



# 目录

- 1 随机过程的联合平稳
  - 希尔伯特变换的性质
  - 举例
- 2 高频窄带信号的复指数形式
  - 高频窄带信号通过窄带系统
  - 随机过程的解析形式及其性质
- 3 窄带随机过程
  - 窄带随机过程的“垂直”分解
  - 窄带随机过程的统计分析
- 4 窄带高斯过程包络与相位的分布
  - 包络和相位各自的二维概率分布
  - 随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布
- 5 窄带高斯过程包络平方的概率分布
  - 卡方分布和非中心卡方分布
  - 卡方分布的性质
- 6 窄带高斯过程包络平方的概率分布

# 第二次教案下载二维码

Github 下载



## 第 2 章 随机信号的时域分析



# 目录

- 1 随机过程的联合平稳
  - 希尔伯特变换的性质
  - 举例
- 2 高频窄带信号的复指数形式
  - 高频窄带信号通过窄带系统
  - 随机过程的解析形式及其性质
- 3 窄带随机过程
  - 窄带随机过程的“垂直”分解
  - 窄带随机过程的统计分析
- 4 窄带高斯过程包络与相位的分布
  - 包络和相位各自的二维概率分布
  - 随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布
- 5 窄带高斯过程包络平方的概率分布
  - 卡方分布和非中心卡方分布
  - 卡方分布的性质
- 6 窄带高斯过程包络平方的概率分布





## (2) 从实信号中分解出单边谱信号

设  $s(t)$  为具有连续频谱的实信号

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (4)$$

式中  $S(\omega)$  为信号  $s(t)$  的频谱。

由傅里叶变换可以证明, 当  $s^*(t) = s(t)$  时, 有

$$S^*(\omega) = S(-\omega) \quad (5)$$

所以实信号的频谱  $S(\omega)$  是  $\omega$  的复函数。



若将  $S(\omega)$  傅里叶逆变换分解成正负两频域部分积分之和

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] + \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(-\omega') e^{-j\omega' t} d\omega' \right] \\
 &= \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] + \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega') e^{j\omega' t} d\omega' \right]^* \\
 &= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \\
 &= \operatorname{Re}[\tilde{s}(t)].
 \end{aligned}
 \tag{6}$$





由  $\text{Re}[\tilde{s}(t)] = s(t)$ , 再令单边信号的虚部

$$\text{Im}[\tilde{s}(t)] = \hat{s}(t). \quad (11)$$

即解析信号  $s(t)$  的虚部用符号  $\hat{s}(t)$  表示, 则

$$\tilde{s}(t) = s(t) + j\hat{s}(t). \quad (12)$$

上式是解析信号  $s(t)$  的一般表达式。

虚部  $\hat{s}(t)$  的求取

式中的虚部  $\hat{s}(t)$  又如何求得呢？

## 频域表达

从频域关系出发, 解析信号  $\tilde{s}(t)$  的频谱  $\tilde{S}(\omega)$  满足  $\tilde{S}(\omega) = 2S(\omega)U(\omega)$ 。

## 已知的傅里叶逆变换

$$U(\omega) \xrightleftharpoons[F]{F^{-1}} \frac{1}{2} \left[ \delta(t) - \frac{1}{j\pi t} \right]. \quad (13)$$

## (??)中复函数的计算基础

$$\oint_{|z|<0.2} \frac{1}{j\pi z} e^{-j\omega z} dz = \frac{1}{j\pi} \oint_{|z|<0.2} \frac{1}{t} e^{-j\omega z} dz = \frac{2j\pi}{j\pi} = 2. \quad (14)$$

## 解析信号的时域表达

$$\tilde{s}(t) = s(t) * \left[ \delta(t) - \frac{1}{j\pi t} \right] = s(t) + j \left[ s(t) * \frac{1}{\pi t} \right]. \quad (15)$$

## 实信号 $s(t)$ 的希尔伯特 (Hilbert) 变换

实信号  $s(t)$  单边谱的虚部

$$\begin{aligned} \hat{s}(t) &= s(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t - \tau)}{\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

上式称为实信号  $s(t)$  的希尔伯特 (Hilbert) 变换, 记作  $\hat{s}(t) = H[s(t)]$ 。







# 希尔伯特变换的几个重要性质

## 1. 希尔伯特变换相当于一个正交滤波器

希尔伯特变换是  $s(t)$  和  $1/\pi t$  的卷积, 根据线性系统的输出特征, 可以将  $\hat{s}(t)$  看成是  $s(t)$  通过一个具有冲激响应为的线性滤波器, 如图 2 所示。

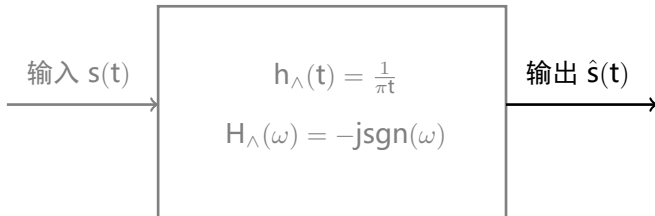
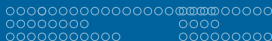


图 2: 希尔伯特变换



## $j\frac{1}{\pi t}$ 和 $\text{sgn}(\omega)$ 的关系

$$j\frac{1}{\pi t} \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} \text{sgn}(\omega), \quad (17)$$

式中  $\text{sgn}(a)$  为符号函数。

## 满足的条件

$$\text{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > 0 \\ -1, & \omega < 0 \end{cases} \quad (18)$$

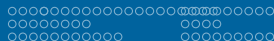
$$\frac{1}{\pi t} \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} -j\text{sgn}(\omega). \quad (19)$$



## 希尔伯特变换是一个正交滤波器

由式 (23) 可见, 通过此滤波器的信号, 其所有频率分量的幅度响应为 1.

而在相位上, 所有正频率分量移相  $-\pi/2$ , 所有负频率分量移相  $+\pi/2$ 。因此说, 希尔伯特变换是一种正交变换, 它的作用相当于一个正交滤波器, 如图 26 中所示的一次变换。



## 2. 两次希尔伯特变换相当于一个倒相器

若对  $s(t)$  进行两次希尔伯特变换, 则相当于信号  $s(t)$  通过两个级联的  $h_A(t)$  网络。即

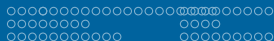
$$\hat{\hat{s}}(t) = H\{H[s(t)]\} = H[s(t)] = \hat{s}(t) * \frac{1}{\pi t} = s(t) * \frac{1}{\pi t} * \frac{1}{\pi t} \quad (24)$$

$$\hat{\hat{S}}(\omega) = \hat{S}(\omega)[-j\text{sgn}(\omega)] = S(\omega)[-j\text{sgn}(\omega)][-j\text{sgn}(\omega)] = -S(\omega) \quad (25)$$

从而得到时域关系

$$\hat{\hat{s}}(t) = H\{H[s(t)]\} = -s(t) \quad (26)$$

如图 26 所示, 两次希尔伯特变换将信号  $s(t)$  翻转了  $180^\circ$ 。



### 3. 希尔伯特逆变换等于负的希尔伯特正变换

定义希尔伯特逆变换为

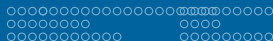
$$s(t) = H^{-1}[\hat{s}(t)]. \quad (27)$$

由式 (26) 可得

$$s(t) = -H[\hat{s}(t)]. \quad (28)$$

对比式 (27) 和式 (28) 可知

$$s(t) = -H[\hat{s}(t)]. \quad (29)$$



即希尔伯特逆变换等于负的希尔伯特正变换

$$H^{-1}[\cdot] = -H[\cdot]. \quad (30)$$

因此, 希尔伯特逆变换的公式为

$$\begin{aligned} s(t) &= H^{-1}[\hat{s}(t)] = -H[\hat{s}(t)] \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{s}(t - \tau)}{\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{s}(t + \tau)}{\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (31)$$

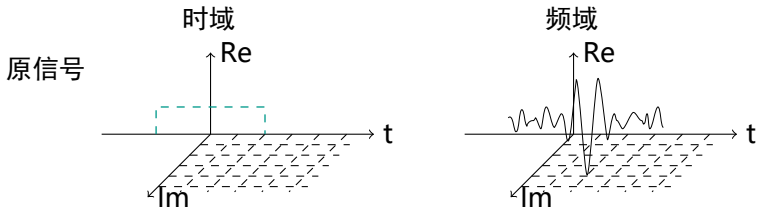


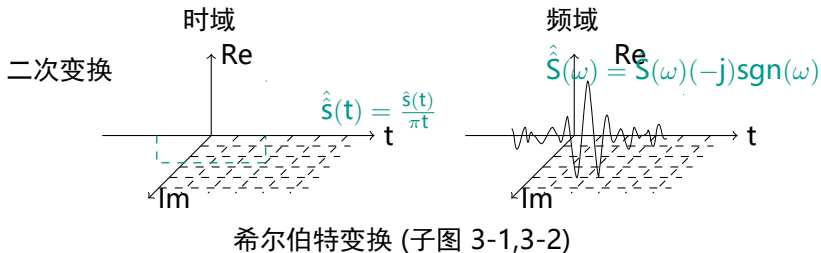
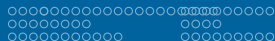
图 3: 希尔伯特变换 (子图 1-1, 1-2)





$$\hat{S}(\omega)^{\text{Re}} = S(\omega)(-j)\text{sgn}(\omega)$$

### 希尔伯特变换 (子图 2-1,2-2)













## 例 .2

## 设限带信号

$$\begin{cases} s_1(t) = a(t) \cos \omega_0 t \\ s_2(t) = a(t) \sin \omega_0 t \end{cases} \quad (42)$$

其中  $a(t)$  为低频限带信号, 其频谱为

$$A(\omega), \quad |\omega| < \frac{\Delta\omega}{2} < \omega_0 \quad (43)$$

求  $s(t)$ ,  $s^2(t)$  的 Hilbert 变换。



解: ① 利用傅里叶变换的相乘性质, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{t}) \cos \omega_0 \mathbf{t} &\xrightarrow[\mathbf{F}^{-1}]{\mathbf{F}} \frac{1}{2\pi} \mathbf{A}(\omega) * \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ S_1(\omega) &= \frac{1}{2} [\mathbf{A}(\omega - \omega_0) + \mathbf{A}(\omega + \omega_0)] \end{aligned} \quad (44)$$

如图 ?? 所示, 由于  $\frac{\Delta\omega}{2} < \omega_0$ , 可得

$$\mathbf{S}_1(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathbf{A}(\omega - \omega_0), & \omega > 0 \\ \frac{1}{2}\mathbf{A}(\omega + \omega_0), & \omega < 0 \end{cases} \quad (45)$$

# 目录

- 1 随机过程的联合平稳
  - 希尔伯特变换的性质
  - 举例
- 2 高频窄带信号的复指数形式
  - 高频窄带信号通过窄带系统
  - 随机过程的解析形式及其性质
- 3 窄带随机过程
  - 窄带随机过程的“垂直”分解
  - 窄带随机过程的统计分析
- 4 窄带高斯过程包络与相位的分布
  - 包络和相位各自的二维概率分布
  - 随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布
- 5 窄带高斯过程包络平方的概率分布
  - 卡方分布和非中心卡方分布
  - 卡方分布的性质
- 6 窄带高斯过程包络平方的概率分布



这类信号的典型频谱如图 5(a) 所示。如果在示波器上观察这类窄带信号, 它的波形或多或少地有点像正弦波, 如图 5(b) 所示。但它的振幅、相位不是常数, 而是随  $t$  变化的函数这类窄带信号  $s(t)$  可以表示为

$$s(t) = a(t) \cos [\omega_0 t + \phi(t)], \quad (50)$$

式中  $a(t)$  是信号  $s(t)$  的振幅调制, 称为包络函数。 $\phi(t)$  是信号  $s(t)$  的相位调制, 称为相位函数。

相对载波  $\cos \omega t$  来讲,  $a(t)$  与  $\phi(t)$  都是慢变化的时间函数。

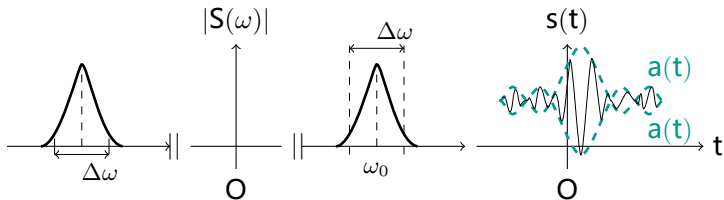


图 5: 高频窄带信号

可见  $m_c(t)$ ,  $m_s(t)$  相对  $\cos \omega_0 t$  来讲都是低频信号, 且  $m_c(t)$  与  $m_s(t)$  在几何上彼此正交。



$$\begin{aligned}\hat{s}(t) &= H[m_c(t) \cos \omega_0 t] - H[m_s(t) \sin \omega_0 t] \\ &= m_c(t) \sin \omega_0 t + m_s(t) \cos \omega_0 t \\ &= a(t) \cos \varphi(t) \sin \omega_0 t + a(t) \sin \varphi(t) \cos \omega_0 t \\ &= a(t) \sin [\omega_0 t + \varphi(t)].\end{aligned}\tag{55}$$









100%

$$\mathbf{m}(\mathbf{t}) \xrightleftharpoons[\mathbf{F}^{-1}]{\mathbf{F}} \mathbf{M}(\omega), \quad |\omega| < \Delta\omega \not\ll \omega_0. \quad (59)$$
$$S(\omega) = \frac{1}{2} [\mathbf{M}(\omega + \omega_0) + \mathbf{M}(\omega - \omega_0)]. \quad (60)$$

## ① $s(t)$ 的解析信号形式

$$\bar{s}(t) = s(t) + j\hat{s}(t). \quad (61)$$

解析信号的频谱

$$\tilde{S}(\omega) = 2S(\omega)U(\omega) = [M(\omega + \omega_0) + M(\omega - \omega_0)] U(\omega). \quad (62)$$

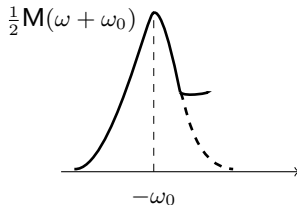
## ② $s(t)$ 的复指数表示

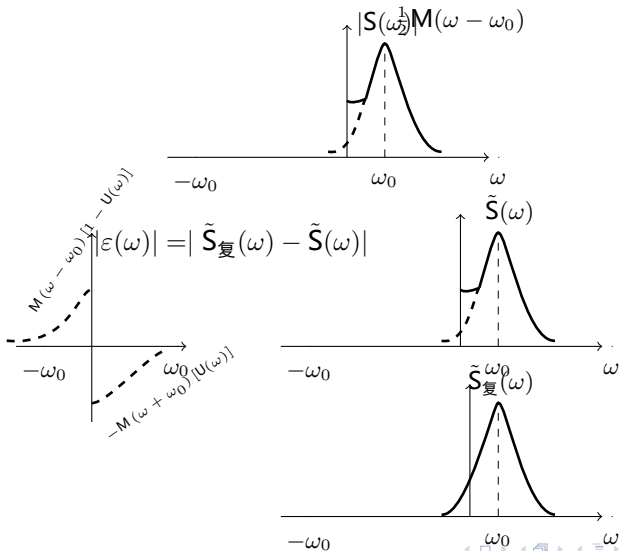
$$\bar{s}_{\text{复}}(t) = m(t)e^{j\omega_0 t}. \quad (63)$$

复信号频谱

$$\tilde{S}_{\text{复}}(t)(\omega) = M(\omega - \omega_0). \quad (64)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= \mathcal{S}_{\text{复}}(\omega) - \mathbf{S}(\omega) \\ &= \mathbf{M}(\omega - \omega_0) [1 - \mathbf{U}(\omega)] - \mathbf{M}(\omega + \omega_0) \mathbf{U}(\omega).\end{aligned}\quad (65)$$







### (3) 误差分析

如图 6和 7 所示, 误差  $\varepsilon(t)$  的大小取决于  $M(\omega)$  中  $|\omega| > \omega_0$  尾部所包含的能量。若尾部能量为零, 则误差  $\varepsilon(t)$  为零。

若要将  $s(t)$  的解析形式表示成复数形式, 则要求复包络  $m(t)$  必须是个低频限带信号, 即必须满足

$$M(\omega) = 0, \quad |\omega| > \Delta\omega, \Delta\omega < \omega_0 \quad (67)$$

也即  $\varepsilon(t) = 0$ 。可见, 此条件与前面从解析形式推导到复指数形式过程中的条件是一致的。

对于一般窄带信号而言, 即使复包络  $m(t)$  不是限带, 但如果能使  $\omega_0 \gg \Delta\omega$ , 使得尾部能量很小, 误差  $\varepsilon(t)$  也很小, 则用  $s(t)$  的复指数信号替代  $s(t)$  的解析信号也是允许的。

当然, 对于一个理想的高频窄带信号来讲, 由于  $\omega_0 \gg \Delta\omega$ , 且复包络  $m(t)$  又是限带的, 可以用指数形式的复信号直接替代其解析信号。

若已知高频窄带信号复包络的频谱  $M(\omega)$ , 有

$$\tilde{s}_{\text{复}}(t) = m(t)e^{j\omega_0 t} \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} \tilde{S}_{\text{复}}(\omega) = M(\omega - \omega_0), \quad (68)$$

则

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\text{复}}^*(\mathbf{t}) \xrightleftharpoons[\mathbf{F}^{-1}]{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{S}}_{\text{复}}^*(-\omega) = \mathbf{M}^*(-\omega - \omega_0) \quad (69)$$

由于可以用复指数形式代替其解析形式  $\tilde{s}(t) = \bar{s}_{\text{复}}(t)$ , 则

$$s(t) = \text{Re}[\tilde{s}(t)] = \text{Re}[\tilde{s}_{\text{复}}(t)] = \frac{1}{2} [\tilde{s}_{\text{复}}(t) + \tilde{s}_{\text{复}}^*(t)] \quad (70)$$

则高频窄带信号的频谱可以表示为

$$S(\omega) = \frac{1}{2} [M(\omega - \omega_0) + M^*(-\omega - \omega_0)] \quad (71)$$

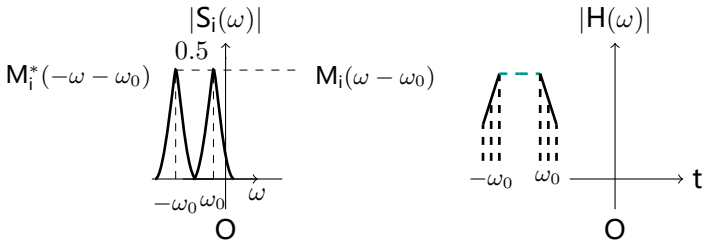


图 8: 高频窄带信号通过窄带系统







高频窄带系统的冲激响应和传递函数为

$$\begin{aligned} h(t) &= \text{Re}[\tilde{h}(t)] = \text{Re} [h_m(t)e^{j\omega_0 t}] \\ H(\omega) &= \frac{1}{2} [H_m(\omega - \omega_0) + H_m^*(-\omega - \omega_0)], \end{aligned} \quad (74)$$

其中  $h_n(t)$ ,  $H_m(a)$  分别为窄带系统的复包络及其频谱。

系统的输出

$$\begin{aligned} s_0(t) &= s_i(t) * h(t) \\ S_0(\omega) &= S_i(\omega)H(\omega). \end{aligned} \quad (75)$$

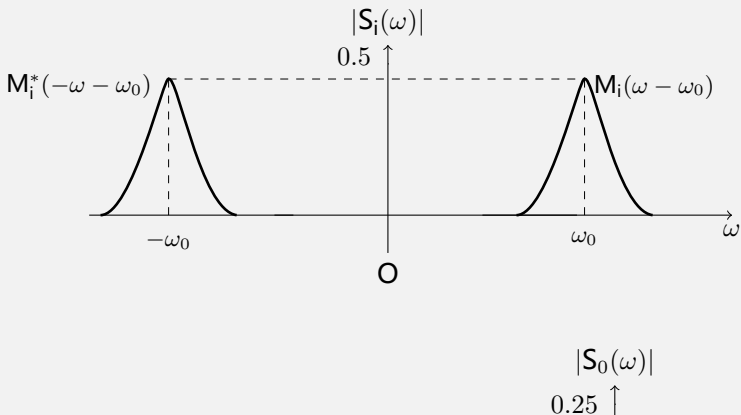


将输入窄带信号和窄带系统的频谱代入上式, 得

$$\begin{aligned}
 S_0(\omega) &= \frac{1}{4} [M_i(\omega - \omega_0) + M_i^*(-\omega - \omega_0)] [H_m(\omega - \omega_0) + H_m^*(-\omega - \omega_0)] \\
 &= \frac{1}{4} [M_i(\omega - \omega_0) H_m(\omega - \omega_0) + M_i(\omega - \omega_0) H_m^*(-\omega - \omega_0) \\
 &\quad + M_i^*(-\omega - \omega_0) H_m(\omega - \omega_0) \\
 &\quad + M_i^*(-\omega - \omega_0) H_m^*(-\omega - \omega_0)]
 \end{aligned}
 \tag{76}$$



由于  $s(t)$  的复包络  $m_i(t)$  是低频限带信号, 其频谱  $M_i(\omega)$  如图 10 所示



$$\begin{aligned} s_0(t) = & \frac{1}{4} [m_i(t) * h_m(t)] e^{j\omega_0 t} \\ & + \frac{1}{4} [m_i(t) * h_m(t)]^* e^{-j\omega_0 t} \end{aligned} \quad (78)$$
$$\mathbf{s}_o(\mathbf{t}) = \text{Re}[\tilde{\mathbf{s}}_o(\mathbf{t})] = \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{s}}_o(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{s}}_o^*(\mathbf{t})]. \quad (79)$$
$$\tilde{s}_0(t) = \frac{1}{2} [m_i(t) * h_m(t)] e^{j\omega_0 t}. \quad (80)$$



式表明, 输出  $s_o(t)$  也是一高频窄带信号, 且其复包络

$$m_0(t) = m_i(t) * \frac{1}{2} h_m(t), \quad (81)$$

即输出的复包络  $m_0(t)$  可由输入信号的复包络  $m_i(t)$  与系统冲激响应的复包络  $h_m(t)/2$  求得, 因此, 输出  $s_o(t)$  也可写成

$$s_o(t) = \text{Re} \left[ m_0(t) e^{j\omega_0 t} \right]. \quad (82)$$

结果表明, 一个高频窄带信号通过高频窄带系统, 可以作如图 11 所示的等效, 即可以等效为信号的复包络通过一个冲激响应为  $h_m(t)/2$  的低通系统。



即输出的复包络  $m_0(t)$  仅由输入信号的复包络  $m_i(t)$  与系统冲激响应的复包络  $h_m(t)/2$  卷积而成。

这种处理方法使我们对高频窄带信号通过高频窄带系统这类问题的分析与运算大为简化。

避免了高频信号与高频冲激响应卷积时的麻烦的高频项处理。

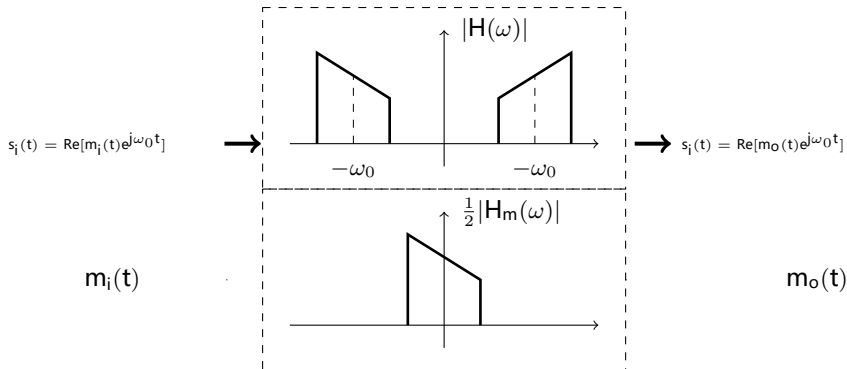


图 11: 运算的简化



因此,  $\hat{X}(t)$  可以看成是输入  $X(t)$  下线性系统  $h_{\lambda}(t)$  的输出, 即

$$Y(t) = X(t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{X}(t). \quad (85)$$

如图 12 所示。正是利用这一等效, 使得在下一节中应用解析过程来分析窄带随机后号变得是十分方便。

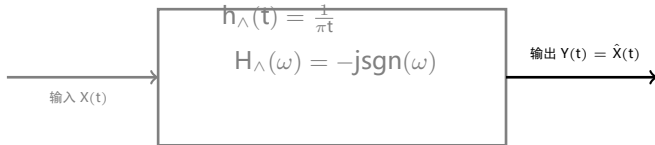


图 12: 解析过程

希尔伯特变换是一种线性变换, 那么随机信号通过线性系统的结论在此解析过程的性质可应用。

若  $X(t)$  为宽平稳 (实) 过程, 则  $\hat{X}(t)$  也是宽平 (实) 过程且  $X(t)$  与  $\hat{X}(t)$  联合宽平稳。



## 2° 实随机过程

证: 从图 12 不难看出

$$\begin{aligned}
 G_X(\omega) &= G_X(\omega) |H_{\Lambda}(\omega)|^2 \\
 |H_{\Lambda}(\omega)| &= |-j \operatorname{sgn}(\omega)| = 1.
 \end{aligned} \tag{86}$$

因此

$$G_{\hat{X}}(\omega) = G_X(\omega) \Rightarrow R_X(\tau) = R_X(\tau). \tag{87}$$

$X(t)$  与  $\hat{X}(t)$  的互相关函数等于  $X(t)$  自相关函数的希尔伯特变换。

$$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}}(\tau) = -\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{X}}\mathbf{X}}(\tau). \quad (89)$$



$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{X}\hat{\mathbf{X}}}(-\tau) &= \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(-\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) = \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) \\ &= -\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(\tau) = -\mathbf{R}_{\mathbf{X}\hat{\mathbf{X}}}(\tau). \end{aligned} \quad (92)$$

$$R_{\chi, \hat{\chi}}(-\tau) = -R_{\chi, \hat{\chi}}(\tau). \quad (93)$$

证: 因为  $R_{X,\hat{X}}(\tau), R_{X,\hat{X}}(\tau)$  是  $\tau$  的奇函数, 所以当  $\tau=0$  时, 有

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{X,\hat{X}}(0) = 0 \\ \mathbf{R}_{X,\hat{X}}(0) = 0 \end{cases} \quad (94)$$

上式说明, 过程  $X(t)$  与  $\hat{X}(t)$  在任何同一时刻 ( $\tau = 0$ ) 的两个状态正交, 即

$$R_{X,\hat{X}}(0) = E[X(t)\hat{X}(t)] = 0. \quad (95)$$

## 6° 解析过程的功率谱密度只存在于正频域

按照复随机过程自相关函数的定义, 解析过程  $\tilde{X}(t)$  的自相关函数为

$$\begin{aligned}
 R_X(\tau) &= E[\bar{X}(t) \cdot \tilde{X}(t + \tau)] \\
 &= E\{[X(t) - j\hat{X}(t)][X(t + \tau) + j\hat{X}(t + \tau)]\} \quad (96) \\
 &= R_X(\tau) + R_X(\tau) + j[R_{X\hat{X}}(\tau) - R_{\hat{X}X}(\tau)].
 \end{aligned}$$

再应用性质 2° 和 3° 可得

$$R_X(\tau) = 2[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)] = 2\tilde{R}_X(\tau). \quad (97)$$

对式 (97) 两边求傅里叶变换, 可得解析过程  $\tilde{X}(t)$  的功率谱密度为

$$\begin{aligned}
 G_{\tilde{X}}(\omega) &= 2 \left\{ G_X(\omega) + jF \left[ \hat{R}_X(\tau) \right] \right\} \\
 &= 2 \left\{ G_X(\omega) + j[-j \operatorname{sgn}(\omega) G_X(\omega)] \right\} \\
 &= 2 [G_X(\omega) + \operatorname{sgn}(\omega) G_X(\omega)] \\
 &= \begin{cases} 4G_X(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{98}$$

上式表明, 解析过程的功率谱密度只存在于正频域, 即它是单边带的功率谱密度其强度等于原实过程功率谱密度强度的 4 倍。 $G_X(\omega) \leftrightarrow G_X(\omega)$  的关系如图 13 所示。

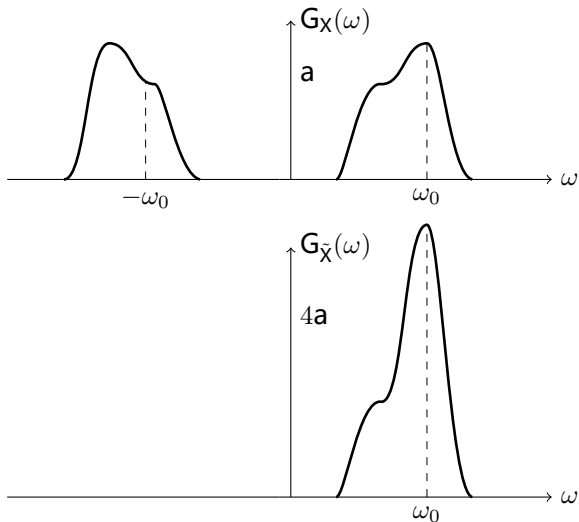


图 13: 解析过程的功率谱



# 目录

- 1 随机过程的联合平稳
  - 希尔伯特变换的性质
  - 举例
- 2 高频窄带信号的复指数形式
  - 高频窄带信号通过窄带系统
  - 随机过程的解析形式及其性质
- 3 窄带随机过程
  - 窄带随机过程的“垂直”分解
  - 窄带随机过程的统计分析
- 4 窄带高斯过程包络与相位的分布
  - 包络和相位各自的二维概率分布
  - 随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布
- 5 窄带高斯过程包络平方的概率分布
  - 卡方分布和非中心卡方分布
  - 卡方分布的性质
- 6 窄带高斯过程包络平方的概率分布

# 窄带随机过程的数学模型及复指数形式

## 1. 窄带随机过程的数学模型

在雷达、通信等许多电子系统中, 通常是用一个宽带随机信号来激励一个窄带滤波器。此时, 在滤波器输出端得到的便是一个窄带随机信号, 若用一示波器来观测它的某次输出的波形 (某个样本), 则可以看到, 它的样本接近于一个正弦波, 但此正弦波的幅度和相位都在作缓慢的随机变化, 典型窄带随机过程的功率谱密度及样本函数图形如图 14 所示

我们将图 14(b) 中的样本函数的图形与图 5(b) 所示的波形进行比较, 可知窄带随机过程的一个样本函数就是一个高频窄带信号。

上式就是窄带随机过程常用的数学模型。

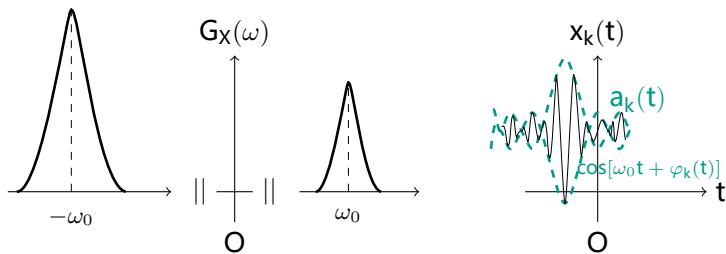
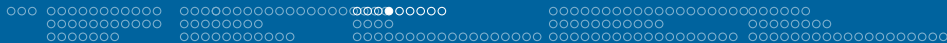


图 14: 窄带随机过程

由于  $a_k(t)$ ,  $\varphi(t)$  相对  $\cos \omega_0 t$  来说是慢变化的时间函数, 所以  $A(t)$ ,  $\Phi(t)$  相对常数来说就是慢变化的随机过程。于是, 我们就可以把窄带随机过程看成是一个随机调幅和随机调相的准正弦振荡。

## 2. 窄带随机过程的复指数形式

若将高频窄带信号的复指数形式应用到窄带随机过程中, 则

$$\tilde{X}(t) = A(t)e^{j\Phi(t)}e^{jm_0t} = M(t)e^{j\omega_0t}, \quad (101)$$

式中  $M(t)$  称为  $X(t)$  的复包络,  $A(t)$  称为包络,  $\Phi(t)$  称为相位,  $e^{j\omega_0t}$  称之为复载频。

且

$$M(t) = A(t)e^{j\Phi(t)}, \quad (102)$$

# 窄带随机过程 $X$ 是平稳过程下的统计特性 (复指数形式)

## (1) 自相关函数

$$\begin{aligned}
 R_X(\tau) &= E \left[ \tilde{X}^*(t) \tilde{X}(t + \tau) \right] \\
 &= E \left[ M^*(t) e^{-j\omega_0 t} M(t + \tau) e^{j\omega_0 (t + \tau)} \right] \\
 &= E \left[ M^*(t) M(t + \tau) \right] e^{j\omega_0 \tau} \\
 &= R_M(\tau) e^{j\omega_0 \tau}.
 \end{aligned} \tag{103}$$

(2) 功率谱密度若  $R_M(\tau) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} G_M(\omega)$ , 则有

$$G_{\tilde{X}}(\omega) = G_M(\omega - \omega_0) \quad (104)$$

因为  $R_{\tilde{X}}(\tau) = 2 [R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)]$ , 可得

$$R_{\tilde{X}}(\tau) + R_{\tilde{X}}^*(\tau) = 2 [R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)] + 2 [R_X(\tau) - j\hat{R}_X(\tau)] \quad (105)$$

由上式解得

$$\begin{aligned}
 R_X(\tau) &= \frac{1}{4} [R_{\tilde{X}}(\tau) + R_{\tilde{X}}^*(\tau)] = \frac{1}{4} [R_M(\tau)e^{j\omega_0\tau} + R_M^*(\tau)e^{-j\omega_0\tau}] \\
 G_X(\omega) &= \frac{1}{4} [G_X(\omega) + G_X^*(-\omega)] = \frac{1}{4} [G_M(\omega - \omega_0) + G_M^*(-\omega - \omega_0)]
 \end{aligned} \quad (106)$$

此得出  $X(t)$  与  $\tilde{X}(t)$  及  $M(t)$  之间在频域上的关系, 如图 16 所示。

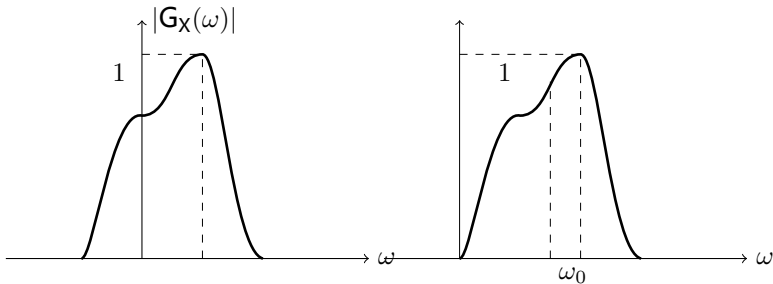
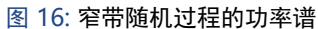


图 15: 窄带随机过程的功率谱





统计分析的对象是随机函数。为了更方便的对窄带随机过程进行统计分析, 先将窄带随机过程中的随机函数与非随机函数以不同的因式分解开, 故有

$$\begin{aligned}
 X(t) &= A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)] \\
 &= A(t) \cos \Phi(t) \cos \omega_0 t - A(t) \sin \Phi(t) \sin \omega_0 t \\
 &= A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t
 \end{aligned} \tag{107}$$

上式中,  $\cos \omega_0 t$  和  $\sin \omega_0 t$  都是非随机函数, 而随机函数为

$$\begin{cases} A_c(t) = A(t) \cos \Phi(t) \\ A_s(t) = A(t) \sin \Phi(t) \end{cases} \tag{108}$$

若将窄带过程的复数形式分解为

$$M(t) = [A(t) \cos \Phi(t) + jA(t) \sin \Phi(t)] = A_c(t) + jA_s(t) \quad (109)$$

$\tilde{X}(t)$  中的随机分量是  $\tilde{X}(t)$ , 而  $\tilde{X}(t)$  又可分解为

$$M(t) = [A(t) \cos \Phi(t) + jA(t) \sin \Phi(t)] = A_c(t) + jA_s(t) \quad (110)$$

其中

$$\begin{cases} A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)} \\ \Phi(t) = \tan^{-1} \frac{A_s(t)}{A_c(t)} = \arctan \frac{A_s(t)}{A_c(t)} \end{cases} \quad (111)$$

可见, 窄带随机过程  $X(t)$  的包络过程的垂直分解  $A(t)$ , 相位  $\Phi(t)$  完全可由  $A_c(t), A_s(t)$  确定。且  $A_c(t), A_s(t)$  是一对在几何上正交的分量。如图 17 所示。



为了与统计意义上的“正交”有所区别,今后我们把几何意义上的“正交”改称为“垂直”,称  $A_c(t), A_s(t)$  为一对垂直分量。

# $X(t)$ , $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 之间的函数关系的导出

$X(t)$  和  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  之间的函数关系

$$\begin{cases} X(t) = A_c(t) \cos \omega_0(t) - A_s(t) \sin \omega_0 t \\ \hat{X}(t) = A_c(t) \sin \omega_0(t) + A_s(t) \cos \omega_0 t \end{cases} \quad (112)$$

$$\begin{cases} A_c(t) = X(t) \cos \omega_0(t) + \hat{X}(t) \sin \omega_0 t \\ A_s(t) = \hat{X}(t) \cos \omega_0(t) - X(t) \sin \omega_0 t \end{cases} \quad (113)$$



若窄带随机过程  $X(t)$  是零均值平稳的实过程, 且功率谱密度如图 18 所示满足

$$G_X(\omega) = \begin{cases} G_X(\omega), & \left( \begin{array}{l} \Omega < \omega - \omega_0 < \Delta\omega - \Omega \\ -\Delta\omega + \Omega < \omega + \omega_0 < \Omega \end{array} \right) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (114)$$

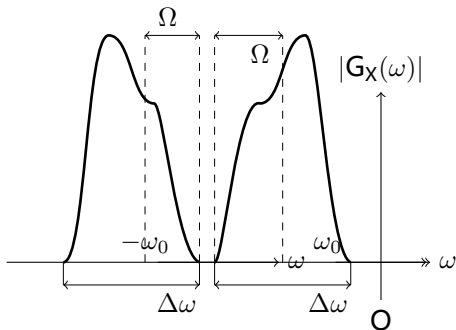
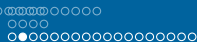
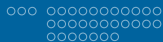


图 18: 零均值平稳窄带实随机过程的频谱

这里  $\Omega$  和  $\Delta\omega$  皆为正实常数,  $\Delta\omega \ll \omega_0$ 。

## $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 这对垂直分量的性质

1.  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  均为实随机过程。
2.  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  的期望  $A(t)$ ,  $A(t)$  的期望均为 0, 即满足

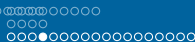
$$E[A_c(t)] = E[A_s(t)] = 0. \quad (115)$$

## 3. $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 的自相关函数

- ①  $A_c(t)$ ,  $A_s(t)$  各自平稳, 它们的自相关函数为

$$R_{A_c}(\tau) = R_{A_s}(\tau) = R_X(\tau) \cos \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \sin \omega_0 \tau. \quad (116)$$





② 当  $\tau = 0$  时, 有

$$R_{A_c}(0) = R_{A_s}(0) = R_X(0). \quad (117)$$

即

$$E[A_c^2(t)] = E[A_s^2(t)] = E[X^2(t)]. \quad (118)$$

表示  $X(t)$ ,  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  三者的平均功率皆相等由于都是零均值, 因此三者的方差相同, 即

$$\sigma_{A_c}^2 = \sigma_{A_s}^2 = \sigma_X^2. \quad (119)$$



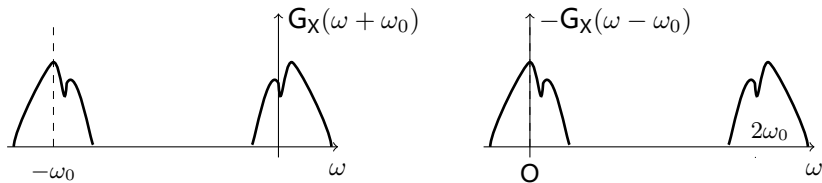
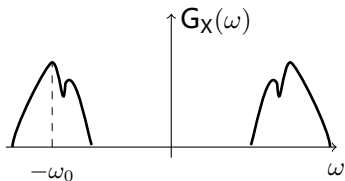
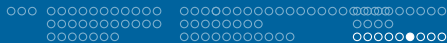


图 19: 垂直分量的功率谱密度

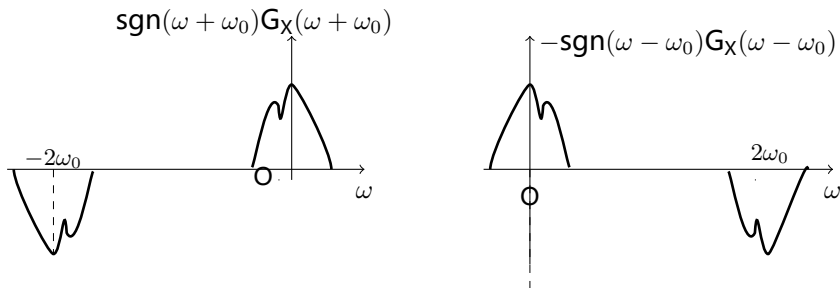


图 20: 垂直分量的功率谱密度





## 5. $A_c(t)$ 和 $A_s(t)$ 的互相关函数

①  $A_c(t), A_s(t)$  联合平稳, 它们的互相关函数为

$$\begin{cases} R_{A_c A_s}(\tau) = -R_X(\tau) \sin \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \cos \omega_0 \tau \\ R_{A_s A_c}(\tau) = R_X(\tau) \sin \omega_0 \tau - \hat{R}_X(\tau) \cos \omega_0 \tau \\ R_{A_s A_s}(\tau) = -R_{A_c A_c}(\tau) \end{cases} \quad (124)$$

② 互相关函数  $R_{A_c A_s}(\tau)$  和  $R_{A_s A_c}(\tau)$  均是  $\tau$  的奇函数

$$\begin{cases} R_{A_c A_s}(\tau) = -R_{A_c A_s}(-\tau) \\ R_{A_s A_c}(\tau) = -R_{A_s A_c}(-\tau) \end{cases} \quad (125)$$

$$R_{A_r A_s}(0) = 0 \quad (126)$$

因为  $A_c(t), A_s(t)$  的均值皆为 0, 所以当  $\tau = 0$  时, 也有

$$C_{A_c A_s}(0) = 0. \quad (127)$$

说明随机过程  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  在同一时刻的两个状态 (随机变量) 之间是不相关的。







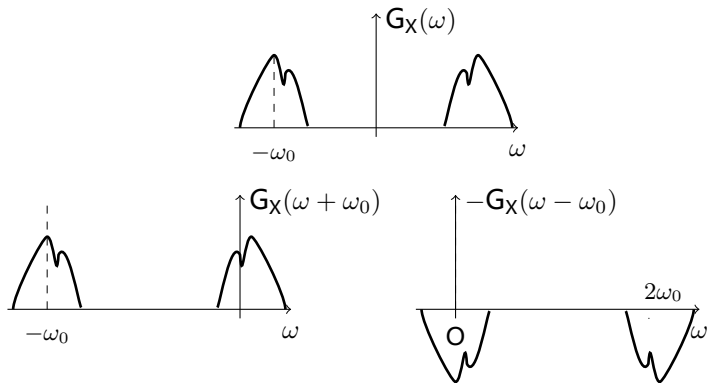


图 22: 垂直分量的互谱密度



上式各项所对应的功率谱密度如图 23 所示。

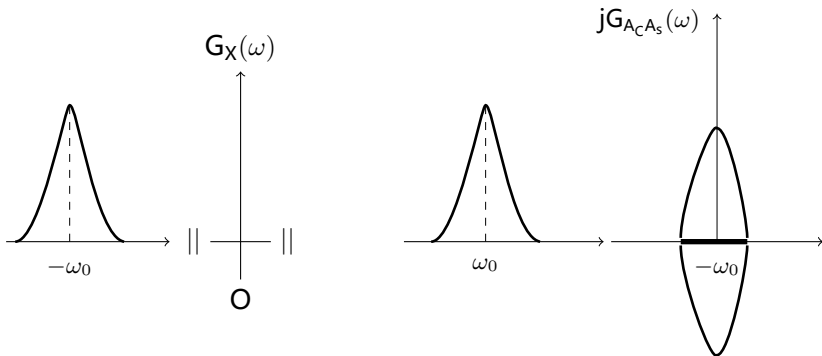
$$\mathbf{jG}_{\text{ArAs}}(\omega) = \mathbf{L}_p [\mathbf{G}_X(\omega + \omega_0) - \mathbf{G}_X(\omega - \omega_0)]. \quad (132)$$
$$\mathbf{G}_{A_e A_s}(\omega) = -j\mathbf{L}_p [\mathbf{G}_X(\omega + \omega_0) - \mathbf{G}_X(\omega - \omega_0)]. \quad (133)$$



同理可

$$G_{A_s A_c}(\omega) = jL_p [G_X(\omega + \omega_0) - G_X(\omega - \omega_0)] . \quad (134)$$

②  $G_X(\omega)$  相对于中心频率  $\omega$  偶对称时, 如图 24(a) 所示。从图中可以看出, 各项叠加后恰好互相抵消, 如图 24(b) 所示。所以有



$$R_X(\tau) = R_{A_e}(\tau) \cos \omega_0 \tau - R_{A_e A_s}(\tau) \sin \omega_0 \tau. \quad (137)$$







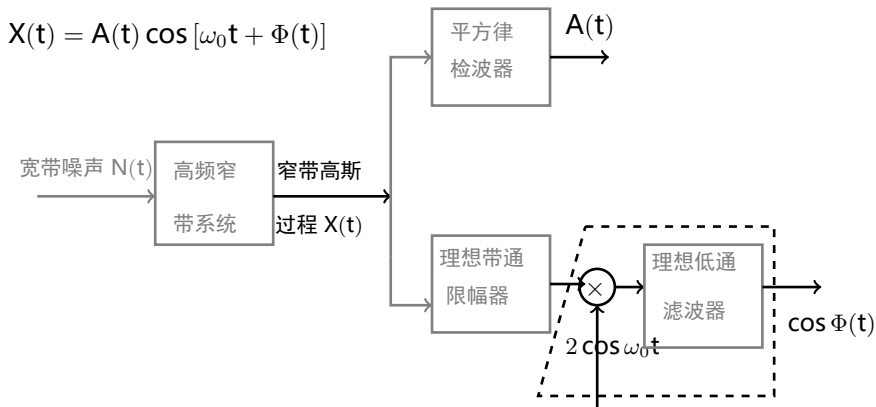


图 25: 窄带高斯过程的包络与相位

## 随机信号分析



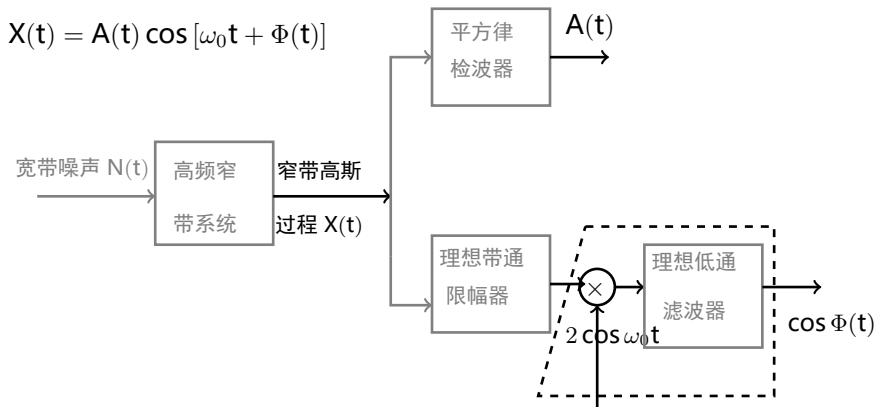


图 26: 窄带高斯过程的包络与相位



## 包络和相位的一维概率分布

设  $X(t)$  是一个窄带平稳高斯实过程, 具有零均值和方差 2。现求其包络  $A(t)$  和  $\Phi(t)$  的一维概率密度。任一给定的时刻, 对  $A(t)$  和  $\Phi(t)$  采样, 便可得到随机变量  $A_t$  和  $\Phi_t$ 。求  $X(t)$  包络  $A(t)$  和  $\Phi(t)$  的一维概率密度就是求  $A_t$  和  $\Phi_t$  的概率密度  $f_A(a_i)$  和  $f_\varphi(\varphi)$ 。

由窄带过程的垂直分解,  $X(t)$  可以表示成

$$X(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)] = A_c(t) \cos \omega_0 t - A_0(t) \sin \omega_0 t. \quad (139)$$





则反变换关系为

$$\begin{cases} A_{ct} = h_1(A_t, \Phi_t) = A_t \cos \Phi_t \\ A_{st} = h_2(A_t, \Phi_t) = A_t \sin \Phi_t \end{cases} \quad (142)$$

求解思路

① 首先根据已知的窄带高斯过程垂直分量  $A_c(t), A_s(t)$  的统计特性, 来研究  $A_{ct}, A_{st}$  的统计特性, 从而得到  $A_{ct}A_{st}$  的联合概率密度  $f_{A_cA_s}(a_{ct}, a_{st})$ 。

② 从  $f_{A_C}$  和  $A_S(a_{ct}, a_{st})$  出发, 利用雅可比变换得到  $A_t, \Phi_t$  的联合概率密度  $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$ 。

③ 最后对联合概率密度  $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$  积分, 求边缘概率密度  $f_A(a_t)$  和  $f_\Phi(\varphi_i)$ 。

### 1. 求 $f_{A_e A_s}(a_{ct})$

首先根据已知的窄带高斯过程垂直分量  $A_C(t), A_S(t)$  的统计特性, 来研究  $A_{ct}, A_s$  以下的统计特性, 从而得到  $A_{ct}, A_{st}$  的联合概率密度  $f_{A_C A_S}(a_{ct}, a_{st})$ 。

1°  $A_{ct}, A_{st}$  都是高斯随机变量

已知  $X(t)$  是一个平稳高斯过程, 由于  $X(t)$  是  $\hat{X}(t)$  的线性变换, 所以  $X(t)$  也是平稳高斯过程。  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  均为  $X(t)$  和  $\hat{X}(t)$  的线性组合, 故  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  也是平稳高斯过程, 所以  $A_{ct}$  和  $A_{st}$  均为高斯变量。

2°  $A_{ct}$  和  $A_{st}$  的均值皆为零

根据  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  的性质, 有  $E[A_c(t)] = E[A_s(t)] = 0$ , 所以

$$E[A_{ct}] = E[A_{st}] = 0 \quad (143)$$



根据以上的性质可知,  $A_{ct}$  和  $A_{st}$  是均值皆为零, 方差皆为  $\sigma^2$  的高斯变量, 且相互独立。

### 其联合概率密度

$$\begin{aligned}
 f_{A_c A_s}(a_{ct}, a_{st}) &= f_{A_c}(a_{ct}) f_{A_s}(a_{st}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{a_{ct}^2}{2\sigma^2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{a_{st}^2}{2\sigma^2}\right] \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{a_{ct}^2 + a_{st}^2}{2\sigma^2}\right].
 \end{aligned}
 \tag{145}$$

## 2. 求 $f_{A\Phi}$

从  $f_{A_c A_s}(a_{ct}, a_{st})$  出发, 利用雅可比变换得  $A_t, \Phi_t$  的联合概率密度  $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$ 。

### 雅可比变换结果

$$f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) = |J| f_{A_c A_s}(a_t \cos \varphi_t, a_t \sin \varphi_t), \quad (146)$$

其中, 雅可比行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial a_t} & \frac{\partial h_1}{\partial \varphi_t} \\ \frac{\partial h_2}{\partial a_t} & \frac{\partial h_2}{\partial \varphi_t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_t & -a_t \sin \varphi_t \\ \sin \varphi_t & a_t \cos \varphi_t \end{vmatrix} = a_t \geq 0. \quad (147)$$

$$f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) = \begin{cases} \frac{a_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{a_t^2}{2\sigma^2}\right\}, & a_t \geq 0, 0 \leq \varphi_t \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (148)$$

由上式可见,  $A_t, \Phi_t$  的联合概率密度  $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$  与  $\Phi_t$  无关。

### ③ 求 $f_A(a_t)$ 和 $f_\Phi(\varphi_i)$

最后对  $A_t, \Phi_t$  的联合概率密度  $f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t)$  积分, 求边缘概率密度  $f_A(a_i)$  和  $f_\Phi(\varphi_i)$ 。

#### ① $A_t$ 的概率密度

$$\begin{aligned}
 f_A(a_t) &= \int_0^{2\pi} f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) d\varphi_t \\
 &= f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\varphi_t \\
 &= \frac{a_t}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{a_t^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad a_t \geq 0.
 \end{aligned} \tag{149}$$

上式给出了包络  $A(t)$  的一维概率密度表达式通常称它为瑞利概率密度或简称瑞利分布。



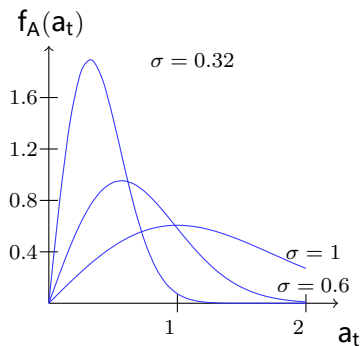


图 27: 瑞利分布

## ② $\Phi_t$ 的概率密度

$$f_{\phi}(\varphi_l) = \int_0^{\infty} f_{A\Phi}(a_t, \varphi_l) da_t = \frac{1}{2\pi}, 0 \leq \varphi_l \leq 2\pi. \quad (150)$$

可见, 相位  $\Phi(t)$  的一维概率密度为  $(0, 2\pi)$  区间上的均匀分布。

## ③ 由 $A_t, \Phi_t$ 的概率密度表达式, 易得

$$f_{A\Phi}(a_t, \varphi_t) = f_A(a_t) f_{\Phi}(\varphi_t). \quad (151)$$

上式说明, 随机变量  $A_t \Phi_t$  相互独立, 即随机过程  $A(t) \rightleftharpoons \Phi(t)$  在同一时刻相互独立。但应注意, 这并不意味着随机过程  $A(t) \rightleftharpoons \Phi(t)$  相互独立。



为了便于表示, 把包络  $A(t)$  在  $t_1, t_2$  时刻采样的随机变量  $A(t_1), A(t_2)$  简记为  $A_1, A_2$ 。

把相位  $\Phi(t)$  在  $t_1, t_2$  时刻采样的随机变量  $\Phi(t_1), \Phi(t_2)$  简记为中  $\Phi_1, \Phi_2$ ;

把垂直分量  $A_c(t)$  在  $t_1, t_2$  时刻采样的随机变量  $A_c(t_1), A_c(t_2)$  简记为  $A_{c1}, A_{c2}$ ;

垂直分量  $A_s(t)$  在  $t_1, t_2$  时刻采样的随机变量  $A_s(t_1), A_s(t_2)$  简记为  $A_{s1}, A_{s2}$ 。

现在求随机过程  $A(t)$  和  $\Phi(t)$  各自的二维概率密度  $f_A(a_1, a_2)$  和  $f_\Phi(\varphi_1, \varphi_2)$ 。

### 1. 求 $f_{A_c A_s}$

由上已知  $A_c(t), A_s(t)$  都是平稳高斯过程, 具有零均值和相同的方差  $\sigma^2$ 。因此, 可得  $A_{c1}, A_{s1}, A_{c2}, A_{s2}$  为同分布的高斯变量, 具有相同的零均值和相同的方差  $\sigma^2$ 。现在, 我们讨论一种最简单, 也是实际中最常见的情况, 即假定窄带随机过程  $X(t)$  的功率谱密度  $G_X(\omega)$  关于载波频率偶对称, 如图 24 所示。

根据 2 节的分析可知, 两个随机过程  $A_c(t), A_s(t)$  正交且互不相关, 满足  $R_{A_c A_s}(\tau) = 0$ , 皆为高斯过程, 则两个过程  $A_c(t), A_s(t)$  是统计独立的。所以四维高斯变量 ( $A_{c1}$  和  $A_{s1}, A_{c2}, A_{s2}$  的联合概率密度。

## 二维概率密度表示

二维高斯变量  $(A_{e1}, A_{s2})$  的协方差矩阵为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} C_{A_{e1}A_{e1}} & C_{A_{e1}A_{s2}} \\ C_{A_{s2}A_{e1}} & C_{A_{s2}A_{s2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{A_c}(0) & C_{A_c}(\tau) \\ C_{A_c}(-\tau) & C_{A_c}(0) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sigma^2 & R_{A_c}(\tau) \\ R_{A_c}(\tau) & \sigma^2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{153}$$

上式应用了平稳高斯过程  $A_c(t)$  的  $C_{A_c}(\tau) = R_{A_c}(\tau)$  和  $C_{A_c}(0) = \sigma^2$  的性质。

因为二维高斯变量  $(X, Y)$  的联合概率密度形式为

$$\begin{aligned}
 f_{XY}(x, y) = & \frac{1}{2\pi \sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2 - C_{XY}^2}} \\
 & \times \exp \left[ -\frac{\sigma_Y^2 (x - m_X)^2 - 2C_{XY} (x - m_X) (y - m_Y)}{2 (\sigma_X^2 \sigma_Y^2 - C_{XY}^2)} \right. \\
 & \left. + \frac{\sigma_X^2 (y - m_Y)^2}{2 (\sigma_X^2 \sigma_Y^2 - C_{XY}^2)} \right]
 \end{aligned}
 \tag{154}$$

所以二维高斯变量  $(A_{c1}, A_{c2})$  的联合概率密度为

$$\begin{aligned}
 f_{A_c}(a_{c1}, a_{c2}) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^4 - R_{A_c}^2(\tau)}} \exp \left[ -\frac{\sigma^2 a_{c1}^2}{2[\sigma^4 - R_{A_c}^2(\tau)]} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2R_{A_c}(\tau)a_{c1}a_{c2} + \sigma^2 a_{c2}^2}{2[\sigma^4 - R_{A_c}^2(\tau)]} \right].
 \end{aligned}
 \tag{155}$$



## 二维高斯变量 ( $A_{s1}$ 和 $A_{s2}$ 的联合概率密度

应用性质  $R_{A_c}(\tau) = R_A(\tau)$ , 可得四维高斯变量 ( $A_{c1}, A_{c2}, A_{s1}, A_{s2}$ ) 的联合概率密度为

$$\begin{aligned}
 f_{A_c A_s}(a_{c1}, a_{s1}, a_{c2}, a_{s2}) &= f_{A_c}(a_{c1}, a_{c2}) f_{A_s}(a_{s1}, a_{s2}) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2 [\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \exp \left[ -\frac{\sigma^2 (a_{c1}^2 + a_{c2}^2 + a_{s1}^2 + a_{s2}^2)}{2 [\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2R_{A_c}(\tau) (a_{c1}a_{c2} + a_{s1}a_{s2})}{2 [\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]} \right].
 \end{aligned} \tag{156}$$

 $A_{cl}, A_{s1}, A_{c2}, A_{22}$  和  $A_1, \Phi_1, A_2, \Phi_2$  的关系为

雅可比行列式为

$$J = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -A_1 \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & A_1 \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_2 & -A_2 \sin \varphi_2 \\ 0 & 0 & \sin \varphi_2 & A_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \geq 0.$$



## 随机信号分析

### 3. 求 $A(t)$ 和 $\Phi(t)$ 各自的二维联合概率密度 $f_A$ 和 $f_\Phi$

$$\begin{aligned}
 f_A(a_1, a_2) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{A\Phi}(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 \\
 &= \begin{cases} \frac{a_1 a_2}{[\sigma^4 - R_{A_S}^2(\tau)]} I_0 \left\{ \frac{a_1 a_2 R_{A_C}(\tau)}{[\sigma^4 - R_{A_S}^2(\tau)]} \right\} \exp \\ \left\{ -\frac{\sigma^2(a_1^2 + a_2^2)}{2[\sigma^4 - R_{A_S}^2(\tau)]} \right\}, a_1, a_2 \geq 0 \end{cases} \quad (159)
 \end{aligned}$$

式  $I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[x \cos \varphi] d\varphi$ , 是第一类零阶修正贝塞尔函数。

对四维联合概率密度积分, 可得边缘概率密度

$$f_{\Phi}(\varphi_1, \varphi_2) = \left\{ \frac{[\sigma^4 - R_{A_s}^2(\tau)]}{4\pi\sigma^2} \left[ \frac{(1-\beta)^{\frac{1}{2}} + \beta(\pi - \arccos \beta)}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \right], 0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi \right. . \quad (160)$$

其中

$$\beta = \frac{R_{A_c}(\tau)}{\sigma^2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (161)$$

若令  $q = \varphi_2$ , 不难看出

$$f_{A\Phi}(a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2) \neq f_A(a_1, a_2) f_{\Phi}(\varphi_1, \varphi_2). \quad (162)$$

这一特例说明, 窄带随机过程的包络  $A(t)$  和相位更  $\Phi(t)$  彼此不是独立的。



$$\begin{cases} \mathbf{A}'_e(\mathbf{t}) = a \cos \theta + \mathbf{A}_c(\mathbf{t}) \\ \mathbf{A}'_s(\mathbf{t}) = a \sin \theta + \mathbf{A}_s(\mathbf{t}) \end{cases} \quad (167)$$

则

$$X(t) = A'_e(t) \cos \omega_0 t - A'_s(t) \sin \omega_0 t. \quad (168)$$

由前面的结论可知,  $A'_c(t), A'_s(t)$  都是低频限带过程, 它们随时间的变化  $\cos \omega_0 t$  要缓慢得多。

若将  $X(t)$  表示为准正弦振荡的形式

$$X(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)] \quad (169)$$

则  $X(t)$  的包络和相位  $A(t), \Phi(t)$  为

$$\begin{cases} A(t) = \sqrt{[A'_c(t)]^2 + [A'_s(t)]^2} \\ \Phi(t) = \arctan [A'_s(t)/A'_c(t)] \end{cases}. \quad (170)$$

易知  $A(t), \Phi(t)$  也都是慢变化随机过程。



# $A(t), \Phi(t)$ 是 $A'_c(t), A'_s(t)$ 的一维概率密度

已知  $A(t), \Phi(t)$  是  $A'_c(t), A'_s(t)$  的函数, 而  $A'_c(t)$  和  $A'_s(t)$  又是随机相位  $\theta$  的函数, 所以  $A(t), \Phi(t)$  也是随机相位  $\theta$  的函数。

## 1、求 $A'_c(t)$ 和 $A'_s(t)$

在给定  $\theta$  条件下的二维条件概率密度  $f(a'_{ct}/\theta, a'_{st}/\theta)$   
 给定  $\theta$  值的条件下,  $t$  时刻对  $A'_c(t), A'_s(t)$  的采样用  $A'_{ct}/\theta, A'_{st}/\theta$  表示。下面讨论  $A'_{ct}/\theta, A'_{st}/\theta$  的统计特性。



由  $A_{ct}$ ,  $A_{stt}$  的均值皆为零, 可得

### 3° $A'_{ct}/\theta$ 和 $A'_{st}/\theta$ 的方差

由  $A_{ct}, A_{st}$  的均值皆为  $\sigma^2$ , 可得

$$\mathbf{D}[\mathbf{A}'_c/\theta] = \mathbf{D}[\mathbf{A}'_{st}/\theta] = \sigma^2 \quad (172)$$

由上述三个结论可得  $A'_c(t), A'_s(t)$  在给定条件下的二维条件概率密度为

$$f(\mathbf{a}'_a/\theta, \mathbf{a}'_{st}/\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ (\mathbf{a}'_{ct} - \mathbf{a} \cos \theta^2 + (\mathbf{a}'_{st} - \mathbf{a} \sin \theta)^2) \right] \right\}. \quad (173)$$

2. 求  $A(t)$  和  $\Phi(t)$  在给定  $\theta$  条件下的二维条件概率密度

 $A'_{\alpha}, A'_{st}$  和  $A_t, \Phi_t$  的关系如下

$$\begin{cases} A'_\alpha = h_1(A_t, \Phi_t) = A_t \cos \Phi_t \\ A'_{st} = h_2(A_t, \Phi_t) = A_t \sin \Phi_t \end{cases} \quad (174)$$

利用雅可比变换,  $J = a \geq 0$ , 便可得  $A$ , 在给定条件下的二维条件概率密度。

对二维条件概率密度积分, 得到边缘条件概率密度为

由上式可见,  $f(a_t/\theta)$  与  $\theta$  无关, 就是无条件分布  $f_A(a_t)$ 。于是, 可得随相余弦信号加窄带高斯噪声的包络  $A(t)$  的一维概率密度为

$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} I_0\left(\frac{aa_t}{\sigma^2}\right) \exp\left\{-\frac{a_t^2 + a^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad a_t \geq 0. \quad (176)$$

当随相余弦信号不存在, 即幅度  $a = 0$  时, 式 (176) 便退化为式, 即  $A_t$  服从瑞利分布。所以, 称式 (176) 为广义瑞利概率密度或莱斯概率密度, 简称莱斯分布。 $a/\sigma$  表示信号幅度与窄带噪声标准差之比, 简称信噪比, 记为  $r$ 。

将第一类零阶修正贝塞尔函数  $I_0(x)$  展开成无穷级数为

$$I_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}. \quad (177)$$
$$f_A(a_t) \approx \frac{a_t}{\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{a_t^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad a_t \geq 0. \quad (178)$$

这就是说, 当信噪比很小时, 包络  $A(t)$  的一维概率密度趋近于瑞利分布


$$I_0(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathbf{x}}} e^{\mathbf{x}}. \quad (179)$$
$$f_A(a_t) \approx \sqrt{\frac{a_t}{2\pi a}} \cdot \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\frac{(a_t - a)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad a_t \geq 0. \quad (180)$$

从上式中可见, 此概率密度在  $a_t = a$  处取最大值。当  $a_t$  偏离  $a$  时, 它很快下降, 且  $\sqrt{\frac{a_t}{2\pi a}}$  改变的速度比  $\exp\left\{-\frac{(a_t-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$  的衰减速度要慢很多, 特别是在  $a$  的附近,



$$f_A(a_t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(a_t - a)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad a_t \geq 0. \quad (181)$$

上式说明, 在大信噪比的条件下, 在  $a$  附近个包络的一维概率密度近似为高斯分布以上导出了包络  $A(t)$  的一维概率密度函数, 并得到了在大信噪比和小信噪比条件下它的近似式。图 29 所示为不同信噪比条件下莱斯分布的图形。

随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布

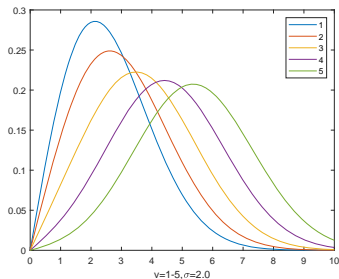


图 28: 莱斯分布在不同  $\nu$  下的密度函数

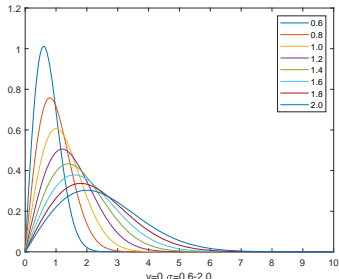


图 29: 莱斯分布在不同  $\sigma$  下的密度函数

#### 4. 求相位 $\Phi(t)$ 的一维概率密度 $f_{\Phi}(\varphi/\theta)$

对二维条件概率密度积分, 得到边缘条件概率密度为

$$\begin{aligned}
 f_{\Phi}(\varphi_t/\theta) &= \int_0^{\infty} f(a_t/\theta, \varphi_t/\theta) da_t \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{a_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [a_t^2 + a^2 - 2aa_t \cos(\theta - \varphi_t)]\right\} a_t \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{a_t}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [a_t^2 - 2aa_t \cos(\theta - \varphi_t) \right. \\
 &\quad \left. + (a \cos(\theta - \varphi_t))^2 - (a \cos(\theta - \varphi_t))^2 + a^2]\right\} da_t \\
 &= \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{a^2 - [a \cos(\theta - \varphi_t)]^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (182)
 \end{aligned}$$



式中  $\Phi(\cdot)$  是概率积分函数。上式是  $f_{\Phi}(\varphi_t/\theta)$  的一般表示式。

# 在不同信噪比条件下 $\Phi_t$ 的概率密度形式

不存在信号的情况下  $\Phi_t$  的概率密度形式

① 当信噪比  $r = 0$  时,

$$f_{\Phi}(\varphi_t/\theta) = f_{\Phi}(\varphi_t) = \frac{1}{2\pi}. \quad (184)$$

这时, 随机相位为均匀分布。

② 当  $\theta - \varphi \ll 1$  时, 即信噪比很大时

$$\begin{cases} \sin(\theta - \varphi_t) \approx \theta - \varphi_t \\ \cos(\theta - \varphi_t) \approx 1 \end{cases}. \quad (185)$$

可以看出,  $f_{\Phi}(\varphi/\theta)$  的图形关于对称, 并在  $\varphi_t = \theta$  处取得最大值。

图 30 所示为不同信噪比条件下相位  $\Phi(t)$  的一维分布图。

随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布

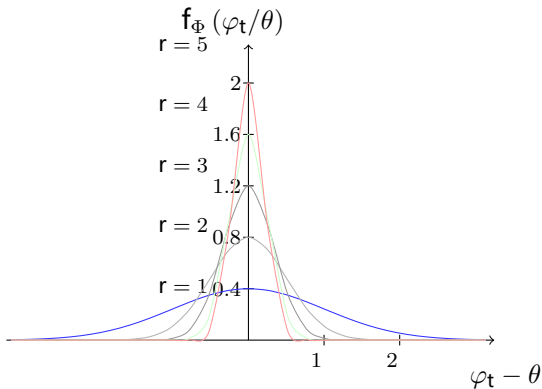


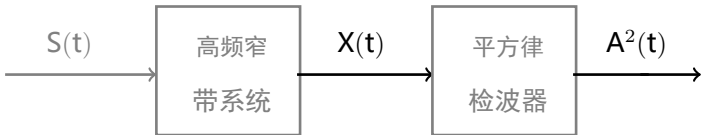
图 30:  $f_{\Phi}(\varphi_2/\theta)$  的分布

# 目录

- 1 随机过程的联合平稳
  - 希尔伯特变换的性质
  - 举例
- 2 高频窄带信号的复指数形式
  - 高频窄带信号通过窄带系统
  - 随机过程的解析形式及其性质
- 3 窄带随机过程
  - 窄带随机过程的“垂直”分解
  - 窄带随机过程的统计分析
- 4 窄带高斯过程包络与相位的分布
  - 包络和相位各自的二维概率分布
  - 随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布
- 5 窄带高斯过程包络平方的概率分布
  - 卡方分布和非中心卡方分布
  - 卡方分布的性质
- 6 窄带高斯过程包络平方的概率分布



在许多实际应用中,也常常在高频窄带滤波器的输出端接入一平方律检波器如图 35 所示,在平方律检波器输出端便得到  $X(t)$  包络的平方  $A^2(t)$ 。



$$X(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)]$$

图 31: 平方律检波器

## 窄带高斯噪声包络平方的分布

前面已经推导出当窄带随机过程为一具有零均值、方差为  $\sigma^2$  的平稳高斯噪声时, 其包络  $A(t)$  的一维概率密度为瑞利分布。

$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{a_t^2}{2\sigma^2} \right\}, a_t \geq 0. \quad (186)$$

应用求随机变量函数分布的方法, 很容易求出包络平方的一维概率密度。令

$$U(t) = A^2(t) \quad (187)$$

则在时刻  $t$  的采样有

$$\begin{cases} U_t = g(A_t) = A_t^2, & A_t \geq 0 \\ A_t = h(U_t) = \sqrt{U_t}, & U_t \geq 0. \end{cases} \quad (188)$$

## 随机信号分析

## 余弦信号加窄带高斯噪声包络平方的概率分布

当窄带随机过程为余弦信号加窄带高斯噪声时, 即

$$X(t) = a \cos \omega_0 t + N(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)], \quad (192)$$

其中  $a, \omega_0$  为已知常数,  $N(t)$  为具有零均值、方差  $\sigma^2$  的窄带高斯噪声。根据前节分析的结果可知,  $X(t)$  的包络服从广义瑞利分布, 即

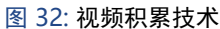
$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} I_0 \left( \frac{aa_t}{\sigma^2} \right) \exp \left\{ -\frac{a_t^2 + a^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad a_t \geq 0. \quad (193)$$

不难导出包络平方  $U^2 = A^2$  的一维概率密度为

$$f_U(u_i) = \frac{1}{2\sigma^2} I_0 \left[ \frac{a\sqrt{u_t}}{\sigma^2} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [u_t + a^2] \right\}, \quad u_t \geq 0. \quad (194)$$



在有些应用中,例如在信号检测中,为了改进检测性能,经常采用所谓视频积累技术,即对包络的平方进行独立采样后再积累,如图 36 所示,这时输出的随机变量习惯上记为  $\chi^2$ , 它的概率密度习惯上称之为  $\chi^2$  分布。如图所示, 让一个具有零均值和方差  $\sigma^2$  的平稳窄带实高斯噪声  $N(t)$  通过一平方律检波器, 而检波器输出的是  $N(t)$  的包络平方  $A^2(t)$ 。然后对随机过程  $A^2(t)$  进行独立采样, 得到  $m$  个独立的随机变量  $A_i^2 = A^2(t_i) (i = 1, 2, \dots, m)$ , 经归化以后送入累加器。下面讨论累加器输出端随机变量  $\chi^2$  的概率密度。为了避免混淆, 在下面的推导中, 用  $V$  来代替  $\chi^2$ 。



$$\mathbf{A}^2(\mathbf{t}) = \mathbf{A}_c^2(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_s^2(\mathbf{t}), \quad (196)$$

式中  $A_c(t), A_s(t)$  是零均值、方差为  $\sigma^2$  的平稳高斯过程。 $A^2(t)$  经采样后, 加法器的输出

$$V = \sum_{i=1}^m (A_{ci}'^2 + A_{si}'^2), \quad (197)$$

式中  $A'_{Ci}, A'_{Si}$  是将  $A_{Ci}, A_{Si}$  归一化以后的随机变量。





$$f_X(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x_i^2}{2} \right\}. \quad (199)$$
$$\mathbf{f}_{Y_i}(\mathbf{y}_i) = |\mathbf{J}| \mathbf{f}_X(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi_i}} \mathbf{e}^{-\frac{y_i}{2}}, \quad y_i \geq 0. \quad (200)$$

$$\begin{aligned} Q_{Y_i}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_i}(y_i) e^{jwy_i} dy_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y_i^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ - \left( \frac{1}{2} - ju \right) y_i \right\} dy_i = (1 - 2ju)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (201)$$
$$Q_V(u) = \prod_{i=1}^n Q_{Y_i}(u) = (1 - 2ju)^{-\frac{n}{2}} \quad (202)$$

上式进行傅里叶逆变换, 便可求得  $V$  的概率密度为

$$f_V(v) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} 2^{-\frac{n}{2}} v^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{-\frac{v}{2}}, \quad v \geq 0. \quad (203)$$

式中,  $\Gamma(\cdot)$  为  $\Gamma$  函数, 满足

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{(\alpha-1)} e^{-t} dt. \quad (204)$$

称  $f_V(v)$  为  $n$  个自由度的  $\chi^2$  分布。图 37 画出了几个不同自由度下  $f_V(v)$  的图形。



# $\chi^2$ 分布的性质

## 性质 1

1° 两个独立的  $\chi^2$  变量之和仍为  $\chi^2$  变量。若它们各自的自由度分别为  $n_1$  和  $n_2$ , 则它们的和变量为具有  $(n_1 + n_2)$  个自由度的  $\chi^2$  分布  $2n$  个自由度的  $\chi^2$  变量的均值  $E[V] = n$ , 方差  $D[V] = 2n$ 。

## 性质 2

### 2. 非中心 $\chi^2$ 分布

若窄带过程  $N'(t)$  为余弦信号  $N'(t)$  与窄带高斯噪声  $N(t)$  之和, 则加法器输出的就是非中心  $\chi^2$  分布。







$$\mathbf{A}^2(\mathbf{t}) = \mathbf{A}_c^2(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_s^2(\mathbf{t}) = [\mathbf{s} + \mathbf{n}_\varepsilon(\mathbf{t})]^2 + [\mathbf{s} + \mathbf{n}_s(\mathbf{t})]^2. \quad (210)$$

仿照求  $x^2$  分布的方法, 加法器输出端的随机变量  $V'$  应为

$$V' = \sum_{i=1}^n (s + X_i)^2 = \sum_{i=1}^n Y \quad (211)$$

式中  $X_i$  为同分布的独立高斯变量 (均值为零、方差为  $\sigma_2$ ),  $s$  为常数。

$$R_i = s + X_i. \quad (212)$$
$$f_{R_i}(r_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(r_i - s)^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (213)$$





$$f_{V'}(v') = \frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{v'}{\lambda'^2} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp \left\{ -\frac{\lambda' + v'}{2\sigma^2} \right\} I_{\frac{n}{2}-1} \left( \frac{\sqrt{v'\lambda'}}{\sigma^2} \right), \quad v' \geq 0. \quad (217)$$

式中,  $\lambda' = s^2 n$  定义为非中心参量,  $I_n(\cdot)$  为第一类  $n$  阶修正贝塞尔函数。





图 38 画出了不同信噪比  $\lambda$  和样本数  $n$  情况下的非中心  $\chi^2$  函数。

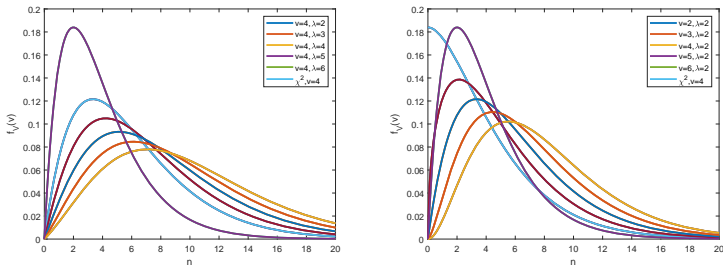


图 34: 非中心  $\chi^2$  分布: a)  $v = 4, \lambda = 2..6$ , b)  $v = 2..6, \lambda = 2$



给定信号

$$s(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \pi/4), \quad (220)$$

包络  $a(t)$  为确定函数, 则有

$$\begin{aligned} s(t) &= a(t) \cos \frac{\pi}{4} \cos \omega_0 t + a(t) \sin \frac{\pi}{4} \sin \omega_0 t \\ &= a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega_0 t + a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (221)$$

代入  $N'(t)$  得

$$N(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t. \quad (222)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'(t) &= \mathbf{s}(t) + \mathbf{N}(t) = \left[ \mathbf{a}(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_e(t) \right] \cos \omega_0 t \\ &\quad - \left[ \mathbf{a}(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_1(t) \right] \sin \omega_0 t \\ &= \mathbf{A}_c(t) \cos \omega_0 t - \mathbf{A}_s(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2(\mathbf{t}) &= \mathbf{A}_c^2(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_0^2(\mathbf{t}) \\ &= \left[ \mathbf{a}(\mathbf{t}) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_c(\mathbf{t}) \right]^2 + \left[ \mathbf{a}(\mathbf{t}) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_3(\mathbf{t}) \right]^2. \end{aligned} \quad (223)$$

在  $t_i (i = 1, 2, \dots, n)$  时刻对  $A^2(t)$  进行独立的采样, 令  $s = a(t)$  仿照求  $\chi^2$  分布的方法, 加法器输出端的随机变量  $Q'$  应为

$$Q' = \sum_{i=1}^n (s_i + X_i)^2 = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad (224)$$

式中  $s$  是对信号包络  $a(t)$  的第  $i$  次采样, 是确定值。

## 随机信号分析

对式作傅里叶逆变换可得  $Q'$  的概率密度

$$f_{\alpha}(q') = \frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{q'}{\lambda'^2} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp \left\{ -\frac{\lambda' + q'}{2\sigma^2} \right\} \cdot I_{\frac{n}{2}-1} \left( \frac{\sqrt{q'\lambda'}}{\sigma^2} \right), q' \geq 0. \quad (227)$$

将式 (279) 与式 (269) 对照, 可见,  $Q'$  与  $V'$  具有相同的概率密度, 不同的只是此时的非中心参量  $\lambda' = \sum_{i=1}^n s_i^2$ 。

类似地, 定义归一化参量  $Q = Q'/\sigma^2$ , 于是可得

$$Q = \sum_{i=1}^n \left( \frac{s_i}{\sigma} + \frac{X_i}{\sigma} \right)^2 \quad (228)$$

## 随机信号分析

若它们的自由度分别为  $n_1$  和  $n_2$ , 非中心参量为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ , 则和变量的自由度为  $n = n_1 + n_2$ , 非中心参量为  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ 。

### 例 .1

设图 26 中加至平方律检波器输入端的窄带随机过程  $X(t)$  为

$$X(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta) + N(t), \quad (231)$$

其中  $a \cos(\omega_0 t + \theta)$  为随相余弦信号,  $a$  和  $\omega_0$  为常数。 $N(t)$  是零均值、方差为  $\sigma^2$  的稳窄带高斯噪声, 其功率谱关于  $\omega_0$  偶对称。 $X(t)$  经检波并作归一化处理以后, 独立采样  $m$  次, 求累加器输出端随机变量的概率密度及其参数。

解: 先将  $N(t)$  表示为

$$N(t) = A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (232)$$

若用  $A(t)$  表示窄带随机过程  $X(t)$  的包络, 那么在平方律检波器的输出端, 可得到包络平方为

$$A^2(t) = [a \cos \theta + A_c(t)]^2 + [a \sin \theta + A_0(t)]^2. \quad (233)$$

加法器输出端随机变量  $V$

$$V = \frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^m (a \cos \theta + A_{ci})^2 + \sum_{i=1}^m (a \sin \theta + A_{ai})^2 \right], \quad (234)$$

式中  $A_{ci} = A_c(t_i)$  和  $A_{ai} = A_s(t_i)$  分别表示  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  在  $t_i$  时刻的状态。



根据  $A_c(t), A_s(t)$  的有关性质可知, 各个  $A_{\alpha}, A_{\beta}$  是同分布的独立标准高斯变量。对照式 (270) 可知, 上式中两个和式分别是自由度为  $m$  的非中心  $\chi^2$  变量。

非中心参量  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m (a \cos \theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2} \cos^2 \theta \\ \lambda_2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m (a \sin \theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2} \sin^2 \theta \end{cases} \quad (235)$$

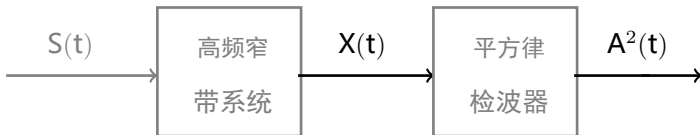
由于这两个非中心  $\chi^2$  随机变量也彼此独立, 因而它们的和变量  $V$  也是非中心  $\chi^2$  随机变量, 自由度  $n = 2m$ 。

## 随机信号分析

# 目录

- 1 随机过程的联合平稳
  - 希尔伯特变换的性质
  - 举例
- 2 高频窄带信号的复指数形式
  - 高频窄带信号通过窄带系统
  - 随机过程的解析形式及其性质
- 3 窄带随机过程
  - 窄带随机过程的“垂直”分解
  - 窄带随机过程的统计分析
- 4 窄带高斯过程包络与相位的分布
  - 包络和相位各自的二维概率分布
  - 随相余弦信号与窄带高斯噪声之和的包络及相位的概率分布
- 5 窄带高斯过程包络平方的概率分布
  - 卡方分布和非中心卡方分布
  - 卡方分布的性质
- 6 窄带高斯过程包络平方的概率分布

在许多实际应用中, 也常常在高频窄带滤波器的输出端接入一平方律检波器如图 35 所示, 在平方律检波器输出端便得到  $X(t)$  包络的平方  $A^2(t)$ 。



$$X(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)]$$

图 35: 平方律检波器

## 窄带高斯噪声包络平方的分布

前面已经推导出当窄带随机过程为一具有零均值、方差为  $\sigma^2$  的平稳高斯噪声时, 其包络  $A(t)$  的一维概率密度为瑞利分布。

$$f_A(a_t) = \frac{a_t}{\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{a_t^2}{2\sigma^2} \right\}, a_t \geq 0. \quad (237)$$

应用求随机变量函数分布的方法, 很容易求出包络平方的一维概率密度。令

$$U(t) = A^2(t) \quad (238)$$

则在时刻  $t$  的采样有

$$\begin{cases} U_t = g(A_t) = A_t^2, & A_t \geq 0 \\ A_t = h(U_t) = \sqrt{U_t}, & U_t \geq 0. \end{cases} \quad (239)$$

雅可比行列式为

$$J = \frac{1}{2\sqrt{U_t}} \quad (240)$$

包络平方的一维概率密度

$$f_U(u_t) = |J|f_A(A_t) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left\{-\frac{u_t}{2\sigma^2}\right\}, \quad u_t \geq 0. \quad (241)$$

上式表明,  $U_t$  服从指数分布。







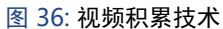


在有些应用中, 例如在信号检测中, 为了改进检测性能, 经常采用所谓视频积累技术, 即对包络的平方进行独立采样后再积累, 如图 36 所示, 这时输出的随机变量习惯上记为  $\chi^2$ , 它的概率密度习惯上称之为  $\chi^2$  分布。

如图所示, 让一个具有零均值和方差  $\sigma^2$  的平稳窄带实高斯噪声  $N(t)$  通过一平方律检波器, 而检波器输出的是  $N(t)$  的包络平方  $A^2(t)$ 。

然后对随机过程  $A^2(t)$  进行独立采样, 得到  $m$  个独立的随机变量  $A_i^2 = A^2(t_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), 经归化以后送入累加器。

下面讨论累加器输出端随机变量  $\chi^2$  的概率密度。为了避免混淆, 在下面的推导中, 用  $V$  来代替  $\chi^2$ 。



由于窄带过程  $N(t)$  的包络  $A$  和它的一对垂直分量  $A_c(t), A_s(t)$  有如下关

式中  $A_c(t), A_s(t)$  是零均值、方差为  $\sigma^2$  的平稳高斯过程。

$A^2(t)$  经采样后, 加法器的输出

式中  $A'_{Ci}, A'_{Si}$  是将  $A_{Ci}, A_{Si}$  归一化以后的随机变量。

由于  $A'_{ci}, A'_{si}$  都是同分布的高斯变量, 故上式又可表示为

$$V = \sum_{i=1}^{2m} X_i^2 \quad (249)$$

式中每一个  $X_i$  都是同分布的标准高斯变量 (零均值、方差为 1), 且各  $X_i$  相互独立。为了书写简单, 用  $n$  代替上式中的  $2m$ , 可得

$$V = \sum_{i=1}^{2m} X_i^2. \quad (250)$$

于是, 求  $V$  的概率密度便归结为求  $n$  个独立同分布高斯变量平方和的概率密度为此, 首先求每一随机变量  $X_i^2$  的概率密度。

## 标准高斯随机变量 $X_i$ 的概率密度

从而得到  $Y_i$  的特征函数为

$$\begin{aligned} Q_{Y_i}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_i}(y_i) e^{j u y_i} d y_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \pi}} \int_0^{\infty} y_i^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\left( \frac{1}{2} - j u \right) y_i \right\} d y_i = (1 - 2 j u)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (253)$$

由于  $V = \sum_{i=1}^n Y_i$ , 利用特征函数的性质: 独立随机变量之和的特征函数等于各随机变量特征函数的乘积。便可得到  $V$  的特征函数为

$$Q_V(u) = \prod_{i=1}^n Q_{Y_i}(u) = (1 - 2ju)^{-\frac{n}{2}} \quad (254)$$







## $\chi^2$ 分布的性质

### 性质 1

1° 两个独立的  $\chi^2$  变量之和仍为  $\chi^2$  变量。若它们各自的自由度分别为  $n_1$  和  $n_2$ , 则它们的和变量为具有  $(n_1 + n_2)$  个自由度的  $\chi^2$  分布。2n 个自由度的  $\chi^2$  变量的均值  $E[V] = n$ , 方差  $D[V] = 2n$ 。

## 性质 2

## 2. 非中心 $\chi^2$ 分布

若窄带过程  $N'(t)$  为余弦信号  $N'(t)$  与窄带高斯噪声  $N(t)$  之和, 则加法器输出的就是非中心  $\chi^2$  分布。

设信号

$$s(t) = a \cos(\omega_0 t + \pi/4) \quad (257)$$

包络  $a$  为常数, 则有

$$\begin{aligned} s(t) &= a \cos \frac{\pi}{4} \cos \omega_0 t + a \sin \frac{\pi}{4} \sin \omega_0 t \\ &= a \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega_0 t + a \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (258)$$

又由于

$$\mathbf{N}(t) = n_e(t) \cos \omega_0 t - n_3(t) \sin \omega_0 t. \quad (260)$$

代入  $N(t)$  得

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

$$A^2(t) = A_c^2(t) + A_s^2(t) = [s + n_\varepsilon(t)]^2 + [s + n_s(t)]^2. \quad (262)$$

仿照求  $\chi^2$  分布的方法, 加法器输出端的随机变量  $V'$  应为

$$V' = \sum_{i=1}^n (s + X_i)^2 = \sum_{i=1}^n Y, \quad (263)$$

式中  $X_i$  为同分布的独立高斯变量 (均值为零、方差为  $\sigma_2$ ),  $s$  为常数。

令

$$R_i = s + X_i. \quad (264)$$

显然,  $R_i$  的概率密度为

$$f_{R_i}(r_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(r_i - s)^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (265)$$

$Y'$

$$f_{Y_i}(y'_i) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma^2 y'_i}} \left\{ \exp \left[ -\frac{(\sqrt{y'_i} - s)^2}{2\sigma^2} \right] + \exp \left[ -\frac{(-\sqrt{y'_i} - s)^2}{2\sigma^2} \right] \right\}. \quad (266)$$

将上式中指数的平方项展开, 并利用双曲余弦函数  $2 \cosh(b) = e^s + e^{-s}$ , 可得

$$f_{Y_i}(y'_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y'_i}} \exp \left\{ -\frac{y'_i + s^2}{2\sigma^2} \right\} \cosh \left( \frac{s\sqrt{y'_i}}{\sigma^2} \right). \quad (267)$$

$$\begin{aligned} Q_{V'}(\mathbf{u}) &= \prod_{i=1}^n Q_{Y'_i}(\mathbf{u}) \\ &= \left( \frac{1}{1 - \mathbf{j}2\sigma^2\mathbf{u}} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{n\mathbf{s}^2}{2\sigma^2} + \frac{n\mathbf{s}^2}{2\sigma^2(1 - \mathbf{j}2\sigma^2\mathbf{u})} \right\}. \end{aligned} \quad (268)$$



$$f_{V'}(v') = \frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{v'}{\lambda'^2} \right)^{\frac{n-2}{4}} \exp \left\{ -\frac{\lambda' + v'}{2\sigma^2} \right\} I_{\frac{n}{2}-1} \left( \frac{\sqrt{v'\lambda'}}{\sigma^2} \right), \quad v' \geq 0. \quad (269)$$

式中,  $\lambda' = s^2 n$  定义为非中心参量,  $I_n(\cdot)$  为第一类  $n$  阶修正贝塞尔函数。

定义归一化变量  $V = V'/\sigma^2$ , 那么

$$V = \sum_{i=1}^n \left( \frac{s}{\sigma} + \frac{X_i}{\sigma} \right)^2 = \sum_{i=1}^n R_i'^2. \quad (270)$$

其中变量  $R$  是均值为  $s/\sigma$ 、方差为 1 的相互独立的高斯变量。



图 38 画出了不同信噪比  $\lambda$  和样本数  $n$  情况下的非中心  $\chi^2$  函数。

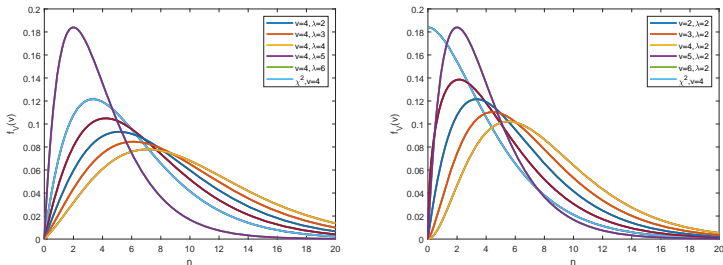


图 38: 非中心  $\chi^2$  分布: a)  $v = 4, \lambda = 2..6$ , b)  $v = 2.6, \lambda = 2$

给定信号

$$s(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \pi/4), \quad (272)$$

包络  $a(t)$  为确定函数, 则有

$$\begin{aligned} s(t) &= a(t) \cos \frac{\pi}{4} \cos \omega_0 t + a(t) \sin \frac{\pi}{4} \sin \omega_0 t \\ &= a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega_0 t + a(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (273)$$

代入  $N'(t)$  得

$$N(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t. \quad (274)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'(t) &= \mathbf{s}(t) + \mathbf{N}(t) = \left[ \mathbf{a}(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_e(t) \right] \cos \omega_0 t \\ &\quad - \left[ \mathbf{a}(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_1(t) \right] \sin \omega_0 t \\ &= \mathbf{A}_c(t) \cos \omega_0 t - \mathbf{A}_s(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2(\mathbf{t}) &= \mathbf{A}_c^2(\mathbf{t}) + \mathbf{A}_0^2(\mathbf{t}) \\ &= \left[ \mathbf{a}(\mathbf{t}) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_c(\mathbf{t}) \right]^2 + \left[ \mathbf{a}(\mathbf{t}) \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{n}_3(\mathbf{t}) \right]^2. \end{aligned} \quad (275)$$
$$Q' = \sum_{i=1}^n (s_i + X_i)^2 = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad (276)$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ▶ ↺ 🔍 ↻





## 随机信号分析





若它们的自由度分别为  $n_1$  和  $n_2$ , 非中心参量为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ , 则和变量的自由度为  $n = n_1 + n_2$ , 非中心参量为  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ 。

### 例 .1

设图 26 中加至平方律检波器输入端的窄带随机过程  $X(t)$  为

$$X(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta) + N(t), \quad (283)$$

其中  $a \cos(\omega_0 t + \theta)$  为随相余弦信号,  $a$  和  $\omega_0$  为常数。 $N(t)$  是零均值、方差为  $\sigma^2$  的稳窄带高斯噪声, 其功率谱关于  $\omega_0$  偶对称。 $X(t)$  经检波并作归一化处理以后, 独立采样  $m$  次, 求累加器输出端随机变量的概率密度及其参数。



$$N(t) = A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (284)$$

若用  $A(t)$  表示窄带随机过程  $X(t)$  的包络, 那么在平方律检波器的输出端, 可得到包络平方为

$$A^2(\mathbf{t}) = [a \cos \theta + A_c(\mathbf{t})]^2 + [a \sin \theta + A_0(\mathbf{t})]^2. \quad (285)$$

于是, 加法器输出端随机变量  $V$  为

$$V = \frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^m (a \cos \theta + A_{ci})^2 + \sum_{i=1}^m (a \sin \theta + A_{ai})^2 \right], \quad (286)$$

式中  $A_{\sigma} = A_e(t_i)$  和  $A_{si} = A_s(t_i)$  分别表示  $A_e(t)$  和  $A_s(t)$  在  $t_1$  时刻的状态。

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m (a \cos \theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2} \cos^2 \theta \\ \lambda_2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m (a \sin \theta)^2 = \frac{ma^2}{\sigma^2} \sin^2 \theta \end{cases} \quad (287)$$

由于这两个非中心  $\chi^2$  随机变量也彼此独立, 因而它们的和变量  $V$  也是非中心  $\chi^2$  随机变量, 自由度  $n = 2m$ 。

