

随机信号分析

随机信号的时域分析

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

October 23, 2020

第二次教案下载二维码

Github 下载



第 2 章 随机信号的时域分析

智慧树课堂二维码和项目地址



图 1:《随机信号分析》课程号:k213654



Github 项目地址

下载地址:

<https://github.com/zggl/random-signal-processing2020-autumn>

目录

1 窄带高斯过程包络平方的概率分布

- 窄帶高斯噪声包絡平方的分布
- 余弦信号加窄帶高斯噪声包絡平方的概率分布
- 卡方分布和非中心卡方分布

2 习题



```
graph LR; S_t[S(t)] --> HFS[高频窄带系统]; HFS --> X_t[X(t)]; X_t --> PLD[平方律检波器]; PLD --> A2_t[A^2(t)]
```

$$X(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)]$$

图 2: 平方律检波器

前面已经推导出当窄带随机过程为一具有零均值、方差为 σ^2 的平稳高斯噪声时, 其包络 $A(t)$ 的一维概率密度为瑞利分布。

$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{a_t^2}{2\sigma^2} \right\}, a_t \geq 0. \quad (1)$$

应用求随机变量函数分布的方法, 很容易求出包络平方的一维概率密度。令

$$U(t) = A^2(t) \quad (2)$$

则在时刻 t 的采样有

$$\begin{cases} U_t = g(A_t) = A_t^2, & A_t \geq 0 \\ A_t = h(U_t) = \sqrt{U_t}, & U_t \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

$$J = \frac{1}{2\sqrt{U_t}} \quad (4)$$
$$f_U(u_i) = |J|f_A(A_t) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left\{-\frac{u_t}{2\sigma^2}\right\}, \quad u_t \geq 0. \quad (5)$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡

实际中, 为了分析方便, 常应用归一化随机变量。令归一化随机变量 $V_t = \frac{U_1}{\sigma^2}$, 则可得到 V_t 的概率密度为

$$f_V(v_t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{v_t}{2}}, \quad v_t \geq 0. \quad (6)$$

当窄带随机过程为余弦信号加窄带高斯噪声时, 即

$$X(t) = a \cos \omega_0 t + N(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)], \quad (7)$$

其中 a, ω_0 为已知常数, $N(t)$ 为具有零均值、方差 σ^2 的窄带高斯噪声。根据 ?? 节分析的结果可知, $X(t)$ 的包络服从广义瑞利分布, 即

$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} I_0\left(\frac{aa_t}{\sigma^2}\right) \exp\left\{-\frac{a_t^2 + a^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad a_t \geq 0. \quad (8)$$

仿照 1 节中的方法, 不难导出包络平方 $U^2 = A^2$ 的一维概率密度为

$$f_U(u_i) = \frac{1}{2\sigma^2} I_0 \left[\frac{a\sqrt{u_t}}{\sigma^2} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [u_t + a^2] \right\}, \quad u_t \geq 0. \quad (9)$$

令 $V_t = \frac{U_t}{\sigma^2}$, 可得归一化随机变量 V 的概率密度函数为

$$f_V(v_i) = \frac{1}{2} I_0 \left[\frac{\sqrt{V_t} a}{\sigma} \right] \exp \left\{ -\frac{v_t + a^2/\sigma^2}{2} \right\}, \quad v_t \geq 0. \quad (10)$$



1. χ^2 分布

在有些应用中, 例如在信号检测中, 为了改进检测性能, 经常采用所谓视频积累技术, 即对包络的平方进行独立采样后再积累, 如图 3 所示, 这时输出的随机变量习惯上记为 χ^2 , 它的概率密度习惯上称之为 χ^2 分布如图所示, 让一个具有零均值和方差 σ^2 的平稳窄带实高斯噪声 $N(t)$ 通过一平方律检波器, 而检波器输出的是 $N(t)$ 的包络平方 $A^2(t)$ 。然后对随机过程 $A^2(t)$ 进行独立采样, 得到 m 个独立的随机变量 $A_i^2 = A^2(t_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 经归化以后送入累加器。下面讨论累加器输出端随机变量 χ^2 的概率密度。为了避免混淆, 在下面的推导中, 用 V 来代替 χ^2 。

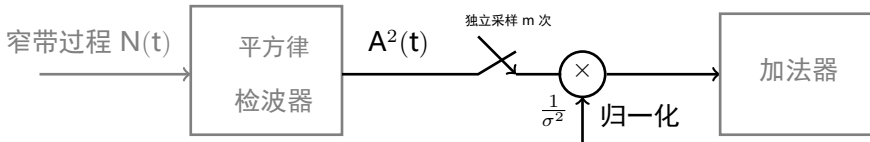


图 3: 视频积累技术

由于 A'_{ci}, A'_{si} 都是同分布的高斯变量, 故上式又可表示为式中每一个 X_i 都是同分布的标准高斯变量 (零均值、方差为 1), 且各 X_i 相互独立。为了书写简单, 用 n 代替上式中的 $2m$, 可得

$$V = \sum_{i=1}^{2m} X_i^2. \quad (13)$$

于是, 求 V 的概率密度便归结为求 n 个独立同分布高斯变量平方和的概率密度为此, 首先求每一随机变量 X_i^2 的概率密度。

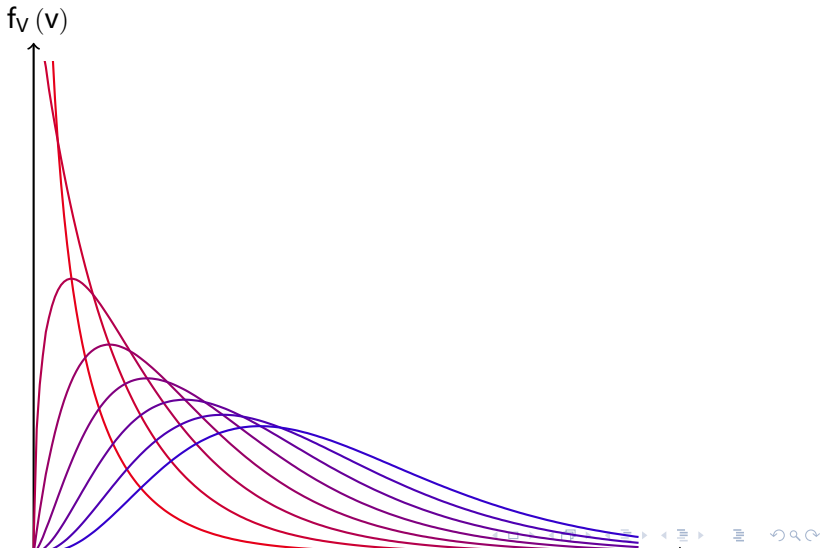
$$f_X(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x_i^2}{2} \right\}. \quad (14)$$
$$f_{Y_i}(y_i) = |J|f_X(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi_i}}e^{-\frac{y_i}{2}}, \quad y_i \geq 0. \quad (15)$$

随机信号分析

随机信号分析



卡方分布和非中心卡方分布



χ^2 分布具有下列性质

1° 两个独立的 χ^2 变量之和仍为 χ^2 变量。若它们各自的自由度分别为 n_1 和 n_2 , 则它们的和变量为具有 $(n_1 + n_2)$ 个自由度的 χ^2 分布 $2n$ 个自由度的 χ^2 变量的均值 $E[V] = n$, 方差 $D[V] = 2n$ 。

2. 非中心 χ^2 分布

若窄带过程 $N'(t)$ 为余弦信号 $N(t)$ 与窄带高斯噪声 $N(t)$ 之和, 则加法器输出的就是非中心 χ^2 分布。



(1) 信号包络为常数的情况
设信号

$$s(t) = a \cos(\omega_0 t + \pi/4) \quad (20)$$

包络 a 为常数, 则有

$$\begin{aligned} s(t) &= a \cos \frac{\pi}{4} \cos \omega_0 t + a \sin \frac{\pi}{4} \sin \omega_0 t \\ &= a \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega_0 t + a \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (21)$$

若令 $s = a\sqrt{2}/2$, 则

$$s(t) = s \cos \omega_0 t + s \sin \omega_0 t. \quad (22)$$

又由于

$$N(t) = n_e(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t. \quad (23)$$

代入 $N(t)$ 得

$$\begin{aligned} N'(t) &= s(t) + N(t) \\ &= [s + n_c(t)] \cos \omega_0 t - [s + n_s(t)] \sin \omega_0 t \\ &= A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (24)$$

而 $N(t)$ 的包络的平方

$$A^2(t) = A_c^2(t) + A_s^2(t) = [s + n_\epsilon(t)]^2 + [s + n_s(t)]^2. \quad (25)$$

仿照求 x^2 分布的方法, 加法器输出端的随机变量 V' 应为

$$V' = \sum_{i=1}^n (s + X_i)^2 = \sum_{i=1}^n Y \quad (26)$$

式中 X_i 为同分布的独立高斯变量 (均值为零、方差为 σ_2^2), s 为常数。

为了导出 V 的概率密度, 首先求 $Y_i = (s + X_i)^2$ 的概率密度和特征函数。
令

$$R_i = s + X_i. \quad (27)$$

显然, R_i 的概率密度为

$$f_{R_i}(r_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(r_i - s)^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (28)$$

则 $Y' = R^2$ 的概率密度为

$$f_{\gamma_i}(y'_i) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma^2 y'_i}} \left\{ \exp \left[-\frac{(\sqrt{y'_i} - s)^2}{2\sigma^2} \right] + \exp \left[-\frac{(-\sqrt{y'_i} - s)^2}{2\sigma^2} \right] \right\}. \quad (29)$$

将上式中指数的平方项展开, 并利用双曲余弦函数 $2 \cosh(b) = e^s + e^{-s}$, 可得

$$f_{\gamma_i}(y'_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y'_i}} \exp \left\{ -\frac{y'_i + s^2}{2\sigma^2} \right\} \cosh \left(\frac{s\sqrt{y'_i}}{\sigma^2} \right). \quad (30)$$

$$Q_{V'}(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^n Q_{Y'_i}(\mathbf{u}) = \left(\frac{1}{1 - \mathbf{j}2\sigma^2\mathbf{u}} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{n\sigma^2}{2\sigma^2} + \frac{n\sigma^2}{2\sigma^2(1 - \mathbf{j}2\sigma^2\mathbf{u})} \right\}. \quad (31)$$

对上式作傅里叶逆变换, 可得 V 的概率密度为

$$f_{V'}(v') = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{v'}{\lambda'^2} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp \left\{ -\frac{\lambda' + v'}{2\sigma^2} \right\} I_{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{\sqrt{v'\lambda'}}{\sigma^2} \right), \quad v' \geq 0. \quad (32)$$

式中, $\lambda' = s^2 n$ 定义为非中心参量, $I_n(\cdot)$ 为第一类 n 阶修正贝塞尔函数。

定义归一化变量 $V = V'/\sigma^2$, 那么

$$V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{s}{\sigma} + \frac{X_i}{\sigma} \right)^2 = \sum_{i=1}^n R_i'^2. \quad (33)$$

其中变量 R 是均值为 s/σ 、方差为 1 的相互独立的高斯变量。

易证 V 的概率密度为

$$f_V(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\lambda} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} - \frac{v}{2} \right\} I_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{v\lambda}), \quad v \geq 0. \quad (34)$$

上式是 n 个自由度的非中心 χ^2 分布。其中非中心参量 $\lambda = ns^2/\sigma^2$ 表示视频积累后的功率信噪比。



图 5 画出了不同信噪比 λ 和样本数 n 情况下的非中心 χ^2 函数。

图 5: 非中心 χ^2 分布: a) $\nu = 4, \lambda = 2.6$, b) $\nu = 2.6, \lambda = 2$



(2) 信号包络不为常数的情况
给定信号

$$s(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \pi/4), \quad (35)$$

包络 $a(t)$ 为确定函数, 则有

$$\begin{aligned} s(t) &= a(t) \cos \frac{\pi}{4} \cos \omega_0 t + a(t) \sin \frac{\pi}{4} \sin \omega_0 t \\ &= a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega_0 t + a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (36)$$

又由于

$$N(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t. \quad (37)$$

代入 $N'(t)$ 得

$$\begin{aligned} N'(t) &= s(t) + N(t) = \left[a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + n_e(t) \right] \cos \omega_0 t - \left[a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + n_1(t) \right] \sin \omega_0 t \\ &= A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (38)$$



而 $N(t)$ 的包络的平方

$$\begin{aligned} A^2(t) &= A_c^2(t) + A_0^2(t) \\ &= \left[a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + n_c(t) \right]^2 + \left[a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + n_3(t) \right]^2. \end{aligned} \quad (39)$$

在 t_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 时刻对 $A^2(t)$ 进行独立的采样, 令 $s = a(t)$ 仿照求 χ^2 分布的方法, 加法器输出端的随机变量 Q' 应为

$$Q' = \sum_{i=1}^n (s_i + X_i)^2 = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad (40)$$

式中 s 是对信号包络 $a(t)$ 的第 i 次采样, 是确定值。

由于单个样本 $Y_i = (s_i + X_i)^2$ 的特征函数, 可以直接应用上面信号包络为常量的推导结果

$$Q_Y^*(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - j2\sigma^2 u}} \exp \left\{ -\frac{s_1^2}{2\sigma^2} + \frac{s_1^2}{2\sigma^2 (1 - j2\sigma^2 u)} \right\}. \quad (41)$$

又因为 Y_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$) 相互独立, 而 $Q' = \sum_{k=1}^n Y_i$, 于是 Q' 的特征函数为

$$Q_\alpha(u) = \prod_{i=1}^n Q_{Y_i}(u) = \left(\frac{1}{1 - j2\sigma^2 u} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^n s_i^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n s_i^2}{2\sigma^2 (1 - j2\sigma^2 u)} \right\}. \quad (42)$$

$$f_{\alpha}(q') = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{q'}{\lambda'^2} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp \left\{ -\frac{\lambda' + q'}{2\sigma^2} \right\} \cdot I_{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{\sqrt{q'\lambda'}}{\sigma^2} \right), \quad q' \geq 0. \quad (43)$$
$$Q = \sum_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{\sigma} + \frac{X_i}{\sigma} \right)^2 \quad (44)$$

令

$$Z_i = \frac{s_i}{\sigma} + \frac{X_i}{\sigma}. \quad (45)$$

则 Z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 是具有均值 s_i/σ 和单位方差的独立高斯变量。于是, 可得具有 n 个自由度的非中心 χ^2 分布为

$$f_Q(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{\lambda} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} - \frac{q}{2} \right\} I_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{Q\lambda}). \quad (46)$$

式中 $\lambda = \sum_{i=1}^n s_i^2/\sigma^2$ 为非中心参量。

不难证明, 两个统计独立的非中心 χ^2 随机变量之和仍为非中心 χ^2 随机变量。



解: 先将 $N(t)$ 表示为

$$N(t) = A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (48)$$

若用 $A(t)$ 表示窄带随机过程 $X(t)$ 的包络, 那么在平方律检波器的输出端, 可得到包络平方为

$$A^2(t) = [a \cos \theta + A_c(t)]^2 + [a \sin \theta + A_s(t)]^2. \quad (49)$$

于是, 加法器输出端随机变量 V 为

$$V = \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^m (a \cos \theta + A_{ci})^2 + \sum_{i=1}^m (a \sin \theta + A_{si})^2 \right], \quad (50)$$

式中 $A_{ci} = A_c(t_i)$ 和 $A_{si} = A_s(t_i)$ 分别表示 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 在 t_i 时刻的状态。

根据 $A_c(t), A_s(t)$ 的有关性质可知, 各个 A_{α}, A_{s_i} 是同分布的独立标准高斯变量。对照式 (33) 可知, 上式中两个和式分别是自由度为 m 的非中心 χ^2 变量, 它们的非中心参量 λ_1 和 λ_2 分别为

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m (a \cos \theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2} \cos^2 \theta \\ \lambda_2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m (a \sin \theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2} \sin^2 \theta \end{cases} \quad (51)$$

由于这两个非中心 χ^2 随机变量也彼此独立, 因而它们的和变量 V 也是非中心 χ^2 随机变量, 自由度 $n = 2m$,

目录

- 窄带高斯噪声包络平方的分布
- 余弦信号加窄带高斯噪声包络平方的概率分布
- 卡方分布和非中心卡方分布

2 习题

证明: ① 偶函数的希尔伯特变换为奇函数。② 奇函数的希尔伯特变换为偶函数。 当 τ, ω_0 满足什么条件时, 能使 $y(t) = \frac{\sin(\pi t/\tau)}{\pi t/\tau} e^{j\omega_0 t} = \text{Sa}(\pi t/\tau) e^{j\omega_0 t}$ 为解析信号。画出 $\text{Sa}(\pi t/\tau)$ 和 $y(t)$ 的频谱图。

调频信号 $s(t) = \cos[\omega_0 t + m(t)]$, 当 ① $\frac{dm(t)}{dt} \ll \omega_0$ 时, 为窄带信号, 求 (1) 的包络和预包络。已知随机过程

$$\mathbf{X}(\mathbf{t}) = [\mathbf{X}_1(\mathbf{t}) \quad \mathbf{X}_2(\mathbf{t}) \quad \mathbf{X}_1(\mathbf{t} + \tau) \quad \mathbf{X}_2(\mathbf{t} + \tau)]^T. \quad (53)$$

式中 $X_1(t)$ 为平稳标准高斯过程, $X_2(t)$ 为 $X_1(t)$ 的希尔伯特变换。证明

$$\mathbb{E} [\mathbf{X}(\mathbf{t})\mathbf{X}^T(\mathbf{t})] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{R}_1(\tau) & \hat{\mathbf{R}}_1(\tau) \\ 0 & 1 & -\hat{\mathbf{R}}_1(\tau) & \mathbf{R}_1(\tau) \\ \mathbf{R}_1(\tau) & -\hat{\mathbf{R}}_1(\tau) & 1 & 0 \\ \hat{\mathbf{R}}_1(\tau) & \mathbf{R}_1(\tau) & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

其中 $R_1(\tau) = E[X_1(t)X_1(t + \tau)]$ 。



$$W(t) = X(t) \cos \omega_0 t - \hat{X}(t) \sin \omega_0 t. \quad (55)$$

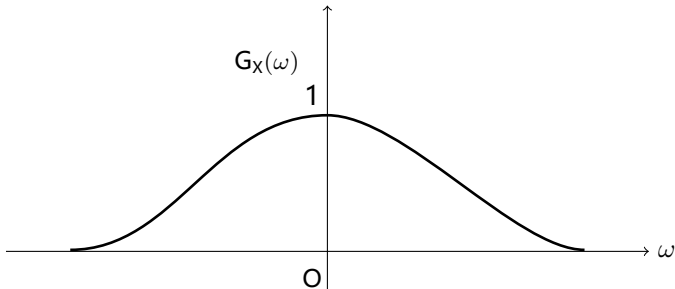


图 6:

零均值窄带平稳过程 $X(t) = A(t) \cos \omega_0 t - B(t) \sin \omega_0 t$ 的功率谱密度 $G_X(\omega)$ 在频带内关于中心频率 ω 偶对称, 其中 $A(t), B(t)$ 为平稳过程。

① 证明: $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau) = R_A(\tau) \cos \omega_0 \tau$ 。② 求 $X(t)$ 自相关函数的包络和预包络。已知零均值窄带平稳噪声

$X(t) = A(t) \cos \omega_0 t - B(t) \sin \omega_0 t$, 其功率谱密度如图 7 所示。画出下列情况下随机过程 $A(t), B(t)$ 各自的功率谱密度:

- (1) $\omega_0 = \omega_1$;
- (2) $\omega_0 = \omega_2$;
- (3) $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2) / 2$.

判断上述每种情况下, 过程 $A(t), B(t)$ 是否互不相关, 并给出理由。

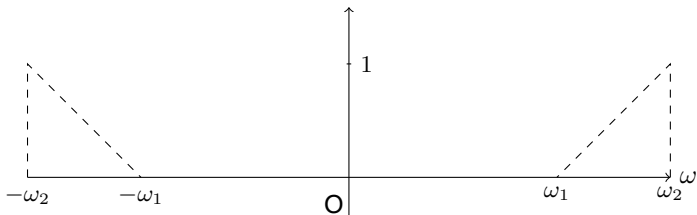


图 7:



随机信号分析

已知零均值, 方差为 σ^2 的窄带高斯平稳过程

$X(t) = A_e(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t$, 其中 $A_c(t), A_s(t)$ 为过程的一对垂直分解。证明: $R_X(\tau) = R_{A_c}(\tau) \cos \omega_0 \tau - R_{A_c A_s}(\tau) \sin \omega_0 \tau$ 。

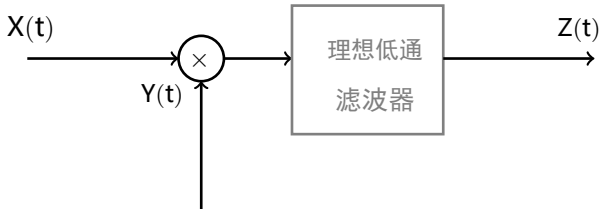


图 9:

证明: 零均值, 方差为 1 的窄带平稳高斯过程, 其任意时刻的包络平方的数学期望为 2, 方差为 4。 已知窄带高斯平稳过程 $X(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)]$, 包络 $A(t)$ 在任意时刻 t 的采样为随机变量 A , 求 A 的均值和方差。

如图 9 所示, 同步检波器的输入 $X(t)$ 为窄带平稳噪声, 其自相关函数为

$$R_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\beta|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \beta \ll \omega_0. \quad (57)$$

若另一输入

$$Y(t) = A \sin(\omega_0 t + \theta), \quad (58)$$

其中 A 为常数, 服从 $(0, 2\pi)$ 上的均匀分布, 且与噪声 $X(t)$ 独立。求检波器输出 $Z(t)$ 的平均功率。

○ ○
○ ○
○ ○
○ ○

○○

- ① 判断 $X(t)$ 和 $Z(t)$ 分别服从什么分布, 给出理由。
- ② 证明 $Z(t)$ 是严平稳过程。
- ③ 求 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数, $Y(t)$ 的功率谱密度,
- ④ 写出 $Z(t)$ 一维概率密度表达式。
- ⑤ 判断同一时刻, $Y(t)$ 和 $Z(t)$ 是否独立, 给出理由。



如图 11 所示, 系统输入 $N(t)$ 为物理谱密度为 N_0 的白噪声, 对包络平方检波后的过程进行二次独立采样, 求积累后的输出 $X(t)$ 的分布平方律。

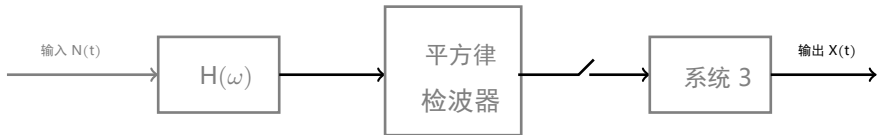


图 11: