第五章 Hamilton 图

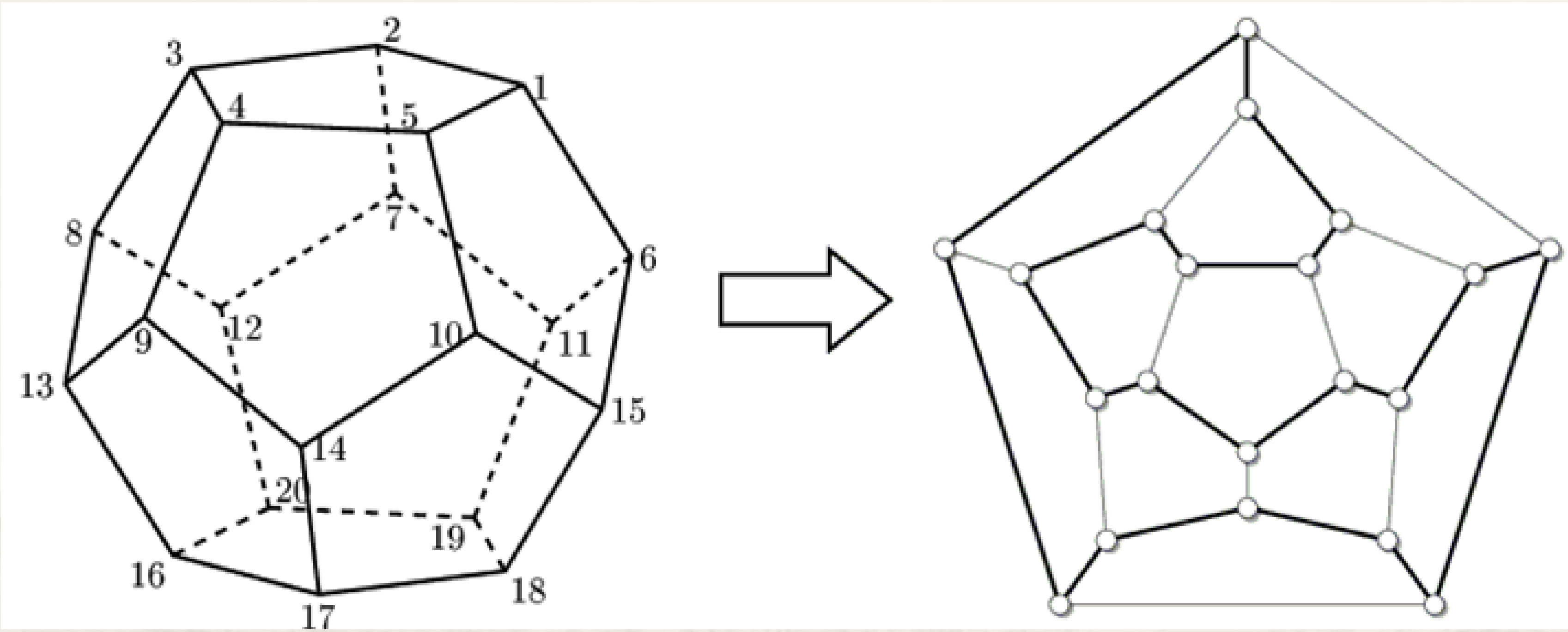
§5.1 基本概念

定义 5.1 经过图 G 的每个顶点恰一次的路称为G 的Hamilton 路。

经过图G的每个顶点恰一次的圈称为G的Hamilton 圈。

具有Hamilton 圈的图称为Hamilton 图。

Hamilton 问题起源于一种十二面体上的游戏。1857 年，爱尔兰著名数学家W.R. Hamilton 爵士（他也是第一个给出复数的代数描述的人）制作了一种玩具，它是一个木制的正十二面体，在正十二面体的每个顶点上有一个木栓，并标有世界著名城市的名字。游戏者用一条细线从一个顶点出发，设法沿着十二面体的棱找出一条路，通过每个城市恰好一次，最后回到出发点。这个游戏当时称为Icosian 游戏，也称为周游世界游戏。



周游世界游戏就是判断十二面体图是否Hamilton图，并设法找出其Hamilton圈。

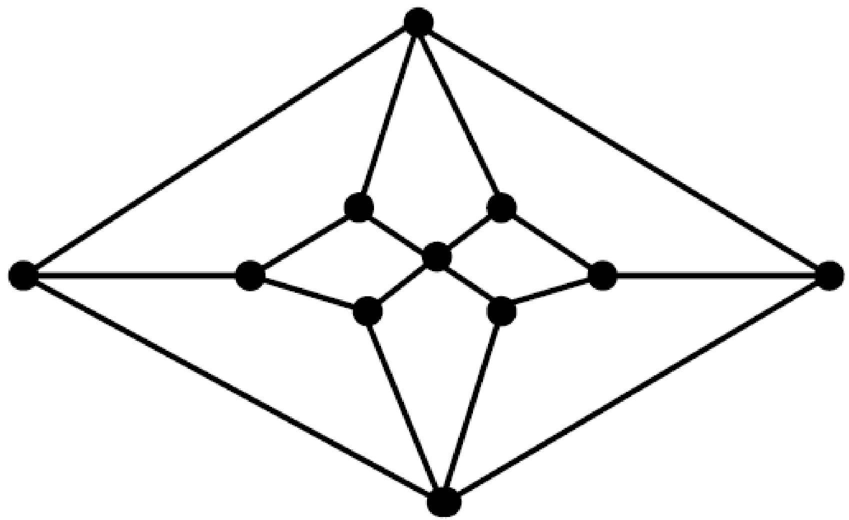
判断一个图是否 Hamilton 图与判断一个图是否Euler 图似乎很相似，然而二者却有本质的不同。

目前为止尚没有找到判别一个图是否是Hamilton 图的有效充要条件。

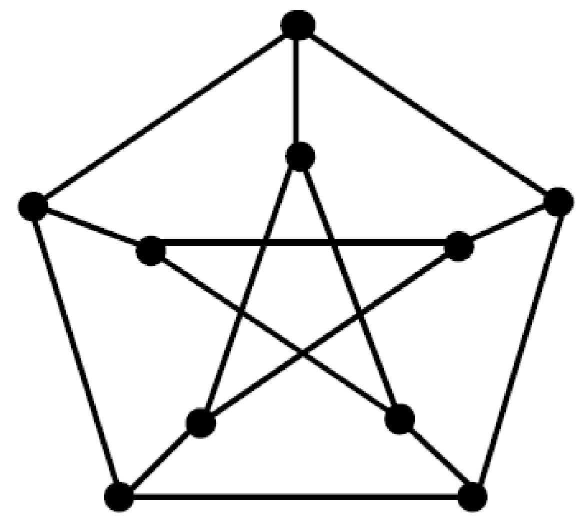
这是图论和计算机科学中未解决的重要难题之一。

哪些图是Hamilton 图？

完全图？ 完全二部图？



Herschel 图

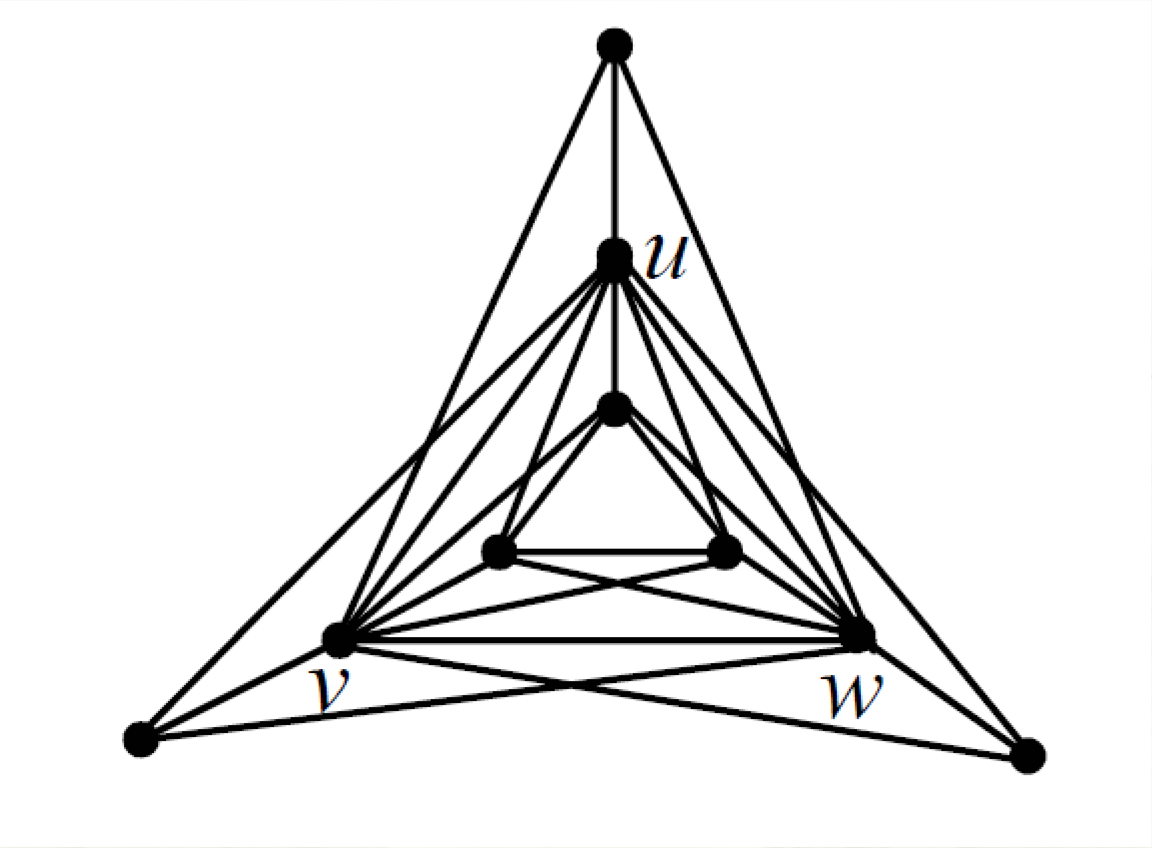


Petersen 图

§ 5.2 Hamilton 图的必要条件

定理 5.1 设 G 是二部图，若 G 是Hamilton 图，则G 必有偶数个顶点。

证明：设 G = (X, Y)，由于G 的边全在X 和 Y 之间，因此如果G 有Hamilton 圈C，则G 的所有顶点全在C 上，且必定是X 的点和Y 的点交替在C 上出现，因此G 必有偶数个顶点。


u
v
w

定理 5.2 若 G 是Hamilton 图，则对V(G)的每个非空真子集S，均有：

$$\text{连通分支数 } W(G-S) \leq |S|。$$

证明：设 C 是G 的Hamilton 圈，则对V(G)的每个非空真子集S，均有

$$W(C-S) \leq |S|.$$

由于C－S 是G－S 的生成子图，故

$$W(G-S) \leq W(C-S) \leq |S|.$$

§5.3 Hamilton 图的充分条件

（1）度型条件

定理 5.3 (Dirac, 1952) 若G是简单图，且顶点数n ≥ 3，最小度δ ≥ n/2，则G 是Hamilton 图。

定理 5.4 (范更华) 若G是n个顶点的简单图，若G的每一对距离为2的顶点u和v，有max{d(u),d(v)} ≥ n/2，则G 是Hamilton 图。

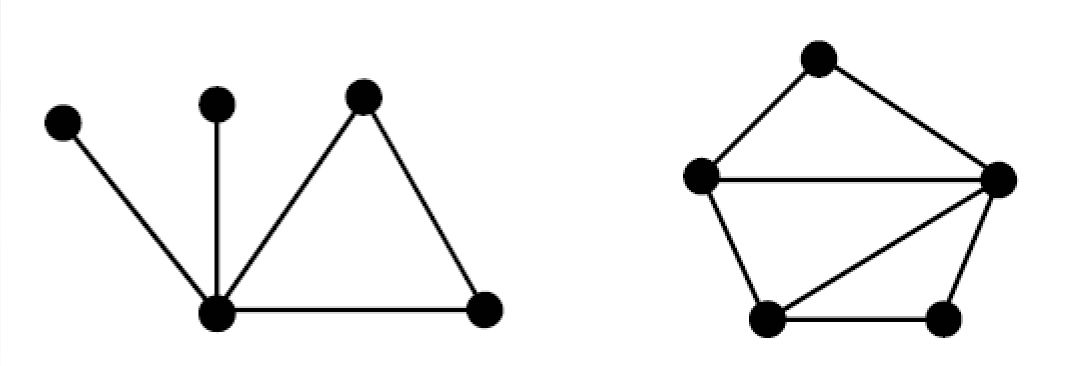
(2) 闭包型条件

Ore 注意到，上述Dirac 定理的证明过程中，条件$\delta \geq n/2$ 仅仅用来证明对不相邻顶点u,v，有$d(u) + d(v) \geq n$ 成立。因此可以将图存在Hamilton 圈的条件由$\delta \geq n/2$ 弱化为$d(u) + d(v) \geq n$ 。这样便得到下述定理。

定理 5.5（Ore，1960）设 G是简单图，u和v 是G中不相邻的顶点，且$d(u) + d(v) \geq n$ ，则G 是Hamilton 图当且仅当$G + uv$ 是Hamilton 图。

定义：图G 的**闭包（closure）**是指由如下方法所得之图：反复连接G 中度之和不小于n 的不相邻顶点对，直到没有这样的顶点对为止。图G 的闭包通常记为C(G)。

例如，对下列两图，前一个图的闭包是它自己，后一个图的闭包是完全图 *K*5。

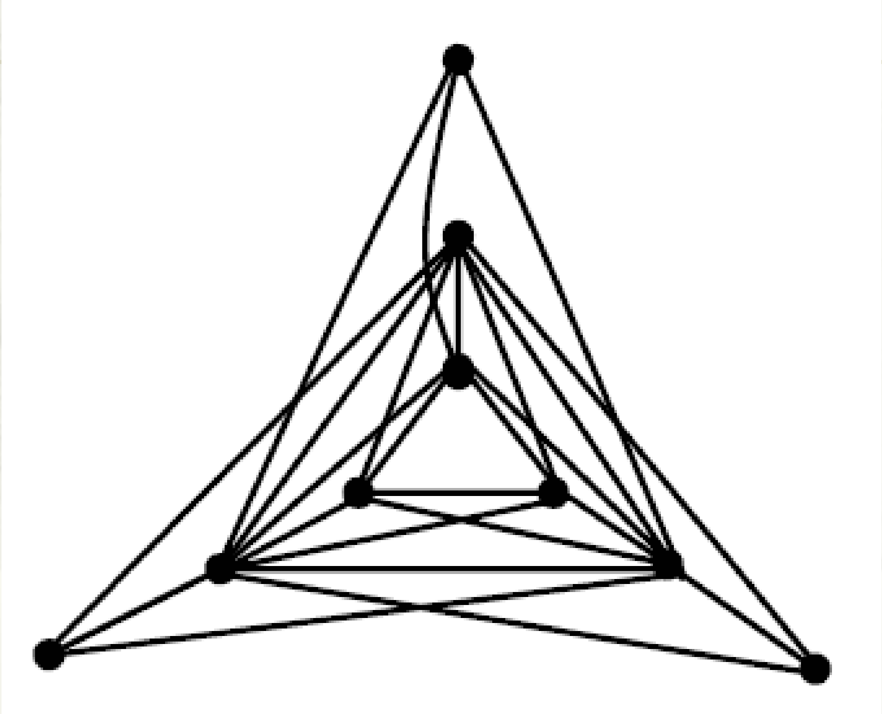


定理 5.6 图G 的闭包C(G)是唯一确定的。

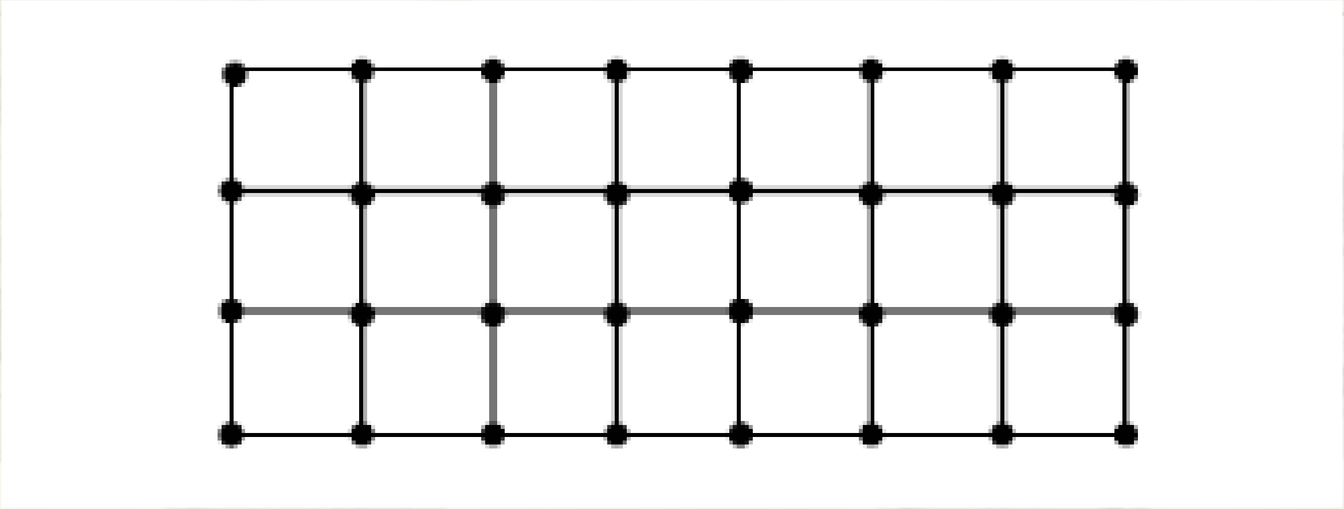
在构作闭包过程中，反复运用定理 5.4可得到下面的结论。

定理 5.7（Bondy & Chvátal,1976）一个简单图是 Hamilton 图当且仅当它的闭包是Hamilton 图。

推论 5.1 设 G是顶点数$n \geq 3$的简单图。若C(G)是完全图，则G是Hamilton 图。



讨论：用丝线将$m \times n$个珍珠穿成一个网（如图），现在想将一些丝线段剪断，得到一个由这些珍珠做成的项链，问m 和n 应满足什么条件？



§5.4 旅行商问题 (Travelling Salesman Problem,TSP)

旅行商问题：有 n 个城镇。一个旅行商从某一城镇出发，欲经过其余$n-1$个城镇一次且仅一次，最后回到出发点。他应该如何设计旅行路线，才能使所走路程最短？

图论描述：将城镇作为顶点，两顶点连边当且仅当对应的两城镇能直达，每条边上以道路的里程作为权。从而获得一个赋权图G。旅行商问题现在可以叙述为：

给定赋权图 G，求G 的一个权最小的Hamilton 圈。这一问题看似简单，实际上含有两个困难的问题：

（1）如何判定G 是否有Hamilton 圈；

（2）在已知G 是Hamilton 图的情况下，如何求出一个权最小的Hamilton 圈来。

转化：给G 添加权为∞ 的边，化为赋权完全图。问题化为：对赋权完全图 K_n，求其最小权Hamilton 圈，这样的圈称为最小Hamilton 圈。

在 K_n 中，共有 $(n-1)!/2$ 个不同的Hamilton 圈（v 到其余顶点有n−1条边）。如果一一计算各Hamilton 圈的长度，再逐个比较出权最小的一个，则计算量太大。当n 较大时无法实现。

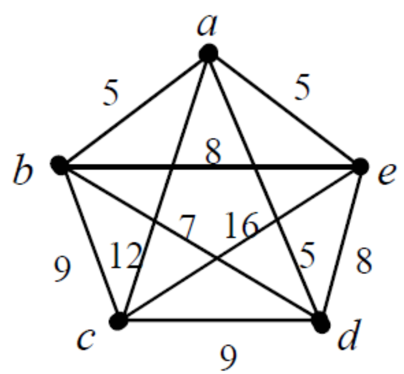
下面介绍三种求最小Hamilton 圈的近似算法。

近似算法1—邻近点法

step1. 任选一点$v_1 \in V$，令 $P_1 = v_1$, $i := 1$。

Step2. 设已得到$P_i = v_1 v_2 \ldots v_i$，选取$v_{i+1} \in V \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$ 使得权$w(v_i v_{i+1})$ 最小。

Step3. 若$i = n$，则停止，$C = P_n + v_n v_1 = v_1 v_2 \ldots v_n v_1$ 是一条近似的最小Hamilton 圈；否则$i := i + 1$，转step2。



解：因 $n=5$，故存在 $\frac{1}{2}\times 4! = 12$ 个不同的 Hamilton 圈。由计算可知 *abcdea*，*adcbea* 是最优解，权为 36；而 *abdeca* 和 *acebda* 是最差解，权为 48。

按邻近点法来求：

比如从 *a* 点出发，可得四个近似解：*abdeca*，权为 48；*adbeca*，权为 48；*aebdca*，权为 41；*aedbca*，权为 41。

如果从 *b* 出发，可得 2 个近似解：*badecb*，权为 43，*baedcb*，权为 36。

可见，邻近点法求近似解的精度不高，且与初始点有关。

定理 5.8 设赋权完全图 K_n 各边的权均为正数，且权满足三角不等式：对于任意的 $v_i, v_j, v_k \in V$， $w(v_iv_j)+w(v_jv_k) \geq w(v_iv_k)$，则 $\frac{c_0}{c^*} \leq \frac{1}{2}(\lceil \log_2 n \rceil + 1)$。其中 c^* 是 K_n 的最小 Hamilton 圈的权，而 c_0 是用邻近点法求得的 Hamilton 圈的权。

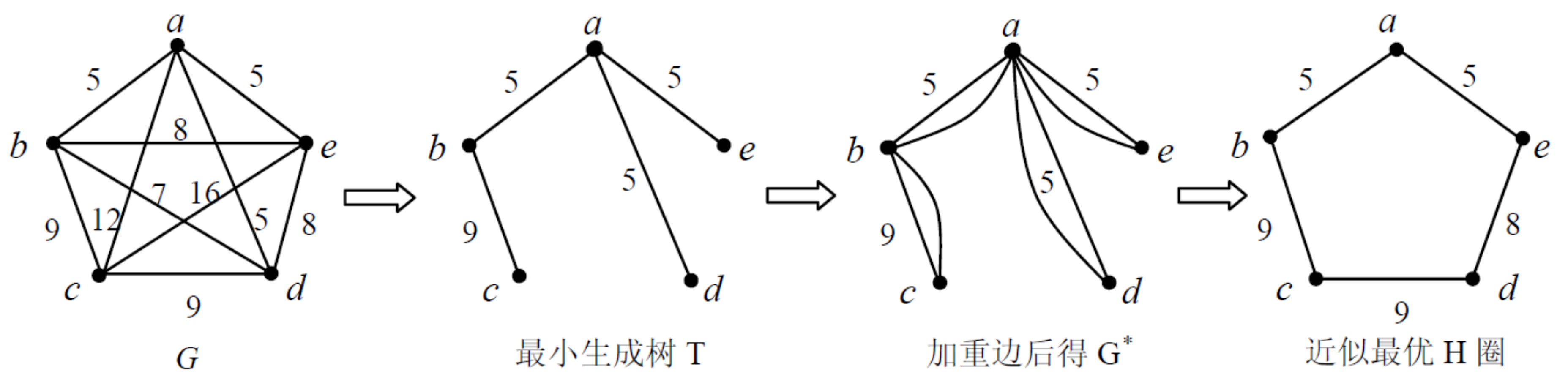
近似算法 2—最小生成树法

step1. 求 K_n 的一棵最小生成树T；

step2. 将T中各边均添加一条重边，所得图为G^*；

step3. 求G^*的从某点v 出发的一条Euler闭迹 E_v；

step4. 按如下方法求出G 的一条Hamilton路：从顶点v出发，沿E_v访问G^*中各顶点。在此过程中，一旦遇到重复顶点，就跳过它直接走到Euler环游上的下一个顶点。直到访问完所有顶点为止。



注：（1）若由不止一棵最小生成树，则最小生成树的选择会影响最终的结果(H 圈的权)。

（2）Euler 闭迹路线也影响最终结果。

（3）选择 Euler 闭迹的不同起点也影响最终的结果。

定理 5.9 设赋权完全图的各边之权均为正数，且对 $\forall v_i, v_j, v_k \in V$，都有 $w(v_iv_j)+w(v_jv_k) \geq w(v_iv_k)$，则 $\frac{c_0}{c^*} < 2$。这里 c_0 是算法 2 所得的 Hamilton 圈 H 的权（近似最优值），而 c^* 是最小 Hamilton 圈 H^* 的权。

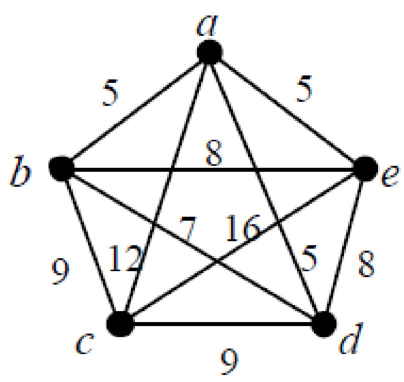
近似算法 3—最小权匹配法(Christofides 算法)

step1. 求完全图K_n 的一棵最小生成树T;

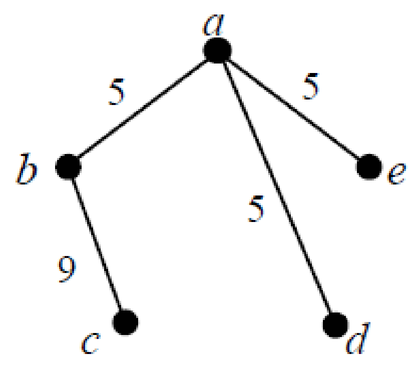
step2. 设T 中奇度顶点的集合为$V'=\{v_1,v_2,\ldots,v_{2k}\}$ 。求V'的导出子图 $G[V']=K_{2k}$ 的最小权完美匹配，将得到的k 条边添加到T 上，得Euler 图G^* 。

step3. 求G^*的从某点v 出发的一条Euler 闭迹 E_v。

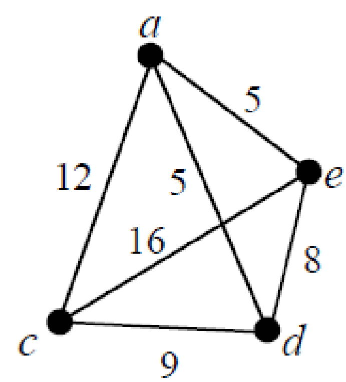
step4. 从v 出发沿 E_v 访问G^*的各个顶点。在此过程中，一旦遇到重复顶点，就跳过它直接走到Euler 闭迹上的下一个顶点。直到访问完所有顶点为止。



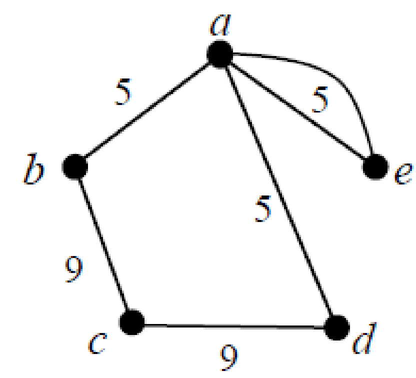
G



最小生成树 T



$G[V']$



G^*

定理 5.10 设赋权完全图的各边之权均为正数，且对 $\forall v_i, v_j, v_k \in V$，都有

$$w(v_i v_j) + w(v_j v_k) \geq w(v_i v_k),$$

则 $\dfrac{c_0}{c^*} < \dfrac{3}{2}$。 这里 c_0 是算法 3 所得的 Hamilton 圈 H 的权(近似最优值)，而 c^* 是 G 的最小 Hamilton 圈 H^* 的权。

讨论：1. 若围一张圆桌坐着至少 6 个人，那么一定可以调整他们的位置，使得每个人两侧都挨着新邻居。

2. 教室里有 6 排椅子，每排5 张椅子，每张椅子坐一名学生。现在班主任老师考虑每周调整一次学生们的座位，使得每个学生都调到本次调整前与他相邻的某个座位上（前后左右视为相邻），一个学期内每个学生都不能调回到他已经坐过的座位上。请帮老师制定一个调整方案。如果老师现在改变了主意，希望每次将每个学生调到原先与他不相邻的某个座位上，问是否可行？应怎样调整？