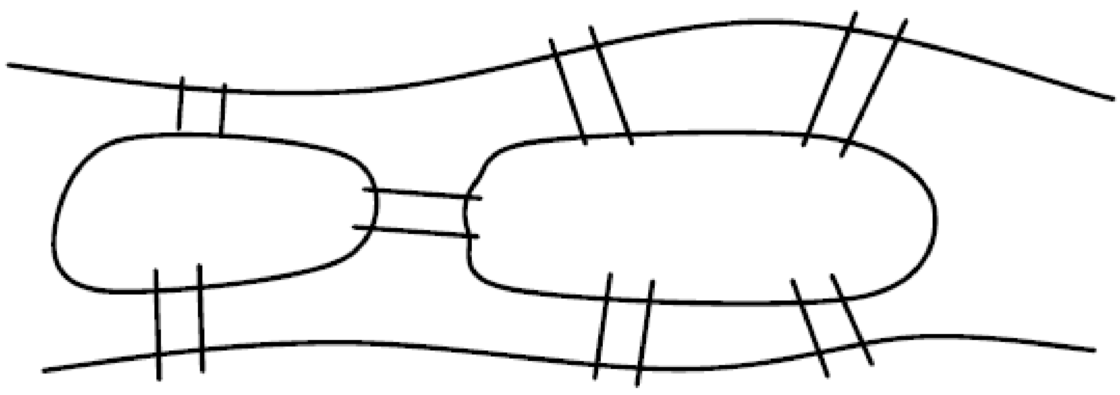
第四章 Euler 图

七桥问题：从任意地点出发，能否经过每座桥一次且仅一次回到出发点。



哥尼斯堡七桥

1741 年，欧拉经过对七桥问题的研究，发表了第一篇有关图论的论文，从而使七桥问题闻名于世。欧拉将四块陆地用平面上四个点来表示，两块陆地间有一座桥相连，就在两个相应的点间连一条边。于是七桥问题转化为一个图论问题：

图G 中从任一顶点出发，能否经过每条边恰好一次并回到出发点？

一、基本概念

Euler 闭迹 (closed trail, tour, circuit)：经过图G 的每条边恰好一次的闭迹。

Euler 迹（trail）：经过每条边恰好一次的迹。

Euler 图：有Euler 闭迹的图。

七桥问题可叙述为：图G 是否为Euler 图？

二、Euler 图的判定

定理 4.1.1 一个非空连通图是Euler 图当且仅当它没有奇度顶点。

（充分性归纳证明）

定理 4.1.2 一个连通图有Euler 迹当且仅当它最多有两个奇度顶点。

证明 必要性：设连通图G 有Euler 迹T，其起点和终点分别为u，v。若$uv \in E(G)$，则G有Euler闭迹，由定理4.1.1，G无奇度顶点。若$uv \notin G$，则$G + uv$有Euler 闭迹。由定理4.1.1，图$G + uv$无奇度顶点。故G 最多只可能有两个奇度顶点。

充分性：若G无奇度顶点，则由定理4.1.1，G 有Euler 闭迹，自然有Euler 迹。若G只有两个奇度顶点，设其为u,v，则给 G 添加一条新边$e=uv$ 所得的图G+e 的每个顶点都是偶度顶点。从而G+e 有Euler 闭迹。故G 有Euler 迹。证毕。

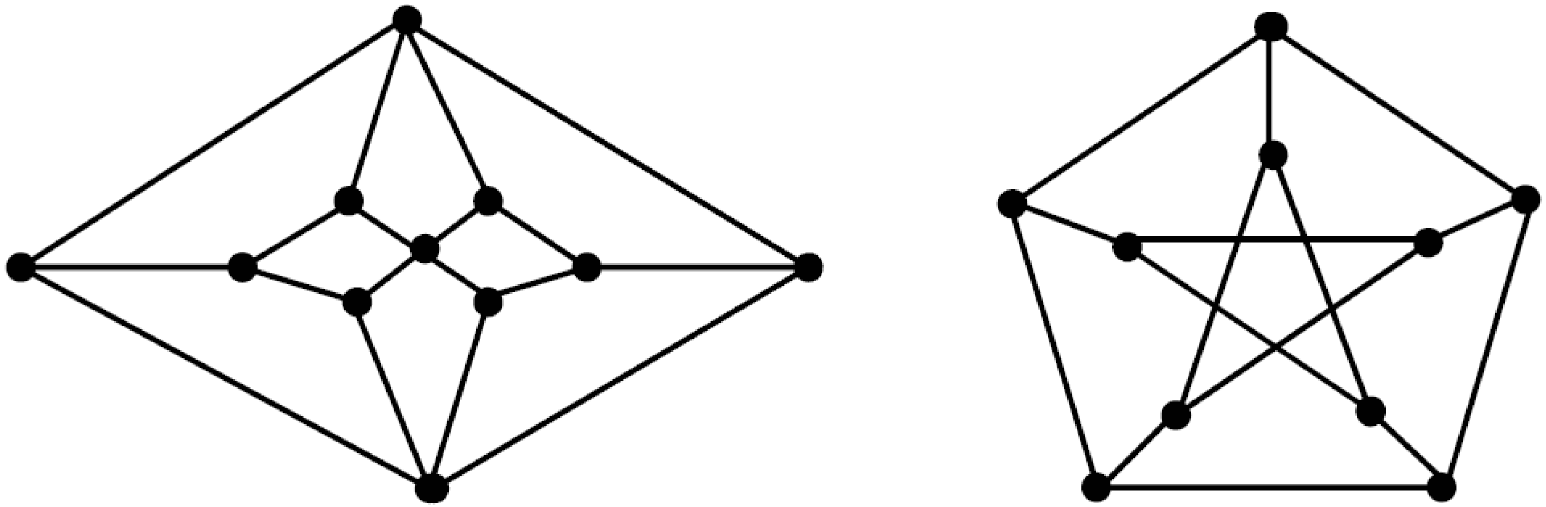
一笔画问题

一个图 G 如果有一条欧拉迹或欧拉闭迹，则可以沿着欧拉迹或欧拉闭迹连续而不重复地把G 的边画完。因此存在欧拉迹或欧拉闭迹的图通常称为可一笔画的图，或者说它可一笔画成。如果图G 可分解为两条迹或闭迹的并，则G 的边可用两笔不重复地画完。同样地，如果图G 可分解为k 条迹或闭迹的并，则G 可k 笔画成。

定理4.1.1 和定理4.1.2 表明，一个图G 可一笔画成的充分必要条件是G 至多有2 个奇度顶点。一般地，有下述推论。

推论 4.1.1 一个连通图可 k 笔画成当且仅当它最多有 2k 个奇度顶点。

判断 Herschel 图和Petersen 图分别能几笔画成。



Herschel 图　　　　Petersen 图

通过这两个图例考虑推论4.1.1的证明。

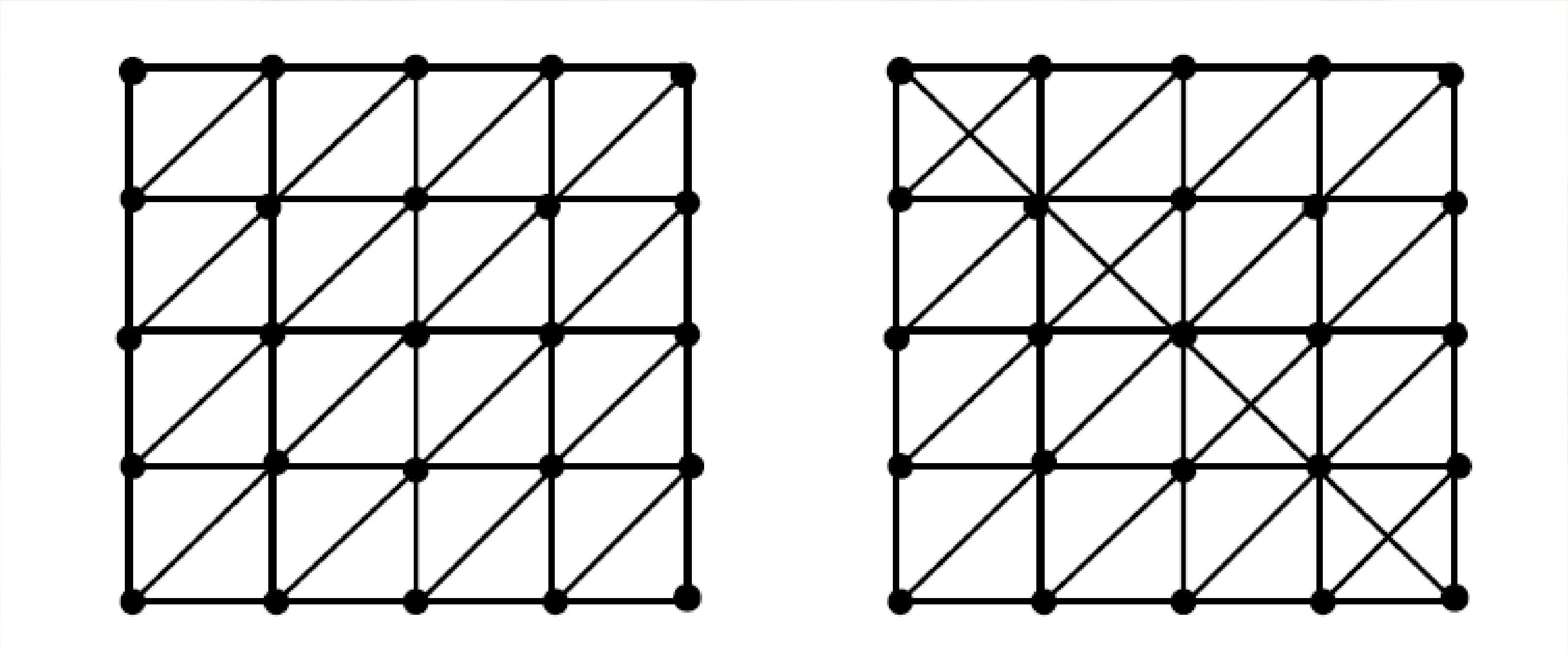
Toida 于1973 年发现，在一个欧拉图中，对任何一条边，经过它的圈的个数都是奇数。1984 年，Mckee 又证明这个条件是充分的。这样便形成了对欧拉图的另一种刻画。

定理 4.1.3 一个非平凡连通图G 是欧拉图的充分必要条件是G 的每条边含在奇数个圈上。

思考：

1. 是否存在偶数个顶点、奇数条边的欧拉图？若不存在，给出理由；若存在，举出例子。

2. 下列两图是否分别可以一笔画？若可以，找出画法；若不可以，说明理由。



三、求 Euler 图中的Euler 闭迹—Fleury 算法

Fleury 给出了一个在欧拉图中找欧拉闭迹的多项式时间算法。

算法思想：从图中一个顶点出发，用深度优先方法找图的迹，在任何一步，尽可能不使用剩余图的割边，除非没有别的选择。

Fleury 算法：

输入：欧拉图 G；输出：G 的欧拉闭迹。

step1. 任取 $v_0 \in V(G)$，令 $w_0 := v_0$，$i := 0$。

step2. 设迹 $w_i = v_0 e_1 v_1 \ldots e_i v_i$ 已取定。从 $E \setminus \{e_1, e_2 \ldots e_i\}$ 中选取一条边 e_{i+1}，使得

（1）e_{i+1} 和 v_i 相关联；

（2）e_{i+1} 不选 $G_i = G \setminus \{e_1, e_2 \ldots e_i\}$ 的割边，除非没有别的选择。

step3. 当step2 不能再执行时，停止。

定理 **4.1.3** 若 G 是Euler 图，则Fleury 算法终止时得到的是G 的Euler 闭迹。

讨论定理 **4.1.3** 的证明，即Fleury 算法的正确性。

§4.2 中国邮递员问题（Chinese Postman Problem；CPP）

中国邮递员问题（管梅谷，1960）：一位邮递员从邮局出发投递邮件，经过他所管辖的每条街道至少一次，然后回到邮局。请为他选择一条路线，使其所行路程尽可能短。

图论模型：求赋权连通图中含所有边的权最小的闭途径。这样的闭途径称为**最优回路**。

第四章 Euler 图

管梅谷（1934- ），教授，博士生导师。1984-1990年任山东师范大学校长。曾兼任中国运筹学会副理事长，第六、七届全国政协委员等。主要从事运筹学的教学和科研工作。代表性论著有《线性规划》、《图论中的几个极值问题》、《奇偶点图上作业法》等,所提出的最短投递路线问题在国际图论界被称为“中国邮递员问题”。2016年被中国运筹学会授予科学技术奖-终身成就奖。山东省专业技术拔尖人才，享受国务院政府特殊津贴。

算法思想：(1)若G 是Euler 图，则G 的Euler 闭迹便是最优回路，可用Fleury 算法求得；
(2) 若G 不是Euler 图，则含有所有边的闭途径必须重复经过一些边，最优回路要求重复经过的边的权之和达到最小。实质上可看成给图G 添加了一些重复边（其权与原边的权相等），最终消除了奇度顶点形成一个Euler 图。因此，在这种情况下求最优回路可分为两步进行：首先给图G 添加一些重复边得到Euler 图G^*，使得添加边的权之和$\sum_{e\in F}w(e)$最小，(其中$F = E(G^*)\setminus E(G)$)；然后用Fleury 算法求G^*的一条Euler闭迹。这样便得到G 的最优回路。

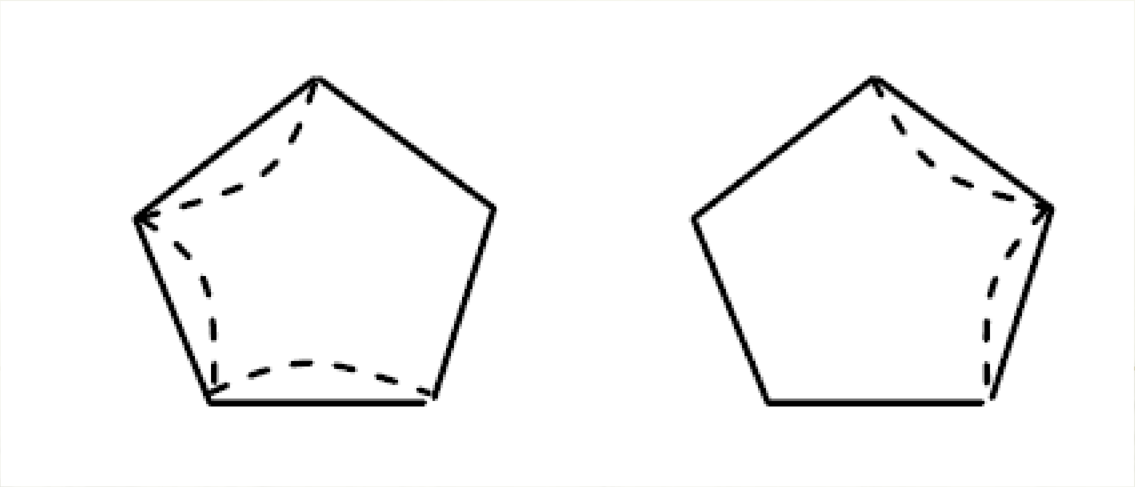
问题是：如何给图 G添加重复边得到Euler图 G^*，使得添加边的权之和$\Sigma_{e\in F}w(e)$最小？

方法 一：图上作业法

定理 **4.2.1** 设C 是一条经过赋权连通图G的每条边至少一次的回路，则C 是G 的最优回路当且仅当C对应的欧拉图G*满足：

（1）G的每条边在G*中至多重复出现一次；

（2）G的每个圈上在G*中重复出现的边的权之和不超过该圈总权的一半。



奇偶点图上作业法虽然通俗易懂，但使用时需要检查图的每个圈，对于有很多圈的图，计算量很大，实际当中用得较少。

方法二（Edmonds-Johnson 方法）

定理 4.2.2 设G是赋权连通图，G中有2k个奇度顶点。设

A = {e | e∈ E,在求最优回路时e 被添加重复边}。

则 $G[A]$是以G 的奇度顶点为起点和终点的k条无公共边的最短路之并。

基于此定理，Edmonds 和Johnson 于1973年给出了求解邮递员问题的一个多项式算法[1]。其复杂度为O(n^3)。

[1] J. Edmonds and E.L. Johnson, Matching, Euler tours and the Chinese postman, *Mathematical Programming*, 5(1973) 88-124.

Edmonds-Johnson 算法：

Step1. 若G中无奇度顶点，令$G^* = G$，转step2；否则转step3。

Step2. 求G*中的Euler 回路，结束。

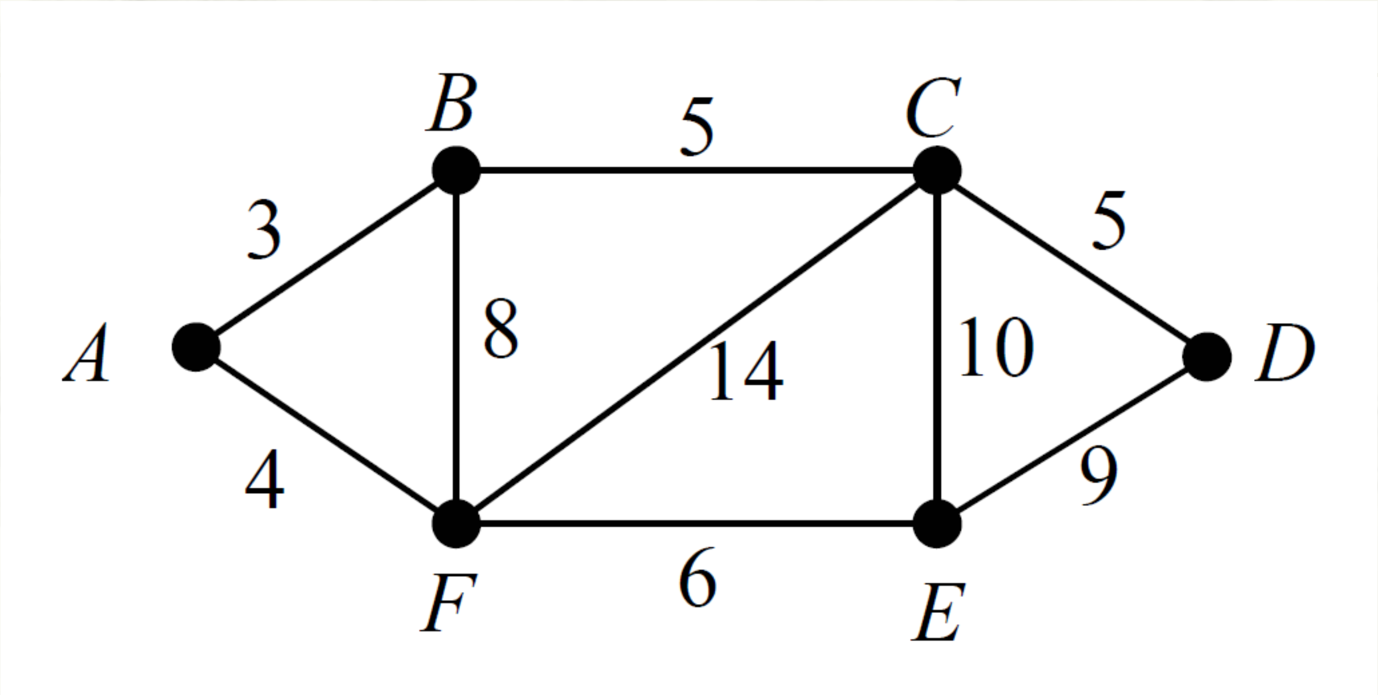
Step3. 求G 中所有奇度顶点对之间的最短路。

Step4. 以G 中奇度顶点集V'为顶点集，构作赋权完全图K_n, ($n=|V'|$)，使得对$\forall v_i, v_j \in V'$，K_n 中边v_iv_j的权为 v_i 至 v_j 在G 中最短路的权。

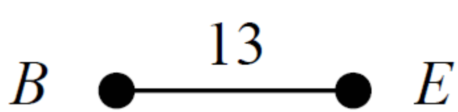
Step5. 求 K_n 中**最小权完美匹配M**。

Step6. 将M 中边对应的各最短路中的边在G中加重复边，得Euler 图G*，转step2。

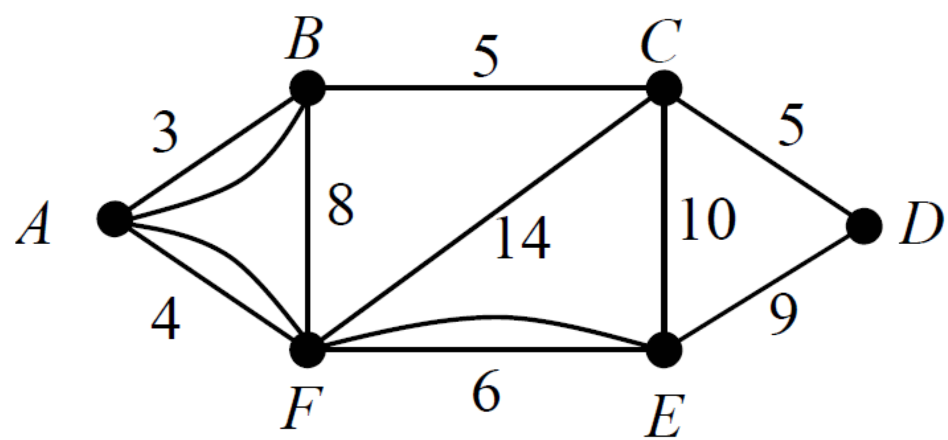
例 4.2.1 求下图G 的最优投递路线，A 为邮局。



解：G只有两个奇点，$V' = \{B, E\}$。B 到E 的最短路为BAFE，权为13。完全赋权图 K_2 及相应的Euler 图G*为



K_2



G^*

易求得其Euler 闭迹，并得到最优回路。

§4.3 CPP问题的推广

1.Hierachical CPP (HCPP)

HCPP是在经典CPP的基础上，依次按照边划分E1,…,Ep中的边进行服务。
此问题是NP-难问题。当每个G[Ei]都连通时，Ghiani 和 Improta 给出了多项式算法 O(p^3n^3)。

Ghiani G, Improta G. Algorithm for the hierarchical Chinese postman problem[J]. Operations Research Letters, 2000, 26(1):27-32.

2. Directed CPP (DCPP)

DCPP：设G是一个强连通有向图（单向弧），每条弧有正的长度，要求找一条包含G的每条弧至少一次的回路，使得总长度最小。

此问题有多项式算法。

Edmonds 和 Johnson （1973） O(n^3);

Lin 和 Zhao（1988）O(kn^2)，其中k为依赖于网络结构的常数.

Lin Y, Zhao Y. A new algorithm for the directed chinese postman problem[J]. Computers & Operations Research, 1988, 15(6):577-584.

3. Mixed CPP (MCPP)

MCPP：设G(V,E,A)是一个混合图，其中E为边集，A为弧集，找一条包含G的每条弧与边至少一次的回路，且经过弧时方向与弧的方向一致，使得总长度最小。

此问题是NP-难问题（Papadimitriou,1976）。

Edmonds and Johnson proved that if all vertices of *G* are even then MCPP is polynomial time solvable.

A Heuristic Algorithm for the Mixed Chinese Postman Problem K Yaoyuenyong，P Charnsethikul，V Chankong - 《Optimization & Engineering》		被引量: 11	2002
Solving the Chinese Postman Problem on Mixed Networks using an Efficient Genetic Algorithm ByungHyun，Chi-Geun		被引量: 0	
Parameterized Complexity of the k-Arc Chinese Postman Problem G Gutin，M Jones，B Sheng - 《Journal of Computer & System Sciences》		被引量: 4	2017
Genetic Algorithm for Mixed Chinese Postman Problem H Jiang，L Kang，S Zhang，... - Advances in Computation & Intelligence-international Symposium		被引量: 0	2010
Algorithms for the Capacitated-Chinese-Postman-Problem in Mixed Graphs POK Greistorfer - Operations Research '93		被引量: 0	1994
Genetic Algorithm for Mixed Chinese Postman Problem H Jiang，L Kang，S Zhang，... - Advances in Computation and Intelligence		被引量: 0	2010
Genetic Algorithm for the Capacitated Chinese Postman Problem on Mixed Networks YH Ma，GL Tian，X Li - 《Applied Mechanics & Materials》		被引量: 0	2015
Recent Algorithmic Advances for Arc Routing Problems G Ghiani，A Hertz，G Laporte - Computers & Operations Research		被引量: 8	2006
An algorithm for the hierarchical Chinese postman problem G Ghiani，G Improta - Elsevier Science Publishers B. V.		被引量: 34	2000