

3

随机信号的频域分析

在信号与系统、信号处理、通信理论以及其他许多领域的理论与实际应用中，广泛应用傅里叶变换这一有效工具，对确定信号在时域上和频域上的状况进行分析。许多情况下，在时域中需要卷积积分运算的问题，放在频域中只需要乘法运算就可以解决，大大减少了运算量。那么是否也能应用傅里叶变换这一工具对随机过程进行频域分析，随机过程是否也有通常意义的“频谱”呢？下面就从理论上详细讨论随机过程的频域特性。

3.1 实随机过程的功率谱密度

在研究随机过程的频域特性之前，我们首先对傅里叶变换作一简单回顾。设给定信号 $s(t)$ 是时间 t 的非周期实函数，其傅里叶变换存在的条件为

1° $s(t)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 范围内满足狄利克雷条件。

2° $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$ (绝对可积) 的等价条件为 $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$ (信号 $s(t)$ 的总能量有限)。

若 $s(t)$ 满足上述条件，则有傅里叶变换对存在：

$$\text{(正变换) 频谱} \quad S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.1)$$

$$\text{(反变换) 信号} \quad s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.2)$$

或者说信号 $s(t)$ 的“频谱”存在。

工程技术上许多重要的时间函数的总能量是无限的。不能满足傅氏变换的条件，如正弦函数。由于随机过程样本函数的持续时间无限，其总能量也是无限的，不能满足傅

氏变换的条件, 随机过程样本函数的“频谱”不存在。所以, 随机过程没有通常意义的“频谱”存在。然而人们发现, 这类信号尽管总能量是无限的, 但它们的平均功率却是有限值。即随机过程样本函数平均功率满足傅里叶复换的条件, 随机过程样本函数平均功率的“频谱”存在——功率谱。

3.1.1 实随机过程的功率谱密度

1. 能量谱密度

对于实信号 $s(t)$, 由定义的傅里叶变换对, 可得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) S^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega.\end{aligned}\quad (3.3)$$

实信号 $s(t)$ 的频谱 $S(\omega)$ 一般是 ω 的复函数, $S^*(\omega) = S(-\omega)$ (“*”表示复共轭)。

由上述推导过程得

$$\int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.4)$$

$|S(\omega)|^2$ 在整个频域上的积分。因此被积函数 $|S(\omega)|^2$ 则称为 $s(t)$ 的能量谱密度。

2. 实随机信号的平均功率

若要将傅里叶变换应用于实随机过程, 必须对过程的样本函数做某些限制, 最简单的一种方法是应用截取函数, 如图 3-1 所示。

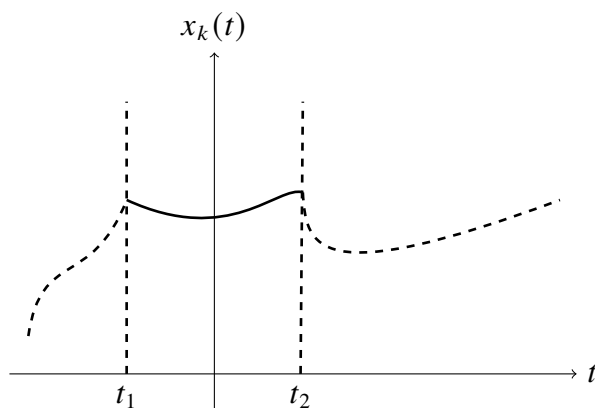


图 3-1 截取函数

在实随机过程 $X(t)$ 的样本函数 $X(t, \zeta_k) = x_k(t)$ 中, 任意截取 $2T$ 长的一段 $x_{kT}(t)$ 表示为

$$x_{kT}(t) = \begin{cases} x_k(t), & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \quad (3.5)$$

称 $x_{kT}(t)$ 为样本函数 $x_k(t)$ 的截取函数。当 T 为有限值时, 截取函数 $x_{kT}(t)$ 满足绝对可积条件, 其傅里叶变换存在, 即

$$X_{kT}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{kT}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T x_k(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.6)$$

$$x_{kT}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{kT}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.7)$$

可见, $\mathfrak{X}_{kT}(\omega) = \mathfrak{X}_T(\omega, \zeta_k)$ 为 $x_{kT}(t)$ 的频谱函数。据帕塞西尔等式, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_{kT}^2(t) dt = \int_{-T}^T x_k^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_{kT}(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.8)$$

可见, $x_{kT}(\omega) = X_T(\omega, \zeta_k)$ 为 $x_{kT}(t)$ 的频谱函数。据帕塞西尔等式, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_{kT}^2(t) dt = \int_{-T}^T x_k^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x_{kT}(\omega)|^2 d\omega \quad (3.9)$$

若随机过程 $X(t)$ 代表一噪声电压 (或电流), $\int_{-T}^T x_k^2(t) dt$ 表示噪声的一个样本 ζ 在时间 $(-T, T)$ 内消耗在 1Ω 电阻上的总能量这个总能量在 $(-T, T)$ 上求时间平均的极限为

$$P_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_k^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{X}_{kT}(\omega)|^2 d\omega, \quad (3.10)$$

则 P 表示随机过程的样本函数 $x(t)$ 消耗在 1Ω 电阻上的平均功率。一般称为随机过程样本函数 $x_k(t)$ 的平均 (时间平均) 功率。

由于样本 ζ 对应的样本函数 $x_k(t)$ 是个确定函数, 所以平均功率 P 是个值。

$$P_{\Delta}(\zeta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X^2(t, \zeta) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega, \zeta)|^2 d\omega, \quad (3.11)$$

其中 $X(t, \zeta) = X(t)$ 代表一个随机过程, $X_T(\omega, \zeta) = X_T(\omega)$ 代表随机过程的截取函数的频谱若对 $P(\zeta)$ 取统计平均则定义所得的确定值 P 为随机过程 $X(t)$ 的平均功率。

3. 功率谱密度

(1) 功率谱密度的定义

由随机过程 $X(t)$ 的平均功率的定义式, 右端的被积函数记为

$$G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|X_T(\omega)|^2], \quad (3.12)$$

则 $G_X(\omega)$ 在整个频域上的积分被定义为随机过程的平均功率。那么被积函数 $G_X(\omega)$ 则表示了随机过程 $X(t)$ 在不同频率上, 单位频带内消耗在 1Ω 电阻上的平均功率。

同理可得, 样本函数 $x(t)$ 的功率谱密度为

$$G_k(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |\mathfrak{X}_{kT}(\omega)|^2. \quad (3.13)$$

由于 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (\cdot) dt = \overline{(\cdot)}$, 因此平均功率和功率谱密度的相互关系也可表示为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt = \overline{E[X^2(t)]} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega; \quad (3.14)$$

即随机过程的平均功率, 可以通过对过程的均方值 $E[X^2(t)]$ 求时间平均来获得。

(2) 平稳过程的平均功率

若 $X(t)$ 为平稳过程, 均方值 $E[X^2(t)] = R(0)$ 为常数, 则平均功率可表示为

$$P = \overline{E[X^2(t)]} = \overline{R(0)} = R(0) = E[X^2(t)]. \quad (3.15)$$

(3) 各态历经过程的平均功率

由 $\overline{X(t, \zeta)} \stackrel{\text{a.e.}}{=} \overline{x_i(t)}$, 各态历经过程 $X(t)$ 的所有样本函数的时间平均都以概率 1 相同, 与 $\zeta \in \Omega$ 无关。因此可以由式 (3.10), 式 (3.11) 推出

$$(\text{随机变量}) P_{\Delta}(\zeta) = \overline{X^2(t, \zeta)} \stackrel{\text{a.e.}}{=} \overline{x_k^2(t)} = P_k (\text{常数}) \quad (3.16)$$

而

$$P = E[P_{\Delta}(\zeta)] \stackrel{\text{a.e.}}{=} E[P_k] = P_k \quad (3.17)$$

即各态历经过程 $X(t)$ 的平均功率 P 与其样本函数的平均功率 P 以概率 1 相等。所以, 各态历经过程 $X(t)$ 的平均功率 P 可以由一个样本函数的平均功率 P_k 来代替。

(4) 各态历经过程的功率谱密度

同理, 由各态历经性, 可以推出

$$G_X(\omega, \zeta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(\omega, \zeta)|^2 \stackrel{\text{a.e.}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |\mathfrak{X}_{kT}(\omega)|^2 = G_k(\omega). \quad (3.18)$$

因此有

$$G_X(\omega) = E[G_X(\omega, \zeta)] \stackrel{\text{v}}{=} E[G_k(\omega)] = G_k(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |\mathfrak{X}_{kT}(\omega)|^2. \quad (3.19)$$

可得结论:

① 各态历经过程的平均功率 P 与其样本函数的平均功率 P 以概率 1 相等。

② 各态历经过程的功率谱密度 $G_X(\omega)$ 与其样本函数的功率谱密度 $G_k(\omega)$ 以概率 1 相等。

 **注 3.1.** 必须指出, $G_X(\omega)$ 仅仅描述了随机过程 $X(t)$ 的平均功率按频率分布的情况。

综上所述, 功率谱密度 $G_X(\omega)$ 是从频率角度描述随机过程 $X(t)$ 统计规律的最主要的数字特征。但必须指出, $G_X(\omega)$ 仅仅描述了随机过程 $X(t)$ 的平均功率按频率分布的情况。

(5) 实随机过程功率谱密度的性质

功率谱密度是随机过程在频域中主要的统计特征, 它具有下列重要性质

1° 功率谱密度非负, 满足

$$G_X(\omega) \geq 0. \quad (3.20)$$

2° 功率谱密度是 ω 的实函数, 满足

$$G_X^*(\omega) = G_X(\omega). \quad (3.21)$$

3° 功率谱密度是 ω 的偶函数, 满足

$$G_X(\omega) = G_X(-\omega). \quad (3.22)$$

证: 根据傅里叶变换的性质, 当截取函数 $x_{iT}(t)$ 为 t 的实函数时, 其频谱有

$$\mathfrak{X}_{iT}(\omega) = \mathfrak{X}_{iT}^*(-\omega) \Rightarrow X'_{iT^*}(\omega) = \mathfrak{X}_{iT}(-\omega). \quad (3.23)$$

所以, 对于过程 $X(t)$ 截尾函数的频谱有

$$X_T(\omega) = X'_{T^*}(-\omega) \Rightarrow X'_{T^*}(\omega) = X_T(-\omega).$$

代入功率谱的定义式有

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|X_T(\omega)|^2] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[X_T^*(\omega) X_T(\omega)] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[X_T(-\omega) X_T^*(-\omega)] = G_X(-\omega). \end{aligned} \quad (3.24)$$

4° 平稳过程的功率谱密度可积, 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega < \infty. \quad (3.25)$$

证: 平稳过程的平均功率

$$P = E[X^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega. \quad (3.26)$$

由平稳过程的第三个条件可知, 它的均方值有根, 满足 $E[X^2(t)] < \infty$, 得证。

5° 若平稳过程的功率谱密度可以表示为有理函数形式

$$G_X(\omega) = G_0 \frac{\omega^{2m} + a_{2m-2}\omega^{2m-2} + \cdots + a_0}{\omega^{2n} + b_{2n-2}\omega^{2n-2} + \cdots + b_0}. \quad (3.27)$$

由性质 1 和性质 4。要求上式满足:

(1) $G_0 > 0$;

(2) 有理式的分母无实数根 (即在实轴上无极点), 且 $n > m$ 。

例 3.2 利用功率谱密度的性质, 判断下列函数, 哪些可能成为平稳过程的功率谱密度。

$$f_1(\omega) = \cos 3\omega, f_2(\omega) = \frac{1}{(\omega-1)^2+2}; f_3(\omega) = \frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6}, \quad f_4(\omega) = \frac{\omega^2+4}{\omega^4-4\omega^2+3}.$$

解: 只有 $f_3(\omega)$ 可能, 因为 $f_1(\omega) < 0$, $f_2(\omega)$ 非偶函数, $f_4(\omega)$ 在实数轴上有极点。

3.1.2 实平稳过程的功率谱密度与自相关函数之间的关系

1. 维纳-辛钦定理

众所周知, 确定信号 $s(t)$ 与它的频谱 $S(\omega)$ 在时域和频域之间构成一对傅里叶变换。可以证明, 平稳随机信号的自相关函数与其功率谱密度之间也构成一对傅里叶变换。下面就来推导这一关系式。

由功率谱密度的推导可知

$$G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|X_T(\omega)|^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[X_T^*(\omega) X_T(\omega)]. \quad (3.28)$$

式中截取函数的频谱

$$X_T(\omega) = \int_{-T}^T X(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.29)$$

则实过程 $X(t)$ 的功率谱密度表示为

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[\int_{-T}^T X(t_1) e^{j\omega t_1} dt_1 \cdot \int_{-T}^T X(t_2) e^{-j\omega t_2} dt_2 \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E[X(t_1) X(t_2)] e^{-j\omega(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T R_X(t_1, t_2) e^{-j\omega(t_2-t_1)} dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

式中 $R_X(t_1, t_2)$ 只在 $-T \leq t_1, t_2 \leq T$ 存在令 $t = t_1, \tau = t_2 - t_1 = t_2 - t$, 代入上式进行变量置换, 如图 3-2 所示, 可得

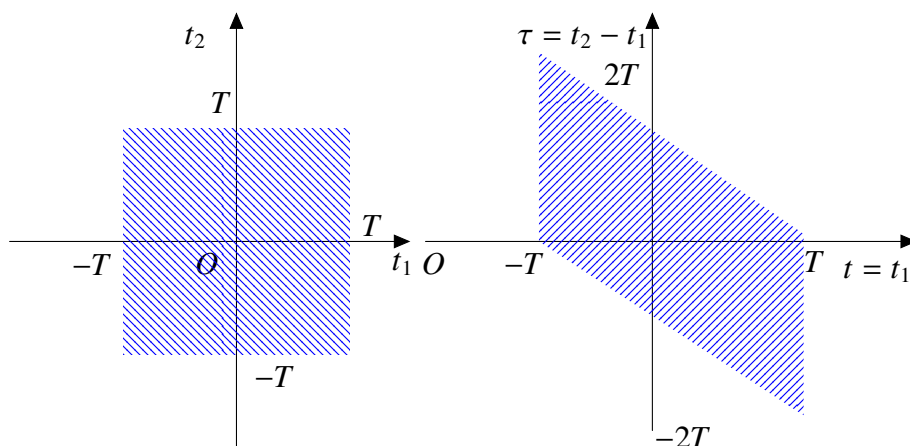


图 3-2 维纳-辛钦定理推导过程中的变量置换

$$\begin{aligned}
 G_X(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left\{ \int_{-2T}^0 \left[\int_{-T-\tau}^T R_X(t, t+\tau) dt \right] e^{j\omega\tau} d\tau \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{2T} \left[\int_{-T}^{T-\tau} R_X(t, t+\tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} \\
 &= \int_{-\infty}^0 \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-\tau}^T R_X(t, t+\tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &\quad \int_0^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T-\tau} R_X(t, t+\tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^0 \overline{R_X(t, t+\tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} \overline{R_X(t, t+\tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{R_X(t, t+\tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= F[\overline{R_X(t, t+\tau)}].
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

由傅里叶变换的定义，上式成立的条件是 $\overline{R_X(t, t+\tau)}$ 绝对可积。根据傅里叶变换的唯一性，必有

$$\overline{R_X(t, t+\tau)} = F^{-1}[G_X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \tag{3.32}$$

证明. 维纳-辛钦定理推导中的变形置换的证明：按定义：

$$G(\omega) = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(\omega)|^2 \right\}. \tag{3.33}$$

其中

$$X_T(\omega) = \int_{-T}^T X(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) X(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.34)$$

将 (3.34) 代入 (3.35), 式中

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \text{rect}\left(\frac{t+\tau}{2T}\right) dt = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{2T}, & |\tau| < 2T \\ 0, & |\tau| \geq 2T \end{cases} \quad (3.35)$$

对所有 $\tau \in (-\infty, \infty)$, 有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \text{rect}\left(\frac{t+\tau}{2T}\right) dt = 1. \quad (3.36)$$

将 (3.34)-(3.36) 代入 (3.33):

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.37)$$

□

这样一来, 维纳-辛钦定理不需要额外的条件: 只要式 (3.45)

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_X(t+\tau, t) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.38)$$

右侧的积分有意义, 它就是功率谱, 否则功率谱不存在。或者说, 条件就是功率谱密度、自相关函数有意义。更进一步, 还可以使条件更弱: 可以去掉“平稳”。将 $R_X(\tau)$ 换成 $R_X(t_1, t_2) = R_X(t+\tau, t)$ 之后继续上述证明过程, 最后可以得到。

实际上, 上述对功率谱密度的定义适用于任意随机过程 (定义本身不要求必须是平稳过程), 对上面的式 (3.45) 改变时间平均和傅氏变换的次序, 就是时变功率谱的时间平均。证毕

所以, 任意随机过程 $X(t)$ 自相关函数的时间平均与其功率谱密度互为傅里叶变换, 有

$$\overline{R_X(t, t+\tau)} \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} G_X(\omega). \quad (3.39)$$

若随机过程 $X(t)$ 是平稳过程, 其自相关函数 $R_X(t_1, t_2) = R_X(t, t+\tau) = R_X(\tau)$ 与 t 无关。则有

$$\bar{R}_X(t, t+\tau) = \overline{R_X(\tau)} = R_X(\tau). \quad (3.40)$$

以要 $R_X(\tau)$ 绝对可积, 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)| d\tau < \infty. \quad (3.41)$$

则

$$G_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.42)$$

同理

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.43)$$

所以平稳过程的自相关函数与其功率谱密度之间是一对傅里叶变换关系, 即

$$R_X(\tau) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} G_X(\omega). \quad (3.44)$$

这一关系就是著名的维纳-辛钦定理, 或称为维纳-辛钦公式。它给出了平稳过程的时域特性和频域特性之间的联系。可以说, 它是分析随机过程的一个最重要、最基本的公式。

利用平稳过程的自相关函数和功率谱密度皆为偶函数, 维纳-辛钦定理可表示为

$$\begin{cases} G_X(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_X(\tau) \cos \omega\tau d\tau \\ R_X(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_X(\omega) \cos \omega\tau d\omega \end{cases}. \quad (3.45)$$

证明. 另法: 维纳-辛钦 (Wiener-Khinchin) 定理 (Wiener-Khinchin) [Loudon1991]。

维纳-辛钦定理讲的是光场的能量谱密度和光场的一阶相干函数之间的关系 (光学)。先规定傅里叶变换为 $F(\omega) = \int f(t) \exp(i\omega t) dt$, 反变换为 $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega$ 按此定义, 帕塞瓦尔等式就是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.46)$$

上式左端表征着信号的能量。对于分布在区域 V 内的光场, 其能量有电场部分和磁场部分的贡献。设电场部分表达式为 $E(\vec{r}, t)$, 于是电场部分的能量密度为 $\frac{1}{2}\epsilon_0|E|^2$; 而磁场贡献和电场相等, 于是总能量密度为

$$\epsilon_0|E|^2. \quad (3.47)$$

注意, 这里并未取空间平均 (只研究固定空间的一点), 也没有对时间取平均。通过帕塞瓦尔等式可得, 处于 ω 到 $\omega + \Delta\omega$ 之间的电磁场的能量密度 (这里密度仅仅对空间, 不对频率) 为

$$\epsilon_0|E|^2 \quad (3.48)$$

注意, 这里并未取空间平均 (只研究固定空间的一点), 也没有对时间取平均。通过帕塞瓦尔不等式, 可得: 处于 ω 到 $\omega + \Delta\omega$ 之间的电磁场的能量密度 (这里密度仅仅对空间, 不对频率) 为

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega}^{\omega+\Delta\omega} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (3.49)$$

或者说 $\frac{\epsilon_0}{2\pi} |F(\omega)|^2$ 是电磁场的能量密度 (这个密度既对空间, 也对频率), 其中 $F(\omega)$ 是 $E(\vec{r}, t)$ 的傅里叶变换。因此有电磁场能量的空间、频率密度为

$$W = \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(t') E^*(t) e^{i\omega(t'-t)} dt dt'. \quad (3.50)$$

引入变量 $\tau = t' - t$ 则上式变为

$$W = \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E^*(t) E(t+\tau) e^{i\omega\tau} dt d\tau. \quad (3.51)$$

利用一阶相干函数的定义

$$G^{(1)}(t, t+\tau) = \langle E^*(t) E(t+\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} E^*(t) E(t+\tau) dt. \quad (3.52)$$

假设场是 (广义) 平稳的复随机过程, 则 $G^{(1)}(t, t+\tau) = G^{(1)}(\tau)$, 因此


$$W = \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^{(1)}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (3.53)$$

又因为 $G^{(1)}(-\tau) = G^{(1)*}(\tau)$, 从而上式可以改写为

$$W = \text{Re} \frac{\epsilon_0}{\pi} \int_0^{\infty} G^{(1)}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (3.54)$$

□

这就叫做维纳-辛钦定理。其实这里的推导是不严谨的, 因为这里的出发点是对一个确知信号的傅里叶变换及其功率谱密度, 而不是一个平稳随机过程的功率谱密度。严谨的证明梗概如下: 先定义平稳随机过程中任一样本函数的功率谱密度, 再求其系综平均得到该随机过程的功率谱密度, 以此为出发点证明其和相关函数的关系 [Scully and Englert 1991]。详见文献 [GXB2009] 第 1.6 节。随机信号分析 - 高新波, 2009

 **注 3.3.** 对于量子情形, 则直接把一阶相干函数换成量子光学的版本。注意 $G^{(1)}(-\tau) = G^{(1)*}(\tau)$ 依然成立。对于 Scully 量子光学书上 S9.3 的式 (9.3.11), 真正的能量谱密度应该在此基础上乘以 $\mathcal{E}^2 \epsilon_0$, 而 $\mathcal{E} = \sqrt{\hbar\nu/(\epsilon_0 V)}$, 应该乘上一模式密度 \times 一个模式平均占据数 \times 一个光子的能量, 因此该能量谱密度除以 $\langle n \rangle \hbar\nu$ 就是模式密度。

2. 维纳-辛钦定理的推广

应该指出, 以上我们讨论的维纳-辛钦定理是在随机过程的 $R_X(\tau)$ 满足绝对可积的条件下推出的。它要求随机过程的均值为零, 且 $R_X(\tau)$ 中不能含有周期分量。实际中含有直流分量和周期分量的随机过程很多, 绝对可积的条件限制了定理的应用。

通过借助 δ 函数, 就可以不受此条件的限制。即将直流分量与周期分量在各个频率点上的无限值用一个 δ 函数来表示, 借助 δ 函数的傅里叶变换, 则维纳-辛钦公式就可以推广到含有直流或周期成分的平稳过程中来。

δ 函数的时域和频域傅里叶变换为

$$\begin{cases} \delta(\tau) \Leftrightarrow 1 \\ \frac{1}{2\pi} \Leftrightarrow \delta(\omega) \end{cases} \quad (3.55)$$

周期函数的傅里叶变换对为

$$\begin{cases} \cos(\omega_0\tau) \Leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ \sin(\omega_0\tau) \Leftrightarrow j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \end{cases} \quad (3.56)$$

δ 函数与连续函数 $s(t)$ 的乘积公式为

$$\begin{cases} s(t) \delta(t - \tau) = s(\tau) \delta(t - \tau) \\ s(t) \delta(t) = s(0) \delta(t) \end{cases} \quad (3.57)$$

例 3.4 已知一个电报信号是平稳随机过程, 其自相关函数 $R_X(\tau) = Ae^{-\beta|\tau|}$, $A > 0, \beta > 0$, 如图 3-3(a) 所示。求该电报信号的功率谱密度。

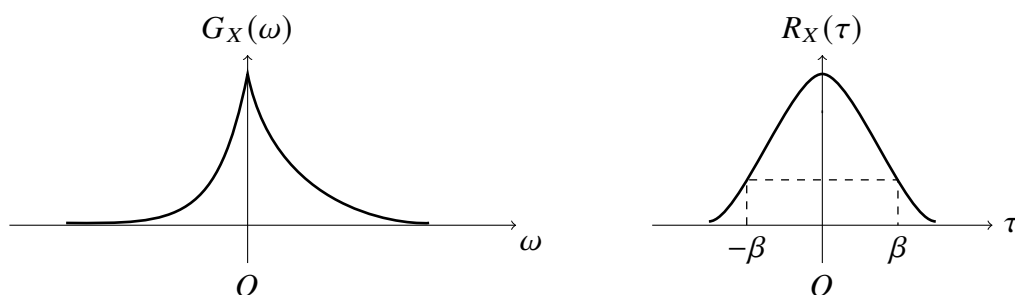


图 3-3 a) 平稳过程的自相关函数 b) 相应的功率谱密度

解: 因为在 $R_X(\tau)$ 的表示式中包含有 $|\tau|$ 项, 因此在应用维纳-辛钦公式求积分时, 应

将 $|\tau|$ 顶分成 $+\tau$ 和 $-\tau$ 两部分进行积分。

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= \int_{-\infty}^0 A e^{\beta t} e^{-j\omega \tau} d\tau + \int_0^{\infty} A e^{-\beta t} e^{-j\omega \tau} d\tau = A \frac{e^{(\beta-j\omega)\tau}}{(\beta-j\omega)} \Big|_{-\infty}^0 + A \frac{e^{-(\beta+j\omega)\tau}}{-(\beta+j\omega)} \Big|_0^{\infty} \\ &= A \left[\frac{1}{\beta-j\omega} + \frac{1}{\beta+j\omega} \right] = \frac{2A\beta}{\beta^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

计算出来的 $G_X(\omega)$ 如图 3-3(b) 所示。

例 3.5 已知随机相位过程 $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$, 其中 A, ω_0 为实常数, θ 为随机相位, 服从 $(0, 2\pi)$ 上的均匀分布。可证其为平稳过程, 且自相关函数为

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau). \quad (3.59)$$

求 $X(t)$ 的功率谱位度 $G_X(\omega)$ 。

解: $R_X(\tau)$ 含有周期分量, 引入 δ 函数可得

$$G_X(\omega) = \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j\omega_0 \tau} + e^{-j\omega_0 \tau}) e^{-j\omega \tau} d\tau = \frac{A^2 \pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (3.60)$$

表示 $X(t)$ 的功率谱密度为在 $\pm\omega$ 处的 δ 函数, 功率集中在 ω 处, 如图 3-4 所示。

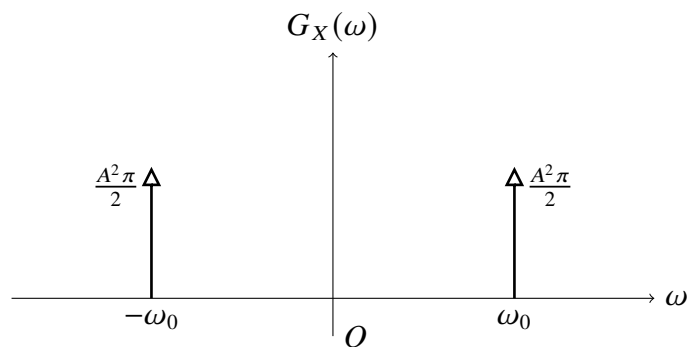


图 3-4

例 3.6 已知平稳过程 $X(t)$, 具有功率谱密度为

$$G_X(\omega) = \frac{16}{\omega^4 + 13\omega^2 + 36},$$

求该过程的自相关函数和均方值。

解：由例 3.2 知

$$R_X(\tau) = Ae^{-\beta|\tau|} \Leftrightarrow G_X(\omega) = \frac{2A\beta}{\beta^2 + \omega^2}. \quad (3.61)$$

为了利用这个傅里叶变换关系, 可以将 $G_X(\omega)$ 用部分分式法展开为

$$G_X(\omega) = \frac{16}{\omega^4 + 13\omega^2 + 36} = \frac{16}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 9)} = \frac{16/5}{\omega^2 + 4} - \frac{16/5}{\omega^2 + 9}. \quad (3.62)$$

于是 $R_X(\tau)$ 应当具有如下形式:

$$R_X(\tau) = F^{-1}[G_X(\omega)] = F^{-1}\left[\frac{16/5}{\omega^2 + 4}\right] - F^{-1}\left[\frac{16/5}{\omega^2 + 9}\right]. \quad (3.63)$$

由于

$$\frac{16/5}{\omega^2 + 4} = \frac{2 \times 2 \times 4/5}{\omega^2 + 4}, \quad \frac{16/5}{\omega^2 + 9} = \frac{2 \times 3 \times 8/15}{\omega^2 + 9}. \quad (3.64)$$

故

$$A_1 = \frac{4}{5}, \beta_1 = 2; \quad A_2 = \frac{8}{15}, \beta_2 = 3, \quad (3.65)$$

可得

$$R_X(\tau) = \frac{4}{5}e^{-2|\tau|} - \frac{8}{15}e^{-3|\tau|}. \quad (3.66)$$

3. 物理功率谱密度

前面定义的随机过程功率谱密度分布为“双边谱”密度。实际应用中 $\omega < 0$, 负频率外不存在, 公式中的负频率纯粹只有数学上的意义和运算的方便。因此有时也采用另一称“单边谱”密度, 如图 3-5 所示。

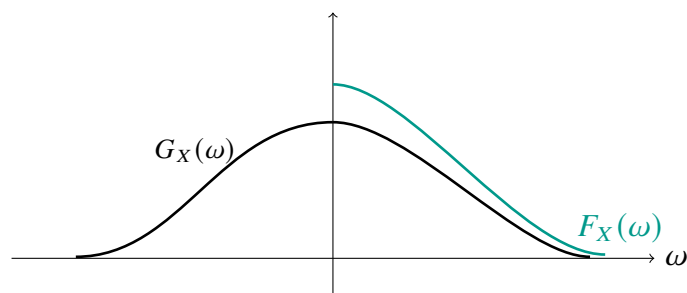


图 3-5 物理功率谱密度

$F_X(\omega)$ 与 $G_X(\omega)$ 的关系如下:

$$F_X(\omega) = 2G_X(\omega)U(\omega) = \begin{cases} 2G_X(\omega), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}. \quad (3.67)$$

其中阶跃函数

$$U(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}. \quad (3.68)$$

若用物理功率谱密度 $F_X(\omega)$ 表示平稳随机过程的自相关函数及平均功率。则为

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty F_X(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (3.69)$$

$$P = R_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty F_X(\omega) d\omega. \quad (3.70)$$

本节中讨论的功率谱密度, 若不加说明, 皆指“双边谱”密度(功率谱密度)。

3.2 两个实随机过程的互功率谱密度

在上章中已经建立了两个实随机过程的互相关函数的概念。下面将单个实随机过程的功率谱密度的概念, 以及相应的分析方法推广到两个随机过程中去。

1. 互功率谱密度

(1) 其平均功率的定义

若 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的样本函数 $x_t(t)$ 和 $y_k(t)$ 的两个截取函数 $x_{kT}(t), y_{kT}(t)$ 为

$$x_{kT}(t) = \begin{cases} x_k(t), & -T < t < T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad y_{kT}(t) = \begin{cases} y_k(t), & -T < t < T \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.71)$$

因为截取函数 $x_{kT}(t), y_{kT}(t)$ 都满足绝对可积的条件, 所以它们的傅氏变换存在, 于是有

$$x_{kT}(t) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} \mathbf{x}_{kT}(\omega), \quad y_{kT}(t) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} \mathbf{y}_{kT}(\omega). \quad (3.72)$$

由于 $x_{kT}(t), y_{kT}(t)$ 的傅氏变换存在, 故帕塞瓦尔定理对它们也适用, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_{kT}^*(t) y_{kT}(t) dt = \int_{-T}^T x_k^*(t) y_k(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_{kT}(\omega) \mathbf{y}_{kT}(\omega) d\omega. \quad (3.73)$$

由于 $X(t), Y(t)$ 为实过程, 所以 $x_{kT}(t) = x_{kT}^*(t), y_{kT}(t) = y_{kT}^*(t)$. 因此可得两个随机过程的样本函数 $x(t)$ 和 $y_k(t)$ 的互平均功率

$$P_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_k(t) y_k(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} x_{kT}(\omega) \mathbf{y}_{kT}(\omega) d\omega. \quad (3.74)$$

由于 $x_{kT}(t), y_{kr}(t)$ 和 $\mathfrak{X}_{kT}(\omega), \mathfrak{Y}_{*T}(\omega)$ 都是试验结果 ζ_k 的函数, 相对于所有试验结果上的平均功率 $\{P_k\} = P_{\Delta}(\zeta)$ 是一个随机变量. 平均后的确定值 P_{XY} 为 $X(t), Y(t)$ 两个随机过程的互平均功率, 即

$$\begin{aligned} P_{XY} &= E[P_{\Delta}(\zeta)] = E\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)Y(t)dt\right] \\ &= E\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} X_T(\omega)Y_T(\omega)d\omega\right]. \end{aligned} \quad (3.75)$$

交换期望与极限的次序有

$$\begin{aligned} P_{XY} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E^r X(t)Y(t)dt \\ &= \lim_{T \rightarrow (\infty, 2T)} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_{XY}(t, t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[X_T(\omega)Y_T(\omega)]d\omega. \end{aligned} \quad (3.76)$$

(2) 互功率谱密度的定义

$$G_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} F[X_T'(\omega)Y_T(\omega)]. \quad (3.77)$$

则互平均功率为

$$P_{XY} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{XY}(\omega)d\omega. \quad (3.78)$$

同理可得, $X(t), Y(t)$ 的另一个互功率谱密度为

$$G_{YX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[Y_T^*(\omega)X_T(\omega)]. \quad (3.79)$$

$X(t), Y(t)$ 的另一个互平均功率为

$$P_{YX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{YX}(\omega)d\omega. \quad (3.80)$$

比较可得两个互平均谱密度关系为

$$G_{XY}(\omega) = G_{YX}^*(\omega). \quad (3.81)$$

2. 互谱密度与互相关函数的关系

如同单个实平稳过程自相关函数与其功率谱密度之间的关系一样,两个实平稳过程互相关系数与互谱密度之间也存在着类似的关系。对于两个实随机过程 $X(t), Y(t)$, 其互谱密度 $G_{XY}(\omega)$ 与其互相关函数 $R_{XY}(t, t + \tau)$ 之间的关系为

$$G_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{R_{XY}(t, t + \tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.82)$$

即

$$\overline{R_{XY}(t, t + \tau)} \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} G_{XY}(\omega). \quad (3.83)$$

若 $X(t), Y(t)$ 联合平稳, 则有

$$R_{XY}(\tau) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} G_{XY}(\omega). \quad (3.84)$$

即两个联合平稳的实随机过程, 它们的互谱密度与互相关函数为一傅里叶变换对

$$\begin{cases} G_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{XY}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{cases}. \quad (3.85)$$

3. 互谱密度的性质

两个随机过程的互功率谱密度与单个随机过程的功率谱密度不同, 它不再是频率 ω 的非负、实的、偶函数。下面列举互功率谱密度的一些性质。

1) 互谱密度非偶函数, 满足

$$G_{XY}(\omega) = G'_{YX}(\omega) = G_{YX}(-\omega). \quad (3.86)$$

2) 互谱密度的实部为 ω 的偶函数, 即

$$\begin{cases} \operatorname{Re} [G_{XY}(\omega)] = \operatorname{Re} [G_{XY}(-\omega)] . \\ \operatorname{Re} [G_{YX}(\omega)] = \operatorname{Re} [G_{YX}(-\omega)] . \end{cases} \quad (3.87)$$

3) 互谱密度的虚部为 ω 的奇函数, 即

$$\begin{cases} \operatorname{Im} [G_{XX}(\omega)] = -\operatorname{Im} [G_{XX}(-\omega)] . \\ \operatorname{Im} [G_{YX}(\omega)] = -\operatorname{Im} [G_{YX}(-\omega)] . \end{cases} \quad (3.88)$$

式中 $\operatorname{Im}[\cdot]$ 表示虚部。

4) 若 $X(t), Y(t)$ 正交, 则有

$$G_{XY}(\omega) = G_{YX}(\omega) = 0. \quad (3.89)$$

5) 若 $X(t), Y(t)$ 不相关, 且分别具有常数均值 m_X 和 m_Y , 则

$$\begin{cases} R_{XY}(t, t + \tau) = m_X m_Y \\ G_{XY}(\omega) = G_{YX}(\omega) = 2\pi m_X m_Y \delta(\omega) \end{cases} \quad (3.90)$$

6) 互相关函数和互谱密度满足

$$\begin{cases} \overline{R_{XY}(t, t + \tau)} \Leftrightarrow G_{XY}(\omega), \\ \overline{R_{YX}(t, t + \tau)} \Leftrightarrow G_{YX}(\omega). \end{cases} \quad (3.91)$$

例 3.7 设两个随机过程 $X(t), Y(t)$ 联合平稳, 其互相关函数

$$R_{XY}(\tau) = \begin{cases} 9e^{-3\tau}, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases} \quad (3.92)$$

求互谱密度 $G_{XY}(\omega)$ 和 $G_{YX}(\omega)$ 。

由联合平稳过程互相关函数和互谱密度的傅立叶变换对关系, 可得

$$\begin{aligned} G_{XY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} 9e^{-3\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= 9 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(3+j\omega)\tau} d\tau = \frac{9}{3+j\omega}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

可见, $G_{XY}(\omega)$ 是 ω 的复函数。根据互谱密度的性质 1), 可得

$$G_{YX}(\omega) = G_{XY}^*(\omega) = \frac{9}{3-j\omega}. \quad (3.94)$$

3.3 理想白噪声

定义 3.8 白噪声的定义

若平稳过程 $N(t)$ 的均值为零, 功率谱密度在整个频率轴 $(-\infty, +\infty)$ 上的均匀分布, 满足

$$G_N(\omega) = \frac{1}{2} N_0, \quad (3.95)$$

其中 N_0 为正实常数, 则称此过程为白噪声过程, 简称白噪声。

“白”是借用了光学中“白光”这一术语。因为白光的光谱包含了所有可见光的频率分量, 分布在整个频率轴上。任意的非白噪声被定义为色噪声。如图 3-6(b) 所示, 例 3.2 所表示的随机过程就是色噪声的一例。

(2) 白噪声的自相关函数

利用维纳-辛钦定理, 不难得到白噪声 $N(t)$ 的自相关函数为

$$R_N(\tau) = \frac{1}{2}N_0\delta(\tau). \quad (3.96)$$

上式说明, 白噪声的自相关函数是一个面积等于功率谱密度的 δ 函数。白噪声的功率谱密度和自相关函数的图形如图 3-6 所示。

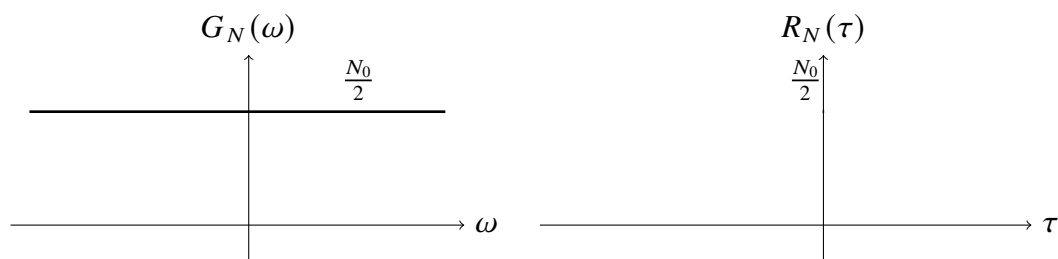


图 3-6 理想白噪声 (功率谱密度 $G_N(\omega)$ 和自相关函数 $R_N(\tau)$)

(3) 白噪声的自相关系数

$$\rho_N(\tau) = \frac{R_N(\tau)}{R_N(0)} = \begin{cases} 1, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases}. \quad (3.97)$$

(4) 白噪声的特点

1) 理想化的数学模型

(1) 由白噪声的自相关系数可见, 白噪声在任何两个相邻时刻的状态 (即使是紧连接的两个时刻), 只要不是同一时刻都是不相关的。因此, 在时域中白噪声的样本函数变化极协。然而任何实际的过程, 无论样本函数变化多快, 紧连卷的两个时刻的状态总存在一定的关联性, 自相关函数不可能是一个 δ 函数。

(2) 由于定义下的白噪声模型的功率谱无限宽, 因此其平均功率就无限大。然而, 物理上存在的任何随机过程, 其平均功率总是有限的。因此, 在这样定义下的白噪声只是一种理想化的数学模型, 在物理上是不存在的。尽管如此, 由于白噪声在数学上具有处理简单, 方便的优点, 所以它在随机过程的理论研究及实际应用中仍占有特别重要的地位。

2) 数学上有很好的运算性质

白噪声的功率谱密度是“常数”, 自相关函数是一个“冲激函数”, 所以将它作为噪声与信号一起分析处理, 运算起来非常方便。

3) 是大多数重要噪声的模型

经过科学家的验证,大自然中计多重要的噪声过程,因功率谱近似于常数,确实可以用白噪声来近似。例如,对通信系统有很大影响的热噪声,是由元件中电子原件的热运动产生的。约翰逊和奈奎斯特从实验和理论两个方面研究证明:在正常室温下,网络工作频率低于 10^3Hz 时,阻值为 R 的电阻两端噪声电压 N_V 的均值为零均方值(平均功率)

$$E[N_V^2(t)] = 4kTR\Delta f, \quad (3.98)$$

式中 T 为绝对零度, $k = 1.38 \times 10^{-23}\text{J/K}$ 为波耳兹曼常数, Δf 为噪声带宽。

其功率谱密度为

$$G_{NV}(\omega) = \frac{E[N_V^2(t)]}{2\Delta f} = 2kTR. \quad (3.99)$$

可见,热噪声具有平均的功率谱密度,可以用白噪声来近似。

4) 白噪声可以替代实际应用中的宽带噪声

在实际工作中,任何一个系统的带宽总是有限的。当噪声通过某一系统时,只要它在比我们感兴趣的信号频带宽得多的范围内,都具有近似均匀的功率谱密度,如图 3-7 所示,这个噪声就可以被当作白噪声来处理,而且不会带来很大的误差。

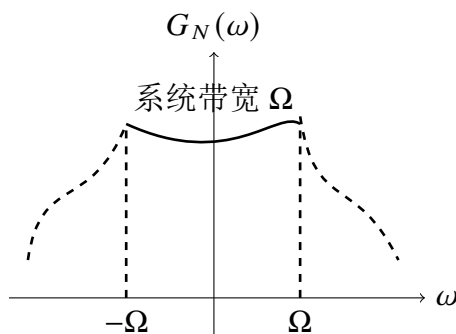


图 3-7 白噪声的特点

因此,电子设备中出现的各种起伏过程,大多数都可认为是白噪声。如电阻热噪声、晶体管的散弹噪声等,在相当宽的频率范围内都具有均匀的功率谱密度,所以可以把它们看成是白噪声。

5) 高斯白噪声

高斯白噪声在任意两相邻时刻的状态有各态历经性。

2. 限带白噪声

定义 3.9 限带白噪声

平稳随机过程 $X(t)$ 均值为零，功率谱密度在有限频率范围内是均匀分布，在此范围外为零，则称此过程为限带白噪声。

限带白噪声是另外一个常用的概念。

(2) 限带白噪声的分类

性质 限带白噪声分为低通型限带白噪声和带通型限带白噪声。

1) 低通型限带白噪声

若随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度满足

$$G_X(\omega) = \begin{cases} G_0, & |\omega| \leq \Omega/2 \\ 0, & |\omega| > \Omega/2 \end{cases} \quad (3.100)$$

则称此过程为低通型限带白噪声。

将白噪声通过一个理想低通滤波器，便产生出低通型限带白噪声。其自相关系数为

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} G_0 e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{\Omega G_0}{2\pi} \cdot \frac{\sin(\Omega\tau/2)}{\Omega\tau/2}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

低通型限带白噪声的 $G_X(\omega)$ 和 $R_X(\tau)$ 的图形如图 3-8 所示。可以看出时间间隔 τ 等于 $2\pi/\Omega$ 整数倍的那些随机变量，彼此是不相关的。

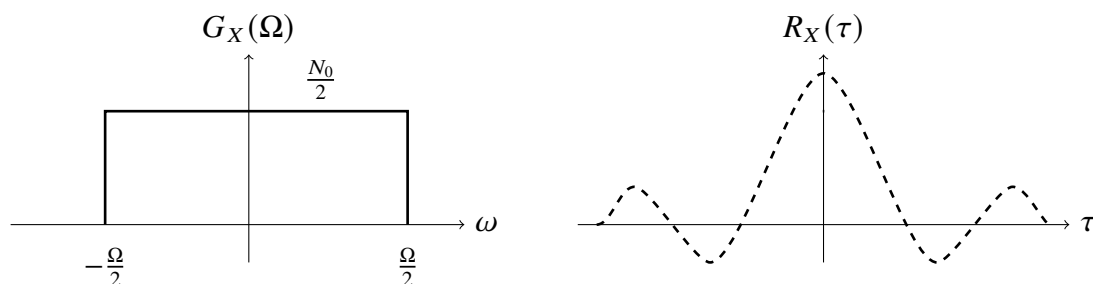
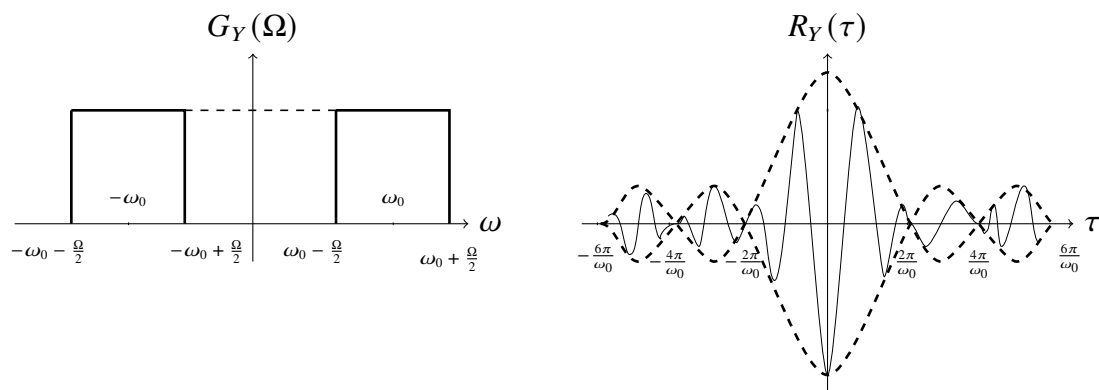


图 3-8 低通型限带白噪声 ($G_X(\Omega)$ 和 $R_X\tau$)

图 3-9 带通型限带白噪声 ($G_Y(\Omega)$ 和 $R_Y(\tau)$)

2) 带通型限带白噪声

类似低通型限带白噪声，带通型限带白噪声的功率谱密度为

$$G_Y(\omega) = \begin{cases} G_0, & \omega_0 - \Omega/2 < |\omega| < \omega_0 + \Omega/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.102)$$

应用维纳——辛钦定理，不难导出它的自相关函数为

$$R_Y(\tau) = \frac{\Omega G_0}{\pi} \cdot \frac{\sin(\Omega\tau/2)}{\Omega\tau/2} \cos \omega_0\tau = 2R_X(\tau) \cos \omega_0\tau. \quad (3.103)$$

带通型限带白噪声 $G_Y(\omega)$ 和 $R_Y(\tau)$ 的图形由图 3-9 给出。不难看出，将白噪声通过一个理想带通滤波器便可产生带通型限带白噪声。

3.4 习题

练习 3.1 已知平稳过程 $X(t)$ 的功率谱密度为 $G_X(\omega) = 32/(\omega^2 + 16)$ ，求：① 该过程的平均功率。② ω 取值在 $(-4, 4)$ 范围内的平均功率。

练习 3.2 已知平稳过程的功率谱密度为

$$G_X(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 2}. \quad (3.104)$$

求此过程的均方值和方差。

练习 3.3 已知平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数如下，求它们的功率谱密度 $G_X(\omega)$ ，并画出图形。(1) $R_X(\tau) = e^{-3|\tau|}$ 。

(2) $R_X(\tau) = e^{-|\tau|} \cos \pi\tau$ 。

$$(3) R_X(\tau) = 5 \exp \left[-\frac{\tau^2}{8} \right].$$

$$(4) R_X(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|, & |\tau| \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

练习 3.4 已知平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数如下, 求功率谱密度 $G_X(\omega)$ 。

$$\textcircled{1} R_X(\tau) = 4e^{-|\tau|} \cos \pi \tau + \cos 3\pi \tau.$$

$$\textcircled{2} R_X(\tau) = 16e^{-2|\tau|} - 8e^{-4\tau|}.$$

练习 3.5 已知平稳过程 $X(t)$ 在频率 $\omega=0$ 时的功率谱密度为零, 证明 $X(t)$ 的自相关函数满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) d\tau = 0. \quad (3.105)$$

练习 3.6 已知平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为

$$R_X(\tau) = a \cos^4 \omega_0 \tau. \quad (3.106)$$

其中 a, ω_0 皆为正常数, 求 $X(t)$ 的功率谱密度和平均功率。

练习 3.7 如图 3-10 所示, 线性系统的输入 $X(t)$ 为平稳过程, 系统的输出为平稳过程 $Y(t) = X(t) - X(t - T)$ 。证明: 系统输出的平稳过程 $Y(t)$ 的功率谱密度为 $G_Y(\omega) = 2G_X(\omega)(1 - \cos \omega T)$ 。

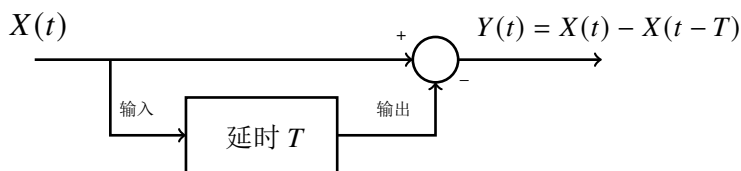


图 3-10 线性系统

练习 3.8 已知平稳过程

$$X(t) = \sum_{i=1}^N a_i Y_i(t), \quad (3.107)$$

式中 a_i 是一组常实数, 而随机过程 $Y_i(t)$ 皆为平稳过程且相互正交。证明:

$$G_X(\omega) = \sum_{i=1}^N a_i^2 G_{Y_i}(\omega). \quad (3.108)$$

练习 3.9 已知平稳过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 相互独立, 功率谱密度分别为

$$G_X(\omega) = \frac{16}{\omega^2 + 16}, \quad G_Y(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + 16}.$$

令新的随机过程

$$\begin{cases} Z(t) = X(t) + Y(t) \\ V(t) = X(t) - Y(t). \end{cases} \quad (3.109)$$

- ① 证明 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 联合平稳。
- ② 求 $Z(t)$ 的功率谱密度 $G_Z(\omega)$ 。
- ③ 求 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互谱密度 $G_{XY}(\omega)$ 。
- ④ 求 $X(t)$ 和 $Z(t)$ 的互相关函数 $R_{XZ}(\tau)$ 。
- ⑤ 求 $V(t)$ 和 $Z(t)$ 的互相关函数 $R_{VZ}(\tau)$ 。

练习 3.10 已知可微平稳过程 $X(t)$ 的功率谱密度为

$$G_X(\omega) = \frac{4}{\omega^2 + 1}. \quad (3.110)$$

- ① 证明过程 $X(t)$ 和导数 $Y(t) = X'(t)$ 联合平稳。
- ② 求互相关函数 $R_{XY}(\tau)$ 和互谱密度 $G_X(\omega)$ 。

练习 3.11 已知可微平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = 2 \exp[-\tau^2]$, 其导数为 $Y(t) = X'(t)$ 。求互谱密度 $G_X(\omega)$ 和功率谱密度 $G_X(\omega)$ 。


练习 3.12 已知随机过程 $W(t) = X(t)Y(t)$, 式中随机过程 $X(t), Y(t)$ 联合平稳, ω 为常数。

- ① 讨论 $X(t), Y(t)$ 及其均值和自相关函数在什么条件下, 才能使随机过程 $W(t)$ 宽平稳。
- ② 利用①的结论, 用功率谱密度 $G_X(\omega), G_Y(\omega), G_{XY}(\omega)$ 表示 $W(t)$ 的功率谱密度 $G_W(\omega)$ 。
- ③ 若 $X(t), Y(t)$ 互不相关, 求 $W(t)$ 的功率谱密度 $G_W(\omega)$ 。

练习 3.13 已知平稳过程 $X(t), Y(t)$ 互不相关, 它们的均值 m_X, m_Y 皆不为零。令新的随机过程 $Z(t) = X(t) + Y(t)$, 求互谱密度 $G_{XY}(\omega)$ 和 $G_X(\omega)$ 。

练习 3.14 已知复过程 $X(t)$ 为宽平稳过程, 证明:

- ① $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\omega) = R_X^*(-\omega)$ 。
- ② 已知复过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\omega)$ 和其功率谱密度 $G_X(\omega)$ 也满足维纳辛钦定理, 为一对傅里叶变换对。证明功率谱密度 $G_X(\omega)$ 为实函数。

 **练习 3.15** 已知可微平稳过程 $X(t)$ 的功率谱密度为

$$G_X(\omega) = \frac{4a^2\beta}{(a^2 + \omega^2)^2}, \quad (3.111)$$

其中 α, β 皆为正实常数, 求随机过程 $X(t)$ 和其导数 $Y(t)=X(t)$ 的互谱密度。

 **练习 3.16** 已知随机过程 $X(t), Y(t)$ 为

$$\begin{cases} X(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta) \\ Y(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \theta) \end{cases} \quad (3.112)$$

式中 a, ω_0 为实正常数, $A(t)$ 是具有恒定均值 m_A 的随机过程, θ 为与 $A(t)$ 独立的随机变量。

① 运用互谱密度的定义式

$$G_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[X_T^*(\omega) Y_T(\omega)]. \quad (3.113)$$


证明: 无论随机变量的概率密度形式如何, 总有

$$G_{XY}(\omega) = \frac{\pi a m_A}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (3.114)$$

② 证明: $X(t), Y(t)$ 的互相关函数为

$$\begin{aligned} R_{XY}(t, t + \tau) = & \frac{a m_A}{2} \{ \cos \omega_0 \tau + E[\cos(2\theta)] \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau) \\ & - E[\sin(2\theta)] \sin(2\omega_0 t + \omega_0 \tau) \}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

③ 求互相关函数 $R_{XY}(t, t + \tau)$ 的时间平均 $\overline{R_{XY}(t, t + \tau)}$ 。

 **练习 3.17** 已知平稳过程 $X(t)$ 的物理功率谱密度为

$$F_X(\omega) = \begin{cases} 4, & \omega \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}. \quad (3.116)$$

① 求 $X(t)$ 的功率谱密度 $G_X(\omega)$ 和自相关函数 $R_X(\tau)$ 。画出 $F_X(\omega), G_X(\omega), R_X(\tau)$ 的图形。

② 判断过程 $X(t)$ 是白噪声还是色噪声, 给出理由。