

随机信号分析

随机信号的频域分析

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

November 9, 2020

目录

- 1 实随机过程的功率谱密度
 - 实平稳过程的功率谱密度与自相关函数之间的关系
- 2 两个实随机过程的互功率谱密度
 - 互功率谱密度的定义
- 3 白噪声
 - 白噪声的特点

第二次教案下载二维码

Github 下载



第三章 随机信号的频域分析

智慧树课堂二维码和项目地址



图 1: 《随机信号分析》课程号:k213654



Github 项目地址

下载地址:

<https://github.com/zggl/random-signal-processing2020-autumn>

引言

在信号与系统、信号处理、通信理论以及其他许多领域的理论与实际应用中，广泛应用傅里叶变换这一有效工具对确定信号在时域上和频域上的状况进行分析。

许多情况下，在时域中需要卷积积分运算的问题，放在频域中只需要乘法运算就可以解决，大大减少了运算量。那么是否也能应用傅里叶变换这一工具对随机过程进行频域分析，随机过程是否也有通常意义的“频谱”呢？下面就从理论上详细讨论随机过程的频域特性。

实随机过程的功率谱密度

在研究随机过程的频域特性之前, 我们首先对傅里叶变换作一简单回顾。设给定信号 $s(t)$ 是时间 t 的非周期实函数,

傅里叶变换存在的条件

1° $s(t)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 范围内满足狄利克雷条件。(信号存在傅里叶变换的充分不必要条件; 条件括三方面: (1) 信号在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点; (2) 信号在一个周期内的极大值和极小值的数目应有限; (3) 信号在一周期内绝对可积。)

2° $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$ (绝对可积) 的等价条件为 $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$ (信号 $s(t)$ 的总能量有限)。

傅里叶变换对存在

(反变换) 信号 $s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2)$

或者说信号 $s(t)$ 的“频谱”存在。

工程技术上许多重要的时间函数的总能量是无限的。不能满足傅氏变换的条件, 如正弦函数。

由于随机过程样本函数的持续时间无限, 其总能量也是无限的, 不能满足傅氏变换的条件, 随机过程样本函数的“频谱”不存在。所以, 随机过程没有通常意义的“频谱”存在。

功率谱

人们发现, 这类信号尽管总能量是无限的, 但它们的平均功率却是有限值。

随机过程样本函数平均功率满足傅里叶复换的条件, 随机过程样本函数平均功率的“频谱”存在——功率谱。

实随机过程的功率谱密度

实信号 $s(t)$ 的能量谱密度

对于实信号 $s(t)$ ，由傅里叶变换对可得

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) S^*(\omega) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega.
 \end{aligned} \tag{3}$$

实信号 $s(t)$ 的频谱 $S(\omega)$ 一般是 ω 的复函数， $S^*(\omega) = S(-\omega)$ ， $(*)$ 表示复共轭。

帕塞瓦尔等式

由上述推导过程, 实信号 $s(t)$ 的能量

$$\int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega. \quad (4)$$

式 (4) 称为帕塞瓦尔等式。

式 (4) 右侧等式是 $|S(\omega)|^2$ 在整个频域上的积分。因此被积函数 $|S(\omega)|^2$ 存在, 则称为时域信号 $s(t)$ 的能量谱密度。

功率信号

对于信号 $s(t)$, 若 $\int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt < +\infty$ 不一定满足, 但 $s(t)$ 满足 $\frac{1}{2T} \int_{-T}^T [s(t)]^2 dt < +\infty$, 这种确定信号称为功率信号。

实随机信号的平均功率

若要将傅里叶变换应用于实随机过程，必须对过程的样本函数做某些限制，最简单的一种方法是应用截取函数，如图 2 所示。

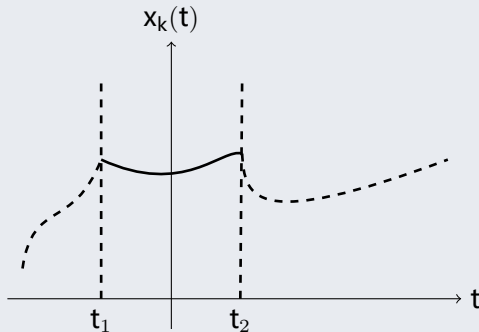


图 2: 截取函数

在实随机过程 $X(t)$ 的样本函数 $X(t, \zeta_k) = x_k(t)$ 中, 任意截取 $2T$ 长的一段, $x_{kT}(t)$ 表示为

$$x_{kT}(t) = \begin{cases} x_k(t), & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \quad (5)$$

称 $x_{kT}(t)$ 为样本函数 $x_k(t)$ 的截取函数。当 T 为有限值时, 截取函数 $x_{kT}(t)$ 满足绝对可积条件, 其傅里叶变换存在, 即

$$\mathfrak{X}_{kT}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{kT}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T x_k(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (6)$$

$$x_{kT}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{X}_{kT}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (7)$$

可见, $\mathcal{X}_{kT}(\omega) = \mathcal{X}_T(\omega, \zeta_k)$ 为 $\mathbf{x}_{kT}(t)$ 的频谱函数。据帕塞瓦尔等式, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_{kT}^2(t) dt &= \int_{-T}^T \mathbf{x}_k^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (8)$$

可见, $\mathbf{X}_{kT}(\omega) = \mathbf{X}_T(\omega, \zeta_k)$ 为 $\mathbf{x}_{kT}(t)$ 的频谱函数。据帕塞瓦尔等式, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_{kT}^2(t) dt &= \int_{-T}^T \mathbf{x}_k^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (9)$$

帕塞瓦尔等式

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \int_{t_1}^{t_2} g_n^2(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} [C_n g_n(t)]^2 dt.\end{aligned}\quad (10)$$

注

信号所含有的能量（功率）恒等于此信号在完备正交函数集中各分量能量（功率）之和。几何意义：函数可以看作向量，如果一个函数可以用另一组正交完备函数集表示，那么这些完备函数集的每一个分量就是一个基矢量。显然，一个向量的模等于该向量在各个基矢量上投影的平方和。本质上就是说矢量空间信号正交变换的范数不变性。

平均功率举例

若随机过程 $X(t)$ 代表一噪声电压 (或电流), $\int_{-T}^T x_k^2(t) dt$ 表示噪声的一个样本 ζ 在时间 $(-T, T)$ 内消耗在 1Ω 电阻上的总能量。这个总能量在 $(-T, T)$ 上求时间平均的峰限为

$$P_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_k^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |x_{kT}(\omega)|^2 d\omega. \quad (11)$$

则 P_k 表示随机过程的样本函数 $x(t)$ 消耗在 1Ω 电阻上的平均功率。

样本的时间平均功率

一般称 P_k 为随机过程样本函数 $x_k(t)$ 的平均 (时间平均) 功率。由于样本 ζ 对应的样本函数 $x_k(t)$ 是个确定函数, 所以平均功率 P_k 是个值。

样本 ζ_k 截取函数的频谱

$$\begin{aligned} P_{\Delta}(\zeta) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X^2(t, \zeta) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega, \zeta)|^2 d\omega, \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $X(t, \zeta) = X(t)$ 代表一个随机过程, $X_T(\omega, \zeta) = X_T(\omega)$ 代表随机过程的截取函数的频谱。

若对 $P(\zeta)$ 取统计平均, 则定义所得的确定值 P 为随机过程 $X(t)$ 的平均功率。

功率谱密度

由随机过程 $X(t)$ 的平均功率的定义式，右端的被积函数记为

$$G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[|X_T(\omega)|^2 \right], \quad (13)$$

则 $G_X(\omega)$ 在整个频域上的积分被定义为随机过程的平均功率。那么被积函数 $G_X(\omega)$ 则表示了随机过程 $X(t)$ 在不同频率上的单位频带内消耗在 1Ω 电阻上的平均功率。

同理可得, 样本函数 $x_k(t)$ 的功率谱密度为

$$G_k(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2. \quad (14)$$

因此平均功率和功率谱密度的相互关系也可表示为

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt \\ &= \overline{E[X^2(t)]} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (\cdot) dt = \overline{(\cdot)}$, 即随机过程的平均功率可以通过对过程的均方值 $E[X^2(t)]$ 求时间平均来获得。

平稳过程的平均功率

若 $X(t)$ 为平稳过程, 均方值 $E[X^2(t)] = R(0)$ 为常数, 则平均功率可表示为

$$\begin{aligned} P &= \overline{E[X^2(t)]} = \overline{R(0)} = R(0) \\ &= E[X^2(t)]. \end{aligned} \quad (16)$$

各态历经过程的平均功率

由 $\overline{X(t, \zeta)} \stackrel{\text{a. e.}}{=} \overline{x_i(t)}$, 各态历经过程 $X(t)$ 的所有样本函数的时间平均都以概率 1 相同, 与 $\zeta \in \Omega$ 无关。因此可以由式 (11), 式 (12) 推出

$$(\text{随机变量}) P_{\Delta}(\zeta) = \overline{X^2(t, \zeta)} \stackrel{\text{a. e.}}{=} \overline{x_k^2(t)} = P_k (\text{常数}) \quad (17)$$

而

$$\mathbf{P} = E[P_{\Delta}(\zeta)] \stackrel{S}{=} E[P_k] = P_k. \quad (18)$$

即各态历经讨论 $X(t)$ 的平均功率 \mathbf{P} 与其样本函数的平均功率 P 以概率 1 相等所以, 各态历经过程 $X(t)$ 的平均功率 \mathbf{P} 可以由一个样本函数的平均功率 P_k 来代替。

各态历经过程的功率谱密度

同理，由各态历经性可以推出

$$\begin{aligned} G_X(\omega, \zeta) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(\omega, \zeta)|^2 \\ &\stackrel{\text{a. e.}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |\mathfrak{X}_{kT}(\omega)|^2 = G_k(\omega). \end{aligned} \quad (19)$$

因此, 有

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= E[G_X(\omega, \zeta)] \stackrel{\text{a. e.}}{=} E[G_k(\omega)] \\ &= G_k(\omega) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |\mathfrak{X}_{kT}(\omega)|^2. \end{aligned} \quad (20)$$

可得结论：

- ① 各态历经过程的平均功率 P 与其样本函数的平均功率 P 以概率 1 相等。
- ② 各态历经过程的功率谱密度 $G_x(\omega)$ 与其样本函数的功率谱密度 $G_k(\omega)$ 以概率 1 相等。

注

主要的数字特征。但必须指出, $G_x(\omega)$ 仅仅描述了随机过程 $X(t)$ 的平均功率按频率分布的情况。

总结

功率谱密度 $G_x(\omega)$ 是从频率角度描述随机过程 $X(t)$ 统计规律的最主要的数字特征。但必须指出, $G_x(\omega)$ 仅仅描述了随机过程 $X(t)$ 的平均功率按频率分布的情况。

实随机过程功率谱密度的性质

功率谱密度是随机过程在频域中主要的统计特征，它具有下列重要性
质

1° 功率谱密度非负，满足

$$G_X(\omega) \geq 0. \quad (21)$$

2° 功率谱密度是 ω 的实函数，满足

$$G_{X^*}(\omega) = G_X(\omega). \quad (22)$$

3° 功率谱密度是 ω 的偶函数，满足

$$G_X(\omega) = G_X(-\omega). \quad (23)$$

证：根据傅里叶变换的性质，当样本函数的截取函数 $x_{iT}(t)$ 为 t 的实函数时，其频谱有

$$\mathfrak{X}_{iT}(\omega) = \mathfrak{X}_{iT}(-\omega) \Rightarrow X_{iT}^*(\omega) = \mathfrak{X}_{iT}(-\omega). \quad (24)$$

所以对于过程 $X(t)$ 截取函数的频谱，有

$$X_T(\omega) = X_T^*(-\omega) \Rightarrow X_T^*(\omega) = X_T(-\omega).$$

代入功率谱的定义式，有

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[|X_T(\omega)|^2 \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E [X_T^*(\omega) X_T(\omega)] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E [X_T(-\omega) X_T^*(-\omega)] \\ &= G_X(-\omega). \end{aligned} \quad (25)$$

实随机过程功率谱密度的性质

4° 平稳过程的功率谱密度可积, 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega < \infty \quad (26)$$

证: 平稳过程的平均功率

$$P = E[X^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega. \quad (27)$$

由平稳过程的第三个条件可知, 它的均方值有根, 满足 $E[X^2(t)] < \infty$, 得证。

实随机过程功率谱密度的性质

5° 若平稳过程的功率谱密度可以表示为有理函数形式

$$G_X(\omega) = G_0 \frac{\omega^{2m} + a_{2m-2}\omega^{2m-2} + \dots + a_0}{\omega^{2n} + b_{2n-2}\omega^{2n-2} + \dots + b_0}. \quad (28)$$

由性质 1 和性质 4。要求上式满足：

- (1) $G_0 > 0$
- (2) 有理式的分母无实数根 (即在实轴上无极点), 且 $n > m$.

例 3.2

利用功率谱密度的性质, 判断下列函数, 哪些可能成为平稳过程的功率谱密度?

$$\begin{aligned} f_1(\omega) &= \cos 3\omega, & f_2(\omega) &= \frac{1}{(\omega-1)^2+2} \cdot \\ f_3(\omega) &= \frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6}, & f_4(\omega) &= \frac{\omega^2+4}{\omega^4-4\omega^2+3} \cdot \end{aligned}$$

解: 只有 $f_3(\omega)$ 可能, 因为 $f_1(\omega) < 0$, $f_2(\omega)$ 非偶, $f_4(\omega)$ 在实数轴上有极点。

维纳-辛钦定理

众所周知, 确定信号 $s(t)$ 与它的频谱 $S(\omega)$ 在时域和频域之间构成一对傅里叶变换。

可以证明, 平稳随机信号的自相关函数与其功率谱密度之间也构成一对傅里叶变换。

维纳-辛钦定理的推导

由功率谱密度的推导可知

$$G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[|X_T(\omega)|^2 \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E [X_T^*(\omega) X_T(\omega)], \quad (29)$$

式中截取函数的频谱

$$X_T(\omega) = \int_{-T}^T X(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (30)$$

实过程 $X(t)$ 的功率谱密度

$$\begin{aligned}
 G_X(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[\int_{-T}^T X(t_1) e^{j\omega t_1} dt_1 \cdot \int_{-T}^T X(t_2) e^{-j\omega t_2} dt_2 \right] \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E[X(t_1) X(t_2)] e^{-j\omega(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2 \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T R_X(t_1, t_2) e^{-j\omega(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2. \quad (31)
 \end{aligned}$$

式中 $R_X(t_1, t_2)$ 只在 $-T \leq t_1, t_2 \leq T$ 存在, 令 $t = t_1$, $\tau = t_2 - t_1$, 代入上式进行变量置换, 如图 3 所示。

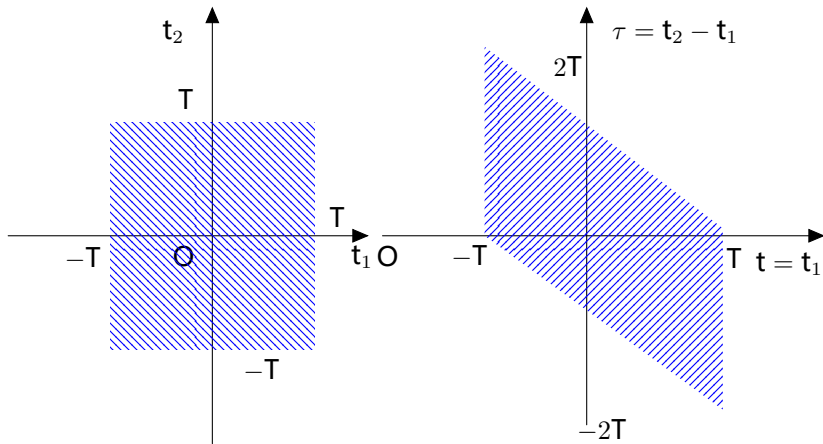


图 3: 维纳-辛钦定理推导过程中的变量置换

可得

$$\begin{aligned}
 G_X(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left\{ \int_{-2T}^0 \left[\int_{-T-\tau}^T R_X(t, t+\tau) dt \right] e^{j\omega\tau} d\tau \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{2T} \left[\int_{-T}^{T-\tau} R_X(t, t+\tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} \\
 &= \int_{-\infty}^0 \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-\tau}^T R_X(t, t+\tau) dt \right] e^{j\omega\tau} d\tau \\
 &\quad + \int_0^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T-\tau} R_X(t, t+\tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^0 \overline{R_X(t, t+\tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} \overline{R_X(t, t+\tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{R_X(t, t+\tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= F[\overline{R_X(t, t+\tau)}].
 \end{aligned} \tag{32}$$

由傅里叶变换的定义，上式成立的条件是 $\overline{R_X(t, t + \tau)}$ 绝对可积。

根据傅里叶变换的唯一性，必有

$$\begin{aligned}\overline{R_X(t, t + \tau)} &= F^{-1} [G_X(\omega)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.\end{aligned}\tag{33}$$

所以，任意随机过程 $X(t)$ 自相关函数的时间平均与其功率谱密度互为傅里叶变换，有

$$\overline{R_X(t, t + \tau)} \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} G_X(\omega). \quad (34)$$

若随机过程 $X(t)$ 是平稳过程，其自相关函数 $R_X(t_1, t_2) = R_X(t, t + \tau) = R_X(\tau)$ 与 t 无关。则

$$\overline{R_X(t, t + \tau)} = \overline{R_X(\tau)} = R_X(\tau). \quad (35)$$

只要 $R_X(\tau)$ 绝对可积，满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)| d\tau < \infty, \quad (36)$$

则

$$G_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (37)$$

同理

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (38)$$

维纳-辛钦公式

所以平稳过程的自相关函数与其功率谱密度之间是一对傅里叶变换关系，即

$$R_X(\tau) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} G_X(\omega). \quad (39)$$

这一关系就是著名的维纳-辛钦定理，或称为维纳-辛钦公式。

它给出了平稳过程的时域特性和频域特性之间的联系。可以说，它是分析随机过程的一个最重要、最基本的公式。

功率谱密度函数的对偶性

利用平稳过程的自相关函数和功率谱密度皆为偶函数，维纳-辛钦定理可表示为

$$\begin{cases} G_X(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_X(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \\ R_X(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_X(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \end{cases} \quad (40)$$

维纳-辛钦定理的推广

应该指出，以上我们讨论的维纳-辛钦定理是在随机过程的 $R_X(\tau)$ 满足绝对可积的条件下推出的。它要求随机过程的均值为零，且 $R_X(\tau)$ 中不能含有周期分量。实际中含有直流分量和周期分量的随机过程很多，绝对可积的条件限制了定理的应用。

通过借助 δ 函数，就可以不受此条件的限制。即将直流分量与周期分量在各个频率点上的无限值用一个 δ 函数来表示，借助 δ 函数的傅里叶变换，则维纳-辛钦公式就可以推广到含有直流或周期成分的平稳过程中来。

δ 函数的时域和频域傅里叶变换为

$$\begin{cases} \delta(\tau) \Leftrightarrow 1 \\ \frac{1}{2\pi} \Leftrightarrow \delta(\omega) \end{cases} \quad (41)$$

周期函数的傅里叶变换对为

$$\begin{cases} \cos(\omega_0 \tau) \Leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ \sin(\omega_0 \tau) \Leftrightarrow j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \end{cases} \quad (42)$$

δ 函数与连续函数 $s(t)$ 的乘积公式为

$$\begin{cases} s(t)\delta(t - \tau) = s(\tau)\delta(t - \tau) \\ s(t)\delta(t) = s(0)\delta(t) \end{cases} \quad (43)$$

例 3.4

电报信号的功率谱密度 已知一个电报信号是平稳随机过程, 其自相关函数 $R_X(\tau) = Ae^{-\beta|\tau|}$ $A > 0, \beta > 0$, 如图 4 a) 所示。求该电报信号的功率谱密度。

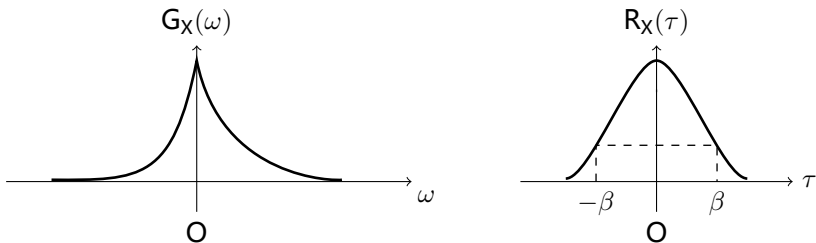


图 4: a) 平稳过程的自相关函数 b) 相应的功率谱密度

解: 因为在 $R_X(\tau)$ 的表示式中包含有 $|\tau|$ 项, 因此在应用维纳-辛钦公式求积分时, 应将 $|\tau|$ 项分成 $+\tau$ 和 $-\tau$ 两部分进行积分。

$$\begin{aligned}
 G_X(\omega) &= \int_{-\infty}^0 A e^{\beta\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} A e^{-\beta\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= A \left. \frac{e^{(\beta-j\omega)\tau}}{(\beta-j\omega)} \right|_{-\infty}^0 + A \left. \frac{e^{-(\beta+j\omega)\tau}}{-(\beta+j\omega)} \right|_0^{\infty} \\
 &= A \left[\frac{1}{\beta-j\omega} + \frac{1}{\beta+j\omega} \right] = \frac{2A\beta}{\beta^2 + \omega^2}.
 \end{aligned} \tag{44}$$

计算出来的 $G_X(\omega)$ 如图 4(b) 所示。

例 3.5

已知随机相位过程 $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$, 其中 A, ω_0 为实常数, θ 为随机相位, 服从 $(0, 2\pi)$ 上的均匀分布。可证其为平稳过程, 且自相关函数为

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau). \quad (45)$$

求 $X(t)$ 的功率谱密度 $G_X(\omega)$ 。

解: $R_X(\tau)$ 含有周期分量, 引入 δ 函数可得

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{A^2\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \end{aligned} \quad (46)$$

表示 $X(t)$ 的功率谱密度为在 $\pm\omega$ 处的 δ 函数, 功率集中在 ω 处, 如图 5 所示。

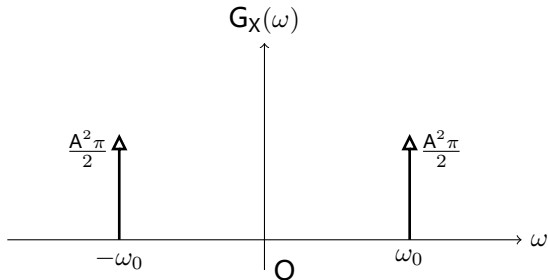


图 5:

例 3.6

已知平稳过程 $X(t)$, 具有功率谱密度为

$$G_X(\omega) = \frac{16}{\omega^4 + 13\omega^2 + 36}.$$

求该过程的自相关函数和均方值。

解：由例 3.2 知

$$R_X(\tau) = Ae^{-\beta|\tau|} \Leftrightarrow G_X(\omega) = \frac{2A\beta}{\beta^2 + \omega^2}. \quad (47)$$

为了利用这个傅里叶变换关系, 可以将 $G_X(\omega)$ 用部分分式法, 展开为

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= \frac{16}{\omega^4 + 13\omega^2 + 36} = \frac{16}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 9)} \\ &= \frac{16/5}{\omega^2 + 4} - \frac{16/5}{\omega^2 + 9}. \end{aligned} \quad (48)$$

于是 $R_X(\tau)$ 应当具有如下形式:

$$R_X(\tau) = F^{-1}[G_X(\omega)] = F^{-1}\left[\frac{16/5}{\omega^2 + 4}\right] - F^{-1}\left[\frac{16/5}{\omega^2 + 9}\right]. \quad (49)$$

由于

$$\frac{16/5}{\omega^2 + 4} = \frac{2 \times 2 \times 4/5}{\omega^2 + 4}, \quad \frac{16/5}{\omega^2 + 9} = \frac{2 \times 3 \times 8/15}{\omega^2 + 9}. \quad (50)$$

故

$$\mathbf{A}_1 = \frac{4}{5}, \beta_1 = 2; \quad \mathbf{A}_2 = \frac{8}{15}, \beta_2 = 3, \quad (51)$$

可得

$$\mathbf{R}_X(\tau) = \frac{4}{5} \mathbf{e}^{-2|\tau|} - \frac{8}{15} \mathbf{e}^{-3|\tau|}. \quad (52)$$

物理功率谱密度

前面定义的随机过程功率谱密度分布为“双边谱”密度。实际应用中 $\omega < 0$ 负频率外不存在，公式中的负频率纯粹只有数学上的意义和运算的方便。因此有时也采用另一称“单边谱”密度, 如图 6 所示。

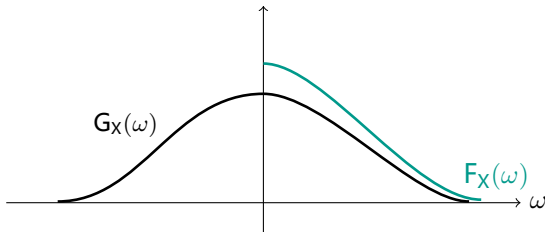


图 6: 物理功率谱密度

$F_X(\omega)$ 与 $G_X(\omega)$ 的关系如下:

$$F_X(\omega) = 2G_X(\omega)U(\omega) = \begin{cases} 2G_X(\omega), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} \quad (53)$$

其中阶跃函数

$$U(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} \quad (54)$$

若用物理功率谱密度 $F_X(\omega)$ 表示平稳随机过程的自相关函数及平均功率。则为

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_X(\omega) \cos \omega\tau d\omega.$$

$$\mathbf{P} = R_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_X(\omega) d\omega. \quad (55)$$

两个实随机过程的相关关系

上节中讨论的功率谱密度, 若不加说明, 皆指“双边谱”密度 (功率谱密度)。

在上章中已经建立了两个实随机过程的互相关函数的概念。

下面将单个实随机过程的功率谱密度的概念, 以及相应的分析方法推广到两个随机过程中去, 即两个实随机过程的互功率谱密度和互相关函数。

互功率谱密度

其平均功率的定义

若 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的样本函数 $x_k(t)$ 和 $y_k(t)$ 的两个截取函数 $x_{kT}(t), y_{kT}(t)$ 为

$$x_{kT}(t) = \begin{cases} x_k(t), & -T < t < T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad y_{kT}(t) = \begin{cases} y_k(t), & -T < t < T \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (56)$$

因为截取函数 $x_{kT}(t), y_{kT}(t)$ 都满足绝对可积的条件, 所以它们的傅氏变换存在, 有变换对

$$\begin{aligned} x_{kT}(t) &\xLeftrightarrow[F]{F^{-1}} \mathfrak{X}_{kT}(\omega), \\ y_{kT}(t) &\xLeftrightarrow[F]{F^{-1}} \mathcal{Y}_{kT}(\omega). \end{aligned} \quad (57)$$

由于 $x_{kT}(t), y_{kT}(t)$ 的傅氏变换存在, 故帕塞瓦尔定理对它们也适用, 即

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x_{kT}^*(t) y_{kT}(t) dt &= \int_{-T}^T x_k^*(t) y_k(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{X}_{kT}(\omega) \mathcal{Y}_{kT}(\omega) d\omega.\end{aligned}\quad (58)$$

由于 $X(t), Y(t)$ 为实过程, 所以

$$x_{kT}^*(t) = x_{kT}(t), \quad (59)$$

$$y_{kT}^*(t) = y_{kT}(t). \quad (60)$$

两个随机过程的样本函数 $x_k(t)$ 和 $y_k(t)$ 的互平均功率

$$\begin{aligned} P_k &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_k(t) y_k(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} \mathfrak{X}_{kT}(\omega) \mathfrak{Y}_{kT}(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (61)$$

由于 $x_{kT}(t)$, $y_{kT}(t)$ 和 $\mathfrak{X}_{kT}(\omega)$, $\mathfrak{Y}_{kT}(\omega)$ 都是试验结果 ζ_k 的函数。

相对于所有试验结果, 样本函数平均功率 $P_k = P_{\Delta}(\zeta)$ 是一个随机变量。

随机信号分析

互功率谱密度的定义

$$G_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} F[X_T(\omega)Y_T(\omega)], \quad (64)$$

则互平均功率为

$$P_{XY} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{XY}(\omega) d\omega. \quad (65)$$

 $X(t)Y(t)$ 的另一个互平均功率

同理可得, $X(t)$, $Y(t)$ 的另一个互功率谱密度为

$$G_{YX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[Y_{T^*}(\omega)X_T(\omega)], \quad (66)$$

$Y(t)X(t)$ 的另一个互平均功率为

$$P_{YX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{YX}(\omega) d\omega, \quad (67)$$

比较可得两个互平均谱密度关系为

$$G_{XY}(\omega) = G_{YX}^*(\omega). \quad (68)$$

互评密度与互相关函数的关系

两个实平稳过程的关系

如同单个实平稳过程的自相关函数与其功率谱密度之间的关系一样，两个实平稳过程的互相关系数与互谱密度之间也存在着类似的关系。

对于两个实随机过程 $X(t), Y(t)$, 其互谱密度 $G_{XY}(\omega)$ 与其互相关函数 $R_{XY}(t, t + \tau)$ 之间的关系为

$$G_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{R_{XY}(t, t + \tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (69)$$

即

$$\overline{R_{XY}(t, t + \tau)} \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} G_{XY}(\omega). \quad (70)$$

若 $X(t), Y(t)$ 联合平稳, 则有

$$R_{XY}(\tau) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} G_{XY}(\omega). \quad (71)$$

即两个联合平稳的实随机过程, 它们的互谱密度与互相关函数为一傅里叶变换对。

两个实平稳过程 X 与 Y 的关系

$$\begin{cases} G_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \\ R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{XY}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \end{cases} \quad (72)$$

互谱密度的性质

两个随机过程的互功率谱密度与单个随机过程的功率谱密度不同，

1) 互谱密度非偶函数, 满足

$$G_{XY}(\omega) = G_{YX}^*(\omega) = G_{YX}(-\omega). \quad (73)$$

2) 互谱密度的实部为 ω 的偶函数, 即

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[G_{XY}(\omega)] = \operatorname{Re}[G_{XY}(-\omega)], \\ \operatorname{Re}[G_{YX}(\omega)] = \operatorname{Re}[G_{YX}(-\omega)]. \end{cases} \quad (74)$$

3) 互谱密度的虚部为 ω 的奇函数, 即

$$\begin{cases} \operatorname{Im}[G_{XX}(\omega)] = -\operatorname{Im}[G_{XX}(-\omega)], \\ \operatorname{Im}[G_{YX}(\omega)] = -\operatorname{Im}[G_{YX}(-\omega)]. \end{cases} \quad (75)$$

式中 $\operatorname{Im}[\cdot]$ 表示虚部。

4) 若 $X(t), Y(t)$ 正交, 则有

$$G_{XY}(\omega) = G_{YX}(\omega) = 0. \quad (76)$$

5) 若 $X(t), Y(t)$ 不相关, 且分别具有常数均值 m_X 和 m_Y , 则

$$\begin{cases} R_{XY}(t, t + \tau) = m_X m_Y. \\ G_{XY}(\omega) = G_{YX}(\omega) = 2\pi m_X m_Y \delta(\omega). \end{cases} \quad (77)$$

6) 互相关函数和互谱密度满足

$$\begin{cases} \overline{R_{XY}(t, t + \tau)} \Leftrightarrow G_{XY}(\omega) \\ \overline{R_{YX}(t, t + \tau)} \Leftrightarrow G_{YX}(\omega) \end{cases} \quad (78)$$

例 3.7

设两个随机过程 $X(t), Y(t)$ 联合平稳, 其互相关函数

$$R_{XY}(\tau) = \begin{cases} 9e^{-3\tau}, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases} \quad (79)$$

求互谱密度 $G_{XY}(\omega)$ 和 $G_{YX}(\omega)$ 。

由联合平稳过程的互相关函数和互谱密度的傅立叶变换对关系, 可得

$$\begin{aligned} G_{XY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 9e^{-3\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{aligned}$$

可见, $G_x(\omega)$ 是 ω 的复函数。

$$\begin{aligned}
 G_{XY}(\omega) &= \int_0^{\infty} 9e^{-3\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= 9 \int_0^{\infty} e^{-(3+j\omega)\tau} d\tau \\
 &= \frac{9}{3+j\omega}.
 \end{aligned} \tag{80}$$

可见, $G_x(\omega)$ 是 ω 的复函数。根据互谱密度的性质 1), 可得

$$\begin{aligned}
 G_{YX}(\omega) &= G_{XY}^*(\omega) \\
 &= \frac{9}{3-j\omega}.
 \end{aligned} \tag{81}$$

(理想) 白噪声

白噪声的定义

若平稳过程 $N(t)$ 的均值为零，功率谱密度在整个频率轴 $(-\infty, +\infty)$ 上服从均匀分布，满足

$$G_N(\omega) = \frac{N_0}{2}, \quad (82)$$

其中 N_0 为正实常数. 则称此过程为白噪声过程，简称白噪声。

“白”是借用了光学中“白光”这一术语。因为白光的光谱包含了所有可见光的频率分量，分布在整个频率轴上。任意的非白噪声被定义为色噪声。

白噪声的自相关系数

$$\rho_N(\tau) = \frac{R_N(\tau)}{R_N(0)} = \begin{cases} 1, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases} . \quad (84)$$

白噪声的特点

1) 理想化的数学模型

(1) 由白噪声的自相关系数可见, 白噪声在任何两个相邻时刻的状态 (即使是紧连的两个时刻), 只要不是同一时刻都是不相关的。因此, 在时域中白噪声的样本函数变化极快。然而任何实际的过程, 无论样本函数变化多快, 紧连接的两个时刻的状态总存在一定的关联性, 自相关函数不可能是一个 δ 函数。

由于定义下的白噪声模型的功率谱无限宽, 因此其平均功率就无限大。然而, 物理上存在的任何随机过程, 其平均功率总是有限的。因此, 在这样定义下的白噪声只是一种理想化的数学模型, 在物理上是不存在的。尽管如此, 由于白噪声在数学上具有处理简单, 方便的优点, 所以它在随机过程的理论研究及实际应用中仍占有特别重要的地位。

白噪声的特点

2) 数学上有很好的运算性质

可白噪声的功率谱密度是“常数”，自相关函数是一个“冲激函数”，所以将它作为噪声与信号一起分析处理, 运算非常方便。

3) 是大多数重要噪声的模型

经过科学家的验证，大自然中计多重要的噪声过程，因功率谱近似于常数，确实可以用白噪声来近似。

白噪声来源

例如，对通信系统有很大影响的热噪声，是由元件中电子原件的热运动产生的。

白噪声的特点

约翰逊和奈奎斯特从实验和理论两个方面研究证明：在正常室温下，网络工作频率低于 10^3 Hz 时，电阻两端噪声电压 N_V 的均值为零 (阻值为 R)，均方值 (平均功率) 为

$$E[N_V^2(t)] = 4kTR\Delta f, \quad (85)$$

式中 T 为绝对零度， $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K 为波耳兹曼常数， Δf 为噪声带宽。

其功率谱密度为

$$G_{NV}(\omega) = \frac{E[N_V^2(t)]}{2\Delta f} = 2kTR, \quad (86)$$

可见，热噪声具有平均的功率谱密度，可以用白噪声来近似。

白噪声的特点

4) 白噪声可以替代实际应用中的宽带噪声

在实际工作中，任何一个系统的带宽总是有限的。当噪声通过某一系统时，只要它在比我们感兴趣的信号频带宽得多的范围内，都具有近似均匀的功率谱密度，如图 8 所示，这个噪声就可以被当作白噪声来处理，而且不会带来很大的误差。

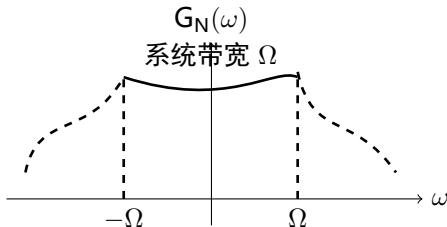


图 8: 白噪声的特点

白噪声的特点

白噪声的来源

电子设备中出现的各种起伏过程，大多数都可认为是白噪声。

白噪声的实例

如电阻热噪声、晶体管的散弹噪声等。

抽象结果

在相当宽的频率范围内都具有均匀的功率谱密度，所以可以把它们看成是白噪声。

5) 高斯白噪声

高斯白噪声在任意两相邻时刻的状态有各态历经性。

限带白噪声

定义

平稳随机过程 $X(t)$ 均值为零，在有限频率范围内，其功率谱密度均匀分布，范围外为零，则称此过程为限带白噪声。限带白噪声是另外一个常用的概念。

限带白噪声分类

限带白噪声分为低通型限带白噪声和带通型限带白噪声。

1) 低通型限带白噪声

若随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度满足

$$\mathbf{G}_x(\omega) = \begin{cases} \mathbf{G}_0, & |\omega| \leq \Omega/2 \\ 0, & |\omega| > \Omega/2 \end{cases} \quad (87)$$

则称此过程为低通型限带白噪声。

将白噪声通过一个理想低通滤波器，便产生出低通型限带白噪声。其自相关系数为

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} G_0 e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{\Omega G_0}{2\pi} \cdot \frac{\sin(\Omega\tau/2)}{(\Omega\tau/2)}. \end{aligned} \quad (88)$$

随机信号分析



可以看出时间间隔 τ 等于 $2\pi/\Omega$ 整数倍的那些随机变量，彼此是不相关的。

类似低通型限带白噪声，带通型限带白噪声的功率谱密度为

$$\mathbf{G}_Y(\omega) = \begin{cases} \mathbf{G}_0, & \omega_0 - \Omega/2 < |\omega| < \omega_0 + \Omega/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (89)$$

应用维纳-辛钦定理，带通型限带白噪声的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \frac{\Omega G_0}{\pi} \cdot \frac{\sin(\Omega\tau/2)}{(\Omega\tau/2)} \cos \omega_0\tau \\ &= 2R_X(\tau) \cos \omega_0\tau. \end{aligned}$$

带通型限带白噪声的自相关函数计算



下载——带通型限带白噪声的自相关函数计算

带通型限带白噪声 $G_Y(\omega)$ 和 $R_Y(\tau)$ 的图形, 见图 10。

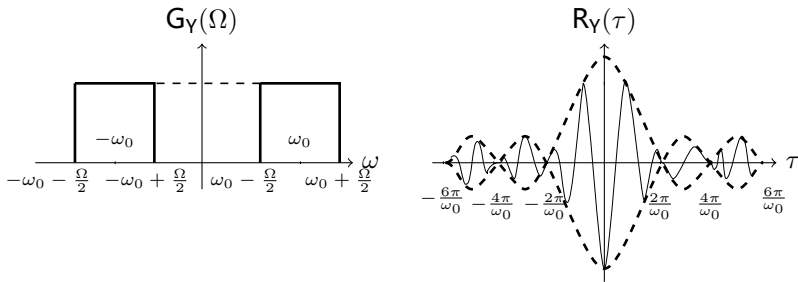


图 10: 带通型限带白噪声 ($G_Y(\Omega)$ 和 $R_Y(\tau)$)

不难看出, 将白噪声通过一个理想带通滤波器便可产生带通型限带白噪声。