

# 7

## 马尔可夫过程、独立增量过程及独立随机过程

第二章详细地介绍了平稳随机过程、高斯随机过程和白噪声随机过程等随机过程,它们是工程领域中最常见、最基本的几种随机过程。本章将讨论另外几种在工程技术中常见且重要的随机过程:马尔可夫过程、独立增量过程、独立随机过程。马尔可夫过程是一种发展很快且应用很广的重要的随机过程,它在信息处理、自动控制、数字计算方法、近代物理、生物(生灭过程)以及公用事业等方面皆有重要的应用。独立增量过程是一种特殊的马尔可夫过程,泊松(Poisson)过程和维纳(Wiener)过程是两个最重要的独立增量过程,也即马尔可夫过程。电子系统中,它们是研究热噪声和散粒噪声的数学基础,具有重要的实用价值。独立随机过程是一种很特殊的随机过程,它的重要应用就是高斯白噪声。连续时间参数的独立随机过程是一种理想化的随机过程,它在数学处理上具有简单且方便的优点。

马尔可夫过程是一类重要的随机过程。原始模型是俄国数学家 A. A. 马尔可夫于 1907 年提出的马尔可夫链。该过程具有已知目前状态(现在)的条件下,它未来的演变(将来)不依赖于它以往的演变(过去)的特性。

例如森林中动物头数的变化构成——马尔可夫过程。在现实世界中,有很多过程都是马尔可夫过程,如液体中微粒所作的布朗运动、传染病受感染的人数、车站的候车人数等,都可视为马尔可夫过程。马尔可夫过程概率分布的演化方程就是主方程。普遍应用于化学、生物学、人口动力学、激光物理学、布朗运动、流体及半导体相关等问题。马尔可夫过程理论主要包括:马尔可夫过程的基本理论、马尔可夫链、马尔可夫方程和布朗运动。

7.1 马尔可夫过程

电子系统中, 马尔可夫过程是一种重要的随机过程, 它具有如下特性: 当随机过程在时刻  $t$  所处的状态已知时, 过程在时刻  $t_1$  ( $t_1 > t$ ) 所处的状态仅与过程在  $t$  时刻的状态有关, 而与过程在  $t$  时刻以前所处的状态无关。此特性称为随机过程的无后效性或马尔可夫性。无后效性也可理解为: 随机过程  $X(t)$  在“现在”状态已知的条件下, 过程“将来”的情况与“过去”的情况是无关的。或者说, 随机过程的“将来”只是通过“现在”与“过去”产生关系, 且“现在”已知, 那么“将来”和“过去”就无关了。马尔可夫过程按其状态空间和时间参数集  $T$  是连续还是离散可分成四类。

表 7-1 马尔可夫过程的分类

分类名称	状态空间 $I$	
	离散	连续
时间参数集 $T$	离散 ( $n = 0, 1, 2, \cdots$ )	马尔可夫链      马尔可夫序列
	连续 ( $t \geq 0$ )	可列马尔可夫过程      马尔可夫过程

可见, 如表 7-1 所示, 马尔可夫链是指时间、状态皆离散的马尔可夫过程; 马尔可夫序列是指时间离散、状态连续的马尔可夫过程; 可列马尔可夫过程是指时间连续、状态离散的马尔可夫过程; 至于马尔可夫过程, 有时指时间、状态皆连续的马尔可夫过程, 有时也为此四类过程的总称。

实际上, 我们所观察到的物理过程并不一定是精确的马尔可夫过程。然而, 在很多具体问题中, 有时却能近似地将其看作马尔可夫过程, 这正是我们研讨马尔可夫过程的原因。下面, 我们将对马尔可夫序列、马尔可夫链和一般马尔可夫过程的概念及特性依次加以介绍。

7.1.1 马尔可夫序列

随机序列  $\{X(n)\} = \{X_1, X_2, \cdots, X_{\infty}, \cdots\}$  可看作随机过程  $\{X(n)\}$  在  $t$  为整数时的采样值。

**定义 7.1 马尔可夫序列**

若对于任意的  $n$ , 随机序列  $\{X(n)\}$  的条件分布函数满足

$$F_X(x_n|x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1) = F_X(x_n|x_{n-1}), \quad (7.1)$$

则称此随机序列  $\{X(n)\}$  为马尔可夫序列。条件分布函数  $F_X(x_n|x_{n-1})^n$  常被称为转移分布。



对于连续型随机变量, 由上式可得

$$f_X(x_n|x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1) = f_X(x_n|x_{n-1}), \quad (7.2)$$

因此, 利用条件概率的性质

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_X(x_n|x_{n-1}, \dots, x_1) \cdots f_X(x_2|x_1) f_X(x_1). \quad (7.3)$$

结合式 (7.2), 可得

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_X(x_n|x_{n-1}) f_X(x_{n-1}|x_{n-2}) \cdots f_X(x_2|x_1) f_X(x_1). \quad (7.4)$$

和初始概率密度  $f_X(x_1)$  所确定。相反地, 若式 (7.4) 对所有的  $n$  皆成立, 则序列是马尔可夫序列。因为

$$f_X(x_n|x_{n-1}, \dots, x_2, x_1) = \frac{f_X(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)}{f_X(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} = f_X(x_n|x_{n-1}). \quad (7.5)$$

**2. 马尔可夫序列的性质**

1° 马尔可夫序列的子序列仍为马尔可夫序列

给定  $n$  个任意整数  $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ , 有

$$f_X(x_{k_n}|x_{k_{n-1}}, \dots, x_{k_1}) = f_X(x_{k_n}|x_{k_{n-1}}). \quad (7.6)$$

马尔可夫序列通常由上式来定义, 但式 (7.2) 的定义更为紧凑。

2° 马尔可夫序列按其相反方向组成的逆序列仍为马尔可夫序列。

对任意的整数  $n$  和  $k$ , 有

$$f_X(x_n|x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}) = f_X(x_n|x_{n+1}). \quad (7.7)$$

证: 由式 (7.4) 知

$$\begin{aligned}
 f_X(x_n | x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}) &= \frac{f_X(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k})}{f_X(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k})} \\
 &= \frac{f_X(x_{n+k} | x_{n+k-1}) f_X(x_{n+k-1} | x_{n+k-2}) \cdots f_X(x_{n+1} | x_n) f_X(x_n)}{f_X(x_{n+k} | x_{n+k-1}) f_X(x_{n+k-1} | x_{n+k-2}) \cdots f_X(x_{n+2} | x_{n+1}) f_X(x_{n+1})} \\
 &= \frac{f_X(x_{n+1} | x_n) f_X(x_n)}{f_X(x_{n+1})} \\
 &= \frac{f_X(x_{n+1}, x_n)}{f_X(x_{n+1})} = f_X(x_n | x_{n+1}).
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

3° 马氏序列的条件数学期望满足

$$E[X_n | X_{n-1}, \dots, X_1] = E[X_n | X_{n-1}]. \tag{7.9}$$

### 定义 7.2 鞅

如果马尔可夫序列满足

$$E[X_n | X_{n-1}, \dots, X_1] = X_{n-1}, \tag{7.10}$$

则称此随机序列为“鞅”。

4° 马尔可夫序列中, 若现在已知, 则未来与过去无关。

若  $n > r > s$ , 在假定  $X$  已知条件下, 随机变量  $X_n$  与  $X$  是独立的。满足

$$f_X(x_n, x_s | x_r) = f_X(x_n | x_r) f_X(x_s | x_r). \tag{7.11}$$

证: 由式 (7.4) 知

$$\begin{aligned}
 f_X(x_n, x_s | x_r) &= \frac{f_X(x_n | x_r) f_X(x_r | x_s) f_X(x_s)}{f_X(x_r)} \\
 &= \frac{f_X(x_n | x_r) f_X(x_r, x_s)}{f_X(x_r)} \\
 &= f_X(x_n | x_r) f_X(x_s | x_r),
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

可把上述结论推广到具有任意个过去与未来随机变量的情况。

5° 多重马尔可夫序列

多重马尔可夫序列是马尔可夫序列的概念可以推广。

满足式 (7.1) 的随机序列称为 1 重马尔可夫序列。对于任意  $n$ , 满足

$$F_X(x_n | x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1) = F_X(x_n | x_{n-1}, x_{n-2}) \tag{7.13}$$

的随机序列称为 2 重马尔可夫序列。依此类推, 可定义多重马尔可夫序列。

6° 齐次马尔可夫序列。

**定义 7.3 齐次马尔可夫序列**

对一般马尔可夫序列而言, 条件概率密度  $f_X(x_n|x_{n-1})$  是  $x$  和  $n$  的函数, 如果条件概率密度  $f_X(x_n|x_{n-1})$  与  $n$  无关, 则称马尔可夫序列是齐次的。用记号  $f_{X_n}(x|X_{n-1}=x_0) = f_X(x|x_0)$  表示  $x_{n-1}=x_0$  条件下  $X_n$  的条件概率密度。

7° 平稳马尔可夫序列。

**定义 7.4 平稳马尔可夫序列**

如果一个马尔可夫序列是齐次的, 并且所有的随机变量  $X_n$  具有相同的概率密度, 则称马尔可夫序列为平稳的。

我们可以用更精确的记号  $f_X(x)$  来表示此概率密度, 则要求这个函数与  $n$  无关。

**推论** 在一个齐次马尔可夫序列中, 若最初的两个随机变量  $X_1$  和  $X_2$  具有相同的概率密度, 则此序列是平稳的。

8° 切普曼——柯尔莫哥洛夫 (Chapman-Kolmogorov) 方程。

**定义 7.5 切普曼——柯尔莫哥洛夫方程**

若一个马尔可夫序列的转移概率密度满足

$$f_X(x_n|x_s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_n|x_r) f_X(x_r|x_s) dx_r. \quad (7.14)$$

其中  $n > r > s$  为任意整数, 则称该方程为切普曼——柯尔莫哥洛夫方程。

证: 对任意三个随机变量  $X_n, X_r, X_s, n > r > s$ , 有

$$\begin{aligned} f_X(x_n|x_s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_n, x_r|x_s) dx_r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_X(x_n, x_r, x_s)}{f_X(x_s)} dx_r \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_X(x_n|x_r, x_s) f_X(x_r, x_s)}{f_X(x_s)} dx_r \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_n|x_r, x_s) f_X(x_r|x_s) dx_r \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_n|x_r) f_X(x_r|x_s) dx_r. \end{aligned} \quad (7.15)$$

最后一步应用了无后效性, 即  $f_X(x_n|x_r, x_s) = f_X(x_n|x_r)$ 。反复应用切普曼-柯尔莫哥洛夫方程, 我们可根据相邻随机变量的转移概率密度, 来求得  $X_s$  条件下  $X_n$  的转移概率密度。

9° 高斯-马尔可夫序列

**定义 7.6 高斯-马尔可夫序列**

如果一个  $n$  维随机序列矢量  $\{X(n)\}$  既是高斯序列, 又是马尔可夫序列, 则称它为高斯-马尔可夫序列。

高斯-马尔可夫序列的高斯特性决定了它幅度的概率密度分布, 而马尔可夫特性则决定了它在时间上的传播方式。这种模型常用在运动目标导弹和飞机的轨迹测量中。

**7.1.2 马尔可夫链**

马尔可夫链就是状态和时间参数皆离散的马尔可夫过程。

**定义 7.7 马尔可夫链**

随机过程  $X(t)$  在时刻  $t_n (n = 1, 2, \dots)$  的采样为  $X_n = X(t_n)$ , 且  $X_n$  可能取得的状态必为  $a_1, a_2, \dots, a_N$  之一, 其中  $A_I = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$  为有限的状态空间,  $I = \{1, 2, \dots, N\}$ 。随机过程只在  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  可列个时刻发生状态转移。若随机过程  $X(t)$  在  $t_{m+k}$  时刻变成任一状态  $a_j$  的概率, 只与过程在  $t_m$  时刻的状态  $a_i$  有关, 而与过程在  $t_m$  时刻以前的状态无关, 则称此随机过程为马尔可夫链, 简称为马氏链。

可用公式表示为

$$P\{X_{m+k} = a_j | X_m = a_i, X_{m-1} = a_p, \dots, X_1 = a_q\} = P\{X_{m+k} = a_j | X_m = a_i\} \quad (7.16)$$

实际上, 过程  $X(t)$  是状态离散的随机序列  $\{X_n\}$ , 所以上式可以看成由式 (7.1) 演变而来。

**2. 马氏链的转移概率及其转移概率矩阵****(1) 马氏链的转移概率**

马氏链“在  $m$  时刻出现的状态为  $a_i$  的条件下,  $t_{m+k}$  时刻出现的状态为  $a_j$ ”的条件概率可用  $p_{ij}(m, m+k)$  表示, 即

$$p_{ij}(m, m+k) = P\{X_{m+k} = a_j | X_m = a_i\}, \quad (7.17)$$

式中  $i, j = 1, 2, \dots, N$ , 且  $m, k$  皆为正整数, 则称  $p_{ij}(m, m+k)$  为马氏链的转移概率。一般而言,  $p_{ij}(m, m+k)$  不仅依赖于  $i, j, k$ , 而且还依赖于  $m$ 。若  $p_{ij}(m, m+k)$  与  $m$  无关, 则称此马氏链为齐次的。下面只讨论齐次马氏链, 并通常将“齐次”二字省去。

**(2) 一步转移概率及其转移概率矩阵**

当  $k = 1$  时, 马氏链由状态  $a_i$  经过一次转移就到达状态  $a_j$ , 的转移概率称为一步转移概率, 通常用符号  $p_{ij}$  表示, 即

$$p_{ij} = p_{ij}(m, m+1) = P \{X_{m+1} = a_j | X_m = a_i\}, \quad i, j \in I \quad (7.18)$$

由所有状态  $I = \{1, 2, \dots, N\}$  之间的一步转移概率  $p_{ij}$  构成的矩阵, 称为马氏链的一步转移概率矩阵, 简称为转移概率矩阵,

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

此矩阵决定了状态  $X_1, X_2, \dots, X_N$  转移的概率法则, 具有下列两个性质:

$$\begin{aligned} 1^\circ & 0 \leq p_{ij} \leq 1 \\ 2^\circ & \sum_{i=1}^N p_{ij} = 1 \end{aligned} \quad (7.20)$$

表示转移概率矩阵是一个每行元素之和为 1 的非负元素矩阵。因  $p$  为条件概率, 故性质 1 是显然的, 性质 2 可由下式推得:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N p_{ij} &= \sum_{j=1}^N P \{X_{m+1} = a_j | X_m = a_i\} \\ &= P \{X_{m+1} = a_1 | X_m = a_i\} + \cdots + P \{X_{m+1} = a_N | X_m = a_i\} = 1. \end{aligned} \quad (7.21)$$

任意满足性质 1 和性质 2 的矩阵也称之为随机矩阵。

### (3) $n$ 步转移概率及其转移概率矩阵

与一步转移概率类似, 当  $k = n$  时, 定义马氏链的  $n$  步转移概率  $p_{ij}(n)$  为

$$p_{ij}(n) = p_{ij}(m, m+n) = P \{X_{m+n} = a_j | X_m = a_i\}, \quad n \geq 1. \quad (7.22)$$

表明马氏链在时刻  $t_m$  的状态为  $a_i$  的条件下, 经过  $n$  步转移到达状态  $a_j$  的概率。对应的  $n$  步转移概率矩阵为

$$P(n) = \begin{bmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \cdots & p_{1N}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & \cdots & p_{2N}(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{N1}(n) & p_{N2}(n) & \cdots & p_{NN}(n) \end{bmatrix}. \quad (7.23)$$

它也是随机矩阵, 显然具有如下性质

$$\begin{aligned} 1^\circ & 0 \leq p_{ij}(n) \leq 1 \\ 2^\circ & \sum_{j=1}^N p_{ij}(n) = 1 \end{aligned} \quad (7.24)$$

当  $n = 1$  时,  $p_{ij}$  就是一步转移概率, 即  $p_{ij}(n) = p_{ij}(1) = p_{ij} = p_{ij}(m, m+1)$ 。通常还规定

$$p_{ij}(0) = p_{ij}(m, m) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (7.25)$$

(4)  $n$  步转移概率  $p_{ij}(n)$  与一步转移概率  $p_{ij}(1)$  的关系

对于  $n$  步转移概率, 有切普曼-柯尔莫哥洛夫方程的离散形式:

$$p_{ij}(n) = p_{ij}(l+k) = \sum_{r=1}^N p_{ir}(l)p_{rj}(k), \quad n = l+k \quad (7.26)$$

证: 由全概率公式可得

$$\begin{aligned} p_{ij}(n) &= p_{ij}(n \equiv l+k) = P\{X_{m+l+k} = a_j | X_m = a_i\} = \frac{P\{X_m = a_i, X_{m+l+k} = a_j\}}{P\{X_m = a_i\}} \\ &= \sum_{r=1}^N \frac{P\{X_m = a_i, X_{m+l+k} = a_j, X_{m+l} = a_r\}}{P\{X_m = a_i, X_{m+l} = a_r\}} \cdot \frac{P\{X_m = a_i, X_{m+l} = a_r\}}{P\{X_m = a_i\}} \\ &= \sum_{r=1}^N P\{X_{m+l+k} = a_j | X_{m+l} = a_r, X_m = a_i\} \cdot P\{X_{m+l} = a_r | X_m = a_i\} \\ &= \sum_{r=1}^N p_{ir}(l)p_{rj}(k). \end{aligned} \quad (7.27)$$

再利用马氏链的无后效性与齐次性, 可得

$$\begin{cases} P\{X_{m+l+k} = a_j | X_{m+l} = a_r, X_m = a_i\} = p_{rj}(k) \\ P\{X_{m+l} = a_r | X_m = a_i\} = p_{ir}(l) \end{cases} \quad (7.28)$$

式 (7.26) 表明: 由于马氏链的无后效性与齐次性, 该链从状态  $a_i$  经过  $n$  步转移到达状态  $a_j$  这一事件  $(a_i \xrightarrow{n} a_j)$ , 等效于该链先由状态  $a_i$  经过  $l$  步转移到达状态  $a_r$ , ( $r = 1, 2, \dots, N$ ), 再由状态  $a_r$  经过  $k$  步转移到达状态  $a_j$  这一事件  $(a_i \xrightarrow{l} a_r \xrightarrow{k} a_j)$ , 也就是说, 只要  $r \in I = \{1, 2, \dots, N\}$  中有一个事件  $(a_i \xrightarrow{l} a_r \xrightarrow{k} a_j)$  发生, 则事件  $(a_i \xrightarrow{n} a_j)$  就必发生。因此事件的概率是  $r \in I$  中所有事件  $(a_i \xrightarrow{l} a_r \xrightarrow{k} a_j)$  概率的和。



① 当  $l = 1, k = 1$  时

$$p_{ij}(2) = \sum_{r=1}^N p_{ir}(1)p_{rj}(1) = \sum_{r=1}^N p_{ir}p_{rj}. \quad (7.29)$$

② 当  $l = 1, k = 2$  时

$$p_{ij}(3) = \sum_{r=1}^N p_{ir}(1)p_{rj}(2) = \sum_{r=1}^N p_{ir} \sum_{k=1}^N p_{rk}p_{kj}. \quad (7.30)$$

③ 以此类推

$$p_{ij}(n) = \sum_{r=1}^N p_{ir}(1)p_{rj}(n-1) = \sum_{r=1}^N p_{ir}p_{rj}(n-1). \quad (7.31)$$

同理, 可得离散切普曼-柯尔莫哥洛夫方程的矩阵形式:

$$P(n) = P(l+k) = P(l)P(k). \quad (7.32)$$

① 当  $n = 2$  时

$$P(2) = P(1)P(1) = [P(1)]^2 = P^2. \quad (7.33)$$

一步转移概率矩阵  $P(1)$  简写为  $P$ 。

② 当  $n = 3$  时

$$P(3) = P(1)P(2) = P(1)[P(1)]^2 = P^3. \quad (7.34)$$

③ 当  $n$  为任意正整数时

$$P(n) = P(1)P(n-1) = \cdots = P^n. \quad (7.35)$$

上式表明:  $n$  步转移概率矩阵等于一步转移概率矩阵的  $n$  次方。

由此可见, 以一步转移概率  $p_{ij}$  为元素的转移概率矩阵  $\mathbf{P}$  决定了马氏链状态转移过程的概率法则。

(5) 马氏链的有限维分布

1) 初始分布

#### 定义 7.8 初始概率

马氏链在  $t = 0$  时所处状态  $a_i$  的概率, 通常被称作“初始概率”。



$$p_i(0) = p\{X_0 = a_i\} = p_i, \quad i \in I = \{1, \cdots, N\} \quad (7.36)$$

且有  $0 \leq p_i \leq 1, \sum_{i=1}^N p_i = 1$  成立。

而对于  $N$  个状态而言, 所有初始概率的集合  $\{p_{ij}\}$  称为马氏链的“初始分布”

$$\{p_i\} = (p_1, \cdots, p_i, \cdots, p_N). \quad (7.37)$$

## 2) 一维分布

### 定义 7.9 马氏链的一维分布

马氏链在第  $n$  步所处状态为  $a_i$  的无条件概率称为马氏链的“一维分布”, 也称为“状态概率”。

表示为

$$p\{X_n = a_j\} = p_j(n), \quad j \in I = \{1, \cdots, N\} \quad (7.38)$$

且有  $0 \leq p(n) \leq 1, p(n) = 1$  成立。

由全概率公式, 一维分布可表示为

$$\begin{aligned} P_j(n) &= \sum_{i=1}^N P\{X_n = a_j | X_s = a_i\} P\{X_s = a_i\} \\ &= \sum_{i=1}^N p_i(s) p_{ij}(n-s), \quad i, j \in I. \end{aligned} \quad (7.39)$$

上式给出了不同时刻一维分布  $p_i(s), p_j(n)$  以及  $n-s$  步转移概率  $p_{ij}(n-s)$  之间的关系。

① 当  $s = 0$  时

$$p_j(n) = \sum_{i=1}^N p_i p_{ij}(n), \quad j \in I. \quad (7.40)$$

② 当  $s = n-1$  时

$$p_j(n) = \sum_{i=1}^N p_i(n-1) p_{ij}, \quad j \in I. \quad (7.41)$$

若将一维分布表示成矢量形式

$$\mathbf{p}(n) = \begin{bmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \\ \vdots \\ p_N(n) \end{bmatrix}_{N \times 1} \quad (7.42)$$

称之为“一维分布矢量”或“状态概率矢量”。且其递推公式 (7.39) 可表示为

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{P}^T(n-s) \mathbf{p}(s). \quad (7.43)$$

3)  $n$  维分布

齐次马氏链在  $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$  时刻分别取得状态  $a_{i_0}, a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{(n-1)}}$ ,  $(i_0, i_1, \dots, i_{n-1} \in I)$ 。这一事件的概率为  $P\{X_0 = a_{i_0}, X_1 = a_{i_1}, \dots, X_{n-1} = a_{i_{(n-1)}}\}$ , 称为马氏链的  $n$  维分布。由全概率公式和无后效性, 可证下式成立

$$\begin{aligned}
 P\{X_0 = a_{i_0}, X_1 = a_{i_1}, \dots, X_{n-1} = a_{i_{(n-1)}}\} \\
 &= P\{X_0 = a_{i_0}\} P\{X_1 = a_{i_1} | X_0 = a_{i_0}\} \\
 &\quad \cdots P\{X_{n-1} = a_{i_{(n-1)}} | X_0 = a_{i_0}, \dots, X_{n-2} = a_{i_{(n-2)}}\} \\
 &= P\{X_0 = a_{i_0}\} P\{X_1 = a_{i_1} | X_0 = a_{i_0}\} \cdots P\{X_{n-1} = a_{i_{(n-1)}} | X_{n-2} = a_{i_{(n-2)}}\} \\
 &= p_{i_0} p_{i_1, i_1} \cdots p_{i_{(n-2)}, i_{(n-1)}}.
 \end{aligned} \tag{7.44}$$

由于  $I = \{1, \dots, N\}$ ,  $a_{i_0}, a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{(n-1)}}$  分别可以是  $N$  个状态中的任意一个, 因此, 这种  $n$  维分布可以有多种。

通过马氏链的一维分布和  $n$  维分布的讨论可知, 马氏链的任意有限维分布完全可以由初始分布和一步转移概率矩阵所确定。因此, 初始分布和一步转移概率矩阵是描述马氏链的统计特性的两个重要的分布特征。马氏链在研究质点的随机运动、自动控制、通信技术、气象预报和生物遗传工程等方面皆有广泛的应用。

下面是马氏链应用的一些例子

**例 7.10** 设质点  $M$  在直线段上作随机游动, 如图 7-2 所示。假定质点  $M$  只能停留在  $1, 2, \dots, N$  点上, 且只在  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  时刻发生游动。游动的概率法则是:

① 若质点  $M$  原来处于  $2, \dots, N-1$  这些点上, 则分别以  $p(0 < p < 1)$  的概率向右移动一步或以  $q(q = 1 - p)$  的概率向左移动一步。

② 若质点  $M$  原来处于  $1$  点, 则以概率  $1$  移动到  $2$  点。

③ 若质点  $M$  原来处于  $N$  点, 则以概率  $1$  移动到  $N-1$  点上。求其转移概率矩阵。



图 7-1 质点  $M$  的随机游动

解: 若以  $X_n = i (i = 1, 2, \dots, N)$  表示质点  $M$  在时刻  $t_n$  位于  $i$  点, 则不难看出

$X_1, X_2, \dots$  是一个齐次马氏链。由于其一步转移概率  $p_{ij}$  为

$$\begin{cases} p_{t,i+1} = p, & 2 \leq i \leq N-1 \\ p_{t,i-1} = q, & 2 \leq i \leq N-1 \\ p_{t,j} = 0, & j \neq i+1, i-1 \\ p_{12} = p_{N,N-1} = 1 \end{cases} \quad (7.45)$$

故质点  $M$  游动的转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ q & 0 & p & & & 0 \\ & q & & \ddots & & \\ & & \ddots & & p & \\ 0 & & & & q & 0 & p \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.46)$$

$P$  为  $N \times N$  阶方阵。因为质点不能越过 1 和  $N$  两端点, 将 1 和  $N$  这两点称为反射壁(或反射状态), 故称上述游动为一维不可越壁的随机游动, 它仅是一维随机游动的一种。

如果我们改变质点游动的概率法则 (即转移概率) 就可得到不同类型的随机游动过程。若游动的概率法则改动为:  $n$  当质点  $M$  一旦到达 1 点或  $N$  点, 就永远停留在 1 或  $N$  处, 其他不变。我们将 1 和  $N$  这两点称为吸收壁, 因此得到的是带有两个吸收壁的随机游动。它也是一个齐次马氏链, 由于其一步转移概率为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \\ q & 0 & p & & & 0 \\ & q & & \ddots & & \\ & & \ddots & & p & \\ 0 & & & & q & 0 & p \\ & & & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.47)$$

它仍是  $N \times N$  阶方阵。

**例 7.11** 在某数字通信系统中传递 0、1 两种信号, 且传递要经过若干级。因为系统中存在噪声, 各级将会造成错误。若某级输入 0、1 数字信号后, 其输出不产生错误的概率为  $p$  (即各级正确传递信息的概率), 产生错误的概率为  $q = 1 - p$ 。该级的输入状态和输出状态构成了一个两状态的马氏链, 它的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}, \quad (7.48)$$

于是, 二步转移概率矩阵为

$$P(2) = (P)^2 = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^2 + q^2 & 2pq \\ 2pq & p^2 + q^2 \end{bmatrix}. \quad (7.49)$$

**例 7.12** 天气预报问题。若明天是否降雨只与今天的天气 (是否有雨) 有关, 而与以往的天气无关。并设今日有雨而明日也有雨的概率为 0.6, 今日无雨而明日有雨的概率为 0.3。另外, 假定将“有雨”称作“1”状态天气, 而把“无雨”称为“2”状态天气, 则本例属于一个两状态的马氏链。

① 试求其一步至四步转移概率矩阵。

$$\begin{aligned} p_{11} &= 0.6, & p_{12} &= 1 - 0.6 = 0.4 \\ p_{21} &= 0.3, & p_{22} &= 1 - 0.3 = 0.7 \end{aligned} \quad (7.50)$$

② 今日有雨而后日 (第三日) 仍有雨的概率为多少?

③ 今日有雨而第四日无雨的概率为多少?

④ 今日无雨而第五日有雨的概率为多少?

解: 由题可知, 一步转移概率为

$$\begin{aligned} p_{11} &= 0.6, & p_{12} &= 1 - 0.6 = 0.4 \\ p_{21} &= 0.3, & p_{22} &= 1 - 0.3 = 0.7 \end{aligned} \quad (7.51)$$

① 此马氏链的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}. \quad (7.52)$$

二步转移概率矩阵为

$$P(2) = (P)^2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.52 \\ 0.39 & 0.61 \end{bmatrix}. \quad (7.53)$$

三步转移概率矩阵为

$$P(3) = (P)^3 = (P)^2 P = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.52 \\ 0.39 & 0.61 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.444 & 0.556 \\ 0.417 & 0.583 \end{bmatrix}. \quad (7.54)$$

四步转移概率矩阵为

$$P(4) = (P)^4 = (P)^2 (P)^2 = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.52 \\ 0.39 & 0.61 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0.4332 & 0.5668 \\ 0.4251 & 0.5749 \end{bmatrix}. \quad (7.55)$$

② 今日有雨而第三日仍有雨的概率为  $p_{11}(2) = 0.48$ .

③ 今日有雨而第四日无雨的概率为  $p_{12}(3) = 0.556$ .

④ 今日无雨而第五日有雨的概率为  $p_{21}(4) = 0.4251$ .

### 3. 马氏链的平稳分布与遍历性

#### (1) 平稳分布

#### 定义 7.13 马氏链的平稳分布

若一个马氏链的概率分布  $P\{X = a_j\} = p_j$  满足

$$p_j = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}, \quad j \in I. \quad (7.56)$$

其中  $p_j \geq 0, \sum p_j = 1$  成立。则称  $\{p_j\} = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  为该马氏链的“平稳分布”。

对于平稳分布  $\{p_j\}$ , 有

$$p_j = \sum_{i \in I} \left( \sum_{k \in I} p_k p_{ki} \right) p_{ij} = \sum_{k \in I} p_k \left( \sum_{i \in I} p_{ki} p_{ij} \right) = \sum_{k \in I} p_k p_{kj}(2), \quad j \in I. \quad (7.57)$$

类似可推

$$p_j = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}(n), \quad j \in I. \quad (7.58)$$

比较式 (7.56) 与式 (7.58) 可知, 对平稳分布而言, 无论是一步转移到状态  $a_j$ , 还是  $n$  步转移到状态  $a_j$ , 其概率分布不变, 与转移时间  $n$  无关。

**推论** 如果齐次马氏链的初始分布  $\{p_i\}$  是平稳分布, 则对  $n \geq 1$  步后,  $X_n$  的分布  $\{p_j(n)\}$  也是平稳分布, 其中  $p_i = P\{X_0 = a_i\}, p_j(n) = P\{X_n = a_j\}$ 。

证: 由式 (7.40) 与式 (7.58), 可得

$$p_j(n) = \sum_{i=1}^N p_i p_{ij}(n) = p_j, \quad j \in I. \quad (7.59)$$

若用概率矢量表示, 则有

$$p(n) = p(0) = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{bmatrix}_{N \times 1}. \quad (7.60)$$

**定义 7.14 链的平稳分布**

若齐次马氏链的概率分布不随时间  $n$  的变化而改变, 即满足式 (7.59) 或式 (7.60), 则称此链为平稳马氏链。称  $\{p_j\} = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  为该链的平稳分布。

由于  $p_j(n) = P\{X_n = a_j\}$ ,  $p_j = P\{X_0 = a_j\}$ , 由式 (7.51) 可得  $p_j(n) = p_i$ , 即  $P\{X_n = a_j\} = P\{X_0 = a_j\}$ , 表示平稳马氏链的一维分布不随时间  $n$  的变化而改变。

若对平稳马氏链的  $m$  维分布在时间上平移  $n$ , 可得

$$\begin{aligned} & P\{X_{0+n} = a_{i0}, X_{1+n} = a_{i1}, \dots, X_{m-1+n} = a_{i(m-1)}\} \\ &= P\{X_{0+n} = a_{i0}\} P\{X_{1+n} = a_{i1} | X_0 = a_{i0}\} \cdots P\{X_{m-1+n} = a_{i(m-1)} | X_{m-2+n} = a_{i(m-2)}\} \quad (7.61) \\ &= p_{i0}(n) p_{i0, i1} \cdots p_{i(m-2), i(m-1)}. \end{aligned}$$

对于平稳马氏链,  $p_{i0}(n) = p_{i0}(0) = p_i$ , 则

$$\begin{aligned} & P\{X_{0+n} = a_{i0}, X_{1+n} = a_{i1}, \dots, X_{m-1+n} = a_{i(m-1)}\} \\ &= p_{i0} p_{i0, i1} \cdots p_{i(m-2), i(m-1)} \quad (7.62) \\ &= P\{X_0 = a_{i0}, X_1 = a_{i1}, \dots, X_{m-1} = a_{i(m-1)}\}. \end{aligned}$$

可见, 该马氏链的  $m$  维分布也不随时间的平移而变化, 说明平稳马氏链是个平稳过程。

**(2) 遍历性**

例 7.10 中的马氏链, 求得的各步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}, P(2) = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.52 \\ 0.39 & 0.61 \end{bmatrix}, P(4) = \begin{bmatrix} 0.4332 & 0.5668 \\ 0.4251 & 0.5749 \end{bmatrix}. \quad (7.63)$$

若再求  $P(8) = P(4)P(4)$ , 则

$$P(8) = \begin{bmatrix} 0.4286 & 0.5714 \\ 0.4285 & 0.5714 \end{bmatrix}. \quad (7.64)$$

可以看出, 随着步长  $n$  增大, 此马氏链的转移概率  $p_1$  与  $p_{21}$ ,  $p_{12}$  与  $p_{22}$  差距越来越小。设想若取  $n \rightarrow \infty$ , 则必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix}. \quad (7.65)$$

即不论从哪个状态  $i$  出发, 只要终点状态  $j$  相同, 则其转移概率相同。

**定义 7.15 马氏链的遍历性**

如果一个齐次马氏链对于一切状态  $i$  和  $j$ , 存在不依赖于  $i$  的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = p_j, \quad (7.66)$$

则称此马氏链具有遍历性, 这里的  $p(n)$  为此链的  $n$  步转移概率。

由上述定义可知, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $n$  步转移概率  $p_{ij}(n)$  趋近于一个与初始状态  $i$  无关的  $p_j$ 。换言之, 不论过程自哪一状态  $i$  出发, 当转移步数  $n$  充分大时, 转移到达状态  $j$  的概率都趋近于  $p_j$ 。对  $\forall j \in I, p_j$ , 是一种概率分布  $\{p_j\}$ , 满足

$$\sum_{j=1}^N p_j = 1. \quad (7.67)$$

此时  $p_{ij}$  称为极限分布。比较前面介绍的平稳分布可以看出, 马氏链的遍历性可以导致  $n \rightarrow \infty$  的平稳性, 因此平稳分布就是具有遍历性的马氏链的极限分布。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_N \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_N \end{bmatrix}. \quad (7.68)$$

物理上可以理解为: 不管初始状态如何, 系统经过一段时间后 ( $n \rightarrow \infty$ ) 走到稳定状态 (平稳状态), 系统的宏观状态不再随时间变化, 即系统处于各个状态的概率不再随时间变化, 是一平稳分布。

以上给出了马氏链具有遍历性的基本定义, 下面的定理给出马氏链具有遍历性的一个简单的充分条件以及求极限分布  $\{p_j\}$  的方法。

**定理 7.16 有限马氏链具有遍历性的充分条件**

于一有限状态的马氏链, 若存在正整数  $m$ , 使所有的状态满足

$$p_{ij}(m) > 0, \quad i, j \in I \quad (7.69)$$

则马尔科夫链是遍历的。

由于遍历性的马氏链的极限分布  $\{p_j\}$  就是平稳马氏链中的平稳分布, 可推出极限



分布  $\{p_j\}$  是下面方程组的唯一解。

$$\begin{cases} p_j = \sum_{i=1}^N p_i p_{ij} \\ \sum_{j=1}^N p_j = 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \mathbf{p} = \mathbf{P}^\top \mathbf{p} \\ \sum_{j=1}^N p_j = 1 \end{cases}, \quad \text{其中, } \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{bmatrix} \quad (7.70)$$

**例 7.17** 设有三个状态  $\{1, 2, 3\}$  的马氏链, 它的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix}, \quad 0 < p < 1, q = 1 - p \quad (7.71)$$

① 问此链是否具有遍历性? ② 求其极限分布  $\{p_j\}$ 。

解: ① 显然, 当  $m = 1$  时, 有  $\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}$ , 因  $\mathbf{P}$  中三个元素  $p_{13}, p_{22}, p_{31}$  为零, 不满足有限马氏链具有遍历性的充分条件。当  $m = 2$  时, 由于

$$\mathbf{P}(2) = (\mathbf{P})^2 = \begin{bmatrix} q^2 + pq & pq & p^2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \\ q^2 & pq & pq + p^2 \end{bmatrix} \quad (7.72)$$

的元素皆大于零, 满足遍历的充分条件, 所以此马氏链具有遍历性。

② 据式 (7.70) 有方程组

$$\begin{cases} p_1 = p_1 p_{11} + p_2 p_{21} + p_3 p_{31} \\ p_2 = p_1 p_{12} + p_2 p_{22} + p_3 p_{32} \\ p_3 = p_1 p_{13} + p_2 p_{23} + p_3 p_{33} \end{cases} \quad \text{且} \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad (7.73)$$

将已知条件代入上式可得

$$\begin{cases} P_1 = p_1 q + p_2 q \\ P_2 = p_1 p + p_3 q \\ P_3 = p_2 p + p_3 p \end{cases} \quad \text{且} \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad (7.74)$$

由此解得

$$p_1 = \left[ 1 + \frac{p}{q} + \left( \frac{p}{q} \right)^2 \right]^{-1}, \quad p_2 = \frac{p}{q} p_1, \quad p_3 = \left( \frac{p}{q} \right)^2 p_1 \quad (7.75)$$

可归纳为

$$p_j = \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \left( \frac{p}{q} \right)^3} \left( \frac{p}{q} \right)^{j-1}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (7.76)$$

若  $p = q = 1/2$ , 则得  $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$ 。

**例 7.18** 设有两个状态  $\{1, 2\}$  的马氏链, 一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I. \quad (7.77)$$

试问此链是否具有遍历性, 为什么?

解: 因为

$$\begin{cases} P(1) = P = I \\ P(2) = (P)^2 = I \\ P(3) = (P)^3 = I \\ \dots \\ P(n) = (P)^n = I. \end{cases} \quad (7.78)$$

无论  $n$  为多大, 始终有  $p_{12}(n) = p_{21}(n) = 0$ , 不能满足遍历性的充分条件, 故此链不具有遍历性。

### 7.1.3 马尔可夫过程

#### 定义 7.19 马尔可夫过程

设有一随机过程  $X(t), t \in T$ , 若在  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n$  ( $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n \in T$ ) 时刻对  $X(t)$  观测得到相应的观测值  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  满足条件

$$\begin{aligned} P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, X(t_{n-2}) = x_{n-2}, \dots, X(t_1) = x_1\} \\ = P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \end{aligned} \quad (7.79)$$

或

$$\begin{aligned} F_X(x_n; t_n | x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1; t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_2, t_1) \\ = F_X(x_n; t_n | x_{n-1}; t_{n-1}) \end{aligned} \quad (7.80)$$

则称此类过程为具有马尔可夫性质 (无后效性) 的过程或马尔可夫过程, 简称马氏过程。

其中  $F_X(x_n; t_n | x_{n-1}, \dots, x_2, x_1; t_{n-1}, \dots, t_2, t_1)$  代表  $X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_2) = x_2, X(t_1) = x_1$  的条件下,  $n$  时刻  $X(t_n)$ , 取  $x_n$  值的条件分布函数。

若把  $t_{n-1}$  看作“现在”, 因为  $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$ , 则  $t$  就可看成“将来” $t_2, \dots, t_{n-2}$  就当作“过去”。因此上述定义中的条件可表述为: 在“现在”状态  $X(t_{n-1})$  取值为  $x_{n-1}$  的条件下, “将来状态  $X(t_n)$  与“过去”状态  $X(t_{n-2}), X(t_{n-3}), \dots, X(t_1)$  是无关的。

(2) 转移概率分布

**定义 7.20 马尔可夫过程的条件概率分布**

马氏过程的转移概率分布为

$$F_X(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) = P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \quad (7.81)$$

或

$$F_X(x; t | x_0; t_0) = P\{X(t) \leq x | X(t_0) = x_0\}, \quad t > t_0 \quad (7.82)$$

转移概率分布是条件概率分布。



对  $X$  而言, 它是一个分布函数, 有以下性质:

$$1^\circ F_X(x; t | x_0; t_0) \geq 0$$

$$2^\circ F_X(\infty; t | x_0; t_0) = 1$$

$$3^\circ F_X(-\infty; t | x_0; t_0) = 0$$

$$4^\circ F_X(x; t | x_0; t_0) \text{ 是关于 } x \text{ 的单调非降、右连续的函数.}$$

5° 满足切普曼-科尔莫哥洛夫方程:

$$\begin{cases} F_X(x; t | x_0; t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x; t | x_1, t_1) dF_X(x_1, t_1 | x_0; t_0) \\ dF_X(x_1; t_1 | x_0; t_0) = F_X(x_1; t_1 | x_0; t_0) dx_1, \quad t_0 < t_1 < t \end{cases} \quad (7.83)$$

应用全概率公式, 可以证明上式成立。

(3) 转移概率密度

如果  $F_X(x; t | x_0; t_0)$  关于  $x$  的导数存在, 则

$$F_X(x; t | x_0; t_0) = \frac{\partial}{\partial x} F_X(x; t | x_0; t_0) \quad (7.84)$$

称之为马尔可夫过程的转移概率密度。反之, 可得

$$\int_{-\infty}^x F_X(u; t | x_0; t_0) du = \int_{-\infty}^x dF_X(u; t | x_0; t_0) = F_X(x; t | x_0; t_0). \quad (7.85)$$

并且还有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x; t | x_0; t_0) dx &= F_X(\infty; t | x_0; t_0) = 1 \\ F_X(x; t | x_0; t_0) &\xrightarrow{t \rightarrow t_0} \delta(x - x_0). \end{aligned} \quad (7.86)$$

此时, 无后效性可表示为

$$\begin{aligned} F_X(x_n; t_n | x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1; t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_2, t_1) \\ = F_X(x_n; t_n | x_{n-1}; t_{n-1}). \end{aligned} \quad (7.87)$$

马氏过程的转移概率密度也满足切普曼-科尔莫哥洛夫方程

$$F_X(x_n; t_n | x_k; t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x_n; t_n | x_r; t_r) F_X(x_r; t_r | x_k; t_k) dx_r, \quad t_n > t_r > t_k. \quad (7.88)$$

证: 利用概率的乘法定理及马氏过程的无后效性, 可知

$$\begin{aligned} & F_X(x_n, x_r; t_n, t_r | x_k; t_k) \\ &= \frac{F_X(x_n, x_r, x_k; t_n, t_r, t_k)}{F_X(x_k; t_k)} \\ &= \frac{F_X(x_n; t_n | x_r, x_k, t_r, t_k) F_X(x_r, x_k, t_r, t_k)}{F_X(x_k; t_k)} \\ &= F_X(x_n; t_n | x_r; t_r) F_X(x_r; t_r | x_k; t_k). \end{aligned} \quad (7.89)$$

并代入

$$F_X(x_0; t_n | x_k; t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x_n, x_r; t_n, t_r | x_k; t_k) dx_r. \quad (7.90)$$

可得转移概率密度的切普曼-科尔莫哥洛夫方程。

#### 定义 7.21 齐次马尔可夫过程

若马氏过程的转移概率分布  $F_X(x; t | x_0; t_0)$  或转移概率密度  $F_X(x; t | x_0; t_0)$ , 只与转移前后的状态  $x_0, x$  及相应的时间差  $t - t_0 = \tau$  有关, 而与  $t_0, t$  无关多。即

$$F_X(x; t | x_0; t_0) = F_X(x | x_0; \tau) \quad (7.91)$$

或

$$F_X(x; t | x_0; t_0) = F_X(x | x_0; \tau). \quad (7.92)$$

具有这种特性的马氏过程称为齐次马尔可夫过程。

#### 2. 马尔可夫过程的统计特性及性质

由前面的内容可知, 随机过程的统计特性可由有限维联合概率分布来近似地描述。对于马尔可夫过程  $X(t)$  来说, 其  $n$  维概率密度可以表示为

$$\begin{aligned} & F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ &= F_X(x_n; t_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) F_X(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \\ &= \dots \\ &= F_X(x_n; t_n | x_{n-1}; t_{n-1}) F_X(x_{n-1}; t_{n-1} | x_{n-2}; t_{n-2}) \cdots F_X(x_2; t_2 | x_1; t_1) F_X(x_1; t_1) \\ &= F_X(x_1; t_1) \prod_{i=1}^{n-1} F_X(x_{i+1}; t_{i+1} | x_i; t_i), \quad t_1 < t_2 < \dots < t_n. \end{aligned} \quad (7.93)$$

当取  $t_1$  为初始时刻时,  $f_X(x_1 : t)$  表示初始概率分布 (密度)。上式表明: 马氏过程的统计特性完全由它的初始概率分布 (密度) 和转移概率分布 (密度) 所确定。

上面已经介绍了马氏过程的定义及一些特征, 下面给出马氏过程的几个有用性质。

1° 同马尔可夫序列的情况一样, 逆方向的马尔可夫过程仍为马尔可夫过程。

对任意的整数  $n$  和  $k$ , 有

$$\begin{aligned} F_X(x_n; t_n | x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}, t_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{n+k}) \\ = F_X(x_n, t_n | x_{n+1}, t_{n+1}). \end{aligned} \quad (7.94)$$

证:

$$F_X(x_n; t_n | x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}, t_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{n+k}) \quad (7.95)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{F_X(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}; t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+k})}{F_X(x_{n+1}, \dots, x_{n+k}, t_{n+1}, \dots, t_{n+k})} \\ &= \frac{F_X(x_n; t_n) F_X(x_{n+1}; t_{n+1} | x_n; t_n)}{F_X(x_{n+1}; t_{n+1})} \\ &= \frac{F_X(x_{n+1}, x_n; t_{n+1}, t_n)}{F_X(x_{n+1}; t_{n+1})} \\ &= F_X(x_n; t_n | x_{n+1}, t_{n+1}). \end{aligned} \quad (7.96)$$

2° 若马尔可夫过程的现在状态已知, 则将来状态与过去状态无关。

若  $t_n > t_r > t_s$ , 则在已知  $X$  (过程在  $t_n$  时刻的状态) 的条件下, 随机变量  $X_n$  和  $X_n$  是独立的, 满足

$$F_X(x_n, x_s; t_n, t_s | x_r, t_r) = F_X(x_n; t_n | x_r, t_r) F_X(x_s; t_s | x_r, t_r). \quad (7.97)$$

3° 若对每个  $t \leq t_1 < t_2$ ,  $X(t_2) - X(t_1)$  与  $X(t)$  皆是独立的, 则过程  $X(t)$  是马氏过程。

4° 由转移概率密度的无后效性, 可推出

$$E[X(t_n) | X(t_{n-1}), \dots, X(t_1)] = E[X(t_n) | X(t_{n-1})]. \quad (7.98)$$

## 7.2 独立增量过程

### 7.2.1 概述

#### 定义 7.22 独立增量过程

设有一个随机过程  $X(t), t \in T$ , 如果对任意的时刻  $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b$  过程的增量  $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1})$  是相互独立的随机变量, 则称  $X(t)$  为独立增量过程, 又称为可加过程。



若由独立增量过程  $X(t), t \in T$ , 构造一个新过程  $Y(t) = X(t) - X(t_0), t \in T$ , 则新过程  $Y(t)$  也是一个独立增量过程, 不仅与  $X(t)$  有相同的增量规律, 而且有  $P\{Y(t_0) = 0\} = 1$ 。所以, 对一般的独立增量过程  $X(t)$ , 均假设 (规定) 其初始概率分布为  $P\{X(t_0) = 0\} = 1$ 。

由定义可见, 独立增量过程有这样的特点: 在任一时间间隔上, 过程状态的改变并不影响将来任一时间间隔上过程状态的改变 (称为无后效性)。从而决定了独立增量过程是一种特殊的马尔可夫过程。因此, 同马尔可夫过程一样, 独立增量过程的有限维分布可由它的初始概率分布  $P\{X(t_0) < x_0\}$  及一切增量的概率分布唯一确定, 这里  $t$  为过程的初始时刻。

#### 2. 性质

1° 独立增量过程  $X(t)$  是一种特殊的马尔可夫过程。

证: 设增量为  $Y(t_i) = X(t_i) - X(t_{i-1}), i = 1, 2, \cdots, n_0$ 。由于  $X(t)$  为独立增量过程, 故增量  $Y(t_1) = X(t_1) - X(t_0), Y(t_2) = X(t_2) - X(t_1), \cdots, Y(t_n) = X(t_n) - X(t_{n-1})$  为相互独立的随机变量。因此有

$$f_Y(y_1, y_2, \cdots, y_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = f_1(y_1; t_1) f_2(y_2; t_2) \cdots f_n(y_n; t_n). \quad (7.99)$$

由  $X(t_0) = C$ , 并利用多维随机变量的函数变换

$$\begin{aligned} F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) &= f_Y(y_1, y_2, \cdots, y_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) \\ &= f_1(y_1; t_1) f_2(y_2; t_2) \cdots f_n(y_n; t_n) \\ &= f_1(x_1; t_1) f_2(x_2 - x_1; t_2, t_1) \cdots f_n(x_n - x_{n-1}; t_n, t_{n-1}). \end{aligned} \quad (7.100)$$

可得

$$\begin{aligned}
 & F_X(x_n; t_n | x_{n-1}, \dots, x_1; t_{n-1}, \dots, t_1) \\
 &= \frac{F_X(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n; t_1, \dots, t_{n-1}, t_n)}{F_X(x_1, \dots, x_{n-1}; t_1, \dots, t_{n-1})} \\
 &= \frac{f_1(x_1; t_1) \cdots f_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}; t_{n-1}, t_{n-2}) f_n(x_n - x_{n-1}; t_n, t_{n-1})}{f_1(x_1; t_1) \cdots f_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}; t_{n-1}, t_{n-2})} \quad (7.101) \\
 &= f_n(x_n - x_{n-1}; t_n, t_{n-1}) \\
 &= F_X(x_n; t_n | x_{n-1}; t_{n-1}).
 \end{aligned}$$

可见, 在  $x_1$  已知条件下,  $x_n$  与  $x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$  无关, 因此  $X(t)$  是马尔可夫过程。

2° 独立增量过程的有限维分布由它的初始概率分布和所有增量的概率分布唯一确定。

证: 设  $Y(t_0) = X(t_0)$ ,  $Y(t_i) = X(t_i) - X(t_{i-1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 增量  $Y(t_i)$  的概率分布函数可写成  $F_i(y_i, t_i)$ 。由

$$\begin{cases} X(t_0) = Y(t_0) \\ X(t_1) = X(t_1) - X(t_0) + X(t_0) = Y(t_1) + Y(t_0) \\ X(t_2) = X(t_2) - X(t_1) + X(t_1) - X(t_0) + X(t_0) = Y(t_2) + Y(t_1) + Y(t_0) \\ \vdots \\ X(t_n) = Y(t_n) + Y(t_{n-1}) + \cdots + Y(t_1) + Y(t_0) = \sum_{i=0}^n Y(t_i). \end{cases} \quad (7.102)$$

则独立增量过程  $X(t)$  的  $n+1$  维概率分布为

$$\begin{aligned}
 & F_X(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; t_0, t_1, t_2, \dots, t_n) \\
 &= P\{X(t_0) \leq x_0, X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \\
 &= P\left\{Y(t_0) \leq x_0, Y(t_1) + Y(t_0) \leq x_1, Y(t_2) + Y(t_1) + Y(t_0) \leq x_2, \dots, \sum_{i=0}^n Y(t_i) \leq x_n\right\}. \quad (7.103)
 \end{aligned}$$

利用条件概率表示  $n$  维分布的方法及马氏过程的无后效性, 有

$$\begin{aligned}
 & F_X(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; t_0, t_1, t_2, \dots, t_n) \\
 &= P\{Y(t_0) \leq x_0\} P\{Y(t_1) + Y(t_0) \leq x_1 | Y(t_0) = y_0\} \\
 & P\{Y(t_2) + Y(t_1) + Y(t_0) \leq x_2 | Y(t_0) + Y(t_1) = y_0 + y_1\} \cdots \\
 & P\{\sum_{i=0}^n Y(t_i) \leq x_n | \sum_{i=0}^{n-1} Y(t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i\} = P\{Y(t_0) \leq x_0\} P\{Y(t_1) \leq x_1 - y_0\} \\
 & P\{Y(t_2) \leq x_2 - (y_0 + y_1)\} \cdots P\{Y(t_n) \leq x_n - \sum_{i=0}^{n-1} y_i\} \\
 &= F_X(x_0; t_0) F_1(x_1 - y_0; t_1) F_2(x_2 - (y_0 + y_1); t_2) \cdots F_n\left(x_n - \sum_{i=0}^{n-1} y_i; t_n\right). \quad (7.104)
 \end{aligned}$$

因为

$$x_0 = y_0 = 0, \quad y_1 = x_1, \quad y_1 + y_2 = x_2, \quad \cdots, \quad \sum_{i=0}^{n-1} y_i = x_{n-1}. \quad (7.105)$$

且当  $X(t_0) = 0$  时,  $F_X(x_0; t_0) = P\{X(t_0) = 0\} = 1$ , 则

$$\begin{aligned} F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) &= F_X(x_1; t_1) F_2(x_2 - x_1; t_2) \cdots F_n(x_n - x_{n-1}; t_n) \\ &= F_X(x_1; t_1) \prod_{k=2}^n F_k(x_k - x_{k-1}; t_k). \end{aligned} \quad (7.106)$$

上式说明, 用一维增量概率分布  $F_k(x_k - x_{k-1}; t_k)$  ( $k = 2, \cdots, n$ ) 与  $X(t)$  的初始分布  $F_X(x_1; t_1)$  就可以充分描述一个独立增量过程的  $n$  维分布. 如果独立增量过程  $X(t)$  的增量  $X(t) - X(t-1)$  的分布只与时间差  $t_i, t_{i-1}$  有关, 而与  $t_i, t_{i-1}$  本身无关, 则称  $X(t)$  为齐次独立增量过程或平稳独立增量过程。

## 7.2.2 泊松过程

泊松过程和维纳过程是两个最重要的独立增量过程。在日常生活及工程技术领域中, 常常需要研究这样一类问题, 即研究在一定时间间隔  $[0, t)$  内某随机事件出现次数的统计规律。例如: 公用事业中, 某个固定的时间间隔  $[0, t)$  内, 光顾某商店的顾客数; 通过某交叉路口的电车、汽车数; 某船舶甲板“上浪”的次数; 某电话总机接到的呼唤次数; 电子技术中散粒噪声的冲激脉冲个数; 数字通讯中已编码信号的误码个数等。所有这些问题一般被称为计数过程。

### 1. 计数过程

#### 定义 7.23 计数过程

某事件  $A$  在  $[t_0, t)$  内出现的总次数所组成的过程  $\{X(t), t \geq t_0 \geq 0\}$  称为计数过程。♣

从定义出发, 任何一个计数过程  $X(t)$  应满足下列条件:

- 1°  $X(t)$  是一个正整数。
- 2° 如果有两个时刻  $t_1, t_2$ , 且  $t_2 > t_1$ , 则  $X(t_2) \geq X(t_1)$ 。
- 3° 当  $t_2 > t_1$  时,  $X(t_2) - X(t_1)$  代表在时间间隔  $t_2 - t_1$  内事件  $A$  出现的次数。

在计数过程中, 如果在不相交叠的时间间隔内事件  $A$  出现的次数是相互独立的, 则该计数过程为独立增量过程。即当  $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$  时,  $[t_1, t_2)$  和  $[t_3, t_4)$  为两个不相交叠的时间间隔,  $[t_1, t_2)$  内事件  $A$  出现的次数为  $X(t_2) - X(t_1)$ ,  $[t_3, t_4)$  内事件  $A$  出现的次数为  $X(t_4) - X(t_3)$ , 若  $X(t_2) - X(t_1)$  与  $X(t_4) - X(t_3)$  相互独立, 则  $X(t)$  为独立增量过程。



计数过程中, 如果在  $[t_1, t_1 + \tau)$  内事件  $A$  出现的次数仅与时间差  $\tau$  有关, 而与起始时间  $t_1$  无关, 也即  $[X(t_1 + \tau) - X(t_1)]$  仅与  $\tau$  有关而与  $t_1$  无关, 则称该过程为齐次或平稳增量计数过程。

## 2 泊松过程的一般概念

### 定义 7.24 泊松过程

若有一随机计数过程  $\{X(t), t \geq t_0 \geq 0\}$ , 满足下列假设:

1° 从  $t_0$  开始观察事件, 即  $X(t_0) = 0$ 。

2° 对任意时刻  $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ , 出现事件次数  $X(t_i) - X(t_{i-1})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 是相互独立的, 且出现次数  $X(t_i) - X(t_{i-1})$  仅与时间差  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$  有关, 而与起始时间  $t_1$  无关。

3° 对于充分小的  $\Delta t$ , 在  $[t, t + \Delta t)$  内出现事件一次的概率为

$$P_1(t, t + \Delta t) = P\{X(t, t + \Delta t) = 1\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t). \quad (7.107)$$


其中  $o(\Delta t)$  是在  $\Delta t \rightarrow 0$  时关于  $\Delta t$  的高阶无穷小量, 常数  $\lambda > 0$  称为过程  $X(t)$  的强度。

4° 对于充分小的  $\Delta t$ , 在  $[t, t + \Delta t)$  内出现事件两次及两次以上的概率为

$$\sum_{j=2}^{\infty} P_j(t, t + \Delta t) = \sum_{j=2}^{\infty} P\{X(t, t + \Delta t) = j\} = o(\Delta t). \quad (7.108)$$

此概率与出现一次的概率相比, 可以忽略不计。若将上述两式结合起来, 可得到在  $[t, t + \Delta t)$  内不出现事件 (或出现事件零次) 的概率为

$$\begin{aligned} P\{X(t, t + \Delta t) = 0\} &= P_0(t, t + \Delta t) = 1 - \left[ P_1(t, t + \Delta t) + \sum_{j=2}^{\infty} P_j(t, t + \Delta t) \right] \\ &= 1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t). \end{aligned} \quad (7.109)$$

则称此过程为泊松过程。泊松过程是计数过程, 也是重要的独立增量过程。 

泊松过程在任意两时刻  $t_1 < t_2$  所得随机变量的增量  $X(t_2) - X(t_1)$  服从期望为  $\lambda(t_2 - t_1)$  的泊松分布, 即对于  $k = 0, 1, 2, \dots$ , 有

$$P_k(t_1, t_2) = P\{X(t_2) - X(t_1) = k\} = \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}, \quad (7.110)$$

则该过程在  $[t_0, t)$  内出现事件  $k$  次的概率为

$$P_k(t_0, t) = P\{X(t_0, t) = k\} = \frac{[\lambda(t - t_0)]^k}{k!} e^{-\lambda(t - t_0)}, t > t_0, k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.111)$$

证: ① 首先确定  $P_0(t_0, t)$ , 对于充分小的  $\Delta t > 0$ , 由于

$$\begin{aligned} X(t_0, t + \Delta t) &= X(t + \Delta t) - X(t_0) \\ &= X(t + \Delta t) - X(t) + X(t) - X(t_0) \\ &= X(t, t + \Delta t) + X(t_0, t). \end{aligned} \quad (7.112)$$

故

$$\begin{aligned} P_0(t_0, t + \Delta t) &= P\{X(t_0, t + \Delta t) = 0\} \\ &= P\{[X(t_0, t) + X(t, t + \Delta t)] = 0\} \\ &= P\{X(t_0, t) = 0, X(t, t + \Delta t) = 0\}. \end{aligned} \quad (7.113)$$

由泊松过程定义可知, 满足条件 2, 则

$$\begin{aligned} P_0(t_0, t + \Delta t) &= P\{X(t_0, t) = 0\} P\{X(t, t + \Delta t) = 0\} \\ &= P_0(t_0, t) P_0(t, t + \Delta t) \\ &= P_0(t_0, t) [1 - \lambda\Delta t - o(\Delta t)]. \end{aligned} \quad (7.114)$$

即  $P_0(t_0, t + \Delta t) - P_0(t_0, t) = P_0(t_0, t) [-\lambda\Delta t - o(\Delta t)]$ . 两边除以  $\Delta t$ , 并令  $\Delta t \rightarrow 0$ , 便可得到  $P_0(t_0, t)$  满足的微分方程

$$\frac{dP_0(t_0, t)}{dt} = -\lambda P_0(t_0, t). \quad (7.115)$$

因为  $P_0(t_0, t_0) = P\{X(t_0, t_0) = 0\} = 1$ , 将它看作初始条件, 即可由上式解得

$$P_0(t_0, t) = e^{-\lambda(t - t_0)}, \quad t > t_0. \quad (7.116)$$

② 类似地, 可以确定  $P_1(t_0, t)$ . 先考虑

$$\begin{aligned} P_1(t_0, t + \Delta t) &= P\{X(t_0, t + \Delta t) = 1\} \\ &= P\{X(t_0, t) + X(t, t + \Delta t) = 1\} \\ &= P\{X(t_0, t) = 1, X(t, t + \Delta t) = 0\} + P\{X(t_0, t) = 0, X(t, t + \Delta t) = 1\} \\ &= P_1(t_0, t) P_0(t, t + \Delta t) + P_0(t_0, t) P_1(t, t + \Delta t). \end{aligned} \quad (7.117)$$

再将  $P_0(t_0, t)$  代入上式, 经适当整理后, 两边除以  $\Delta t$ , 并令  $\Delta t \rightarrow 0$ , 即可得  $P_1(t_0, t)$  的微分方程

$$\frac{dP_1(t_0, t)}{dt} = -\lambda P_1(t_0, t) + \lambda e^{-\lambda(t-t_0)} \quad (7.118)$$

因为  $P_1(t_0, t_0) = P\{X(t_0, t_0) = 1\} = 0$ , 将它作为初始条件, 可求得上式解为

$$P_1(t_0, t) = \lambda(t - t_0)e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t > t_0 \quad (7.119)$$

③ 重复上述方法, 可求得在  $[t_0, t)$  内事件出现  $k$  次的概率

$$P_k(t_0, t) = P\{X(t_0, t) = k\} = \frac{[\lambda(t - t_0)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t > t_0, k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.120)$$

当取  $t_0 = 0$  时, 有

$$P_k(0, t) = P\{X(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad t > 0, k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.121)$$

此式表明: 对于固定的  $t$ , 与泊松过程相应的随机变量  $X(t)$  服从参数为  $\lambda t$  的泊松分布。而  $A$  就是在  $[0, t)$  内出现事件次数的数学期望。换言之, 强度  $\lambda$  就是单位时间内出现事件次数的数学期望。

由于泊松过程是一个计数过程, 泊松过程  $X(t)$  的每一个样本函数  $x(t)$  都呈阶梯形 (图 7-3), 它在每个随机点处产生单位为 “1” 的阶跃。



图 7-2 质点  $M$  的随机游动

对于给定的  $t$ ,  $X(t)$  等于在时间间隔  $[0, t)$  内的随机点数。所以泊松过程

$$X(t) = \sum_i U(t - t_i), \quad (7.122)$$

其中  $t_i$  是随机变量。

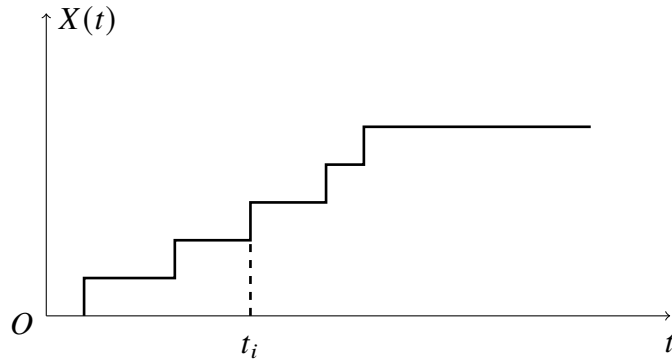


图 7-3 泊松过程的样本函数示意图

### 3. 泊松过程的统计特性

#### (1) 数学期望

若将时间  $t$  固定, 则随机过程  $X(t)$  就是一个泊松分布的随机变量, 因此

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k P\{X(t) = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= \lambda t e^{-\lambda t} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \right] = \lambda t e^{-\lambda t} [e^{\lambda t}] = \lambda t. \end{aligned} \quad (7.123)$$

同理引用式 (7.110), 随机过程的增量  $X(t_2) - X(t_1)$  的期望为

$$E[X(t_2) - X(t_1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k P\{X(t_1, t_2) = k\} = \lambda(t_2 - t_1). \quad (7.124)$$

#### (2) 均方值与方差

类似于上述方法, 过程  $X(t)$  的均方值

$$\begin{aligned} E[X^2(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P\{X^2(t) = k^2\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= e^{-\lambda t} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{(\lambda t)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right] \\ &= e^{-\lambda t} \left[ (\lambda t)^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \right] \\ &= e^{-\lambda t} [(\lambda t)^2 e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}] \\ &= \lambda^2 t^2 + \lambda t. \end{aligned} \quad (7.125)$$

同理, 过程  $X(t)$  的方差、过程增量  $X(t_2) - X(t_1)$  的均方值和方差为

$$D[x(t)] = E[X(t)^2] - E^2[X(t)] = \lambda^2 t^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t \quad (7.126)$$

$$E\{[X(t_2) - X(t_1)]^2\} = \lambda^2(t_2 - t_1)^2 + \lambda(t_2 - t_1) \quad (7.127)$$

$$D[X(t_2) - X(t_1)] = \lambda(t_2 - t_1). \quad (7.128)$$

### 3) 自相关函数

由定义  $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$  可知

① 若  $t_2 > t_1 > 0$ , 如图 7-4 所示, 由于时间间隔  $t_1$  和  $t_2$  相互重叠, 则增量  $X(t_1)$  和  $X(t_2)$  相互不独立, 但时间间隔  $t_2 - t_1$  与  $t_1$  不重叠。因此将增量  $X(t_2)$  变换成两个独立的增量之和。

$$X(t_2) = [X(t_2) - X(t_1)] + X(t_1). \quad (7.129)$$

因此有

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E\{X(t_1)[X(t_2) - X(t_1) + X(t_1)]\} \\ &= E[X(t_1)]E[X(t_2) - X(t_1)] + E[X^2(t_1)] \\ &= \lambda_1 \lambda(t_2 - t_1) + \lambda^2 t_1^2 + \lambda_1 \\ &= \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_1, \quad t_2 > t_1 > 0 \end{aligned} \quad (7.130)$$

② 若  $t_1 > t_2 > 0$ , 同样有

$$R_X(t_1, t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_2, \quad t_1 > t_2 > 0. \quad (7.131)$$

综合上述两式, 则有

$$R_X(t_1, t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min(t_1, t_2). \quad (7.132)$$

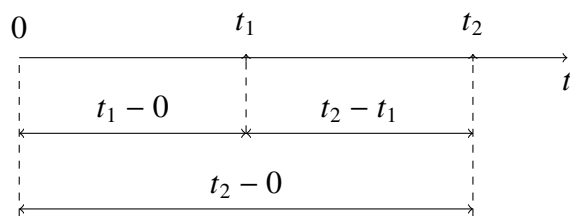


图 7-4 时间关系图

泊松过程的应用实例—电报信号在随机点密度  $A$  为常数的均匀情况下, 来研究下述泊松过程的两个应用实例。

半随机电报信号  $X(t)$  是只取  $+1$  或  $-1$  的随机过程,  $X(t)$  的一条样本函数曲线如图 7-5 所示。

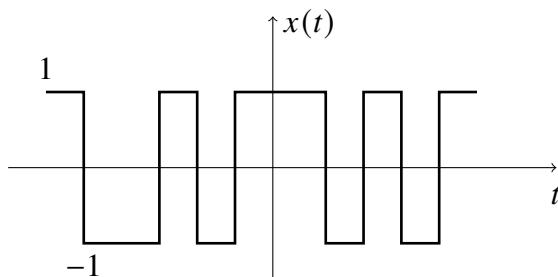


图 7-5 半随机电报信号的样本函数

若在时间间隔  $(0, t)$  内, 信号时刻点的总数为偶数 (或 0), 则过程  $X(t) = +1$ ; 若为奇数, 则  $X(t) = -1$ .

#### 1) 半随机电报信号的概率分布

设在时间间隔  $(0, t)$  内有  $k$  个变号点的概率  $P_k(0, t)$  为

$$P_k(0, t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \quad (7.133)$$

因事件序列在  $(0, t)$  内出现  $k$  个点 ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) 是互不相容的, 故在  $(0, t)$  内有偶数个变号点的概率为

$$\begin{aligned} P\{X(t) = 1\} &= P_0(0, t) + P_2(0, t) + \dots = e^{-\lambda t} \left[ 1 + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \dots \right] \\ &= e^{-\lambda t} \text{ch}(\lambda t). \end{aligned} \quad (7.134)$$

类似地, 在  $(0, t)$  内有奇数个变号点的概率为

$$\begin{aligned} P\{X(t) = -1\} &= P_1(0, t) + P_3(0, t) + \dots \\ &= e^{-\lambda t} \left[ \lambda t + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots \right] = e^{-\lambda t} \text{sh}(\lambda t). \end{aligned} \quad (7.135)$$

即

$$\begin{cases} P\{X(t) = 1\} &= e^{-\lambda t} \cosh(\lambda t) \\ P\{X(t) = -1\} &= e^{-\lambda t} \sinh(\lambda t) \end{cases}. \quad (7.136)$$

#### 2) 半随机电报信号的均值

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= 1 \cdot P\{X(t) = 1\} + (-1) \cdot P\{X(t) = -1\} \\ &= e^{-\lambda} [\text{ch}(\lambda t) - \text{sh}(\lambda t)] = e^{-2\lambda}. \end{aligned} \quad (7.137)$$

其中

$$P\{X(t_1), X(t_2)\} = P\{X(t_2)|X(t_1)\}P\{X(t_1)\}. \quad (7.138)$$

3) 半随机电报信号的自相关函数

$$R_X(t_1, t_2) = \sum_{\substack{X(t_1)=\pm 1 \\ X(t_2)=\pm 1}} X(t_1)X(t_2)P\{X(t_1), X(t_2)\}. \quad (7.139)$$

其中

$$P\{X(t_1), X(t_2)\} = P\{X(t_2)|X(t_1)\}P\{X(t_1)\}. \quad (7.140)$$

① 假设  $t_2 - t_1 = \tau > 0$  且  $X(t_1) = 1$ , 若  $X(t_2) = 1$ , 则在间隔  $(t_2, t_1)$  内有偶数个变号点。故

$$P\{X(t_2) = 1|X(t_1) = 1\} = P\{X(t) = 1\} = e^{-\lambda t} \cosh(\lambda t). \quad (7.141)$$

又由于  $P\{X(t_1) = 1\} = e^{-\lambda t_1} \cosh(\lambda t_1)$ , 就可得到

$$P\{X(t_1) = 1, X(t_2) = 1\} = e^{-\lambda \tau} \cosh(\lambda \tau) e^{-\lambda t_1} \cosh(\lambda t_1). \quad (7.142)$$

类似地可得

$$\begin{cases} P\{X(t_2) = -1|X(t_1) = -1\} = P\{X(\tau) = 1\} = e^{-\lambda \tau} \cosh(\lambda \tau) \\ P\{X(t_2) = -1|X(t_1) = 1\} = P\{X(\tau) = -1\} = e^{-\lambda \tau} \sinh(\lambda \tau) \\ P\{X(t_2) = 1|X(t_1) = -1\} = P\{X(\tau) = -1\} = e^{-\lambda \tau} \sinh(\lambda \tau) \end{cases} \quad (7.143)$$

因此有

$$\begin{cases} P\{X(t_1) = -1, X(t_2) = -1\} = e^{-\lambda \tau} \cosh(\lambda \tau) e^{-\lambda t_1} \sinh(\lambda t_1) \\ P\{X(t_1) = 1, X(t_2) = -1\} = e^{-\lambda \tau} \sinh(\lambda \tau) e^{-\lambda t_1} \cosh(\lambda t_1) \\ P\{X(t_1) = -1, X(t_2) = 1\} = e^{-\lambda \tau} \sinh(\lambda \tau) e^{-\lambda t_1} \sinh(\lambda t_1) \end{cases} \quad (7.144)$$

$Y(t)$  的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \sum_{\substack{X(t_1)=\pm 1 \\ X(t_2)=\pm 1}} X(t_1)X(t_2)P\{X(t_1), X(t_2)\} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot P\{X(t_1) = 1, X(t_2) = 1\} \\ &\quad + (-1) \cdot (-1) \cdot P\{X(t_1) = -1, X(t_2) = -1\} \\ &\quad + 1 \cdot (-1) \cdot P\{X(t_1) = 1, X(t_2) = -1\} \\ &\quad + (-1) \cdot 1 \cdot P\{X(t_1) = -1, X(t_2) = 1\} = e^{-2\lambda \tau} \end{aligned} \quad (7.145)$$

其中  $t_2 - t_1 = \tau > 0$ .

② 设  $t_1 - t_2 = \tau > 0$ , 同理可推出

$$R_X(t_1, t_2) = e^{-2\lambda\tau}, \quad t_1 - t_2 = \tau > 0. \quad (7.146)$$

所以, 综合①②, 可得  $X(t)$  的自相关函数的最终表达式

$$R_X(t_1, t_2) = e^{-2\lambda|t_1 - t_2|} = e^{-2\lambda|\tau|} = R_X(\tau). \quad (7.147)$$

由上式可见, 半随机电报信号的自相关函数仅与时间差  $\tau$  有关, 而与时刻点  $t_1$  本身无关, 如图 7-6 所示。

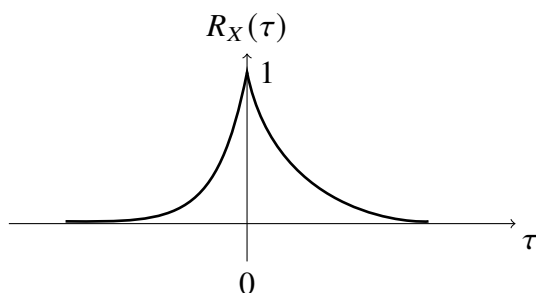


图 7-6 半随机电报信号的自相关函数

#### 4) 半随机电报信号的功率谱密度

对半随机电报信号的自相关函数求傅里叶变换, 即得此电报信号的功率谱密度

$$G_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\lambda|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{4\lambda}{4\lambda^2 + \omega^2}. \quad (7.148)$$

#### (2) 随机电报信号

给定一个随机变量  $A$ , 等概率取  $+1$  或  $-1$ , 即  $P\{A = 1\} = P\{A = -1\} = 0.5$ . 因此,  $E[A] = 0, E[A^2] = 1$ . 假定上述的半随机电报信号  $X(t)$  与随机变量  $A$  统计独立, 即对于每个  $t$ , 随机变量  $X(t)$  与随机变量  $A$  是统计独立的。现在, 定义一个新的随机过程

$$Y(t) = AX(t) \quad (7.149)$$

于是  $Y(t) = X(t)$  或  $Y(t) = -X(t)$ , 为了与  $X(t)$  相区别, 称  $Y(t)$  为随机电报信号。显然  $Y(t)$  的均值和自相关函数分别为

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= E[AX(t)] = E[A]E[X(t)] = 0 \\ R_Y(t_1, t_2) &= E[Y(t_1)Y(t_2)] = E[A^2X(t_1)X(t_2)] \\ &= E[A^2]E[X(t_1)X(t_2)] = e^{-2\lambda|t_2 - t_1|} \\ &= e^{-2\lambda|\tau|} = R_Y(\tau) = R_X(\tau). \end{aligned} \quad (7.150)$$



由上式注意到, 随机过程  $X(t)$  和  $Y(t)$  具有渐进 ( $t \rightarrow \infty$ ) 相等的统计特性.

### 5. 泊松冲激序列

泊松过程  $X(t)$  对时间  $t$  求导, 便可得到与时间轴上的随机点  $t$  相对应的冲激序列  $Z(t)$ , 称为泊松冲激序列。

$$Z(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i U(t - t_i) = \sum_i \delta(t - t_i), \quad (7.151)$$

其中  $t$  为随机变量。由于泊松过程  $X(t)$  的样本函数是阶梯函数, 则泊松冲激序列的样本函数是一串冲激序列, 如图 7-7 所示。

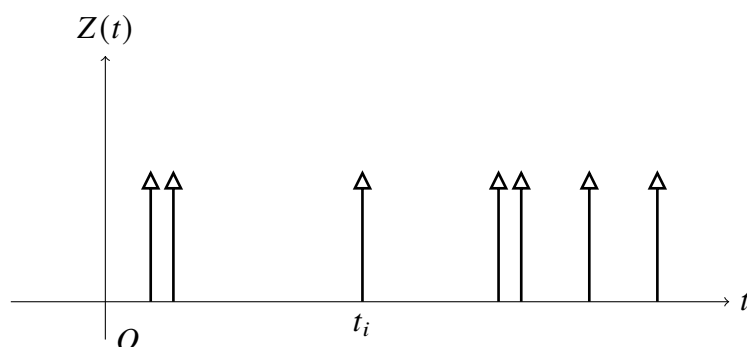


图 7-7 泊松冲激序列的一个样本函数

泊松过程  $X(t)$  及其统计特性均已在前面讨论过, 可得泊松冲激序列  $Z(t)$  的统计特性:

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= E \left[ \frac{dX(t)}{dt} \right] = \frac{dE[X(t)]}{dt} = \frac{d(\lambda t)}{dt} = \lambda. \\ R_z(t_1, t_2) &= E[Z(t_1)Z(t_2)] = E \left[ \frac{dX(t_1)}{dt_1} \cdot \frac{dX(t_2)}{dt_2} \right] \\ &= R_{X'X'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_1} \left[ \frac{\partial R_X(t_1, t_2)}{\partial t_2} \right] \\ &= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t_1} (\lambda^2 t_1), & t_1 < t_2 \\ \frac{\partial}{\partial t_1} (\lambda^2 t_1 + \lambda), & t_1 > t_2 \end{cases} \quad (7.152) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_1} [\lambda^2 t_1 + \lambda U(t_1 - t_2)] \\ &= \lambda^2 + \lambda \delta(t_1 - t_2) \\ &= \lambda^2 + \lambda \delta(\tau) \end{aligned}$$

由此可见, 泊松冲激序列是平稳过程。

## 6. 过滤的泊松过程与散粒噪声

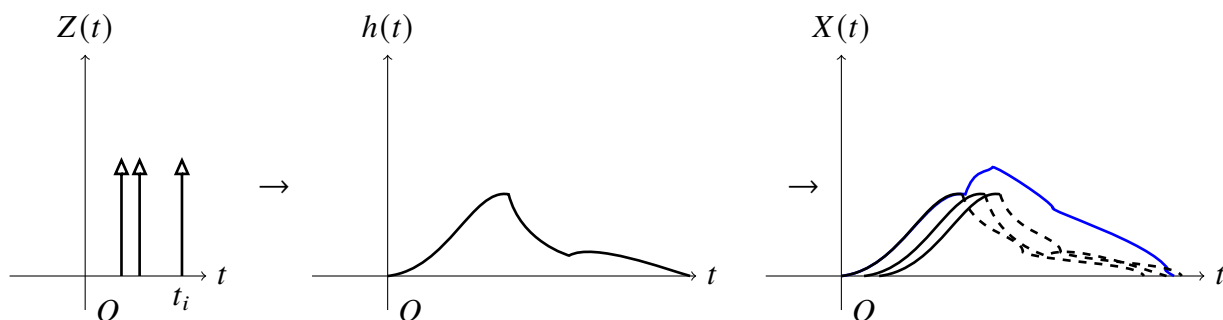


图 7-8 泊松冲激脉冲序列经过线性时不变滤波器

**定义 7.25 过滤的泊松过程**

设有一泊松冲激脉冲序列  $Z(t) = \sum \delta(t - t_i)$  经过线性时不变滤波器, 如图 7-8 所示。则此滤波器输出的随机过程

$$X(t) = Z(t) * h(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} h(t - t_i), \quad 0 \leq t < \infty. \quad (7.153)$$

称之为过滤的泊松过程。式中  $h(t)$  为滤波器的冲激响应, 第  $i$  个冲激脉冲出现的时间  $t$  是个随机变量,  $N(t)$  为在  $[0, T)$  内输入到滤波器的冲激脉冲的个数, 它服从泊松分布, 即

$$P\{N(T) = k\} = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.154)$$

式中  $\lambda$  为单位时间内的平均脉冲数。

分析可知, 若在  $[0, T)$  内输入到滤波器的冲激脉冲数  $N(T)$  为  $k$ , 则该  $k$  个冲激脉冲出现的时间  $t$  均为独立同分布的随机变量, 且此随机变量均匀分布在  $[0, T)$  内, 即

$$f(t_i | N(T) = k) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \leq t_i < T \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (7.155)$$

温度限制的电子一极管中, 由散粒 (或散弹) 效应引起的散粒 (或散弹) 噪声电流是过滤的泊松过程  $n$ 。晶体管中有三种类型的噪声:

① 热噪声。

② 散粒噪声。

③ 闪烁噪声 (又称  $1/f$  噪声, 是一种低频噪声)。其中散粒噪声的机理与电子管的相类似, 也是过滤的泊松过程。

换言之, 散粒噪声  $X(t)$  可以表示成

$$X(t) = Z(t) * h(t) = \sum h(t - t_i), \quad (7.156)$$

即把它看成是泊松冲激 (脉冲) 序列输入到线性时不变系统的输出。

6 下面来讨论散粒噪声  $X(t)$  的统计特性

① 对于均匀的情况 ( $\lambda$  为常数), 可以证明  $X(t)$  是平稳的。

已知泊松冲激脉冲序列  $Z(t) = \sum \delta(t - t_i)$  的数学期望和自相关函数为

$$\begin{cases} E[Z(t)] = \lambda \\ R_z(\tau) = \lambda^2 + \lambda\delta(\tau) \end{cases} \quad (7.157)$$

从而可得泊松冲激序列的功率谱密度

$$G_Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_Z(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2\pi\lambda^2\delta(\omega) + \lambda. \quad (7.158)$$

根据时频域分析, 可得散粒噪声  $X(t)$  的数学期望为

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E[Z(t) * h(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} Z(t - \eta) h(\eta) d\eta\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[Z(t - \eta)] h(\eta) d\eta \\ &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) d\eta = \lambda H(0). \end{aligned} \quad (7.159)$$

散粒噪声  $X(t)$  的功率谱密度为

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= |H(\omega)|^2 G_Z(\omega) = |H(\omega)|^2 [2\pi\lambda^2\delta(\omega) + \lambda] \\ &= 2\pi\lambda^2 H^2(0)\delta(\omega) + \lambda |H(\omega)|^2. \end{aligned} \quad (7.160)$$

从而得到其自相关函数为

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [2\pi\lambda^2 H^2(0)\delta(\omega) + \lambda |H(\omega)|^2] e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \lambda^2 H^2(0) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \lambda^2 H^2(0) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau + \beta) h(\beta) d\beta. \end{aligned} \quad (7.161)$$

由上式可见,  $X(t)$  确实是平稳随机过程。均匀的泊松冲激序列  $Z(t)$  和散粒噪声  $N(t)$  的自相关函数及功率谱密度如图 7-9 所示。

则散粒噪声  $X(t)$  的自协方差函数和方差为

$$C_X(\tau) = R_X(\tau) - \{E[X(t)]\}^2 = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau + \beta)h(\beta)d\beta \quad (7.162)$$

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= C_X(0) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\beta)d\beta \\ &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)dt. \end{aligned} \quad (7.163)$$

② 对于非均匀的情况, 即  $\lambda(t)$  不是数  $m_X$  的均值与自协方差函数分别为

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E[Z(t) * h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} E[Z(\eta)]h(t - \eta)d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\eta)h(t - \eta)d\eta. \end{aligned} \quad (7.164)$$

其中  $E[Z(t)] = \lambda(t)$ .

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= R_X(t_1, t_2) - E[X(t_1)]E[X(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\eta)h(t_1 - \eta)h(t_2 - \eta)d\eta. \end{aligned} \quad (7.165)$$

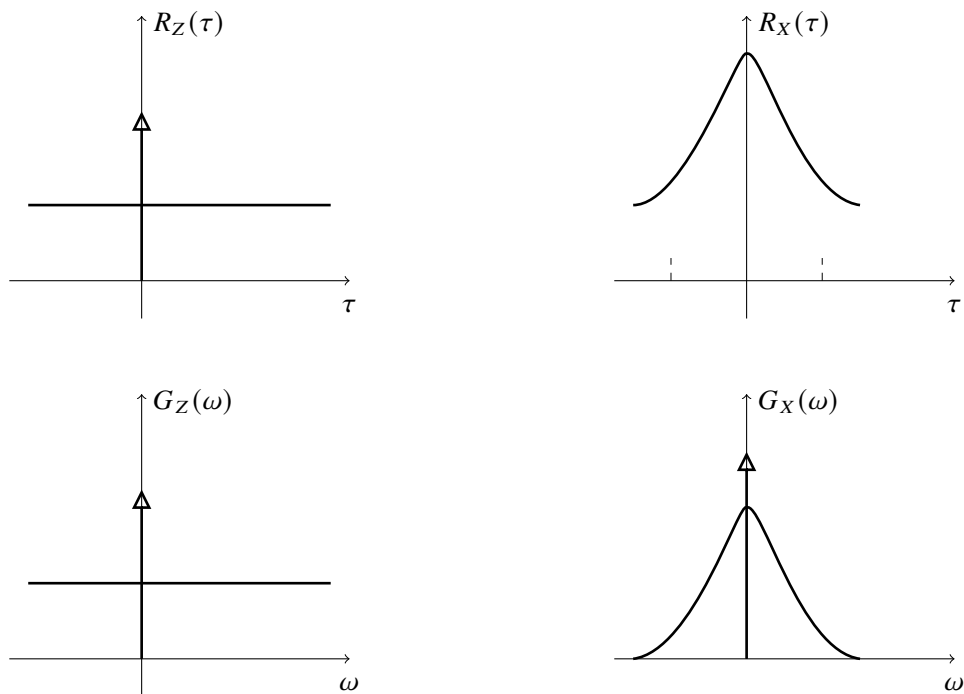


图 7-9 泊松冲激序列  $Z(t)$  和散粒噪声  $X(t)$  的自相关函数及功率谱密度

③ 如果每个输入冲激脉冲的强度 (面积) 不等于 1, 而是  $q$  (例如电子电荷), 则均匀散粒噪声变为

$$X(t) = \sum_i q h(t - t_i), \quad (7.166)$$

其均值与方差分别为

$$\begin{cases} E[X(t)] = \lambda q \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = \lambda q H(0) \\ \sigma_X^2 = \lambda q^2 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt \end{cases}. \quad (7.167)$$

反之, 若  $h(t)$  已知, 则由测量  $X(t)$  的均值与方差, 就能求出  $\lambda$  和  $q$ 。

**例 7.26** 图 7.9 所示电路中, 电流源  $i(t)$  由冲激脉冲序列所组成, 即  $i(t) = \sum_i q \delta(t - t_i)$ 。电路两端产生的电压为

$$V(t) = \sum_i q h(t - t_i) \quad (7.168)$$

且  $h(t) = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} U(t)$ .

式中  $U(t)$  为时域阶跃函数。试求电压  $V(t)$  的均值与方差, 以及  $\lambda$  和  $q$ 。

解: 由已知的冲激响应  $h(t)$ , 可方便地求得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt &= \int_0^{\infty} \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} dt = R \\ \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt &= \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 dt = \frac{R}{2C}. \end{aligned} \quad (7.169)$$

可求得  $V(t)$  的均值与方差分别为

$$\begin{cases} m_V = E[V(t)] = \lambda q R \\ \sigma_V^2 = \lambda q^2 \frac{R}{2C} \end{cases}. \quad (7.170)$$

联立后解, 可推导出  $\lambda$  和  $q$  为

$$\lambda = \frac{m_V^2}{2RC\sigma_V^2}, \quad q = \frac{2C\sigma_V^2}{m_V}. \quad (7.171)$$

此例是一个关于限温二极管阳极电压的数学模型, 其中  $i(t)$  是电子电流, 而电子的渡越时间被忽略了。

### 7.2.3 维纳过程

随机游动的极限形式来研究, 游动过程中的所有轨迹几乎都是连续的。电阻中电子的热运动就具有维纳过程的性质, 可用维纳过程来描述。实际中我们常把白噪声作为热噪声的理想化模型, 而维纳过程可看作是白噪声通过积分器的输出。此外, 维纳过程是一个非平稳的高斯过程。

**定义 7.27 维纳过程的定义**

若独立增量过程  $X(t)$ , 其增量的概率分布服从高斯分布, 即

$$P\{X(t_2) - X(t_1) < \lambda\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(t_2 - t_1)}} \int_{-\infty}^{\lambda} \exp\left(\frac{-u^2}{2\alpha(t_2 - t_1)}\right) du, \quad 0 < t_1 < t_2 \quad (7.172)$$

则称  $X(t)$  为维纳过程。



可以证明, 维纳过程是几乎处处连续的, 但是在任一固定时刻  $t$  上以概率 1 不可微分。

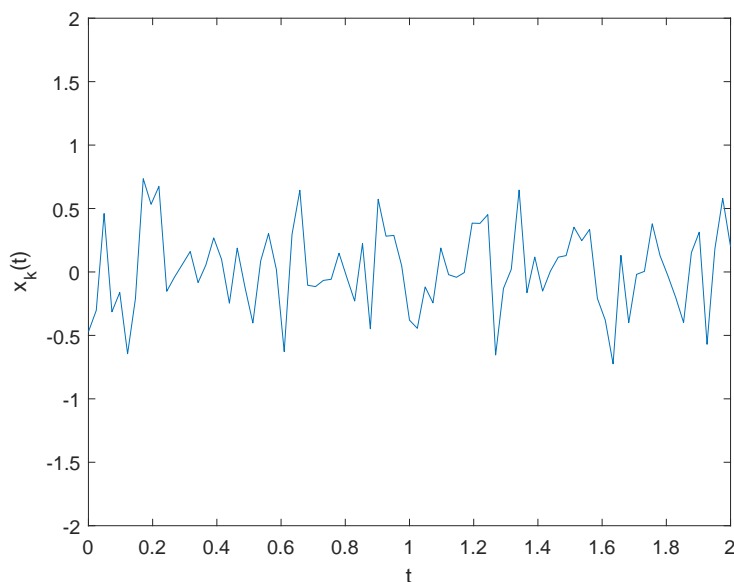


图 7-10 维纳过程的一个样本函数

**(2) 定义****定义 7.28 维纳过程**

对于所有样本函数几乎处处连续的齐次独立增量过程 (或齐次独立增量过程  $X(t, \zeta)$ , 几乎对所有在时间轴上连续), 称为维纳过程。



按照定义给出的条件可以证明: 过程的增量是服从高斯分布的。这里仅对此作简要

说明。令  $\Delta = (t_2 - t_1) / n, t_2 > t_1$ 。由于

$$\begin{aligned} X(t_2) - X(t_1) &= [X(t_2) - X(t_2 - \Delta)] + [X(t_2 - \Delta) - X(t_2 - 2\Delta)] \\ &\quad + \cdots + [X(t_2 - (n-1)\Delta) - X(t_1)] \\ &= \sum_{i=1}^n Y_i. \end{aligned} \quad (7.173)$$

由上述条件, 当  $n \rightarrow \infty$  亦即  $\Delta \rightarrow 0$  时,

$$Y_i = X[s - (i-1)\Delta] - X(s - i\Delta) \rightarrow 0 \quad (7.174)$$

故由中心极限定理可得  $X(t_2) - X(t_1)$  趋于高斯分布。

可见, 两种定义是完全一致的。图 7-10 给出了维纳过程一个样本函数的示意图。

## 2. 维纳过程的统计特性

### 1) 维纳过程的数学期望和相关函数

由式 (7.172), 显见

$$E[X(t)] = 0 \quad (7.175)$$

又因为是独立增量过程, 所以有  $X(t_0) = 0$ , 则

$$P\{X(t_1) - X(t_0) < \lambda\} = P\{X(t_1) < \lambda\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha t_1}} \int_{-\infty}^{\lambda} \exp\left(\frac{-u^2}{2\alpha t_1}\right) du. \quad (7.176)$$

故有

$$D[X(t_1)] = E[X^2(t_1)] = \alpha t_1. \quad (7.177)$$

① 当  $t_1 = t_2 = t$  时, 有  $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[X^2(t)] = \alpha t$ .

② 当  $t_1 > t_2$ , 并将  $X(t_1)$  写成  $X(t_1) = X(t_2) + X(t_1) - X(t_2)$ , 则

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\ &= E[(X(t_2) + X(t_1) - X(t_2))X(t_2)] \\ &= E[X^2(t_2)] + E[(X(t_1) - X(t_2))(X(t_2) - X(t_0))] \\ &= E[X^2(t_2)] = \alpha t_2. \end{aligned} \quad (7.178)$$

③ 同理, 当  $t_1$  可得

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \alpha t_1. \quad (7.179)$$

综合 ①-③, 可得维纳过程的自相关函数为

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \alpha \min(t_1, t_2). \quad (7.180)$$

## (2) 维纳过程与高斯白噪声

虽然维纳过程在几乎处处 (almost everywhere) 意义下是连续的, 但由上述自相关函数的表达式可知,  $R_X(t_1, t_2)$  在  $t_1 = t_2 = t$  点间断, 所以对于  $t_1 - t_2$ , 该过程的子  $R_X(t_1, t_2)/m_1 a_2$  不存在, 因此维纳过程几乎处处不可微。这样在通常意义下它的导数是不存在的。不过, 若在形式上研究其导数及性质, 则维纳过程  $X(t)$  的导数也是零均值的高斯过程令  $N(t) = X'(t)$  为  $X(t)$  形式上的导数, 则  $N(t)$  的自相关函数为

$$R_N(t_1, t_2) = E[X'(t_1)X'(t_2)] = \alpha \delta(t_1 - t_2). \quad (7.181)$$

可见形式导数  $N(t) = X'(t) (t \geq 0)$  是高斯白噪声。于是维纳过程  $X(t)$  可以写成白噪声 (具有零均值、均匀谱的平稳高斯过程) 的积分, 即

$$X(t) = \int_0^t N(\tau) d\tau, \quad (7.182)$$

式中的  $N(t)$  有  $E[N(t)] = 0, G_N(\omega) = \alpha$ 。换言之, 维纳过程可看成高斯白噪声通过积分器的输出。

## (3) 维纳过程的概率分布

由上述的讨论结果可以很容易得到维纳过程  $X(t)$  的一维和  $n$  维概率密度为

$$F_X(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha t}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha t}}. \quad (7.183)$$

$$\begin{aligned} F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= f(x_1; t_1) f(x_2 - x_1; t_2, t_1) \cdots f(x_n - x_{n-1}; t_n, t_{n-1}) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\alpha} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{(t_i - t_{i-1})}\right]}{\sqrt{2\pi\alpha(t_i - t_{i-1})}}. \end{aligned} \quad (7.184)$$

最后, 将维纳过程的性质归纳为以下几点

- 1°  $X(t_0) = 0$ , 且  $X(t)$  是实过程。
- 2°  $E[X(t)] = 0$ 。
- 3° 维纳过程是独立增量过程。
- 4° 维纳过程满足齐次性。换言之,  $X(t_2) - X(t_1)$  的分布只与  $(t_2 - t_1)$  有关, 而与  $t_1$  或  $t_2$  本身无关。
- 5°  $X(t_2) - X(t_1)$  的方差与  $t_2 - t_1$  成正比。

$$\begin{aligned} D[X(t_2) - X(t_1)] &= E[(X(t_2) - X(t_1))^2] \\ &= E[X^2(t_2)] + E[X^2(t_1)] - 2E[X(t_2)X(t_1)] \\ &= \alpha t_2 + \alpha t_1 - 2\alpha t_1 = \alpha(t_2 - t_1), \quad t_2 > t_1. \end{aligned} \quad (7.185)$$



6° 维纳过程是非平稳高斯过程

### 3. 扩散方程

可以证明, 维纳过程  $X(t)$  满足下列关系式

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t_2} = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}; \\ \frac{\partial f}{\partial t_1} + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0. \end{cases} \quad (7.186)$$

它们被称作扩散方程。式中  $f = f(x_2, t_2 | x_1; t_1) = f(x_2 | x(t_1) = x_1) (t_2 > t_1)$  是随机变量  $X(t_2)$  在  $X(t_1) = x_1$  条件下的条件概率密度。

证: 因为  $X(t)$  具有零均值并为高斯分布, 有

$$E[X(t_2) | X(t_1) = x_1] = \alpha x_1 = \frac{E[X(t_2)X(t_1)]}{E[X^2(t_1)]} x_1 = x_1, \quad t_2 > t_1. \quad (7.187)$$

即在  $X(t_1) = x_1$  条件下,  $X(t_2)$  的条件方差等于  $\alpha(t_2 - t_1)$ , 故有

$$f(x_2; t_2 | x_1; t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(t_2 - t_1)}} \exp \left[ -\frac{(x_2 - x_1)^2}{2\alpha(t_2 - t_1)} \right]. \quad (7.188)$$

对上式作求导运算, 即可得扩散方程实际上, 扩散方程是柯尔莫哥洛夫方程 (前进方程和后退方程) 的特例。柯尔莫哥洛夫方程也称为福克尔-普朗克 (Fokker Planck) 方程。这是因为这组方程在特殊的场合用不十分严格的方法, 首先为福克尔和普朗克所获得; 而在一般的场合, 并用严格的方法, 则为柯尔莫哥洛夫所得到。

设扩散过程  $X(t)$  的条件概率密度  $f = F_X(x_2; t_2 | x_1; t_1) (t_2 > t_1)$ , 则柯尔莫哥洛夫 (前进和后退) 方程可表示成

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} + a(x_1, t_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{b(x_1, t_1)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} [a(x_2, t_2) f] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2^2} [b(x_2, t_2) f] = 0. \end{cases} \quad (7.189)$$

式中,  $a(x, t)$  为  $t$  时刻自  $x$  出发的质点的瞬时平均速度 (或者说是过程  $X(t)$  变化的平均速度)。而  $b(x, t)$  则与质点瞬时平均动能成比例, 换言之,  $b(x, t)$  是在很小的  $\Delta t$  内, 质点位移的平方平均偏差与  $\Delta t$  的比值。

在实际问题中, 如果想由实验所得数据资料来直接确定条件分布函数, 是极为困难的。但是, 可以根据其物理意义, 通过比较容易找到的  $a(x, t)$  及  $b(x, t)$  来解柯尔莫哥洛夫微分方程, 从而得到条件分布函数。

当随机过程  $X(t)$  为维纳过程, 且  $a(x, t) = 0, b(x, t) = \alpha$  时, 把这些条件代入柯尔莫哥洛夫方程, 则可得到扩散方程, 从而解出条件分布函数。也就是说, 维纳过程是一种特殊的扩散过程。

**例 7.29** 研究液体中微粒的随机扩散运动。

设液体的质量是均匀的, 由于微粒的运动是由许多分子碰撞所产生的许多小随机位移的和, 因而可认为: 自时刻  $s$  至的位移  $X_t - X_s$ , 是许多几乎独立的小位移的和, 故由中心极限定理可假设  $X_t - X_s$  服从高斯分布。此外由液体的均匀性, 还可设  $E[X_t - X_s] = 0$ , 而方差只依赖于时间区间  $t_s$ , 即  $D[X_t - X_s] = \alpha(t - s)$ , 其中  $\alpha$  依赖于液体本身的扩散常数 (不同的液体一般有不同的  $\alpha$ )。显然这种情况下的微粒扩散运动—布朗运动, 是一个维纳过程, 故此维纳过程有时也直接称之为布朗运动。

**例 7.30** 热噪声是由导线中电子的布朗运动引起的随机现象。

电子通过单位导体截面的瞬时电荷量  $q(t)$  是典型的维纳过程, 它服从高斯分布的原因在于它是由许多独立的电子随机运动叠加产生的。每个电子电荷量与通过截面的总电荷量相比为极小量, 故过程可看成是连续的。

## 7.3 独立随机过程

这一节扼要介绍独立随机过程。正如本章开始时所指出的, 独立随机过程是种很特殊的随机过程。这类随机过程的特点是: 过程在任一时刻的状态和任何其他时刻状态之间互不影响。

下面对它给出较严格的定义。

**定义 7.31 独立随机过程**

如果随机过程  $X(t) (t \in T)$  在时间  $t$  的任意  $n$  个时刻  $t_1, t_2, \dots, t_n$  所得到的  $n$  个随机变量  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$  互为统计独立; 或者说, 过程  $X(t)$  的  $n$  维分布函数可表示为

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n F_X(x_i; t_i). \quad (7.190)$$

则称  $X(t)$  为独立随机过程。

由式 (7-174) 可知, 独立随机过程的一维分布函数包含了该过程的全部统计信, 按照时间参数  $T$  的连续还是离散, 独立随机过程可分成两类:

① 当参数集  $T$  是一个可列集时, 独立随机过程就是独立离散时间随机过程—独立随机 (变量) 序列。例如: 在时刻  $F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n F_X(x_i; t_i)$  独立地重复抛掷硬币, 正面对应数为 1, 反面对应数为 0,  $X_n$  表示  $t = n$  时抛掷的结果, 这样,  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  就构成了一个独立随机序列。

② 当参数集  $T$  是一个不可列集时, 独立随机过程就是独立连续时间随机过程。此过

程的样本函数极不规则, 而且可能处处不连续。

**例 7.32** 设独立随机过程  $X(t)$  的一维分布函数为

$$F_X(x; t) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du; \quad (7.191)$$

即过程  $X(t)$  的一维分布函数是与  $t$  无关的标准正态分布。因此,  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$  的分布函数皆为

$$\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{4}} du. \quad (7.192)$$

进而可得  $X(t + \Delta t) - X(t)$  的分布函数为

$$\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{u^2}{4}} du. \quad (7.193)$$

于是, 对所有的  $\Delta t$ , 当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 则有

$$P\{|X(t + \Delta t) - X(t)| < \varepsilon\} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{u^2}{4}} du \rightarrow 0. \quad (7.194)$$

上式表明, 在  $\Delta t \rightarrow 0$  时,  $X(t + \Delta t)$  与  $X(t)$  的差小于任意正数  $\varepsilon$  的概率趋于 0。也就是说, 过程  $X(t)$  的样本函数几乎处处不连续。

实际上, 此种连续参数的独立随机过程从物理观点来看是不存在的。因为当  $t_1$  与  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ) 充分接近时, 我们完全有理由断言, 状态  $X(t_2)$  将依赖于  $X(t_1)$  的统计信息。所以, 连续参数的独立随机过程被认为是一种理想化的随机过程。由于它在数学处理上较为简便, 故常用来分析某些实际问题。

独立随机过程的重要应用就是高斯白噪声, 常用它来模拟电子技术中的各种随机噪声, 例如, 电阻热噪声就是一种正态分布的白噪声。

如果设  $N(t)$  为高斯白噪声, 由于此白噪声的相关系数为

$$\rho_N(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases} \quad (7.195)$$

可见, 白噪声在任意两个相邻时刻  $t$  和  $t + \tau$  (不管此二时刻多么邻近) 的状态  $N(t)$  和  $N(t + \tau)$  都是不相关的; 又因该白噪声服从高斯分布, 故不相关与统计独立是等价的, 即随机变量  $N(t)$  和  $N(t + \tau)$  总是统计独立的。所以, 高斯白噪声可以认为是大量相互独立的无限窄脉冲的随机组合, 实际的随机噪声与理想白噪声的波形如图 7-11 所示。

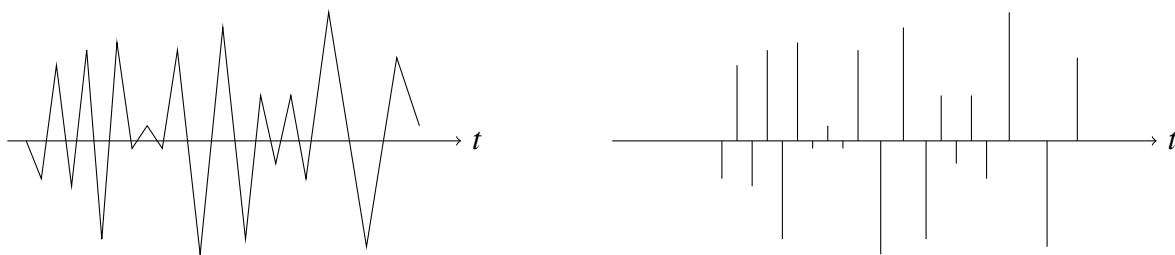


图 7-11 实际的随机噪声与理想白噪声的波形, a) 实际的随机噪声 (b) 理想白噪声

## 7.4 习题

练习 7.1 已知独立随机序列  $\{X(n)\}$  的各个随机变量分别具有概率密度  $F_X(x_1), \dots, F_X(x_n)$ 。

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 \\ Y_2 + CY_1 = X_2 \\ \vdots \\ Y_n + CY_{n-1} = X_n \\ \vdots \end{cases}, \quad n \geq 2, C \text{ 为常数} \quad (7.196)$$

令构成一个新序列  $\{Y(n)\}$ 。试证序列  $\{Y(n)\}$  为马尔可夫序列。

练习 7.2 写出下列集合的马尔可夫链的转移概率密度矩阵

①  $I_1 = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  ( $n \geq 2$ ) 是有限个正整数集合, 若



$$p_{ij} = \begin{cases} p_{00} = p_m = 1 \\ p, & j = i + 1, \quad q = 1 - p \\ q, & j = i - 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (7.197)$$


②  $I_2 = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  是全体整数的集合, 若

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & j = i + 1 \\ q, & j = i - 1, \quad q = 1 - p \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (7.198)$$

练习 7.3 带有一个吸收壁的随机游动, 仍考虑质点  $M$  的随机游动, 其基本规律基本上同例 7.10 所述, 但其状态空间  $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ , 而且当  $M$  一旦到达  $X_n = 0$  以后,  $X_{n+2}$  也就停留在零这个状态上, 这样的状态称为吸收态。又因“0”为状态空间的个端点 (壁), 故



称此过程为带有一个吸收壁的随机游动。试确定此过程是否为齐次马尔可夫链, 并写出它的一步转移概率。


 **练习 7.4**  带有一个反射壁的随机游动随机游动取状态空间  $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ , 这里和上题有所不同, 0 这个状态不再是吸收态了, 一旦质点  $M$  进入 0 状态后, 下步它以概率  $p$  向右移一格, 以概率  $q$  停在 0 状态这后一种情况可作如下解释: 设想在 “-1/2 处有一反射壁, 每次质点态。正是基于上述解释, 我们把这类过程称为带有一个反射壁的随机游动。试确定此过程是否为齐次马尔可夫链, 并写出它的一步转移概率。

 **练习 7.5** 设有三个状态  $\{0, 1, 2\}$  的马尔可夫链, 其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, q = 1 - p \quad (7.199)$$


① 试求  $P(2)$ , 并证明  $P(2) = P(4)$ ; (2) 求  $P(n), n \geq 1$ 。

 **练习 7.6**  天气预报问题。设明日是否有雨仅与今天的天气 (是否有雨) 有关, 而与过去的天气无关。已知今日有雨而明日也有雨的概率为 0.7, 今日无雨而明日有雨的概率为 0.4。把 “有雨” 称作 “1” 状态天气, 而把 “无雨” 称为 “2” 状态天气, 则本题属于一个两状态的马尔可夫链。试求: ① 它的一步至四步转移概率矩阵。② 今日有雨而后日 (第三日) 无雨, 今日有雨而第四日也有雨, 今日无雨而第五日也无雨的概率各是多少?

 **练习 7.7** 设有  $\{0, 1\}$  两个状态的马尔可夫链, 其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}, \quad (7.200)$$


试求以下转移概率:  $f_{00}(1), f_{00}(2), f_{00}(3), f_{01}(1), f_{01}(2), f_{01}(3)$ 。

 **练习 7.8** 已知某 (齐次) 马尔可夫链的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}. \quad (7.201)$$



试证:  $n \rightarrow \infty$  时, 有

$$P(n) = P^n \rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}. \quad (7.202)$$

 **练习 7.9** 设有  $\{0, 1, 2\}$  三个状态的马尔可夫链, 其一步转移概率矩阵为



$$P = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 \\ q_3 & 0 & p_3 \end{bmatrix}, q_i = 1 - p_i, i = 1, 2, 3 \quad (7.203)$$

试求:  $f_{00}(1), f_{00}(2), f_{00}(3), f_{01}(1), f_{01}(2), f_{01}(3)$ 。

 **练习 7.10**  已知 (齐次) 马尔可夫链的一步转移概率矩阵为


$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{bmatrix} \quad (7.204)$$

- ① 问此链共有几个状态? 是否遍历?
- ② 求其一步转移概率矩阵。
- ③  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = p_j$  是否存在? 并求之。


 **练习 7.11**  已知马尔可夫链的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.205)$$

- ① 试问此链共有几个状态?
- ② 是否具有遍历性?
- ③ 求出极限分布  $\{p_j\}$  的各个概率。


 **练习 7.12** 已知有  $\{0, 1, 2\}$  三个状态的马尔可夫链, 它的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}. \quad (7.206)$$

 **练习 7.13** 已知有五个状态  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  的马尔可夫链, 它的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.207)$$

同此链何时具有遍历性? ② 求出极限分布  $\{p_j\}$  的各个概率。

 **练习 7.14** 对于随机过程  $X(t)$ , 若对每个长  $t \leq t_1 < t_2$ ,  $X(t_2) - X(t_1)$  与  $X(t)$  都是统计独立的, 试证  $X(t)$  为马尔可夫过程。

练习 7.15 对于马尔可夫过程  $X(t)$ , 证明  $E[X(t_n) | X(t_{n-1}), X(t_{n-2}), \dots, X(t_1)] = E[X(t_n) | X(t_{n-1})]$ .

练习 7.16 证明: 独立增量过程  $X(t)$  是一个特殊的马尔可夫过程。(提示: 只要证明独立增量过程  $X(t)$  具有无后效性即可)。

练习 7.17 随机电报信号  $X(t)$ , 其样本函数如图 7-12 所示, 满足下述三个条件

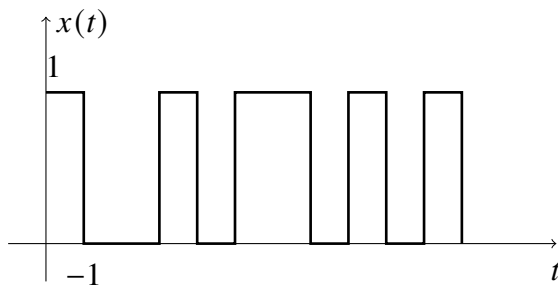


图 7-12 随机电报信号的一个样本函数

① 在任何时刻  $t$ ,  $X(t)$  只能等概率地取 0 或 1 两个状态, 即  $P\{X(t) = 0\} = P\{X(t) = 1\} = 1/2$ 。

② 每个状态的持续时间是随机的, 若在间隔  $(0, t)$  内波形变化的次数  $K$  服从泊松分布, 即

$$P\{K = k\} = p_k(0, t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (7.208)$$

式中的  $\lambda$  为单位时间内波形的平均变化次数。

③  $X(t)$  取何值与随机变量  $K$  互为统计独立。试求此随机电报信号  $X(t)$  的均值、自相关函数、自协方差函数和功率谱密度。

练习 7.18 已知泊松冲激序列  $Z(t) = \sum_i \delta(t - t_i)$ , 这里  $t_i$  是在时间轴上具有均匀密度  $\Lambda$  的随机点。过程  $Z(t)$  通过一个具有冲激响应  $h(t) = e^{-at}U(t)$  的线性系统, 在系统的输出端得到散粒噪声  $X(t)$ 。试求此散粒噪声的均值、方差和功率谱密度。

练习 7.19 证明: 维纳过程的一维特征函数为


$$Q_W(u; t) = e^{-atu^2/2}. \quad (7.209)$$

练习 7.20 广义维纳过程。已知一个具有参数  $a$  的维纳过程  $W(t)$ , 以及两个连续函数  $m(t), v(t)$ , 其中  $v(t)$  为非减函数, 构成一新的随机过程。

$$Y(t) = m(t) + W[v(t)] \quad (7.210)$$

证明:  $Y(t)$  的一维特征函数为

$$Q_Y(u; t) = \exp \left[ j u m(t) - \frac{1}{2} \alpha v(t) u^2 \right]. \quad (7.211)$$

 **练习 7.21** 已知一维纳过程  $W(t)$  的自相关函数为  $R_w(t_1, t_2) = \alpha t_2, t_1 > t_2$ . 现构成新的随机过程  $Y(t) = W^2(t)$ , 求当  $t_1 > t_2$  时,  $Y(t)$  的自相关函数  $R_Y(t_1, t_2)$ 。



## 7.5 参考文献

- 奥本海姆 AV, 谢弗 RW. 1982, 数字信号处理. 董士嘉等译 · 北京: 科学出版社
- 丁玉美, 阔永红, 高新波. 2002 . 数字信号处理一时域离散随机信号处理. 西安: 西安电子科技大学出版社
- 林茂庸, 柯有安 1980 雷达信号理论, 北京: 国防工业出版社
- 陆大金. 1986. 随机过程及其应用. 北京: 清华大学出版社
- 陆光华等. 2000 机信号处理, 西安: 西安电子科技大学出版社
- 王永等. 200 随机信号分析基础. 北京: 电子工业出版社
- 吴析耀. 1984. 随机过程北京: 国防工业出版社
- 场福生. 1990 随机信号分析 · 北京: 清华大学出版社
- 伊曼纽尔 · 帕尔逊, 1987 随机过程. 邓水录, 杨振明译. 北京: 高等教育出版社
- 张树京, 张思东 200 统计信号处理 · 北京: 机械工业出版社
- 中山大学数学力学系. 1981. 概率论及数理统计 (上下册) 北京: 人民教育出版
- 朱华等, 1990. 随机信号分析 · 北京: 北京理工大学出版社
- akis DC, Ingle V K, Kogon S M. 2003. 统计与自适应信号处理. 周正等译, 北京: 电子工业出版社
- Papoulis A, 1984. Probability Random Variables and Stochastic Processes. 2nd ed. New York: McGraw-Hill
- Peebles P Z, Jr. 1980. Probability Random Variables and Random Signal Principles. New York: MGGraw-Hi