Page ① étale morphism.

## unramified, differential criteria

对于 locally of finite type 的 $f: Y \to X$，称f在$y\in Y$为非分歧(unramified)，若

$$O_{Y_x,y} = O_{Y,y}/m_x O_{Y,y} \text{ 是 } k(x) = O_{X,x}/m_x O_{X,x} \text{ 上有限可分扩张}, \quad x = f(y).$$

i.e. $f: A \to B$ 有限型代数态射，$q \in \operatorname{Spec} B$，则

$p = f^{-1}(q)$ 在 $B_q$ 中生成极大理想，且 $B_q/pB_q$ 在 $A_p/pA_p$ 上有限可分.

Prop. $f: Y \to X$ locally of finite type, TFAE

- $f$ 非分歧
- $\Omega^1_{Y/X} = 0$
- $\Delta_{Y/X}: Y \to Y \times_X Y$ 开浸入.

E.g. $K \hookrightarrow F$ 不可分，$\operatorname{Spec} F \to \operatorname{Spec} K$，$\Omega^1_{F/K} = \operatorname{Der}_K(F,F)$.

例如 $K = \mathbb{F}_p((t))$，$F = \mathbb{F}_p((t^{1/p}))$，$d: F \to F$，$d(t^{k/p}) = k t^{(k-1)/p}$.

## Étale, analog of "covering"

Def. 称概形态射 $f: Y \to X$ 是平展的，若 $f$ 平坦 + 非分歧

平坦 ⇒ 局部上纤维的一些拓扑性质不变 (维数, Hilbert 多项式) ⇒ "纤维丛"

非分歧 ⇒ 道路提升时没有"分叉点" ⇒ "non-branching"

$m_x O_{Y,y}$ 在 $O_{Y,y}$ 里为极大理想 ⇒ 相对维数是 0，"locally quasi-finite"

$$\mathbb{A}^1 \to \mathbb{C}, \quad 0 \mapsto 0, \quad \mathbb{C}[x]_{(x)} \to \mathbb{C}, \quad m_x = 0$$

因此，平展映射将被类比为(有限)覆盖映射，接下来的命题说明了这一直觉：

Prop. $X$ 连通，$f: Y \to X$ 平展 (resp. 平展且分离)，则 $f$ 的任一截面 $s: X \to Y$ 为开浸入 (resp. 到 $Y$ 的一个开连通分支的同构)，因此，有

$$\{f \text{ 的截面}\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{开 (resp. 既开又闭) 子概形 } Y_i \subset Y, \text{使得 } f|_{Y_i}: Y_i \to X \text{ 为同构}\}.$$

特别地，若 $f$ 平展且分离，则截面 $s$ 可被其在一点处的取值所决定.

E.g. 如下形式的映射是平展的:

$$f: \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A ,$$

其中 $B = A[t_1,\cdots,t_n]/(P_1,\cdots,P_n)$ , $J_{ac} = \left(\frac{\partial P_i}{\partial t_j}\right)_{n\times n} \in B^\times$

这里的 · $\Omega^1_{B/A} = \langle dt_1,\cdots,dt_n\rangle / \left(\frac{\partial P_i}{\partial t_j}\right) dt_j = 0 \ , \forall i$

· $A\to B$ 平坦 A-代数, $b\in B$ s.t. $\forall\, m\in \operatorname{Spec}_{max} A$, $b$ 在 $B/mB$ 中零因子

则 $B/(b)$ 也是平坦 A-代数.

事实上, 任一平展映射局部上(on Y)均有此形状.

## Smoothness, Criteria by relative ~~def~~ differential.

明显可以看出, 上述"标准"平展映射看起来就很"光滑":

我们先采取看起来最直觉的定义:

**Def.** $f: Y\to X$ 局部有限型. 称 f 光滑, 若其局部上 (on Y) 形如

$$f: Y = \operatorname{Spec} B \longrightarrow X = \operatorname{Spec} A \ , \text{其中}$$

$B = A[t_1,\cdots,t_n]/(P_1,\cdots,P_m)$ , $m\le n$ , 且 $\left(\frac{\partial P_i}{\partial t_j}\right)_{m\times n}$ 的所有 $m\times m$ 子式生成的理想是整个 B.

**Rmk.** 由定义可见平展蕴含光滑, 光滑蕴含平坦.

进一步地, 光滑映射与平展映射只差一条 $m=n$, 这约等于"相对维数是0". 由于已经有了(局部)有限型和平坦的先决条件, 这个直觉极度接近于正确:

对于有限型态射, 平展 $\Longleftrightarrow$ 光滑且拟有限.

**Thm.** $f: Y\to X$ 局部有限型, 则 TFAE:

① f 光滑 ①' f 平坦, 且对每个代数闭点 $\bar{x}\in X$, 纤维 $Y_{\bar{x}}\to\bar{x}$ 光滑 (i.e. $Y_{\bar{x}}$ 正则)

② f 平坦, $\Omega^1_{Y/X}$ 局部自由且秩为 d codim $Y/X$.

③ 对任一 X-概形 $X'$, 以及由某一个幂零理想给出的闭子概形 $X'_0\longrightarrow X'$, 有提升性质

$$\begin{tikzcd} Y & X'_0 \arrow[l] \arrow[d] \\ X \arrow[u, leftarrow, "f"'] & X' \arrow[l] \arrow[ul, dashed, "\exists"'] \end{tikzcd}$$

Rmk. 我们要先看看这个性质③（称作 形式光滑）在说什么.

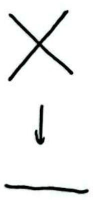
先来热身一下：若 $f: Y \to X$ 局部光滑，取 $X' = \mathrm{Spec}\, k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$，$X'_0 = \mathrm{Spec}\, k$，则提升性质为

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Spec}\, k = pt = \cdot \arrow[l] \arrow[d] \\
X & \mathrm{Spec}\, k[\varepsilon]/(\varepsilon^2) = (\odot) \arrow[l] \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}$$

注意 $\mathrm{Spec}\, k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ 是一个"带有一个切方向的点."，因此这是在说 对 $y \in Y$，$f(y) \in X$ 处的任一切向量均可提升到 $Y$ 上. 即 "$df_y$ 是一个满射".

为了观察 ③.形式光滑 与 ①.光滑的相关性，我们来看看不光滑的映射会如何无法提升.

取 $f: Y = \mathrm{Spec}\, k[x,y]/(y^2-x^2) \longrightarrow X = \mathrm{Spec}\, k[x]$

$Y =$  $X =$

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd}
\times & k[x,y]/(y^2-x^2) \\
\times \arrow[u, no head] & k[x] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

它的提升性质是这样失败的：取 $X' = \mathrm{Spec}\, R'$，$X'_0 = \mathrm{Spec}\, R'_0$，映射为

$$\begin{tikzcd}
\times & k[x,y]/(y^2-x^2) \arrow[r, "Id"] \arrow[dr, dashed, "g\ ?"] & R'_0 = k[x,y]/(y^2-x^2) \\
\times \arrow[u, no head] & k[x] \arrow[u, "f"] \arrow[r, "h"] & R' = k[x,y]/(y^2-x^2) \otimes_k k[\varepsilon]/(\varepsilon^2) \arrow[u, "\varepsilon=0"'] \\
 & x \arrow[r, mapsto] & x+\varepsilon
\end{tikzcd}$$

若有映射 $g$，则 $g(y^2-x^2)=0$，$g(y) = y+u(x,y)\varepsilon$，$u \in k[x,y]/(y^2-x^2)$

$g(x) = x+\varepsilon$

从而 $(x+\varepsilon)^2 = (y+u(x,y)\varepsilon)^2$，即 $2x\varepsilon = 2yu(x,y)\varepsilon$，这不可能.

几何上，~~映射~~ $R'$ 中的元素形如 $u+v\varepsilon$，$u,v \in \mathbb{C}[x,y]/(y^2-x^2)$，这看起来就是"带有一个切向量场的概形 $Y$".

而映射 $h^\#: \mathrm{Spec}\, R' \to \mathrm{Spec}\, k[x]$ 则相当于规定了 $Y =$  中一个分支上的切向量场方向，即

即标定了  由此，另一条分支上的切向量场在原点处将无法连续，造成了提升性质的失败.

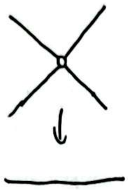
从环层面的映射构造来看，这个不形式光滑的映射的问题出现于

$P(y) = y^2 - x^2 \in \mathbb{C}[x][y]$ 的 Jacobian $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$ 在 $\mathbb{C}[x][y]/(P)$ 中不为可逆元

（因此 $2y\,u(x,y)\varepsilon = 2x\varepsilon$ 没有解 $u \in \mathbb{C}[x][y]/(P)$）

而只要强行令 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 可逆，例如取 $\tilde{Y} = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}[x,y]/(y^2-x^2)\right)_y$，那么 $\tilde{Y} \to X$ 就是形式光滑的.

此时这个映射几何上是



，把奇点去掉了，从而真的光滑.

Exercise. 利用相同的手段，验证标准的映射

$$Y = \mathrm{Spec}\, A[t_1,\dots,t_n]/(P_1,\dots,P_m) \to X = \mathrm{Spec}\, A$$

形式光滑当且仅当(m≤n且) Jacobian $\left(\frac{\partial P_i}{\partial t_j}\right)$ 的 $m\times m$ 子式生成整个 $A[t_1,\dots,t_n]/(P_1,\dots,P_m)$，

也即 $Y \to X$ 光滑.

如果你愿意相信的话，这预示了 ①⇔③ 的正确性.

"pf." ①⇒②，①⇒①′ 均为标准仿射情形下的直接计算

①′⇒② free of rank r (locally) 几乎直接来自局部正则.

②⇒③ 约化到仿射情形，即环态射情形

Lemma. $R \to S$ (环同态)，$P \to S$ R-代数满射，其中 $P$ 是 $R$ 上的多项式环，$J := \ker(P \to S)$

则 $R \to S$ 形式光滑当且仅当如下正合列分裂

$$0 \to J/J^2 \to \Omega^1_{P/R} \otimes_P S \to \Omega^1_{S/R} \to 0$$

（若其正确，则 $\Omega^1_{S/R}$ 自由，从而投射，因此结合，②⇒③ 得证）

pf. 取分裂 $\sigma : \Omega^1_{S/R} \to \Omega^1_{P/R} \otimes_P S$.

对 $\lambda \in S$，取 $x_\lambda \in P$ 使 $x_\lambda \mapsto \lambda$，再取 $f_\lambda \in J$ s.t.

$$df_\lambda = dx_\lambda - \sigma(d\lambda)$$

验证：
$$s : S \to P/J^2, \quad \lambda \mapsto x_\lambda - f_\lambda \bmod J^2$$
为环同态 (Exercise)

则对
$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & A/I \\ R \arrow[u] \arrow[r] & A \arrow[u] \end{tikzcd}$$
，$P \to S \to A/I$ 可提升到 $\psi : P \to A$

($P = R[\{x\}]$ 在 $R$ 上形式光滑)

因为 $\psi(J) \subset I$，$I^2 = 0$，有 $\psi(J^2) = 0$，从而有映射

$$\bar{\psi} : P/J^2 \to A$$

取提升为 $\bar{\psi} \circ s : S \to P/J^2 \to A$ 即可.

③ ⇒ ① 只需证：

**Fact.** $f: Y \to X$ 形式光滑 $\Longrightarrow$ $\forall y \in Y$，$\exists$ 仿射邻域 $y \in V \subset Y$，$f(y) \in U \subset X$ s.t.

$f|_V$ 可分解为 $V \to V' \to U \hookrightarrow X$，

其中 $V \to V'$ 平展，$V' = \mathbb{A}^n_U$.

Exercise. 验证这蕴含光滑.

(Follow Demazure-Gabriel)

不妨设 $Y$, $X$ 均仿射，$Y = \operatorname{Spec} A$, $X = \operatorname{Spec} B$，则 $B \to A$ 为 f.p. $B$-alg.

$\Rightarrow$ $Y \subset \mathbb{A}^r_X$ 由 f.g. 理想 $P \subset B[T_1, \dots, T_r]$ 切出

记 $R = \mathcal{O}(\mathbb{A}^r_X)_x$，$\bar{R} = \mathcal{O}(Y)_y$，$x = f(y) \in X$，$Q = P_y$，则 $\bar{R} = R/Q$.

对 ③ 中提升性质作在 $y$ 处的局部化，可以得到提升性质

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_y \arrow[r, "\phi"] & C/I \\ \mathcal{O}_x \arrow[u, "f_y"] \arrow[r, "\psi"] \arrow[ur, dashed, "\chi"] & C \arrow[u] \end{tikzcd}$$

，$\forall C$ 局部环，$I$ nilp. 理想

则 $\mathcal{O}_y$, $C$ 均通过 $f_y$ 与 $\psi$ 得到 $B$-alg. 结构，且 $\chi$ 为 $B$-alg. homo.

记 $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_r$ 为 $T_1, \dots, T_r \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^r_X)$ 在 $B[T_1, \dots, T_r] \to \underset{\mathcal{O}(Y)_y}{\overset{\|}{R/Q}} \xrightarrow{\phi} C/I$ 下的像，并选取代表元 $t_1, \dots, t_r \in C$，则有交换图

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ R/Q \arrow[r, "\phi"] & C/I \end{tikzcd}$$

，$\lambda(T_i) = t_i$，且若 $\lambda': R \to C$ 也满足这个交换图，则有 $D = \lambda - \lambda'$ 满足"导数"性质

$$D(xy) = \lambda(x) D(y) + D(x) \lambda(y)$$

通过 $\phi$，$I$ 上有 $R/Q$-模结构，因此这就是在说 $D$ 是 $R \to I$ 的 $B$-导数

而我们的提升 $\chi$ 也需要由这种 $\lambda - D$ 给出，因此提升 $\chi$ 存在 $\Leftrightarrow$ 有如上的 $D$ s.t. $\lambda|_Q = D|_Q$.

写成纯代数语言，记 $\delta: R \to \Omega^1_{R/B} \otimes_R (R/Q)$，$x \mapsto dx \otimes 1$，则任一 $B$-导数 $D: R \to I$ 可由一个 $R/Q$-线性的 $\iota: \Omega^1_{R/B} \otimes_R (R/Q) \to I$ 给出.

由于 $\delta(Q^2) = 0$（因为 $Q^2$ 每个导仍在 $Q$ 里），$\delta$ 诱导了映射 $j: Q/Q^2 \to \Omega^1_{R/B} \otimes (R/Q)$

由 $\lambda(Q) \subset I$ 知 $\lambda(Q^2) = 0$，故 $\lambda$ 诱导 $\bar{\lambda}: Q/Q^2 \to I$，则提升 $\chi$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\exists\, \iota: \Omega^1_{R/B} \otimes (R/Q) \to I$ s.t. $\bar{\lambda} = \iota j$

**Claim.** ③ $\Rightarrow$ $j$ 为 $Q/Q^2$ 到 $R/Q$-模 $\Omega^1_{R/B} \otimes_R (R/Q)$ 的直和项的同构

*pf.* 取 $C = R/Q^2$，$I = Q/Q^2$，$\phi = \mathrm{id}$，$\lambda: R \to R/Q^2$ 典范，此时 $\bar{\lambda}: Q/Q^2 \to Q/Q^2 = I$ 就是恒等. □

现在，假若 ③ 成立，由于 $\Omega^1_{R/B} \otimes_R R/Q$ 为 $R/Q$ 上秩为 $r$ 的自由模，可找到 $Q/Q^2$ 作为 $R/Q$-模的最小生成组 $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_s$，其中 $P_1, \dots, P_s \in P$. 从而 $\left(\frac{\partial P_i}{\partial T_j}\right)_{s \times r}$ 的秩为 $s$，且 $P_1, \dots, P_s$ 生成 $Q$. 由于 $Q = P_y$，故 $V(P)$ 在 $y$ 附近形如 $V(P_1, \dots, P_s)$. 取这个邻域即可.

**Rmk.** 这个证明同样说明了：

光滑 $\Leftrightarrow$ 几何正则化，i.e. 每条代数闭几何纤维正则

在有限型前提下，这也就是说每条几何纤维 $Y_{\bar{x}} \to \bar{x}$ 光滑.

**Rmk.** 同样地，这说明任一光滑映射均可局部分解为平展映射与仿射 $n$-空间投影的复合.

# 形式化的态射性质们

形式光滑性促使我们定义对应的其它形式性质：

~~称 f:Y~~

**Def.** 称 $f: Y \to X$ 为形式光滑（resp. 非分歧，平展），若对任一（仿射）$X$-概形 $X'$ 与由其一个幂零理想定义的"闭子概形 $X_0'$，$X$-映射 $g_0: X_0' \to Y$ 存在（resp. 至多有一个，存在唯一）提升 $g: X \to Y$.

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[d] & X_0' \arrow[l, "g_0"'] \arrow[d] \\
X & X' \arrow[l] \arrow[ul, dashed, "g"']
\end{tikzcd}
$$

**Exercise.** 仿照之前"标准光滑情形的论证，说明标准情形的平展态射

$$Y = \operatorname{Spec} A[t_1, \cdots, t_n]/(P_1, \cdots, P_n) \longrightarrow X = \operatorname{Spec} A \quad , \quad \left(\frac{\partial P_i}{\partial t_j}\right)_{n \times n} \text{ 在 } A[t_1, \cdots, t_n]/(P_1, \cdots, P_n) \text{ 中可逆}$$

是形式平展的.

**Rmk.** 对于非分歧映射 $f: Y \to X$，有 $\Omega^1_{Y/X} = 0$. 依照我们之前的"标定切向量"看法，这也就是说对于（通过映射 $X' \to X$ 给定的）$X$ 上的切方向，在 $Y$ 上至多只有一个合法的切方向是其提升，从而至多有一个标定 $Y$ 上对应向量场的方式. 这预示着形式非分歧确实是应对应到非分歧的性质.

**Thm.** 在局部有限型要求下，形式光滑/非分歧/平展 与 光滑/非分歧/平展 等价.

**Rmk.** 局部有限型是必要的. 虽然没有局部有限型就没有光滑，但还是可以有"形式光滑：

$\operatorname{Spec} \mathbb{Q} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ 是形式光滑的.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}[\frac{1}{p}, p \text{ prime}] = \mathbb{Q} \arrow[r, "g_0"] \arrow[dr, dashed, "g"] & R_0 = R/I \\
\mathbb{Z} \arrow[u] \arrow[r] & R \arrow[u]
\end{tikzcd}
\quad , \quad I^2 = 0
$$

$$g_0\left(\tfrac{1}{p}\right) = r_p \mod I, \quad r_p \in R$$

$$\Rightarrow \quad p r_p = 1 + h_p, \quad h_p \in I$$

取 $g\left(\frac{1}{p}\right) = r_p(1 - h_p)$，$g: \mathbb{Q} \to R$ 即为提升.