

随机信号分析

随机信号的时域分析

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

October 23, 2020

目录

- 1 随机过程
 - 随机过程的分类
 - 随机过程的分布
- 2 随机过程的数字特征
 - 二维数字特征
- 3 随机过程的特征函数

目录

- 1 随机过程
 - 随机过程的分类
 - 随机过程的分布
- 2 随机过程的数字特征
 - 二维数字特征
- 3 随机过程的特征函数

第二次教案下载二维码

Github 下载



第 2 章 随机信号的时域分析

智慧树课堂二维码和项目地址



图 1:《随机信号分析》课程号:k213654



Github 项目地址

下载地址:

<https://github.com/zggl/random-signal-processing2020-autumn>

随机过程的基本概念

所有随机试验结果 ζ 的集合, 称之为样本空间 Ω 。尽管在测量之前, 不能事先确定哪条波形将会出现, 但可以确定必为所有波形 $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)\}$ 中的一个。这是一个典型的随机过程模型。

尽管每次测量的结果可能各不相同, 但每次的结果却是一个确定的函数

$$X(t, \zeta_k) = x_k(t),$$

因此, 能把每个结果用一个确定的函数 $x_k(t)$ 来描述。

所有这些确定函数的总体 $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)\}$ 就可以描述该随机过程。

随机过程的定义

对随机试验 E 中的每个结果 ζ_k , 总有一实时间函数 $X(t, \zeta_k)$ 与其对应, 而对应于所有不同的试验结果 $\zeta \in \Omega$, 得到的一簇时间函数 $\{X(t, \zeta_1), X(t, \zeta_2), \dots, X(t, \zeta_m)\}$ 的总体 $X(t, \zeta)$ 称之为随机过程 (stochastic process 或 random process)。

簇中的每一个确定函数 $X(t, \zeta_k) = x_k(t)$ 为随机过程的样本函数, 而所有可能结果的集合 $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)\}$ 构成了随机过程的样本函数空间。其中 $t \in T$, T 是观测区间或时间域, 它可以是实数集或整个时间轴。 $\zeta \in \Omega$, Ω 是随机试验的样本空间。

从上述定义中看到, 一个随机过程 $X(t, \zeta)$ $t \in T, \zeta \in \Omega$ 实际上是时间 t 和随机结果 ζ 两个变量的函数。如图 2 所示, 对于固定时间 t_i , $X(t_i, \zeta)$ 是定义于概率空间 Ω 上 ξ 的函数, 它所有试验结果 ζ 的集合, 称之为样本空间。

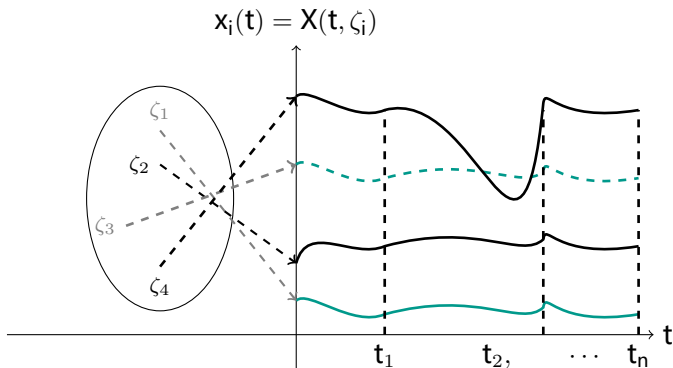


图 2: 典型的随机过程模型

随机信号分析

随机过程定义

定义 .1 随机过程

设 $T \subset \mathbb{R}^1$, T 是实数集合, 集合有穷或无穷, 可列或不可列。对于每一个 $t \in T$, $x_t(\omega)$ 为一随机变量, 其中 ω 代表某概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 的元素. $\{x_t(\omega), t \in T\}$ 称为随机过程。



通常将 $\{x_t(\omega), t \in T\}$ 简记为 $\{x(t)\}, t \in T$.

随机过程的分类方法很多, 下面列出几种常见的分类方法按随机过程 $X(t)$ 的时间和状态是连续还是离散来分类

样本函数在时间上连续的随机过程称为“随机过程”。

样本函数在时间上离散的随机过程称为“随机序列”。

一般情况下, 统称为随机过程, 具体根据上下文做分辨

定义 .2 随机序列

设 Z 为整数集, 若对于每一整 $n, n \in Z$, 均有定义在概率空间 (Ω, F, P) 上的一个随机变量 $X(\xi, n)(\xi \in \Omega)$ 与之对应, 则称依赖于参数 n 的一系列随机变量 $X(\xi, n)(1, 2, \dots, n, \dots)$ 为离散时间的随机过程或“随机序列”, 记为 $\{X(\xi, n), \xi \in \Omega, n \in Z\}$, 简记为 $\{X(n)\}$ 。



若用序号 n 取代随机过程 $X(t)$ 的时间 t , 得到一串随 n 变化的随机变量序列 $X(1), X(2), \dots, X(n), \dots$, 即是随机序列 $\{X(n)\}$ 。

(1) 连续型随机过程——时间连续且状态连续

例如, 接收机输出的噪声为连续型随机过程, 其样本函数 $x(t)$ 在时间上是连续的, 状态的取值也是连续的。

图 3: 连续型随机过程

例如, 上述噪声通过一限幅器输出, 它的样本函数 $y(t)$ 在时间上是连续的, 但状态却取离散值, 如图 4 所示, 该过程 $Y(t)$ 在任意时刻的状态 Y 是离散型随机变量。

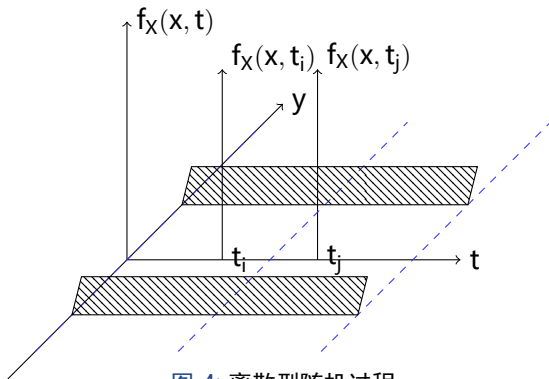


图 4: 离散型随机过程

(3) 连续随机序列——时间离散且状态连续

在时间 $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$ 上测量到的噪声为连续随机序列。这种随机序列 $\{z(n)\}$ 可看成是对连续型随机过程 $X(t)$ 等间隔采样 (时域离散化) 的结果, 所以它的样本函数 (m) 在时间上是离散的, 状态则是连续取值。如图 5 所示, 连续型随机序列 $\{z(n)\}$ 在任意时刻 t 的状态 Z 都是连续型随机变量。

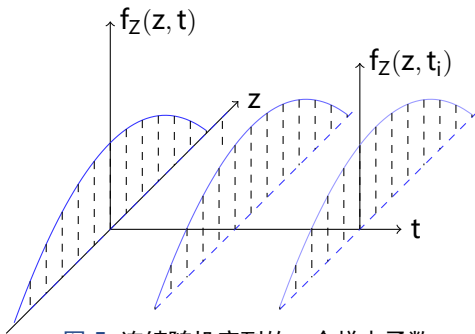


图 5: 连续随机序列的一个样本函数

按随机过程的概率分布、统计特性进行分类

按随机过程的概率分布分类有: 高斯 (正态) 过程、瑞利过程、马尔可夫过程、泊松过程和维纳过程等; 也可按随机过程统计特性有无平稳性分为: 平稳过程和非平稳过程;

还可按随机过程在频域的带宽分为: 宽带随机过程和窄带随机过程、白噪声随机过程和色噪声随机过程等等。本章将重点介绍平稳随机过程和高斯过程, 其他将在后面几章中进行介绍。

随机过程的分类

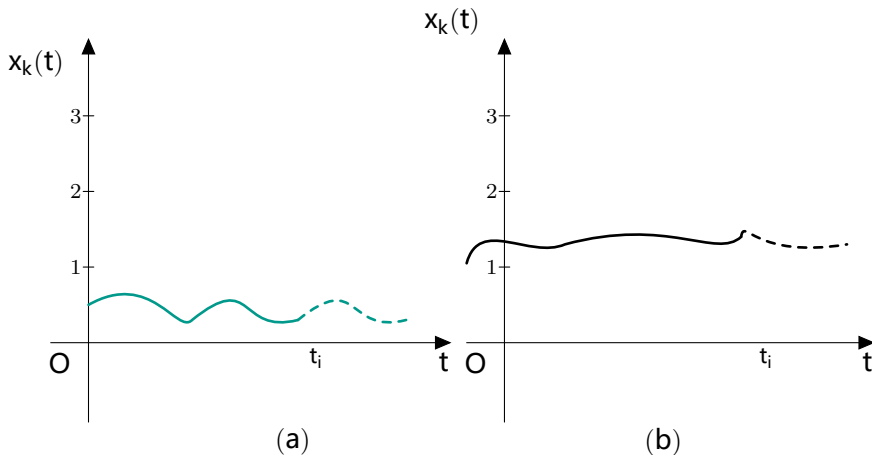


图 7: 离散随机序列的一个样本函数 (左: 确定性过程, 右: 不确定性过程)

(2) 不确定的随机过程

如果随机过程 $X(t)$ 的任意一个样本函数的未来值, 都不能由过去的观测值确定, 即样本函数无确定形式, 如图 7(b) 所示。

不确定的随机过程

对某次实验而言, 虽然样本 $x_k(t)$ 在 t 以前的一段波形已出现, 但仍不能确定在 t 以后将会出现什么波形。此类过程称为不确定的随机过程。

严格地说, 若要通过图形表示一个随机过程, 必须如图 2 中那样画出它所有的样本函数。但为了便于说明, 暂且将随机过程 $x(t)$ 描绘成一条曲线, 如图 8 所示。图 8 中曲线上的每一点都代表过程的一个状态 (随机变量)。

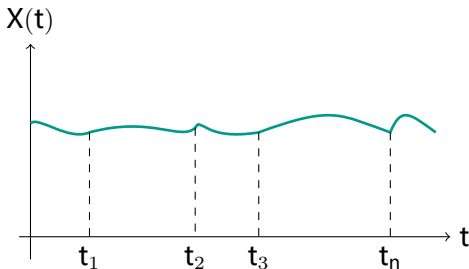
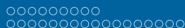


图 8: 离散随机序列的一个样本函数



用记录器记录一个随机过程 $X(t)$ 时, 只能记录 $X(t)$ 在确定时刻 t_1, t_2, \dots, t_n 下的状态 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$, 所以可以用多维随机变量 $[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)]$ 来近似描述随机过程 $X(t)$ 。

记录时间间隔 $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ 越小, 多为随机变量度随机过程的描述就月精确。在 $\Delta \rightarrow 0$ 且 $n \rightarrow \infty$ 时, 随机过程的概念可以作为多维随机变量的概念在维数无穷多 (不可列) 的情况下自然推广。

有了上述多维随机变量对随机过程的描述, 可用研究随机变量的方法, 给出描述随机过程统计特性的分布函数和概率密度。

1. 一维分布函数

随机过程 $X(t)$, 对任一固定时刻 $t_1 \in T$, 其状态 $X(t_2)$ 是一维随机变量

$$F_X(x_1; t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\} \quad (1)$$

它表示过程 $X(t)$ 在 t_1 时刻的状态 $x(t_1)$ 取值小于 x_1 的概率, 如图 9 所示

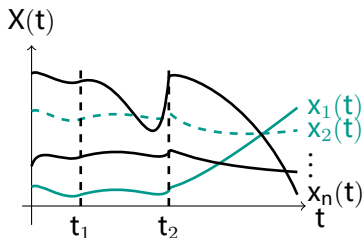


图 9: 随机过程的分布

若将 t_1, x_1 作为变量, 那么 $F_X(x_1, t_1)$ 是 x_1 和 t_1 的二元函数, 可写成 $F_X(x, t)$ 又 $t \in T$, 所以 $F_X(x; t)$ 反映了过程 $X(t)$ 在整个时间段 T 上的所有一维状态的分状况。所以定义

$$F_X(x; t) = P\{X(t) \leq x\}, t \in T, \quad (2)$$

为随机过程 $X(t)$ 的一维分布函数。

类似于随机变量的分布函数, 如果 $F_X(x; t)$ 对 x 的偏导数存在, 则称

$$f_X(x; t) = \frac{\partial F_X(x; t)}{\partial x} \quad (3)$$

为随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度。 $f_X(x; t)$ 也是 x 和 t 的二元函数。

显然, 随机过程的一维分布函数和一维概率密度具有一维随机变量的分标数和概率密度的各种性质, 所不同的是它们还是时间 t 的函数。

一维分布函数和维概率密度仅给出了随机过程最简单的概率分布特性, 它们只能描述随机过程任一时刻单一状态的统计特性, 而不能反映随机过程各个时刻的多个状态之联系。

2. 二维分布

随机过程 $X(t)$ 在任意的两个固定时刻 t_1, t_2 的状态 $x(t_1), X(t_2)$ 构成随机变量 $[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)]$, 它们的分布函数为

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\} \quad (4)$$

表示随机过程 $X(t)$ 在 t_1, t_2 两个不同时刻的两个状态 $X(x_1), X(x_2)$ 的取值分别小于 x_1, x_2 的概率。

如果 x_1, x_2, t_1, t_2 均为变量, 那么分布函数 $F_X(x_1, x_2; \cdot)$ 就是 x_1, x_2, t_1, t_2 的四元函数, 又因 $t_1 \in T, t_2 \in T$, 则 $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 反映了随机过程 $X(t)$ 在整个时间段 T 上的任意两个状态间的联合分布状况, 所以定义 $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 为随机过程 $X(t)$ 的二维分布函数。

定义 .3 二维概率密度

如果 $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 对 x_1, x_2 的二阶混合偏导数存在, 则称

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (5)$$

为随机过程 $X(t)$ 的二维概率密度。

由于二维分布描述了随机过程在任意两个时刻的状态之间的联系, 并可通过积分求得两个一维边缘概率密度 $f_X(x_1; t_1)$ 和 $f_X(x_2; t_2)$ 。因此, 随机过程的二维分布比一维分布含有更多的信息, 对随机过程统计特性的描述也更细致。但是, 二维分布还不能反映随机过程两个以上状态之间的联系, 不能完整地反映出随机过程的全部统计特性。

3. n 维分布

随机过程 $X(t)$ 在任意 n 个时刻 t_1, t_2, \dots, t_n 的状态 $X(x_1), X(x_2), \dots, X(x_n)$ 构成了 n 维随机变量 $[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)]$, 即随机矢量 x 。用类似上面的方法可定义随机过程 $X(t)$ 的 n 维分布函数和 n 维概率密度分别为

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \quad (6)$$

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial F_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (7)$$

显然, n 维分布描述了随机过程在任意 n 个时刻的 n 个状态之间的联系, 比其低维分布含有更多的信息, 对随机过程统计特性的描述也更加细致。

若随机过程的观测点取得越多, 维数 n 越大, 则对随机过程的统计特性描述得就越细致。

从理论上来说, 只有维数 n 为无限多时, 才能完整地描述随机过程 $X(t)$ 的统计特性。

类似于多维随机变量, 随机过程 $X(t)$ 的 n 维分布具有下列性质

$$1^\circ F_X(x_1, x_2, \dots, -\infty, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n) = 0 \quad (8)$$

$$2^\circ F_X(\infty, \infty, \dots, \infty; t_1, t_2, \dots, t_n) = 1 \quad (9)$$

$$3^\circ f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \geq 0. \quad (10)$$

$$4^\circ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1. \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 5^\circ \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n; t_1, \cdots, t_m, t_{m+1}, \cdots, t_n) \\
 & \quad dx_{m+1} \cdots dx_n \\
 & = f_X(x_1, \cdots, x_m; t_1, \cdots, t_m) \quad (12)
 \end{aligned}$$

6° 如果 $X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)$ 统计独立, 则有

$f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = f_X(x_1; t_1) f_X(x_2; t_2) \cdots f_X(x_n; t_n)$ 由于 n 越大描述起来越困难因此在许多实际应用中, 一般只取二维情况。

目录

- 1 随机过程
 - 随机过程的分类
 - 随机过程的分布
- 2 随机过程的数字特征
 - 二维数字特征
- 3 随机过程的特征函数

虽然随机过程的分布能较全面地描述整个过程的统计特征, 但要确定一个随机过程的高维分布通常比较困难, 分析处理起来也很复杂。

在实际应用中, 往往只需要知道随机过程的几个常用统计平均量 (即数字特征) 就能满足要求。

随机过程的数字特征既能描述随机过程的重要统计特征, 又便于实际的测量和运算随机过程常用的基本数字特征有数学期望、方差、相关函数等。由于随机过程是随时间变化的随机变量, 因此随机过程的数字特征可以由随机变量的数字特征演变而来。下面介绍随机过程的这些基本数字特征。

(1) 数学期望

对任一固定时刻 t , $X(t)$ 代表一个随机变量, 它的随机取值 $x(t)$ (t 固定) 简记为 “ x ”, 根据随机变量数学期望的定义, 可得 $X(t)$ 的数学期望为

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x; t)dx = m_X(t). \quad (13)$$

当 t 是一个时间变量时, $x(t)$ 代表的是随机过程, 因此定义 $E[X(t)]$ 为随机过程的数学期望。由于 $m_X(t)$ 是随机过程 $X(t)$ 的所有样本函数在 t 时刻所取的样本值 (x_1, \dots, x_m) 的统计平均 (集平均), 随 t 而变化, 是时间 t 的确定函数。

如图 10 所示, 细线表示随机过程的各个样本函数, 粗实线表示数学期望。

$m_X(t)$ 是随机过程 $X(t)$ 的所有样本函数在各个时刻摆动的中心, 是 $X(t)$ 在各个时刻的状态的概率质量分布的“重心位置”。

如果讨论的随机过程是接收机输出端的噪声电压, 这时数学期望 $m_X(t)$ 就是噪声电压的瞬时统计平均值。

(2) 均方值与方差

对任一固定时刻 t 来讲, $X(t)$ 是一个随机变量。由随机变量二阶原点矩的定义有

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x; t) dx = \phi_X^2(t). \quad (14)$$

当 t 是一个时间变量时, $X(t)$ 代表的是随机过程, $E[X^2(t)]$ 定义为过程 $X(t)$ 的均方值。

由随机变量二阶原点矩的定义, 可得

$$\begin{aligned} D[X(t)] &= E \{ [X(t) - m_X(t)]^2 \} \\ &= \int_{-\infty}^{[0]} [x - m_X(t)]^2 f_X(x; t) dx \\ &= \sigma_X^2(t). \end{aligned} \quad (15)$$

当 t 是一个时间变量时, 称 $D[X(t)]$ 为随机过程 $X(t)$ 的方差。而方差 $D[x(t)]$ 的正平方根

$$\sqrt{D[X(t)]} = \sigma_X(t), \quad (16)$$

称为随机过程 $X(t)$ 的均方差。

均方差的意義

均方差描绘了随机过程 $X(t)$ 各个样本对其数学期望 $m_X(t)$ 的偏差 (或偏离) 程度, 如图 10 所示。

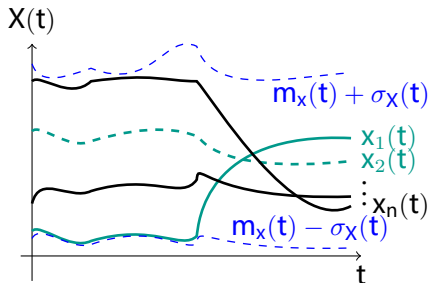


图 10: 随机过程的数学期望和方差

(3) 离散型随机过程的一维数字特征

如果 $X(t)$ 表示噪声电压, 则均方值 $\psi_X^2(t)$ 和方差 $\sigma_X^2(t)$ 就分别表示消耗在单位电阻上的瞬时功率的统计平均值和瞬时交流功率的统计平均值。

若离散型随机过程 $[Y(t), t \in T]$ 的所有状态取值来源于离散的样本空间 $\Omega = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, 则其一维概率密度可用 δ 函数表示为

$$f_Y(y, t) = \sum_{k=1}^m p_k(t) \delta(y - y_k), \quad k \in I = \{1, \dots, m\}. \quad (17)$$

其中 $p_k(x) = P(Y(t) = y_k)$, 表示 t 时刻状态 $Y(t)$ 取值为 y 的概率。

离散型随机过程的期望、均方值和方差

离散型随机过程 $Y(t)$ 的期望、均方值和方差分别为

$$m_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y \sum_{k=1}^m p_k(t) \delta(y - y_k) dy = \sum_{k=1}^m y_k p_k(t). \quad (18)$$

$$\psi_Y^2(t) = E[Y^2(t)] = \sum_{i=1}^m y_k^2 p_k(t). \quad (19)$$

$$\sigma_Y^2(t) = D[Y(t)] = \sum_{k=1}^m [y_k - m_Y(t)]^2 p_k(t). \quad (20)$$

2. 二维数字特征

如图 11 所示, 两个随机过程虽然有相同的均值与方差 (一维数字特征), 但它们有明显不同的内在结构: 一个随时间变化慢, 两个不同时刻状态之间的相互依赖性强 (相关性强);

另一个随时间变化快, 两个不同时刻状态之间的相互依赖性弱(相关性弱)。可见随机过程的一维数字特征, 不能反映随机过程中两个不同时刻态之间的相关程度。

因此, 要用二维数字特征来描述随机过程任意两个时刻状态间的内在联系。

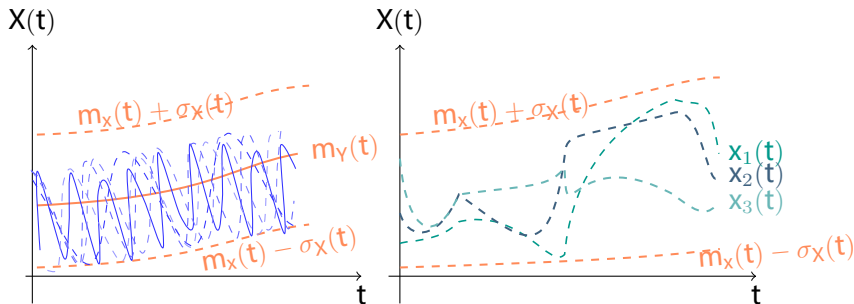


图 11: 随机过程的自相关函数

(1) 自相关函数

随机过程最重要的二维数字特征—自相关函数

随机过程的二维数字特征—自相关函数为

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (21)$$

式 (21) 是随机过程 $X(t)$ 两个不同时刻 t_1, t_2 的取值 $x(t_1), X(t_2)$ 之间的二阶联合原点矩, 它反映了 $X(t)$ 在任意两个时刻状态之间的自相关程度。当 $t_1 = t_2 = t$ 时, $X(t)$ 的自相关函数就是其均方值, 即

$$R_X(t, t) = E[X(t)X(t)] = E[X^2(t)] = \psi_X^2(t). \quad (22)$$

(2) 自协方差函数

自协方差函数或中心化自相关函数

有时也用任意两个不同时刻 t_1, t_2 上两个随机变量的协方差来描述自相关程度, 称

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= E \{ [X(t_1) - m_X(t_1)] [X(t_2) - m_X(t_2)] \} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_X(t_1)] [x_2 - m_X(t_2)] \\ &\quad f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

为自协方差函数 (或中心化自相关函数)。

自协方差和自相关的关系

$C_X(t_1, t_2)$ 与 $R_X(t_1, t_2)$ 有下列关系:

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]\} \\ &= R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2). \end{aligned} \quad (23)$$

当 $t_1 = t_2 = t$ 时, $x(t)$ 的自协方差函数就是方差, 即

$$\begin{aligned} C_X(t, t) &= E \{ [X(t) - m_X(t)]^2 \} = D[X(t)] \\ &= \psi_X^2(t) - m_X^2(t) = \sigma_X^2(t). \end{aligned}$$

(3) 自相关系数

对 $C_X(t_1, t_2)$ 按 $\sigma_X(t_i)$ 归一化, 就得到随机过程 $X(t)$ 的自相关系数.

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1) \sigma_X(t_2)}. \quad (24)$$

式中 $\sigma_X(t_1) \neq 0, \sigma_X(t_2) \neq 0$ 。

注意: $\rho_X(t_1, t_2), C_X(t_1, t_2)$ 和 $R_X(t_1, t_2)$ 只描述 $X(t_1)$ 与 $X(t_2)$ 间线性相关的程度。

(4) 离散型随机过程的二维数字特征

由于离散型随机过程 $Y(t)$ 在 $t_1, t_2 \in T$ 时的二维概率密度可用二维 δ 函数表示, 即

$$f_Y(y_1, y_2, t_1, t_2) = \sum_{k_1, k_2 \in \varepsilon_Y} P_{k_1 k_2}(t_1, t_2) \delta(y_1 - k_1) \delta(y_2 - k_2).$$

其中 $p_{k_1 k_2}(t_1, t_2) = P\{Y(t_1) = k_1, Y(t_2) = k_2\}$, 代表过程 $Y(t)$ 在 t_1, t_2 时刻两个状态 $Y(t_1)$ 与 $Y(t_2)$ 分别取离散值 k_1, k_2 的联合概率。离散型随机过程 $Y(t)$ 的自相关函数为

$$R_Y(t_1, t_2) = \sum_{k_1, k_2 \in \varepsilon_Y} k_1 k_2 P\{Y(t_1) = k_1, Y(t_2) = k_2\}. \quad (25)$$

其中 ε_Y 是随机过程 $Y(t)$ 所有状态可能取值的范围。

注意: 随机过程 $X(t)$ 的均值、方差和自相关函数等存在的条件是

$$\begin{aligned} 1^\circ & \mathbf{E}\{|\mathbf{X}(\mathbf{t})|\} < \infty \\ 2^\circ & \mathbf{E}\{|\mathbf{X}(\mathbf{t})|^2\} < \infty \end{aligned} \quad (26)$$

例 .1

参数为 α 的柯西过程 $X(t)$ 的概率密度为

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \frac{a_i/\pi}{\mathbf{x}^2 + (\alpha \mathbf{t})^2}. \quad (27)$$

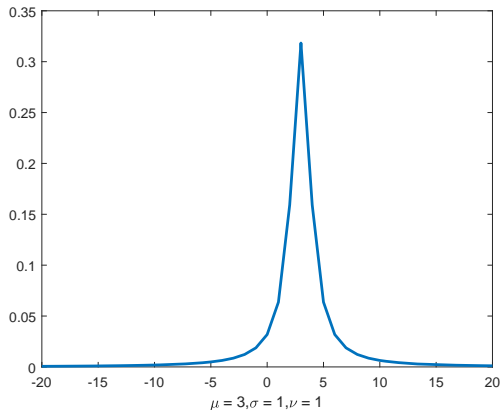


图 12: 柯西分布

由于

$$\begin{aligned}
 E\{|X(t)|\} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{\alpha t}{x^2 + (\alpha t)^2} dx = \infty. \\
 E\{|X(t)|^2\} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\alpha t}{x^2 + (\alpha t)^2} dx \\
 &= \frac{\alpha t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{(\alpha t)^2}{x^2 + (\alpha t)^2} \right] dx. \quad (28)
 \end{aligned}$$

是发散的, 所以柯西过程的均值和方差等均不存在。

例 .2

已知随机过程 $X(t) = V \cos 4t, -\infty < t < \infty$, 式中 V 是随机变量, 其数学期望为 5, 方差为 6。求随机过程 $X(t)$ 的均值、方差和自相关函数和自协方差函数。

解: 由题意可知 $E[V] = 5, D[V] = 6$ 。从而得到 V 的均方值为

$$\mathbf{E} \left[V^2 \right] = \mathbf{D}[V] + \mathbf{E}^2[V] = 6 + 5^2 = 31.$$

根据随机过程数字特征的定义和性质, 可求得

$$m_X(t) = E[X(t)] = E[V \cos 4t] = \cos 4t \cdot E[V] = 5 \cos 4t.$$

$$\begin{aligned} \sigma_X^2(t) &= D[X(t)] = D[V \cos 4t] = \cos^2 4t \cdot D[V] \\ &= 6 \cos^2 4t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[V \cos 4t_1 \cdot V \cos 4t_2] \\ &= \cos 4t_1 \cos 4t_2 \cdot E[V^2] = 31 \cos 4t_1 \cos 4t_2. \\ &= E[(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))] \\ &= R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= 31 \cos 4t_1 \cos 4t_2 - 5 \cos 4t_1 \cdot 5 \cos 4t_2 \\ &= 6 \cos 4t_1 \cos 4t_2. \end{aligned}$$

例 .3

已知随机过程 $X(t) = Ut, -\infty < t < \infty$, 其中随机变量 $U \sim [0, 1]$ 的均匀分布。求随机过程 $X(t)$ 的均值、方差和自相关函数和自协方差函数。

解：由题意可知, 随机变量 U 的概率密度为

$$f_U(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (29)$$

根据随机过程数学期望的定义, 时间 t 与求统计平均无关, 因此可以看成常数, 则

$$m_X(t) = E[X(t)] = E[Ut] = tE[U] = t \int_0^1 u \cdot 1 \cdot du = \frac{t}{2}.$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[Ut_1 \cdot Ut_2] = t_1 t_2 E[U^2] \\ &= t_1 t_2 \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f_U(u) du = t_1 t_2 \int_0^1 u^2 \cdot 1 \cdot du = \frac{t_1 t_2}{3}. \end{aligned}$$

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1) m_X(t_2) = \frac{t_1 t_2}{3} - \frac{t_1}{2} \cdot \frac{t_2}{2} = \frac{t_1 t_2}{12}$$

$$\sigma_X^2(t) = C_X(t, t) = \frac{t^2}{12}.$$

例 .4

已知一个随机过程由四条样本函数组成, 如图 13 所示, 而且每条样本函数出现的概率相等。求自相关函数 $R_X(t_1, t_2)$ 。

解: 由题意可知, 随机过程 $X(t)$ 在 t_1 和 t_2 两个时刻为两个离散随机变量, 根据图 13 所示, 可列出联合分布律如下

	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4
$X(t_1)$	1	2	6	3
$X(t_2)$	5	4	2	1
$p_{k_1 k_2}(t_1, t_2)$	0.25	0.25	0.25	0.25

故

$$\begin{aligned}
 R_X(t_1, t_2) &= \sum_{k_1, k_2 \in \varepsilon_Y} \sum k_1 k_2 p_{k_1 k_2}(t_1, t_2) \\
 &= \sum_{k_1, k_2 \in \varepsilon_Y} \sum k_1 k_2 p\{X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2\} \\
 &= 0.25 \times (1 \times 5 + 2 \times 4 + 6 \times 2 + 3 \times 1) = 7.
 \end{aligned}$$

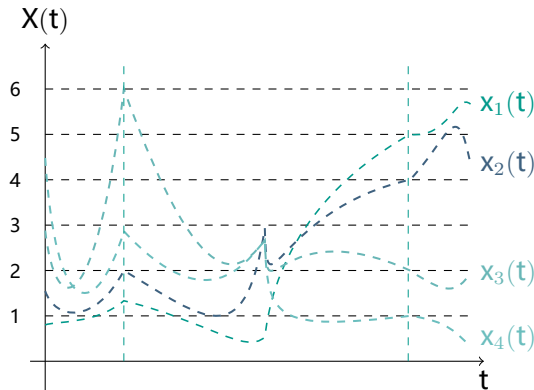


图 13: 随机过程的样本

目录

- 1 随机过程
 - 随机过程的分类
 - 随机过程的分布
- 2 随机过程的数字特征
 - 二维数字特征
- 3 随机过程的特征函数

随机变量的特征函数

随机变量的特征函数可以用来简化随机变量数字特征的运算。

随机过程的特征函数与其概率密度之间也存在着唯一对应性, 因此也可利用随机过程的特征函数来简化随机过程数字特征的运算。

1. 一维特征函数

随机过程 $X(t)$ 在任一固定时刻 t_1 的状态 $X(t_1)$ 是一维随机变量, $X(t_1)$ 的特征函数为

$$Q_X(u_1; t_1) = E \left[e^{ju_1 X(t_1)} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ju_1 x} f_X(x; t_1) dx, \quad (30)$$

式中 $x = x(t_1)$ 为随机变量 $X(t_1)$ 可能的取值, $f_X(x; t)$ 为过程 $X(t)$ 的一维概率密度。

若将 t 换成变量, 则随机过程 $X(t)$ 的一维特征函数为

$$Q_X(u; t) = E \left[e^{juX(t)} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} f_X(x; t) dx, \quad (31)$$

它是 u, t 的二元函数, 它与 $f_X(x; t)$ 构成一对变换, 则有

$$f_X(x; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_X(u; t) e^{-jux} du. \quad (32)$$

若将特征函数定义式的两边都对变量 u 求 n 阶偏导数, 得

$$\frac{\partial^n Q_X(u; t)}{\partial u^n} = j^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{jux} f_X(x; t) dx. \quad (33)$$

利用特征函数可以将“求积分”转变成“求导”简化运算

则随机过程 $X(t)$ 的 n 阶原点矩函数为

$$E[X^n(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x; t) dx = (-j)^n \frac{\partial^n Q_X(u, \nu)}{\partial u^n} \Big|_{u=0}. \quad (34)$$

2. 二维特征函数

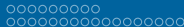
$X(t)$ 在任意两个时刻 t_1, t_2 的状态构成二维随机变量 $[x(t_1), x(t_2)]$, 它们的联合特征函数

$$\begin{aligned} Q_X(u_1, u_2; t_1, t_2) &= E \{ \exp [ju_1 X(t_1) + ju_2 X(t_2)] \} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\alpha_1 x_1 + u_2 x_2)} f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) \\ &\quad \cdot dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (35)$$

称为随机过程 $X(t)$ 的二维特征函数。它是 u_1, u_2, t_1, t_2 的四元函数, 表达式 $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2)$ 分别为随机变量 $X(t_1), X(t_2)$ 可能的取值。

若 $f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 是随机过程 $X(t)$ 的二维概率密度, 则它与二维特征函数 $Q_X(u_1, u_2; t_1, t_2)$ 构成变换对, 有

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q_X(u_1, u_2; t_1, t_2) e^{-j(n_1 x_1 + u_2 x_2)} du_1 du_2. \quad (36)$$



若将二维特征函数定义式的两边对变量 w_1, w_2 各求一次偏导数, 得

$$\frac{\partial^2 Q_X(u_1, u_2; t_1, t_2)}{\partial u_1 \partial u_2} = j^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 e^{j(u_1 x_1 + u_2 x_2)} f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (37)$$

则随机过程 $X(t)$ 的相关函数为

$$\begin{aligned} R_X(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 f_X(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2. \\ &= - \left. \frac{\partial^2 Q_X(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)}{\partial \mathbf{u}_1 \partial \mathbf{u}_2} \right|_{\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = 0}. \end{aligned} \quad (38)$$

3. n 维特征函数

同理, 定义随机过程 $X(t)$ 的 n 维特征函数为

$$\begin{aligned} Q_X(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) &= E \{ \exp [ju_1 X(t_1) + \dots + ju_n X(t_n)] \} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)} \\ &\quad f_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

根据逆转公式, 由过程 $X(t)$ 的 n 维特征函数可求得 n 维概率密度为

$$\begin{aligned} f_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q_X(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) \\ &\quad e^{-j(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)} du_1 \dots du_n. \end{aligned} \quad (39)$$

4 离散型随机过程的特征函数

设离散型随机过程 $X(t)$ 在 t 时刻的状态 (随机变量) 为 $X(t_1)$ 。随机变量 $X(t_1)$ 的取值为其分布律为 $p_i(t_1) = P\{X(t_1) = x_i\}$ 。则离散型随机过程的一维特征函数定义为

$$Q(u; t) = \sum_i e^{jux_i} p_i(t), t \in T. \quad (40)$$