# 随机信号分析

随机信号的时域分析

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

October 23, 2020

# 目录

- 1 窄带高斯过程包络平方的概率分布
  - 窄带高斯噪声包络平方的分布
  - 余弦信号加窄带高斯噪声包络平方的概率分布
  - 卡方分布和非中心卡方分布
- 2 习题

# 第二次教案下载二维码

#### Github 下载





第2章 随机信号的时域分析

# 智慧树课堂二维码和项目地址



图 1: 《随机信号分析》课程号:k213654



Github 项目地址

#### 下载地址:

https://github.com/zggl/random-signal-processing2020-autumn

# 目录

- 1 窄带高斯过程包络平方的概率分布
  - 窄带高斯噪声包络平方的分布
  - 余弦信号加窄带高斯噪声包络平方的概率分布
  - 卡方分布和非中心卡方分布
- 2 习题

在许多实际应用中, 也常常在高频窄带滤波器的输出端接入一平方律检波器如图 2 所示, 在平方律检波器输出端便得到 X(t) 包络的平方  $A^2(t)$ 。

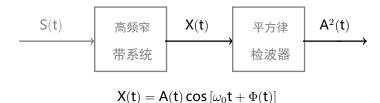


图 2: 平方律检波器

前面已经推导出当窄带随机过程为一具有零均值、方差为  $\sigma^2$  的平稳高斯噪声时, 其包络 A(t) 的一维概率密度为瑞利分布。

$$f_{\text{A}}\left(a_{t}\right)=\frac{a_{t}}{\sigma^{2}}\exp\left\{ -\frac{a_{t}^{2}}{2\sigma^{2}}\right\} ,a_{t}\geqslant0. \tag{1}$$

应用求随机变量函数分布的方法, 很容易求出包络平方的一维概率密度。令

$$U(t) = A^2(t) \tag{2}$$

则在时刻 t 的采样有

$$\begin{cases}
U_{t} = g(A_{t}) = A_{t}^{2}, & A_{t} \geqslant 0 \\
A_{t} = h(U_{t}) = \sqrt{U_{t}}, & U_{t} \geqslant 0.
\end{cases}$$
(3)

其雅可比行列式为

$$J = \frac{1}{2\sqrt{U_t}} \tag{4}$$

于是包络平方的一维概率密度为

$$f_{U}\left(u_{i}\right)=|J|f_{A}\left(A_{t}\right)=\frac{1}{2\sigma^{2}}\exp\left\{ -\frac{u_{t}}{2\sigma^{2}}\right\} ,\quad u_{t}\geqslant0. \tag{5}$$

上式表明, U<sub>i</sub> 服从指数分布。

实际中, 为了分析方便, 常应用归一化随机变量。令归一化随机变量  $V_t = \frac{U_1}{\sigma^2}$ , 则可得到  $V_t$  的概率密度为

$$f_{V}(v_{t}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{v_{1}}{2}}, \quad v_{t} \geqslant 0.$$
 (6)

当窄带随机过程为余弦信号加窄带高斯噪声时,即

$$X(t) = a\cos\omega_0 t + N(t) = A(t)\cos\left[\omega_0 t + \Phi(t)\right], \tag{7}$$

其中  $\mathbf{a}$ ,  $\omega_0$  为已知常数,  $\mathbf{N}(\mathbf{t})$  为具有零均值、方差  $\sigma^2$  的窄带高斯噪声。根据 **??** 节分析的结果可知,  $\mathbf{X}(\mathbf{t})$  的包络服从广义瑞利分布, 即

$$f_{A}(a_{t}) = \frac{a_{t}}{\sigma^{2}}I_{0}\left(\frac{aa_{t}}{\sigma^{2}}\right)\exp\left\{-\frac{a_{t}^{2}+a^{2}}{2\sigma^{2}}\right\}, \quad a_{t} \geqslant 0.$$
 (8)

仿照 1 节中的方法, 不难导出包络平方  $U^2 = A^2$  的一维概率密度为

$$f_{U}\left(u_{i}\right) = \frac{1}{2\sigma^{2}}I_{0}\left[\frac{a\sqrt{u_{t}}}{\sigma^{2}}\right]\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left[u_{t} + a^{2}\right]\right\}, \quad u_{t} \geqslant 0.$$
 (9)

令  $V_t = \frac{U_t}{c^2}$ , 可得归一化随机变量 V 的概率密度函数为

$$f_{V}(v_{i}) = \frac{1}{2}I_{0}\left[\frac{\sqrt{v_{t}}a}{\sigma}\right] \exp\left\{-\frac{v_{t} + a^{2}/\sigma^{2}}{2}\right\}, \quad v_{t} \geqslant 0.$$
 (10)

卡方分布和非中心卡方分布

#### 1. $\chi^2$ 分布

在有些应用中, 例如在信号检测中, 为了改进检测性能, 经常采用所谓视频积累技术, 即对包络的平方进行独立采样后再积累, 如图 3 所示, 这时输出的随机变量习惯上记为  $\chi^2$ , 它的概率密度习惯上称之为  $\chi^2$  分布如图所示, 让一个具有零均值和方差  $\sigma^2$  的平稳窄带实高斯噪声 N(t) 通过一平方律检波器, 而检波器输出的是 N(t) 的包络平方  $A^2(t)$ 。然后对随机过程  $A^2(t)$  进行独立采样, 得到 m 个独立的随机变量

 ${f A}_i^2={f A}^2\,({f t}_i)\,({f i}=1,2,\cdots,{f m})$ ,经归化以后送入累加器。下面讨论累加器输出端随机变量  $\chi^2$  的概率密度。为了避免混淆, 在下面的推导中, 用  ${f V}$  来代替  $\chi^2$ 。

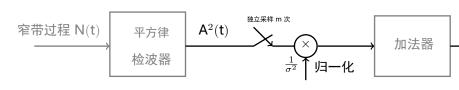


图 3: 视频积累技术

由于窄带过程 N(t) 的包络 A 和它的一对垂直分量  $A_c(t), A_s(t)$  有如下 关

$$A^{2}(t) = A_{c}^{2}(t) + A_{s}^{2}(t),$$
 (11)

式中  $A_c(t)$ ,  $A_s(t)$  是零均值、方差为  $\sigma^2$  的平稳高斯过程。 $A^2(t)$  经采样后, 加法器的输出

$$V = \sum_{i=1}^{m} (A_{ci}^{2} + A_{si}^{2}).$$
 (12)

式中  $A'_{ci}$ ,  $A'_{si}$  是将  $A_{ci}$ ,  $A_{si}$  归一化以后的随机变量。

由于  $A'_{ci}$ ,  $A'_{si}$  都是同分布的高斯变量, 故上式又可表示为式中每一个 X, 都是同分布的标准高斯变量 (零均值、方差为 1), 且各 X, 相互独立。为了书写简单, 用 n 代替上式中的 2m, 可得

$$V = \sum_{i=1}^{2m} X_i^2.$$
 (13)

于是, 求 V 的概率密度便归结为求 n 个独立同分布高斯变量平方和的概率密度为此, 首先求每一随机变量  $X_i^2$  的概率密度。



## 已知标准高斯随机变量 X<sub>i</sub> 的概率密度为

$$f_{X}(x_{i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x_{i}^{2}}{2}\right\}. \tag{14}$$

令  $Y_i = X_i^2$ , 不难求出  $Y_i$  的概率密度

$$f_{Y_i}(y_i) = |J| f_X(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi_i}} e^{-\frac{y_i}{2}}, \quad y_i \geqslant 0.$$
 (15)

## 从而得到 Y; 的特征函数为

$$\begin{split} Q_{Y_i}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_i} \left( y_i \right) e^{iw_i} dy_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} y_i^{-\frac{1}{2}} \, exp \left\{ - \left( \frac{1}{2} - ju \right) y_i \right\} dy_i = (1 - 2ju)^{\frac{1}{2}}. \end{split} \tag{16}$$

由于  $V = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ , 利用特征函数的性质: 独立随机变量之和的特征函数等于各随机变量特征函数的乘积。便可得到 V 的特征函数为

$$Q_{V}(u) = \prod_{i=1}^{n} Q_{Y_{i}}(u) = (1 - 2ju)^{-\frac{n}{2}}$$
(17)

上式进行傅里叶逆变换, 便可求得 V 的概率密度为

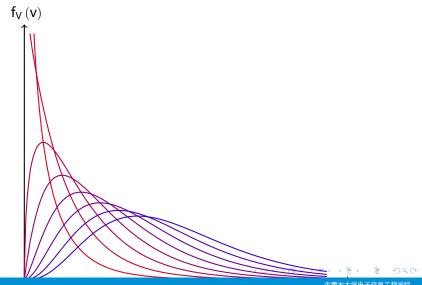
$$f_{V}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\mathbf{n}}{2}\right)} 2^{-\frac{\mathbf{n}}{2}} \mathbf{v}^{\left(\frac{\pi}{2}-1\right)} \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{x}}{2}}, \quad \mathbf{v} \geqslant 0.$$
 (18)

式中,  $\Gamma(\cdot)$  为  $\Gamma$  函数, 满足

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \mathsf{t}^{(\alpha - 1)} \mathsf{e}^{-\mathsf{t}} \mathsf{d}\mathsf{t}. \tag{19}$$

称  $f_v(v)$  为 n 个自由度的  $\chi^2$  分布。图 4 画出了几个不同自由度下  $f_v(v)$  的图形。





#### $\chi^2$ 分布具有下列性质

1° 两个独立的  $\chi^2$  变量之和仍为  $\chi^2$  变量。若它们各自的自由度分别为  $n_1$  和  $n_2$ ,则它们的和变量为具有  $(n_1+n_2)$  个自由度的  $\chi^2$  分布 2n 个自由度的  $\chi^2$  变量的均值 E[V]=n,方差 D[V]=2n。

2. 非中心  $\chi^2$  分布

若窄带过程 N'(t) 为余弦信号 N'(t) 与窄带高斯噪声 N(t) 之和, 则加法器输出的就是非中心  $\chi^2$  分布。

## (1) 信号包络为常数的情况 设信号

$$\mathsf{s}(\mathsf{t}) = \mathsf{a}\cos\left(\omega_0\mathsf{t} + \pi/4\right) \tag{20}$$

包络 a 为常数,则有

$$s(t) = a\cos\frac{\pi}{4}\cos\omega_0 t + a\sin\frac{\pi}{4}\sin\omega_0 t$$

$$= a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\omega_0 t + a\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\omega_0 t.$$
(21)

若令 
$$s = a\sqrt{2}/2$$
, 则

$$s(t) = s\cos\omega_{0t} + s\sin\omega_{0}t. \tag{22}$$

又由于

$$N(t) = n_e(t) \cos \omega_0 t - n_3(t) \sin \omega_0 t. \tag{23}$$

代入 N(t) 得

$$\begin{split} N'(t) &= s(t) + N(t) \\ &= [s + n_c(t)] \cos \omega_0 t - [s + n_s(t)] \sin \omega_0 t \\ &= A_c(t) \cos \omega_0 t - A_3(t) \sin \omega_0 t. \end{split} \tag{24}$$

## 而 N(t) 的包络的平方

$$A^2(t) = A_c^2(t) + A_s^2(t) = \left[s + n_{\varepsilon}(t)\right]^2 + \left[s + n_s(t)\right]^2. \tag{25} \label{eq:25}$$

仿照求  $\mathbf{x}^2$  分布的方法, 加法器输出端的随机变量  $\mathbf{V}'$  应为

$$V' = \sum_{i=1}^{n} (s + X_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} Y$$
 (26)

式中  $X_i$  为同分布的独立高斯变量 (均值为零、方差为  $sigma_2$ ), s 为常 数。

为了导出 V 的概率密度,首先求  $Y_i = \left(s + X_i\right)^2$  的概率密度和特征函数。

$$R_i = s + X_i. (27)$$

显然, R<sub>i</sub> 的概率密度为

$$f_{R_{i}}(r_{i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(r_{i} - s)^{2}}{2\sigma^{2}}\right\}. \tag{28}$$

# 则 $Y' = R^2$ 的概率密度为

$$\mathbf{f}_{\gamma_{i}}\left(\mathbf{y}_{i}^{\prime}\right) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma^{2}\mathbf{y}_{i}^{\prime}}}\left\{\exp\left[-\frac{\left(\sqrt{\mathbf{y}_{i}^{\prime}}-\mathbf{s}\right)^{2}}{2\sigma^{2}}\right] + \exp\left[-\frac{\left(-\sqrt{\mathbf{y}_{i}^{\prime}}-\mathbf{s}\right)^{2}}{2\sigma^{2}}\right]\right\}. \tag{29}$$

将上式中指数的平方项展开, 并利用双曲余弦函数  $2 \cosh(b) = e^{s} + e^{-s}$ , 可得

$$f_{Y_i}(y_i') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y_i'}} \exp\left\{-\frac{y_i' + s^2}{2\sigma^2}\right\} \cosh\left(\frac{s\sqrt{y_i'}}{\sigma^2}\right). \tag{30}$$

由于 X, Y 为独立同分布的, 则  $Y_i = (s + X_i)^z$  也是独立同分布的。而  $V' = \sum_{i=1}^{n} Y'_{i}$ , 于是 V 的特征函数为

$$Q_{V'}(u) = \prod_{i=1}^{n} Q_{Y'_i}(u) = \left(\frac{1}{1-j2\sigma^2 u}\right)^{\frac{n}{2}} exp\left\{-\frac{ns^2}{2\sigma^2} + \frac{ns^2}{2\sigma^2\left(1-j2\sigma^2 u\right)}\right. \tag{31}$$

对上式作傅里叶逆变换, 可得 V 的概率密度为

$$\mathsf{f}_{\mathsf{V}'}\left(\mathsf{v}'\right) = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\mathsf{v}'}{\lambda'^2}\right)^{\frac{\mathsf{n}-2}{4}} \exp\left\{-\frac{\lambda'+\mathsf{v}'}{2\sigma^2}\right\} \mathsf{I}_{\frac{\mathsf{n}}{2}-1} \left(\frac{\sqrt{\mathsf{v}'\lambda'}}{\sigma^2}\right), \quad \mathsf{v}' \geqslant 0.$$

式中,  $\lambda' = s^2 n$  定义为非中心参量,  $I_n(\cdot)$  为第一类 n 阶修正贝塞尔函数。

定义归一化变量  $V = V'/\sigma^2$ , 那么

$$V = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{s}{\sigma} + \frac{X_{i}}{\sigma}\right)^{2} = \sum_{i=1}^{n} R_{i}^{2}.$$
 (33)

其中变量 R 是均值为  $S/\sigma$ 、方差为 1 的相互独立的高斯变量。

#### 易证 V 的概率密度为

$$f_{V}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\lambda}\right)^{\frac{n-2}{4}} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} - \frac{v}{2}\right\} I_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{v\lambda}), \quad v \geqslant 0. \tag{34}$$

上式是 n 个自由度的非中心  $\chi^2$  分布。其中非中心参量  $\lambda= {\rm ns}^2/\sigma^2$  表示视频积累后的功率信噪比。

图 5 画出了不同信噪比  $\lambda$  和样本数 n 情况下的非中心  $\chi^2$  函数。

图 5: 非中心 
$$\chi^2$$
 分布: a)  $v = 4, \lambda = 2..6$ , b)  $v = 2..6, \lambda = 2$ 

### (2) 信号包络不为常数的情况 给定信号

 $s(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \pi/4),$  (35)

包络 a(t) 为确定函数,则有

$$s(t) = a(t)\cos\frac{\pi}{4}\cos\omega_0 t + a(t)\sin\frac{\pi}{4}\sin\omega_0 t$$

$$= a(t)\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\omega_0 t + a(t)\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\omega_0 t.$$
(36)

又由于

$$N(t) = n_c(t)\cos\omega_0 t - n_s(t)\sin\omega_0 t. \tag{37}$$

代入 N'(t) 得

$$\begin{split} N'(t) &= s(t) + N(t) = \left[ a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + n_e(t) \right] \cos \omega_0 t - \left[ a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + n_1(t) \right] \sin \omega_0 t \\ &= A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t. \end{split} \tag{38}$$

#### 而 N(t) 的包络的平方

$$\begin{split} A^2(t) &= A_c^2(t) + A_0^2(t) \\ &= \left[ a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + n_c(t) \right]^2 + \left[ a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + n_3(t) \right]^2. \end{split} \tag{39}$$

在  $\mathbf{t}_i$  ( $\mathbf{i}=1,2,\cdots,\mathbf{n}$ ) 时刻对  $\mathbf{A}^2(\mathbf{t})$  进行独立的采样, 令  $\mathbf{s}=\mathbf{a}(\mathbf{t})$  仿照求  $\chi^2$  分布的方法, 加法器输出端的随机变量  $\mathbf{Q}'$  应为

$$Q' = \sum_{i=1}^{n} (s_i + X_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i,$$
 (40)

式中 s 是对信号包络 a(t) 的第 i 次采样, 是确定值。

由于单个样本  $Y_i = (s_i + X_i)^2$  的特征函数, 可以直接应用上面信号包络为常量的推导结果

$$Q_{Y}^{*}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-j2\sigma^{2}u}} \exp\left\{-\frac{s_{1}^{2}}{2\sigma^{2}} + \frac{s_{1}^{2}}{2\sigma^{2}\left(1-j2\sigma^{2}u\right)}\right\}. \tag{41}$$

又因为  $Y_i^* \ (i=1,2,\cdots,n)$  相互独立, 面  $Q'=\sum_{k=1}^n Y_i$ , 于是 Q' 的特征 函数为

$$Q_{\alpha}(u) = \prod_{i=1}^{n} Q_{Y_{i}'}(u) = \left(\frac{1}{1 - j2\sigma^{2}u}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n} s_{i}^{2}}{2\sigma^{2}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} s_{i}^{2}}{2\sigma^{2}(1 - j2\sigma^{2}u)}\right\}. \tag{42}$$

#### 对上式作傅里叶逆变换可得 O' 的概率密度

$$\mathsf{f}_{\alpha}\left(\mathsf{q}'\right) = \frac{1}{2\sigma^{2}} \left(\frac{\mathsf{q}'}{\lambda'^{2}}\right)^{\frac{\mathsf{n}-2}{4}} \exp\left\{-\frac{\lambda' + \mathsf{q}'}{2\sigma^{2}}\right\} . \mathsf{I}_{\frac{\mathsf{n}}{2}-1} \left(\frac{\sqrt{\mathsf{q}'\lambda'}}{\sigma^{2}}\right), \quad \mathsf{q}' \geqslant 0. \tag{43}$$

将式 (43) 与式 (32) 对照可见, Q' 与 V' 具有相同的概率密度, 不同的只是此时的非中心参量  $\lambda' = \sum_{i=1}^n s_i^2$ , 类似地, 定义归一化参量  $Q = Q'/\sigma^2$ , 于是可得

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{s_i}{\sigma} + \frac{X_i}{\sigma} \right)^2$$
 (44)

令

$$Z_{i} = \frac{s_{i}}{\sigma} + \frac{X_{i}}{\sigma}.$$
 (45)

则  $Z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 是具有均值  $S_i/\sigma$  和单位方差的独立高斯变量。于是, 可得具有 n 个自由度的非中心  $\chi^2$  分布为

$$f_{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{q}}{\lambda} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right\} I_{\frac{n}{2} - 1}(\sqrt{\mathbf{Q}\lambda}). \tag{46}$$

式中  $\lambda = \sum_{i=1}^{n} S_i^2 / \sigma^2$  为非中心参量。

不难证明, 两个统计独立的非中心  $\chi^2$  随机变量之和仍为非中心  $\chi^2$  随机变量。

卡方分布和非中心卡方分布

若它们的自由度分别为  $n_1$  乐  $n_2$ , 非中心参量分别为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ , 则和变量的自由度为  $n = n_1 + n_2$ , 非中心参量为  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ 。 设图 **??** 中加至平方律检波器输入端的窄带随机过程 X(t) 为

$$X(t) = a\cos(\omega_0 t + \theta) + N(t), \tag{47}$$

其中  $a\cos\left(\omega_{b}t+\theta\right)$  为随相余弦信号, a 和  $\omega_{0}$  为常数。N(t) 是零均值、方差为  $\sigma^{2}$  的稳窄带高斯噪声, 其功率谱关于  $\omega_{0}$  偶对称。X(t) 经检波并作归一化处理以后, 独立采样 m 次, 求累加器输出端随机变量的概率密度及其参数。

## 解: 先将 N(t) 表示为

$$N(t) = A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t, \tag{48}$$

若用 A(t) 表示窄带随机过程 X(t) 的包络, 那么在平方律检波器的输出端, 可得到包络平方为

$$A^{2}(t) = [a\cos\theta + A_{c}(t)]^{2} + [a\sin\theta + A_{0}(t)]^{2}.$$
 (49)

于是, 加法器输出端随机变量 V 为

$$V = \frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^{m} (a \cos \theta + A_{ci})^2 . + \sum_{i=1}^{m} (a \sin \theta + A_{ai})^2 \right],$$
 (50)

式中  $A_{\sigma} = A_{e}(t_{i})$  和  $A_{si} = A_{s}(t_{i})$  分别表示  $A_{e}(t)$  和  $A_{s}(t)$  在  $t_{1}$  时刻的状态。

◆ロト ◆個ト ◆ 恵ト ◆ 恵 ・ 釣りの

卡方分布和非中心卡方分布

根据  $A_c(t)$ ,  $A_s(t)$  的有关性质可知, 各个  $A_\alpha$ ,  $A_{si}$  是同分布的独立标准高斯变量。对照式 (33) 可知, 上式中两个和式分别是自由度为 m 的非中心  $\chi^2$  变量, 它们的非中心参量  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  分别为

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} (a\cos\theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2} \cos^2\theta \\ \lambda_2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} (a\sin\theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2} \sin^2\theta \end{cases}$$
 (51)

由于这两个非中心  $\chi^2$  随机变量也彼此独立, 因而它们的和变量 V 也是非中心  $\chi^2$  随机变量, 自由度  $\mathbf{n}=2\mathbf{m}$ ,



非中心参量  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\mathsf{ma}^2}{\sigma^2}$ , 便可得到 V 的概率密度函数为

$$f_{V}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\lambda}\right)^{\frac{m-1}{2}} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} - \frac{v}{2}\right\} I_{m-1}(\sqrt{v\lambda}), \quad v \geqslant 0.$$
 (52)

而非中心参量与自由度之比  $\lambda/\mathbf{n}=\mathbf{a}^2/2\sigma^2$ , 正好是检波器输入端的功率信噪声比。



## 目录

- 1 窄带高斯过程包络平方的概率分布
  - 窄带高斯噪声包络平方的分布
  - 余弦信号加窄带高斯噪声包络平方的概率分布
  - 卡方分布和非中心卡方分布
- 2 习题

证明

$$② \mathsf{H}\left[\mathsf{e}^{\mathsf{j}\omega_0\mathsf{t}}\right] = -\mathsf{j}\mathsf{e}^{\mathsf{i}\omega_0\mathsf{t}}, \omega_0 > 0.$$

$$\mathbf{5} \, \mathsf{H}^{-1} \left[ \frac{1}{\pi \mathsf{t}} \right] = \delta(\mathsf{t}).$$

证明: ① 偶函数的希尔伯特变换为奇函数。② 奇函数的希尔伯特变换为偶函数。 当  $\tau$ ,  $\omega_0$  满足什么条件时,能使  $y(t) = \frac{\sin(\pi t/\tau)}{\pi t/\tau} e^{j\omega_0 t} = Sa(\pi t/\tau) e^{j\omega_0 t}$  为解析信号。画出  $Sa(\pi t/\tau)$  和 y(t) 的频谱图。

调频信号  $\mathbf{s}(\mathbf{t}) = \cos\left[\omega_0\mathbf{t} + \mathbf{m}(\mathbf{t})\right]$ , 当 ①  $\frac{d \mathbf{m}(\mathbf{t})}{d\mathbf{t}} \ll \omega_0$  时, 为窄带信号, 求 (1) 的包络和预包络。 已知随机过程

$$X(t) = [X_1(t) \ X_2(t) \ X_1(t+\tau) \ X_2(t+\tau)]^T$$
. (53)

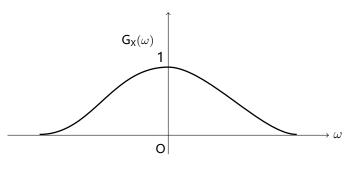
式中  $X_1(t)$  为平稳标准高斯过程,  $X_2(t)$  为  $X_1(t)$  的希尔伯特变换。证明

$$E\left[X(t)X^{T}(t)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & R_{1}(\tau) & \hat{R}_{1}(\tau) \\ 0 & 1 & -\hat{R}_{1}(\tau) & R_{1}(\tau) \\ R_{1}(\tau) & -\hat{R}_{1}(\tau) & 1 & 0 \\ \hat{R}_{1}(\tau) & R_{1}(\tau) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(54)

其中  $R_1(\tau) = E[X_1(t)X_1(t+\tau)]$ 。

W(t) 的功率谱密度, 并画图表示。

$$W(t) = X(t) \cos \omega_0 t - \hat{X}(t) \sin \omega_0 t. \tag{55}$$



零均值窄带平稳过程  $X(t) = A(t)\cos\omega_0 t - B(t)\sin\omega_0 t$  的功率谱密度  $G_X(\omega)$  在频带内关于中心频率  $\omega$  偶对称, 其中 A(t), B(t) 为平稳过程。 ① 证明: X(t) 的自相关函数  $R_X(\tau) = R_A(\tau)\cos\omega_0 \tau$ 。② 求 X(t) 自相关函数的包络和预包络。 已知零均值窄带平稳噪声

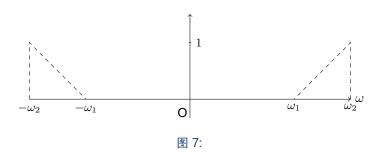
 $X(t) = A(t) \cos \omega_0 t - B(t) \sin \omega_0 t$ , 其功率谱密度如图 7 所示。画出下列情况下随机过程 A(t), B(t) 各自的功率谱密度:

- (1)  $\omega_0 = \omega_1$ ;
- (2)  $\omega_0 = \omega_2$ ;
- (3)  $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ .

判断上述每种情况下, 过程 A(t), B(t) 是否互不相关, 并给出理由。







◆ロト ◆母 ト ◆ 差 ト ◆ 差 ・ 夕 へ ○

## 已知平稳噪声 N(t) 的功率谱密度, 如图 8 所示。求窄带过程

$$X(t) = N(t)\cos(\omega_0 t + \theta) - N(t)\sin(\omega_0 t + \theta)$$
 (56)

的功率谱密度  $G_X(m)$ , 并画图表示。其中  $a_n > a_1$  为常数, 服从  $(0, 2\pi)$  上的均匀分布, 且与噪声 N(t) 独立。

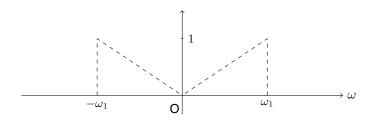


图 8:

## 已知零均值, 方差为 $\sigma^2$ 的窄带高斯平稳过程

 $X(t) = A_e(t)\cos\omega_0 t - A_s(t)\sin\omega_0 t$ , 其中  $A_c(t)$ , A $_s(t)$  为过程的一对垂直分解。证明:  $R_X(\tau) = R_{A_c}(\tau)\cos\omega_0 \tau - R_{A_cA_c}(\tau)\sin\omega_0 \tau$ 。

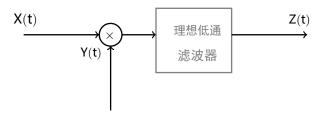


图 9:

证明: 零均值, 方差为 1 的窄带平稳高斯过程, 其任意时刻的包络平方的数学期望为 2, 方差为 4。 已知窄带高斯平稳过程  $X(t) = A(t) \cos \left[\omega_0 t + \Phi(t)\right]$ , 包络 A(t) 在任意时刻 t 的采样为随机变量 A, 求 A 的均值和方差。

如图 9 所示, 同步检波器的输入 X(t) 为窄带平稳噪声, 其自相关函数为

$$R_{X}(\tau) = \sigma_{X}^{2} e^{-\beta|\tau|} \cos \omega_{0} \tau, \beta \ll \omega_{0}.$$
 (57)

若另一输入

$$Y(t) = A \sin(\omega_0 t + \theta), \qquad (58)$$

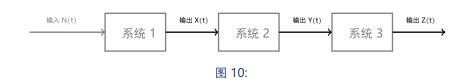
其中 A 为常数, 服从  $(0,2\pi)$  上的均匀分布, 且与噪声 X(t) 独立。求检波器输出 Z(t) 的平均功率。

如图 10 所示, 系统 1 是线性系统的传递函数,关于中心频率  $\omega$  偶对称, 系统 2 是线性系统的传递函数为 - jsgn( $\omega$ ), 系统 3 为线性微分系统。输入 N(t) 为物理谐密度为 N<sub>0</sub> 的白噪声, 且系统 1 输出 X(t) 的自相关函数的包络为 exp  $\{-\tau^2\}$ 。整个系统进入稳态。

- ① 判断 X(t) 和 Z(t) 分别服从什么分布, 给出理由.
- ② 证明 Z(t) 是严平稳过程。
- ③ 求 X(t) 和 Y(t) 的互相关函数, Y(t) 的功率谱密度,
- ④ 写出 Z(t) 一维概率密度表达式。
- ⑤ 判断同一时刻, Y(t) 和 Z(t) 是否独立, 给出理由。



习起 00000000000000000



如图 11 所示, 系统输入 N(t) 为物理谱密度为  $N_0$  的白噪声, 对包络平方检波后的过程进行二次独立采样, 求积累后的输出 X(t) 的分布平方律。

