

目录

- 1 随机过程的联合平稳
 - 希尔伯特变换的性质
 - 举例
- 2 高频窄带信号的复指数形式
 - 高频窄带信号通过窄带系统
 - 随机过程的解析形式及其性质
- 3 窄带随机过程
 - 窄带随机过程的“垂直”分解
 - 窄带随机过程的统计分析
- 4 窄带高斯过程包络与相位的分布
 - 包络和相位各自的二维概率分布
 - 随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布
- 5 窄带高斯过程包络平方的概率分布
 - 卡方分布和非中心卡方分布
 - 卡方分布的性质
- 6 窄带高斯过程包络平方的概率分布

第二次教案下载二维码

Github 下载



第 6 章 随机信号的时域分析

智慧树课堂二维码和项目地址



图 1:《随机信号分析》课程号:k213654



Github 项目地址

下载地址:

<https://github.com/zggl/random-signal-processing2020-autumn>

目录

- 1 随机过程的联合平稳
 - 希尔伯特变换的性质
 - 举例
- 2 高频窄带信号的复指数形式
 - 高频窄带信号通过窄带系统
 - 随机过程的解析形式及其性质
- 3 窄带随机过程
 - 窄带随机过程的“垂直”分解
 - 窄带随机过程的统计分析
- 4 窄带高斯过程包络与相位的分布
 - 包络和相位各自的二维概率分布
 - 随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布
- 5 窄带高斯过程包络平方的概率分布
 - 卡方分布和非中心卡方分布
 - 卡方分布的性质
- 6 窄带高斯过程包络平方的概率分布



若将 $S(\omega)$ 傅里叶逆变换分解成正负两频域部分积分之和

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &\stackrel{\omega' = -\omega}{=} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] + \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(-\omega') e^{-j\omega' t} d\omega' \right] \\
 &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] + \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega') e^{j\omega' t} d\omega' \right]^* \\
 &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \\
 &= \operatorname{Re}[\tilde{s}(t)].
 \end{aligned}$$

(6)

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty 2S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (7)$$

$\tilde{s}(t)$ 被称为实信号 $s(t)$ 的解析信号, 或 $s(t)$ 的预包络。

 $\tilde{s}(t)$ 还具有如下的单边频谱 $\tilde{S}(\omega)$

$$\begin{aligned}\tilde{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2S(\omega) e^{j\omega t} d\omega e^{-j\omega t} dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega e^{-j\omega t} dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt.\end{aligned}$$

由 $\text{Re}[\tilde{s}(t)] = s(t)$, 再令单边信号的虚部记为 $\hat{s}(t)$

$$\text{Im}[\tilde{s}(t)] = \hat{s}(t). \quad (10)$$

即解析信号 $s(t)$ 的虚部用符号 $\hat{s}(t)$ 表示, 则

$$\tilde{s}(t) = s(t) + j\hat{s}(t). \quad (11)$$

上式是解析信号 $s(t)$ 的一般表达式。

虚部 $\hat{s}(t)$ 的求取

式中的虚部 $\hat{s}(t)$ 又如何求得呢？

频域表达

从频域关系出发, 解析信号 $\tilde{s}(t)$ 的频谱 $\tilde{S}(\omega)$ 满足 $\tilde{S}(\omega) = 2S(\omega)U(\omega)$ 。

已知的傅里叶逆变换

$$U(\omega) \xrightleftharpoons[F]{F^{-1}} \frac{1}{2} \left[\delta(t) - \frac{1}{j\pi t} \right]. \quad (12)$$

(12)中复函数的计算基础

$$\oint_{|z|<0.2} \frac{1}{j\pi z} e^{-j\omega z} dz = \frac{1}{j\pi} \oint_{|z|<0.2} \frac{1}{z} e^{-j\omega z} dz = \frac{2j\pi}{j\pi} = 2. \quad (13)$$

解析信号的时域表达

$$\tilde{s}(t) = s(t) * \left[\delta(t) - \frac{1}{j\pi t} \right] = s(t) + j \left[s(t) * \frac{1}{\pi t} \right]. \quad (14)$$

实信号 $s(t)$ 的希尔伯特 (Hilbert) 变换

实信号 $s(t)$ 单边谱的虚部

$$\begin{aligned} \hat{s}(t) &= s(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t - \tau)}{\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (15)$$

上式称为实信号 $s(t)$ 的希尔伯特 (Hilbert) 变换, 记作 $\hat{s}(t) = H[s(t)]$ 。

对于任何一个实信号 $s(t)$, 都可以分解出一个单边谱的解析信号 $\tilde{s}(t)$ 与其对应。

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty 2S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (16)$$

解析信号 $\tilde{s}(t)$ 是个复信号, 其实部为原信号 $s(t)$, 虚部为原信号 $s(t)$ 的希尔伯特变换 $\hat{s}(t)$ 。

$$\begin{aligned} \text{Im}[\tilde{s}(t)] &= \hat{s}(t) = s(t) * \frac{1}{\pi t} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t-\tau)}{\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

解析信号的作用

解析信号是最常用的复信号之一, 它在分析窄带随机信号中起着重要作用.

希尔伯特变换的作用

希尔伯特变换是应用解析信号, 分析系统时必不可少的数学工具.

复信号的解析形式表示

用解析形式表示复信号的方法称为希尔伯特表示法.

希尔伯特变换的几个重要性质

1. 希尔伯特变换相当于一个正交滤波器

希尔伯特变换是 $s(t)$ 和 $1/\pi t$ 的卷积, 根据线性系统的输出特征, 可以将 $\hat{s}(t)$ 看成是 $s(t)$ 通过一个具有冲激响应的线性滤波器, 如图 2 所示。

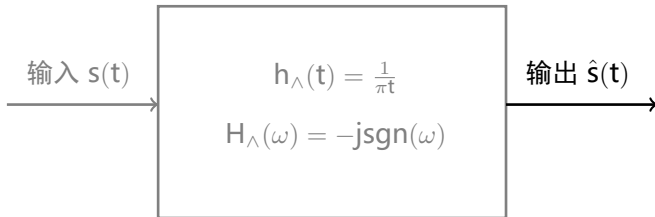


图 2: 希尔伯特变换



$j\frac{1}{\pi t}$ 和 $\text{sgn}(\omega)$ 的傅里叶变换关系

$$j\frac{1}{\pi t} \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} \text{sgn}(\omega), \quad (18)$$

式中 $\text{sgn}(a)$ 为符号函数。

满足的条件

$$\text{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > 0 \\ -1, & \omega < 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$\frac{1}{\pi t} \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} -j\text{sgn}(\omega). \quad (20)$$

滤波器输出信号 $\hat{s}(t)$ 相应的频谱

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= H_{\Lambda}(\omega)S(\omega) = -j\operatorname{sgn}(\omega)S(\omega) \\
 &= \begin{cases} -jS(\omega), & \omega > 0 \\ jS(\omega), & \omega < 0 \end{cases} .
 \end{aligned} \tag{24}$$

由式 (24) 可见, 通过此滤波器的信号, 其所有频率分量的幅度响应为常值 1.

希尔伯特变换是一个正交滤波器

而在相位上, 所有正频率分量移相 $-\pi/2$, 所有负频率分量移相 $+\pi/2$ 。因此说, 希尔伯特变换是一种正交变换, 它的作用相当于一个正交滤波器, 如图 26 中所示的一次变换。

3. 希尔伯特逆变换等于负的希尔伯特正变换

定义希尔伯特逆变换为

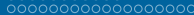
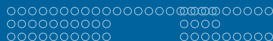
$$s(t) = H^{-1}[\hat{s}(t)]. \quad (28)$$

由式 (27) 可得

$$\begin{aligned}
 H[\hat{s}(t)] &= -s(t) \Rightarrow s(t) \\
 &= -H[\hat{s}(t)].
 \end{aligned} \quad (29)$$

对比式 (28) 和式 (29) 可知

$$s(t) = -H[\hat{s}(t)]. \quad (30)$$



希尔伯特逆变换等于负的希尔伯特正变换

$$H^{-1}[\cdot] = -H[\cdot]. \quad (31)$$

希尔伯特逆变换的公式

$$\begin{aligned} s(t) &= H^{-1}[\hat{s}(t)] = -H[\hat{s}(t)] \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{s}(t-\tau)}{\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{s}(t+\tau)}{\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (32)$$

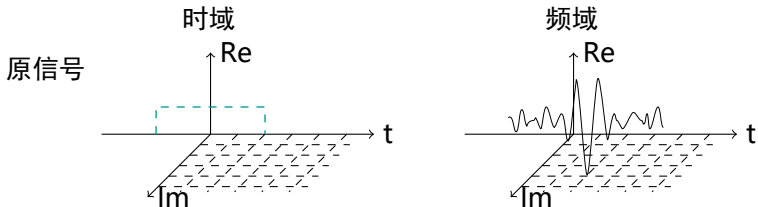
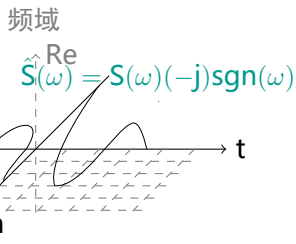
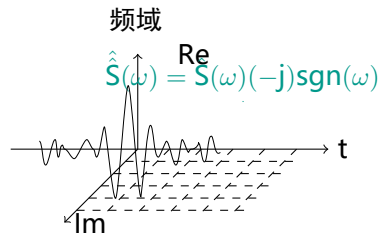
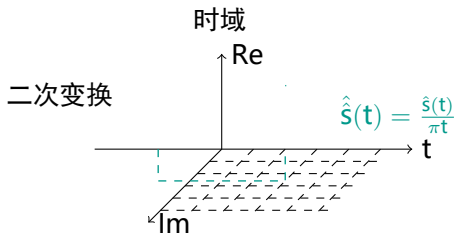


图 3: 希尔伯特变换 (子图 1-1, 1-2)





希尔伯特变换 (子图 3-1,3-2)



例 .1

求 $\cos \Omega t, \sin \Omega t$ 的希尔伯特变换。



解:

①

$$\begin{aligned}
 H[\cos \Omega t] &= \cos \Omega t * \frac{1}{\pi t} \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[\Omega(t - \tau)]}{\tau} d\tau.
 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} H[\cos \Omega t] &= \cos \Omega t * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[\omega(t - \tau)]}{\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\tau} \cos \Omega t \cos \Omega \tau + \frac{1}{\tau} \sin \Omega t \sin \Omega \tau \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\cos \Omega t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \Omega \tau}{\tau} d\tau \right. \\ &\quad \left. + \sin \Omega t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Omega \tau}{\tau} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

随机信号分析

例 .2

设限带信号

$$\begin{cases} s_1(t) = a(t) \cos \omega_0 t \\ s_2(t) = a(t) \sin \omega_0 t \end{cases} \quad (45)$$

其中 $a(t)$ 为低频限带信号, 其频谱为

$$A(\omega), \quad |\omega| < \frac{\Delta\omega}{2} < \omega_0, \quad (46)$$

求 $s_1(t), s_2(t)$ 的 Hilbert 变换。

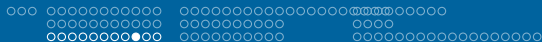


解: ① 利用傅里叶变换的相乘性质, 有

$$\begin{aligned} s_1(\mathbf{t}) &= \mathbf{a}(\mathbf{t}) \cos \omega_0 \mathbf{t} \xleftrightarrow[\mathbf{F}^{-1}]{\mathbf{F}} \frac{1}{2\pi} \mathbf{A}(\omega) * \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ S_1(\omega) &= \frac{1}{2} [\mathbf{A}(\omega - \omega_0) + \mathbf{A}(\omega + \omega_0)] \end{aligned} \quad (47)$$

如图 4 所示, 由于 $\frac{\Delta\omega}{2} < \omega_0$, 可得

$$\mathbf{S}_1(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathbf{A}(\omega - \omega_0), & \omega > 0 \\ \frac{1}{2}\mathbf{A}(\omega + \omega_0), & \omega < 0 \end{cases} \quad (48)$$



举例

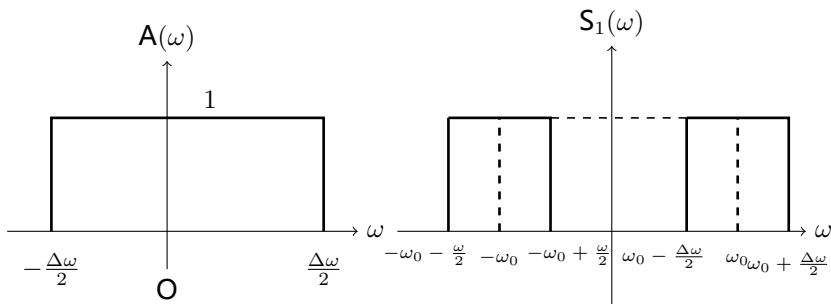


图 4: 例 2 的图

随机信号分析

内蒙古大学电子信息工程学院

目录

- 1 随机过程的联合平稳
 - 希尔伯特变换的性质
 - 举例
- 2 高频窄带信号的复指数形式
 - 高频窄带信号通过窄带系统
 - 随机过程的解析形式及其性质
- 3 窄带随机过程
 - 窄带随机过程的“垂直”分解
 - 窄带随机过程的统计分析
- 4 窄带高斯过程包络与相位的分布
 - 包络和相位各自的二维概率分布
 - 随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布
- 5 窄带高斯过程包络平方的概率分布
 - 卡方分布和非中心卡方分布
 - 卡方分布的性质
- 6 窄带高斯过程包络平方的概率分布

随机信号分析

这类信号的典型频谱如图 5(a) 所示。如果在示波器上观察这类窄带信号, 它的波形或多或少地有点像正弦波, 如图 5(b) 所示。但它的振幅、相位不是常数, 而是随 t 变化的函数这类窄带信号 $s(t)$ 可以表示为

$$s(t) = a(t) \cos [\omega_0 t + \phi(t)], \quad (53)$$

式中 $a(t)$ 是信号 $s(t)$ 的振幅调制, 称为包络函数。 $\phi(t)$ 是信号 $s(t)$ 的相位调制, 称为相位函数。

相对载波 $\cos \omega t$ 来讲, $a(t)$ 与 $\phi(t)$ 都是慢变化的时间函数。

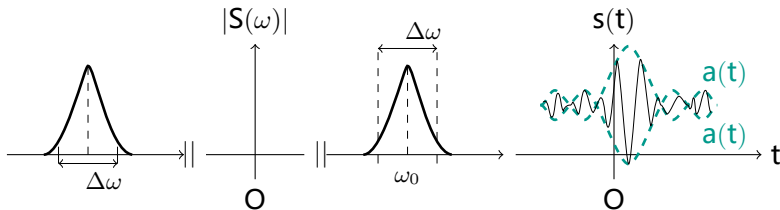


图 5: 高频窄带信号

将上式展开后的结果

$$\begin{aligned}
 s(t) &= a(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] \\
 &= a(t) \cos \varphi(t) \cos \omega_0 t - a(t) \sin \varphi(t) \sin \omega_0 t \quad (54) \\
 &= m_c(t) \cos \omega_0 t - m_s(t) \sin \omega_0 t,
 \end{aligned}$$

其中的垂直分量 $m_c(t)$ 和 $m_s(t)$

$$\begin{cases} m_c(t) = a(t) \cos \varphi(t) \\ m_s(t) = a(t) \sin \varphi(t) \end{cases} \quad (55)$$

可见 $m_c(t)$, $m_s(t)$ 相对 $\cos \omega_0 t$ 来讲都是低频信号, 且 $m_c(t)$ 与 $m_s(t)$ 在几何上彼此正交。

可得 $s(t)$ 的希尔伯特变换 (由例 26 的结论)

$$\begin{aligned}\hat{s}(t) &= H[m_c(t) \cos \omega_0 t] - H[m_s(t) \sin \omega_0 t] \\ &= m_c(t) \sin \omega_0 t + m_s(t) \cos \omega_0 t \\ &= a(t) \cos \varphi(t) \sin \omega_0 t + a(t) \sin \varphi(t) \cos \omega_0 t \\ &= a(t) \sin [\omega_0 t + \varphi(t)].\end{aligned}\tag{58}$$

$s(t)$ 的解析形式可以用复指数表示形式

$$\begin{aligned}
 \tilde{s}(t) &= s(t) + j\hat{s}(t) \\
 &= a(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] + ja(t) \sin [\omega_0 t + \varphi(t)] \\
 &= a(t)e^{j[\omega_0 t + \varphi(t)]} \\
 &= m(t)e^{j\omega_0 t} \\
 &= \tilde{s}_k(t),
 \end{aligned} \tag{59}$$

其中，式中

$$m(t) = a(t)e^{j\varphi(t)}, \tag{60}$$

误差分析

(1) 误差产生的原因

从复指数形式的推导过程可以看出, 尽管解析信号 $\tilde{s}(t)$ 是复信号, 但要将它表示成复指数形式, 还必须满足 $m_c(t), m_s(t)$ 均为低频限带信号的条件。如果不满足此条件, 就不能由解析信号推出复指数表示。即不满足 $m_c(t)$ 和 $m_s(t)$ 低频限带信号的条件, 其解析信号表示与复指数表示仍存在一定的误差。

(2) 误差的计算

下面举例, 在频域上对解析信号与复指数信号进行比较, 计算它们之间的误差。

设一实信号 $s(t) = a(t) \cos \omega_0 t$, 其复包络 $m(t) = a(t)$, 复包络的频谱 $M(\omega)$ 不满足低频限带条件, 如图 6 所示

$$m(t) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} M(\omega), \quad |\omega| < \Delta\omega \not\ll \omega_0. \quad (62)$$

实信号 $s(t)$ 频谱

$$S(\omega) = \frac{1}{2} [M(\omega + \omega_0) + M(\omega - \omega_0)]. \quad (63)$$

① $s(t)$ 的解析信号形式

$$\bar{s}(t) = s(t) + j\hat{s}(t). \quad (64)$$

解析信号的频谱

$$\tilde{S}(\omega) = 2S(\omega)U(\omega) = [M(\omega + \omega_0) + M(\omega - \omega_0)] U(\omega). \quad (65)$$

② $s(t)$ 的复指数表示

$$\bar{s}_{\text{复}}(t) = m(t)e^{j\omega_0 t}. \quad (66)$$

复信号频谱

$$\tilde{S}_{\text{复}}(t)(\omega) = M(\omega - \omega_0). \quad (67)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= \mathcal{S}_{\text{复}}(\omega) - \mathbf{S}(\omega) \\ &= \mathbf{M}(\omega - \omega_0) [1 - \mathbf{U}(\omega)] - \mathbf{M}(\omega + \omega_0) \mathbf{U}(\omega).\end{aligned}\quad (68)$$

这个误差在时域的表达式为

$$\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\int_{-\infty}^{\infty} M(\omega) e^{i(\omega + \omega_0)t} d\omega \right]. \quad (69)$$

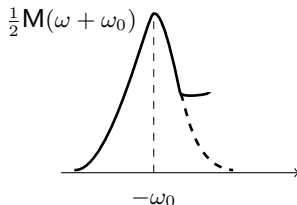
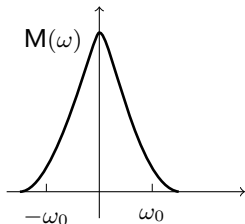
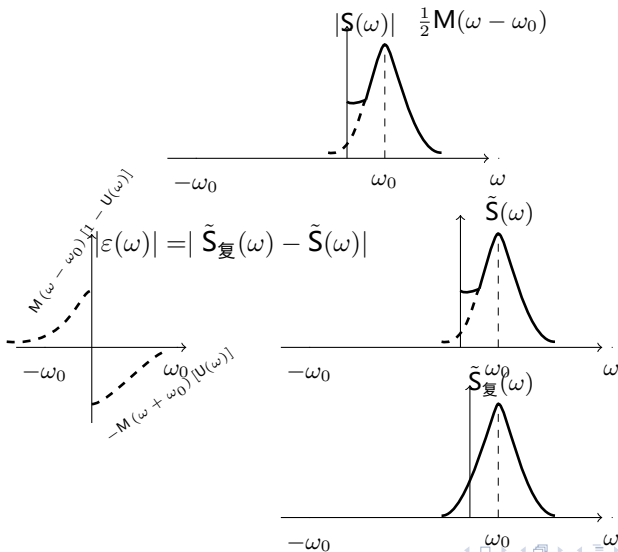


图 6: 误差分析



(3) 误差分析

如图 6和 7 所示, 误差 $\varepsilon(t)$ 的大小取决于 $M(\omega)$ 中 $|\omega| > \omega_0$ 尾部所包含的能量。若尾部能量为零, 则误差 $\varepsilon(t)$ 为零。

解析形式表示成复数形式的要求

若要将 $s(t)$ 的解析形式表示成复数形式, 则要求复包络 $m(t)$ 必须是个低频限带信号, 即必须满足

$$M(\omega) = 0, \quad |\omega| > \Delta\omega, \Delta\omega < \omega_0, \quad (70)$$

也即 $\varepsilon(t) = 0$ 。可见, 此条件与前面从解析形式推导到复指数形式过程中的条件是一致的。

情形 1

情形 2

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ↺ 🔍 ↻

若已知高频窄带信号复包络的频谱 $M(\omega)$, 有

$$\tilde{s}_{\text{复}}(t) = m(t)e^{j\omega_0 t} \xLeftrightarrow[F]{F^{-1}} \tilde{S}_{\text{复}}(\omega) = M(\omega - \omega_0), \quad (71)$$

则

$$\tilde{s}_{\text{复}}^*(t) \xLeftrightarrow[F]{F^{-1}} \tilde{S}_{\text{复}}^*(-\omega) = M^*(-\omega - \omega_0) \quad (72)$$

由于可以用复指数形式代替其解析形式 $\tilde{s}(t) = \tilde{s}_{\text{复}}(t)$, 则

$$s(t) = \text{Re}[\tilde{s}(t)] = \text{Re}[\tilde{s}_{\text{复}}(t)] = \frac{1}{2} [\tilde{s}_{\text{复}}(t) + \tilde{s}_{\text{复}}^*(t)] \quad (73)$$

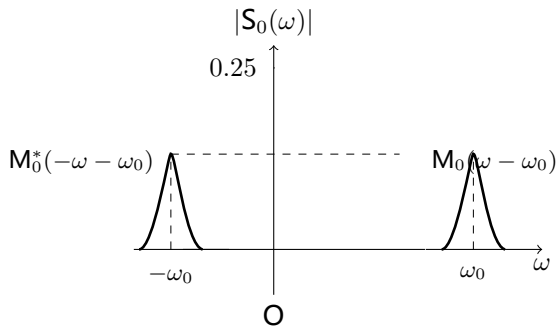


图 9: 高频窄带信号通过窄带系统

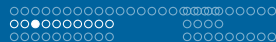
下面就讨论高频窄带信号通过相同中心频率的高频窄带系统的一种简便分析方法。

$$s_i(t) = \text{Re} [s_i(t)] = \text{Re} [m_i(t)e^{iv}] , \quad (75)$$
$$S_i(\omega) = \frac{1}{2} [M_i(\omega - \omega_0) + M_i^*(-\omega - \omega_0)]. \quad (76)$$

$$\begin{aligned} h(t) &= \text{Re}[\tilde{h}(t)] = \text{Re} \left[h_m(t) e^{j\omega_0 t} \right] \\ H(\omega) &= \frac{1}{2} [H_m(\omega - \omega_0) + H_m^*(-\omega - \omega_0)], \end{aligned} \quad (77)$$

其中 $h_m(t)$, $H_m(\omega)$ 分别为窄带系统的复包络及其频谱。

$$s_0(t) = s_i(t) * h(t) \quad (78)$$
$$S_0(\omega) = S_i(\omega)H(\omega). \quad (79)$$



将输入窄带信号和窄带系统的频谱 $S_0(\omega)$ 代入上式 (79), 得

$$\begin{aligned}
 S_0(\omega) &= \frac{1}{4} [\mathbf{M}_i(\omega - \omega_0) + \mathbf{M}_i^*(-\omega - \omega_0)] \\
 &\quad [\mathbf{H}_m(\omega - \omega_0) + \mathbf{H}_m^*(-\omega - \omega_0)] \\
 &= \frac{1}{4} [\mathbf{M}_i(\omega - \omega_0) \mathbf{H}_m(\omega - \omega_0) + \mathbf{M}_i(\omega - \omega_0) \mathbf{H}_m^*(-\omega - \omega_0) \\
 &\quad + \mathbf{M}_i^*(-\omega - \omega_0) \mathbf{H}_m(\omega - \omega_0) \\
 &\quad + \mathbf{M}_i^*(-\omega - \omega_0) \mathbf{H}_m^*(-\omega - \omega_0)].
 \end{aligned}
 \tag{80}$$

由于 $s(t)$ 的复包络 $m_i(t)$ 是低频限带信号, 其频谱 $M_i(\omega)$ 如图 10 和图 11 所示

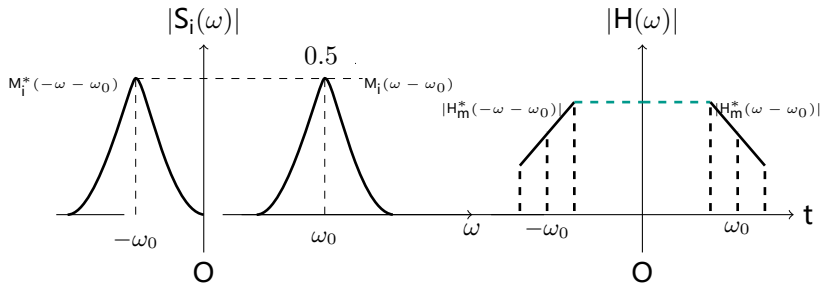


图 10: 高频窄带信号通过窄带系统-1

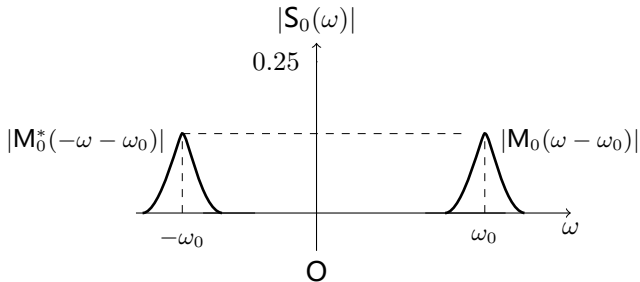
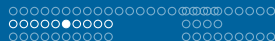


图 11: 高频窄带信号通过窄带系统-2



$$\begin{cases} M_i^*(-\omega - \omega_0) H_m(\omega - \omega_0) = 0 \\ M_i(\omega - \omega_0) H_m^*(-\omega - \omega_0) = 0 \end{cases} \quad (81)$$

由图可知, 式 (81) 显然成立。

$S_0(\omega)$ 的结果

$$\begin{aligned} S_0(\omega) = \frac{1}{4} & \left[M_i(\omega - \omega_0) H_m(\omega - \omega_0) \right. \\ & \left. + M_i^*(-\omega - \omega_0) H_m^*(-\omega - \omega_0) \right]. \end{aligned} \quad (82)$$



相应的输出信号

$$s_0(t) = \frac{1}{4} [m_i(t) * h_m(t)] e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{4} [m_i(t) * h_m(t)]^* e^{-j\omega_0 t} \quad (83)$$

又因为

$$s_o(t) = \text{Re} [\tilde{s}_o(t)] = \frac{1}{2} [\tilde{s}_o(t) + \tilde{s}_o^*(t)] . \quad (84)$$

可得

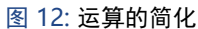
$$\tilde{s}_o(t) = \frac{1}{2} [m_i(t) * h_m(t)] e^{j\omega_0 t} . \quad (85)$$



即输出的复包络 $m_0(t)$ 仅由输入信号的复包络 $m_i(t)$ 与系统冲激响应的复包络 $h_m(t)/2$ 卷积而成。

这种处理方法使我们对高频窄带信号通过高频窄带系统这类问题的分析与运算大为简化。

避免了高频信号与高频冲激响应卷积时的麻烦的高频项处理。



因此, $Y(t)$ 可以看成是输入 $X(t)$ 下线性系统 $h_{\lambda}(t)$ 的输出, 即

$$Y(t) = X(t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{X}(t). \quad (90)$$

如图 13 所示。正是利用这一等效, 使得在下一节中应用解析过程来分析窄带随机后号变得是十分方便。

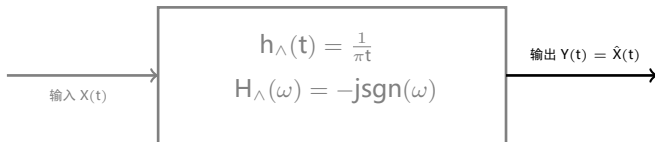


图 13: 解析过程

希尔伯特变换

希尔伯特变换是一种线性变换, 那么随机信号通过线性系统的结论在此解析过程的性质可应用。

若 $X(t)$ 为宽平稳 (实) 过程, 则 $\hat{X}(t)$ 也是宽平 (实) 过程且 $X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 联合宽平稳。

2° 实随机过程

证: 从图 13 不难看出

$$G_X(\omega) = G_X(\omega) |H_\Lambda(\omega)|^2 \quad (91)$$

$$|H_\Lambda(\omega)| = |-j\text{sgn}(\omega)| = 1. \quad (92)$$

因此

$$G_{\hat{X}}(\omega) = G_X(\omega) \Rightarrow R_X(\tau) = R_X(\tau). \quad (93)$$

$X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 的互相关函数等于 $X(t)$ 自相关函数的希尔伯特变换。

据线性系统输入输出随机信号之间互相关函数的性质, 有

$$\begin{aligned}
 R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) &= E[X(t)\hat{X}(t+\tau)] = R_X(\tau) * h_{\Lambda}(\tau) = R_X(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} \\
 &= \bar{R}_X(\tau). \\
 R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau) * h_{\Lambda}(-\tau) \\
 &= -R_X(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = -\hat{R}_X(\tau).
 \end{aligned} \tag{94}$$

且有

$$R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) = -R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau). \tag{95}$$

由此可得 $X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 的互功率谱密度为

$$\begin{aligned}
 G_{X\hat{X}}(\omega) &= F[R_{X\hat{X}}(\tau)] = F[\hat{R}_X(\tau)] \\
 &= -j\text{sgn}(\omega)G_X(\omega) = \begin{cases} -jG_X(\omega), & \omega > 0 \\ jG_X(\omega), & \omega < 0 \end{cases} \quad (96)
 \end{aligned}$$

4° $X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 的互相关函数是 τ 的奇函数

$$R_{X\hat{X}}(-\tau) = R_X(-\tau) * h_{\wedge}(-\tau). \quad (97)$$

且 $R_X(\tau)$ 是偶函数, 则

$$\begin{aligned}
 R_{X\hat{X}}(-\tau) &= R_X(-\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) \\
 &= R_X(\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) = -\hat{R}_X(\tau) = -R_{X\hat{X}}(\tau). \quad (98)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}}(-\tau) = -\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}}(\tau). \quad (99)$$

证: 因为 $R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau), R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau)$ 是 τ 的奇函数, 所以当 $\tau = 0$ 时, 有

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{\mathbf{X}\hat{\mathbf{X}}}(0) = 0 \\ \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{X}}\mathbf{X}}(0) = 0 \end{cases} \quad (100)$$

$$R_{\hat{X}\hat{X}}(0) = E[\hat{X}(t)X(t)] = 0. \quad (101)$$

6° 解析过程的功率谱密度只存在于正频域

按照复随机过程自相关函数的定义, 解析过程 $\tilde{X}(t)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned}
 R_X(\tau) &= E[\bar{X}(t) \cdot \tilde{X}(t + \tau)] \\
 &= E\{[X(t) - j\hat{X}(t)][X(t + \tau) + j\hat{X}(t + \tau)]\} \\
 &= R_X(\tau) + R_X(\tau) + j[R_{X\hat{X}}(\tau) - R_{\hat{X}X}(\tau)].
 \end{aligned} \tag{102}$$

再应用性质 2° 和 3° 可得

$$R_X(\tau) = 2[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)] = 2\tilde{R}_X(\tau). \tag{103}$$

解析过程 $\tilde{X}(t)$ 的功率谱密度

对式 (103) 两边求傅里叶变换, 可得解析过程 $\tilde{X}(t)$ 的功率谱密度为

$$\begin{aligned}
 G_{\tilde{X}}(\omega) &= 2 \left\{ G_X(\omega) + jF \left[\hat{R}_X(\tau) \right] \right\} \\
 &= 2 \left\{ G_X(\omega) + j[-j \operatorname{sgn}(\omega) G_X(\omega)] \right\} \\
 &= 2 [G_X(\omega) + \operatorname{sgn}(\omega) G_X(\omega)] \\
 &= \begin{cases} 4G_X(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{104}$$

上式表明, 解析过程的功率谱密度只存在于正频域, 即它是单边带的功率谱密度其强度等于原实过程功率谱密度强度的 4 倍。 $G_X(\omega) \leftrightarrow G_X(\omega)$ 的关系如图 14 所示。

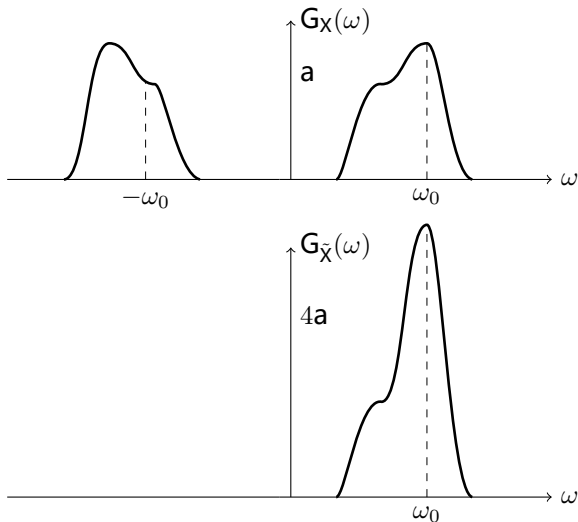


图 14: 解析过程的功率谱

目录

- 1 随机过程的联合平稳
 - 希尔伯特变换的性质
 - 举例
- 2 高频窄带信号的复指数形式
 - 高频窄带信号通过窄带系统
 - 随机过程的解析形式及其性质
- 3 窄带随机过程
 - 窄带随机过程的“垂直”分解
 - 窄带随机过程的统计分析
- 4 窄带高斯过程包络与相位的分布
 - 包络和相位各自的二维概率分布
 - 随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布
- 5 窄带高斯过程包络平方的概率分布
 - 卡方分布和非中心卡方分布
 - 卡方分布的性质
- 6 窄带高斯过程包络平方的概率分布

随机信号分析



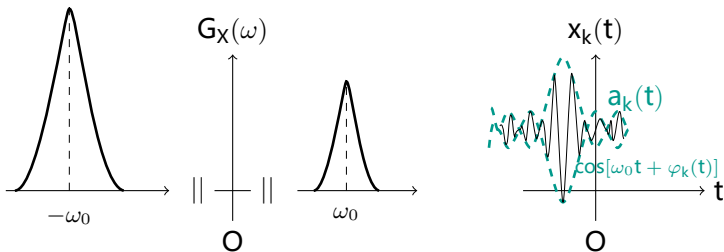


图 15: 窄带随机过程

由于 $a_k(t), \varphi(t)$ 相对 $\cos \omega_0 t$ 来说是慢变化的时间函数, 所以 $A(t), \Phi(t)$ 相对常数来说就是慢变化的随机过程。于是, 我们就可以把窄带随机过程看成是一个随机调幅和随机调相的准正弦振荡。

将高频窄带信号的复指数形式应用到窄带随机过程有

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}(t) &= A(t)e^{j\Phi(t)}e^{jm_0t} \\
 &= M(t)e^{j\omega_0t},
 \end{aligned}
 \tag{107}$$

式中符号说明

- ① $M(t)$ 称为 $X(t)$ 的复包络,
- ② $A(t)$ 称为包络,
- ③ $\Phi(t)$ 称为相位,
- ④ $e^{j\omega_0t}$ 称之为复载频。

$$M(t) = A(t)e^{j\Phi(t)},
 \tag{108}$$

窄带随机过程 X 是平稳过程下的统计特性 (复指数形式)

(1) 自相关函数

$$\begin{aligned}
 R_X(\tau) &= E \left[\tilde{X}^*(t) \tilde{X}(t + \tau) \right] \\
 &= E \left[M^*(t) e^{-j\omega_0 t} M(t + \tau) e^{j\omega_0 (t + \tau)} \right] \\
 &= E \left[M^*(t) M(t + \tau) \right] e^{j\omega_0 \tau} \\
 &= R_M(\tau) e^{j\omega_0 \tau}.
 \end{aligned} \tag{109}$$

(2) 功率谱密度

利用傅里叶变换对的结论 $R_M(\tau) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} G_M(\omega)$, 则有

$$G_{\tilde{X}}(\omega) = G_M(\omega - \omega_0) \quad (110)$$

因为 $R_{\tilde{X}}(\tau) = 2 [R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)]$, 可得

$$R_{\tilde{X}}(\tau) + R_{\tilde{X}}^*(\tau) = 2 [R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)] + 2 [R_X(\tau) - j\hat{R}_X(\tau)] \quad (111)$$

由上式解得

$$\begin{aligned}
 R_X(\tau) &= \frac{1}{4} [R_{\tilde{X}}(\tau) + R_{\tilde{X}}^*(\tau)] = \frac{1}{4} [R_M(\tau)e^{j\omega_0\tau} + R_M^*(\tau)e^{-j\omega_0\tau}] \\
 G_X(\omega) &= \frac{1}{4} [G_X(\omega) + G_X^*(-\omega)] = \frac{1}{4} [G_M(\omega - \omega_0) + G_M^*(-\omega - \omega_0)]
 \end{aligned} \quad (112)$$

此得出 $X(t)$ 与 $\tilde{X}(t)$ 及 $M(t)$ 之间在频域上的关系, 如图 17 所示。

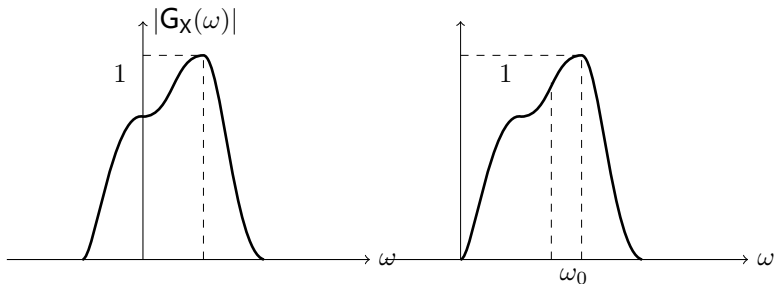


图 16: 窄带随机过程的功率谱

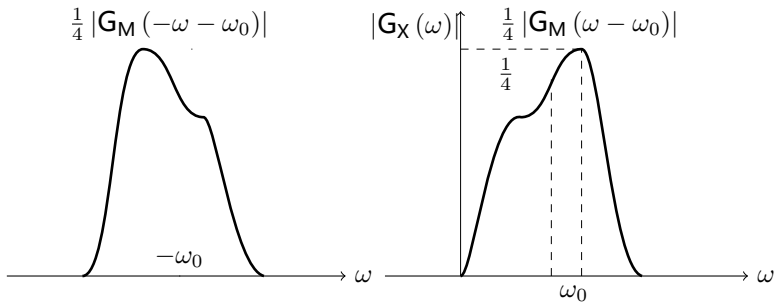


图 17: 窄带随机过程的功率谱

$$\mathbf{M}(t) = [\mathbf{A}(t) \cos \Phi(t) + \mathbf{jA}(t) \sin \Phi(t)] = \mathbf{A}_c(t) + \mathbf{jA}_s(t) \quad (116)$$

其中

$$\begin{cases} A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)} \\ \Phi(t) = \tan^{-1} \frac{A_s(t)}{A_c(t)} = \arctan \frac{A_s(t)}{A_c(t)} \end{cases} \quad (117)$$

可见, 窄带随机过程 $X(t)$ 的包络过程的垂直分解 $A(t)$, 相位 $\Phi(t)$ 完全可由 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 确定。且 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 是一对在几何上正交的分量。如图 18 所示。

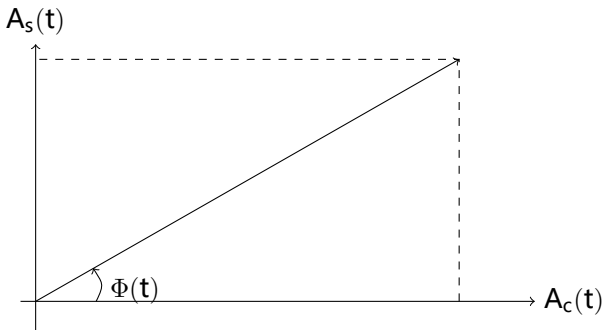


图 18: 窄带过程的垂直分解

一对垂直分量 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$

为了与统计意义上的“正交”有所区别, 今后我们把几何意义上的“正交”改称为“垂直”, 称 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 为一对垂直分量。

$X(t)$, $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 之间的函数关系的导出

$X(t)$ 和 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 之间的函数关系

$$\begin{cases} X(t) = A_c(t) \cos \omega_0(t) - A_s(t) \sin \omega_0 t \\ \hat{X}(t) = A_c(t) \sin \omega_0(t) + A_s(t) \cos \omega_0 t \end{cases} \quad (118)$$

$$\begin{cases} A_c(t) = X(t) \cos \omega_0(t) + \hat{X}(t) \sin \omega_0 t \\ A_s(t) = \hat{X}(t) \cos \omega_0(t) - X(t) \sin \omega_0 t \end{cases} \quad (119)$$

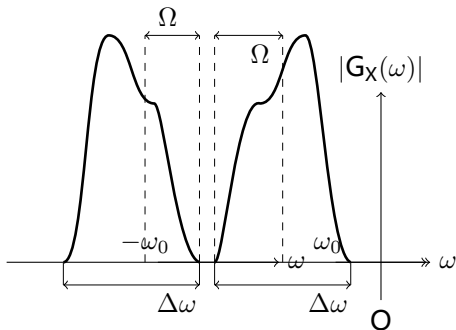


图 19: 零均值平稳窄带实随机过程的频谱

这里 Ω 和 $\Delta\omega$ 皆为正实常数, $\Delta\omega \ll \omega_0$ 。

$A_C(t)$ 和 $A_S(t)$ 这对垂直分量的性质

$A(t)$

$A_C(t)$ 和 $A_S(t)$ 均为实随机过程。 $A_C(t)$ 和 $A_S(t)$ 的期望 $A(t)$, $A(t)$ 的期望均为 0, 即满足

$$E[A_C(t)] = E[A_S(t)] = 0. \quad (121)$$

3. $A_C(t)$ 和 $A_S(t)$ 的自相关函数

① $A_C(t)$ 和 $A_S(t)$ 各自平稳, 它们的自相关函数为

$$\begin{aligned}
 R_{A_C}(\tau) &= R_{A_S}(\tau) \\
 &= R_X(\tau) \cos \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \sin \omega_0 \tau.
 \end{aligned} \quad (122)$$

随机信号分析

4. $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 的功率谱密度

$$G_{A_c}(\omega) = G_{A_s}(\omega) = L_p [G_X(\omega - \omega_0) + G_X(\omega + \omega_0)] . \quad (126)$$

其中 $L_p[\cdot]$ 表示一低通滤波器。

证: 由于

$$\begin{aligned}
 R_{A_c}(\tau) &= R_X(\tau) \cos \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \sin \omega_0 \tau \\
 &= \frac{1}{2} R_X(\tau) \left[e^{j\omega_0 \tau} + e^{-j\omega_0 \tau} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2j} \hat{R}_X(\tau) \left[e^{j\omega_0 \tau} - e^{-j\omega_0 \tau} \right] .
 \end{aligned} \quad (127)$$

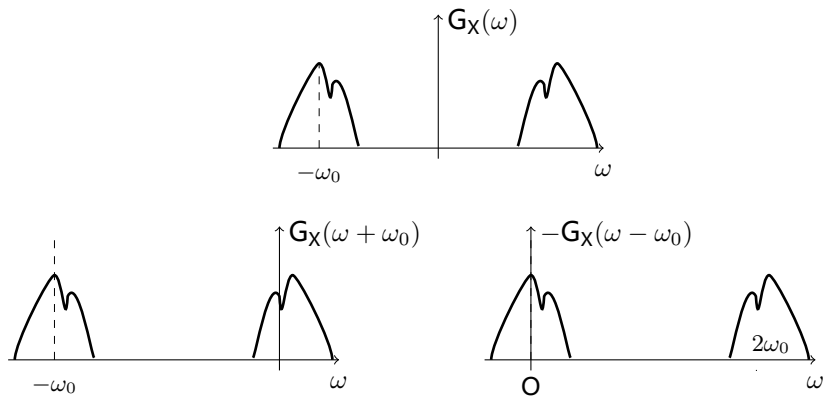
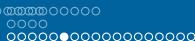


图 20: 垂直分量的功率谱密度

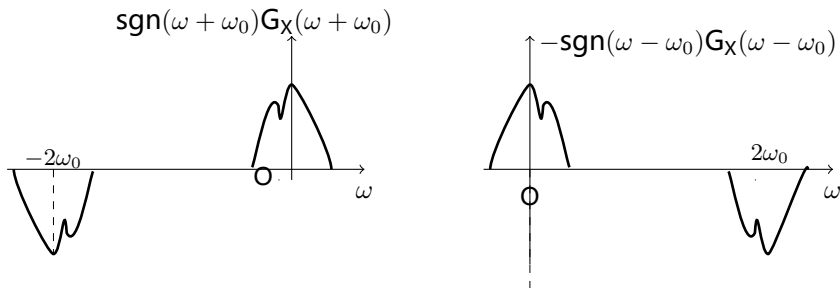


图 21: 垂直分量的功率谱密度

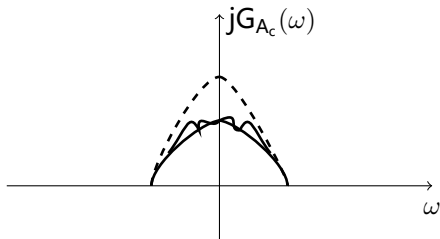


图 22: 垂直分量的功率谱密度

两边取傅里叶变换, 并利用 $F[\hat{R}_X(\tau)] = -j\text{sgn}(\omega)G_X(\omega)$, 可得

$$\begin{aligned} G_{A_c}(\omega) &= \frac{1}{2} [G_X(\omega - \omega_0) + G_X(\omega + \omega_0)] \\ &\quad + \frac{1}{2} [-\text{sgn}(\omega - \omega_0) G_X(\omega - \omega_0) \\ &\quad + \text{sgn}(\omega + \omega_0) G_X(\omega + \omega_0)]. \end{aligned} \quad (128)$$

上式各项所对应的功率谱密度图形如图 22 所示。从图形中可以直接得出。

同理可得

$$G_{A_s}(\omega) = L_p [G_X(\omega - \omega_0) + G_X(\omega + \omega_0)]. \quad (129)$$

这说明, $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 都是低频限带过程。

说明随机过程 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 在同一时刻的两个状态 (随机变量) 之间是不相关的。

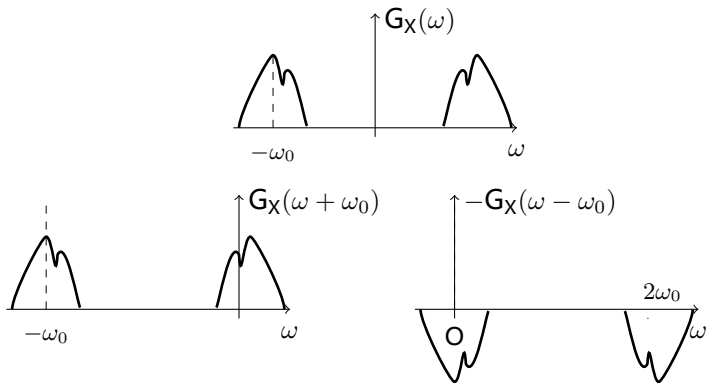


图 23: 垂直分量的互谱密度

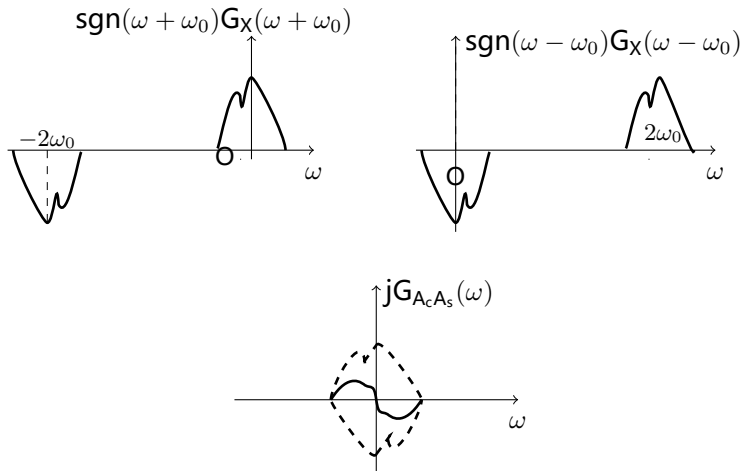


图 24: 垂直分量的互谱密度

$$\mathbf{G}_{\mathbf{A}_e\mathbf{A}_s}(\omega) = -j\mathbf{L}_p [\mathbf{G}_X(\omega + \omega_0) - \mathbf{G}_X(\omega - \omega_0)]. \quad (139)$$

$$\mathbf{G}_{A_r A_n}(\omega) = 0. \quad (141)$$

由上式可推出, 对任意 τ 值

$$R_{A_{A_k}}(\tau) = 0. \quad (142)$$

说明当 $X(t)$ 具有对称于的功率谱密度时, 随机过程 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 正交, 此处正交是指随机过程正交, 当然可以推出 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 在同一时刻也是正交的。

由于 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 的均值皆为 0, 同样可以证明: 当 $X(t)$ 具有对称于 m 的功率谱密度时, 两个随机过程 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 互不相关窄带随机过程 $X(t)$ 的自相关函数仿照上述性质的证明方法, 可以证明 (过程略)

$$R_X(\tau) = R_{A_c}(\tau) \cos \omega_0 \tau - R_{A_c A_s}(\tau) \sin \omega_0 \tau. \quad (143)$$

在许多电子系统或电路中, 经常遇到用一个宽带随机过程 $N(t)$ 激励一个高频窄带系统 (或简称窄带滤波器) 的情况, 如图 26 所示。

由第四章的结论可知, 该情况下系统输出的随机过程都可以认为是一个窄带高斯过程。

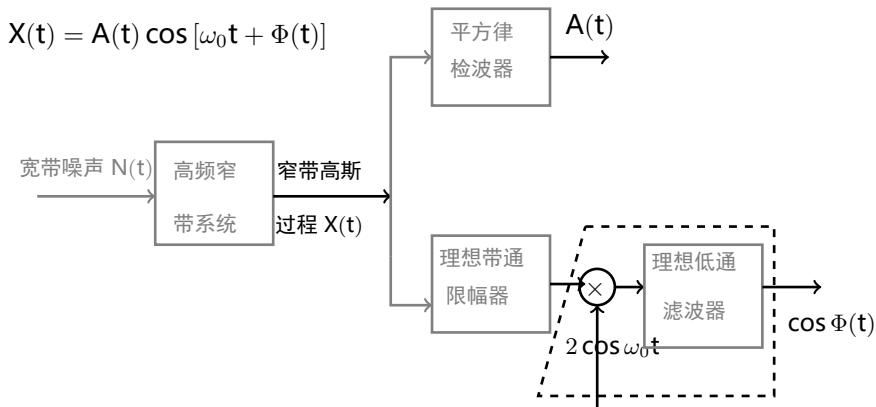


图 26: 窄带高斯过程的包络与相位

随机信号分析

窄带过程的垂直分解下 $X(t)$ 的表示形式

$$\begin{aligned}
 X(t) &= A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)] \\
 &= A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t.
 \end{aligned} \tag{145}$$

由上节内容, $A(t)$ 和 $\Phi(t)$ 和 $A_c(t)$ 和 $A(t)$ 具有如下关系

$$\begin{cases} A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)} \\ \Phi(t) = \tan^{-1} \frac{A_s(t)}{A_c(t)} = \arctan \frac{A_s(t)}{A_c(t)} \end{cases} \tag{146}$$

则 A_t, Φ_t 和 A_{ct}, A_{st} 满足

$$\begin{cases} A_t = g_1(A_{ct}, A_{st}) = \sqrt{A_{ct}^2 + A_{st}^2} \\ \Phi_t = g_2(A_{ct}, A_{st}) = \arctan \frac{A_{st}}{A_{ct}} \end{cases} \quad (147)$$

其中 A_{ct} 和 A_{st} 为垂直分量 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 在固定时刻的采样, 也都是随机变量。

则反变换关系为

$$\begin{cases} A_{ct} = h_1(A_t, \Phi_t) = A_t \cos \Phi_t \\ A_{st} = h_2(A_t, \Phi_t) = A_t \sin \Phi_t \end{cases} \quad (148)$$

求解思路

① 首先根据已知的窄带高斯过程垂直分量 $A_c(t), A_s(t)$ 的统计特性, 来研究 A_{ct}, A_{st} 的统计特性, 从而得到 $A_{ct}A_{st}$ 的联合概率密度 $f_{A_cA_s}(a_{ct}, a_{st})$ 。

② 从 f_{A_C} 和 $A_S(a_{ct}, a_{st})$ 出发, 利用雅可比变换得到 A_t, Φ_t 的联合概率密度 $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$ 。

③ 最后对联合概率密度 $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$ 积分, 求边缘概率密度 $f_A(a_t)$ 和 $f_{\Phi}(\varphi_i)$ 。

1. 求 $f_{A_e A_s}(a_{ct}$

首先根据已知的窄带高斯过程垂直分量 $A_c(t), A_s(t)$ 的统计特性, 来研究 A_{ct}, A_s 以下的统计特性, 从而得到 A_{ct}, A_{st} 的联合概率密度 $f_{A_c A_s}(a_{ct}, a_{st})$ 。

1° A_{ct} 和 A_{st} 都是高斯随机变量

已知 $X(t)$ 是一个平稳高斯过程, 由于 $X(t)$ 是 $\hat{X}(t)$ 的线性变换, 所以 $X(t)$ 也是平稳高斯过程。 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 均为 $X(t)$ 和 $\hat{X}(t)$ 的线性组合, 故 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 也是平稳高斯过程, 所以 A_{ct} 和 A_{st} 均为高斯变量。

2° A_{ct} 和 A_{st} 的均值皆为零

根据 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 的性质, 有 $E[A_c(t)] = E[A_s(t)] = 0$, 所以

$$E[A_{ct}] = E[A_{st}] = 0 \quad (149)$$

3° A_{ct} 和 A_{st} 具有相同的方差且等于 $X(t)$ 的方差 σ^2

根据 $A_c(t), A_s(t)$ 的性质, 有 $\sigma_{A_c}^2 = \sigma_{A_s}^2 = \sigma_X^2$, 所以

$$\sigma_{A_c}^2 = \sigma_{A_s}^2 = \sigma_X^2 = \sigma^2. \quad (150)$$

4° $A_{ct}A_{st}$ 相互独立

根据 $A_c(t), A_s(t)$ 的性质可知, 同一时刻的两个状态互不相关, 满足 $C_{A_c A_s}(0) = 0$ 。即 A_{ct}, A_{st} 互不相关。而对于高斯随机变量来说, 互不相关与统计独立等价, A_{ct} 和 A_{st} 相互独立。

根据以上的性质可知, A_{ct} 和 A_{st} 是均值皆为零, 方差皆为 σ^2 的高斯变量, 且相互独立。

其联合概率密度

$$\begin{aligned}
 f_{A_c A_s}(a_{ct}, a_{st}) &= f_{A_c}(a_{ct}) f_{A_s}(a_{st}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{a_{ct}^2}{2\sigma^2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{a_{st}^2}{2\sigma^2}\right] \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{a_{ct}^2 + a_{st}^2}{2\sigma^2}\right].
 \end{aligned}
 \tag{151}$$

2. 求 $f_{A\Phi}$

从 $f_{A_c A_s}(a_{ct}, a_{st})$ 出发, 利用雅可比变换得 A_t, Φ_t 的联合概率密度 $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$ 。

雅可比变换结果

$$f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) = |J| f_{A_c A_s}(a_t \cos \varphi_t, a_t \sin \varphi_t), \quad (152)$$

其中, 雅可比行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial a_t} & \frac{\partial h_1}{\partial \varphi_t} \\ \frac{\partial h_2}{\partial a_t} & \frac{\partial h_2}{\partial \varphi_t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_t & -a_t \sin \varphi_t \\ \sin \varphi_t & a_t \cos \varphi_t \end{vmatrix} = a_t \geq 0. \quad (153)$$

则 A_t, Φ_t 的联合概率密度为

$$f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) = \begin{cases} \frac{a_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{a_t^2}{2\sigma^2}\right\}, & a_t \geq 0, 0 \leq \varphi_t \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (154)$$

由上式可见, A_t 和 Φ_t 的联合概率密度 $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$ 与 Φ_t 无关。

③ 求 $f_A(a_t)$ 和 $f_\Phi(\varphi_i)$

最后对 A_t, Φ_t 的联合概率密度 $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$ 积分, 求边缘概率密度 $f_A(a_i)$ 和 $f_\Phi(\varphi_i)$ 。

① A_t 的概率密度

$$\begin{aligned}
 f_A(a_t) &= \int_0^{2\pi} f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) d\varphi_t \\
 &= f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\varphi_t \\
 &= \frac{a_t}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{a_t^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad a_t \geq 0.
 \end{aligned} \tag{155}$$

上式给出了包络 $A(t)$ 的一维概率密度表达式通常称它为瑞利概率密度或简称瑞利分布。

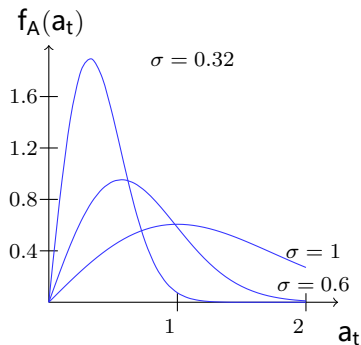


图 27: 瑞利分布

② Φ_t 的概率密度

$$f_{\phi}(\varphi_t) = \int_0^{\infty} f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) da_t = \frac{1}{2\pi}, 0 \leq \varphi_t \leq 2\pi. \quad (156)$$

可见, 相位 $\Phi(t)$ 的一维概率密度为 $(0, 2\pi)$ 区间上的均匀分布。

$f_{A\Phi}$ 的计算

③ 由 A_t 和 Φ_t 的概率密度表达式, 易得

$$f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) = f_A(a_t) f_{\Phi}(\varphi_t). \quad (157)$$

上式说明, 随机变量 $A_t \Phi_t$ 相互独立, 即随机过程 $A(t) \rightleftharpoons \Phi(t)$ 在同一时刻相互独立。但应注意, 这并不意味着随机过程 $A(t) \rightleftharpoons \Phi(t)$ 相互独立。


$$\begin{cases} X(t_1) = A(t_1) \cos[\omega_0 t_1 + \Phi(t_1)] \\ \quad = A_c(t_1) \cos \omega_0 t_1 - A_s(t_1) \sin \omega_0 t_1 \\ X(t_2) = A(t_2) \cos[\omega_0 t_2 + \Phi(t_2)] \\ \quad = A_c(t_2) \cos \omega_0 t_2 - A_s(t_2) \sin \omega_0 t_2 \end{cases} \quad (158)$$

为了便于表示, 把包络 $A(t)$ 在 t_1, t_2 时刻采样的随机变量 $A(t_1), A(t_2)$ 简记为 A_1, A_2 。

把相位 $\Phi(t)$ 在 t_1, t_2 时刻采样的随机变量 $\Phi(t_1), \Phi(t_2)$ 简记为中 Φ_1, Φ_2 ;

把垂直分量 $A_c(t)$ 在 t_1, t_2 时刻采样的随机变量 $A_c(t_1), A_c(t_2)$ 简记为 A_{c1}, A_{c2} ;

垂直分量 $A_s(t)$ 在 t_1, t_2 时刻采样的随机变量 $A_s(t_1), A_s(t_2)$ 简记为 A_{s1}, A_{s2} 。

现在求随机过程 $A(t)$ 和 $\Phi(t)$ 各自的二维概率密度 $f_A(a_1, a_2)$ 和 $f_\Phi(\varphi_1, \varphi_2)$ 。

1. 求 $f_{A_c A_s}$

由上已知 $A_c(t), A_s(t)$ 都是平稳高斯过程, 具有零均值和相同的方差 σ^2 。因此, 可得 $A_{c1}, A_{s1}, A_{c2}, A_{s2}$ 为同分布的高斯变量, 具有相同的零均值和相同的方差 σ^2 。现在, 我们讨论一种最简单, 也是实际中最常见的情况, 即假定窄带随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度 $G_X(\omega)$ 关于载波频率偶对称, 如图 25 所示。

根据 2 节的分析可知, 两个随机过程 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 正交且互不相关, 满足 $R_{A_c A_s}(\tau) = 0$, 皆为高斯过程, 则两个过程 $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 是统计独立的。所以四维高斯变量 (A_{c1} 和 A_{s1}, A_{c2}, A_{s2}) 的联合概率密度。

二维概率密度表示

二维高斯变量 (A_{e1}, A_{s2}) 的协方差矩阵为

$$\begin{aligned}
 C &= \begin{bmatrix} C_{A_{e1}A_{e1}} & C_{A_{e1}A_{s2}} \\ C_{A_{s2}A_{e1}} & C_{A_{s2}A_{s2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{A_c}(0) & C_{A_c}(\tau) \\ C_{A_c}(-\tau) & C_{A_c}(0) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sigma^2 & R_{A_c}(\tau) \\ R_{A_c}(\tau) & \sigma^2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{159}$$

上式应用了平稳高斯过程 $A_c(t)$ 的 $C_{A_c}(\tau) = R_{A_c}(\tau)$ 和 $C_{A_c}(0) = \sigma^2$ 的性质。



包络和相位各自的二维概率分布

因为二维高斯变量 (X, Y) 的联合概率密度形式为

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2 - C_{XY}^2}} \times \exp \left[-\frac{\sigma_Y^2 (x - m_X)^2 - 2C_{XY} (x - m_X) (y - m_Y)}{2 (\sigma_X^2 \sigma_Y^2 - C_{XY}^2)} + \frac{\sigma_X^2 (y - m_Y)^2}{2 (\sigma_X^2 \sigma_Y^2 - C_{XY}^2)} \right] \quad (160)$$

所以二维高斯变量 (A_{c1}, A_{c2}) 的联合概率密度为

$$\begin{aligned}
 f_{A_c}(a_{c1}, a_{c2}) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^4 - R_{A_c}^2(\tau)}} \exp \left[-\frac{\sigma^2 a_{c1}^2}{2[\sigma^4 - R_{A_c}^2(\tau)]} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2R_{A_c}(\tau)a_{c1}a_{c2} + \sigma^2 a_{c2}^2}{2[\sigma^4 - R_{A_c}^2(\tau)]} \right].
 \end{aligned}
 \tag{161}$$

二维高斯变量 (A_{s1} 和 A_{s2} 的联合概率密度

应用性质 $R_{A_c}(\tau) = R_A(\tau)$, 可得四维高斯变量 ($A_{c1}, A_{c2}, A_{s1}, A_{s2}$) 的联合概率密度为

$$\begin{aligned}
 f_{A_c A_s}(a_{c1}, a_{s1}, a_{c2}, a_{s2}) &= f_{A_c}(a_{c1}, a_{c2}) f_{A_s}(a_{s1}, a_{s2}) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2 [\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \exp \left[-\frac{\sigma^2 (a_{c1}^2 + a_{c2}^2 + a_{s1}^2 + a_{s2}^2)}{2 [\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2R_{A_c}(\tau) (a_{c1}a_{c2} + a_{s1}a_{s2})}{2 [\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \right].
 \end{aligned} \tag{162}$$

四维随机变量 $(A_1$

$$\begin{aligned}
 f_{A\Phi}(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2) &= |J| f_{A_c A_s}(a_{c1}, a_{s1}, a_{c2}, a_{s2}) \\
 &= \begin{cases} \frac{a_1 a_2}{(2\pi)^2 [\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \exp \left[-\frac{\sigma^2 (a_1^2 + a_2^2) - 2R_{A_c}(\tau) a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{2 [\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \right] & a_1, a_2 \geq 0; 0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases} .
 \end{aligned}
 \tag{164}$$

3. 求 $A(t)$ 和 $\Phi(t)$ 各自的二维联合概率密度 f_A 和 f_Φ

$$\begin{aligned}
 f_A(a_1, a_2) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{A\Phi}(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 \\
 &= \begin{cases} \frac{a_1 a_2}{[\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} I_0 \left\{ \frac{a_1 a_2 R_{A_c}(\tau)}{[\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \right\} \exp \\ \left\{ -\frac{\sigma^2(a_1^2 + a_2^2)}{2[\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \right\}, a_1, a_2 \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{165}$$

式 $I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[x \cos \varphi] d\varphi$ 是第一类零阶修正贝塞尔函数。

积分四维联合概率密度得边缘概率密度

$$f_{\Phi}(\varphi_1, \varphi_2) = \left\{ \frac{[\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]}{4\pi\sigma^2} \left[\frac{(1-\beta)^{\frac{1}{2}} + \beta(\pi - \arccos \beta)}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \right\}, 0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi. \quad (166)$$

其中

$$\beta = \frac{R_{A_c}(\tau)}{\sigma^2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (167)$$

若令 $q = \varphi_2$, 不难看出

$$f_{A\Phi}(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2) \neq f_A(a_1, a_2) f_{\Phi}(\varphi_1, \varphi_2). \quad (168)$$

这一特例说明, 窄带随机过程的包络 $A(t)$ 和相位更 $\Phi(t)$ 彼此不是独立的。

$$X(t) = s(t) + N(t), \quad (169)$$
$$s(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta), \quad (170)$$

式中 a, ω_0 . 随机变量 θ 服从 $(0, 2\pi)$ 区间上的均匀分布。其中噪声 $N(t)$ 为功率谱密度关于中心频率偶对称、零均值、方差为 σ^2 的平稳窄带高斯实过程。

$$\begin{cases} A_e'(t) = a \cos \theta + A_c(t) \\ A_s'(t) = a \sin \theta + A_s(t) \end{cases} \quad (173)$$

由前面的结论可知, $A'_c(t)$, $A'_s(t)$ 都是低频限带过程, 它们随时间的变化 $\cos \omega_0 t$ 要缓慢得多。
若将 $X(t)$ 表示为准正弦振荡的形式

$$X(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)] \quad (175)$$

$$\begin{cases} A(t) = \sqrt{[A'_c(t)]^2 + [A'_s(t)]^2} \\ \Phi(t) = \arctan [A'_s(t)/A'_c(t)] \end{cases} \quad (176)$$

易知 $A(t), \Phi(t)$ 也都是慢变化随机过程。

$A(t), \Phi(t)$ 是 $A'_c(t), A'_s(t)$ 的一维概率密度

已知 $A(t), \Phi(t)$ 是 $A'_c(t), A'_s(t)$ 的函数, 而 $A'_c(t)$ 和 $A'_s(t)$ 又是随机相位 θ 的函数, 所以 $A(t), \Phi(t)$ 也是随机相位 θ 的函数。

1、求 $A'_c(t)$ 和 $A'_s(t)$

在给定 θ 条件下的二维条件概率密度 $f(a'_{ct}/\theta, a'_{st}/\theta)$
 给定 θ 值的条件下, t 时刻对 $A'_c(t), A'_s(t)$ 的采样用 $A'_{ct}/\theta, A'_{st}/\theta$ 表示。下面讨论 $A'_{ct}/\theta, A'_{st}/\theta$ 的统计特性。

2° 求 A_{ct} 的均值

由 A_{ct}, A_{stt} 的均值皆为零, 可得

3° A'_{ct}/θ 和 A'_{st}/θ 的方差

由 A_{ct}, A_{st} 的均值皆为 σ^2 , 可得

$$D[A'_{ct}/\theta] = D[A'_{st}/\theta] = \sigma^2 \quad (178)$$

由上述三个结论可得 $A'_c(t), A'_s(t)$ 在给定条件下的二维条件概率密度为

$$f(a'_a/\theta, a'_{st}/\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[(a'_{ct} - a \cos \theta)^2 + (a'_{st} - a \sin \theta)^2 \right] \right\}. \quad (179)$$



对二维条件概率密度积分, 得到边缘条件概率密度为

由上式可见, $f(a_t/\theta)$ 与 θ 无关, 就是无条件分布 $f_A(a_t)$ 。于是, 可得随相余弦信号加窄带高斯噪声的包络 $A(t)$ 的一维概率密度为

$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} I_0\left(\frac{aa_t}{\sigma^2}\right) \exp\left\{-\frac{a_t^2 + a^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad a_t \geq 0. \quad (182)$$

当随相余弦信号不存在, 即幅度 $a = 0$ 时, 式 (182) 便退化为式, 即 A_t 服从瑞利分布。所以, 称式 (182) 为广义瑞利概率密度或莱斯概率密度, 简称莱斯分布。 a/σ 表示信号幅度与窄带噪声标准差之比, 简称信噪比, 记为 r 。

在不同的信噪比 r 条件下包络的一维概率密度

① 由于 $x \ll 1$ 时

$$I_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}. \quad (183)$$

② 当 $r \geq 1$ 时

$$f_A(a_t) \approx \frac{a_t}{\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{a_t^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad a_t \geq 0. \quad (184)$$

这就是说, 当信噪比很小时, 包络 $A(t)$ 的一维概率密度趋近于瑞利分布

③ 由于 $r \ll 1$ 时

$$l_0(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x. \quad (185)$$

在大信噪比条件下 ($r \gg 1$), 包络 $A(t)$ 的一维概率密度为

$$f_A(a_t) \approx \sqrt{\frac{a_t}{2\pi a}} \cdot \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\frac{(a_t - a)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad a_t \geq 0. \quad (186)$$

从上式中可见, 此概率密度在 $a_t = a$ 处取最大值。当 a_t 偏离 a 时, 它很快下降, 且 $\sqrt{\frac{a_t}{2\pi a}}$ 改变的速度比 $\exp\left\{-\frac{(a_t-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$ 的衰减速度要慢很多, 特别是在 a 的附近,

$$f_A(a_t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(a_t - a)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad a_t \geq 0. \quad (187)$$

上式说明, 在大信噪比的条件下, 在 a 附近个包络的一维概率密度近似为高斯分布以上导出了包络 $A(t)$ 的一维概率密度函数, 并得到了在大信噪比和小信噪比条件下它的近似式。图 29 所示为不同信噪比条件下莱斯分布的图形。

随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布

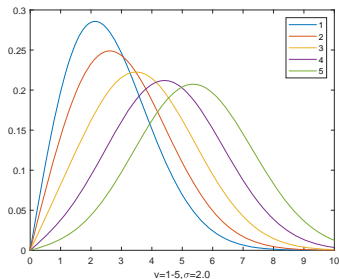


图 28: 莱斯分布在不同 v 下的密度函数

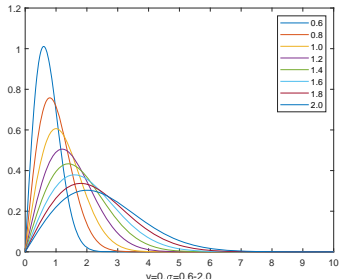


图 29: 莱斯分布在不同 σ 下的密度函数

4. 求相位 $\Phi(t)$ 的一维概率密度 $f_{\Phi}(\varphi/\theta)$

对二维条件概率密度积分, 得到边缘条件概率密度为

$$\begin{aligned}
 f_{\Phi}(\varphi_t/\theta) &= \int_0^{\infty} f(a_t/\theta, \varphi_t/\theta) da_t \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{a_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [a_t^2 + a^2 - 2aa_t \cos(\theta - \varphi_t)]\right\} a_t \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{a_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [a_t^2 - 2aa_t \cos(\theta - \varphi_t) \right. \\
 &\quad \left. + (a \cos(\theta - \varphi_t))^2 - (a \cos(\theta - \varphi_t))^2 + a^2]\right\} da_t \\
 &= \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{a^2 - [a \cos(\theta - \varphi_t)]^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (188)
 \end{aligned}$$



随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \frac{a_t}{\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{[a_t - a \cos(\theta - \varphi_t)]^2}{2\sigma^2} \right\} da_t \\
 &= \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{r^2}{2} \right\} + \frac{r \cos(\theta - \varphi_t)}{\sqrt{2\pi}} \Phi[r \cos(\theta - \varphi_t)] \\
 & \exp \left\{ -\frac{1}{2} [r^2 - r^2 \cos^2(\theta - \varphi_t)] \right\}, \quad (189)
 \end{aligned}$$

式中 $\Phi(\cdot)$ 是概率积分函数。上式是 $f_{\Phi}(\varphi_t/\theta)$ 的一般表示式。

不存在信号的情况下 Φ_t 的概率密度形式

① 当信噪比 $r = 0$ 时,

$$\mathbf{f}_\Phi(\varphi_t/\theta) = \mathbf{f}_\Phi(\varphi_t) = \frac{1}{2\pi}. \quad (190)$$

这时, 随机相位为均匀分布。

② 当 $\theta - \varphi \ll 1$ 时, 即信噪比很大时,

$$\begin{cases} \sin(\theta - \varphi_t) \approx \theta - \varphi_t \\ \cos(\theta - \varphi_t) \approx 1 \end{cases}. \quad (191)$$

可以看出, $f_{\Phi}(\varphi/\theta)$ 的图形关于对称, 并在 $\varphi_t = \theta$ 处取得最大值。

图 30 所示为不同信噪比条件下相位 $\Phi(t)$ 的一维分布图。

随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布

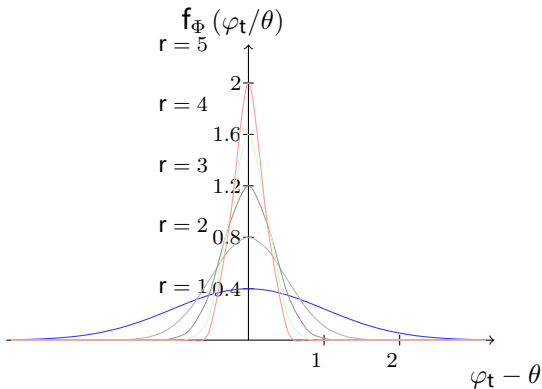
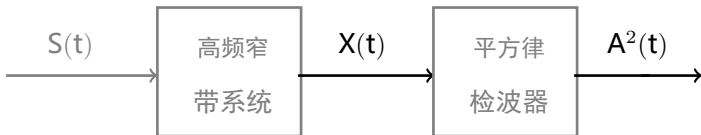


图 30: $f_{\Phi}(\varphi_2/\theta)$ 的分布

目录

- 1 随机过程的联合平稳
 - 希尔伯特变换的性质
 - 举例
- 2 高频窄带信号的复指数形式
 - 高频窄带信号通过窄带系统
 - 随机过程的解析形式及其性质
- 3 窄带随机过程
 - 窄带随机过程的“垂直”分解
 - 窄带随机过程的统计分析
- 4 窄带高斯过程包络与相位的分布
 - 包络和相位各自的二维概率分布
 - 随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布
- 5 窄带高斯过程包络平方的概率分布
 - 卡方分布和非中心卡方分布
 - 卡方分布的性质
- 6 窄带高斯过程包络平方的概率分布

在许多实际应用中, 也常常在高频窄带滤波器的输出端接入一平方律检波器如图 35 所示, 在平方律检波器输出端便得到 $X(t)$ 包络的平方 $A^2(t)$ 。



$$X(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)]$$

图 31: 平方律检波器

窄带高斯噪声包络平方的分布

前面已经推导出当窄带随机过程为一具有零均值、方差为 σ^2 的平稳高斯噪声时, 其包络 $A(t)$ 的一维概率密度为瑞利分布。

$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{a_t^2}{2\sigma^2} \right\}, a_t \geq 0. \quad (192)$$

应用求随机变量函数分布的方法, 很容易求出包络平方的一维概率密度。令

$$U(t) = A^2(t) \quad (193)$$

则在时刻 t 的采样有

$$\begin{cases} U_t = g(A_t) = A_t^2, & A_t \geq 0 \\ A_t = h(U_t) = \sqrt{U_t}, & U_t \geq 0. \end{cases} \quad (194)$$

随机信号分析



不难导出包络平方 $U^2 = A^2$ 的一维概率密度为

$$f_U(u_i) = \frac{1}{2\sigma^2} I_0 \left[\frac{a\sqrt{u_t}}{\sigma^2} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [u_t + a^2] \right\}, \quad u_t \geq 0. \quad (200)$$

令 $V_t = \frac{U_t}{a^2}$, 可得归一化随机变量 V 的概率密度函数为

$$f_V(v_i) = \frac{1}{2} I_0 \left[\frac{\sqrt{v_t} a}{\sigma} \right] \exp \left\{ -\frac{v_t + a^2/\sigma^2}{2} \right\}, \quad v_t \geq 0. \quad (201)$$

$$\mathbf{A}^2(\mathbf{t}) = \mathbf{A}_c^2(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_s^2(\mathbf{t}), \quad (202)$$
$$V = \sum_{i=1}^m (A_{ci}'^2 + A_{si}'^2), \quad (203)$$

式中 A'_{Ci}, A'_{Si} 是将 A_{Ci}, A_{Si} 归一化以后的随机变量。

$$V = \sum_{i=1}^{2m} X_i^2. \quad (204)$$

于是, 求 V 的概率密度便归结为求 n 个独立同分布高斯变量平方和的概率密度为此, 首先求每一随机变量 X_i^2 的概率密度。

随机信号分析

$$\begin{aligned} Q_{Y_i}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_i}(y_i) e^{jwy_i} dy_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y_i^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ - \left(\frac{1}{2} - ju \right) y_i \right\} dy_i = (1 - 2ju)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (207)$$
$$Q_V(u) = \prod_{i=1}^n Q_{Y_i}(u) = (1 - 2ju)^{-\frac{n}{2}} \quad (208)$$

称 $f_v(v)$ 为 n 个自由度的 χ^2 分布。图 37 画出了几个不同自由度下 $f_v(v)$ 的图形。

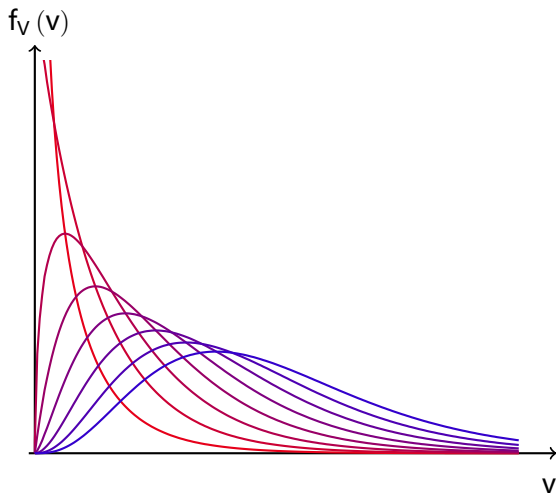


图 33: 几个不同自由度下的 χ^2 分布



χ^2 分布的性质

性质 1

1° 两个独立的 χ^2 变量之和仍为 χ^2 变量。若它们各自的自由度分别为 n_1 和 n_2 , 则它们的和变量为具有 $(n_1 + n_2)$ 个自由度的 χ^2 分布 $2n$ 个自由度的 χ^2 变量的均值 $E[V] = n$, 方差 $D[V] = 2n$ 。

性质 2

2. 非中心 χ^2 分布

若窄带过程 $N'(t)$ 为余弦信号 $N'(t)$ 与窄带高斯噪声 $N(t)$ 之和, 则加法器输出的就是非中心 χ^2 分布。



若令 $s = a\sqrt{2}/2$, 则

$$s(t) = s \cos \omega_0 t + s \sin \omega_0 t. \quad (213)$$

又由于

$$N(t) = n_e(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t. \quad (214)$$

代入 $N(t)$ 得

$$\begin{aligned} N'(t) &= s(t) + N(t) \\ &= [s + n_c(t)] \cos \omega_0 t - [s + n_s(t)] \sin \omega_0 t \\ &= A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (215)$$

加法器输出端的随机变量 V'

$$A^2(\mathbf{t}) = A_c^2(\mathbf{t}) + A_s^2(\mathbf{t}) = [s + n_\epsilon(\mathbf{t})]^2 + [s + n_s(\mathbf{t})]^2. \quad (216)$$

仿照求 x^2 分布的方法, 加法器输出端的随机变量 V' 应为

$$V' = \sum_{i=1}^n (s + X_i)^2 = \sum_{i=1}^n Y_i'^2 \quad (217)$$

式中 X_i 为同分布的独立高斯变量 (均值为零、方差为 σ_2), s 为常数。

$$R_i = s + X_i. \quad (218)$$
$$f_{R_i}(r_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(r_i - s)^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (219)$$

$$f_{Y'_i}(y'_i) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma^2 y'_i}} \left\{ \exp \left[-\frac{(\sqrt{y'_i} - s)^2}{2\sigma^2} \right] + \exp \left[-\frac{(-\sqrt{y'_i} - s)^2}{2\sigma^2} \right] \right\}. \quad (220)$$

将上式中指数的平方项展开, 并利用双曲余弦函数 $2 \cosh(b) = e^b + e^{-b}$, 可得

$$f_{Y_i}(y'_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y'_i}} \exp\left\{-\frac{y'_i + s^2}{2\sigma^2}\right\} \cosh\left(\frac{s\sqrt{y'_i}}{\sigma^2}\right). \quad (221)$$

对上式作傅里叶逆变换, 可得 V 的概率密度为

$$f_{V'}(v') = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{v'}{\lambda'^2} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp \left\{ -\frac{\lambda' + v'}{2\sigma^2} \right\} I_{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{\sqrt{v'\lambda'}}{\sigma^2} \right), \quad v' \geq 0. \quad (223)$$

式中, $\lambda' = s^2 n$ 定义为非中心参量, $I_n(\cdot)$ 为第一类 n 阶修正贝塞尔函数。

定义归一化变量 $V = V'/\sigma^2$, 那么

$$V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{s}{\sigma} + \frac{X_i}{\sigma} \right)^2 = \sum_{i=1}^n R_i'^2, \quad (224)$$

其中变量 R 是均值为 s/σ 、方差为 1 的相互独立的高斯变量。

图 38 画出了不同信噪比 λ 和样本数 n 情况下的非中心 χ^2 函数。

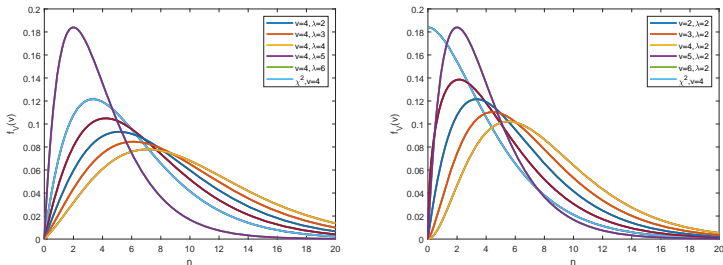


图 34: 非中心 χ^2 分布: a) $v = 4, \lambda = 2..6$, b) $v = 2..6, \lambda = 2$

给定信号

$$s(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \pi/4), \quad (226)$$

包络 $a(t)$ 为确定函数, 则有

$$\begin{aligned} s(t) &= a(t) \cos \frac{\pi}{4} \cos \omega_0 t + a(t) \sin \frac{\pi}{4} \sin \omega_0 t \\ &= a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega_0 t + a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (227)$$

代入 $N'(t)$ 得

$$N(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t. \quad (228)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'(t) &= \mathbf{s}(t) + \mathbf{N}(t) = \left[\mathbf{a}(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_e(t) \right] \cos \omega_0 t \\ &\quad - \left[\mathbf{a}(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_1(t) \right] \sin \omega_0 t \\ &= \mathbf{A}_c(t) \cos \omega_0 t - \mathbf{A}_s(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

在 $t_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 时刻对 $A^2(t)$ 进行独立的采样, 令 $s = a(t)$ 仿照求 χ^2 分布的方法, 加法器输出端的随机变量 Q' 应为

$$Q' = \sum_{i=1}^n (s_i + X_i)^2 = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad (230)$$

式中 s 是对信号包络 $a(t)$ 的第 i 次采样, 是确定值。

又因为 Y_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$) 相互独立, 而 $Q' = \sum_{k=1}^n Y_i$, 于是 Q' 的特征函数为

随机信号分析

对上式作傅里叶逆变换可得 Q' 的概率密度

$$f_{\alpha}(q') = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{q'}{\lambda'^2} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp \left\{ -\frac{\lambda' + q'}{2\sigma^2} \right\} \cdot I_{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{\sqrt{q'\lambda'}}{\sigma^2} \right), q' \geq 0. \quad (233)$$

将式 (285) 与式 (275) 对照, 可见, Q' 与 V' 具有相同的概率密度, 不同的只是此时的非中心参量 $\lambda' = \sum_{i=1}^n s_i^2$ 。

类似地, 定义归一化参量 $Q = Q'/\sigma^2$, 于是可得

$$Q = \sum_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{\sigma} + \frac{X_i}{\sigma} \right)^2 \quad (234)$$



令

$$Z_i = \frac{s_i}{\sigma} + \frac{X_i}{\sigma}. \quad (235)$$

则 Z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 是具有均值 s_i/σ 和单位方差的独立高斯变量。于是, 可得具有 n 个自由度的非中心 χ^2 分布为

$$f_Q(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{\lambda} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} - \frac{q}{2} \right\} I_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{Q\lambda}). \quad (236)$$

式中 $\lambda = \sum_{i=1}^n s_i^2/\sigma^2$ 为非中心参量。

不难证明, 两个统计独立的非中心 χ^2 随机变量之和仍为非中心 χ^2 随机变量。



若它们的自由度分别为 n_1 和 n_2 , 非中心参量为 λ_1 和 λ_2 , 则和变量的自由度为 $n = n_1 + n_2$, 非中心参量为 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ 。

例 .1

设图 26 中加至平方律检波器输入端的窄带随机过程 $X(t)$ 为

$$X(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta) + N(t), \quad (237)$$

其中 $a \cos(\omega_0 t + \theta)$ 为随相余弦信号, a 和 ω_0 为常数。 $N(t)$ 是零均值、方差为 σ^2 的稳窄带高斯噪声, 其功率谱关于 ω_0 偶对称。 $X(t)$ 经检波并作归一化处理以后, 独立采样 m 次, 求累加器输出端随机变量的概率密度及其参数。

$$N(t) = A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (238)$$
$$A^2(\mathbf{t}) = [a \cos \theta + A_c(\mathbf{t})]^2 + [a \sin \theta + A_0(\mathbf{t})]^2. \quad (239)$$
$$V = \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^m (a \cos \theta + A_{ci})^2 + \sum_{i=1}^m (a \sin \theta + A_{ai})^2 \right], \quad (240)$$

式中 $A_{\sigma} = A_e(t_i)$ 和 $A_{si} = A_s(t_i)$ 分别表示 $A_e(t)$ 和 $A_s(t)$ 在 t_i 时刻的状态。

根据 $A_c(t), A_s(t)$ 的有关性质可知, 各个 A_{α}, A_{β} 是同分布的独立标准高斯变量。对照式 (276) 可知, 上式中两个和式分别是自由度为 m 的非中心 χ^2 变量。

非中心参量 λ_1 和 λ_2

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m (a \cos \theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2} \cos^2 \theta \\ \lambda_2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m (a \sin \theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2} \sin^2 \theta \end{cases} \quad (241)$$

由于这两个非中心 χ^2 随机变量也彼此独立, 因而它们的和变量 V 也是非中心 χ^2 随机变量, 自由度 $n = 2m$ 。

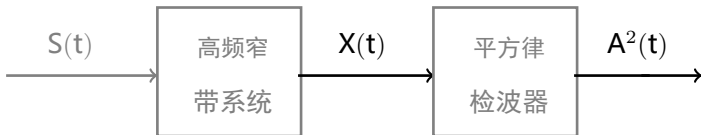
非中心参量 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{m a^2}{\sigma^2}$, 便可得到 V 的概率密度函数为

$$f_V(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\lambda} \right)^{\frac{m-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} - \frac{v}{2} \right\} I_{m-1}(\sqrt{v\lambda}), \quad v \geq 0. \quad (242)$$

而非中心参量与自由度之比 $\lambda/n = a^2/2\sigma^2$, 正好是检波器输入端的功率信噪比。

6 窄带高斯过程包络平方的概率分布

在许多实际应用中, 也常常在高频窄带滤波器的输出端接入一平方律检波器如图 35 所示, 在平方律检波器输出端便得到 $X(t)$ 包络的平方 $A^2(t)$ 。



$$X(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)]$$

图 35: 平方律检波器

窄带高斯噪声包络平方的分布

前面已经推导出当窄带随机过程为一具有零均值、方差为 σ^2 的平稳高斯噪声时, 其包络 $A(t)$ 的一维概率密度为瑞利分布。

$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{a_t^2}{2\sigma^2} \right\}, a_t \geq 0. \quad (243)$$

应用求随机变量函数分布的方法, 很容易求出包络平方的一维概率密度。令

$$U(t) = A^2(t) \quad (244)$$

则在时刻 t 的采样有

$$\begin{cases} U_t = g(A_t) = A_t^2, & A_t \geq 0 \\ A_t = h(U_t) = \sqrt{U_t}, & U_t \geq 0. \end{cases} \quad (245)$$

雅可比行列式为

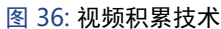
$$J = \frac{1}{2\sqrt{U_t}} \quad (246)$$

包络平方的一维概率密度

$$f_U(u_t) = |J|f_A(A_t) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left\{-\frac{u_t}{2\sigma^2}\right\}, \quad u_t \geq 0. \quad (247)$$

上式表明, U_t 服从指数分布。

$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} I_0 \left(\frac{aa_t}{\sigma^2} \right) \exp \left\{ -\frac{a_t^2 + a^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad a_t \geq 0. \quad (250)$$



由于窄带过程 $N(t)$ 的包络 A 和它的一对垂直分量 $A_c(t), A_s(t)$ 有如下关

式中 $A_c(t), A_s(t)$ 是零均值、方差为 σ^2 的平稳高斯过程。

$A^2(t)$ 经采样后, 加法器的输出

式中 A'_{Ci}, A'_{Si} 是将 A_{Ci}, A_{Si} 归一化以后的随机变量。

由于 A'_{ci}, A'_{si} 都是同分布的高斯变量, 故上式又可表示为

$$V = \sum_{i=1}^{2m} X_i^2 \quad (255)$$

式中每一个 X_i 都是同分布的标准高斯变量 (零均值、方差为 1), 且各 X_i 相互独立。为了书写简单, 用 n 代替上式中的 $2m$, 可得

$$V = \sum_{i=1}^{2m} X_i^2. \quad (256)$$

于是, 求 V 的概率密度便归结为求 n 个独立同分布高斯变量平方和的概率密度为此, 首先求每一随机变量 X_i^2 的概率密度。

从而得到 Y_i 的特征函数为

$$\begin{aligned} Q_{Y_i}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_i}(y_i) e^{juy_i} dy_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y_i^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ - \left(\frac{1}{2} - ju \right) y_i \right\} dy_i = (1 - 2ju)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (259)$$

由于 $V = \sum_{i=1}^n Y_i$, 利用特征函数的性质: 独立随机变量之和的特征函数等于各随机变量特征函数的乘积。便可得到 V 的特征函数为

$$Q_V(u) = \prod_{i=1}^n Q_{Y_i}(u) = (1 - 2ju)^{-\frac{n}{2}} \quad (260)$$

设信号

$$s(t) = a \cos(\omega_0 t + \pi/4) \quad (263)$$

包络 a 为常数, 则有

$$\begin{aligned} s(t) &= a \cos \frac{\pi}{4} \cos \omega_0 t + a \sin \frac{\pi}{4} \sin \omega_0 t \\ &= a \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega_0 t + a \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (264)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{t}) = s \cos \omega_0 \mathbf{t} + \mathbf{s} \sin \omega_0 \mathbf{t}. \quad (265)$$
$$\mathbf{N}(t) = n_e(t) \cos \omega_0 t - n_3(t) \sin \omega_0 t. \quad (266)$$
$$\begin{aligned} \mathbf{N}'(\mathbf{t}) &= \mathbf{s}(\mathbf{t}) + \mathbf{N}(\mathbf{t}) \\ &= [\mathbf{s} + \mathbf{n}_c(\mathbf{t})] \cos \omega_0 \mathbf{t} - [\mathbf{s} + \mathbf{n}_s(\mathbf{t})] \sin \omega_0 \mathbf{t} \\ &= \mathbf{A}_c(\mathbf{t}) \cos \omega_0 \mathbf{t} - \mathbf{A}_3(\mathbf{t}) \sin \omega_0 \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (267)$$

$$A^2(t) = A_c^2(t) + A_s^2(t) = [s + n_\varepsilon(t)]^2 + [s + n_s(t)]^2. \quad (268)$$

仿照求 χ^2 分布的方法, 加法器输出端的随机变量 V' 应为

$$V' = \sum_{i=1}^n (s + X_i)^2 = \sum_{i=1}^n Y, \quad (269)$$

式中 X_i 为同分布的独立高斯变量 (均值为零、方差为 σ_2^2), s 为常数。

令

$$R_i = s + X_i. \quad (270)$$

显然, R_i 的概率密度为

$$f_{R_i}(r_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(r_i - s)^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (271)$$

Y'

$$f_{Y'}(y'_i) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma^2 y'_i}} \left\{ \exp \left[-\frac{(\sqrt{y'_i} - s)^2}{2\sigma^2} \right] + \exp \left[-\frac{(-\sqrt{y'_i} - s)^2}{2\sigma^2} \right] \right\}. \quad (272)$$

将上式中指数的平方项展开, 并利用双曲余弦函数 $2 \cosh(b) = e^b + e^{-b}$, 可得

$$f_{Y'}(y'_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y'_i}} \exp \left\{ -\frac{y'_i + s^2}{2\sigma^2} \right\} \cosh \left(\frac{s\sqrt{y'_i}}{\sigma^2} \right). \quad (273)$$

V 的特征函数为

$$Q_{V'}(u) = \prod_{i=1}^n Q_{Y'_i}(u) \\ = \left(\frac{1}{1 - j2\sigma^2 u} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{ns^2}{2\sigma^2} + \frac{ns^2}{2\sigma^2(1 - j2\sigma^2 u)} \right\}. \quad (274)$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

图 38 画出了不同信噪比 λ 和样本数 n 情况下的非中心 χ^2 函数。

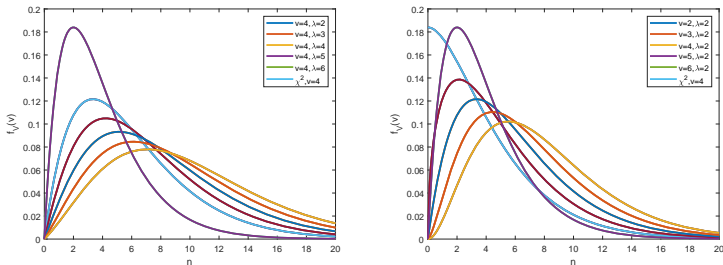


图 38: 非中心 χ^2 分布: a) $v = 4, \lambda = 2..6$, b) $v = 2..6, \lambda = 2$

包络 $a(t)$ 为确定函数,

展开实信号 $s(t)$ 可得

$$\begin{aligned} s(t) &= a(t) \cos \frac{\pi}{4} \cos \omega_0 t + a(t) \sin \frac{\pi}{4} \sin \omega_0 t \\ &= a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega_0 t + a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (279)$$

代入 $N'(t)$ 得

$$N(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t. \quad (280)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'(t) &= \mathbf{s}(t) + \mathbf{N}(t) = \left[\mathbf{a}(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_e(t) \right] \cos \omega_0 t \\ &\quad - \left[\mathbf{a}(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_1(t) \right] \sin \omega_0 t \\ &= \mathbf{A}_c(t) \cos \omega_0 t - \mathbf{A}_s(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2(\mathbf{t}) &= \mathbf{A}_c^2(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_0^2(\mathbf{t}) \\ &= \left[\mathbf{a}(\mathbf{t}) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_c(\mathbf{t}) \right]^2 + \left[\mathbf{a}(\mathbf{t}) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_3(\mathbf{t}) \right]^2. \end{aligned} \quad (281)$$

在 $t_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 时刻对 $A^2(t)$ 进行独立的采样, 令 $s = a(t)$ 仿照求 χ^2 分布的方法, 加法器输出端的随机变量 Q' 应为

$$Q' = \sum_{i=1}^n (s_i + X_i)^2 = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad (282)$$

式中 s 是对信号包络 $a(t)$ 的第 i 次采样, 是确定值。

随机信号分析

例 .1

$$\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{a} \cos (\omega_0 \mathbf{t} + \theta) + \mathbf{N}(\mathbf{t}), \quad (289)$$


$$N(t) = A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (290)$$

若用 $A(t)$ 表示窄带随机过程 $X(t)$ 的包络, 那么在平方律检波器的输出端, 可得到包络平方为

$$A^2(\mathbf{t}) = [a \cos \theta + A_c(\mathbf{t})]^2 + [a \sin \theta + A_0(\mathbf{t})]^2. \quad (291)$$

于是, 加法器输出端随机变量 V 为

$$V = \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^m (a \cos \theta + A_{ci})^2 + \sum_{i=1}^m (a \sin \theta + A_{ai})^2 \right], \quad (292)$$

式中 $A_{\sigma} = A_e(t_i)$ 和 $A_{si} = A_s(t_i)$ 分别表示 $A_e(t)$ 和 $A_s(t)$ 在 t_1 时刻的状态。

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m (a \cos \theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2} \cos^2 \theta \\ \lambda_2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m (a \sin \theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2} \sin^2 \theta \end{cases} \quad (293)$$

随机信号分析

非中心参量 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{ma^2}{\sigma^2}$

得到 V 的概率密度函数

$$f_V(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\lambda} \right)^{\frac{m-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} - \frac{v}{2} \right\} I_{m-1}(\sqrt{v\lambda}), \quad v \geq 0. \quad (294)$$

检波器输入端的功率信噪比

而非中心参量与自由度之比 $\lambda/n = a^2/2\sigma^2$, 正好是检波器输入端的功率信噪比。