

## A gdyby tak rzucić to wszystko...

### *Szymon Tur*

... i wyjechać w Bieszczady? Student-Podróżnik, zmęczony laboratoriami z Algorytmów i Struktur Danych, Systemów Operacyjnych i Projektowania Obiektowego, wyjeżdża, celem odpoczynku, pochodzić po górskich szlakach. Góry nie oferują jednak tylko kilometrów do przejścia i punktów GOT<sup>1</sup> do zdobycia. Oprócz tego (a być może nawet przede wszystkim) można podziwiać piękno natury, od rzadkich roślin po zapierające dech w piersiach widoki.

Z takim podejściem Student-Podróżnik planuje swoją wycieczkę. Wziął mapę i zaznaczył na niej wszystkie ciekawe miejsca przy szlakach turystycznych, przy których mógłby spędzić więcej czasu, i dla każdego takiego miejsca określił czas w minutach, który tam spędziłby. Dodatkowo, każdy szlak posiada wyznaczony czas przejścia w minutach. Czas przejścia szlaku może różnić się w zależności od kierunku, mogą istnieć też szlaki jednokierunkowe.

Nasz bohater, pamiętając dobrze materiał ze studiów, natychmiast zamodelował mapę z zaznaczonymi miejscami jako ważony graf skierowany  $G$ , w którym ciekawe miejsca oraz skrzyżowania szlaków są wierzchołkami, a połączenia punktów szlakami są krawędziami. Waga krawędzi oznacza czas potrzebny do przejścia fragmentu szlaku, a waga wierzchołka oznacza czas odpoczynku Studenta-Podróżnika w danym miejscu.

Niestety, Student-Podróżnik nie jest w stanie zaplanować trasy samodzielnie (jest przecież bardzo zmęczony). Prosi więc Ciebie, dobrego znajomego z grupy laboratoryjnej, o pomoc.

### Etap I (1,5 p.)

Student-Podróżnik chciałby nieco pochodzić po górach, jednak nie lubi nakładać drogi. Wybrał więc punkt startowy  $s$  swojej podróży i chce zaplanować trasę tak, aby czas przejścia do punktu końcowego (włączając oczekiwanie w wybranych przez Studenta punktach) był najkrótszy możliwy. Ponadto, chce wybrać punkt końcowy tak, żeby całkowity czas wycieczki był jak największy.

#### Dane

Na wejściu otrzymujemy graf skierowany  $G$  z wagami typu `int` oznaczającymi czas pokonania danej krawędzi w minutach, tablicę `waitTime` długości  $G.VertexCount$  oznaczającą czas oczekiwania Studenta-Podróżnika w danym wierzchołku, a także wierzchołek startowy  $s$ .

#### Szukane

Należy zwrócić wierzchołek końcowy  $t$ , długość podróży  $l$  z  $s$  to  $t$  oraz tablicę `path` odwiedzanych wierzchołków (łącznie z początkowym i końcowym). Długość podróży należy zwrócić bez uwzględnienia oczekiwania w początkowym i końcowym wierzchołku trasy.

Za zwrócenie samej długości ścieżki można otrzymać 1 punkt.

### Etap II (1 p.)

Okazało się, że niektóre szlaki przebiegają przez prywatne grunty. Mimo zaleceń PTTK, aby właściciele tych gruntów umożliwili przejście turystom, ci zaczęli pobierać opłaty za przejście określonych fragmentów. Student-Podróżnik (jak na studenta przystało) chciałby jak najbardziej zaoszczędzić na podróży. Wybrał tym razem zarówno punkt startowy  $s$ , jak i końcowy  $t$ , i chciałby znaleźć taką ścieżkę między tymi punktami, na której zapłaciłby najmniej pieniędzy, a wśród najtańszych ścieżek, znalazł ścieżkę o najmniejszym czasie przejścia (uwzględniając oczywiście postoje).

#### Dane

Na wejściu otrzymujemy graf skierowany  $G$  z wagami typu `int` oznaczającymi czas pokonania danej krawędzi w minutach, graf nieskierowany  $C$  z wagami typu `int` oznaczającymi koszt (w złotych) przejścia przez daną krawędź, tablicę `waitTime` długości  $G.VertexCount$  oznaczającą czas oczekiwania Studenta-Podróżnika w danym wierzchołku, a także wierzchołki: startowy  $s$  i końcowy  $t$ .

Grafy  $G$  i  $C$  posiadają te same wierzchołki i krawędzie.

#### Szukane

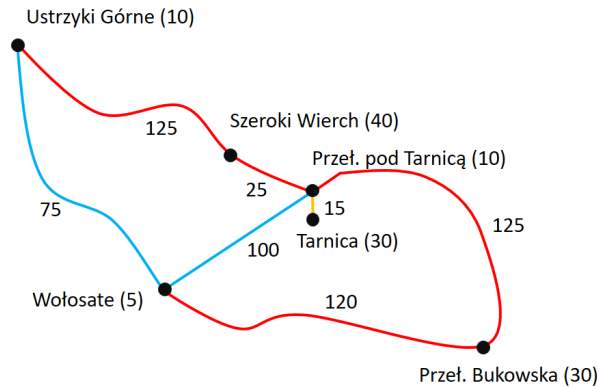
Należy zwrócić długość  $l$ , koszt  $c$  podróży z  $s$  to  $t$  oraz tablicę `path` odwiedzanych wierzchołków (łącznie z początkowym i końcowym). Długość podróży należy zwrócić bez uwzględnienia oczekiwania w początkowym i końcowym wierzchołku trasy.

Jeśli trasa z  $s$  do  $t$  nie istnieje, należy zwrócić `null`.

---

<sup>1</sup>Górska Odznaka Turystyczna PTTK.

## Przykład



Rysunek 1: Schemat przebiegu części szlaków w Bieszczadzkim Parku Narodowym. W nawiasach podano czas oczekiwania w danym punkcie. Dla uproszczenia przyjęto, że czas przejścia krawędzi jest w obie strony ten sam.

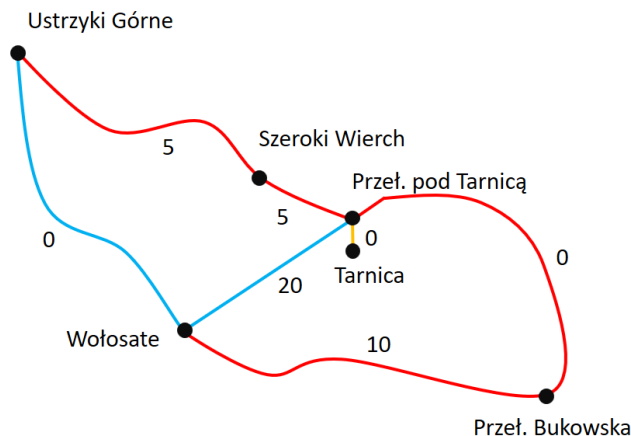
### Etap I

Student-Podróżnik w tym przykładzie rozpoczyna wycieczkę z Ustrzyk Górnych. Jak łatwo zauważyć, długości trasy z Ustrzyk Górnych do poszczególnych punktów (wliczając czas oczekiwania) wynoszą:

- Wołosate – 75 min,
- Szeroki Wierch – 125 min,
- Przełęcz pod Tarnicą –  $75 + 5 + 100 = 180$  min (zauważmy, że trasa przez Szeroki Wierch, z powodu długiego czasu oczekiwania na Szerokim Wierchu, jest dłuższa!),
- Tarnica –  $75 + 5 + 100 + 10 + 15 = 205$  min,
- Przełęcz Bukowska –  $75 + 5 + 120 = 200$  min.

Zatem, najdłużej (205 minut) Studentowi-Podróżnikowi zajmie dojście na Tarnicę. Zwracana trasa to: Ustrzyki Górne, Wołosate, Przełęcz pod Tarnicą, Tarnica.

### Etap II



Rysunek 2: Wprowadzone opłaty na szlakach w złotych.

Wycieczka ma się odbyć z Ustrzyk Górnych na Tarnicę. Biorąc pod uwagę sam czas przejścia, wybralibyśmy trasę taką, jak w Etapie I. Zauważmy jednak, że koszt przebycia takiej trasy to 20 zł, podczas gdy trasy zarówno przez Szeroki Wierch, jak i „na okrężkę” przez Przełęcz Bukowską są tańsze (każda z nich kosztuje 10 zł). Czas przejścia na Tarnicę przez Szeroki Wierch to  $125 + 40 + 25 + 10 + 15 = 215$  minut, a przez Wołosate i Przełęcz Bukowską to  $75 + 5 + 120 + 30 + 125 + 10 + 15 = 380$  minut. Należy więc zwrócić trasę Ustrzyki Górne, Szeroki Wierch, Przełęcz pod Tarnicą, Tarnica o koszcie 10 zł i czasie przejścia 215 minut.

## Uwagi i wskazówki

- Kluczem do rozwiązania zadania może być stworzenie odpowiedniego grafu pomocniczego.
- Graf  $G$  nie musi być spójny. Przy planowaniu trasy nie należy brać pod uwagę wierzchołków, do których nie da się dojść.
- Wymagana złożoność w obu etapach to  $O((m + n) \log n)$ , gdzie  $n$  i  $m$  to odpowiednio liczba wierzchołków i krawędzi grafu  $G$ .
- Jeśli istnieje więcej niż jedna poprawna odpowiedź, możesz wybrać dowolną z nich.
- Dopuszczamy także wycieczki jednowierzchołkowe, zaczynające się i kończące w tym samym wierzchołku.
- Wszystkie ścieżki w grafie wejściowym będą miały zarówno czas przejścia, jak i koszt mniejszy od `int.MaxValue`.