Méthode de Gauss et Gauss-Jordan

Méthode de Gauss

Résoudre un système d'équations algébriques linéaires par la méthode de Gauss, revient à manipuler les équations pour arriver à un système équivalent mais plus simple à résoudre.

Soit à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ y - 4z &= -3 \\ -2z &= -1 \end{aligned}$$

Bien que c'est un système à (trois équations - trois inconnus), on remarque bien que la dernière équation peut donner directement la valeur de *z*. Connaissant *z*, on peut tirer *y* de la deuxième équation. Enfin *z*, *y* et la première équation conduisent à *x*. Même si on avait affaire à un nombre plus inmoprtant d'équations-inconnus, la solution serait aussi simple du moment que le système est présenté de cette façon.

Passons maintenant au système suivant :

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ x + 3y - 2z &= -1 \\ 3x + 5y + 8z &= 8 \end{aligned}$$

Là, on est daccord que le problème ne se présente plus de la mêeme façon et qu'il faudra par conséquent penser à autre chose. Le plus simple c'est de trouver un moyen pour aranger ce système d'équations pour qu'il resemble à celui de l'exemple précedent.

Pour cela, on va utiliser trois opérations élémentaires qu'on peut appliquer à une équation sans que l'égalité ne soit altérée.

- On peut multiplier une ligne (les deux branches de l'équation) par un coefficient non nul
- On peut rajouter le meme nombre de part et d'autre du signe de l'égalité
- On peut additioner un multiple d'une ligne à une autre ligne

Reprenons l'exemple cité plus haut :

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 & L_1 \\ x + 3y - 2z &= -1 & L_2 \\ 3x + 5y + 8z &= 8 & L_3 \end{aligned}$$

On conserve la ligne L1, qui sert de pivot pour éliminer l'inconnue x des autres lignes; pour cela, on retire L1 à L2, et 3 fois L1 à L3. On obtient :

$$\begin{array}{rcll} x+2y+2z & = & 2 & L_1 \\ y-4z & = & -3 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y+2z & = & 2 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

On conserve alors la ligne L2 qui sert de pivot pour éliminer y de la troisième ligne; pour cela, on remplace la ligne L3 par L3+L2. On trouve :

$$\begin{array}{rcll} x+2y+2z & = & 2 & L_1 \\ y-4z & = & -3 & L_2 \\ -2z & = & -1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

Finalement on a eu ce qu'on voulait et le système est de nouveau facile à résoudre.

C'est la résolution par la méthode Gauss. On l'appelle aussi méthode du pivot ou méthode de triangularisation par allusion au triangle de zéro qu'on a construit.

Méthode de Gauss-Jordan

On peut faire encore plus simple, si on continu dans la même stratégie pour construire un autre triangle de zéro au-dessus de la diagonale. Mieux encore, si on s'arrange pour que la diagonale ne comporte que des 1. La solution sera immédiate.

Voyons comment ?

On va profiter de cette deuxième partie du cours pour travailler avec des matrices, c'est plus parlant. Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 5 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 10 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & = & -10 \end{array}$$

On établit la matrice correspondante et on applique la première étape, le pivot est 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

On ajoute un multiple de la première ligne aux deux autres lignes pour obtenir des zéros (respectivement -3 x L_1 et -2 x L_1 ; le nouveau pivot est ensuite 5 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & (5) & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$$

La deuxième ligne est divisée par 5 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & (1) & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$$

On ajoute cette deuxième ligne à la troisième et à la première, le nouveau pivot est -7 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & (-7) & -21 \end{array}\right)$$

On divise la 3^e ligne par -7 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & (1) & 3 \end{array}\right)$$

On utilise la 3^e ligne pour éliminer des coefficients dans la première et deuxième ligne. Nous sommes alors en présence de la matrice identité d'un côté et la valeur des variables de l'autre :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

La solution du système est ainsi :

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Cette deuxième variante s'appelle aussi méthode du pivot, méthode de Gauss-Jordan ou méthode de diagonalisation.

Pour terminer, il nous reste à parler d'une chose importante par rapport à la précision de la méthode. Comme vous l'avez constaté, à chaque étape on divise l'équation par un nombre qu'on a appelé pivot. Et comme vous le savez une division est toujours dangereuse si on l'a fait avec un nombre très petit. Ça peut fausser complétement le résultat. Par conséquent, il faut toujours choisir le plus grand coefficient de la ligne comme pivot. Pour cela on peut librement changer l'ordre des équations de façon à placer dans la case pivot le plus grand nombre en valeur absolue.

Autre chose, la méthode Gauss-Jordan peut aussi être utilisée pour trouver l'inverse d'une matrice. Pour cela, il suffit de poser la matrice en question côte à côte avec la matrice identité (A|I) et faire les transformations nécessaires pour arriver à (I|A-1).

La méthode est stable mais assez sensible aux erreurs de troncatures. Elle est aussi sensiblement plus lente que d'autres méthodes comme la LU décomposition (nous allons voir pourquoi ultérieurement).