

目录

- 1 随机过程的联合平稳
 - 希尔伯特变换的性质
 - 举例
- 2 高频窄带信号的复指数形式
 - 高频窄带信号通过窄带系统
 - 随机过程的解析形式及其性质
- 3 窄带随机过程
 - 窄带随机过程的“垂直”分解
 - 窄带随机过程的统计分析
- 4 窄带高斯过程包络与相位的分布
 - 包络和相位各自的二维概率分布
 - 随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布
- 5 窄带高斯过程包络平方的概率分布
 - 卡方分布和非中心卡方分布
 - 卡方分布的性质
- 6 窄带高斯过程包络平方的概率分布

第二次教案下载二维码

Github 下载



第 2 章 随机信号的时域分析

目录

- 1 随机过程的联合平稳
 - 希尔伯特变换的性质
 - 举例
- 2 高频窄带信号的复指数形式
 - 高频窄带信号通过窄带系统
 - 随机过程的解析形式及其性质
- 3 窄带随机过程
 - 窄带随机过程的“垂直”分解
 - 窄带随机过程的统计分析
- 4 窄带高斯过程包络与相位的分布
 - 包络和相位各自的二维概率分布
 - 随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布
- 5 窄带高斯过程包络平方的概率分布
 - 卡方分布和非中心卡方分布
 - 卡方分布的性质
- 6 窄带高斯过程包络平方的概率分布

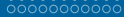


若将 $S(\omega)$ 傅里叶逆变换分解成正负两频域部分积分之和

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] + \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(-\omega') e^{-j\omega' t} d\omega' \right] \\
 &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] + \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega') e^{j\omega' t} d\omega' \right]^* \\
 &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \\
 &= \operatorname{Re}[\tilde{s}(t)].
 \end{aligned}$$

(6)

随机信号分析



由 $\text{Re}[\tilde{s}(t)] = s(t)$, 再令单边信号的虚部

$$\text{Im}[\tilde{s}(t)] = \hat{s}(t). \quad (11)$$

即解析信号 $s(t)$ 的虚部用符号 $\hat{s}(t)$ 表示, 则

$$\tilde{s}(t) = s(t) + j\hat{s}(t). \quad (12)$$

上式是解析信号 $s(t)$ 的一般表达式。

虚部 $\hat{s}(t)$ 的求取

式中的虚部 $\hat{s}(t)$ 又如何求得呢?

频域表达

从频域关系出发, 解析信号 $\tilde{s}(t)$ 的频谱 $\tilde{S}(\omega)$ 满足 $\tilde{S}(\omega) = 2S(\omega)U(\omega)$ 。

已知的傅里叶逆变换

$$U(\omega) \xrightleftharpoons[F]{F^{-1}} \frac{1}{2} \left[\delta(t) - \frac{1}{j\pi t} \right]. \quad (13)$$

(??)中复函数的计算基础

$$\oint_{|z|<0.2} \frac{1}{j\pi z} e^{-j\omega z} dz = \frac{1}{j\pi} \oint_{|z|<0.2} \frac{1}{t} e^{-j\omega z} dz = \frac{2j\pi}{j\pi} = 2. \quad (14)$$

希尔伯特变换的几个重要性质

1. 希尔伯特变换相当于一个正交滤波器

希尔伯特变换是 $s(t)$ 和 $1/\pi t$ 的卷积, 根据线性系统的输出特征, 可以将 $\hat{s}(t)$ 看成是 $s(t)$ 通过一个具有冲激响应为的线性滤波器, 如图 2 所示。

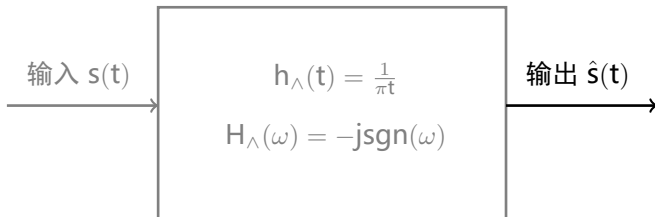


图 2: 希尔伯特变换

$j\frac{1}{\pi t}$ 和 $\text{sgn}(\omega)$ 的关系

$$j\frac{1}{\pi t} \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} \text{sgn}(\omega), \quad (17)$$

式中 $\text{sgn}(a)$ 为符号函数。

满足的条件

$$\text{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > 0 \\ -1, & \omega < 0 \end{cases} \quad (18)$$

$$\frac{1}{\pi t} \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} -j\text{sgn}(\omega). \quad (19)$$

线性滤波器的传递函数

线性滤波器的传递函数 (频率响应) 为

$$H_{\Lambda}(\omega) = -j\operatorname{sgn}(\omega). \quad (20)$$

线性滤波器的幅频特性

$$|H_{\Lambda}(\omega)| = 1, \quad (21)$$

线性滤波器的相频特性

$$\theta_{H_{\Lambda}}(\omega) = \begin{cases} -\pi/2, & \omega > 0 \\ +\pi/2, & \omega < 0 \end{cases}. \quad (22)$$

2. 两次希尔伯特变换相当于一个倒相器

若对 $s(t)$ 进行两次希尔伯特变换, 则相当于信号 $s(t)$ 通过两个级联的 $hA(t)$ 网络。即

$$\hat{\hat{s}}(t) = H\{H[s(t)]\} = H[s(t)] = \hat{s}(t) * \frac{1}{\pi t} = s(t) * \frac{1}{\pi t} * \frac{1}{\pi t} \quad (24)$$

$$\hat{\hat{S}}(\omega) = \hat{S}(\omega)[-j\text{sgn}(\omega)] = S(\omega)[-j\text{sgn}(\omega)][-j\text{sgn}(\omega)] = -S(\omega) \quad (25)$$

得到的时域关系

$$\hat{\hat{s}}(t) = H\{H[s(t)]\} = -s(t) \quad (26)$$

如图 26 所示, 两次希尔伯特变换将信号 $s(t)$ 翻转了 180° 。

3. 希尔伯特逆变换等于负的希尔伯特正变换

定义希尔伯特逆变换为

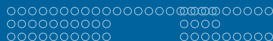
$$s(t) = H^{-1}[\hat{s}(t)]. \quad (27)$$

由式 (26) 可得

$$s(t) = -H[\hat{s}(t)]. \quad (28)$$

对比式 (27) 和式 (28) 可知

$$s(t) = -H[\hat{s}(t)]. \quad (29)$$

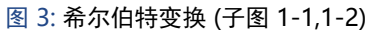


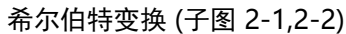
希尔伯特逆变换等于负的希尔伯特正变换

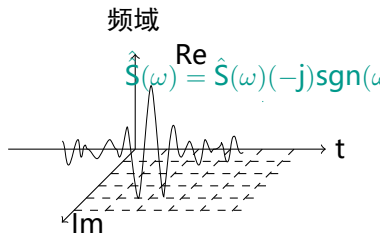
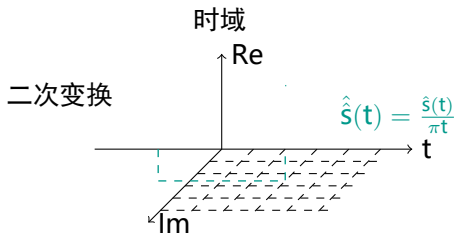
$$H^{-1}[\cdot] = -H[\cdot]. \quad (30)$$

希尔伯特逆变换的公式

$$\begin{aligned} s(t) &= H^{-1}[\hat{s}(t)] = -H[\hat{s}(t)] \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{s}(t-\tau)}{\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{s}(t+\tau)}{\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (31)$$







希尔伯特变换 (子图 3-1,3-2)

解:

①

$$\begin{aligned} H[\cos \Omega t] &= \cos \Omega t * \frac{1}{\pi t} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[\Omega(t - \tau)]}{\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (32)$$

随机信号分析



举例

$$H[\cos \Omega t] = \text{sgn}(\Omega) \sin \Omega t = \begin{cases} \sin \Omega t, & \Omega > 0 \\ -\sin \Omega t, & \Omega < 0 \end{cases}. \quad (37)$$

② 对上式两端再求一次 Hilbert 变换

$$H^2[\cos \Omega t] = H\{H[\cos \Omega t]\} = H[\text{sgn}(\Omega) \sin \Omega t] = \text{sgn}(\Omega) H[\sin \Omega t]. \quad (38)$$

利用性质 2 可知, 两次希尔伯特变换相当于倒相器, 则

$$\mathbf{H}\{\mathbf{H}[\cos \Omega t]\} = -\cos \Omega t. \quad (39)$$



由上述两式综合可得

$$\text{sgn}(\Omega)H[\sin \Omega t] = H\{H[\cos \Omega t]\} = -\cos \Omega t. \quad (40)$$

结论

$$\begin{aligned} H[\sin \Omega t] &= -\operatorname{sgn}(\Omega) \cos \Omega t \\ &= \begin{cases} -\cos \Omega t, & \Omega > 0 \\ \cos \Omega t, & \Omega < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (41)$$

如图 4 所示, 由于 $\frac{\Delta\omega}{2} < \omega_0$, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{t}) \cos \omega_0 \mathbf{t} &\xrightarrow[\mathbf{F}^{-1}]{\mathbf{F}} \frac{1}{2\pi} \mathbf{A}(\omega) * \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ \mathbf{S}_1(\omega) &= \frac{1}{2} [\mathbf{A}(\omega - \omega_0) + \mathbf{A}(\omega + \omega_0)] \end{aligned} \quad (44)$$

$$\mathbf{S}_1(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathbf{A}(\omega - \omega_0), & \omega > 0 \\ \frac{1}{2}\mathbf{A}(\omega + \omega_0), & \omega < 0 \end{cases} \quad (45)$$



举例

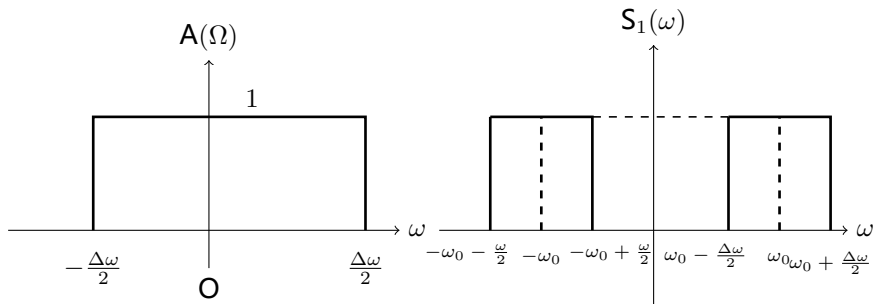


图 4: 例 6. 2 图

随机信号分析

利用傅里叶变换的频移性质

$$\begin{aligned}\hat{s}_1(t) &= H[a(t) \cos \omega_0 t] = -\frac{j}{2}a(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{j}{2}a(t)e^{-j\omega_0 t} \\ &= \frac{j}{2}(e^{-j\omega_0 t} - e^{j\omega_0 t})a(t) = a(t) \sin \omega_0 t.\end{aligned}\quad (48)$$

③ 利用 Hilbert 性质二次变换的性质

可得

$$\begin{aligned}\hat{s}_2(t) &= H[a(t) \sin \omega_0 t] = H\{H[a(t) \cos \omega_0 t]\} \\ &= -a(t) \cos \omega_0 t.\end{aligned}\quad (49)$$

目录

- 1 随机过程的联合平稳
 - 希尔伯特变换的性质
 - 举例
- 2 高频窄带信号的复指数形式
 - 高频窄带信号通过窄带系统
 - 随机过程的解析形式及其性质
- 3 窄带随机过程
 - 窄带随机过程的“垂直”分解
 - 窄带随机过程的统计分析
- 4 窄带高斯过程包络与相位的分布
 - 包络和相位各自的二维概率分布
 - 随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布
- 5 窄带高斯过程包络平方的概率分布
 - 卡方分布和非中心卡方分布
 - 卡方分布的性质
- 6 窄带高斯过程包络平方的概率分布

这类信号的典型频谱如图 5(a) 所示。如果在示波器上观察这类窄带信号, 它的波形或多或少地有点像正弦波, 如图 5(b) 所示。但它的振幅、相位不是常数, 而是随 t 变化的函数这类窄带信号 $s(t)$ 可以表示为

$$s(t) = a(t) \cos [\omega_0 t + \phi(t)], \quad (50)$$

式中 $a(t)$ 是信号 $s(t)$ 的振幅调制, 称为包络函数。 $\phi(t)$ 是信号 $s(t)$ 的相位调制, 称为相位函数。

相对载波 $\cos \omega t$ 来讲, $a(t)$ 与 $\phi(t)$ 都是慢变化的时间函数。

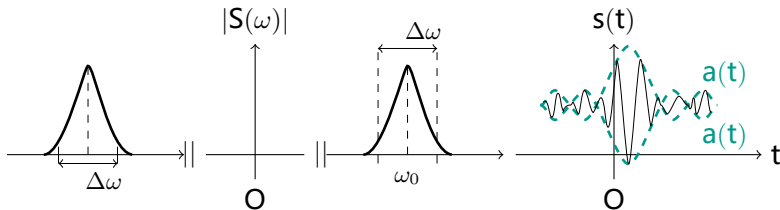


图 5: 高频窄带信号

随机信号分析

由例 26 的结论, 可得 $s(t)$ 的希尔伯特变换

$$\begin{aligned}
 \hat{s}(t) &= H[m_c(t) \cos \omega_0 t] - H[m_s(t) \sin \omega_0 t] \\
 &= m_c(t) \sin \omega_0 t + m_s(t) \cos \omega_0 t \\
 &= a(t) \cos \varphi(t) \sin \omega_0 t + a(t) \sin \varphi(t) \cos \omega_0 t \\
 &= a(t) \sin [\omega_0 t + \varphi(t)].
 \end{aligned} \tag{55}$$

通常, 将 $m(t)$ 称为信号 $s(t)$ 的复包络, 而将 $e^{j\omega_0 t}$ 称为复载频。
 $a(t)$ 称为包络, 解析信号 $\tilde{s}(t)$ 称为预包络。

复包络展开

$$m(t) = a(t) \cos \varphi(t) + ja(t) \sin \varphi(t) = m_c(t) + jm_s(t). \quad (58)$$

可见, 包络 $a(t)$, 复包络 $m(t)$ 相对 $\cos \omega_0 t$ 来讲, 都是低频限带信号。

随机信号分析

设一实信号 $s(t) = a(t) \cos \omega_0 t$, 其复包络 $m(t) = a(t)$, 复包络的频谱 $M(\omega)$ 不满足低频限带条件, 如图 ?? 所示

$$m(t) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} M(\omega), \quad |\omega| < \Delta\omega \not\ll \omega_0. \quad (59)$$

实信号 $s(t)$ 频谱

$$S(\omega) = \frac{1}{2} [M(\omega + \omega_0) + M(\omega - \omega_0)]. \quad (60)$$

① $s(t)$ 的解析信号形式

$$\bar{s}(t) = s(t) + j\hat{s}(t). \quad (61)$$

解析信号的频谱

$$\tilde{S}(\omega) = 2S(\omega)U(\omega) = [M(\omega + \omega_0) + M(\omega - \omega_0)] U(\omega). \quad (62)$$

② $s(t)$ 的复指数表示

$$\bar{s}_{\text{复}}(t) = m(t)e^{j\omega_0 t}. \quad (63)$$

复信号频谱

$$\tilde{S}_{\text{复}}(t)(\omega) = M(\omega - \omega_0). \quad (64)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= \mathcal{S}_{\text{复}}(\omega) - \mathbf{S}(\omega) \\ &= \mathbf{M}(\omega - \omega_0) [1 - \mathbf{U}(\omega)] - \mathbf{M}(\omega + \omega_0) \mathbf{U}(\omega).\end{aligned}\quad (65)$$

这个误差在时域的表达式为

$$\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\int_{-\infty}^{\infty} M(\omega) e^{i(\omega + \omega_0)t} d\omega \right]. \quad (66)$$

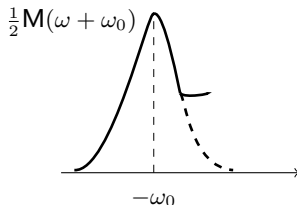
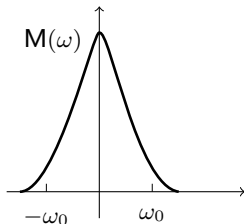
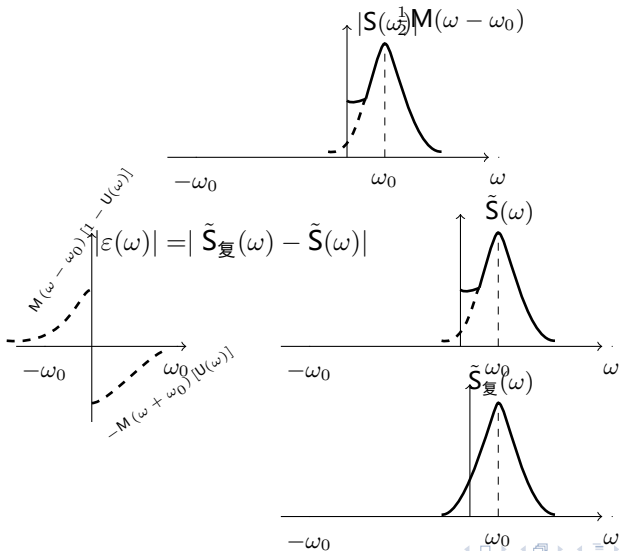


图 6: 误差分析



复信号直接替代其解析信号的情况

情形 1

对于一般窄带信号而言, 即使复包络 $m(t)$ 不是限带, 但如果能使 $\omega_0 \gg \Delta\omega$, 使得尾部能量很小, 误差 $\varepsilon(t)$ 也很小, 则用 $s(t)$ 的复指数信号替代 $s(t)$ 的解析信号也是允许的。

情形 2

当然, 对于一个理想的高频窄带信号来讲, 由于 $\omega_0 \gg \Delta\omega$, 且复包络 $m(t)$ 又是限带的, 可以用指数形式的复信号直接替代其解析信号。

若已知高频窄带信号复包络的频谱 $M(\omega)$, 有

$$\tilde{s}_{\text{复}}(t) = m(t)e^{j\omega_0 t} \xLeftrightarrow[F]{F^{-1}} \tilde{S}_{\text{复}}(\omega) = M(\omega - \omega_0), \quad (68)$$

则

$$\tilde{s}_{\text{复}}^*(t) \xLeftrightarrow[F]{F^{-1}} \tilde{S}_{\text{复}}^*(-\omega) = M^*(-\omega - \omega_0) \quad (69)$$

由于可以用复指数形式代替其解析形式 $\tilde{s}(t) = \tilde{s}_{\text{复}}(t)$, 则

$$s(t) = \text{Re}[\tilde{s}(t)] = \text{Re}[\tilde{s}_{\text{复}}(t)] = \frac{1}{2} [\tilde{s}_{\text{复}}(t) + \tilde{s}_{\text{复}}^*(t)] \quad (70)$$

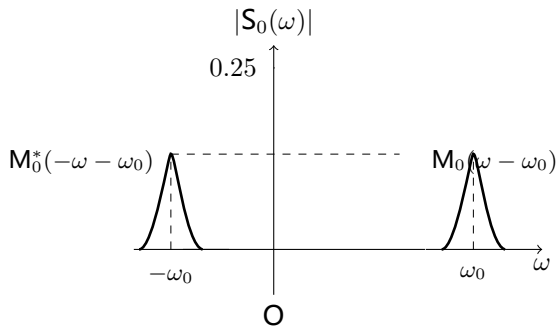


图 9: 高频窄带信号通过窄带系统



高频窄带系统的冲激响应和传递函数为

$$\begin{aligned} h(t) &= \text{Re}[\tilde{h}(t)] = \text{Re} [h_m(t)e^{j\omega_0 t}] \\ H(\omega) &= \frac{1}{2} [H_m(\omega - \omega_0) + H_m^*(-\omega - \omega_0)], \end{aligned} \quad (74)$$

其中 $h_n(t)$, $H_m(\omega)$ 分别为窄带系统的复包络及其频谱。

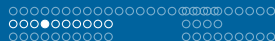
系统的输出

$$\begin{aligned} s_0(t) &= s_i(t) * h(t) \\ S_0(\omega) &= S_i(\omega)H(\omega). \end{aligned} \quad (75)$$



将输入窄带信号和窄带系统的频谱代入上式, 得

$$\begin{aligned}
 S_0(\omega) &= \frac{1}{4} [M_i(\omega - \omega_0) + M_i^*(-\omega - \omega_0)] [H_m(\omega - \omega_0) + H_m^*(-\omega - \omega_0)] \\
 &= \frac{1}{4} [M_i(\omega - \omega_0) H_m(\omega - \omega_0) + M_i(\omega - \omega_0) H_m^*(-\omega - \omega_0) \\
 &\quad + M_i^*(-\omega - \omega_0) H_m(\omega - \omega_0) \\
 &\quad + M_i^*(-\omega - \omega_0) H_m^*(-\omega - \omega_0)].
 \end{aligned}
 \tag{76}$$



由于 $s(t)$ 的复包络 $m_i(t)$ 是低频限带信号, 其频谱 $M_i(\omega)$ 如图 10 和 11 所示

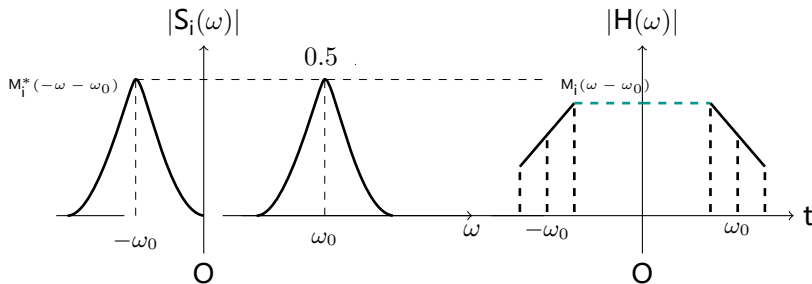


图 10: 高频窄带信号通过窄带系统



高频窄带信号通过窄带系统

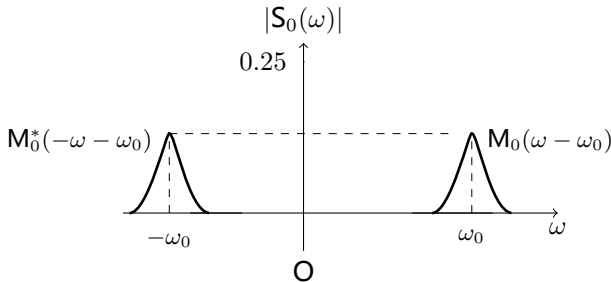
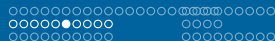


图 11: 高频窄带信号通过窄带系统

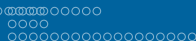


$$\begin{cases} M_i^*(-\omega - \omega_0) H_m(\omega - \omega_0) = 0 \\ M_i(\omega - \omega_0) H_m^*(-\omega - \omega_0) = 0 \end{cases} \quad (77)$$

由图可知, 式 (77) 显然成立。

$S_0(\omega)$ 的结果

$$\begin{aligned} S_0(\omega) = \frac{1}{4} & \left[M_i(\omega - \omega_0) H_m(\omega - \omega_0) \right. \\ & \left. + M_i^*(-\omega - \omega_0) H_m^*(-\omega - \omega_0) \right]. \end{aligned} \quad (78)$$



相应的输出信号

$$s_0(t) = \frac{1}{4} [m_i(t) * h_m(t)] e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{4} [m_i(t) * h_m(t)]^* e^{-j\omega_0 t} \quad (79)$$

又因为

$$s_o(t) = \text{Re} [\tilde{s}_o(t)] = \frac{1}{2} [\tilde{s}_o(t) + \tilde{s}_o^*(t)] . \quad (80)$$

可得

$$\tilde{s}_o(t) = \frac{1}{2} [m_i(t) * h_m(t)] e^{j\omega_0 t} . \quad (81)$$



即输出的复包络 $m_0(t)$ 仅由输入信号的复包络 $m_i(t)$ 与系统冲激响应的复包络 $h_m(t)/2$ 卷积而成。

这种处理方法使我们对高频窄带信号通过高频窄带系统这类问题的分析与运算大为简化。

避免了高频信号与高频冲激响应卷积时的麻烦的高频项处理。

实随机过程的解析形式 (或解析过程) 为

$$\hat{X}(t) = X(t) + j\hat{X}(t), \quad (84)$$

称为 $X(t)$ 的希尔伯特变换, 其中

$$\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbf{X}(\mathbf{t}) * \frac{1}{\pi \mathbf{t}}. \quad (85)$$

由于希尔伯特变换的线性性质, $1/\pi t$ 可以看成一线性系统的冲激响应。

因此, $Y(t)$ 可以看成是输入 $X(t)$ 下线性系统 $h_{\lambda}(t)$ 的输出, 即

$$Y(t) = X(t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{X}(t). \quad (86)$$

如图 13 所示。正是利用这一等效, 使得在下一节中应用解析过程来分析窄带随机后号变得是十分方便。

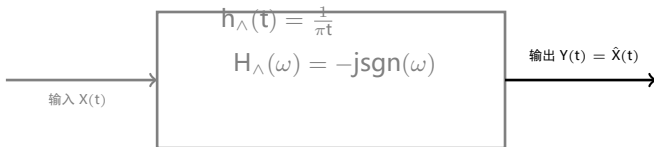


图 13: 解析过程

希尔伯特变换

希尔伯特变换是一种线性变换, 那么随机信号通过线性系统的结论在此解析过程的性质可应用。

若 $X(t)$ 为宽平稳 (实) 过程, 则 $\hat{X}(t)$ 也是宽平 (实) 过程且 $X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 联合宽平稳。

2° 实随机过程

证: 从图 13 不难看出

$$G_X(\omega) = G_X(\omega) |H_{\Lambda}(\omega)|^2 \quad (87)$$

$$|H_{\Lambda}(\omega)| = |-j\operatorname{sgn}(\omega)| = 1. \quad (88)$$

因此

$$G_{\hat{X}}(\omega) = G_X(\omega) \Rightarrow R_X(\tau) = R_X(\tau). \quad (89)$$

$X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 的互相关函数等于 $X(t)$ 自相关函数的希尔伯特变换。

据线性系统输入输出随机信号之间互相关函数的性质, 有

$$\begin{aligned}
 R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) &= E[X(t)\hat{X}(t+\tau)] = R_X(\tau) * h_{\Lambda}(\tau) = R_X(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} \\
 &= \bar{R}_X(\tau). \\
 R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau) * h_{\Lambda}(-\tau) \\
 &= -R_X(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = -\hat{R}_X(\tau).
 \end{aligned} \tag{90}$$

且有

$$R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) = -R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau). \tag{91}$$

由此可得 $X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 的互功率谱密度为

$$\begin{aligned}
 G_{X\hat{X}}(\omega) &= F[R_{X\hat{X}}(\tau)] = F[\hat{R}_X(\tau)] \\
 &= -j\text{sgn}(\omega)G_X(\omega) = \begin{cases} -jG_X(\omega), & \omega > 0 \\ jG_X(\omega), & \omega < 0 \end{cases} \quad (92)
 \end{aligned}$$

4° $X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 的互相关函数是 τ 的奇函数

$$R_{X\hat{X}}(-\tau) = R_X(-\tau) * h_{\wedge}(-\tau). \quad (93)$$

且 $R_X(\tau)$ 是偶函数, 则

$$\begin{aligned}
 R_{X\hat{X}}(-\tau) &= R_X(-\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) \\
 &= R_X(\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) = -\hat{R}_X(\tau) = -R_{X\hat{X}}(\tau). \quad (94)
 \end{aligned}$$

同理可证

$$R_{\hat{X}\hat{X}}(-\tau) = -R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau). \quad (95)$$

5° 随机过程程 $R_{\hat{X}\hat{X}}$ 和 $R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau)$ 在任何同一时刻的两个状态正交

证: 因为 $R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau), R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau)$ 是 τ 的奇函数, 所以当 $\tau = 0$ 时, 有

$$\begin{cases} R_{\hat{X}\hat{X}}(0) = 0 \\ R_{\hat{X}\hat{X}}(0) = 0 \end{cases} \quad (96)$$

上式说明, 过程 $X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 在任何同一时刻 ($\tau = 0$) 的两个状态正交, 即

$$R_{\hat{X}\hat{X}}(0) = E[\hat{X}(t)X(t)] = 0. \quad (97)$$

6° 解析过程的功率谱密度只存在于正频域

按照复随机过程自相关函数的定义, 解析过程 $\tilde{X}(t)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned}
 R_X(\tau) &= E[\bar{X}(t) \cdot \tilde{X}(t + \tau)] \\
 &= E\{[X(t) - j\hat{X}(t)][X(t + \tau) + j\hat{X}(t + \tau)]\} \quad (98) \\
 &= R_X(\tau) + R_X(\tau) + j[R_{X\hat{X}}(\tau) - R_{\hat{X}X}(\tau)].
 \end{aligned}$$

再应用性质 2° 和 3° 可得

$$R_X(\tau) = 2[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)] = 2\tilde{R}_X(\tau). \quad (99)$$

解析过程 $\tilde{X}(t)$ 的功率谱密度

对式 (99) 两边求傅里叶变换, 可得解析过程 $\tilde{X}(t)$ 的功率谱密度为

$$\begin{aligned}
 G_{\tilde{X}}(\omega) &= 2 \left\{ G_X(\omega) + jF \left[\hat{R}_X(\tau) \right] \right\} \\
 &= 2 \left\{ G_X(\omega) + j[-j \operatorname{sgn}(\omega) G_X(\omega)] \right\} \\
 &= 2 [G_X(\omega) + \operatorname{sgn}(\omega) G_X(\omega)] \\
 &= \begin{cases} 4G_X(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{100}$$

上式表明, 解析过程的功率谱密度只存在于正频域, 即它是单边带的功率谱密度其强度等于原实过程功率谱密度强度的 4 倍。 $G_X(\omega) \leftrightarrow G_X(\omega)$ 的关系如图 14 所示。

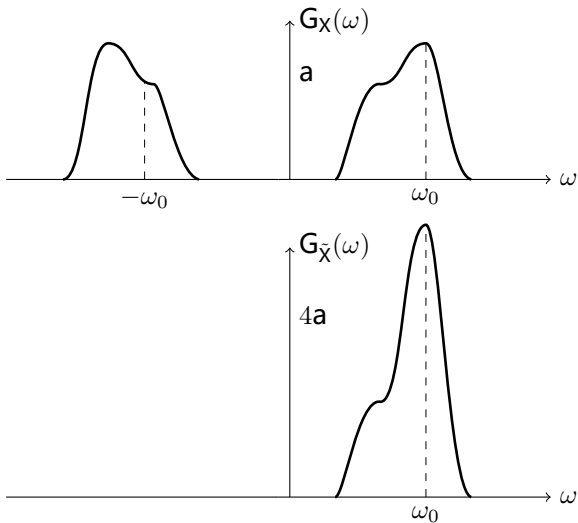


图 14: 解析过程的功率谱

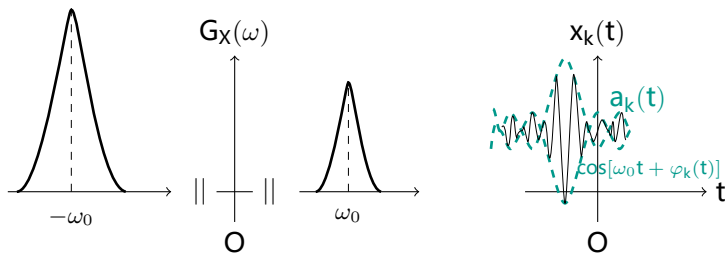


图 15: 窄带随机过程

由于 $a_k(t)$, $\varphi(t)$ 相对 $\cos \omega_0 t$ 来说是慢变化的时间函数, 所以 $A(t)$, $\Phi(t)$ 相对常数来说就是慢变化的随机过程。于是, 我们就可以把窄带随机过程看成是一个随机调幅和随机调相的准正弦振荡。

随机信号分析

窄带随机过程 X 是平稳过程下的统计特性 (复指数形式)

(1) 自相关函数

$$\begin{aligned}
 R_X(\tau) &= E \left[\tilde{X}^*(t) \tilde{X}(t + \tau) \right] \\
 &= E \left[M^*(t) e^{-j\omega_0 t} M(t + \tau) e^{j\omega_0 (t + \tau)} \right] \\
 &= E \left[M^*(t) M(t + \tau) \right] e^{j\omega_0 \tau} \\
 &= R_M(\tau) e^{j\omega_0 \tau}.
 \end{aligned} \tag{105}$$

利用傅里叶变换对的结论 $R_M(\tau) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} G_M(\omega)$, 则有

因为 $R_{\tilde{x}}(\tau) = 2 \left[R_x(\tau) + j\hat{R}_x(\tau) \right]$, 可得

由上式解得

此得出 $X(t)$ 与 $\tilde{X}(t)$ 及 $M(t)$ 之间在频域上的关系, 如图 17 所示。

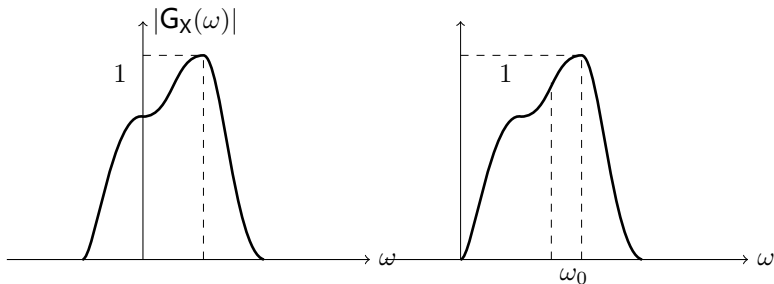


图 16: 窄带随机过程的功率谱

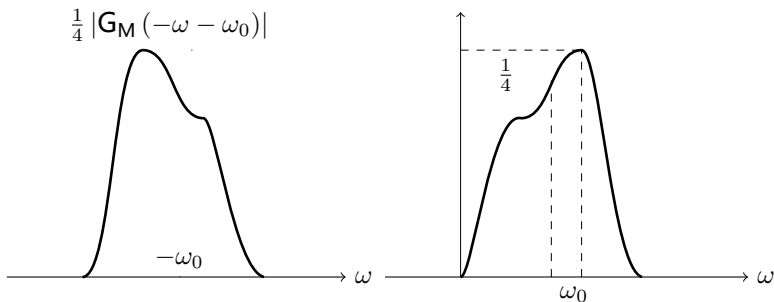


图 17: 窄带随机过程的功率谱

统计分析的对象是随机函数。为了更方便的对窄带随机过程进行统计分析, 先将窄带随机过程中的随机函数与非随机函数以不同的因式分解开, 故有

$$\begin{aligned}
 X(t) &= A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)] \\
 &= A(t) \cos \Phi(t) \cos \omega_0 t - A(t) \sin \Phi(t) \sin \omega_0 t \\
 &= A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t
 \end{aligned} \tag{109}$$

上式中, $\cos \omega_0 t$ 和 $\sin \omega_0 t$ 都是非随机函数, 而随机函数为

$$\begin{cases} A_c(t) = A(t) \cos \Phi(t) \\ A_s(t) = A(t) \sin \Phi(t) \end{cases} \tag{110}$$

若将窄带过程的复数形式分解为

$$M(t) = [A(t) \cos \Phi(t) + jA(t) \sin \Phi(t)] = A_c(t) + jA_s(t) \quad (111)$$

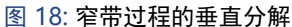
$\tilde{X}(t)$ 中的随机分量是 $\tilde{X}(t)$, 而 $\tilde{X}(t)$ 又可分解为

$$M(t) = [A(t) \cos \Phi(t) + jA(t) \sin \Phi(t)] = A_c(t) + jA_s(t) \quad (112)$$

其中

$$\begin{cases} A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)} \\ \Phi(t) = \tan^{-1} \frac{A_s(t)}{A_c(t)} = \arctan \frac{A_s(t)}{A_c(t)} \end{cases} \quad (113)$$

可见, 窄带随机过程 $X(t)$ 的包络过程的垂直分解 $A(t)$, 相位 $\Phi(t)$ 完全可由 $A_c(t), A_s(t)$ 确定。且 $A_c(t), A_s(t)$ 是一对在几何上正交的分量。如图 18 所示。



为了与统计意义上的“正交”有所区别,今后我们把几何意义上的“正交”改称为“垂直”,称 $A_c(t), A_s(t)$ 为一对垂直分量。

$X(t)$, $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 之间的函数关系的导出

$X(t)$ 和 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 之间的函数关系

$$\begin{cases} X(t) = A_c(t) \cos \omega_0(t) - A_s(t) \sin \omega_0 t \\ \hat{X}(t) = A_c(t) \sin \omega_0(t) + A_s(t) \cos \omega_0 t \end{cases} \quad (114)$$

$$\begin{cases} A_c(t) = X(t) \cos \omega_0(t) + \hat{X}(t) \sin \omega_0 t \\ A_s(t) = \hat{X}(t) \cos \omega_0(t) - X(t) \sin \omega_0 t \end{cases} \quad (115)$$

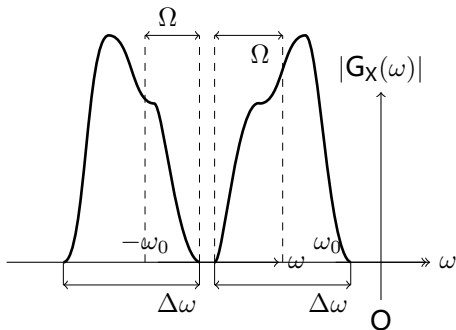


图 19: 零均值平稳窄带实随机过程的频谱

这里 Ω 和 $\Delta\omega$ 皆为正实常数, $\Delta\omega \ll \omega_0$ 。

$A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 这对垂直分量的性质

1. $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 均为实随机过程。
2. $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 的期望 $A(t)$, $A(t)$ 的期望均为 0, 即满足

$$E[A_c(t)] = E[A_s(t)] = 0. \quad (117)$$

3. $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 的自相关函数

- ① $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 各自平稳, 它们的自相关函数为

$$\begin{aligned}
 R_{A_c}(\tau) &= R_{A_s}(\tau) \\
 &= R_X(\tau) \cos \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \sin \omega_0 \tau.
 \end{aligned} \quad (118)$$

4. $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 的功率谱密度

$$G_{A_c}(\omega) = G_{A_s}(\omega) = L_p [G_X(\omega - \omega_0) + G_X(\omega + \omega_0)]. \quad (122)$$

其中 $L_p[\cdot]$ 表示一低通滤波器。

证: 由于

$$\begin{aligned}
 R_{A_c}(\tau) &= R_X(\tau) \cos \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \sin \omega_0 \tau \\
 &= \frac{1}{2} R_X(\tau) [e^{j\omega_0 \tau} + e^{-j\omega_0 \tau}] + \frac{1}{2j} \hat{R}_X(\tau) [e^{j\omega_0 \tau} - e^{-j\omega_0 \tau}].
 \end{aligned} \quad (123)$$

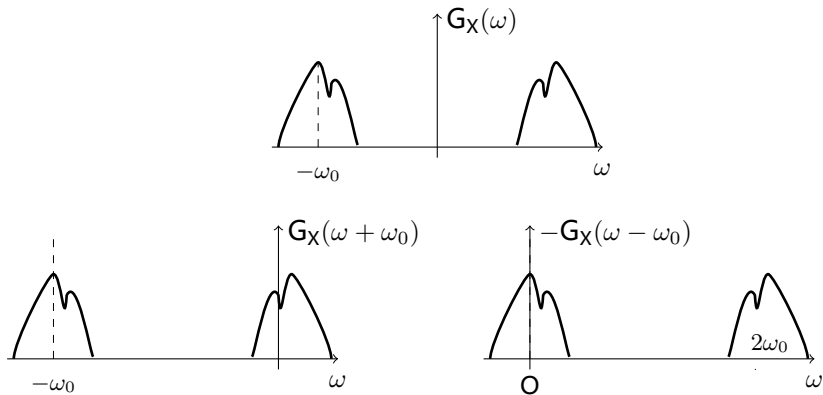
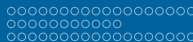
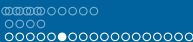


图 20: 垂直分量的功率谱密度

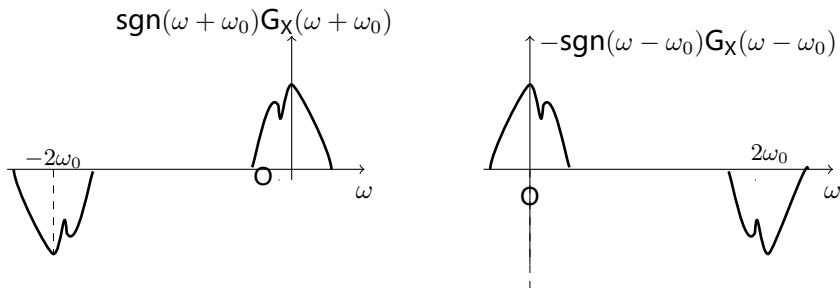


图 21: 垂直分量的功率谱密度

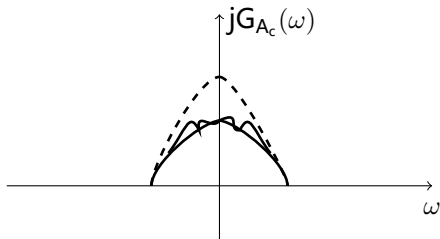


图 22: 垂直分量的功率谱密度

5. $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 的互相关函数

① $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 联合平稳, 它们的互相关函数为

$$\begin{cases} R_{A_c A_s}(\tau) = -R_X(\tau) \sin \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \cos \omega_0 \tau \\ R_{A_s A_c}(\tau) = R_X(\tau) \sin \omega_0 \tau - \hat{R}_X(\tau) \cos \omega_0 \tau \\ R_{A_s A_s}(\tau) = -R_{A_c A_c}(\tau) \end{cases} \quad (126)$$

② 互相关函数 $R_{A_c A_s}(\tau)$ 和 $R_{A_s A_c}(\tau)$ 均是 τ 的奇函数

$$\begin{cases} R_{A_c A_s}(\tau) = -R_{A_c A_s}(-\tau) \\ R_{A_s A_c}(\tau) = -R_{A_s A_c}(-\tau) \end{cases} \quad (127)$$

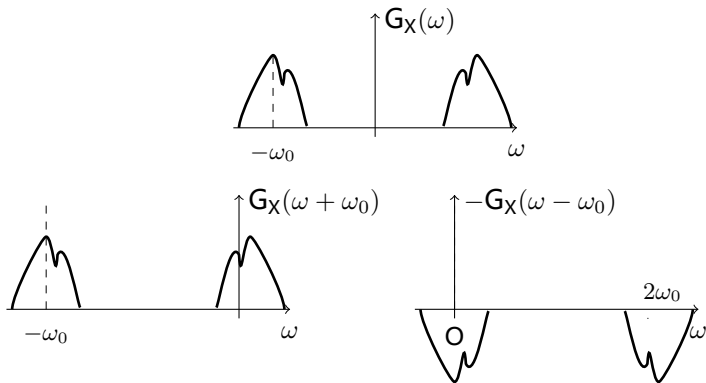


图 23: 垂直分量的互谱密度



◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ▶ ↺ 🔍 ↻

$$G_{A_r A_n}(\omega) = 0. \quad (137)$$

由上式可推出, 对任意 τ 值

$$R_{A_{A_k}}(\tau) = 0. \quad (138)$$

说明当 $X(t)$ 具有对称于的功率谱密度时, 随机过程 $A_c(t), A_s(t)$ 正交, 此处正交是指随机过程正交, 当然可以推出 $A_c(t), A_s(t)$ 在同一时刻也是正交的。

由于 $A_c(t), A_s(t)$ 的均值皆为 0, 同样可以证明: 当 $X(t)$ 具有对称于 m 的功率谱密度时, 两个随机过程 $A_c(t), A_s(t)$ 互不相关窄带随机过程 $X(t)$ 的自相关函数仿照上述性质的证明方法, 可以证明 (过程略)

$$R_X(\tau) = R_{A_e}(\tau) \cos \omega_0 \tau - R_{A_e A_s}(\tau) \sin \omega_0 \tau. \quad (139)$$

目录

- 1 随机过程的联合平稳
 - 希尔伯特变换的性质
 - 举例
- 2 高频窄带信号的复指数形式
 - 高频窄带信号通过窄带系统
 - 随机过程的解析形式及其性质
- 3 窄带随机过程
 - 窄带随机过程的“垂直”分解
 - 窄带随机过程的统计分析
- 4 窄带高斯过程包络与相位的分布
 - 包络和相位各自的二维概率分布
 - 随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布
- 5 窄带高斯过程包络平方的概率分布
 - 卡方分布和非中心卡方分布
 - 卡方分布的性质
- 6 窄带高斯过程包络平方的概率分布

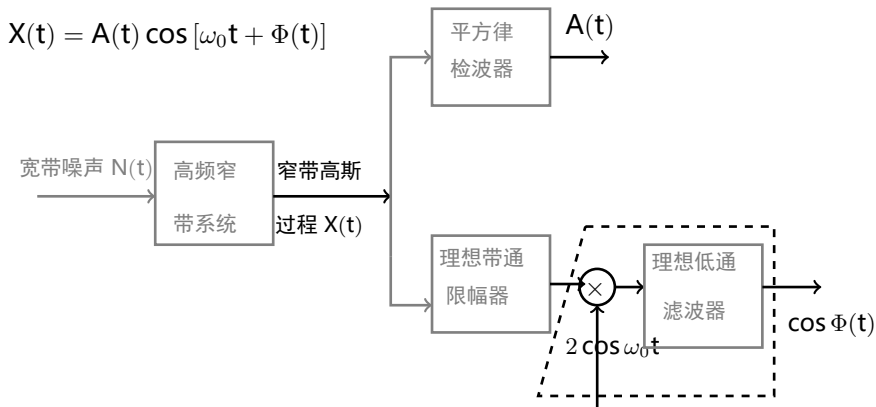


图 26: 窄带高斯过程的包络与相位

若将 $X(t)$ 送入一个相位检波器, 便可检测出 $X(t)$ 的相位信息, 如图 27 所示。

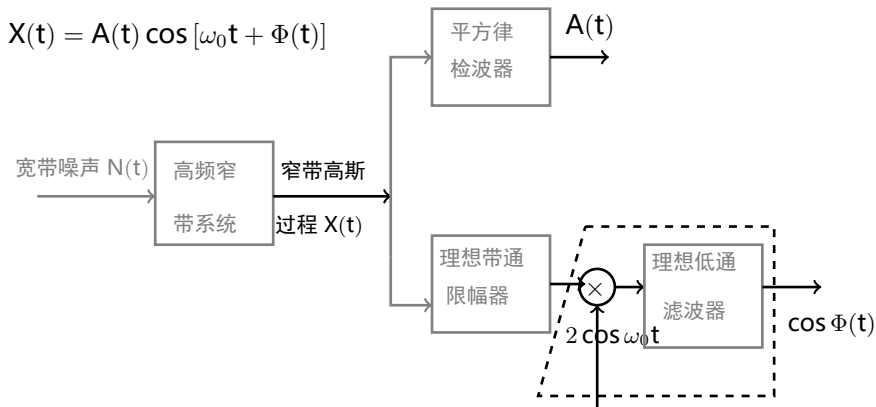


图 27: 窄带高斯过程的包络与相位

包络和相位的一维概率分布

例 .1

设 $X(t)$ 是一个窄带平稳高斯实过程, 具有零均值和方差 2。现求其包络 $A(t)$ 和 $\Phi(t)$ 的一维概率密度。

任一给定的时刻, 对 $A(t)$ 和 $\Phi(t)$ 采样, 便可得到随机变量 A_t 和 Φ_t 。求 $X(t)$ 包络 $A(t)$ 和 $\Phi(t)$ 的一维概率密度就是求 A_t 和 Φ_t 的概率密度 $f_A(a_i)$ 和 $f_\varphi(\varphi)$ 。

则 A_t, Φ_t 和 A_{ct}, A_{st} 满足

$$\begin{cases} A_t = g_1(A_{ct}, A_{st}) = \sqrt{A_{ct}^2 + A_{st}^2} \\ \Phi_t = g_2(A_{ct}, A_{st}) = \arctan \frac{A_{st}}{A_{ct}} \end{cases} \quad (143)$$

其中 A_{ct} 和 A_{st} 为垂直分量 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 在固定时刻的采样, 也都是随机变量。

则反变换关系为

$$\begin{cases} A_{ct} = h_1(A_t, \Phi_t) = A_t \cos \Phi_t \\ A_{st} = h_2(A_t, \Phi_t) = A_t \sin \Phi_t \end{cases} \quad (144)$$

求解思路

① 首先根据已知的窄带高斯过程垂直分量 $A_c(t), A_s(t)$ 的统计特性, 来研究 A_{ct}, A_{st} 的统计特性, 从而得到 $A_{ct}A_{st}$ 的联合概率密度 $f_{A_c A_s}(a_{ct}, a_{st})$ 。

② 从 f_{A_C} 和 $A_S(a_{ct}, a_{st})$ 出发, 利用雅可比变换得到 A_t, Φ_t 的联合概率密度 $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$ 。

③ 最后对联合概率密度 $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$ 积分, 求边缘概率密度 $f_A(a_t)$ 和 $f_\Phi(\varphi_i)$ 。

1. 求 $f_{A_e A_s}(a_{ct}$

首先根据已知的窄带高斯过程垂直分量 $A_c(t), A_s(t)$ 的统计特性, 来研究 A_{ct}, A_s 以下的统计特性, 从而得到 A_{ct}, A_{st} 的联合概率密度 $f_{A_c A_s}(a_{ct}, a_{st})$ 。

1° A_{ct} 和 A_{st} 都是高斯随机变量

已知 $X(t)$ 是一个平稳高斯过程, 由于 $X(t)$ 是 $\hat{X}(t)$ 的线性变换, 所以 $X(t)$ 也是平稳高斯过程。 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 均为 $X(t)$ 和 $\hat{X}(t)$ 的线性组合, 故 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 也是平稳高斯过程, 所以 A_{ct} 和 A_{st} 均为高斯变量。

2° A_{ct} 和 A_{st} 的均值皆为零

根据 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 的性质, 有 $E[A_c(t)] = E[A_s(t)] = 0$, 所以

$$E[A_{ct}] = E[A_{st}] = 0 \quad (145)$$

根据 $A_c(t), A_s(t)$ 的性质, 有 $\sigma_{A_c}^2 = \sigma_{A_s}^2 = \sigma_X^2$, 所以

$$\sigma_{A_c}^2 = \sigma_{A_s}^2 = \sigma_X^2 = \sigma^2. \quad (146)$$

根据 $A_c(t), A_s(t)$ 的性质可知, 同一时刻的两个状态互不相关, 满足 $C_{A_c A_s}(0) = 0$ 。即 A_{ct}, A_{st} 互不相关。而对于高斯随机变量来说, 互不相关与统计独立等价, A_{ct}, A_{st} 相互独立

根据以上的性质可知, A_{ct} 和 A_{st} 是均值皆为零, 方差皆为 σ^2 的高斯变量, 且相互独立。

其联合概率密度

$$\begin{aligned}
 f_{A_c A_s}(a_{ct}, a_{st}) &= f_{A_c}(a_{ct}) f_{A_s}(a_{st}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{a_{ct}^2}{2\sigma^2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{a_{st}^2}{2\sigma^2}\right] \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{a_{ct}^2 + a_{st}^2}{2\sigma^2}\right].
 \end{aligned}
 \tag{147}$$

2. 求 $f_{A\Phi}$

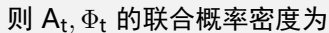
从 $f_{A_c A_s}(a_{ct}, a_{st})$ 出发, 利用雅可比变换得 A_t, Φ_t 的联合概率密度 $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$ 。

雅可比变换结果

$$f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) = |J| f_{A_c A_s}(a_t \cos \varphi_t, a_t \sin \varphi_t), \quad (148)$$

其中, 雅可比行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial a_t} & \frac{\partial h_1}{\partial \varphi_t} \\ \frac{\partial h_2}{\partial a_t} & \frac{\partial h_2}{\partial \varphi_t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_t & -a_t \sin \varphi_t \\ \sin \varphi_t & a_t \cos \varphi_t \end{vmatrix} = a_t \geq 0. \quad (149)$$



由上式可见, A_t 和 Φ_t 的联合概率密度 $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$ 与 Φ_t 无关。

③ 求 $f_A(a_t)$ 和 $f_\Phi(\varphi_i)$

最后对 A_t, Φ_t 的联合概率密度 $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$ 积分, 求边缘概率密度 $f_A(a_i)$ 和 $f_\Phi(\varphi_i)$ 。

① A_t 的概率密度

$$\begin{aligned}
 f_A(a_t) &= \int_0^{2\pi} f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) d\varphi_t \\
 &= f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\varphi_t \\
 &= \frac{a_t}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{a_t^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad a_t \geq 0.
 \end{aligned} \tag{151}$$

上式给出了包络 $A(t)$ 的一维概率密度表达式通常称它为瑞利概率密度或简称瑞利分布。

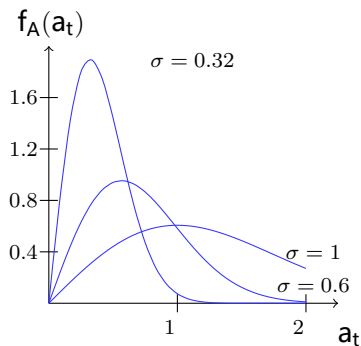


图 28: 瑞利分布

② Φ_t 的概率密度

$$f_{\phi}(\varphi_l) = \int_0^{\infty} f_{A\Phi}(a_t, \varphi_l) da_t = \frac{1}{2\pi}, 0 \leq \varphi_l \leq 2\pi. \quad (152)$$

可见, 相位 $\Phi(t)$ 的一维概率密度为 $(0, 2\pi)$ 区间上的均匀分布。

$f_{A\Phi}$ 的计算

③ 由 A_t, Φ_t 的概率密度表达式, 易得

$$f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) = f_A(a_t) f_{\Phi}(\varphi_t). \quad (153)$$

上式说明, 随机变量 $A_t \Phi_t$ 相互独立, 即随机过程 $A(t) \rightleftharpoons \Phi(t)$ 在同一时刻相互独立。但应注意, 这并不意味着随机过程 $A(t) \rightleftharpoons \Phi(t)$ 相互独立。


$$\begin{cases} X(t_1) = A(t_1) \cos[\omega_0 t_1 + \Phi(t_1)] \\ \quad = A_c(t_1) \cos \omega_0 t_1 - A_s(t_1) \sin \omega_0 t_1 \\ X(t_2) = A(t_2) \cos[\omega_0 t_2 + \Phi(t_2)] \\ \quad = A_c(t_2) \cos \omega_0 t_2 - A_s(t_2) \sin \omega_0 t_2 \end{cases} \quad (154)$$

为了便于表示, 把包络 $A(t)$ 在 t_1, t_2 时刻采样的随机变量 $A(t_1), A(t_2)$ 简记为 A_1, A_2 。

把相位 $\Phi(t)$ 在 t_1, t_2 时刻采样的随机变量 $\Phi(t_1), \Phi(t_2)$ 简记为中 Φ_1, Φ_2 ;

把垂直分量 $A_c(t)$ 在 t_1, t_2 时刻采样的随机变量 $A_c(t_1), A_c(t_2)$ 简记为 A_{c1}, A_{c2} ;

垂直分量 $A_s(t)$ 在 t_1, t_2 时刻采样的随机变量 $A_s(t_1), A_s(t_2)$ 简记为 A_{s1}, A_{s2} 。

现在求随机过程 $A(t)$ 和 $\Phi(t)$ 各自的二维概率密度 $f_A(a_1, a_2)$ 和 $f_\Phi(\varphi_1, \varphi_2)$ 。

1. 求 $f_{A_c A_s}$

由上已知 $A_c(t), A_s(t)$ 都是平稳高斯过程, 具有零均值和相同的方差 σ^2 。因此, 可得 $A_{c1}, A_{s1}, A_{c2}, A_{s2}$ 为同分布的高斯变量, 具有相同的零均值和相同的方差 σ^2 。现在, 我们讨论一种最简单, 也是实际中最常见的情况, 即假定窄带随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度 $G_X(\omega)$ 关于载波频率偶对称, 如图 25 所示。

根据 2 节的分析可知, 两个随机过程 $A_c(t), A_s(t)$ 正交且互不相关, 满足 $R_{A_c A_s}(\tau) = 0$, 皆为高斯过程, 则两个过程 $A_c(t), A_s(t)$ 是统计独立的。所以四维高斯变量 (A_{c1} 和 A_{s1}, A_{c2}, A_{s2} 的联合概率密度。

二维概率密度表示

二维高斯变量 (A_{e1}, A_{s2}) 的协方差矩阵为

$$\begin{aligned}
 C &= \begin{bmatrix} C_{A_{e1}A_{e1}} & C_{A_{e1}A_{s2}} \\ C_{A_{s2}A_{e1}} & C_{A_{s2}A_{s2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{A_c}(0) & C_{A_c}(\tau) \\ C_{A_c}(-\tau) & C_{A_c}(0) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sigma^2 & R_{A_c}(\tau) \\ R_{A_c}(\tau) & \sigma^2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{155}$$

上式应用了平稳高斯过程 $A_c(t)$ 的 $C_{A_c}(\tau) = R_{A_c}(\tau)$ 和 $C_{A_c}(0) = \sigma^2$ 的性质。



包络和相位各自的二维概率分布

因为二维高斯变量 (X, Y) 的联合概率密度形式为

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2 - C_{XY}^2}} \times \exp \left[- \frac{\sigma_Y^2 (x - m_X)^2 - 2C_{XY} (x - m_X) (y - m_Y)}{2 (\sigma_X^2 \sigma_Y^2 - C_{XY}^2)} + \frac{\sigma_X^2 (y - m_Y)^2}{2 (\sigma_X^2 \sigma_Y^2 - C_{XY}^2)} \right] \quad (156)$$

所以二维高斯变量 (A_{c1}, A_{c2}) 的联合概率密度为

$$\begin{aligned}
 f_{A_c}(a_{c1}, a_{c2}) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^4 - R_{A_c}^2(\tau)}} \exp \left[-\frac{\sigma^2 a_{c1}^2}{2[\sigma^4 - R_{A_c}^2(\tau)]} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2R_{A_c}(\tau)a_{c1}a_{c2} + \sigma^2 a_{c2}^2}{2[\sigma^4 - R_{A_c}^2(\tau)]} \right].
 \end{aligned}
 \tag{157}$$

二维高斯变量 (A_{s1} 和 A_{s2} 的联合概率密度

应用性质 $R_{A_c}(\tau) = R_A(\tau)$, 可得四维高斯变量 ($A_{c1}, A_{c2}, A_{s1}, A_{s2}$) 的联合概率密度为

$$\begin{aligned}
 f_{A_c A_s}(a_{c1}, a_{s1}, a_{c2}, a_{s2}) &= f_{A_c}(a_{c1}, a_{c2}) f_{A_s}(a_{s1}, a_{s2}) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2 [\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \exp \left[-\frac{\sigma^2 (a_{c1}^2 + a_{c2}^2 + a_{s1}^2 + a_{s2}^2)}{2 [\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2R_{A_c}(\tau) (a_{c1}a_{c2} + a_{s1}a_{s2})}{2 [\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \right].
 \end{aligned} \tag{158}$$

四维随机变量 $(A_1$

$$\begin{aligned}
 f_{A\Phi}(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2) &= |J| f_{A_c A_s}(a_{c1}, a_{s1}, a_{c2}, a_{s2}) \\
 &= \begin{cases} \frac{a_1 a_2}{(2\pi)^2 [\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \exp \left[-\frac{\sigma^2 (a_1^2 + a_2^2) - 2R_{A_c}(\tau) a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{2 [\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \right] & a_1, a_2 \geq 0; 0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{160}$$

3. 求 $A(t)$ 和 $\Phi(t)$ 各自的二维联合概率密度 f_A 和 f_Φ

$$\begin{aligned}
 f_A(a_1, a_2) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{A\Phi}(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 \\
 &= \begin{cases} \frac{a_1 a_2}{[\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} I_0 \left\{ \frac{a_1 a_2 R_{A_c}(\tau)}{[\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \right\} \exp \\ \left\{ -\frac{\sigma^2(a_1^2 + a_2^2)}{2[\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \right\}, a_1, a_2 \geq 0 \end{cases} \quad (161)
 \end{aligned}$$

式 $I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[x \cos \varphi] d\varphi$, 是第一类零阶修正贝塞尔函数。

积分四维联合概率密度得边缘概率密度

$$f_{\Phi}(\varphi_1, \varphi_2) = \left\{ \frac{[\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]}{4\pi\sigma^2} \left[\frac{(1-\beta)^{\frac{1}{2}} + \beta(\pi - \arccos \beta)}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \right\}, 0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi. \quad (162)$$

其中

$$\beta = \frac{R_{A_c}(\tau)}{\sigma^2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (163)$$

若令 $q = \varphi_2$, 不难看出

$$f_{A\Phi}(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2) \neq f_A(a_1, a_2) f_{\Phi}(\varphi_1, \varphi_2). \quad (164)$$

这一特例说明, 窄带随机过程的包络 $A(t)$ 和相位 $\Phi(t)$ 彼此不是独立的。

$$\begin{cases} A_e'(t) = a \cos \theta + A_c(t) \\ A_s'(t) = a \sin \theta + A_s(t) \end{cases} \quad (169)$$

由前面的结论可知, $A'_c(t)$, $A'_s(t)$ 都是低频限带过程, 它们随时间的变化 $\cos \omega_0 t$ 要缓慢得多。
若将 $X(t)$ 表示为准正弦振荡的形式

$$X(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)] \quad (171)$$

$$\begin{cases} A(t) = \sqrt{[A'_c(t)]^2 + [A'_s(t)]^2} \\ \Phi(t) = \arctan [A'_s(t)/A'_c(t)] \end{cases} \quad (172)$$

易知 $A(t), \Phi(t)$ 也都是慢变化随机过程。

$A(t), \Phi(t)$ 是 $A'_c(t), A'_s(t)$ 的一维概率密度

已知 $A(t), \Phi(t)$ 是 $A'_c(t), A'_s(t)$ 的函数, 而 $A'_c(t)$ 和 $A'_s(t)$ 又是随机相位 θ 的函数, 所以 $A(t), \Phi(t)$ 也是随机相位 θ 的函数。

1、求 $A'_c(t)$ 和 $A'_s(t)$

在给定 θ 条件下的二维条件概率密度 $f(a'_{ct}/\theta, a'_{st}/\theta)$
 给定 θ 值的条件下, t 时刻对 $A'_c(t), A'_s(t)$ 的采样用 $A'_{ct}/\theta, A'_{st}/\theta$ 表示。下面讨论 $A'_{ct}/\theta, A'_{st}/\theta$ 的统计特性。

随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布

1° A'_u/θ 和 A'_v/θ 都是高斯变量且相互独立

由 $A'_c(t)$, $A'_s(t)$ 和 $A_c(t)$, $A_s(t)$ 的关系, 可得

$$\begin{cases} A'_{ct} = a \cos \theta + A_{ct} \\ A'_{st} = a \sin \theta + A_{st} \end{cases} \quad (173)$$

因为 A_a, A_{st} 是独立高斯变量, 从上式便可推出 $A'_{ct}/\theta, A'_{st}/\theta$ 也是独立高斯变量。

2° 求 A_{ct} 的均值

由 A_{ct} , A_{stt} 的均值皆为零, 可得

3° A'_{ct}/θ 和 A'_{st}/θ 的方差

由 A_{ct}, A_{st} 的均值皆为 σ^2 , 可得

$$D[A'_c/\theta] = D[A'_{st}/\theta] = \sigma^2 \quad (174)$$

由上述三个结论可得 $A'_c(t), A'_s(t)$ 在给定条件下的二维条件概率密度为

$$f(\mathbf{a}'_a/\theta, \mathbf{a}'_{st}/\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[(\mathbf{a}'_{ct} - \mathbf{a} \cos \theta^2 + (\mathbf{a}'_{st} - \mathbf{a} \sin \theta)^2) \right] \right\}. \quad (175)$$

由上式可见, $f(a_t/\theta)$ 与 θ 无关, 就是无条件分布 $f_A(a_t)$ 。于是, 可得随相余弦信号加窄带高斯噪声的包络 $A(t)$ 的一维概率密度为

$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} I_0\left(\frac{aa_t}{\sigma^2}\right) \exp\left\{-\frac{a_t^2 + a^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad a_t \geq 0. \quad (178)$$

当随相余弦信号不存在, 即幅度 $a = 0$ 时, 式 (178) 便退化为式, 即 A_t 服从瑞利分布。所以, 称式 (178) 为广义瑞利概率密度或莱斯概率密度, 简称莱斯分布。 a/σ 表示信号幅度与窄带噪声标准差之比, 简称信噪比, 记为 r 。


$$l_0(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathbf{x}}} e^{\mathbf{x}}. \quad (181)$$
$$f_A(a_t) \approx \sqrt{\frac{a_t}{2\pi a}} \cdot \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\frac{(a_t - a)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad a_t \geq 0. \quad (182)$$

从上式中可见, 此概率密度在 $a_t = a$ 处取最大值。当 a_t 偏离 a 时, 它很快下降, 且 $\sqrt{\frac{a_t}{2\pi a}}$ 改变的速度比 $\exp\left\{-\frac{(a_t-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$ 的衰减速度要慢很多, 特别是在 a 的附近,

随机信号分析

随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布

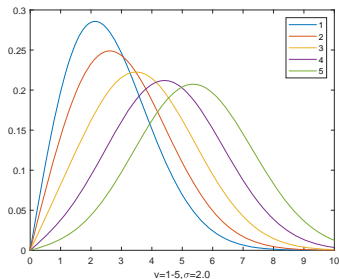


图 29: 莱斯分布在不同 ν 下的密度函数

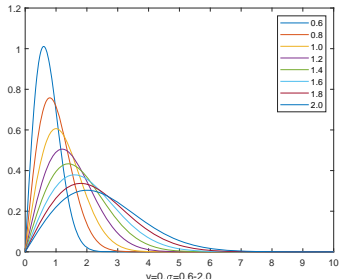


图 30: 莱斯分布在不同 σ 下的密度函数

4. 求相位 $\Phi(t)$ 的一维概率密度 $f_{\Phi}(\varphi/\theta)$

对二维条件概率密度积分, 得到边缘条件概率密度为

$$\begin{aligned}
 f_{\Phi}(\varphi_t/\theta) &= \int_0^{\infty} f(a_t/\theta, \varphi_t/\theta) da_t \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{a_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [a_t^2 + a^2 - 2aa_t \cos(\theta - \varphi_t)]\right\} a_t da_t \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{a_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [a_t^2 - 2aa_t \cos(\theta - \varphi_t) \right. \\
 &\quad \left. + (a \cos(\theta - \varphi_t))^2 - (a \cos(\theta - \varphi_t))^2 + a^2]\right\} da_t \\
 &= \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{a^2 - [a \cos(\theta - \varphi_t)]^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (184)
 \end{aligned}$$

在不同信噪比条件下 Φ_t 的概率密度形式

不存在信号的情况下 Φ_t 的概率密度形式

① 当信噪比 $r = 0$ 时,

$$f_{\Phi}(\varphi_t/\theta) = f_{\Phi}(\varphi_t) = \frac{1}{2\pi}. \quad (186)$$

这时, 随机相位为均匀分布。

② 当 $\theta - \varphi \ll 1$ 时, 即信噪比很大时

$$\begin{cases} \sin(\theta - \varphi_t) \approx \theta - \varphi_t \\ \cos(\theta - \varphi_t) \approx 1 \end{cases}. \quad (187)$$

可以看出, $f_{\Phi}(\varphi/\theta)$ 的图形关于对称, 并在 $\varphi_t = \theta$ 处取得最大值。



随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布

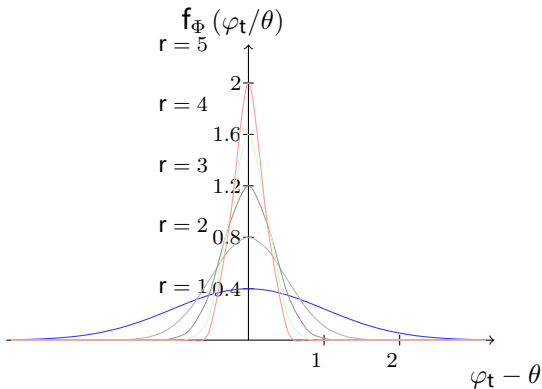
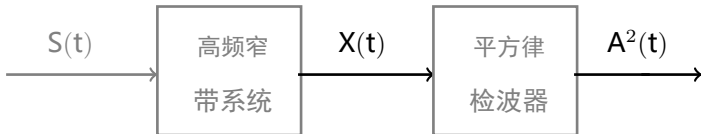


图 31: $f_{\Phi}(\varphi_2/\theta)$ 的分布

目录

- 1 随机过程的联合平稳
 - 希尔伯特变换的性质
 - 举例
- 2 高频窄带信号的复指数形式
 - 高频窄带信号通过窄带系统
 - 随机过程的解析形式及其性质
- 3 窄带随机过程
 - 窄带随机过程的“垂直”分解
 - 窄带随机过程的统计分析
- 4 窄带高斯过程包络与相位的分布
 - 包络和相位各自的二维概率分布
 - 随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布
- 5 窄带高斯过程包络平方的概率分布
 - 卡方分布和非中心卡方分布
 - 卡方分布的性质
- 6 窄带高斯过程包络平方的概率分布

在许多实际应用中,也常常在高频窄带滤波器的输出端接入一平方律检波器如图 36 所示,在平方律检波器输出端便得到 $X(t)$ 包络的平方 $A^2(t)$ 。



$$X(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)]$$

图 32: 平方律检波器

窄带高斯噪声包络平方的分布

前面已经推导出当窄带随机过程为一具有零均值、方差为 σ^2 的平稳高斯噪声时, 其包络 $A(t)$ 的一维概率密度为瑞利分布。

$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{a_t^2}{2\sigma^2} \right\}, a_t \geq 0. \quad (188)$$

应用求随机变量函数分布的方法, 很容易求出包络平方的一维概率密度。令

$$U(t) = A^2(t) \quad (189)$$

则在时刻 t 的采样有

$$\begin{cases} U_t = g(A_t) = A_t^2, & A_t \geq 0 \\ A_t = h(U_t) = \sqrt{U_t}, & U_t \geq 0. \end{cases} \quad (190)$$



其雅可比行列式为

$$J = \frac{1}{2\sqrt{U_t}} \quad (191)$$

于是包络平方的一维概率密度为

$$f_U(u_t) = |J|f_A(A_t) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left\{-\frac{u_t}{2\sigma^2}\right\}, \quad u_t \geq 0. \quad (192)$$

上式表明, U_t 服从指数分布。

实际中, 为了分析方便, 常应用归一化随机变量。令归一化随机变量 $V_t = \frac{U_t}{\sigma^2}$, 则可得到 V_t 的概率密度为

$$f_V(v_t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{v_t}{2}}, \quad v_t \geq 0. \quad (193)$$

余弦信号加窄带高斯噪声包络平方的概率分布

当窄带随机过程为余弦信号加窄带高斯噪声时, 即

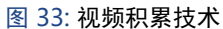
$$X(t) = a \cos \omega_0 t + N(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)], \quad (194)$$

其中 a, ω_0 为已知常数, $N(t)$ 为具有零均值、方差 σ^2 的窄带高斯噪声。根据前节分析的结果可知, $X(t)$ 的包络服从广义瑞利分布, 即

$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} I_0 \left(\frac{a a_t}{\sigma^2} \right) \exp \left\{ -\frac{a_t^2 + a^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad a_t \geq 0. \quad (195)$$

不难导出包络平方 $U^2 = A^2$ 的一维概率密度为

$$f_U(u_i) = \frac{1}{2\sigma^2} I_0 \left[\frac{a \sqrt{u_t}}{\sigma^2} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [u_t + a^2] \right\}, \quad u_t \geq 0. \quad (196)$$



$$f_X(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x_i^2}{2} \right\}. \quad (201)$$
$$\mathbf{f}_{Y_i}(\mathbf{y}_i) = |\mathbf{J}| \mathbf{f}_X(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi_i}} \mathbf{e}^{-\frac{y_i}{2}}, \quad y_i \geq 0. \quad (202)$$

$$\begin{aligned} Q_{Y_i}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_i}(y_i) e^{juy_i} dy_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y_i^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ - \left(\frac{1}{2} - ju \right) y_i \right\} dy_i = (1 - 2ju)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (203)$$
$$Q_V(u) = \prod_{i=1}^n Q_{Y_i}(u) = (1 - 2ju)^{-\frac{n}{2}} \quad (204)$$

$$f_V(v) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} 2^{-\frac{n}{2}} v^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{-\frac{x}{2}}, \quad v \geq 0. \quad (205)$$

式中, $\Gamma(\cdot)$ 为 Γ 函数, 满足

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{(\alpha-1)} e^{-t} dt. \quad (206)$$

称 $f_v(v)$ 为 n 个自由度的 χ^2 分布。图 38 画出了几个不同自由度下 $f_v(v)$ 的图形。

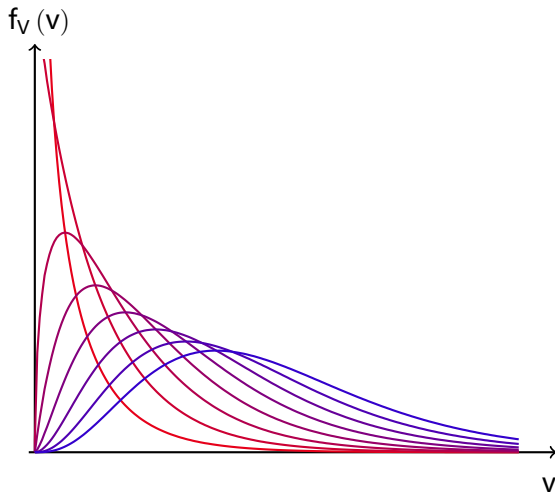
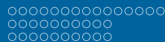


图 34: 几个不同自由度下的 χ^2 分布



又由于

$$\mathbf{N}(t) = n_e(t) \cos \omega_0 t - n_3(t) \sin \omega_0 t. \quad (210)$$

代入 $N(t)$ 得

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'(\mathbf{t}) &= \mathbf{s}(\mathbf{t}) + \mathbf{N}(\mathbf{t}) \\ &= [\mathbf{s} + \mathbf{n}_c(\mathbf{t})] \cos \omega_0 \mathbf{t} - [\mathbf{s} + \mathbf{n}_s(\mathbf{t})] \sin \omega_0 \mathbf{t} \\ &= \mathbf{A}_c(\mathbf{t}) \cos \omega_0 \mathbf{t} - \mathbf{A}_3(\mathbf{t}) \sin \omega_0 \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (211)$$

$$\mathbf{A}^2(\mathbf{t}) = \mathbf{A}_c^2(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_s^2(\mathbf{t}) = [\mathbf{s} + \mathbf{n}_\varepsilon(\mathbf{t})]^2 + [\mathbf{s} + \mathbf{n}_s(\mathbf{t})]^2. \quad (212)$$

仿照求 x^2 分布的方法, 加法器输出端的随机变量 V' 应为

$$V' = \sum_{i=1}^n (s + X_i)^2 = \sum_{i=1}^n Y \quad (213)$$

式中 X_i 为同分布的独立高斯变量 (均值为零、方差为 σ_2), s 为常数。

$$R_i = s + X_i. \quad (214)$$
$$f_{R_i}(r_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(r_i - s)^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (215)$$

$$\mathbf{f}_{\gamma_i}(\mathbf{y}'_i) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma^2\mathbf{y}'_i}} \left\{ \exp \left[-\frac{(\sqrt{\mathbf{y}'_i} - s)^2}{2\sigma^2} \right] + \exp \left[-\frac{(-\sqrt{\mathbf{y}'_i} - s)^2}{2\sigma^2} \right] \right\}. \quad (216)$$
$$f_{Y_i}(y'_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y'_i}} \exp\left\{-\frac{y'_i + s^2}{2\sigma^2}\right\} \cosh\left(\frac{s\sqrt{y'_i}}{\sigma^2}\right). \quad (217)$$

$$Q_{V'}(u) = \prod_{i=1}^n Q_{Y'_i}(u) = \left(\frac{1}{1 - j2\sigma^2 u} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{ns^2}{2\sigma^2} + \frac{ns^2}{2\sigma^2 (1 - j2\sigma^2 u)} \right\}. \quad (218)$$

$$f_{V'}(v') = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{v'}{\lambda'^2} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp \left\{ -\frac{\lambda' + v'}{2\sigma^2} \right\} I_{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{\sqrt{v'\lambda'}}{\sigma^2} \right), \quad v' \geq 0. \quad (219)$$

式中, $\lambda' = s^2 n$ 定义为非中心参量, $I_n(\cdot)$ 为第一类 n 阶修正贝塞尔函数。

图 39 画出了不同信噪比 λ 和样本数 n 情况下的非中心 χ^2 函数。

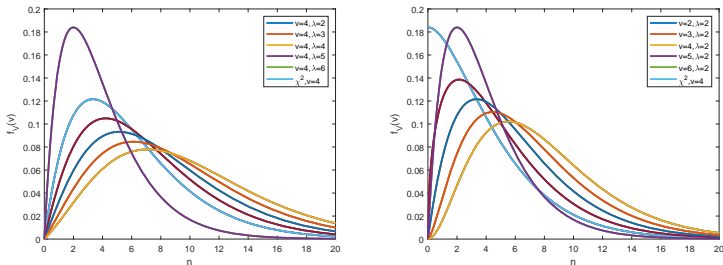


图 35: 非中心 χ^2 分布: a) $v = 4, \lambda = 2..6$, b) $v = 2..6, \lambda = 2$



$$N(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t. \quad (224)$$
$$\begin{aligned} \mathbf{N}'(t) &= \mathbf{s}(t) + \mathbf{N}(t) = \left[\mathbf{a}(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_e(t) \right] \cos \omega_0 t \\ &\quad - \left[\mathbf{a}(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_1(t) \right] \sin \omega_0 t \\ &= \mathbf{A}_c(t) \cos \omega_0 t - \mathbf{A}_s(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2(\mathbf{t}) &= \mathbf{A}_c^2(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_0^2(\mathbf{t}) \\ &= \left[\mathbf{a}(\mathbf{t}) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_c(\mathbf{t}) \right]^2 + \left[\mathbf{a}(\mathbf{t}) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_3(\mathbf{t}) \right]^2. \end{aligned} \quad (225)$$
$$Q' = \sum_{i=1}^n (s_i + X_i)^2 = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad (226)$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ▶ ↺ 🔍 ↻

随机信号分析

对式作傅里叶逆变换可得 Q' 的概率密度

$$f_{\alpha}(q') = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{q'}{\lambda'^2} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp \left\{ -\frac{\lambda' + q'}{2\sigma^2} \right\} \cdot I_{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{\sqrt{q'\lambda'}}{\sigma^2} \right), q' \geq 0. \quad (229)$$

将式 (281) 与式 (271) 对照, 可见, Q' 与 V' 具有相同的概率密度, 不同的只是此时的非中心参量 $\lambda' = \sum_{i=1}^n s_i^2$ 。

类似地, 定义归一化参量 $Q = Q'/\sigma^2$, 于是可得

$$Q = \sum_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{\sigma} + \frac{X_i}{\sigma} \right)^2 \quad (230)$$

•

$$Z_i = \frac{s_i}{\sigma} + \frac{X_i}{\sigma}.$$

则 $Z_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是具有均值 s_i/σ 和单位方差的独立高斯变量。于是, 可得具有 n 个自由度的非中心 χ^2 分布为

$$f_Q(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{\lambda} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} - \frac{q}{2} \right\} I_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{Q\lambda}). \quad (232)$$

式中 $\lambda = \sum_{i=1}^n s_i^2 / \sigma^2$ 为非中心参量。

不难证明, 两个统计独立的非中心 χ^2 随机变量之和仍为非中心 χ^2 随机变量。



若它们的自由度分别为 n_1 和 n_2 , 非中心参量为 λ_1 和 λ_2 , 则和变量的自由度为 $n = n_1 + n_2$, 非中心参量为 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ 。

例 .1

设图 26 中加至平方律检波器输入端的窄带随机过程 $X(t)$ 为

$$X(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta) + N(t), \quad (233)$$

其中 $a \cos(\omega_0 t + \theta)$ 为随相余弦信号, a 和 ω_0 为常数。 $N(t)$ 是零均值、方差为 σ^2 的稳窄带高斯噪声, 其功率谱关于 ω_0 偶对称。 $X(t)$ 经检波并作归一化处理以后, 独立采样 m 次, 求累加器输出端随机变量的概率密度及其参数。



解: 先将 $N(t)$ 表示为

$$N(t) = A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (234)$$

若用 $A(t)$ 表示窄带随机过程 $X(t)$ 的包络, 那么在平方律检波器的输出端, 可得到包络平方为

$$A^2(\mathbf{t}) = [a \cos \theta + A_c(\mathbf{t})]^2 + [a \sin \theta + A_0(\mathbf{t})]^2. \quad (235)$$

加法器输出端随机变量 V

$$V = \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^m (a \cos \theta + A_{ci})^2 + \sum_{i=1}^m (a \sin \theta + A_{ai})^2 \right], \quad (236)$$

式中 $A_{\sigma} = A_e(t_i)$ 和 $A_{si} = A_s(t_i)$ 分别表示 $A_e(t)$ 和 $A_s(t)$ 在 t_i 时刻的状态。

根据 $A_c(t), A_s(t)$ 的有关性质可知, 各个 A_{α}, A_{β} 是同分布的独立标准高斯变量。对照式 (272) 可知, 上式中两个和式分别是自由度为 m 的非中心 χ^2 变量。

非中心参量 λ_1 和 λ_2

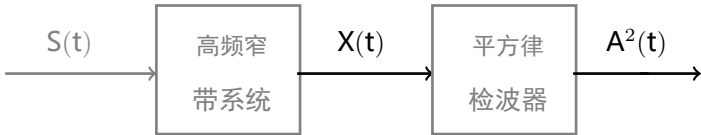
$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m (a \cos \theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2} \cos^2 \theta \\ \lambda_2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m (a \sin \theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2} \sin^2 \theta \end{cases} \quad (237)$$

由于这两个非中心 χ^2 随机变量也彼此独立, 因而它们的和变量 V 也是非中心 χ^2 随机变量, 自由度 $n = 2m$ 。

随机信号分析

6 窄带高斯过程包络平方的概率分布

在许多实际应用中,也常常在高频窄带滤波器的输出端接入一平方律检波器如图 36 所示,在平方律检波器输出端便得到 $X(t)$ 包络的平方 $A^2(t)$ 。



$$X(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)]$$

图 36: 平方律检波器

窄带高斯噪声包络平方的分布

前面已经推导出当窄带随机过程为一具有零均值、方差为 σ^2 的平稳高斯噪声时, 其包络 $A(t)$ 的一维概率密度为瑞利分布。

$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{a_t^2}{2\sigma^2} \right\}, a_t \geq 0. \quad (239)$$

应用求随机变量函数分布的方法, 很容易求出包络平方的一维概率密度。令

$$U(t) = A^2(t) \quad (240)$$

则在时刻 t 的采样有

$$\begin{cases} U_t = g(A_t) = A_t^2, & A_t \geq 0 \\ A_t = h(U_t) = \sqrt{U_t}, & U_t \geq 0. \end{cases} \quad (241)$$

雅可比行列式为

$$J = \frac{1}{2\sqrt{U_t}} \quad (242)$$

包络平方的一维概率密度

$$f_U(u_t) = |J|f_A(A_t) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left\{-\frac{u_t}{2\sigma^2}\right\}, \quad u_t \geq 0. \quad (243)$$

上式表明, U_t 服从指数分布。

余弦信号加窄带高斯噪声包络平方的概率分布

实际中, 为了分析方便, 常应用归一化随机变量。令归一化随机变量 $V_t = \frac{U_t}{\sigma^2}$, 则可得到 V_t 的概率密度为

$$f_V(v_t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{v_t}{2}}, v_t \geq 0. \quad (244)$$

当窄带随机过程为余弦信号加窄带高斯噪声时, 即

$$X(t) = a \cos \omega_0 t + N(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)], \quad (245)$$

其中 a, ω_0 为已知常数, $N(t)$ 为具有零均值、方差 σ^2 的窄带高斯噪声。

$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} I_0 \left(\frac{aa_t}{\sigma^2} \right) \exp \left\{ -\frac{a_t^2 + a^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad a_t \geq 0. \quad (246)$$

令 $V_t = \frac{U_t}{\sigma^2}$, 可得归一化随机变量 V 的概率密度函数为

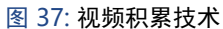
$$f_V(v_i) = \frac{1}{2} I_0 \left[\frac{\sqrt{v_t} a}{\sigma} \right] \exp \left\{ -\frac{v_t + a^2/\sigma^2}{2} \right\}, \quad v_t \geq 0. \quad (248)$$

在有些应用中, 例如在信号检测中, 为了改进检测性能, 经常采用所谓视频积累技术, 即对包络的平方进行独立采样后再积累, 如图 37 所示, 这时输出的随机变量习惯上记为 χ^2 , 它的概率密度习惯上称之为 χ^2 分布。

如图所示, 让一个具有零均值和方差 σ^2 的平稳窄带实高斯噪声 $N(t)$ 通过一平方律检波器, 而检波器输出的是 $N(t)$ 的包络平方 $A^2(t)$ 。

然后对随机过程 $A^2(t)$ 进行独立采样, 得到 m 个独立的随机变量 $A_i^2 = A^2(t_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 经归化以后送入累加器。

下面讨论累加器输出端随机变量 χ^2 的概率密度。为了避免混淆, 在下面的推导中, 用 V 来代替 χ^2 。



由于窄带过程 $N(t)$ 的包络 A 和它的一对垂直分量 $A_c(t), A_s(t)$ 有如下关

式中 $A_c(t), A_s(t)$ 是零均值、方差为 σ^2 的平稳高斯过程。

$A^2(t)$ 经采样后, 加法器的输出

式中 A'_{Ci}, A'_{Si} 是将 A_{Ci}, A_{Si} 归一化以后的随机变量。

由于 A'_{ci}, A'_{si} 都是同分布的高斯变量, 故上式又可表示为

$$V = \sum_{i=1}^{2m} X_i^2 \quad (251)$$

式中每一个 X_i 都是同分布的标准高斯变量 (零均值、方差为 1), 且各 X_i 相互独立。为了书写简单, 用 n 代替上式中的 $2m$, 可得

$$V = \sum_{i=1}^{2m} X_i^2. \quad (252)$$

于是, 求 V 的概率密度便归结为求 n 个独立同分布高斯变量平方和的概率密度为此, 首先求每一随机变量 X_i^2 的概率密度。

$$f_X(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x_i^2}{2} \right\}. \quad (253)$$
$$f_{Y_i}(y_i) = |J|f_X(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi_i}}e^{-\frac{y_i}{2}}, \quad y_i \geq 0. \quad (254)$$

从而得到 Y_i 的特征函数为

$$\begin{aligned} Q_{Y_i}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_i}(y_i) e^{juy_i} dy_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y_i^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ - \left(\frac{1}{2} - ju \right) y_i \right\} dy_i = (1 - 2ju)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (255)$$

由于 $V = \sum_{i=1}^n Y_i$, 利用特征函数的性质: 独立随机变量之和的特征函数等于各随机变量特征函数的乘积。便可得到 V 的特征函数为

$$Q_V(u) = \prod_{i=1}^n Q_{Y_i}(u) = (1 - 2ju)^{-\frac{n}{2}} \quad (256)$$

$$f_V(v) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} 2^{-\frac{n}{2}} v^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{-\frac{v}{2}}, \quad v \geq 0. \quad (257)$$
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{(\alpha-1)} e^{-t} dt. \quad (258)$$

性质 1

1° 两个独立的 χ^2 变量之和仍为 χ^2 变量。若它们各自的自由度分别为 n_1 和 n_2 , 则它们的和变量为具有 $(n_1 + n_2)$ 个自由度的 χ^2 分布

2° n 个自由度的 χ^2 变量的均值 $E[V] = n$, 方差 $D[V] = 2n$ 。

性质 2

2. 非中心 χ^2 分布

若窄带过程 $N'(t)$ 为余弦信号 $N'(t)$ 与窄带高斯噪声 $N(t)$ 之和, 则加法器输出的就是非中心 χ^2 分布。

设信号

$$s(t) = a \cos(\omega_0 t + \pi/4) \quad (259)$$

包络 a 为常数, 则有

$$\begin{aligned} s(t) &= a \cos \frac{\pi}{4} \cos \omega_0 t + a \sin \frac{\pi}{4} \sin \omega_0 t \\ &= a \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega_0 t + a \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (260)$$

$$N(t) = n_1(t) \cos \omega_0 t + n_2(t) \sin \omega_0 t \quad (262)$$

$$A^2(t) = A_c^2(t) + A_s^2(t) = [s + n_\varepsilon(t)]^2 + [s + n_s(t)]^2. \quad (264)$$

仿照求 χ^2 分布的方法, 加法器输出端的随机变量 V' 应为

$$V' = \sum_{i=1}^n (s + X_i)^2 = \sum_{i=1}^n Y, \quad (265)$$

式中 X_i 为同分布的独立高斯变量 (均值为零、方差为 σ_2^2), s 为常数。

Y'

$$f_{Y'}(y'_i) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma^2 y'_i}} \left\{ \exp \left[-\frac{(\sqrt{y'_i} - s)^2}{2\sigma^2} \right] + \exp \left[-\frac{(-\sqrt{y'_i} - s)^2}{2\sigma^2} \right] \right\}. \quad (268)$$

将上式中指数的平方项展开, 并利用双曲余弦函数 $2 \cosh(b) = e^s + e^{-s}$, 可得

$$f_{Y'}(y'_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y'_i}} \exp \left\{ -\frac{y'_i + s^2}{2\sigma^2} \right\} \cosh \left(\frac{s\sqrt{y'_i}}{\sigma^2} \right). \quad (269)$$

随机信号分析

$$f_{V'}(v') = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{v'}{\lambda'^2} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp \left\{ -\frac{\lambda' + v'}{2\sigma^2} \right\} I_{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{\sqrt{v'\lambda'}}{\sigma^2} \right), \quad v' \geq 0. \quad (271)$$

式中, $\lambda' = s^2 n$ 定义为非中心参量, $I_n(\cdot)$ 为第一类 n 阶修正贝塞尔函数。

其中变量 R 是均值为 s/σ 、方差为 1 的相互独立的高斯变量。

$$f_V(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\lambda} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} - \frac{v}{2} \right\} I_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{v\lambda}), \quad v \geq 0. \quad (273)$$

上式是 n 个自由度的非中心 χ^2 分布, 其中非中心参量 $\lambda = ns^2/\sigma^2$ 表示视频积累后的功率信噪比。

图 39 画出了不同信噪比 λ 和样本数 n 情况下的非中心 χ^2 函数。

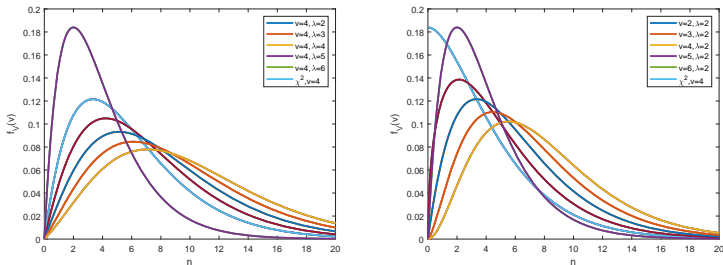


图 39: 非中心 χ^2 分布: a) $v = 4, \lambda = 2..6$, b) $v = 2..6, \lambda = 2$

给定信号

$$s(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \pi/4), \quad (274)$$

包络 $a(t)$ 为确定函数, 则有

$$\begin{aligned} s(t) &= a(t) \cos \frac{\pi}{4} \cos \omega_0 t + a(t) \sin \frac{\pi}{4} \sin \omega_0 t \\ &= a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega_0 t + a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (275)$$

代入 $N'(t)$ 得

$$N(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t. \quad (276)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'(t) &= \mathbf{s}(t) + \mathbf{N}(t) = \left[\mathbf{a}(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_e(t) \right] \cos \omega_0 t \\ &\quad - \left[\mathbf{a}(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_1(t) \right] \sin \omega_0 t \\ &= \mathbf{A}_c(t) \cos \omega_0 t - \mathbf{A}_s(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2(\mathbf{t}) &= \mathbf{A}_c^2(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_0^2(\mathbf{t}) \\ &= \left[\mathbf{a}(\mathbf{t}) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_c(\mathbf{t}) \right]^2 + \left[\mathbf{a}(\mathbf{t}) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_3(\mathbf{t}) \right]^2. \end{aligned} \quad (277)$$

在 $t_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 时刻对 $A^2(t)$ 进行独立的采样, 令 $s = a(t)$ 仿照求 χ^2 分布的方法, 加法器输出端的随机变量 Q' 应为

$$Q' = \sum_{i=1}^n (s_i + X_i)^2 = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad (278)$$

式中 s 是对信号包络 $a(t)$ 的第 i 次采样, 是确定值。

随机信号分析

例 .1

$$\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{a} \cos (\omega_0 \mathbf{t} + \theta) + \mathbf{N}(\mathbf{t}), \quad (285)$$

其中 $a \cos(\omega_0 t + \theta)$ 为随相余弦信号, a 和 ω_0 为常数。 $N(t)$ 是零均值、方差为 σ^2 的稳态窄带高斯噪声, 其功率谱关于 ω_0 偶对称。 $X(t)$ 经检波并作归一化处理以后, 独立采样 m 次, 求累加器输出端随机变量的概率密度及其参数。

解: 先将 $N(t)$ 表示为

$$N(t) = A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (286)$$

若用 $A(t)$ 表示窄带随机过程 $X(t)$ 的包络, 那么在平方律检波器的输出端, 可得到包络平方为

$$A^2(t) = [a \cos \theta + A_c(t)]^2 + [a \sin \theta + A_s(t)]^2. \quad (287)$$

于是, 加法器输出端随机变量 V 为

$$V = \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^m (a \cos \theta + A_{ci})^2 + \sum_{i=1}^m (a \sin \theta + A_{si})^2 \right], \quad (288)$$

式中 $A_{ci} = A_c(t_i)$ 和 $A_{si} = A_s(t_i)$ 分别表示 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 在 t_i 时刻的状态。

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m (a \cos \theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2} \cos^2 \theta \\ \lambda_2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m (a \sin \theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2} \sin^2 \theta \end{cases} \quad (289)$$

随机信号分析

非中心参量 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{ma^2}{\sigma^2}$

得到 V 的概率密度函数

$$f_V(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\lambda} \right)^{\frac{m-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} - \frac{v}{2} \right\} I_{m-1}(\sqrt{v\lambda}), \quad v \geq 0. \quad (290)$$

检波器输入端的功率信噪比

而非中心参量与自由度之比 $\lambda/n = a^2/2\sigma^2$, 正好是检波器输入端的功率信噪比。