号  $X(t)$  与随机变量  $A$  统计独立, 即对于每个  $t$ , 随机变量  $X(t)$  与随机变量  $A$  是统计独立的。现在, 定义一个新的随机过程

$$Y(t) = AX(t) \quad (146)$$

于是  $Y(t) = X(t)$  或  $Y(t) = -X(t)$ , 为了与  $X(t)$  相区别, 称  $Y(t)$  为随机电报信号。

显然,  $Y(t)$  的均值和自相关函数分别为

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= E[AX(t)] = E[A]E[X(t)] = 0 \\ R_Y(t_1, t_2) &= E[Y(t_1)Y(t_2)] = E[A^2X(t_1)X(t_2)] \\ &= E[A^2]E[X(t_1)X(t_2)] = e^{-2\lambda|t_2-t_1|} \\ &= e^{-2\lambda|\tau|} = R_Y(\tau) = R_X(\tau). \end{aligned} \quad (147)$$

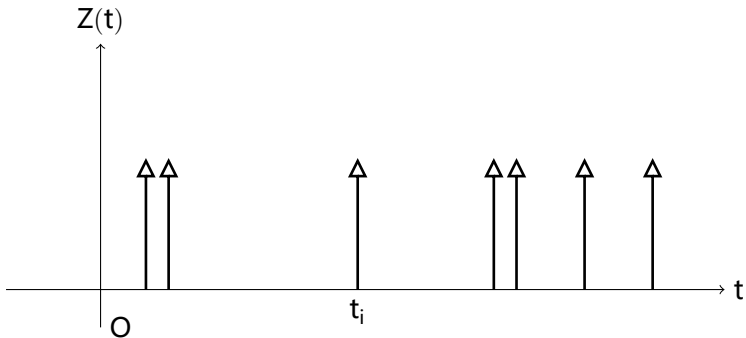
由上式注意到, 随机过程  $X(t)$  和  $Y(t)$  具有渐进 ( $t \rightarrow \infty$ ) 相等的统计特性。

泊松过程  $X(t)$  对时间  $t$  求导, 便可得到与时间轴上的随机点  $t$  相对应的冲激序列  $Z(t)$ , 称为泊松冲激序列。

$$Z(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i U(t - t_i) = \sum_i \delta(t - t_i), \quad (148)$$

其中  $t$  为随机变量。

由于泊松过程  $X(t)$  的样本函数是阶梯函数, 则泊松冲激序列的样本函数是一串冲激序列.



泊松过程  $X(t)$  及其统计特性均已在前面讨论过, 可得泊松冲激序列  $Z(t)$  的统计特性:

$$E[Z(t)] = E\left[\frac{dX(t)}{dt}\right] = \frac{dE[X(t)]}{dt} = \frac{d(\lambda t)}{dt} = \lambda.$$

$$\begin{aligned} R_Z(t_1, t_2) &= E[Z(t_1)Z(t_2)] = E\left[\frac{dX(t_1)}{dt_1} \cdot \frac{dX(t_2)}{dt_2}\right] \\ &= R_{X'X'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_1} \left[ \frac{\partial R_X(t_1, t_2)}{\partial t_2} \right] \\ &= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t_1} (\lambda^2 t_1), & t_1 < t_2 \\ \frac{\partial}{\partial t_1} (\lambda^2 t_1 + \lambda), & t_1 > t_2 \\ = \frac{\partial}{\partial t_1} [\lambda^2 t_1 + \lambda U(t_1 - t_2)] \\ = \lambda^2 + \lambda \delta(t_1 - t_2) = \lambda^2 + \lambda \delta(\tau) \end{cases} \end{aligned} \quad (149)$$

由此可见, 泊松冲激序列是平稳过程。

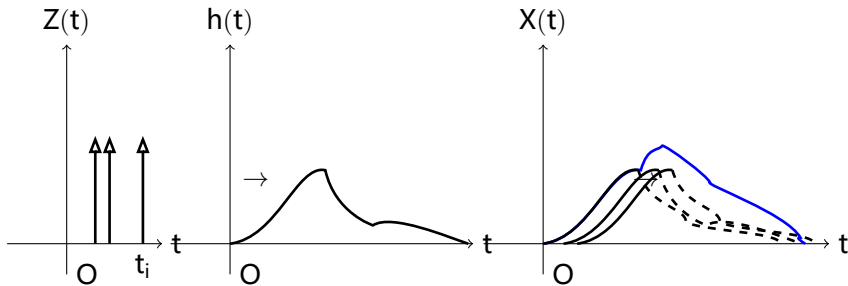


图 9: 泊松冲激脉冲序列经过线性时不变滤波器

$$X(t) = Z(t) * h(t) = \sum_{i=1}^{N(T)} h(t - t_i), \quad 0 \leq t < \infty. \quad (150)$$
$$P\{N(T) = k\} = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (151)$$

式中  $\lambda$  为单位时间内的平均脉冲数。

分析可知, 若在  $[0, T)$  内输入到滤波器的冲激脉冲数  $N(T)$  为  $k$ , 则该  $k$  个冲激脉冲出现的时间  $t$  均为独立同分布的随机变量。

且此独立同分布的随机变量均匀分布在  $[0, T)$  内, 即

$$f(t_i|N(T)=k) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \leq t_i < T \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (152)$$

温度限制的电子一极管中, 由散粒 (或散弹) 效应引起的散粒 (或散弹) 噪声电流是过滤的泊松过程  $n$ 。



## 晶体管的三种噪声类型

- ① 热噪声,
- ② 散粒噪声,
- ③ 闪烁噪声 (又称  $1/f$  噪声, 是一种低频噪声), 其中散粒噪声的机理与电子管的相类似, 也是过滤的泊松过程。

换言之, 散粒噪声  $X(t)$  可以表示成

$$X(t) = Z(t) * h(t) = \sum h(t - t_i), \quad (153)$$

即把它看成是泊松冲激 (脉冲) 序列输入到线性时不变系统的输出。

## 散粒噪声 $X(t)$ 的统计特性

① 对于均匀的情况 ( $\lambda$  为常数), 可以证明  $X(t)$  是平稳的。  
已知泊松冲激脉冲序列  $Z(t) = \sum \delta(t - t_i)$  的数学期望和自相关函数为

$$\begin{cases} E[Z(t)] = \lambda \\ R_Z(\tau) = \lambda^2 + \lambda\delta(\tau) \end{cases} \quad (154)$$

从而可得泊松冲激序列的功率谱密度

$$\begin{aligned} G_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_Z(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= 2\pi\lambda^2\delta(\omega) + \lambda. \end{aligned} \quad (155)$$

根据时频域分析, 可得散粒噪声  $X(t)$  的数学期望为

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E[Z(t) * h(t)] = E \left[ \int_{-\infty}^{\infty} Z(t - \eta) h(\eta) d\eta \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[Z(t - \eta)] h(\eta) d\eta \\ &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) d\eta = \lambda H(0). \end{aligned} \quad (156)$$

散粒噪声  $X(t)$  的功率谱密度为

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= |H(\omega)|^2 G_Z(\omega) = |H(\omega)|^2 [2\pi\lambda^2\delta(\omega) + \lambda] \\ &= 2\pi\lambda^2 H^2(0)\delta(\omega) + \lambda |H(\omega)|^2. \end{aligned} \quad (157)$$

从而得到其自相关函数为

$$\begin{aligned}
 R_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [2\pi\lambda^2 H^2(0)\delta(\omega) + \lambda|H(\omega)|^2] e^{j\omega\tau} d\omega \\
 &= \lambda^2 H^2(0) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \\
 &= \lambda^2 H^2(0) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau + \beta) h(\beta) d\beta.
 \end{aligned} \tag{158}$$

由上式可见,  $X(t)$  确实是平稳随机过程。均匀的泊松冲激序列  $Z(t)$  和散粒噪声  $N(t)$  的自相关函数及功率谱密度如图 11 所示。

## 散粒噪声 $X(t)$ 的自协方差函数和方差

$$\begin{aligned}
 C_X(\tau) &= R_X(\tau) - \{E[X(t)]\}^2 = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau + \beta)h(\beta)d\beta \\
 &= \sigma_X^2 = C_X(0) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\beta)d\beta \\
 &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)dt.
 \end{aligned} \tag{159}$$

② 对于非均匀的情况, 即  $\lambda(t)$  不是数  $m_X$  的均值与自协方函数分别为

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E[Z(t) * h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} E[Z(\eta)]h(t - \eta)d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\eta)h(t - \eta)d\eta, \end{aligned} \quad (160)$$

其中  $E[Z(t)] = \lambda(t)$ .

散粒噪声  $X(t)$  的统计特性

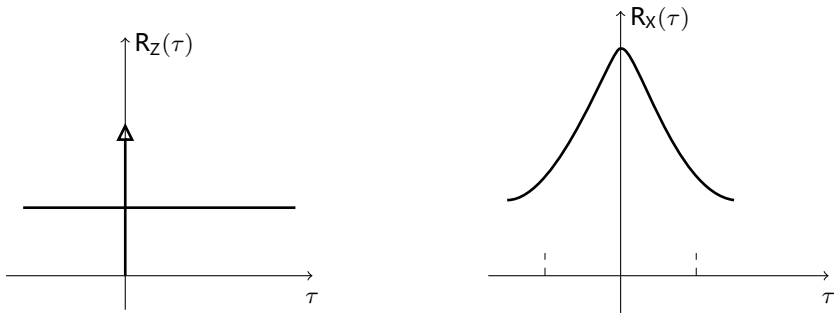


图 10: 泊松冲激序列  $Z(t)$  和散粒噪声  $X(t)$  的自相关函数及功率谱密度

散粒噪声  $X(t)$  的统计特性

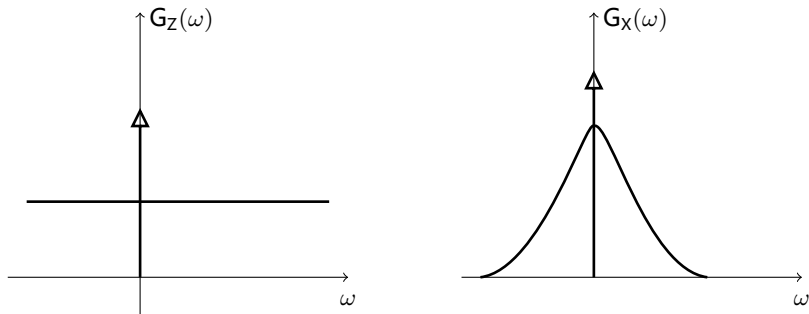


图 11: 泊松冲激序列  $Z(t)$  和散粒噪声  $X(t)$  的自相关函数及功率谱密度

其中  $E[Z(t)] = \lambda(t)$ .



$$\begin{aligned} \mathbf{C}_x(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) &= \mathbf{R}_x(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) - \mathbf{E}[\mathbf{X}(\mathbf{t}_1)] \mathbf{E}[\mathbf{X}(\mathbf{t}_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\eta) \mathbf{h}(\mathbf{t}_1 - \eta) \mathbf{h}(\mathbf{t}_2 - \eta) \mathbf{d}\eta. \end{aligned} \quad (161)$$

③ 如果每个输入冲激脉冲的强度 (面积) 不等于 1, 而是  $q$  (例如电子电荷), 则均匀散粒噪声变为

$$X(t) = \sum_i q_i h(t - t_i), \quad (162)$$

## 均值与方差

$$\begin{cases} E[X(t)] = \lambda q \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = \lambda q H(0) \\ \sigma_X^2 = \lambda q^2 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt \end{cases} \quad (163)$$

反之, 若  $h(t)$  已知, 则由测量  $X(t)$  的均值与方差, 就能求出  $\lambda$  和  $q$ 。