论　文　笔　记

Longjie Li

ljli@lzu.edu.cn

Lanzhou University

2019 年 4 月 22 日

目录

1. 多属性决策相关

1.1 Dempster-Shafer 理论相关内容

Dempster-Shafer (DS) 理论[1,2]，也叫证据理论（Evidence theory），是一套成熟的理论，用于在包含不确定信息的情况下进行推理并做出决策[3]。下面介绍有关 DS 理论的一些定义和概念。

识别框架

给定一组基本的假设 $\Theta = \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$，满足 $H_i \cap H_j = \emptyset$。在 DS 理论中，Θ 是针对某个问题的可能答案的集合，又称为识别框架（fame of discernment，FoD）。

mass function

给定 FoD Θ，mass 函数 m 是一个映射 $m: 2^\Theta \to [0,1]$, 满足

$$m(\emptyset) = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1 \tag{2}$$

这里 $2^\Theta = \{A | A \subseteq \Theta\}$ 表示 Θ 的幂集。一些论文中（邓勇的论文）定义

$$\sum_{A \in 2^\Theta} m(A) = 1 \tag{3}$$

其实，公式（2）和（3）是等价的。

mass 函数 m 又称为基本概率分配（basic probability assignment, BPA），$m(A)(A \subseteq \Theta)$ 表示 A 中假设成立的可信程度。若 $m(A) > 0$，A 称为 m 的焦点集合（focal set）。在文献[2]，要求 $m(\emptyset) = 0$。后来，一些关于 DS 理论的论文中[4]，特别是当转移信念模型（Transferable Belief Model，TBM）[5] 提出之后，条件 $m(\emptyset) = 0$ 经常被忽略，这时 mass 函数又被称为基本信念分配（basic belief assignment, BBA）。

给定 $A \subset \Theta, A \neq \emptyset$，如果满足 $m(A) = s, m(\Theta) = 1 - s$，那么称函数 m 是一个简单函数。此时，$s \in [0,1]$ 称为 A 的支持度（degree of support）。这里隐含的内容是：$\forall B \subset \Theta, B \neq A$，那么 $m(B) = 0$.

Belief and plausibility functions

给定 mass 函数 m，信任函数（Belief Function）Bel 和似然函数（Plausibility Function）Pl 分别定义如下：

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(A) \tag{4}$$

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) = 1 - Bel(\bar{A}) \tag{5}$$

$\bar{A} = \Theta - A$, $Bel(A)$ 表示 A 的全部子集的基本概率分配函数之和，$Pl(A)$ 表示不否认 A 的信任度，是所有与 A 相交的子集的基本概率分配之和。The quantity $Bel(A)$ can be interpreted as the degree of total support to A, while $1-Pl(A)$ is the degree of total support to $\bar{A}$, i.e., the degree of doubt in A[2].

mass 函数的结合规则

给定两个独立的 mass 函数 m_1, m_2, 它们之间可以采用如下方式进行结合：

(1) Dempster's rule[1,2], 表示为 $m = m_1 \oplus m_2$

$$m(A) = \frac{1}{1-K} \sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C) \tag{6}$$

这里，$A \subseteq \Theta, A \neq \emptyset$。$m_1 \oplus m_2(\emptyset) = 0$。$K$ 表示两个 mass 函数的冲突程度（degree of conflict），定义如下：

$$K = \sum_{B \cap C \neq \emptyset} m_1(B) m_2(C)$$

Dempster's rule 要求 $K < 1$。Dempster 规则满足结合律和交换律。

(2) Conjunctive combination rule[6], 表示为 $m = m_1 \cap m_2$，定义如下：

$$m(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C) \tag{7}$$

(3) Disjunctive combination[6], 表示为 $m = m_1 \cup m_2$，定义如下：

$$m(A) = \sum_{B \cup C = A} m_1(B) m_2(C) \tag{8}$$

三种合并规则中，Dempster 规则应该是最常用的。The conjunctive combination rule is applied when it is assumed that the two (distinct) pieces of evidence are both reliable. When only one of the two is fully reliable, but it is not clear which source it is, the disjunctive combination rule is recommended.

Pignistic 概率函数

设 m 是识别框架 Θ 上的 BPA （基本概率分配，即 mass 函数），与 m 相关联的 Pignistic 概率函数 (Pignistic Probability Function)[4] $BetP_m : \Theta \to [0,1]$ 定义如下：

$$BetP_m(w) = \sum_{A \subseteq \Theta, w \in A} \frac{1}{|A|} \frac{m(A)}{1-m(\emptyset)}, \quad m(\emptyset) \neq 1 \tag{9}$$

这里，w 对应于 FoD 中的一个假设，$BetP_m$ 的目的是将 BPA 转换成概率分布。

可以将 $BetP_m$ 扩展到 2^Θ, $BetP_m(A) = \sum_{w \in A} BetP_m(w)$. 从 m 到 $BetP_m$ 的转换称为 *pignistic transformation*. $BetP_m(A)$ tells what is the total mass value that A can carry and it is referred to as the *betting commitment to* A.

1.2 Deng 熵

在 DS 理论中，邓熵（Deng entropy) 可以看做广义的香浓熵，用于度量 BPA 的不确定程度[7]。定义如下：

$$E = -\sum_{A \subseteq \Theta} m(A) \log_2 \frac{m(A)}{2^{|A|}-1} \tag{10}$$

A 是焦点集合。It is the generalization of Shannon entropy. Specially, Deng entropy can definitely degenerate to the Shannon entropy if the belief is only assigned to single elements.

Example 4.1. Assume there is a mass function $m(a) = 1$, the associated Shannon entropy H and Deng entropy E_d are calculated as follows.

$$H(m) = 1 \times \log_2 1 = 0$$

$$E_d(m) = 1 \times \log_2 \frac{1}{2^1 - 1} = 0$$

Example 4.2. Given a frame of discernment $X = \{a, b, c\}$, for a mass function $m(a) = m(b) = m(c) = 1/3$, the associated Shannon entropy H and Deng entropy E_d are

$$H(m) = -\frac{1}{3} \times \log_2 \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \log_2 \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \log_2 \frac{1}{3} = 1.5850$$

$$E_d(m) = -\frac{1}{3} \times \log_2 \frac{1/3}{2^1 - 1} - \frac{1}{3} \times \log_2 \frac{1/3}{2^1 - 1} - \frac{1}{3} \times \log_2 \frac{1/3}{2^1 - 1} = 1.5850$$

Clearly, Examples 4.1 and 4.2 have shown that the results of Shannon entropy and Deng entropy are identical when the belief is only assigned on single elements, which is proved by the probability consistency of Deng entropy.

Example 4.3. Given a frame of discernment $X = \{a, b, c\}$, for a mass function $m_1(a, b, c) = 1$,

$$E_d(m_1) = -1 \times \log_2 \frac{1}{2^3 - 1} = 2.8074$$

图 1: 邓熵例子

公式 (10) 中，当 $m^*(A_i) = \frac{2^{|A_i|}-1}{\sum_i 2^{|A_i|}-1} (\forall A_i \subseteq \Theta)$ 时，邓熵取得最大值[8,9]. 此时

$$E^* = \log_2 \sum_{B \subseteq \Theta} (2^{|B|} - 1)$$

1.3 VIKOR

The VIKOR method was developed[10] as an MCDM method to solve a discrete multi criteria problem with non-commensurable and conflicting criteria[11]. VIKOR 的目的是在多个冲突标准下找到一个折衷方案。折衷方案是一个接近理想方案的可行方案[11].

设有 n 个候选方案 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，m 个评价标准，f_{ij} 表示候选 A_j 在第 i 个标准下的评级（分值）。VIKOR 方法的过程如下：

(1) Determine the best f_i^* and the worst f_i^- values of all criterion functions, $i = 1, 2, ..., m$.

If the ith criterion is a benefit one, $f_i^* = \max_j f_{ij}$, $\quad f_i^- = \min_j f_{ij}$.

If the ith criterion is a cost one, $f_i^* = \min_j f_{ij}$, $\quad f_i^- = \max_j f_{ij}$.

(2) Compute the values S_j and R_j for alternative A_j.

$$S_j = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{(f_i^* - f_{ij})}{(f_i^* - f_i^-)}$$

$$R_j = \max \left[\frac{(f_i^* - f_{ij})}{(f_i^* - f_i^-)} \right]$$

w_i 是第 i 个标准的权重。

(3) Calculate $Q_j (j = 1, 2, \cdots, n)$.

$$Q_j = v\frac{(S_j - S^*)}{(S^- - S^*)} + (1 - v)\frac{(R_j - R^*)}{(R^- - R^*)}$$

where

$$S^* = \min_j S_j, \quad S^- = \max_j S_j,$$
$$R^* = \min_j R_j, \quad R^- = \max_j R_j,$$

v 用于调整两部分的比重。可以简单设置 $v = 0.5$.

(4) 根据 S, R, Q 的值对候选进行排序，降序。得到三个排序列表。

(5) 假设 A_1 在 Q 列表中排第一，如果下面两个条件成立，则折衷方案只包含 A_1。

Condition 1. *The acceptable advantage*: $Q(A_2) - Q(A_1) \geq DQ$. A_2 是 Q 列表中的第二个候选，$Q(A_2), Q(A_1)$ 分别是 A_2, A_1 的 Q 值，$DQ = 1/(n-1)$.

Condition 2. *Acceptable stability in decision making*: Alternative A_1 must also be the best ranked by S or/and R.

如果条件 2 不满足，折衷方案只包含 A_1 和 A_2。

如果两个条件都不满足，折衷方案只包含 $A_1, A_2, \cdots, A_l$, 满足 $Q(A_l) - Q(A_1) < DQ$ 且 $Q(A_{l+1}) - Q(A_1) \geq DQ$. $A_1, A_2, \cdots, A_l$ 位置比较接近。

参考文献

[1] A. P. Dempster. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping[J]. Ann. Math. Statist., 38(2):325–339, 04 1967.

[2] Glenn Shafer. A mathematical theory of evidence[M], volume 42. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1976.

[3] Ronald R. Yager, Liping Liu. Classic works of the Dempster-Shafer theory of belief functions[M], volume 219. Springer, Heidelberg, 2008.

[4] Philippe Smets. Decision making in the tbm: the necessity of the pignistic transformation[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 38(2):133 – 147, 2005.

[5] Philippe Smets, Robert Kennes. The transferable belief model[J]. Artificial Intelligence, 66(2):191 – 234, 1994.

[6] Philippe Smets. Application of the transferable belief model to diagnostic problems[J]. International Journal of Intelligent Systems, 13:127–157, 1998.

[7] Yong Deng. Deng entropy[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 91:549–553, 2016.

[8] Liguo Fei, Yong Deng, Yong Hu. DS-VIKOR: A New Multi-criteria Decision-Making Method for Supplier Selection[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2018.

[9] Joaquín Abellán. Analyzing properties of deng entropy in the theory of evidence[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 95:195 – 199, 2017.

[10] Serafim Opricovic. Multicriteria optimization of civil engineering systems[J]. Faculty of Civil Engineering, Belgrade, 2(1):5–21, 1998.

[11] Serafim Opricovic, Gwo Hshiung Tzeng. Compromise solution by MCDM methods: A comparative analysis of VIKOR and TOPSIS[J]. European Journal of Operational Research, 156(2):445–455, 2004.