考虑线性方程

$$\partial_t u + \Lambda \partial_x u = 0.$$

边界条件为

$$\begin{cases} x = L: \quad u_{r_1} = A_{r_1 s} u_s + h_{r_1} \\ \qquad\qquad u_{r_2} = A_{r_2 s} u_s + B_{r_2} h_{r_1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0: \quad u_{s_1} = A_{s_1 r} u_r + h_{s_1} \\ \qquad\qquad u_{s_2} = A_{s_2 r} u_r + B_{s_2} h_{s_1}. \end{cases}$$

其中

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_r & \\ & \lambda_s \end{pmatrix}.$$

$\lambda_r < 0, \lambda_s > 0$, 记

$$B = \begin{pmatrix} I_{r_1} & & & \\ B_{r_2} & 0 & & \\ & & I_{s_1} & \\ & & B_{s_2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} & & A_{r_1 s_1} & A_{r_1 s_2} \\ & & A_{r_2 s_1} & A_{r_2 s_2} \\ A_{s_1 r_1} & A_{s_1 r_2} & & \\ A_{s_2 r_1} & A_{s_2 r_2} & & \end{pmatrix}.$$

则

$$AB = \begin{pmatrix} & & A_{r_1 s_1} + A_{r_1 s_2} B_{s_2} & 0 \\ & & A_{r_2 s_1} + A_{r_2 s_2} B_{s_2} & 0 \\ A_{s_1 r_1} + A_{s_1 r_2} B_{r_2} & 0 & & \\ A_{s_2 r_1} + A_{s_2 r_2} B_{r_2} & 0 & & \end{pmatrix}.$$

由 $(B|AB)$ 满秩等价于

$$A_{r_2 s_1} + A_{r_2 s_2} B_{s_2} - B_{r_2} \left(A_{r_1 s_1} + A_{r_1 s_2} B_{s_2} \right)$$
$$A_{s_2 r_1} + A_{s_2 r_2} B_{s_2} - B_{s_2} \left(A_{s_1 r_1} + A_{s_1 r_2} B_{r_2} \right)$$

满秩。将上面两个矩阵记为 $\bar{A}_1, \bar{A}_2$, 不妨设 $\bar{A}_1$ 的前 r_2 列线性无关，对应 u 的分量记为 $u_{s_{r_2}}$,u_{s_1} 中的其他分量记为 $u_{\hat{s}_{r_2}}$ 类似地定义 $u_{r_{s_2}}$，$u_{\hat{r}_{s_2}}$. 记

$$\tilde{A}_{r_2 s} = A_{r_2 s} - B_{r_2} A_{r_1 s},$$
$$\tilde{A}_{s_2 r} = A_{s_2 r} - B_{s_2} A_{s_1 r}.$$

则在边界上有

$$\begin{cases} x=L: \quad u_{r_2}-B_{r_2}u_{r_1}=\tilde{A}_{r_2s_1}u_{s_1}+\tilde{A}_{r_2s_2}u_{s_2}, \\ x=0: \quad u_{s_2}-B_{s_2}u_{s_1}=\tilde{A}_{s_2r_1}u_{r_1}+\tilde{A}_{s_2r_2}u_{r_2}. \end{cases}$$

从而可以写为

$$\begin{cases} x=L: \quad u_{r_2}-B_{r_2}u_{r_1}=\bar{A}_1u_{s_1}+\tilde{A}_{r_2s_2}(u_{s_2}-B_{s_2}u_{s_1}), \\ x=0: \quad u_{s_2}-B_{s_2}u_{s_1}=\bar{A}_2u_{r_1}+\tilde{A}_{s_2r_2}(u_{r_2}-B_{r_2}u_{r_1}). \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x=L: \quad u_{s_{r_2}}=L_1\left(u_{\hat{s}_{r_2}},u_{r_2}-B_{r_2}u_{r_1},u_{s_2}-B_{s_2}u_{s_1}\right), \\ x=0: \quad u_{r_{s_2}}=L_2\left(u_{\hat{r}_{s_2}},u_{s_2}-B_{s_2}u_{s_1},u_{r_2}-B_{r_2}u_{r_1}\right). \end{cases}$$

0.1 解的构造

选取一组满足相容性条件的 $\tilde{h}_i(t), i=r_1,s_1$, 以 $\varphi(x)$ 为初值得到一个解 $\tilde{u}$. 考虑倒向问题

$$\partial_t u+\Lambda\partial_x u=0.$$

边界条件为

$$\begin{cases} x=L: \quad u_{s_{r_2}}=L_1\left(\tilde{u}_{\hat{s}_{r_2}},u_{r_2}-B_{r_2}u_{r_1},\tilde{u}_{s_2}-B_{s_2}\tilde{u}_{s_1}\right), \\ \qquad u_{\hat{s}_{r_2}}=\tilde{u}_{\hat{s}_{r_2}}, \\ \qquad u_{s_2}-B_{s_2}u_{s_1}=\tilde{u}_{s_2}-B_{s_2}\tilde{u}_{s_1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0: \quad u_{r_{s_2}}=L_2\left(\tilde{u}_{\hat{r}_{s_2}},u_{s_2}-B_{s_2}u_{s_1},\tilde{u}_{r_2}-B_{r_2}\tilde{u}_{r_1}\right), \\ \qquad u_{\hat{r}_{s_2}}=\tilde{u}_{\hat{r}_{s_2}}, \\ \qquad u_{r_2}-B_{r_2}u_{r_1}=\tilde{u}_{r_2}-B_{r_2}\tilde{u}_{r_1}. \end{cases}$$

可见边界条件能推出原边界条件。下面验证初值（暂时无法验证）。记倒向问题导出的初值为 $\bar{\varphi}$. 有

$$\bar{\varphi}_{r_2}(x_{r_2})-B_{r_2}\bar{\varphi}_{r_1}(x_{r_1})=u_{r_2}(t_1,0)-B_{r_2}u_{r_1}(t_1,0)=\tilde{u}_{r_2}(t_1,0)-B_{r_2}\tilde{u}_{r_1}(t_1,0)=\varphi_{r_2}(x_{r_2})-B_{r_2}\varphi_{r_1}(x_{r_1}).$$

$$u_{s_2}(t_1,0)-B_{s_2}u_{s_1}(t_1,0)=\bar{A}_2u_{r_1}+\tilde{A}_{s_2r_2}(u_{r_2}-B_{r_2}u_{r_1})(t_1,0)$$

其中

$$u_{r_1}(t_1,0)=\varphi_{r_1}(x_{r_1}).$$

$$(u_{r_2}-B_{r_2}u_{r_1})(t_1,0)=(\tilde{u}_{r_2}-B_{r_2}\tilde{u}_{r_1})(t_1,0)$$

$$u_{s_2}(t_1,0)-B_{s_2}u_{s_1}(t_1,0)\neq u_{s_2}(t_2,L)-B_{s_2}u_{s_1}(t_2,L)=\tilde{u}_{s_2}(t_2,L)-B_{s_2}\tilde{u}_{s_1}(t_2,L).$$

关键问题在于特征不同导致特征线与边界线交点不同，无法直接利用边界条件。可能需要调整边界条件的设计。