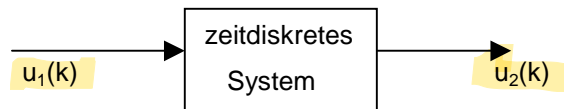


7. Der digitale Filter

Die Verarbeitung der Eingangssignale eines digitalen Systems erfolgt im Zeitbereich nicht kontinuierlich wie bei analogen Systemen, sondern zu festgelegten Zeitabschnitten. Statt mit analogen Differentialgleichungen DGL arbeitet man in digitalen Systemen Filtern mit Differenzgleichungen, die den zeitlichen Verlauf einer Ausgangswertefolge $u_2(k)$ in Abhängigkeit einer Eingangswertefolge $u_1(k)$ -den Samples- beschreiben.



$$u_2(kT) + a_1 u_2((k-1)T) + a_2 u_2((k-2)T) + a_3 u_2((k-3)T) + \dots = b_0 u_1(kT) + b_1 u_1((k-1)T) + b_2 u_1((k-2)T) + b_3 u_1((k-3)T) + \dots$$

k sind hier die ganzzahligen Vielfache von T , der Abtastperiode $1/f_s$. Man lässt T im allgemeinen weg, da sich digitale Systeme sowieso immer auf die Abtastrate beziehen.

u_1 und u_2 sind Ein- und Ausgangsgrößen, die zeitdiskret und wertkontinuierlich (zB. Spannungswerte) oder wertdiskret (in unserem Fall ein 16-Bit Wort) sind.

$$u_2(k) = b_0 u_1(k) + b_1 u_1(k-1) + b_2 u_1(k-2) + b_3 u_1(k-3) + \dots - [a_1 u_2(k-1) + a_2 u_2(k-2) + a_3 u_2(k-3) + \dots]$$

nichtrekursiver Teil

rekursiver Teil

In der obigen Differenzgleichung ist das Ausgangssignal u_2 zum Zeitpunkt kT nicht nur vom Verlauf der Eingangssamples u_1 , sondern auch vom Verlauf Ausgangssignalen u_2 zu den Zeitpunkten $(k-n)T$ abhängig. In einem solchen Fall spricht man von *rekursiven* Übertragungssystemen. Zu dieser Gruppe gehören zB. auch unsere im Gerät implementierten IIR-Filter, die ihren Namen daher haben, das ein Eingangsimpuls erst im Unendlichen völlig abgeklungen ist.

Lässt man den rekursiven Teil der Differenzgleichung weg,

$$u_1(k) = b_0 u_1(k) + b_1 u_1(k-1) + b_2 u_1(k-2) + b_3 u_1(k-3) + \dots + b_N u_1(k-N)$$

erhält man eine nichtrekursive Übertragungsfunktion, mit der man beispielsweise unsere ebenfalls implementierten FIR-Filter darstellen kann. Die Impulsantwort eines solchen Filters N -ter Ordnung ist nach N Takten beendet.

Um das Verhalten eines digitalen Systems im Frequenzbereich zu beschreiben, kann man mit Hilfe des Verschiebungssatzes der Laplace-Transformation die Verzögerung eines Wertes u um n Takte folgendermaßen ausdrücken:

$$u(k \cdot n) \circ \bullet \bar{U}(s) \cdot e^{-nsT}$$

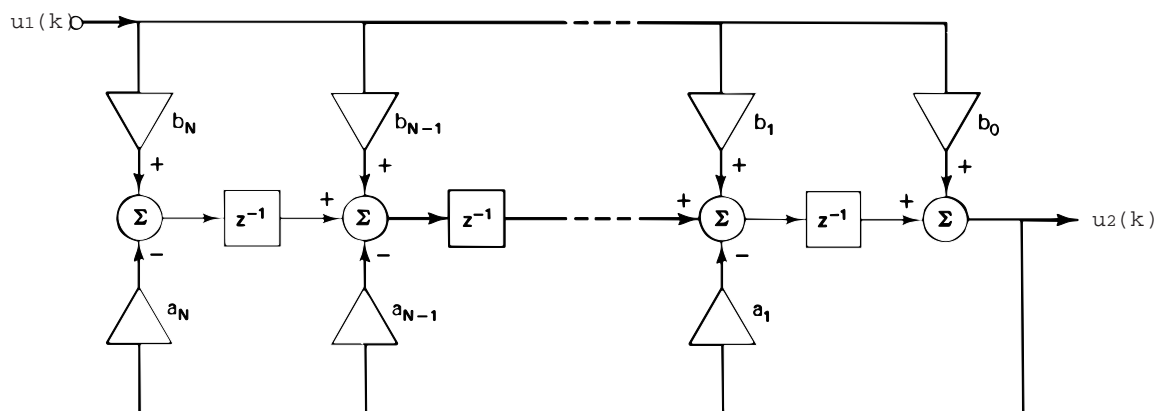
ersetzt man e^{-nsT} durch z^{-n} , hat man die Übertragungsfunktion des Systems vom diskreten Zeit- in den digitalen Frequenzbereich z -transformiert.

$$u(k \cdot n) \circ \bullet \tilde{U}(z) \cdot z^{-n}$$

eine Gleichung läßt sich allgemein dann so darstellen

$$\tilde{A}(z) = \frac{\tilde{U}_2(z)}{\tilde{U}_1(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots b_{N-1} z^{-(N-1)} + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots a_{N-1} z^{-(N-1)} + a_N z^{-N}}$$

$A(z)$ ist die Z -Übertragungsfunktion eines digitalen Systems, wobei a_n und b_n die Filterkoeffizienten bedeuten. Der höchste Exponent von z bestimmt die Ordnung des Systems. Bei digitalen Filtern ist weiterhin zu beachten, daß sich das Verhalten des Systems immer auf die Abtastrate f_s bezieht. Hat man beispielsweise die Filterkoeffizienten für eine Grenzfrequenz f_g -bezogen auf f_s - berechnet und verdoppelt anschließend die Abtastrate ohne die Filterkoeffizienten neu zu berechnen, verdoppelt sich auch die Grenzfrequenz des Filters. Das Blockschaltbild zeigt eine Möglichkeit, die obige Übertragungsfunktion hardwaremäßig mit Haltegliedern (z^{-1}), Verstärkern (a_n, b_n) und Additionsgliedern zu realisieren.



Blockschaltbild eines rekursiven Übertragungssystems

Die Eigenschaften des Übertragungssystems hängen damit also von den Koeffizienten a_n, b_n , der Filterordnung und der Abtastrate f_s ab. In Fall des hier konstruierten Gerätes müssen bei der Filtersynthese nur noch die Koeffizienten bestimmt werden, nachdem der Bediener durch das Menü bereits Samplerate und Filterordnung festgelegt hat. Dafür stehen grundsätzlich je nach Filterart verschiedene Verfahren zur Auswahl.

IIR-Filter

Infinite Impulse Response

Hier kann man Bezug nehmen auf analoge Schaltungskonzepte, beispielsweise die

- **Differentialnäherung**, in der der Differentialquotient einer DGL in 1. Näherung durch die Differenz zweier zeitlich versetzter Abtastwerte ersetzt wird.
- **Impulsinvariante Transformation**, in der die Stoßantworten des analogen, wie Digitalen Systems möglichst ähnlich sein sollen.
Es besteht aber wie bei der Differentialnäherung die Gefahr gegen das Abtasttheorem zu verstoßen.
- **Bilineare Transformation**, bei der dies verhindert wird, in dem man den Frequenzgang $A(s)$, von $0 \leq f \leq \infty$ in den lt. Abtasttheorem erforderlichen Bereich $0 \leq f \leq f_s/2$ abbildet.

FIR-Filter

Finite impulse response

Hier kann man sich nicht mehr an bestehende analoge Filterkonzepte anlehnen.

- Mit der **Fourierreihenmethode** wird versucht, über die Stoßantwortfolge eines Wunschfilters mit anschließender Fensterung an die gesuchten Koeffizienten zu gelangen.
- Bei der **Frequenzabtastung** tastet man an mehreren Stellen den spektralen Verlauf der gewünschten Übertragungsfunktion ab. Aus diesen Stützwerten gewinnt man mit Hilfe der IDFT die Einheitsimpulsantwort und damit die Koeffizienten des digitalen Filters. Diese Methode eignet sich besonders für Multibandfilter.
- Das **Tschebyscheff-Approximationsverfahren** arbeitet iterativ. Es wird sich solange an ein vorgegebenes Toleranzschema herangetastet, bis der zugelassene Spielraum für die Welligkeiten optimal ausgenutzt wird. (Stichwort Methode nach **Parks Mc Clellan** oder **Remez -Austauschalgorithmus**). Gute Ergebnisse, aber rechenintensiv.

Für welche Filtertyp man sich entscheidet, hängt von den jeweiligen Erfordernissen ab. Im Überblick sind noch einmal die Vorteile von rekursiven und nichtrekursiven Filtern gegenübergestellt

IIR- Filter	FIR-Filter
<ul style="list-style-type: none">- Anlehnung an bestehende analoge Konzepte möglich- Hohe Effizienz im Verhältnis zur Filterordnung (wichtig)- Große Sperrdämpfung möglich	<ul style="list-style-type: none">- Lineare Phase, konstante Gruppenlaufzeit- Absolut stabil, kein Aufschwingen möglich- Ggf. einfaches Filterdesign

In unserem Echtzeitsystem haben wir uns beim rekursiven Filter für ein Design nach der bilinearen Transformation entschieden. Für IIR Filter ist das ein vergleichsweise einfaches und schnelles Berechnungsverfahren. Wir stützten uns dabei unter anderem auf eine Entwurfsroutine in der Programmiersprache Fortran 77, die von S.D. Stearns in Digital Signal Analyses, Oldenburg Verlag 1999 beschrieben wurde.

Bei den FIR Filtern stand ebenfalls der schnelle Entwurf im Vordergrund. Daher die Entscheidung für die Methode der Fourierreihen. Hier bezogen wir uns u.a. auf die Veröffentlichungen von Prof. F.S. Schlindwein, Leicester University Engineering Department, veröffentlicht 1995 unter <http://www.le.ac.uk/engineering/fss1/eg322.htm>

FIR Filterentwurf nach dem Prinzip der Fourierreihen

Bei der Fourierreihen-, Fenster-, oder auch zeitdiskreten Fouriertransformationsmethode (DFT) zur Bestimmung der Filterkoeffizienten nutzt man die Tatsache, dass die Stoßantwort eines nichtrekursiven Filters der inversen DFT seines Frequenzganges entspricht. Diese Methode eignet sich besonders zum Entwurf selektiver Filter wie Hoch-, Tief-, Bandpaß oder Bandsperre.

Man geht dabei von idealisierten Filtern aus, deren Amplitudengang sich periodisch am vielfach der Abtastfrequenz spiegelt (siehe Kapitel A/D Wandlung und Abtasttheorem) und im Durchlaßband gleich eins ist, im Sperrband hingegen Null.

Die Impulsantwortfolge aus einem Frequenzgang lässt sich mit

$$h(n) = \frac{1}{f_s} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} H(f) e^{-j2\pi n T f} df$$

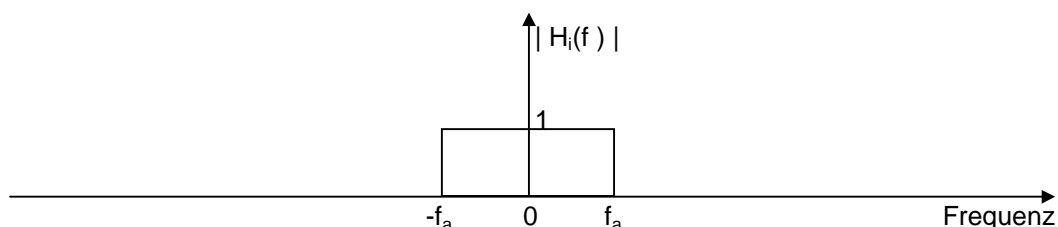
ermitteln, wobei f_s der Abtast- oder Samplingrate entspricht.

$$f_s = \frac{1}{T}$$

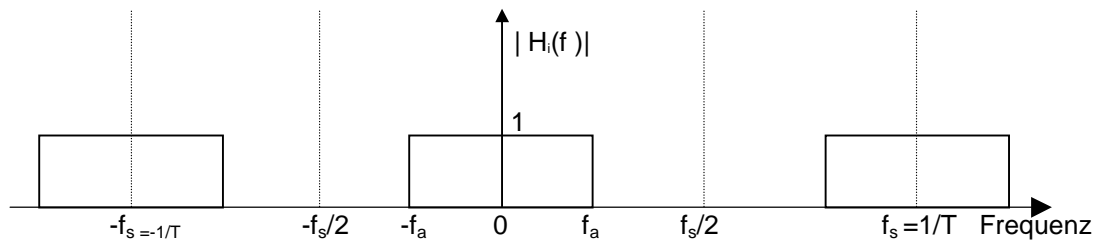
Am Beispiel eines Tiefpasses sei die Vorgehensweise erläutert:

- 1) Festlegung der gesuchten Filtereigenschaft**, hier also eines Tiefpasses mit der Grenzfrequenz f_a und der idealen Übertragungsfunktion

$$H_i(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } -f_a \leq f \leq f_a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Wahl eines passenden Abtastintervalls $T=1/f_s$ das im Bereich $f_s \gg 2f_a$ liegen sollte, so daß im sich an den Vielfachen von f_s spiegelnden Frequenzgang des digitalen Filters genügend große Frequenzbereiche für Durchlaß- und Sperrband bleiben.



Berechnung der Fourierreihen

Die inverse Fouriertransformierte $h(n)$ eines Frequenzganges $H(f)$ allgemein

$$h(n) = \frac{1}{f_s} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} H(f) e^{-j2\pi n T f} df$$

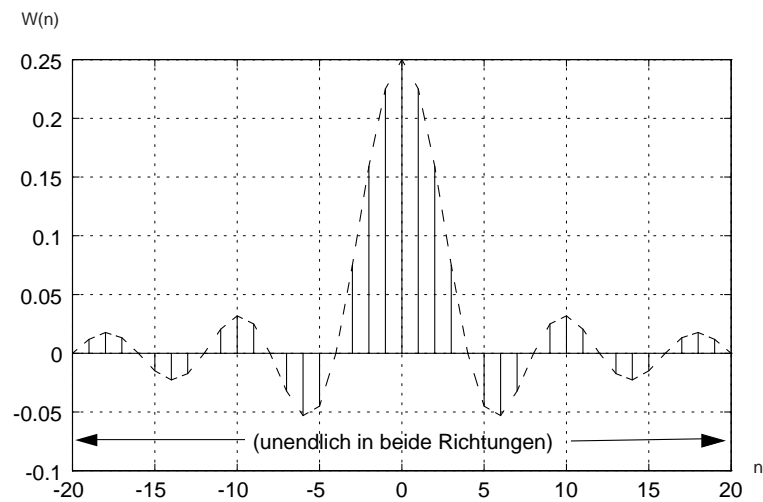
würde sich bei unserem Tiefpaß dann schreiben lassen als

$$h_i(n) = \frac{1}{f_s} \int_{-f_a}^{f_a} e^{-j2\pi n \frac{f}{f_s}} df$$

nach Auflösung des Integrals erhalten wir die FIR-Koeffizienten als Impulsantwortfolge des idealen Tiefpasses.

$$h_i(n) = \frac{1}{n\pi} \left[\sin\left(2\pi n \frac{f_a}{f_s}\right) \right] \quad \text{für } n \neq 0$$

$$h_i(n) = 2 \frac{f_a}{f_s} \quad \text{für } n = 0$$

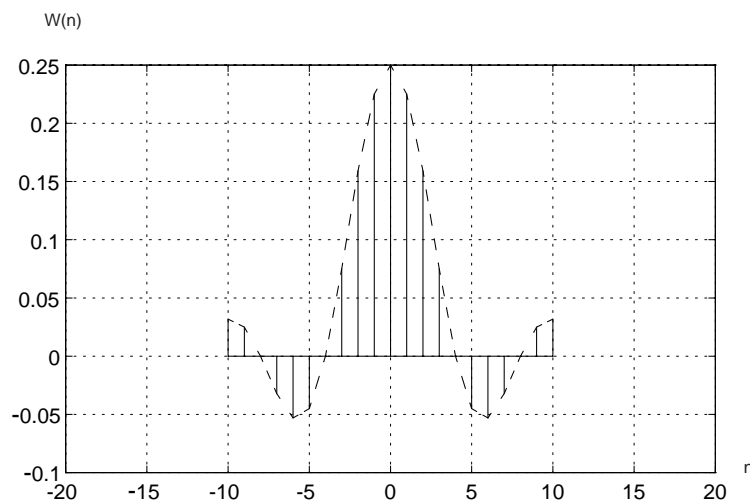


Impulsantwort eines idealen Tiefpasses

Diese Herleitung als auch von Hochpaß, Bandpaß, und Bandsperren wird im Kapitel Impulsantworten von idealen Filtern näher beschrieben.

Zu beachten ist, dass der Index n von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft. In der Praxis bedeutet dies : um einen idealen Filter nachzubilden wäre eine unendlich lange Impulsantwortfolge -wie bei IIR- notwendig, also FIR Filter mit unendlicher Ordnung.

Für technische Anwendungen wird daher die Impulsantwort symmetrisch zu $n = 0$ abgeschnitten.



gekürzte Impulsantwort

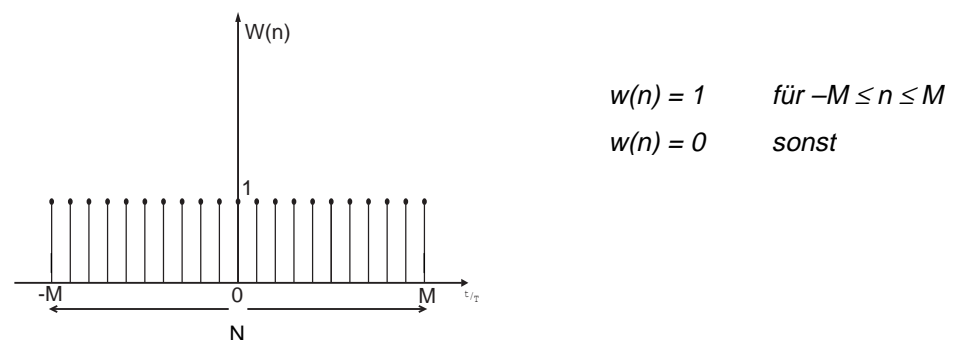
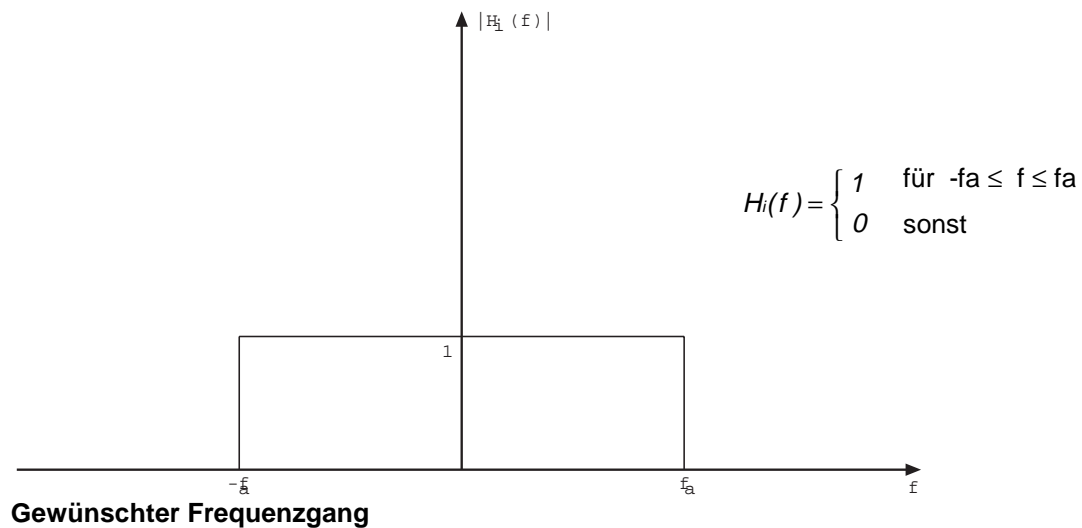
Wenn man auf die Gesamtzahl von N Termen kürzt, ergibt sich daraus eine Filterordnung $M=(N-1)/2$. $M \cdot T$ entspricht der Gruppenlaufzeit und ist über die Frequenz gesehen konstant. Eine Eigenschaft von FIR Filtern.

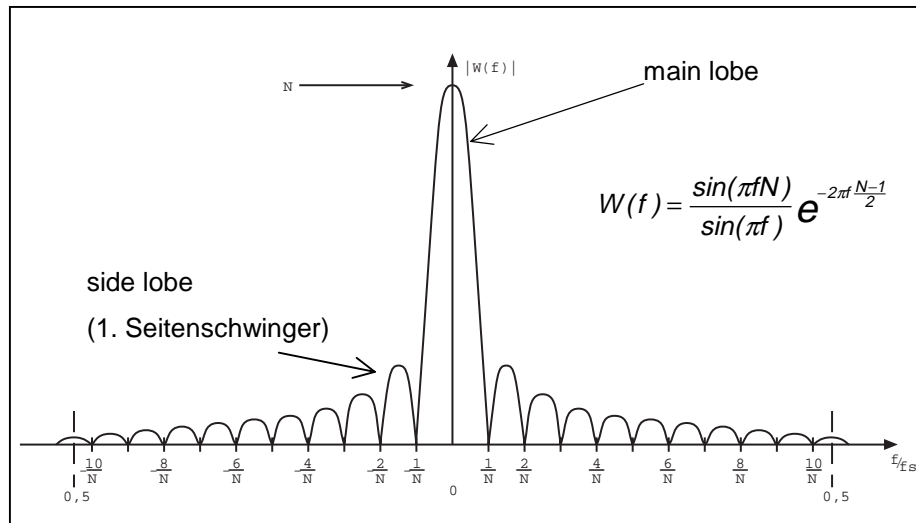
Gibbs 'sches`Phänomen

Das Kürzen der Impulsantwort bei FIR Filtern entspricht der zeitlichen Multiplikation eines rechteckförmigen Betrachtungsfensters (Window) mit der unendlich langen Ausgangswertefolge eines idealen Filters.

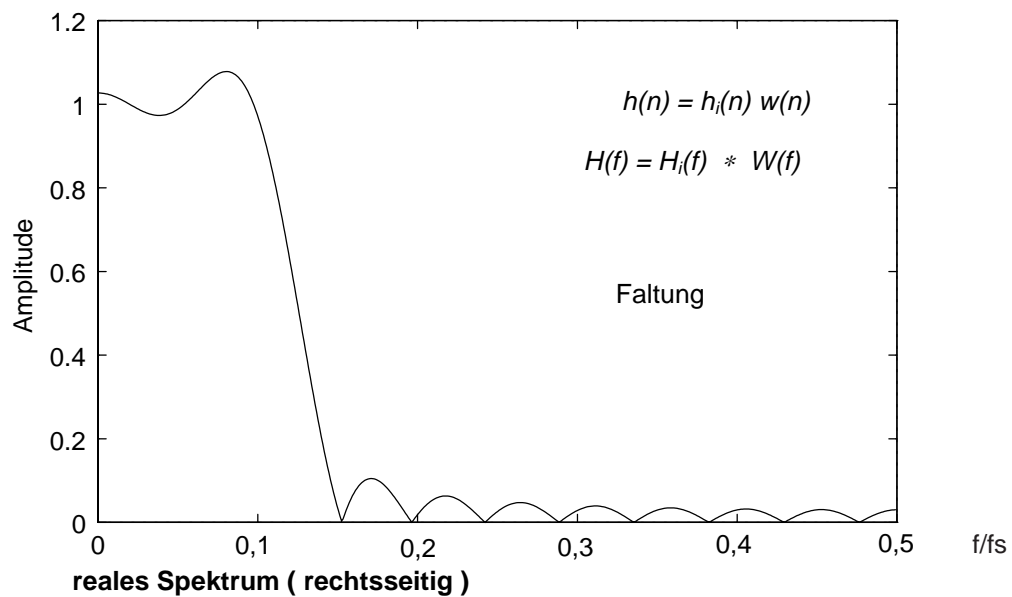
Nach der Theorie entspricht eine Multiplikation im Zeitbereich einer Faltung im Frequenzbereich und umgekehrt. Man kann auch sagen: im Frequenzbereich wird der ideale Frequenzgang des Filters mit der Fouriertransformierten des Betrachtungsfensters gefaltet.

Ein Beispiel: Tiefpaß, 20.Ordnung, Rechteckfenster.

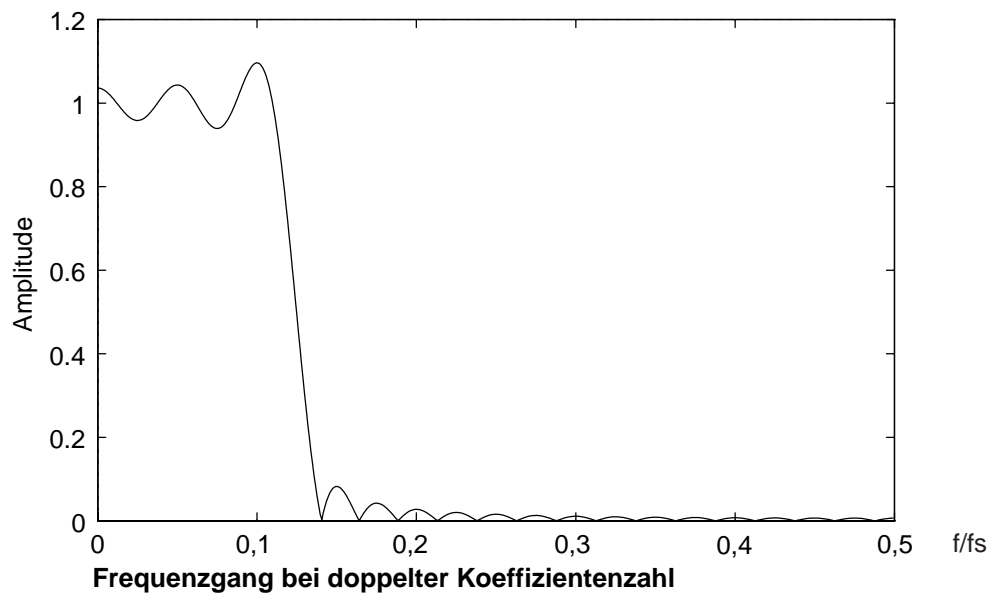




Spektrum des Rechteckfensters



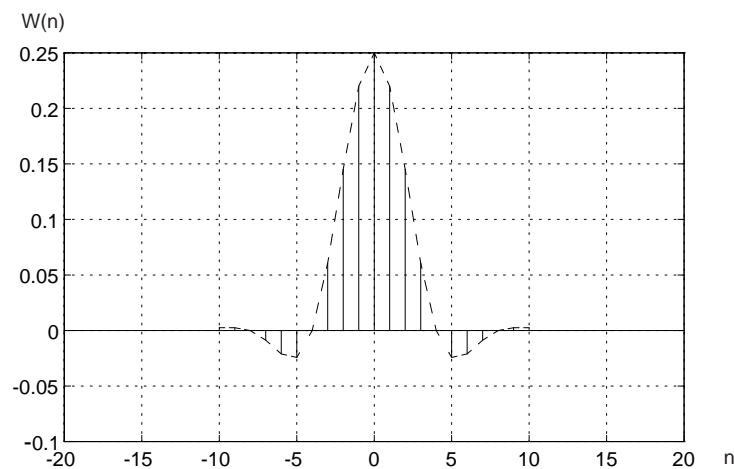
Bei dieser Vorgehensweise nähert man sich dem idealen Frequenzgang zwar an, hat aber um die Grenzfrequenz herum ein kräftiges Überschwingen und im Sperrbereich ebenfalls eine störende Dämpfungswelligkeit. Durch die Faltung verbreitert sich auch die scharfe Kante von $H_i(f)$ zu einem Übergangsbereich endlicher Breite bei $H(f)$. Wenn man das Rechteckfenster verbreitert, drängen sich die Welligkeiten im Frequenzbereich näher zusammen und die Übergangsflanke wird steiler, die Amplituden der Welligkeiten bleibt hingegen gleich.



Man bezeichnet diesen Effekt als Gibbs'sches Phänomen. Er wird hervorgerufen durch den scharfen Abbruch der Fourier-Reihe bei $n = -N/2$ und $+N/2$.

2) Fensterfunktion wählen

Die bisher verwendete Rechteckfunktion zum kürzen der unendlichen Impulsantwortfolge des idealen Filters hat einen relativ schmalen Hauptschwinger (main lobe) im Frequenzbereich von $-1/(NT) \leq f \leq 1/NT$ und hohe Nebenschwinger (side lobes) zwischen den entsprechenden Vielfachen dieser Frequenzen. Werden diese Welligkeiten gedämpft, verbessert sich auch der Amplitudenverlauf unseres Filters. Dazu ist es notwendig, die Kürzung nach einer einer weichen Funktion als der eines Rechtecks vorzunehmen.

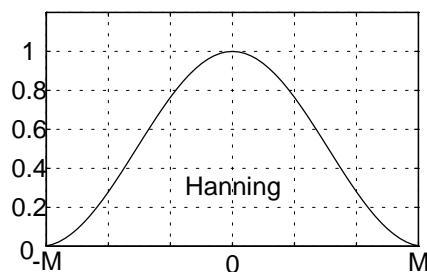


“weich” abgeschnittene Impulsantwort

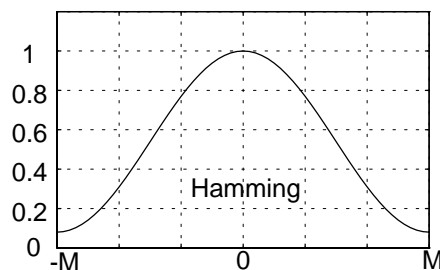
Man wählt dazu beispielsweise Funktionen, die dem Rechteckfenster den Ausschnitt einer gewichteten Cosinusfunktion hinzuaddieren. Das Spektrum des Cosinusters kompensiert teilweise die unerwünschten Seitenschwinger. Da sich durch diese Art der Fensterung auch der Hauptschwinger verbreitert, verflacht sich die Flanke zwischen Sperr- und Durchlaßbereich des Filters. Dieser Effekt läßt sich jedoch durch eine Erhöhung des Filtergrades ausgleichen.

Neben dem "rohen" Rechteckfenster sind in unserem Gerät noch drei solcher Cosinusfenster implementiert:

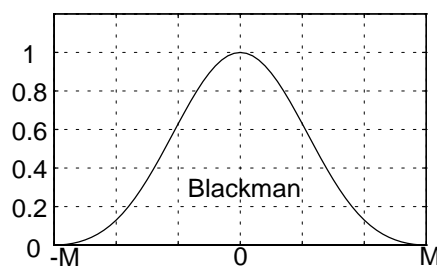
Hanning: $w(n) = 0,5 + 0,5 \cos(2\pi n/M)$ für $-M \leq n \leq M$
 $w(n) = 0$ sonst



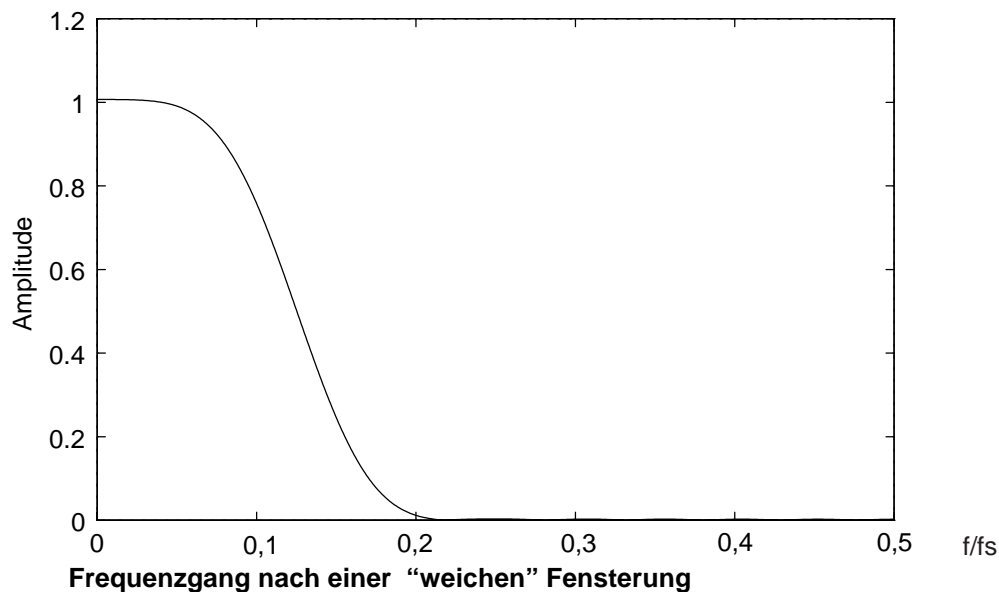
Hamming: $w(n) = 0,54 + 0,46 \cos(2\pi n/M)$ für $-M \leq n \leq M$
 $w(n) = 0$ sonst



Blackman: $w(n) = 0,42 + 0,5 \cos(2\pi n/M) + 0,08 \cos(4\pi n/M)$ für $-M \leq n \leq M$
 $w(n) = 0$ sonst



Die Wertefolgen der Fenster werden mit den Impulsantwortfolgen der idealen Filter multipliziert. Die Wirkung der weichen Fenster kann man im Frequenzgang deutlich sehen.



In der Tabelle werden diese Funktionen im Frequenzbereich und als Auswirkung auf den Amplitudengang des Filters verglichen.

		Auswirkungen nach der Faltung mit idealem Frequenzgang		
Fenster	Erster Seitenschwinger (dB)	Welligkeit im Durchlaßbereich (dB)	Sperrdämpfung (dB)	Übergangsbereich Δf normiert auf f_s
Rechteck	-13	0,7416	21	0,9 / N
Hann(ing)	-31	0,0546	44	3,1 / N
Hamming	-41	0,0194	53	3,3 / N
Blackman	-57	0,0017	74	5,5 / N

Zum Übergangsbereich zählt hier der Teil des Spektrums, in dem die Bedingung der Durchlaßwelligkeit nicht mehr erfüllt, die Sperrdämpfung jedoch noch nicht erreicht ist. Die 3dB Grenzfrequenz kann man näherungsweise in der Mitte zwischen diesen beiden Bändern anordnen.

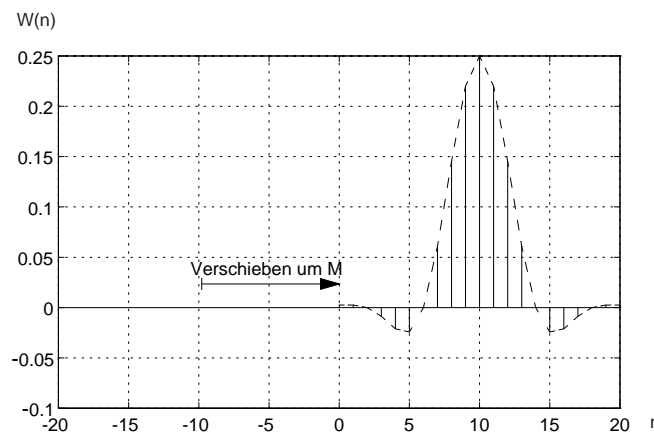
$$f_g = f_a + \Delta f/2$$

Für einen Tiefpaß mit einer Sperrdämpfung von min. 40dB und einen Übergangsbereich von $< 0,05 f_s$ kann man sich beispielsweise für ein Hanningfenster entscheiden. Mit $N = 3,1 / 0,05 = 62$

und $M = (N-1)/2$ ergibt sich als ganzzahlige Lösung die benötigte Filterordnung von 31. Eine weitere Erhöhung des Filtergrades würde die Übergangsflanke noch versteilern, auf die Amplituden der Durchlaßwelligkeit wie auch die Sperrdämpfung hätte das aber keinen Einfluß. Es existieren noch diverse andere Fensterfunktionen wie Bartlett, exact' Blackman, Kaiser-Bessel etc., mit teilweise noch besseren Eigenschaften, für Echtzeit-Filtersynthese auf Microcontrollern sind sie meist jedoch ungeeignet, da sie zu rechenintensiv sind.

5) Koeffizienten verschieben

Damit unser Filter einen linearen Phasengang erhielt, mußte die Impulsantwortfolge symmetrisch von $h[-(N-1)/2]$ bis $h[(N-1)/2]$ an $t = 0$ gespiegelt werden. Um das System kausal dh. auch praktisch anwendbar zu machen, müssen die Koeffizienten um M Takte nach rechts verschoben werden, so das für $n < 0$ keine Werte mehr existieren. Die Verschiebung um MT führt zu der konstanten Gruppenlaufzeit dieser Anordnung.



Koeffizienten verschieben

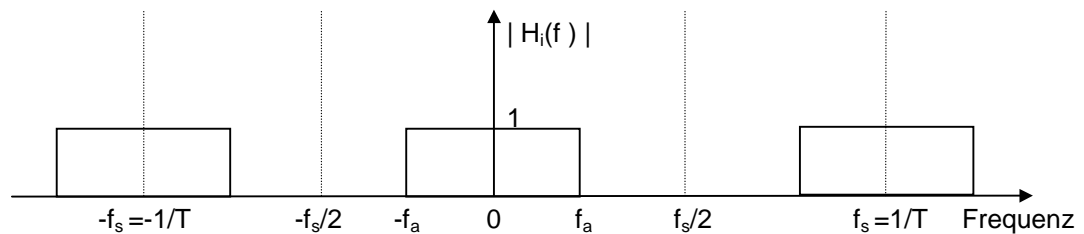
Als letzter Schritt können die Werte jetzt in das Koeffizientenarray des DSPs übertragen werden.

Impulsantworten von idealen Filtern

Hier werden die Nadelimpulsantwortfolgen von idealen Filtern hergeleitet, um sie als Rohwerte in die oben beschriebene Koeffizientengewinnung einfließen zu lassen.

Das inverse diskrete Fourierintegral zur Gewinnung der Stoßantwort $h(n)$ aus dem Frequenzgang $H(f)$ eines Systems allgemein

$$h(n) = \frac{1}{f_s} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} H(f) e^{-j2\pi f n T} df \quad \text{mit } T = 1/f_s \quad \{\text{Gleichung 1}\}$$



wird beim **idealen Tiefpaß** mit einer Cutoff-Frequenz f_a zu

$$h_i(n) = \frac{1}{f_s} \int_{-f_a}^{f_a} e^{-j2\pi f n T} df$$

wie f_a aus den Menüwerten gebildet wird, ist am Ende dieses Kapitels erläutert.

Integral lösen:

$$h_i(n) = \left[\frac{1}{f_s(-j2\pi n T)} e^{-j2\pi f n T} \right]_{-f_a}^{f_a}$$

$$\boxed{h_i(n) = \frac{1}{\pi n} \left[\sin\left(2\pi n \frac{f_a}{f_s}\right) \right]} \quad \text{Impulsantwortfolge für } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$$

Für den Grenzfall $n = 0$ kann die Regel von L' Hospital angewendet werden:

$$h_i(n) = \frac{1}{-j2\pi n} \left[e^{-j2\pi n \frac{f_a}{f_s}} - e^{j2\pi n \frac{f_a}{f_s}} \right]$$

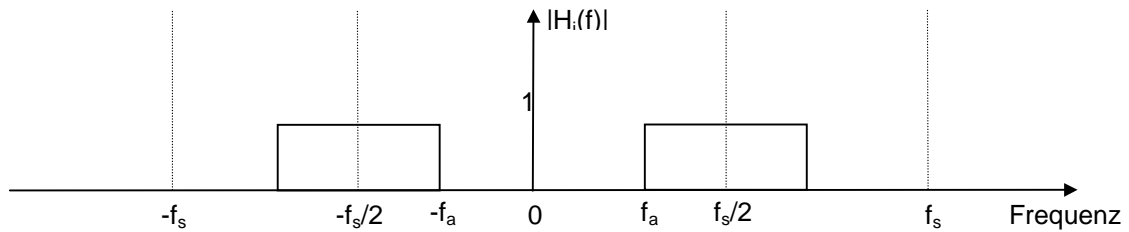
$$h_i(n) = \frac{1}{-j2\pi n} \left[-2j \sin\left(2\pi n \frac{f_a}{f_s}\right) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{x} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f'(x)}{x'} \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin\left(2\pi n \frac{f_a}{f_s}\right)}{n\pi} \right\} = \lim_{n \rightarrow 0} \left\{ \frac{2\pi \frac{f_a}{f_s} \cos\left(2\pi n \frac{f_a}{f_s}\right)}{\pi} \right\}$$

$$h_i(0) = 2 \frac{f_a}{f_s}$$

Impulsantwort des idealen Tiefpasses für $n = 0$

Impulsantwort des idealen Hochpasses

Hier modifiziert sich Gleichung 1 zu

$$h_i(n) = \frac{1}{f_s} \int_{f_a}^{f_s/2} e^{-j2\pi n \frac{f}{f_s}} df + \frac{1}{f_s} \int_{-f_s/2}^{-f_a} e^{-j2\pi n \frac{f}{f_s}} df$$

Integral lösen:

$$h_i(n) = \frac{1}{-j f_s 2\pi n T} \left[e^{-j2\pi n T} \right]_{f_s/2}^{f_a} + \frac{1}{-j f_s 2\pi n T} \left[e^{-j2\pi n T} \right]_{f_a}^{f_s/2}$$

$$h_i(n) = \frac{1}{-f_s j 2\pi n / f_s} \left[e^{j2\pi n f_a / f_s} - e^{j\pi n} + e^{-j\pi n} - e^{-j2\pi n f_a / f_s} \right]$$

mit Euler:

$$e^{-jx} = \cos(x) - j \sin(x)$$

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$$

$$h_i(n) = \frac{1}{\pi n} \left[\sin(n\pi) - \sin(2\pi n f_a / f_s) \right]$$

$$\boxed{h_i(n) = -\frac{1}{\pi n} \sin\left(2\pi n \frac{f_a}{f_s}\right)}$$

für $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

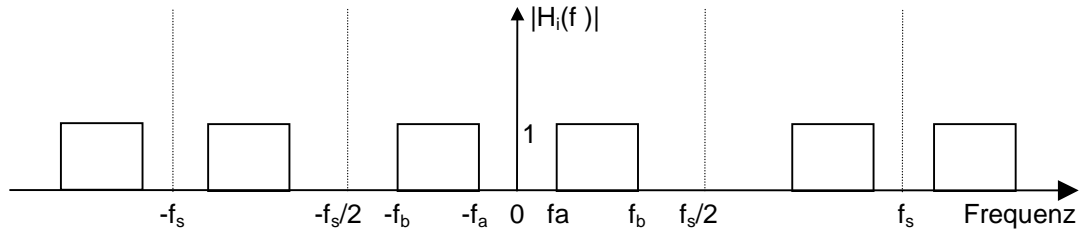
für den Grenzwert $n = 0$ wieder L' Hospital :

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(n\pi) - \sin\left(2\pi n \frac{f_a}{f_s}\right)}{n\pi} \right\} = \lim_{n \rightarrow 0} \left\{ \frac{\pi \cos(n\pi) - 2\pi \frac{f_a}{f_s} \cos\left(2\pi n \frac{f_a}{f_s}\right)}{\pi} \right\}$$

mit $\cos(0) = 1$

$$\boxed{h_i(n) = 1 - 2 \frac{f_a}{f_s}}$$

für $n = 0$

Impulsantwort des idealen Bandpasses

Gleichung 1 wird hier zu

$$h_i(n) = \frac{1}{f_s} \int_{-f_b}^{-f_a} e^{-j2\pi f n T} df + \frac{1}{f_s} \int_{f_a}^{f_b} e^{-j2\pi f n T} df$$

$$h_i(n) = \left[\frac{1}{-f_s 2j\pi n T} e^{-j2\pi f n T} \right]_{-f_b}^{-f_a} + \left[\frac{1}{-f_s 2j\pi n T} e^{-j2\pi f n T} \right]_{f_a}^{f_b}$$

$$h_i(n) = \frac{1}{-j2\pi n} \left[e^{j2\pi n \frac{f_a}{f_s}} - e^{j2\pi n \frac{f_b}{f_s}} + e^{-j2\pi n \frac{f_b}{f_s}} - e^{-j2\pi n \frac{f_a}{f_s}} \right]$$

mit Euler:

$$h_i(n) = \frac{1}{\pi n} \left[\sin\left(2\pi n \frac{f_b}{f_s}\right) - \sin\left(2\pi n \frac{f_a}{f_s}\right) \right] \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$$

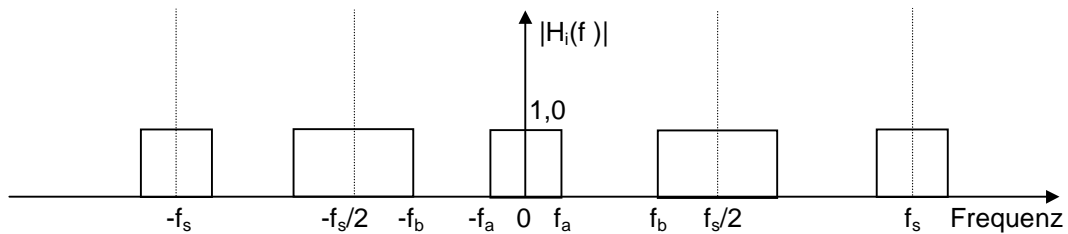
und L' Hospital:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\pi n} \left[\sin\left(2\pi n \frac{f_b}{f_s}\right) - \sin\left(2\pi n \frac{f_a}{f_s}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow 0} \left[2 \frac{f_b}{f_s} \cos\left(2\pi n \frac{f_b}{f_s}\right) - 2 \frac{f_a}{f_s} \cos\left(2\pi n \frac{f_a}{f_s}\right) \right]$$

$$h_i(n) = \frac{2}{f_s} (f_b - f_a) \quad \text{für } n = 0$$

Impulsantwort einer idealen Bandsperre

Frequenzgang:



Gleichung 1 modifiziert sich hier zu

$$h_i(n) = \frac{1}{f_s} \int_{-\frac{f_s}{2}}^{-f_b} e^{-j2\pi f n T} df + \frac{1}{f_s} \int_{-f_a}^{f_a} e^{-j2\pi f n T} df + \frac{1}{f_s} \int_{f_b}^{\frac{f_s}{2}} e^{-j2\pi f n T} df$$

$$h_i(n) = \left[\frac{1}{-f_s j 2\pi T} e^{-j2\pi f n T} \right]_{-\frac{f_s}{2}}^{-f_b} + \left[\frac{1}{-f_s j 2\pi T} e^{-j2\pi f n T} \right]_{-f_a}^{f_a} + \left[\frac{1}{-f_s j 2\pi T} e^{-j2\pi f n T} \right]_{f_b}^{\frac{f_s}{2}}$$

$$h_i(n) = \frac{1}{-j2\pi n} \left[e^{j2\pi n \frac{f_b}{f_s}} - e^{j\pi n} + e^{-j2\pi n \frac{f_a}{f_s}} - e^{-j2\pi n \frac{f_a}{f_s}} + e^{-j\pi n} - e^{-j2\pi n \frac{f_b}{f_s}} \right]$$

$$h_i(n) = -\frac{1}{\pi n} \left[\sin\left(2\pi n \frac{f_b}{f_s}\right) - \sin\left(2\pi n \frac{f_a}{f_s}\right) - \sin(n\pi) \right]$$

$$\boxed{h_i(n) = \frac{1}{\pi n} \left[\sin\left(2\pi n \frac{f_a}{f_s}\right) - \sin\left(2\pi n \frac{f_b}{f_s}\right) \right]} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\pi n} \left[\sin\left(2\pi n \frac{f_a}{f_s}\right) - \sin\left(2\pi n \frac{f_b}{f_s}\right) + \sin(n\pi) \right] \right\} = \lim_{n \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\pi} \left[2\pi \frac{f_a}{f_s} \cos\left(2\pi n \frac{f_a}{f_s}\right) - 2\pi \frac{f_b}{f_s} \cos\left(2\pi n \frac{f_b}{f_s}\right) + \pi \cos(n\pi) \right] \right\}$$

$$\boxed{h_i(0) = \frac{2}{f_s} (f_a - f_b) + 1} \quad \text{für } n = 0$$

Zur Beachtung

Das oben vorgestellte Programm bekommt vom Menü die Parameter Filterart, Fensterart, Ordnung, Samplefrequenz f_s und Grenzfrequenz f_g bzw. Mittenfrequenz f_m und Güte Q übergeben.

In die FIR Synthese fließen statt der Variablen f_g , bzw. f_m und Q jedoch Cutofffrequenz f_a , bzw. f_a und f_b ein. Diese müssen noch aus den Menüwerten gebildet werden.

Bei den Cutoff-(Abschnitts-)frequenzen sind die für die gewünschte Fensterart zugelassenen Welligkeiten des Durchlaßbereiches gerade eben noch erfüllt (siehe Tabelle). Zunächst errechnet das Programm den Übergangsbereich Δf zwischen Paß- und Stopband mit

$$\Delta f = 0,9 \frac{f_s}{2M+1} \quad \text{für's Rechteckfenster}$$

$$\Delta f = 3,1 \frac{f_s}{2M+1} \quad \text{von Hann ("Hanning")}$$

$$\Delta f = 3,3 \frac{f_s}{2M+1} \quad \text{Hamming}$$

$$\Delta f = 5,5 \frac{f_s}{2M+1} \quad \text{Blackman.}$$

Der Zusammenhang von f_a und f_g läßt sich dann mit

$f_a = f_g - \Delta f/2$	beim Tiefpaß und
$f_a = f_g + \Delta f/2$	beim Hochpaß

errechnen. Für Bandpaß oder Bandsperre werden in Anlehnung an einen Schwingkreis die untere und obere 3dB-Frequenz f_{ug} und f_{og} aus Güte Q und Mittenfrequenz f_m erzeugt.

Mit der Bandbreite $B = f_m/Q = f_{og} - f_{ug}$ läßt sich sagen:

$$f_{og} = f_m \left[\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q} \right)^2} \right]$$

$$f_{ug} = f_{og} - B$$

Die Cutofffrequenzen errechnen sich mit

$$f_a = f_{ug} + \Delta f/2$$

$$f_b = f_{og} - \Delta f/2$$

für Bandpaß

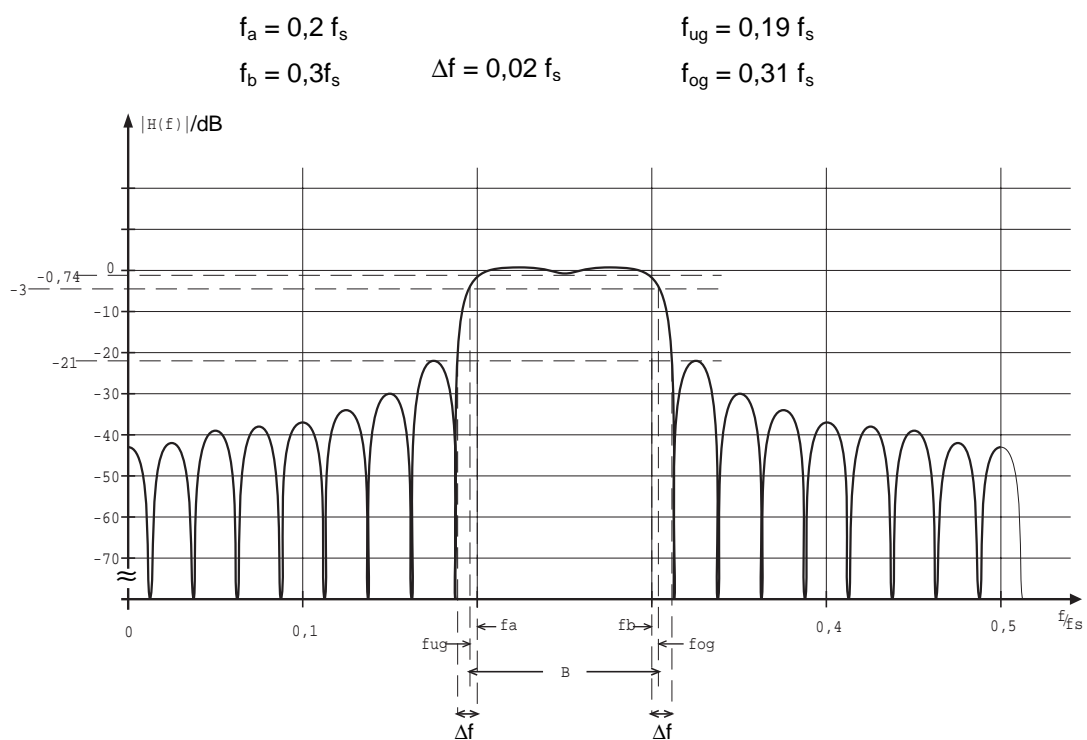
und

$$f_a = f_{ug} - \Delta f/2$$

$$f_b = f_{og} + \Delta f/2$$

Für Bandsperre

Der skizzierte Amplitudenverlauf am Beispiel eines Bandpasses $M = 20$ mit Rechteckfenster verdeutlicht noch einmal diese Zusammenhänge



FIR-Bandpaß 20. Ordnung, Rechteckfenster

IIR – Filterdesign durch Anwendung der bilinearen Transformation

Der Entwurfsvorgang läuft in mehreren Schritten ab. Im Überblick:

- 1.) Festlegen der gewünschten Filtereigenschaften
- 2.) Vorverzerren der Frequenzen
- 3.) Entwerfen eines analogen Tiefpaßprototypen
- 3a) Ggf. transformieren in einen anderen Filtertypen
- 4) Bilinear in die digitale Z-Ebene transformieren
- 5) Koeffizienten mit allgemeiner Z-Übertragungsfunktion vergleichen
- 6) die gefundenen Koeffizienten den Arrays zuordnen

✓ Typ, Ordnung

En Detail:

1.) Zuerst werden die Eigenschaften unseres Filters definiert wie Filtertyp, Grenzfrequenz f_g , bzw. f_{ug} und f_{og} , Filterordnung N und Abtastrate f_s . Diese Parameter werden vom Menü an das Syntheseprogramm übergeben.

2.) Durch die bilineare Transformation wird der Frequenzgang eines analogen Filters der - rechtsseitig betrachtet - von $f = 0$ bis $f = \infty$ reicht auf den Bereich von $f = 0$ bis $f = f_s/2$ gestaucht. Dieser Verlauf spiegelt sich an den ganzzahligen Vielfachen von f_s (siehe auch AD-Wandlung). Durch diese Modifikation der Frequenzachse wandert auch die Grenzfrequenz unseres Filters. Um sich an diesen Effekt anzupassen wird die Kreisfrequenz ω nach der Formel

$$\omega = \tan \omega T / 2 = \tan \pi f / f_s$$

auf die Abtastfrequenz normiert und an die **Verzerrung** angepasst ("prewarping"). Die neue Grenzfrequenz ist damit

$$\omega_c = \tan \frac{\pi \cdot f_g}{f_s} \quad \text{bei Hoch- und Tiefpaß}$$

bzw.

$$\omega_1 = \tan \frac{\pi \cdot f_{ug}}{f_s}$$

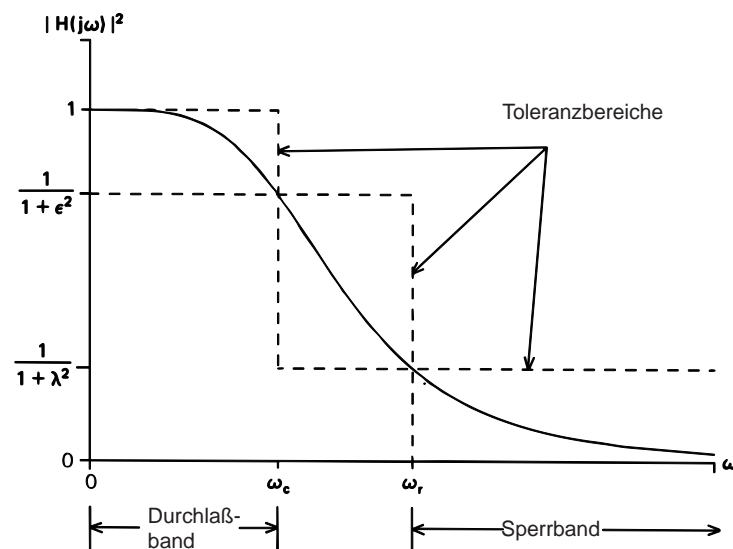
und

$$\omega_2 = \tan \frac{\pi \cdot f_{og}}{f_s} \quad \text{bei Bandpaß und Bandsperre}$$

3.) Als nächstes wird ein analoger Tiefpaß entworfen. Wir haben uns für einen Butterworthprototypen entschieden, weil sein Amplitudengang als maximal flach gilt, da sämtliche Ableitungen des Polynoms bei $f = 0$ verschwinden. Die resultierende geringe Welligkeit im Durchlaßbereich geht allerdings auf Kosten der Flankensteilheit im Übergangsbereich. Da wir hier die Filter nicht diskret, also mit Addierern und

Verzögerungsgliedern, sondern mit Signalprozessor und Software implementieren, ist es ohne großen Aufwand möglich durch exzessive Steigerung der Filterordnung sehr steile Flanken im Amplitudengang zu realisieren.

Betrachtet man sich das rechtsseitige Toleranzschema in der Leistungsverstärkungscharakteristik (des quadrierten Amplitudengangs) eines Tiefpasses, so fallen die neuen Parameter ε , λ und ω_r auf.



Verstärkungsverlauf eines Butterworth-Tiefpasses

Der Durchlaßbereich ist hier für Frequenzen definiert bei denen $|H(j\omega)|^2 \geq \frac{1}{1+\varepsilon^2}$

und der Sperrbereich für Frequenzen, bei denen $|H(j\omega)|^2 \leq \frac{1}{1+\lambda^2}$ ist.

Für die zukünftigen Rechnungen wollen wir die Grenze des Durchlaßbereiches bei 3dB Amplituden- und Leistungsabfall festlegen.

Mit $|H(j\omega_c)|^2 = \frac{1}{10^{(3\text{dB}/10)}} = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+\varepsilon^2}$ ergibt sich $\boxed{\varepsilon = 1.}$

Allgemein werden die Toleranzgrenzen beim Filterentwurf zuerst festgelegt und dann die notwendige Filterordnung N bestimmt, mit der sich diese Spezifikationen noch erfüllen lassen.

Dazu läßt sich die Formel $N \geq \frac{\log(\lambda / \varepsilon)}{\log(\omega_r / \omega_c)}$ verwenden.

In unserem Fall soll nur ε vorbestimmt, die Filterordnung jedoch frei wählbar sein. Wer trotzdem wissen will bei welcher Frequenz ω_r der Filter im Sperrbereich angelangt ist, kann dies unter

Festlegung von λ mit Hilfe der obigen Formel tun. Definiere ich beispielsweise die Sperrdämpfung auf mindestens 60dB, entspricht das einem Amplitudenabfall um den Faktor 1/1000 und einem Leistungsabfall um den Faktor 1/1000000.

$$\begin{aligned} \text{Mit} \quad & \frac{1}{1+\lambda^2} = 10^{-6} \rightarrow \lambda \approx 10^3 \\ \text{und} \quad & N \geq \frac{\log 10^3}{\log(\omega_r / \omega_c)} \end{aligned}$$

ergibt sich der Zusammenhang $\boxed{\omega_r \geq 10^{3/N} \cdot \omega_c}$

Den Parameter λ wollen wir für die weiteren Berechnungen außer Betracht lassen. Allgemein läßt sich noch sagen, das weit abseits der Grenzfrequenz im Sperrbereich die Flankensteilheit eines Butterworthfilters $N \cdot 6\text{dB}$ pro Oktave beträgt.

Die Leistungsverstärkung eines solchen Tiefpasses läßt sich allgemein beschreiben mit

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2(\omega/\omega_c)^{2N}}$$

mit $\varepsilon = 1$ wird bei uns daraus

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2N}}$$

Die Polstellen der Funktion in der s-Ebene mit $s = j\omega$ ergeben sich mit

$$1+(\omega/\omega_c)^{2N} = 0 \quad \text{zu} \quad \boxed{s_n = \omega_c \cdot e^{j\pi(2n+N-1)/2N}} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, 3, \dots, 2N.$$

Die Pole liegen in der komplexen s-Ebene auf einem Kreis mit dem Radius $R = \omega_c$ und dem Winkel $\theta = \pi(2n+N-1)/2N$.

Als Stabilitätskriterium der Z- Transformation gilt die Regel, das bei einem System alle Polstellen innerhalb des Z-Einheitskreises liegen müssen. Wenn unser Filter also nicht schwingen soll, müssen alle Pole in der linken s-Halbebene liegen. s_n wird aus diesem Grund

bei der Polstellenfindung nur für $\boxed{n = 0, 1, 2, \dots, N}$

betrachtet.

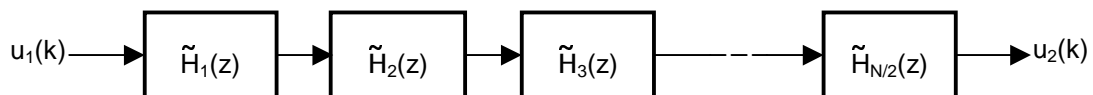
Im Frequenzbereich läßt sich die Übertragungsfunktion des Tiefpasses jetzt in der Produktform schreiben

$$H(s) = \frac{s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_N}{(s - s_1)(s - s_2) \cdot \dots \cdot (s - s_N)}$$

4.) Wird ein **Tiefpaß** als Filtertyp gewünscht, kann jetzt die Funktion mit Hilfe die bilinearen Substitution von s durch $(z-1)/(z+1)$ in die digitale Ebene transformiert werden.

$$\tilde{H}(z) = \frac{s_1 s_2 \dots s_N}{\left(\frac{z-1}{z+1} - s_1\right) \left(\frac{z-1}{z+1} - s_2\right) \dots \left(\frac{z-1}{z+1} - s_N\right)}$$

Für die Implementierung des Algorithmus ist es vorteilhaft, den Filter in $N/2$ Sektionen mit der Ordnung 2 zu zerlegen. Voraussetzung ist, dass der Filterordnung geradzahlig gewählt wird (siehe Menüführung). Diese Biquadsektionen können kaskadiert werden, um zum gewünschten Filtergrad zu gelangen. Die Skizze veranschaulicht den Vorgang.



$$\tilde{H}(z) = \prod_{n=1}^{N/2} \tilde{H}_n(z) \quad \text{mit } n \in N$$

Fasst man jeweils die Pole s_n und s_{N+1-n} im n -ten Biquadsektor zusammen, schreibt sich

$$\tilde{H}_n(z) = \frac{s_n s_{N+1-n} (z+1)^2}{[(1-s_n)z - (1+s_n)][(1-s_{N+1-n})z - (1+s_{N+1-n})]}$$

Die Pole s_n und s_{N+1-n} spiegeln sich an der s -Realteilachse, sind also konjugiert komplex.

$s_n = R e^{j\theta}$	$s_{N+1-n} = R \cdot e^{-j\theta} = s_n^*$	mit $R = \omega_c$	und	$\theta = \pi(2n + N - 1)/2N$
-----------------------	--	--------------------	-----	-------------------------------

Ein Biquadsektor vereinfacht sich dadurch zu

$$\tilde{H}_n(z) = \frac{(z^2 + 2z + 1)R^2}{[1 - 2R \cos \theta_n + R^2]z^2 - [2 - 2R^2]z + [1 + 2R \cos \theta_n + R^2]}$$

5.) Nach Teilung durch die höchste Potenz von z

$$\tilde{H}_n(z) = \frac{R^2 z^{-2} + 2R^2 z^{-1} + R^2}{[1 - 2R \cos \Theta_n + R^2] - [2 - 2R^2] z^{-1} + [1 + 2R \cos \Theta_n + R^2] z^{-2}}$$

könnte man den Koeffizientenvergleich mit einer allgemeinen rekursiven Z-Übertragungsfunktion anstellen,

$$\tilde{H}_n(z) = \frac{b_{0n} + b_{1n} z^{-1} + b_{2n} z^{-2}}{a_{0n} + a_{1n} z^{-1} + a_{2n} z^{-2}} \quad \{\text{Gleichung 1}\}$$

zuvor bringt man aber noch den Koeffizienten a_{0n} auf den Wert 1 .

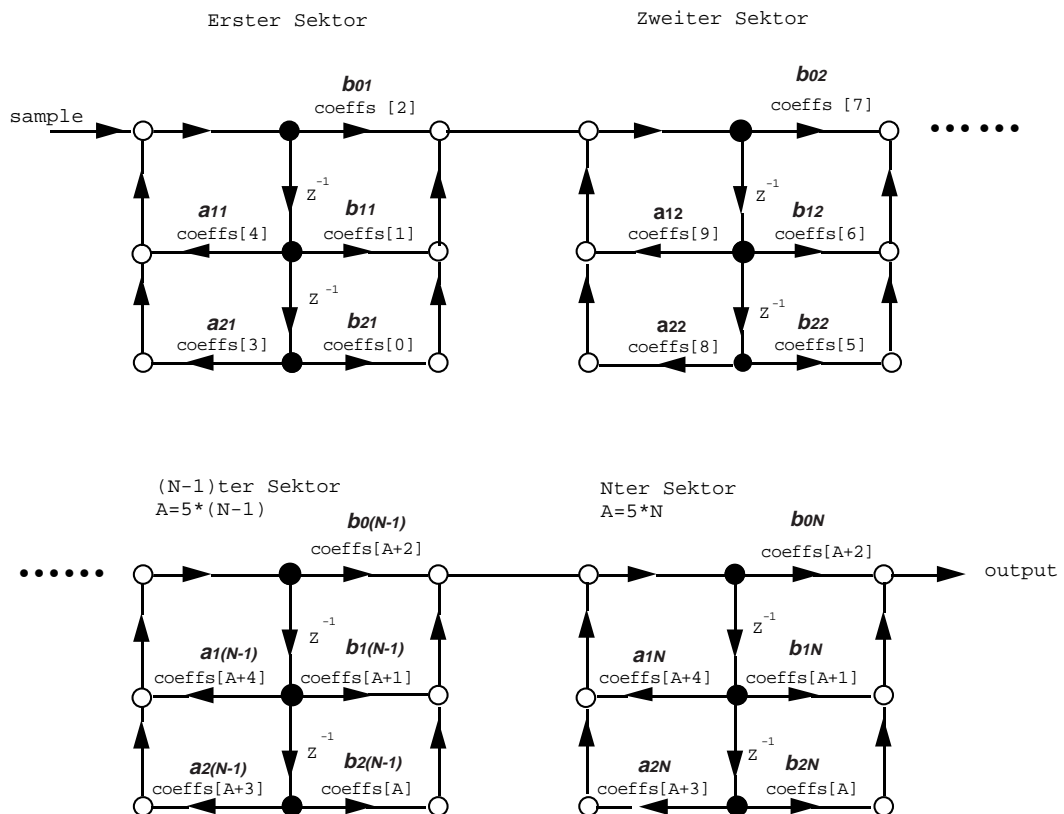
$$\tilde{H}_n(z) = \frac{\frac{R^2}{1 - 2R \cos \Theta_n + R^2} (1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - \frac{2 - 2R^2}{1 - 2R \cos \Theta_n + R^2} z^{-1} + \frac{1 + 2R \cos \Theta_n + R^2}{1 - 2R \cos \Theta_n + R^2} z^{-2}}$$

Die gesuchten Filterkoeffizienten des Tiefpasses lauten somit

$$\begin{aligned} b_{0n} &= \frac{R^2}{1 - 2R \cos \Theta_n + R^2} & a_{1n} &= \frac{2 - 2R^2}{1 - 2R \cos \Theta_n + R^2} \\ b_{1n} &= \frac{2R^2}{1 - 2R \cos \Theta_n + R^2} & a_{2n} &= \frac{1 + 2R \cos \Theta_n + R^2}{1 - 2R \cos \Theta_n + R^2} \\ b_{2n} &= \frac{R^2}{1 - 2R \cos \Theta_n + R^2} = b_{0n} \end{aligned}$$

mit $R = \omega_c$ $\Theta = \pi(2n+N-1)/2N$ $n = 1, 2, \dots, N/2$.

6.) Bei der Filterung eines Signales greift die C-Funktion `biquad()` des Prozessors auf das Array `coeffs[]` nach dem skizzierten Schema zu:



die a und b Koeffizienten des n-ten Sektors werden daher nach dem folgenden Verfahren in das Array `iir_coeffs[]` gelegt:

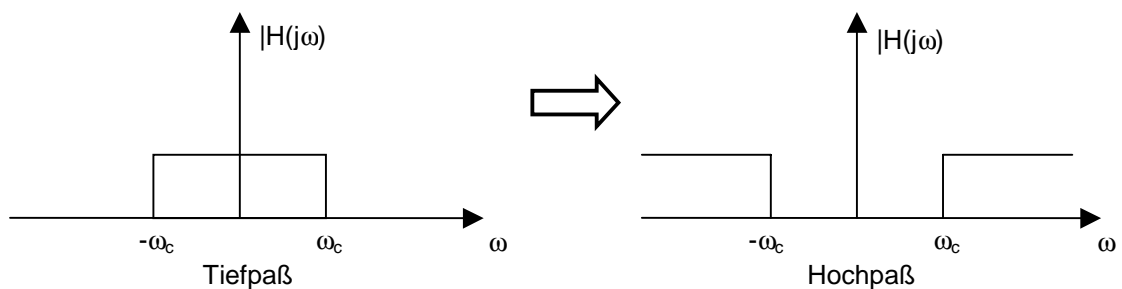
```

b0n = iir_coeffs[5n-3]
b1n = iir_coeffs[5n-4]
b2n = iir_coeffs [5n-5]
a1n = iir_coeffs[5n-1]
a2n = iir_coeffs[5n-2]

```

Beim **Hochpaßentwurf** wird ähnlich vorgegangen wie beim Tiefpaßdesign. Zuerst wird also wieder in Schritt 1 - 3 ein Referenz Tiefpaß mit der vorverzerren Grenzfrequenz ω_c des Hochpasses entworfen.

3a) Mit dem Ergebnis aus Punkt 3 wird anschließend eine Frequenztransformation durchgeführt.



Die Variable **s** der Tiefpaßübertragungsfunktion wird dabei durch ω_c^2/s ersetzt. In der Produktform schreibt sich die Übertragungsfunktion des Hochpasses

$$H(s) = \frac{s_1 s_2 \dots s_N}{\left(\frac{\omega^2}{s} - s_1\right) \left(\frac{\omega^2}{s} - s_2\right) \dots \left(\frac{\omega^2}{s} - s_N\right)}$$

$$\text{mit} \quad s_n = R \cdot e^{j\theta}, \quad R = \omega_c, \quad \theta = \pi(2n+N-1)/2N \quad n = 1, 2, \dots, N$$

oder umgeformt

$$H(s) = \frac{s^N}{\left(\frac{\omega^2}{s_1} - s\right) \left(\frac{\omega^2}{s_2} - s\right) \dots \left(\frac{\omega^2}{s_N} - s\right)}$$

4.) $H(s)$ kann jetzt wieder bilinear in den z- Bereich transformiert

$$\tilde{H}(z) = \frac{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^N}{\left(\frac{z-1}{z+1} - \frac{\omega_c^2}{s_1}\right) \left(\frac{z-1}{z+1} - \frac{\omega_c^2}{s_2}\right) \dots \left(\frac{z-1}{z+1} - \frac{\omega_c^2}{s_N}\right)}$$

und aufteilt werden in $N/2$ Biquad Sektionen. Es schreibt sich der n -te Sektor

$$\tilde{H}_n(z) = \frac{(z+1)^2}{\left[z - 1 - \frac{\omega_c^2}{s_n}(z+1)\right] \left[z - 1 - \frac{\omega_c^2}{s_{N+1-n}}(z+1)\right]}$$

Ausmultipliziert, nach dem Grad von z sortiert und unter der Beachtung, das

$$s_n \cdot s_{N+1-n} = \omega_c^2 \quad \text{und} \quad s_n + s_{N+1-n} = R \cdot e^{j\theta} + R \cdot e^{-j\theta} = 2R \cos \theta \quad \text{ergibt sich}$$

$$\tilde{H}_n(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{\left[1 - \frac{2\omega_c^2}{R} \cos \theta_n + \frac{\omega_c^4}{R^2}\right] z^2 - \left[2 - \frac{2\omega_c^4}{R^2}\right] z + \left[1 + \frac{2\omega_c^2}{R} \cos \theta_n + \frac{\omega_c^4}{R^2}\right]}$$

$$\text{mit } R = \omega_c: \quad \tilde{H}_n(z) = \frac{z^2 - 2z + 1}{\left[1 + \omega_c^2 - 2\omega_c \cos \theta_n\right] z^2 - \left[2 - 2\omega_c^2\right] z + \left[1 + \omega_c^2 + 2\omega_c \cos \theta_n\right]}.$$

Dividieren durch den höchsten Exponenten von z und anschließend normieren auf $a_{0n} = 1$ führt zur gewünschten Form des n -ten Biquadsektors

$$\tilde{H}_n(z) = \frac{\frac{1}{1 + \omega_c^2 - 2\omega_c \cos \theta_n} - \frac{2}{1 + \omega_c^2 - 2\omega_c \cos \theta_n} z^{-1} + \frac{1}{1 + \omega_c^2 - 2\omega_c \cos \theta_n} z^{-2}}{1 - \frac{2 - 2\omega_c^2}{1 + \omega_c^2 - 2\omega_c \cos \theta_n} z^{-1} + \frac{1 + \omega_c^2 + 2\omega_c \cos \theta_n}{1 + \omega_c^2 - 2\omega_c \cos \theta_n} z^{-2}}$$

5.) Wenn man jetzt wie beim Tiefpaß den Koeffizientenvergleich mit der allgemeinen z-Übertragungsfunktion 2. Grades {Gleichung 1} anstellt, erhält man die gesuchten Filterkoeffizienten unseres Hochpasses.

$$\begin{aligned}
 b_{0n} &= \frac{1}{1 - 2\omega_c \cos \Theta_n + \omega_c^2} & a_{1n} &= -\frac{2 - 2\omega_c^2}{1 - 2\omega_c \cos \Theta_n + \omega_c^2} \\
 b_{1n} &= -\frac{2}{1 - 2\omega_c \cos \Theta_n + \omega_c^2} & a_{2n} &= \frac{1 + 2\omega_c \cos \Theta_n + \omega_c^2}{1 - 2\omega_c \cos \Theta_n + \omega_c^2} \\
 b_{2n} &= \frac{1}{1 - 2\omega_c \cos \Theta_n + \omega_c^2}
 \end{aligned}$$

mit

$$\Theta = \pi(2n+N-1)/2N$$

$$n = 1, 2, \dots, N/2$$

6.) Im letzten Schritt werden die Koeffizienten der N/2 Biquadsektionen wieder dem bei der Filterung eines Signales benutzten Array `iir_coeffs[]` zugeordnet.

$$\begin{aligned}
 b_{0n} &= \text{iir_coeffs}[5n-3] \\
 b_{1n} &= \text{iir_coeffs}[5n-4] = -2b_{0n} \\
 b_{2n} &= \text{iir_coeffs}[5n-5] = b_{0n} \\
 a_{1n} &= \text{iir_coeffs}[5n-1]
 \end{aligned}$$

$$a_{2n} = \text{iir_coeffs}[5n-2]$$

Bei der **Bandpaßsynthese** wird auch wieder zuerst ein Tiefpaßprototyp entworfen. Als Grenzfrequenz ω_c wird dabei die vorverzerrte Bandbreite des anvisierten Bandpasses verwendet.

$$\omega_c = \omega_2 - \omega_1 \qquad \omega_1 = \tan \frac{\pi \cdot f_{ug}}{f_s} \qquad \omega_2 = \tan \frac{\pi \cdot f_{og}}{f_s}$$

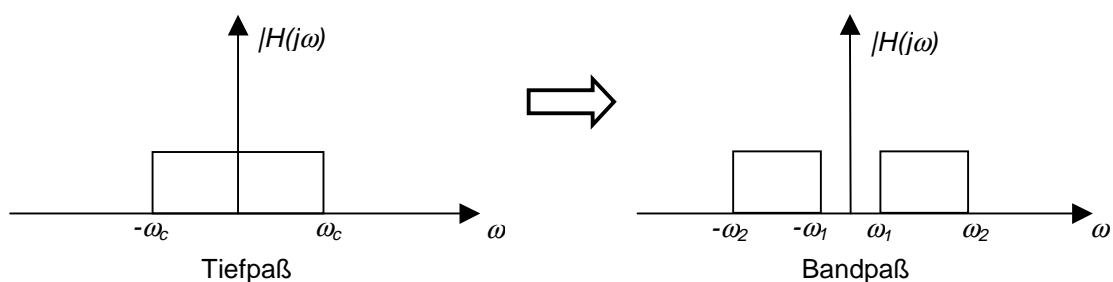
Wie auch beim Design von FIR-Filtern benötigt das IIR-Filtersyntheseprogramm die Größen f_{ug} und f_{og} . In Anlehnung an einen Schwingkreis wird die untere und obere 3dB-Frequenz f_{ug} und f_{og} aus Güte Q und Mittenfrequenz f_m erzeugt.

Mit der Bandbreite $B = f_m/Q$ und $B = f_{og} - f_{ug}$

$$f_{og} = f_m \left[\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q} \right)^2} \right]$$

$$f_{ug} = f_{og} - B$$

3a) mit der S-Tiefpaßübertragungsfunktion aus 3) wird eine Frequenztransformation durchgeführt.



Dabei wird die Variable s durch den Ausdruck $(s^2 + \omega_1 \omega_2)/s$ ersetzt. Die Übertragungsfunktion des Bandpasses

$$H(s) = \frac{s_1 s_2 \dots s_N}{\left(\frac{s^2 + \omega_1 \omega_2}{s} - s_1 \right) \left(\frac{s^2 + \omega_1 \omega_2}{s} - s_2 \right) \dots \left(\frac{s^2 + \omega_1 \omega_2}{s} - s_N \right)}$$

wird etwas umgeformt und wieder in $N/2$ Biquadsektionen zerlegt.

$$H_n(s) = \frac{s_n s_{N+1-n} \cdot s^2}{(s^2 + \omega_1 \omega_2 - s \cdot s_n)(s^2 + \omega_1 \omega_2 - s \cdot s_{N+1-n})} \quad \text{Mit } s_n \cdot s_{N+1-n} = \omega_c^2$$

wobei s_{nTP} die n -te Tiefpaßpolstelle darstellt.

Die Pole der Bandpaßübertragungsfunktion gewinnt man nach der p/q-Formel

$$\begin{aligned} s_{n_{1,2}} &= \frac{1}{2} \left(s_{nTP} \pm \sqrt{s_{nTP}^2 - 4\omega_1 \omega_2} \right) \\ s_{N+1-n_{1,2}} &= \frac{1}{2} \left(s_{N+1-nTP} \pm \sqrt{s_{N+1-nTP}^2 - 4\omega_1 \omega_2} \right) \end{aligned}$$

Man sieht: durch die Auflösung der quadratischen Klammerausdrücke *verdoppelt* sich die Anzahl der Polstellen und damit verdoppelt sich auch der Filtergrad im Gegensatz zu Hoch- oder Tiefpaß. Um weiter die Biquadroutine des SHARC-Prozessors nutzen zu können, wird der Ausdruck $H_n(s)$ in 2 Teilsektionen zerlegt.

$$H_n(s) = H_{n_1}(s) \cdot H_{n_2}(s) = \frac{\omega_c s}{(s - s_{n_1})(s - s_{N+1-n_1})} \cdot \frac{\omega_c s}{(s - s_{n_2})(s - s_{N+1-n_2})} \quad \text{mit } s_{N+1-n_{1,2}} = s_{n_{1,2}}^*$$

4.) Bilineare Transformation von $H(s)$ in $\tilde{H}(z)$.

$$s \leftarrow (z-1)/(z+1)$$

$$\tilde{H}_n(z) = \frac{\omega_c (z-1)(z+1)}{[(z-1) - s_{n_1}(z+1)][(z-1) - s_{N+1-n_1}(z+1)]} \cdot \frac{\omega_c (z-1)(z+1)}{[(z-1) - s_{n_2}(z+1)][(z-1) - s_{N+1-n_2}(z+1)]}$$

Die Nenner der n -ten Doppelbiquadsektion des Bandpasses werden jeweils ausmultipliziert, die Faktoren nach dem Grad von z geordnet zusammengefasst.

$$\tilde{H}_{n_1}(z) = \frac{\omega_c z^2 - \omega_c}{z^2 \underbrace{[1 - s_{n_1}^* - s_{n_1} + s_{n_1}^* s_{n_1}]}_{(1-s_{n_1})(1-s_{n_1}^*)} - z \underbrace{[2 - 2s_{n_1}^* s_{n_1}]}_{(1-s_{n_1})(1+s_{n_1}^*) + (1+s_{n_1})(1-s_{n_1}^*)} + \underbrace{[1 + s_{n_1}^* + s_{n_1} + s_{n_1}^* s_{n_1}]}_{(1+s_{n_1})(1+s_{n_1}^*)}}$$

$$\tilde{H}_{n_2}(z) = \frac{\omega_c z^2 - \omega_c}{z^2 \underbrace{[1 - s_{n_2}^* - s_{n_2} + s_{n_2}^* s_{n_2}]}_{(1-s_{n_2})(1-s_{n_2}^*)} - z \underbrace{[2 - 2s_{n_2}^* s_{n_2}]}_{(1-s_{n_2})(1+s_{n_2}^*) + (1+s_{n_2})(1-s_{n_2}^*)} + \underbrace{[1 + s_{n_2}^* + s_{n_2} + s_{n_2}^* s_{n_2}]}_{(1+s_{n_2})(1+s_{n_2}^*)}}$$

5.) Wenn man durch die höchste Potenz von z teilt und Koeffizient a_0 auf den Wert 1 bringt,

$$\tilde{H}_{n_i}(z) = \frac{\frac{\omega_c - \omega_c z^{-2}}{(1-s_{n_i})(1-s_{n_i}^*)}}{1 - \left[\frac{1+s_{n_i}^*}{1-s_{n_i}^*} + \frac{1+s_{n_i}}{1-s_{n_i}} \right] z^{-1} + \frac{(1+s_{n_i})(1+s_{n_i}^*)}{(1-s_{n_i})(1-s_{n_i}^*)} z^{-2}} \quad i = 1, 2 \quad n = 1, 2, \dots, N/2$$

könnte man eigentlich schon die gesuchten Filterkoeffizienten des n-ten Biquad-Teilsektors durch Vergleich mit der allgemeinen Z-Übertragungsfunktion {Gleichung 1} ablesen. Wir möchten aber vorher die Koeffizienten noch etwas vereinfachen, um den Rechenaufwand für die Echtzeitsynthese des DSP möglichst gering zu halten.

So wie der n-te und (N+1-n)-te Pol des Tiefpasses konjugiert komplex sind, so sind es auch die Bandpaßpole s_{ni} und s_{N+1-ni} , sowie z_{ni} und z_{N+1-ni} . Die Bandpaßpole ließen sich auch herleiten durch

$$z_{ni} = (1 + s_{ni}) / (1 - s_{ni}) .$$

Liegen die komplexen S-Polstellen $s_{n1,2}$ und $s_{N+1-n1,2} = s_{n1,2}^*$ vor, läßt sich der Nenner des Zählers "Nullnenner" so ausdrücken:

$$(1 - s_{n_i})(1 - s_{n_i}^*) = 1 - 2 \cdot \operatorname{Re}\{s_{n_i}\} + |s_{n_i}|^2$$

Die a_{1ni} - Koeffizienten vereinfachen sich zu

$$-\left[\frac{1 + s_{n_i}}{1 - s_{n_i}} + \frac{1 + s_{n_i}^*}{1 - s_{n_i}^*} \right] = -[z_{n_i} + z_{n_i}^*] = -2 \cdot \operatorname{Re}\{z_{n_i}\},$$

die a_{2i} - Koeffizienten zu

$$\frac{(1+s_{n_i})(1+s_{n_i}^*)}{(1-s_{n_i})(1-s_{n_i}^*)} = z_{n_i} \cdot z_{n_i}^* = |z_{n_i}|^2.$$

Die gesuchten Filterkoeffizienten des n_i -ten Biquadteilelementes eines Butterworthbandpasses sind damit

$$\begin{aligned} b_{0_{n_i}} &= \frac{\omega_c}{1 - \operatorname{Re}\{s_{n_i}\} + |s_{n_i}|^2} & a_{1_{n_i}} &= -2 \operatorname{Re}\{z_{n_i}\} \\ b_{1_{n,i}} &= 0 & a_{2_{n_i}} &= |z_{n_i}|^2 \\ b_{2_{n_i}} &= -\frac{\omega_c}{1 - \operatorname{Re}\{s_{n_i}\} + |s_{n_i}|^2} = -b_{0_{n_i}} \end{aligned}$$

$\omega_c = \omega_2 - \omega_1 \qquad i = 1, 2 \qquad n = 1, 2, \dots, N/2$

6.) Die Zuordnung der Filterkoeffizienten zum Array `iir_coeffs[]` variiert hier zum Tiefpaß, da pro geradzahlig Filterordnung 2 Biquadteilsektionen kaskadiert werden müssen.

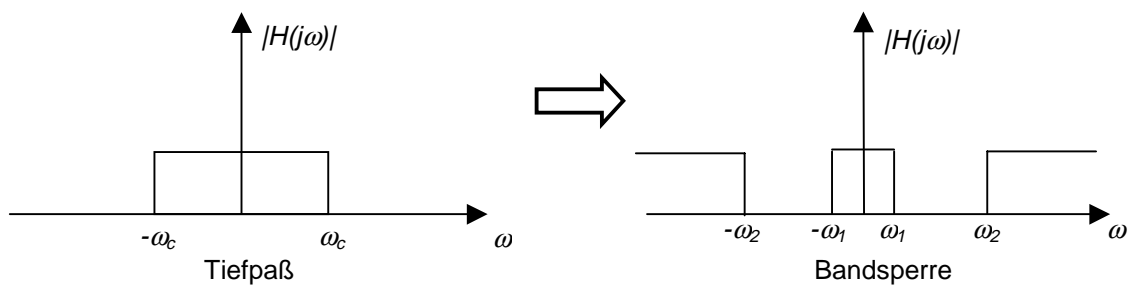
$$\begin{aligned} b_{0_{ni}} &= \text{iir_coeffs}[5 \cdot (2n-i-1) - 3] \\ b_{1_{ni}} &= \text{iir_coeffs}[5 \cdot (2n-i-1) - 4] \\ b_{2_{ni}} &= \text{iir_coeffs}[5 \cdot (2n-i-1) - 5] \\ a_{1_{ni}} &= \text{iir_coeffs}[5 \cdot (2n-i-1) - 1] \\ a_{2_{ni}} &= \text{iir_coeffs}[5 \cdot (2n-i-1) - 2] \end{aligned}$$

Will man eine **Bandsperr**e entwerfen, greift man wieder auf den Tiefpaß zurück, der wie zuvor mit der Grenzfrequenz ω_c .-der vorverzerzte Bandbreite des anvisierten Filters- entwickelt wurde.

$$\omega_c = \omega_2 - \omega_1$$

$$\omega_2 = \tan \frac{\pi \cdot f_{og}}{f_s}$$

3a) Es wird die Tiefpaß - Bandsperrtransformation wie skizziert vorgenommen



Dafür ersetzt man **s** In der Prototypübertragungsfunktion durch

$$s \leftarrow \frac{s \cdot \omega_c^2}{s^2 + \omega_1 \omega_2}$$

und erhält die Übertragungsfunktion der Bandsperr

$$H(s) = \frac{s_{1TP} s_{2TP} \dots s_{NTP}}{\left(\frac{s \omega_c^2}{s^2 + \omega_1 \omega_2} - s_{1TP} \right) \left(\frac{s \omega_c^2}{s^2 + \omega_1 \omega_2} - s_{2TP} \right) \dots \left(\frac{s \omega_c^2}{s^2 + \omega_1 \omega_2} - s_{NTP} \right)}$$

Es wird wieder umgeformt und in Biquadsektoren zerlegt.

$$H_n(s) = \frac{(s^2 + \omega_1\omega_2)(s^2 + \omega_1\omega_2)s_{nTP} s_{nTP}^*}{[s\omega_c^2 - s_{nTP}(s^2 + \omega_1\omega_2)][s\omega_c^2 - s_{nTP}^*(s^2 + \omega_1\omega_2)]} \quad n = 1, 2, 3, \dots, N/2$$

Mit $s_{nTP} = \omega_c e^{j\theta}$ wird ω_c^2/s_{nTP} zu s_{nTP}^* und es schreibt sich

$$H_n(s) = \frac{(s^2 + \omega_1\omega_2)(s^2 + \omega_1\omega_2)}{[s^2 - s \cdot s_{nTP}^* + \omega_1\omega_2][s^2 - s \cdot s_{nTP} + \omega_1\omega_2]} ,$$

wobei s_{nTP} die n-te Tiefpaßpolstelle darstellt.

Der Nenner des Ausdrucks ist identisch mit dem des Bandpasses. Es ergeben sich nach Auflösung der quadratischen Klammerausdrücke wieder die doppelte Polstellenzahl des Referenziefpasses. $H_n(s)$ zerlegt man wieder in die beiden Teilabschnitte $H_{n1}(s)$ und $H_{n2}(s)$.

$$H_n(s) = H_{n1}(s) \cdot H_{n2}(s) = \frac{s^2 + \omega_1\omega_2}{(s - s_{n1})(s - s_{n1}^*)} \cdot \frac{s^2 + \omega_1\omega_2}{(s - s_{n2})(s - s_{n2}^*)}$$

mit

$$\begin{aligned} s_{n1,2} &= \frac{1}{2} \left(s_{nTP} \pm \sqrt{s_{nTP}^2 - 4\omega_1\omega_2} \right) \\ s_{N+1-n1,2} &= \frac{1}{2} \left(s_{N+1-nTP} \pm \sqrt{s_{N+1-nTP}^2 - 4\omega_1\omega_2} \right) = s_{n1,2}^* \end{aligned}$$

4.) Die Variable s wird wieder bilinear substituiert $s \leftarrow (z-1)/(z+1)$

$$\tilde{H}_{n_i}(z) = \frac{(z-1)^2 + \omega_1\omega_2(z+1)^2}{[(z-1) - s_{n_i}(z+1)][(z-1) - s_{n_i}^*(z+1)]} \quad i = 1, 2$$

Die Gleichung ausmultipliziert und nach dem Grad von z geordnet ergibt sich

$$\tilde{H}_{n_i}(z) = \frac{z^2[1 + \omega_1\omega_2] + z[2\omega_1\omega_2 - 2] + \omega_1\omega_2 + 1}{z^2 \underbrace{[1 - s_{n_i}^* - s_{n_i} + s_{n_i}^* s_{n_i}]}_{(1-s_{n_i})(1-s_{n_i}^*)} - z \underbrace{[2 - 2s_{n_i}^* s_{n_i}]}_{(1-s_{n_i})(1+s_{n_i}^*) + (1+s_{n_i})(1-s_{n_i}^*)} + \underbrace{[1 + s_{n_i}^* + s_{n_i} + s_{n_i}^* s_{n_i}]}_{(1+s_{n_i})(1+s_{n_i}^*)}]$$

teilen durch die höchste Potenz von z und Koeffizient a_{0in} zu 1 machen

$$\tilde{H}_{n_i}(z) = \frac{\omega_1 \omega_2 + 1 + [2\omega_1 \omega_2 - 2]z^{-1} + [\omega_1 \omega_2 + 1]z^{-2}}{(1 - s_{n_i})(1 - s_{n_i}^*)} \cdot \frac{1 - \left[\frac{1 + s_{n_i}^*}{1 - s_{n_i}^*} + \frac{1 + s_{n_i}}{1 - s_{n_i}} \right] z^{-1} + \left[\frac{(1 + s_{n_i})(1 + s_{n_i}^*)}{(1 - s_{n_i})(1 - s_{n_i}^*)} \right] z^{-2}}{1}$$

weiter vereinfachen, denn wie beim Bandpaß ist der "Nullnenner"

$$(1 - s_{n_i})(1 - s_{n_i}^*) = 1 - 2 \cdot \operatorname{Re}\{s_{n_i}\} + |s_{n_i}|^2$$

und mit

$$z_{n_i} = \frac{1 + s_{n_i}}{1 - s_{n_i}}$$

sind die a_{1ni} - Koeffizienten
$$-\left[\frac{1 + s_{n_i}}{1 - s_{n_i}} + \frac{1 + s_{n_i}^*}{1 - s_{n_i}^*} \right] = [z_{n_i} + z_{n_i}^*] = -2 \cdot \operatorname{Re}\{z_{n_i}\}$$

und die a_{2ni} - Koeffizienten
$$\frac{(1 + s_{n_i})(1 + s_{n_i}^*)}{(1 - s_{n_i})(1 - s_{n_i}^*)} = z_{n_i} \cdot z_{n_i}^* = |z_{n_i}|^2$$

5.) Durch den Vergleich mit einer allgemeinen Z - Übertragungsfunktion lassen sich jetzt die Filterkoeffizienten finden

$b_{0n_i} = \frac{1 + \omega_1 \omega_2}{1 - \operatorname{Re}\{s_{n_i}\} + s_{n_i} ^2}$	$a_{1n_i} = -2 \operatorname{Re}\{z_{n_i}\}$
$b_{1n_i} = \frac{2\omega_1 \omega_2 - 2}{1 - \operatorname{Re}\{s_{n_i}\} + s_{n_i} ^2}$	$a_{2n_i} = z_{n_i} ^2$
$b_{2n_i} = \frac{\omega_1 \omega_2 + 1}{1 - \operatorname{Re}\{s_{n_i}\} + s_{n_i} ^2} = b_{1n_i}$	

$$i = 1, 2$$

$$n = 1, 2, \dots, N/2$$

6.) Abschließend werden die gefundenen Werte in das Koeffizientenarray `iir_coeffs[]` des Daughterboards übertragen.

$$b_{0ni} = \text{iir_coeffs}[5 \cdot (2n - i - 1) - 3]$$

$$b_{1ni} = \text{iir_coeffs}[5 \cdot (2n - i - 1) - 4]$$

$$b_{2ni} = \text{iir_coeffs}[5 \cdot (2n-i-1) - 5]$$

$$a_{1ni} = \text{iir_coeffs}[5 \cdot (2n-i-1) - 1]$$

$$a_{2ni} = \text{iir_coeffs}[5 \cdot (2n-i-1) - 2]$$

Abschließende Bemerkung

Der Verstärkungsabfall im Sperrbereich eines analogen Butterworth Hoch- oder Tiefpasses beträgt wie bereits erwähnt $N \cdot 6\text{dB/Oktave}$, wobei N den Filtergrad darstellt. Da aufgrund der Entwurfsmethode nur geradzahlige Filterordnungen gewählt werden können, ist die Flankensteilheit nur in Vielfachen von 12 dB/Oktave einstellbar.

Bei Bandpaß und -sperrung ist es so, daß durch die Frequenztransformation des Tiefpaßprototypen eine Verdopplung der Filterordnung auftritt. Der Dämpfungsanstieg im Sperrbereich eines solchen Filters beträgt damit nur $N \cdot 3\text{ dB/Oktave}$. Da sich hier die Filterordnungen nur um den Faktor 4 verändern lassen (geradzahliger Prototyp mit anschließender Polverdopplung), ist der Sperrdämpfungsverlauf ebenfalls nur mit den Vielfachen von 12 dB/Oktave einstellbar.

Durch das "Warping" der bilinearen Transformation -es wird der Frequenzverlauf eines analogen Filters auf den Bereich von 0 bis $f = f_s/2$ gestaucht- versteilt sich etwas die Flanke(n) der digitalen Filter, es tritt besonders in der Nähe von $f_s/2$ eine Verbesserung der Filtercharakteristik gegenüber dem Prototypen auf.

Die Leistungsverstärkung $|\bar{H}(j\omega)|^2$ im Frequenzbereich eines digitalen Filters hängt mit dem Frequenzverlauf $|\bar{H}_{\text{analog}}(j\omega)|^2$ seines analogen Gegenstückes über die bereits vorgestellte Gleichung der vorverzerren Frequenzen zusammen

$$\omega = \tan \frac{\omega_{\text{analog}} T}{2} = \tan \frac{\pi f_{\text{analog}}}{f_s} .$$

Es ist also

$$|\bar{H}(j\omega)|^2 = \left| \bar{H}_{\text{analog}} \left(j \tan \frac{\omega T}{2} \right) \right|^2$$

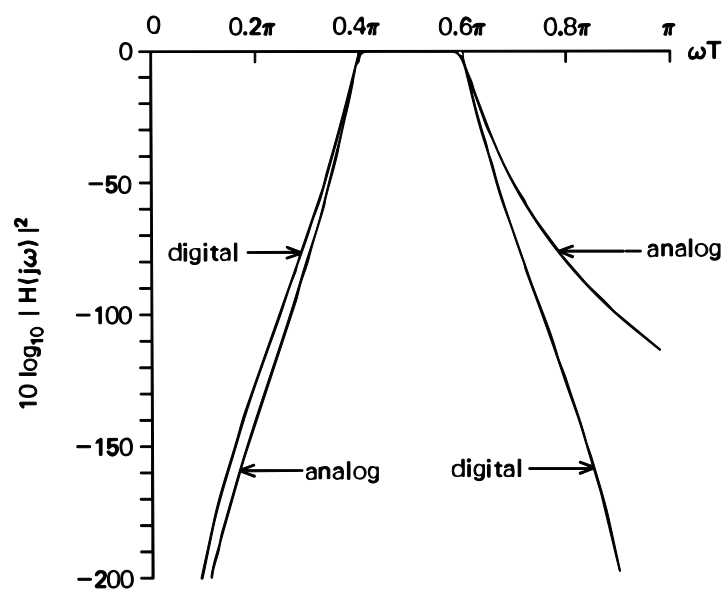
Eingesetzt in die Formel der Leistungsverstärkung beispielsweise eines Butterworthtiefpasses wird diese zu

$$|\bar{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\tan(\omega T / 2)}{\tan(\omega_c T / 2)} \right)^{2N}}$$

und die Leistungsverstärkung eines digitalen Bandpasses würde werden zu

$$|\bar{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\tan^2(\omega T / 2) - \omega_1 \omega_2}{\omega_c \tan(\omega_c T / 2)} \right)^{2N}}$$

Zum Vergleich sind in der Skizze die Verstärkungsverläufe eines analogen und digitalen Bandpasses mit $N = 10$, $f_{ug} = 0,2 \cdot f_s$ und $f_{og} = 0,3 \cdot f_s$ gegenübergestellt.



Vergleich analoger – digitaler Bandpaß

