

随机信号分析

随机信号的时域分析

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

October 27, 2020

目录

- 1 随机过程
- 2 平稳与非平稳随机过程
 - 弱平稳随机过程
- 3 宽平稳和非平稳随机过程
 - 平稳随机过程自相关函数的性质
 - 平稳过程的自相关函数
 - 非平稳随机过程

目录

- 1 随机过程
- 2 平稳与非平稳随机过程
 - 弱平稳随机过程
- 3 宽平稳和非平稳随机过程
 - 平稳随机过程自相关函数的性质
 - 平稳过程的自相关函数
 - 非平稳随机过程

第二次教案下载二维码

Github 下载



第 2 章 随机信号的时域分析

智慧树课堂二维码和项目地址



图 1: 《随机信号分析》课程号:k213654



Github 项目地址

下载地址:

<https://github.com/zggl/random-signal-processing2020-autumn>

目录

1 随机过程

2 平稳与非平稳随机过程

■ 弱平稳随机过程

3 宽平稳和非平稳随机过程

■ 平稳随机过程自相关函数的性质

■ 平稳过程的自相关函数

■ 非平稳随机过程

平稳与非平稳随机过程

先简要讨论平稳与非平稳随机过程的概念, 然后研究随机过程的主要特性。如定义 ?? 所述, 随机过程是必须用一族与 t 有关的随机变量才能描述的随机现象的数学概括, 一般记为 $\{x(t)\}, t \in T$. 所谓平稳随机过程, 是指其统计特性不随时间推移而变化的随机过程。

当 $t = t_1$ 时, 随机过程 $\{x(t)\}$ 退化为随机变量 x_{t_1} 和 x_{t_2} , 其概率密度函数 $f(x_{t_1}, x_{t_2})$, 记 $f(x_1, x_2; t_1, t_2)$
当 $t = t_1$ 及 t_1 时, 随机过程 $\{x(t)\}$ 退化为随机变量 x_{t_1} 和 x_{t_2} , 相应的 n 维随机变量的概率密度函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$.

显然，一般来说，对于一个具体的随机过程 $\{x(t)\}$, $t_{i+1} - t_i (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 愈小， n 愈大，则 $f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ 对于 $\{x(t)\}$ 的概率特性的描绘就愈详尽。

1. 严平稳随机过程

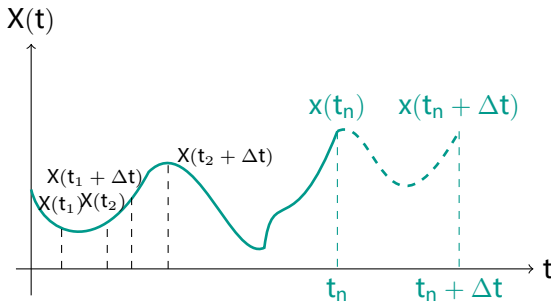


图 2: 平稳随机过程

为便于形象地理解平稳概念, 暂且用纵坐标表达随机过程 $X(t)$ 的所有状态, 如图 2 所示。

如果随机过程 $x(t)$ 的任意 n 维分布不随时间起点的不同而变化, 即取样点在时间轴上平移了任意 Δt 后, 其 n 维概率密度保持不变

$$f_X(x_1, \dots, x_n; t_1 + \Delta t, \dots, t_n + \Delta t) = f_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) \quad (1)$$

则称该过程为严平稳随机过程 (或狭义平稳过程)。

$\{x(t)\}$ 所确定的 n 维概率密度函数为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$, 其中 $t_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为任意取定的 n 个时刻。

严格平稳随机过程

如果对任意值 r , 满足

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau). \quad (2)$$

那么, 称 $\{x(t)\}$ 为严格平稳随机过程, 又可称为强平稳随机过程或狭义平稳随机过程.

严平稳随机过程的统计特性与所选取的时间起点无关

无论从什么时间开始测量 n 个状态, 得到的统计特性是一样的, 即 $\{X(t), t \in T\}$ 与 $\{X(t + \Delta t), t + \Delta t \in T\}$ 具有相同的分布与统计特性.

例 .1

测量电阻热噪声的统计特性, 由于它是平稳过程, 因而在任何时间进行测试都能得到相同的结果。



因此, 讨论平稳随机过程的实际意义在于平稳过程可使分析大为简化。

起伏噪声

热噪声是由于导体内部不规则的电子自由运动, 使导体任意两点的电压不规则变化。电阻的起伏噪声是由电阻内电子热运动引起的, 因此它的波形也是不规则变化的, 在示波器上观察就像一堆杂乱无章的茅草一样, 通常称之为起伏噪声。

起伏噪声的功率密度

起伏噪声的功率密度 $S_v = 4kTR$ ，其中 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{J/K}$ ， $T = [273 + t \text{ (}^\circ\text{C)}] \text{ (K)}$ 。由于在数学上可以用随机过程来描述这类干扰，因此又可称为随机噪声，或者简称为噪声。

频带内噪声电压和电流值

由于电子的质量极轻，其无规则的热运动速度极高，因此它所形成的热噪声可以看作是由无数个持续时间极短的电流脉冲组成(持续时间只有 $10^{-13} \sim 10^{-14}$)。由于这些小电流脉冲的持续时间极短，因此它的频谱几乎占有整个无线电频段。频带内噪声电压和电流值 $\overline{u_n^2} = S_v \cdot B = 4kTRB, \overline{i_n^2} = S_v \cdot B = 4kT \frac{1}{R} B$ 。

电阻等效

一个实际电阻可以等效为：一个 (无噪声) 电阻与一个恒压源串联，或等效为一个 (无噪声) 电导与恒流源并联。

冲击函数来描述电阻的热噪声

电阻的热噪声意味着有许多很小连续的正弦信号会产生” 是不好理解的，如果是对杂乱的波形进行频谱分析，那分解的小正弦波也是不连续、频率不稳定、相位不确定的噪声产生的源头在于电阻的导体中电子在某个瞬间朝某个方向以速度 V 飞行（这可以等效为一个电流），当他撞倒某个原子，因为电子质量太轻，被反弹到另外一个方向，如此周而复始。由于电子热运动的自由程很短（参考物理学教材），因此这个电流持续的时间也很短，可以看作是一个电流脉冲，而一个脉冲就可以用数学上的冲击函数来描述。

(2) 概率密度及数字特征

严平稳随机过程的 n 维概率密度不随时间平移而变化的特性, 反映在它的一维和二维概率密度及数字特征具有下列性质:

1) 若 $X(t)$ 是严平稳随机过程, 则它的一维概率密度和数字特征与时间 t 无关

将严平稳随机过程的定义式用于一维概率密度情况, 令 $\Delta t = -t_1$, 则有

$$f_X(x_1; t_1) = f_X(x_1; t_1 + \Delta t) = f_X(x_1; 0) = f_X(x_1). \quad (3)$$

由此可求得过程 $X(t)$ 的均值, 均方值和方差皆为与时间 t 无关的常数, 分别记作 m_X , ψ_X^2 和 σ_X^2 , 各阶矩为

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1) dx_1 = m_X. \\ E[X^2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 f_X(x_1) dx_1 = \psi_X^2. \end{aligned} \quad (4)$$

当 $E\{x^2(t)\} < +\infty$ 时, 由 $\{x(t)\}$ 在任意两个时刻 t_1, t_2 ($t_2 > t_1$) 所确定的随机变量为 $x(t_1)$ 和 $x(t_2)$.

弱平稳随机过程

将上述时刻移动任意值 τ , 满足

弱平稳随机过程

$$E\{x(t)\} = E\{x(t + \tau)\}. \quad (5)$$

$$E\{x(t_1)x(t_2)\} = E\{x(t_1 + \tau)x(t_2 + \tau)\}. \quad (6)$$

那么, 称 $\{x(t)\}$ 为为弱平稳随机过程。其中 (5) 式表示 $\{x(t)\}$ 的一阶矩具有平移不变性, (6) 式表示 $\{x(t)\}$ 的联合二阶矩具有时刻平移不变性。

显然, 当 $E\{x^2(t)\} < +\infty$ 时, 严格平稳随机过程必然是广义平稳的, 但是广义平稳随机过程不一定是严格平稳的。

$$D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)^2 f_x(x_1) dx_1 = \sigma_X^2. \quad (7)$$

2) 严平稳随机过程 X 的二维概率密度和自相关只与 t_1, t_2 的时间间隔 $t_2 - t_1$ 有关, 而与时间起点无关.

将严平稳随机过程的定义式用于二维概率密度情况, 令平移时间 $\Delta t = -t_1$ 并有关, 而与时间起点无关. 并设 $\tau = t_2 - t_1$, 则

$$\begin{aligned} f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) &= f_X(x_1, x_2, t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t) \\ &= f_X(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1) = f_X(x_1). \end{aligned} \quad (8)$$

概率密度仅依赖于时间差 $t_2 - t_1$, 而与时刻 t_1, t_2 无关。由此可得过这表明二维程 $X(t)$ 的自相关函数只是单变量 τ 的函数

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = R_X(\tau). \quad (9)$$

同理, 自协方差函数

$$C_X(t_1, t_2) = C_X(\tau) = R_X(\tau) - m_X^2. \quad (10)$$

另外, 有些非平稳过程, 在某一时同范围内可作为平稳过程来处理。在很多实际问题的研究中, 往往并不需要随机过程在所有时间都平稳, 只要在观测的有限时间内过程平稳就行。

因此, 在工程实际的应用中, 通常只在相关理论的范围内考察过程的平稳性问题。所谓相关理论是指仅限于研究与随机过程的一、二阶矩有关的理论, 它主要研究随机过程的数学期望, 相关函数及功率谱密度等。

随机过程的一、二阶矩函数不能像 n 维概率分布那样全面地描述随机过程的统计特性, 但它们在一定程度上相当有效地描述了随机过程的某些重要特性。

例 .3

以电子技术为例, 若平稳过程 X 代表某一噪声电压, 则由 $X(t)$ 的阶矩函数可以求出该噪声电压的直流平功率、交流平均功率、总平均功率和功率谱密度等参数。对于很多实际工程技, 往往获得这些参数也就够了。

而对于工程技术中最常用来模拟随机现象的高新过程来说, 研究其一、二阶矩就能代替对其整个过程性质的研究。

因此,在实际应用中经常讨论在二阶矩意义上的、较广泛的一类平稳过程—宽平稳随机过程。

目录

1 随机过程

2 平稳与非平稳随机过程

■ 弱平稳随机过程

3 宽平稳和非平稳随机过程

■ 平稳随机过程自相关函数的性质

■ 平稳过程的自相关函数

■ 非平稳随机过程

定义 .1 宽平稳随机过程

如果随机过程 $X(t)$ 的数学期望为常数, 其自相关函数只与时间 $\tau = t_2 - t_1$ 有关, 且均方值有限, 即满足如下三个条件

$$\begin{cases} E[X(t)] = m_X. \\ R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = R_X(\tau). \\ E[X^2(t)] < \infty. \end{cases} \quad (11)$$

则称 $X(t)$ 为宽平稳随机过程(或广义平稳过程)。

由于宽平稳随机过程的定义只涉及与一、二维概率密度有关的数字特征, 所以, 一个严平稳随机过程只要均方值有界, 则它必定是宽平稳的, 反之则不一定成立。只有高斯过程例外, 因为高斯过程的概率密度是由均值和自相关函数完全确定的。

如果高斯过程的均值和自相关函数不随时间平移而变化, 那么其概率密度也就不随时间的平移而变化, 即对于高斯过程, 宽平稳和严平稳等价。

本书以后提到的“平稳随机过程”除特别指明外, 通常是指宽平稳随机过程。

例 .1

设随机过程 $X(t) = a \cos(\omega_0 t + \Phi)$, ω_0, a, ω_0 皆为常数, 随机变量服从 $(0, 2\pi)$ 上的均匀分布。判断 $X(t)$ 是否为平稳随机过程, 给出理由。

解: 由题意可知, 随机变量更的概率密度为

$$f_{\Phi}(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 < \varphi < 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (12)$$

根据定义式求得过程 $X(t)$ 的均值、自相关函数和均方值分别为

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f_{\Phi}(\varphi) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} a \cos(\omega_0 t + \varphi) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\varphi = 0. \\ R_X(t_1, t_2) &= R_X(t, t + \tau) = E[X(t)X(t + \tau)] \\ &= E[a \cos(\omega_0 t + \Phi) \cdot a \cos(\omega_0(t + \tau) + \Phi)] \\ &= \frac{a^2}{2} E[\cos \omega_0 \tau + \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\Phi)] \\ &= \frac{a^2}{2} \left[\cos \omega_0 \tau + \int_0^{2\pi} \cos(2\omega_0 t + \omega_0 t + 2\Phi) \cdot \frac{1}{2\pi} d\Phi \right] \\ &= \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau = R_X(\tau). \end{aligned} \tag{13}$$

```
1  clc
2  syms omega0 t tau varphi
3  int(cos(2*omega0*t+omega0*tau+2*varphi)/(2*pi),varphi,0,2*pi)
```

代 码 1: 符号积分计算.

$$E[X^2(t)] = R_X(t, t) = R_X(0) = \frac{a^2}{2} < \infty. \quad (14)$$

由上可知, 过程 $X(t)$ 的均值为 0 (常数), 自相关函数仅与时间间隔 τ 有关, 均方值为 $a^2/2$ (有限), 故过程 $X(t)$ 是 (宽) 平稳随机过程。

运行结果见图

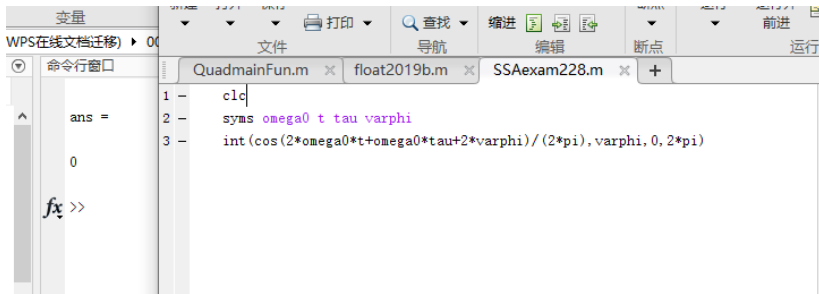


图 3: matlab 计算复积分 $\int_0^{2\pi} \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\varphi) \cdot \frac{1}{2\pi} d\varphi$.

宽平稳随机过程的条件

可以证明: 仅当随机变量 Φ 服从 $(0, 2\pi)$ 或 $(-\pi, \pi)$ 上的均匀分布时, 过程 $X(t) = a \cos(\omega_0 t + \Phi)$ 才是宽平稳随机过程。

例 .2

解: ① 对于过程 $X_1(t)$, 由于

$$\begin{cases} m_{X_1}(t) &= E[X_1(t)] = E[Y] = m_Y = \text{constant.} \\ R_X(t_1, t_2) &= E[X_1(t_1) X_1(t_2)] \\ &= E[Y \cdot Y] = E[Y^2] = \psi_Y^2 = \text{constant.} \\ E[X_1^2(t)] &= R_{X_1}(t, t) = \psi_Y^2 < \infty. \end{cases} \quad (15)$$

所以 $X_1(t)$ 平稳随机过程。

② 对于过程 $X_2(t)$, 有

$$\begin{aligned} m_{X_2}(t) &= E[X_2(t)] = E[tY] = tE[Y] = tm_Y. \\ R_{X_1}(t_1, t_2) &= E[X_2(t_1)X_2(t_2)] \\ &= E[t_1Y \cdot t_2Y] = t_1t_2E[Y^2] = t_1t_2\psi_Y^2. \end{aligned} \quad (16)$$

可见, 由于 $X_2(t)$ 的均值与时间 t 有关, 故 $X_2(t)$ 不是平稳随机过程; 或由于自相关函数与时间 t_1, t_2 有关, 故 $X_2(t)$ 不是平稳随机过程。

平稳过程主要的数字特征

随机过程最基本的数字特征是数学期望和自相关函数。因为平稳过程的数期望是个常数, 经中心化后变为零, 所以平稳过程主要的数字特征就是自相关数。

自相关函数不仅提供了随机过程各状态间的关联性信息, 也是求随机过程的功率谱密度必不可少的工具。

平稳过程的自相关函数的性质

1° 平稳过程的自相关函数在 $\tau = 0$ 点的值为过程的均方值, 且非负, 即

$$R_X(0) = E[X^2(t)] = \psi_X^2 \geq 0. \quad (17)$$

2° 平稳过程自相关函数和自协方差函数是变量 x 的偶函数, 即

$$R_X(-\tau) = R_X(\tau), \quad C_X(-\tau) = C_X(\tau). \quad (18)$$

证: $R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = E[X(t+\tau)X(t)] = R_X(-\tau).$

3° 平稳过程的自相关函数和自协方差函数在 $z=0$ 时具有最大值, 即

$$R_X(0) \geq |R_X(\tau)|, \quad C_X(0) = \sigma_X^2 \geq |C_X(\tau)|. \quad (19)$$

注意: 这里并不排除在 $\tau \neq 0$ 时, $R_X(\tau)$ 和 $C_X(\tau)$ 也有可能出现同样的最大值。如随相余弦信号的自相关函数 $R_X(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau$, 在 $\tau = \frac{2n\pi}{\omega_0}, n = 0, \pm 1, \pm 2$ 均为最大值 $\frac{a^2}{2}$ 。

4° 若 $X(t)$ 为周期平稳过程, 满足 $X(t+T) = X(t)$, 则其自相关函数必为周函数, 且它的周期与过程的周期相同, 即

$$R_X(\tau + T) = R_X(\tau) \quad (20)$$

5° 若平稳过程 $X(t)$ 含有一个周期分量, 则 $R_X(\tau)$ 也可能含有一个周期分量, 即

$$X(t) = S(t) + N(t) = a \cos(\omega_0 t + \Phi) + N(t). \quad (21)$$

例如, 某接收机收到的混合信号 $X(t)$ 是随相余弦信号 $S(t)$ 和噪声 $N(t)$ 之和式中 Φ 更是服从是服从 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量, $N(t)$ 为平稳过程, 且 $S(t)$ 与 $N(t)$ 相互独立。易求 $X(t)$ 的自相关函数为

$$R_X(\tau) = R_S(\tau) + R_N(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau + R_N(\tau). \quad (22)$$

可见, $R_X(\tau)$ 含有的周期分量 $R_S(\tau)$ 与 $X(t)$ 的周期分量 $S(t)$ 的周期相同。

7° 若平稳过程含有平均分量 (均值) m_X , 则相关函数也将会含有平均分量 m_X^2 , 即

$$R_X(\tau) = C_X(\tau) + m_X^2, \quad (26)$$

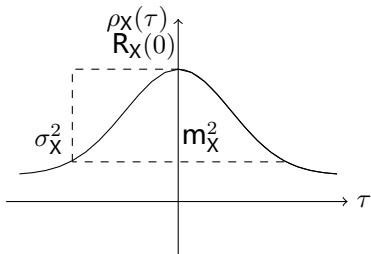
则由性质 6° 和 7° 可推出, 当平稳过程不含有任何周期分量时, 其在 $\tau = 0$ 时的方差

$$\sigma_X^2 = C_X(0) = R_X(0) - R_X(\infty). \quad (27)$$

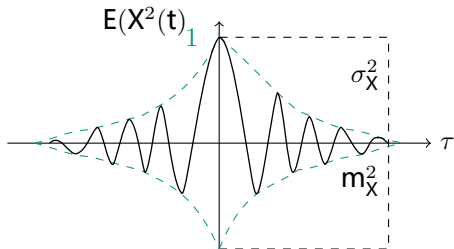
8° 平稳过程的自相关函数不含有阶跃函数 $U(\tau)$ 因子。
由平稳过程的频域分析可知 (参见维纳-辛钦定理), 平稳过程的功率谱密度 $G_x(\omega) = F[R_x(\tau)]$ 是的实函数。若 $R_x(\tau)$ 中含有 $U(\tau)$ 因子, 则 $G_x(\omega)$ 必含有虚数因子 $\pi\sigma(\omega) + 1/j\omega$ 。

根据以上性质的讨论,可画出平稳过程自相关函数 $R_X(\tau)$ 的典型曲线,如图 4-5 所示。

平稳过程的自相关函数



$$R_X(\tau) = m_X^2 + \sigma_X^2 \exp(-\alpha\tau^2)$$



$$R_X(\tau) = m_X^2 + \sigma_X^2 \cos(\omega_0) \exp(-\alpha|\tau|)$$

图 4: 平稳过程的自相关函数

平稳过程的自相关函数

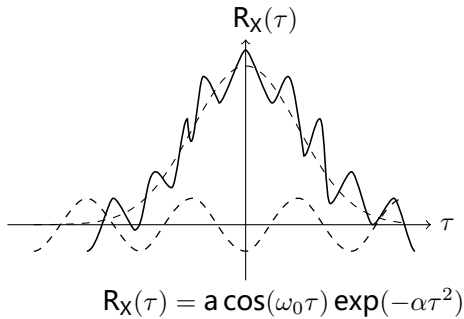
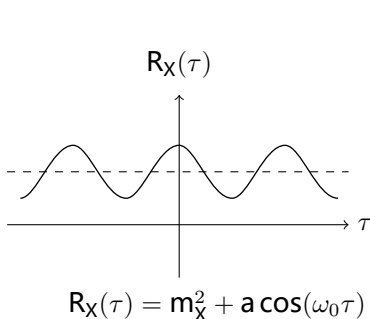


图 5: 平稳过程的自相关函数

例 .3

已知平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = \frac{4}{1+5\tau^2} + 36$, 求 $X(t)$ 的均值和方差。

解: 由性质 6° 和性质 7°, 可得

$$\begin{aligned} m_X^2 &= R_X(\infty) = 36 \Rightarrow m_X = \pm\sqrt{R_X(\infty)} = \pm 6. \\ \sigma_X^2 &= R_X(0) - R_X(\infty) = 40 - 36 = 4. \end{aligned} \quad (28)$$

例 .4

平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = 100e^{-10|\tau|} + 100 \cos 10\tau + 100$, 求 $X(t)$ 的均值、均方值和方差。



解: 将 $R_X(\tau)$ 分解成周期与非周期两部分, 即

$$R_X(\tau) = (100 \cos 10\tau) + (100e^{-10|\tau|} + 100) = R_{X_1}(\tau) + R_{X_2}(\tau) \quad (29)$$

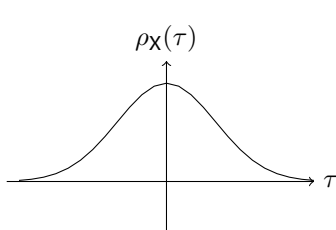
则 $R_X(x) = x_1(t) + X_2(t)$, 且 $x_1(t)$ 与 $X_2(t)$ 相互独立。 $R_{X_1}(\tau) = 100 \cos 10\tau$ 是周期分量 $X_1(t)$ 的自相关函数, 利用例 2.4 的结论, 此分量的均值 $m_{X_1} = 0$ 。

则

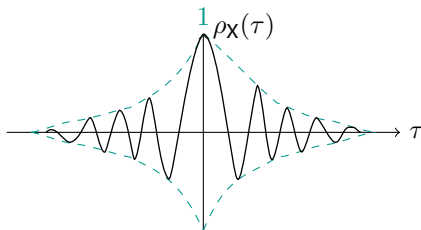
$$\begin{aligned} m_X &= m_{X_1} + m_{X_2} = \pm 10. \\ E[X^2(t)] &= R_X(0) = 300. \\ \sigma_X^2 &= R_X(0) - m_X^2 = 200. \end{aligned} \quad (30)$$

即随机过程 $X(t)$ 的均值为 ± 10 , 均方值为 300, 方差为 200。

平稳过程的自相关函数



$$\rho_X(\tau) = \exp(-\alpha\tau^2)$$



$$\rho_X(\tau) = \cos(\omega_0) \exp(-\alpha|\tau|)$$

图 6: 自相关系数 $\rho_X(\tau)$ 的两条典型曲线

由图可见, $\rho_X(\tau)$ 可以为正值、负值。正值表示正相关, 即表示随机变量 $X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 同方向的相关; 负值表示负相关, 即表示随机变量 $X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 反方向的相关。

$\rho_X(\tau) = 0$ 表示线性不相关, $|\rho_X(\tau)| = 1$ 表示最强的线性相关。

2. 自相关时间

对于非周期随机过程 $X(t)$, 随着 τ 的增大, $X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 的相关程度将减弱。

当 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $\rho_X(\tau) \rightarrow 0$, 此时的 $X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 不再相关。

实际上, 当 τ 大到一定程度时, $\rho_X(\tau)$ 就已经很小了, 此时, $X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 可认为已不相关。

因此, 常常定义一个时间 τ_0 , 当 $\tau > \tau_0$ 时, 就认为 $X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 不相关, 把这个时间 τ 称为相关时间。

自相关系数定义

由最大值 $\rho_X(0) = 1$ 下降到 $\rho_X(\tau) = 0.05$ 所经历的时间间隔为相关时间 τ'_0 , 即

$$|\rho_X(\tau'_0)| = 0.05. \quad (31)$$

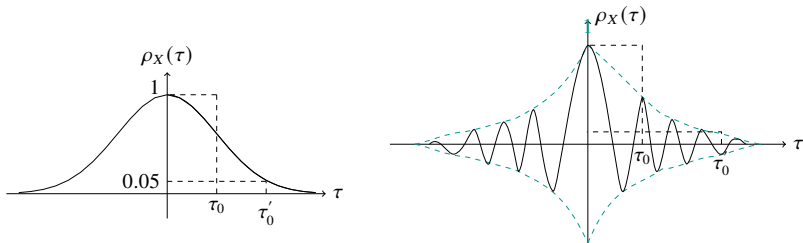


图 7: 相关时间的定义

① 对不含高频分量的平稳过程, 用 $\rho_X(\tau)$ 积分的一半来定义其相关时间, 即

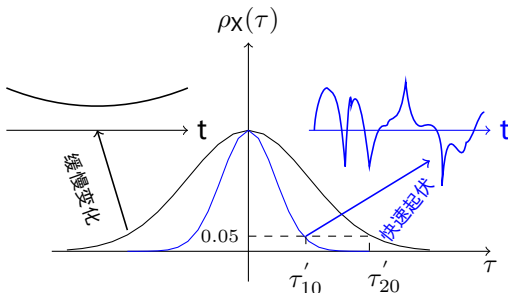


图 8: 自相关时间

② 对于含高频分量的平稳过程, 如 $\rho_X(\tau) = a_X(\tau) \cos \omega_0 \tau$, 则利用其包络 $a_X(\tau)$ 积分的一半来定义其相关时间, 即

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} a_X(\tau) d\tau. \quad (32)$$

综上所述, 自相关时间是随机过程的任意两个状态线性互不相关所需时间差的一种量度, 如图 8 所示。由图可见, $X(t)$ 曲线越陡, 相关时间 τ'_{10} 越小, 这就意味着随机过程 $X(t)$ 的任意两个状态线性互不相关所需的时间差 d_1 越短, 过程随时间变化越剧烈, 其样本随时间 t 起伏越大;

反之, $\rho_X(\tau)$ 曲线越平缓, 则 τ'_{20} 如越大, 这就意味着过程 $X(t)$ 的任意两个状态线性互不相关所需的时间差越长, 随机过程随时间变化越缓慢, 其样本随 t 起伏越小。

信号包络的计算如图 9。

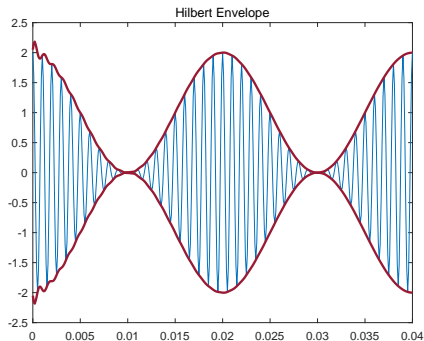


图 9: 信号包络的计算

平稳过程的自相关函数

```

1  t = 0:1e-4:0.1;
2  x = (1+cos(2*pi*50*t)).*cos(2*pi*1000*t);
3
4  plot(t,x)
5  xlim([0 0.04])
6  y = hilbert(x);
7  env = abs(y);
8  plot_param = {'Color', [0.6 0.1 0.2], 'Linewidth', 2};
9  pause(10)
10 plot(t,x)
11 hold on
12 plot(t,[-1;1]*env,plot_param{:})
13 hold off
14 xlim([0 0.04])
15 title('Hilbert Envelope')

```

代 码 2: 信号包络的计算.

例 .5

已知平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau) = 3 \exp(-\tau^2)$, 求自相关系数和自相关时间。



解: 由自相关系数的定义

$$\rho_X(\tau) = \frac{C_X(\tau)}{C_X(0)} = \frac{R_X(\tau) - R_X(\infty)}{R_X(0) - R_X(\infty)} = \frac{3e^{-\tau^2} - 3e^{-\infty^2}}{3e^{-0^2} - 3e^{-\infty^2}} = \frac{3e^{-\tau^2}}{3} = e^{-\tau^2}. \quad (33)$$

由自相关时间定义一

$$|\rho_X(\tau'_0)| = 0.05 \Rightarrow \tau'_0 = \sqrt{-\ln(0.05)} = 1.731. \quad (34)$$

由自相关时间定义二

$$\tau_0 = \int_0^\infty \rho_X(\tau) d\tau = \int_0^\infty e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.886. \quad (35)$$

平稳随机过程的自相关系数和自相关时间

自相关系数为了表示平稳过程 $X(t)$ 在两个不同时刻状态间的线性关联程度, 排除其他因素的影响, 要对自相关函数进行归一化处理, 从而得到了过程 $X(t)$ 的自相关系数

$$\rho_X(\tau) = \frac{C_X(\tau)}{\sigma_X^2} = \frac{R_X(\tau) - m_X^2}{\sigma_X^2}. \quad (36)$$

又可称为 $X(t)$ 的归一化自相关函数。图 8 给出了自相关系数 $\rho_X(\tau)$ 的两条典型曲线。

非平稳随机过程

与平稳随机过程相对的是非平稳随机过程，凡是不具有平稳随机过程所具有的概率特性的随机过程即为非平稳随机过程。应该说，非平稳随机过程是自然界中存在的较之平稳随机过程更具有广泛意义的一种随机过程，而平稳随机过程往往只是非平稳随机过程的一种近似处理或特殊情况。当非平稳随机过程的概率特性随时间变化比较缓慢时，在一段时间内可近似作为平稳随机过程来处理。

有一类过程，其本质是随机过程，但是其表示形式却类似确定过程，这类过程称为准随机过程如 $\{X(t) = \sum_{k=0}^{\tau} \xi_k t^k\}$ ，其中 ξ_k ($k = 0, 1, \dots, \tau$) 为随机变量，又例如 $\{X(t) = A \sin(\omega_0 t + \theta)\}$ ，其中 A, θ 为随机变量。

定义随机过程 $\{X(t)\}$ 的 n 阶增量为

$$\Delta^n x(t) = x(t) - \binom{n}{1} x(t - \tau) + \binom{n}{2} x(t - 2\tau) + \cdots + (-1)^n x(t - n\tau). \quad (37)$$

当 $n = 1$ 时, $\Delta x(t) = x(t) - x(t - \tau)$.

平稳随机过程的增量亦是平稳随机过程, 但反之不一定成立。

如: $\{x(t) = \xi_0 + \xi_1 t\}$, 其中 ξ_0 和 ξ_1 为随机变量。它的一阶增量 $\{\Delta x(t) = (\xi_0 + \xi_1 t) - [\xi_0 + \xi_1 (t - \tau)] = \xi_1 \tau\}$ 是平稳随机过程, 但 $\{X(t)\}$ 本身不是平稳的。