

关于黑洞信息丢失问题的研究

摘要

本文首先简要介绍了信息悖论的含义和最简单黑洞——施瓦西黑洞的一些简单性质。在此基础上给出了黑洞四大力学定律，后面证明了这其实就是黑洞的热力学定律。然后介绍了闵氏时空中的 Rindler 坐标系和 Rindler 分解，在量子场论框架下得出平直时空的非惯性系中的真空和惯性系下的真空不同，由此引出安鲁效应——即伦德勒时空观者在闵氏时空中感到自己处在一个温度为 T 的热态。

接着提到了霍金辐射，实际上霍金辐射的计算和闵氏时空的 Rindler 分解类似，根本原因是不同坐标变换下的真空不再相同。我们可以用另一个真空中的定态来展开这个真空的基态，由此可以计算真空粒子数期望值，从而得到黑洞存在一个霍金温度 T_H 。

然后详细阐述了信息悖论，即黑洞蒸发意味着从纯态变为混态，那么这必将违反量子力学的么正性原理。接着我们介绍了几种可能理论并在最后介绍了最有希望的佩奇曲线。最后我们寻找到了一种半经典的方法来计算佩奇曲线——量子极值面方法。

关键词： 黑洞；霍金辐射；信息丢失；粗粒熵；精细熵；佩奇曲线

Abstract

This article first briefly introduces the meaning of the information paradox and some simple properties of the simplest black hole—Schwarzschild black hole. On this basis, the four laws of black hole mechanics are given, and it is proved later that these are actually the laws of thermodynamics of black holes. Then the Rindler coordinate system and Rindler decomposition in Minkowski space-time are introduced. Under the framework of quantum field theory, it is concluded that the vacuum in the non-inertial system of flat space-time is different from the vacuum in the inertial system, which leads to the Unruh effect—namely Rindler space-time viewers felt that they were in a hot state with a temperature T of in Minkowski space-time.

Then I mentioned Hawking radiation. In fact, the calculation of Hawking radiation is similar to the Rindler decomposition of Minkowski space-time. The fundamental reason is that the vacuum under different coordinate transformations is no longer the same. We can use another stationary state in a vacuum to expand the ground state of this vacuum, from which we can calculate the expected value of the number of particles in the vacuum, and obtain a Hawking temperature T_H for the black hole.

Then elaborated on the information paradox, that is, the evaporation of a black hole means that it changes from a pure state to a mixed state, which will definitely violate the unitary principle of quantum mechanics. Then we introduced several possible theories and finally introduced the most promising Page curve. Finally, we found a semi-classical method to calculate the Page curve—the quantum extreme surface method.

Keywords : black hole; Hawking radiation; coarse-grained entropy; Fine-grained entropy; Page curve

目录

第一章 黑洞简介.....	4
1. 信息悖论与施瓦西黑洞.....	4
2. Kruskal 扩张.....	4
3. 黑洞力学四定律.....	6
第二章 霍金辐射与信息丢失问题.....	8
1. Rindler 分解和安鲁效应.....	8
2. 霍金辐射和黑洞信息丢失.....	12
第三章 佩奇曲线和近期研究.....	16
1. 各类猜想简介.....	16
2. 纠缠熵与佩奇曲线.....	17
3. 未解决的谜团.....	20
第四章 总结.....	22
参考文献.....	23

第一章 黑洞简介

1.信息悖论与施瓦西黑洞

在 1976 年霍金提出黑洞自发的热辐射会导致信息丢失^[1]之后，一个很基本的问题便开始浮现在人们眼前。关于霍金辐射这个过程最终会演化成怎样的量子态，半经典理论告诉我们，最终的状态应该是混合态，因为霍金辐射与黑洞内部的自由度纠缠在一起，当黑洞蒸发时，这些自由度随即消失。最后黑洞完全消失，所有能量以热辐射形式放出。在这些半经典的论证中，我们很难找到瑕疵来否定这个结论。但量子力学的演化么正性又要求如果黑洞初期处于纯态，则在演化过程中也一定处于纯态。这个基本原理得出的结论是：黑洞在完全蒸发之后也应该处于纯态。这显然是匪夷所思的。这种冲突由此产生了所谓黑洞信息丢失悖论。

最简单的黑洞模型由施瓦西度规描述：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.1.1)$$

Birkhoff 定理指出，施瓦西度规是爱因斯坦方程唯一球对称的静态真空解。施瓦西半径由下式给出：

$$r_s = 2GM$$

这个半径也被称为事件视界。我们注意到施瓦西度规在 $r = 0$ 和 $r = r_s$ 时显然是奇异的。然而，只有 $r = 0$ 处的奇异点才是真正的几何奇点。我们可以验证 $r = 0$ 处的里奇标量（Ricci scalar）是发散的，而 $r = r_s$ 处的里奇标量是完全有限的，我们对黎曼张量（Riemann tensor）进行缩并：

$$R^{\mu\nu\sigma\gamma} R_{\mu\nu\sigma\gamma} = \frac{48G^2 M^2}{r^6} \quad (1.1.2)$$

里奇标量发散意味着这一点在物理上是无意义的，是一个本质的奇点。而事件视界处的度规奇异仅仅源于我们坐标选择的局限性。我们完全可以使用另一种坐标来“规避”这一点的奇异性。而且在新的坐标下我们更能看出事件视界的物理意义。

2.Kruskal 扩张

我们希望能找到一种坐标系，处本性奇点外所有时空点均可以在该坐标系下给出。美国数学物理学家马丁·克鲁斯卡尔（Martin Kruskal）提出了这样一种坐

标系：

$$T = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \sinh\left(\frac{t}{4GM}\right) (r > 2GM) \quad (1.2.1)$$

$$R = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \cosh\left(\frac{t}{4GM}\right) (r > 2GM) \quad (1.2.2)$$

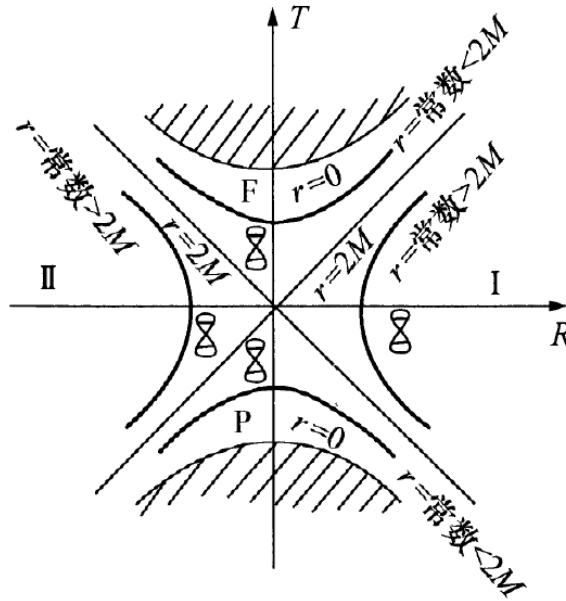
$$T = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right)^{1/2} e^{r/4GM} \cosh\left(\frac{t}{4GM}\right) (r < 2GM) \quad (1.2.3)$$

$$R = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right)^{1/2} e^{r/4GM} \sinh\left(\frac{t}{4GM}\right) (r < 2GM) \quad (1.2.4)$$

在 kruskal 坐标系下的施瓦西度规变为：

$$ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r} e^{-r/2GM} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2 \quad (1.2.5)$$

可以看出此时 $r_s = 2GM$ 已经不再是度规的奇异点。由上述度规可以画出施瓦西黑洞的 kruskal 坐标系下的时空图，如图一所示。在图中我们可以清楚的看到事件视界由两条斜率为 1 的直线描述。并且由于



图表 1 Kruskal 坐标时空图^[2]

而且此坐标系下的光锥图我们可以看出，在事件视界内部，任何类时或类光粒子的世界线都会无一例外单向的指向黑洞的奇点（singularity）。所以事件视界内部也被称为单向膜区。对于处于视界内部的时空好像交换了时间和空间坐标一样，将物质不可逆的移动到奇点处。这也是黑洞作为一种特殊天体神奇的地方之一。

3. 黑洞力学四定律

从克尔—纽曼黑洞的度规我们可以看出，这个时空如何弯曲，只取决于黑洞的总质量、总角动量和总电荷，与物质的成分和结构都没有关系。惠勒等人将黑洞的上述性质称为无毛定理^[3]（No-hair theorem）：形成黑洞的星体，失去了除总质量 M 、总角动量 J 和总电荷 Q 外的全部信息，黑洞的全部性质仅有 M 、 J 、 Q 这三个参量决定。

1972 年，贝根斯坦和斯玛尔各自独立地提出了关于黑洞各参量之间的一个非常重要的关系式。考虑带电的克尔—纽曼黑洞^[2]：

$$A_+ = 4\pi(r_+^2 + a^2) \quad (1.3.1)$$

$$\kappa_+ = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)} \quad (1.3.2)$$

$$\Omega_+ = \frac{a}{r_+^2 + a^2} \quad (1.3.3)$$

$$V_+ = \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2} \quad (1.3.4)$$

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} \quad (a = J/M) \quad (1.3.5)$$

其中 A_+ 表示黑洞的外视界表面积， r_{\pm} 表示内外视界半径； κ_+ 表示外视界的表面引力， Ω_+ 表示黑洞的自转角速度； V_+ 表示黑洞外视界的静电势；容易验证：

$$dM = \frac{\kappa_+}{8\pi} dA_+ + \Omega_+ dJ + V_+ dQ \quad (1.3.6)$$

可以看出此表达式非常类似于转动系统的经典热力学第一定律：

$$dU = TdS + \Omega dJ + VdQ \quad (1.3.7)$$

式中第一项为系统吸收的热量，后面两项为外界对系统所做的功。如果这个类比正确，我们发现黑洞的熵 S 应该正比于其表面积 A ，温度 T 正比于其表面引力 κ_+ ；惊人的是，霍金早在 1971 年已经根据宇宙监督假设和强能量定理^{[4][8]}，证明出黑洞的表面积沿着时间箭头永不减少，而根据热力学第二定律，我们知道一个孤立的热力学系统的熵也满足这个条件——时间单向性，这进一步验证了 $S \propto A$ 的正确性，后面我们将会看到，霍金在黑洞附近运用量子场论严格的证明了：

$$S = \frac{k_B}{4} A_+ \quad (1.3.8)$$

$$T = \frac{\kappa_+}{2\pi k_B} \quad (1.3.9)$$

此外，如果宇宙监督假设成立，可以证明无法通过有限次操作将黑洞的表面引力 κ_+ 降为 0，这十分类似于热力学第三定律：无法通过有限次操作将一个系统的温度降到绝对零度。此外，我们希望对于一个稳态黑洞，其上的表面引力为常数——对应热力学第零定律。这个其实很好理解：我们知道对于一个处于热平衡的热力学系统，各处的温度相等；那么对于稳态黑洞，其上的表面引力一定处处相等，不然此黑洞不可能处于稳态。至此，我们得出了黑洞力学四定律：

表格 1 黑洞力学四定律

黑洞力学四定律	
第零定律：	稳态黑洞的表面引力 κ_+ 处处相等
第一定律：	$dM = \frac{\kappa_+}{8\pi} dA_+ + \Omega_+ dJ + V_+ dQ$
第二定律：	黑洞面积沿时间箭头永不减少
第三定律：	不能通过有限次操作将黑洞的表面引力 κ_+ 降为 0

注意，虽然这四条定律非常类似于经典热力学四大定律，但我们此时还不能说这是热力学四定律，因为一切温度不为 0 的物体都在产生热辐射，如果黑洞没有热辐射的产生，那么这四条定律也仅仅是形式上相似，只能算力学定律。然而，霍金在 1975 年的论文中用半经典的方法证明了黑洞确实无时无刻都在产生热辐射。这一发现证实了黑洞的“温度”是真实的热力学温度，这也从侧面证实了黑洞这四条定律的确是热力学定律。这就是我们接下来要讲的霍金辐射（Hawking radiation）。

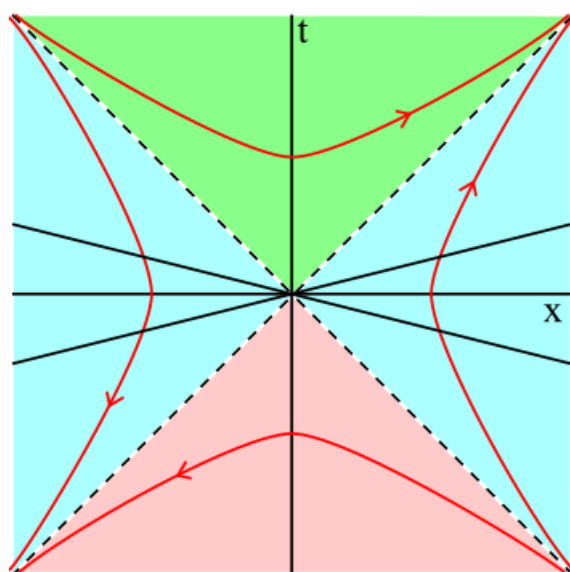
第二章 霍金辐射与信息丢失问题

1. Rindler 分解和安鲁效应

为了引出黑洞存在热辐射，我们先介绍在闵可夫斯基时空下的伦德勒分解。我们先考虑三个空间坐标中的其中一个，假设是 x ，然后将量子场论中的希尔伯特空间 \mathcal{H} 分解成两部分，分别是 $x > 0$ 部分的 \mathcal{H}_R 和 $x < 0$ 部分的 \mathcal{H}_L 。 \mathcal{H}_R 和 \mathcal{H}_L 称为这个场论的两个因子（factor）。接着我们只需要找到每个因子对应的基函数，就可以将真空分解。为了达到这个目的，我们引入洛伦兹伪转动算符 K_x ，它混合了 t 和 x 但对 y 和 z 的作用是平凡的。这个算符可以存在于任何相对论性量子场论（relativistic quantum field theory）中，例如我们考虑有质量的自由标量场，此场论中 K_x 由如下公式描述：

$$K_x = \frac{1}{2} \int d^3x [x(\dot{\phi}^2 + \nabla\phi \cdot \nabla\phi + m^2\phi^2) + t\phi\partial_x\phi] \quad (2.1.1)$$

这个算符表面含时，但是在海森堡绘景中，由于此算符是一个诺特流（洛伦兹对称性对应的守恒量），所以在积分之后不含时间。 xt 平面中的伪转动算符由图 2 所示。从图中可以清晰地看出，左右两边的蓝色部分称为伦德勒楔（Rindler wedge）它被两天斜率绝对值为 1 的直线约束。伪转动算符 K_x 作用的区域由红色部分描述，黑色直线为伦德勒时间切片，未来楔（future wedge）由绿色表示，过去楔（past wedge）由红色表示。



图表 2 闵氏时空中的 Rindler 坐标系^[6]

为了解如何运用左右伦德勒楔中的伪转动本征态作为基来展开真空态，引入欧式路径积分是非常有用的。在任意量子系统中，有一种找到基态的方法是用任何一个态 $|\chi\rangle$ 按如下方式作用在哈密顿量上：

$$|\Omega\rangle = \frac{1}{\langle\Omega|\chi\rangle} \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-TH} |\chi\rangle \quad (2.1.2)$$

因此我们有：

$$\langle\phi|\Omega\rangle = \frac{1}{\langle\Omega|\chi\rangle} \lim_{T \rightarrow \infty} \langle\phi|e^{-TH}|\chi\rangle \quad (2.1.3)$$

在欧几里得路径积分形式中，这意味着我们可以计算这样一个泛函：

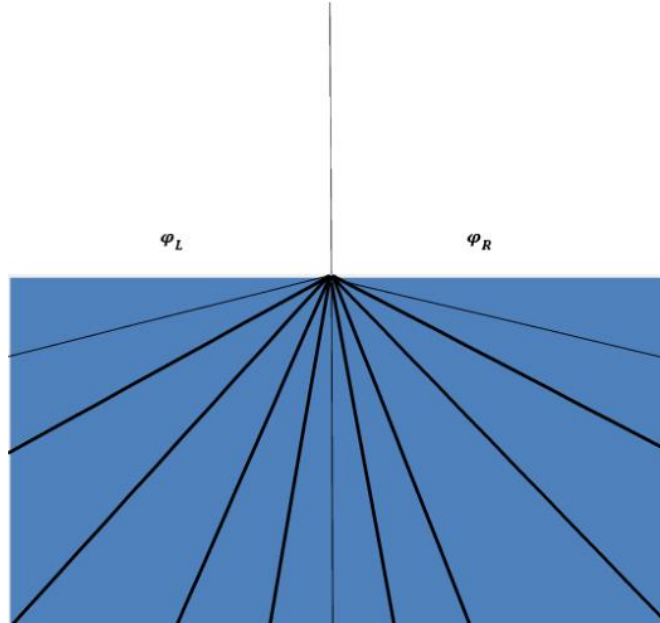
$$\langle\phi|\Omega\rangle \propto \int_{\hat{\phi}(t_E=0)=\phi}^{\hat{\phi}(t_E=+\infty)=0} D\hat{\phi} e^{-I_E}$$

其中 $\hat{\phi}$ 是 ϕ 场在海森堡绘景下的表达式。 I_E 是欧几里得作用量 (Euclidean action)。

它是由通常的作用量进行解析延拓 $t \rightarrow -it_E$ 得到的。对于有质量的自由标量场：

$$I_E[\hat{\phi}] = \frac{1}{2} \int d^3x dt_E \left[(\partial_{t_E} \hat{\phi})^2 + (\nabla \hat{\phi})^2 + m^2 \hat{\phi}^2 \right] \quad (2.1.5)$$

设 θ 是欧几里得平面 (x, t) 对应于伦德勒时间 τ 的角，我们将 $T < 0$ 的区域分割成如图 3 所示的无穷小楔形区域：



图表 3 Rindler 分解^[6]

我们从场 ϕ_L 在 $\theta = 0$ 处到场 ϕ_R 在 $\theta = \pi$ 处进行积分。伪转动算子 K_x 生成了欧几里得平面 (x, t) 的旋转。对右伦德勒楔生成旋转的限制由哈密顿量 H_R 精确给出。因

此我们可以将 $\langle\phi|\Omega\rangle$ 初态 $|\phi_L\rangle$ 和末态 $|\phi_R\rangle$ 之间的转移矩阵元。为了将 $|\phi_L\rangle$ 转变成末态，我们使用由如下方式定义的CPT算符 Θ ：

$$\Theta^\dagger\Phi(t, x, y, z)\Theta = \Phi^\dagger(-t, -x, y, z) \quad (2.1.6)$$

经过一系列计算，最终我们可以得到真空态的简单表达式：

$$|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}} \sum_i e^{-2\pi w_i} |i^*\rangle_L \otimes |i\rangle_R \quad (2.1.7)$$

式中 $|i\rangle_R$ 和 $|i\rangle_L$ 分别是哈密顿量 H_R 和 H_L 对应的本征值为 w_i 的本征矢量。 Z 是归一化常数，之后我们会看到 Z 还具有经典统计中配分函数的意味。注意，在此表达式下，左右楔形之间的纠缠完全显现出来，我们可以计算右楔的约化密度矩阵（reduced density matrix）：

$$\rho_R = \frac{1}{Z} \sum_i e^{-2\pi w_i} |i\rangle_R \langle i| \quad (2.1.8)$$

对比经典量子统计中的密度矩阵，我们发现这就是某个“正则系统”的密度矩阵，而且我们有：

$$T = \frac{1}{2\pi} \quad (2.1.9)$$

尽管这里得出的温度是无量纲的，我们马上就会知道它所隐含的物理意义，它实际上是不等价真空的一种真实体现。

为了更直观的了解伦德勒分解，我们举一个最简单的例子——有质量的自由标量场。一个基本思想是找到一组比平面波更适合的伦德勒模态来展开这个量子场。为了做到这一点，我们可以对左右分别进行一组坐标变换^[9]：

$$x = e^{\xi_R} \cosh \tau_R = -e^{-\xi_L} \cosh \tau_L \quad (2.1.10)$$

$$t = e^{\xi_R} \sinh \tau_R = -e^{-\xi_L} \sinh \tau_L \quad (2.1.11)$$

这些坐标的优势之一是在伪转动算符 K_x 的作用下， τ_R 仅仅有一个向后的平移，而 τ_L 是一个向左的平移。而不同 ξ 值的等 ξ 面在闵氏坐标下对应着有着不同恒定固有加速度的物质。闵氏度规再次坐标系下的展开式为：

$$ds^2 = e^{2\xi_R} (-d\tau_R^2 + d\xi_R^2) + dy^2 + dz^2 (x > 0) \quad (2.1.12)$$

$$ds^2 = e^{-2\xi_L} (-d\tau_L^2 + d\xi_L^2) + dy^2 + dz^2 (x < 0) \quad (2.1.13)$$

我们希望能找到有如下形式的有质量波动方程解：

$$f_{R/Lwk} = e^{-i w \tau_{R/L}} e^{i(k_2 y + k_3 z)} \psi_{R/Lwk}(\xi_{R/L}) \quad (2.1.14)$$

将闵氏时空中的克莱因-戈登方程在伦德勒坐标系下展开，则需要 ψ_{Rwk} 和 ψ_{Lwk} 满足如下形式的波动方程：

$$[-\partial_{\xi_R}^2 + (m^2 k^2 e^{2\xi_R} - w^2)]\psi_{Rwk} = 0 \quad (2.1.15)$$

$$[-\partial_{\xi_L}^2 + (m^2 k^2 e^{-2\xi_L} - w^2)]\psi_{Lwk} = 0 \quad (2.1.16)$$

形式上这些方程仅仅是指数势下的非相对论性薛定谔方程。它们可以用贝塞尔函数显式地求解，但对于我们而言，只需要观察到这些规范解在 ξ_R 处于很大的负值（或 ξ_L 处于很大的正值）时振荡，而 ξ_R 处于很大的正值（或 ξ_L 处于很大的负值）时呈现指数衰减。因此，我们可以认为模“被限制”在视界附近，较低的能量和较高的横向动量模将会受到更强的限制。

将这些 $f_{R/Lwk}$ 作为模（mode），我们可以把有质量的克莱因戈登场按如下方式展开：

$$\phi = \sum_{k,w} (f_{Rwk} a_{Rwk} + f_{Lwk} a_{Lwk} + f_{Rwk}^* a_{Rwk}^\dagger + f_{Lwk}^* a_{Lwk}^\dagger) \quad (2.1.17)$$

其中 $a_{L,Rwk}^\dagger$ 是伦德勒时空下的产生算符，可以将它作用在伦德勒真空 $|0\rangle$ 上产生能量为 w 的定态，湮灭算符 $a_{L,Rwk}$ 的含义类似。因此我们可以重新将式（2.7）表示成所有伦德勒模的展开^[5]：

$$|\Omega\rangle = \bigotimes_{w,k} \left[\sqrt{1 - e^{-2\pi w}} \sum_n e^{-\pi w n} |n\rangle_{Lw(-k)} |n\rangle_{Rwk} \right] \quad (2.1.18)$$

式中的 $|n\rangle$ 的意义是伦德勒真空被产生算符 $a_{L,Rwk}^\dagger$ 作用之后生成的定态上的粒子数。

我们现在回过头来考虑(2.9)中温度 T 的含义。通过上式可以看出，对于伦德勒时空中的静止观者，他会感受到这样一个温度：

$$T_{Unruh} = \frac{\hbar a}{2\pi k_B c} \quad (2.1.19)$$

其中 a 是观者的固有加速度(constant)。上式表明在伦德勒时空的观者看来，闵氏时空是存在热辐射的，它处于一个温度为 T 的热态。这就是著名的安鲁效应^{[2][7]}（Unruh effect）。它表明，真空和温度都不是绝对的，它们都依赖于参考系的选择。实际上，施瓦西时空中的乌龟坐标变换和伦德勒坐标变换有着十分相似的性质。

质，这是否也意味着黑洞也存在着热辐射呢？

2. 霍金辐射和黑洞信息丢失

首先我们简要的介绍弯曲时空量子场论^[6] (Quantum Field Theory in Curved Spacetime)。一个实标量场与度规耦合的作用量由如下公式给出：

$$S_M = \int dx^4 \sqrt{-\det g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right) \quad (2.2.1)$$

式中“ ∇ ”为协变导数算符。如果我们只对标量场中最高为二次项的感兴趣，我们可以取 $V(\phi) = m^2 \phi^2 / 2$ 。在弯曲时空中，我们可以加入另外一个关于 ϕ 的二次项名为 $R\phi^2$ 的项，其中 R 是里奇标量。加入这一项后，整个作用量如下所示（考虑任意维度）：

$$S_M = \int dx^n \sqrt{-\det g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - m^2 \phi^2 / 2 - \frac{1}{2} \zeta R \phi^2 \right) \quad (2.2.2)$$

式中 $\zeta = (n-2)/(4(n-1))$ 称为共性耦合常数，取决于维度 n 。在这样一些常数下，对于零质量标量场（ $m=0$ ），存在着如下的共形不变性：

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}, \quad \phi \rightarrow \tilde{\phi} = \Omega^{\frac{2-n}{2}}(x) \phi \quad (2.2.3)$$

将上述作用量对场 ϕ 进行变分（不变分度规），则我们可以得到这个实标量场满足的运动方程：

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu - m^2 - R\zeta) \phi = 0 \quad (2.2.4)$$

设 ϕ_1 、 ϕ_2 是这个运动方程的两个解，定义他们的内积为：

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int (\phi_1 \partial_\mu \phi_2^* - \partial_\mu \phi_1 \cdot \phi_2^*) n^\mu dS \quad (2.2.5)$$

其中 dS 为超曲面面积元， n^μ 是超曲面元上与其垂直的类时法向量（normal vector）。可以证明此内积与类空超曲面的选择无关，是一个常量。

我们经常使用一组完备的解集 u_i 和 u_i^* 来作为模态展开某个量子场，它们在上述定义的内积下满足如下正交归一关系：

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}, (u_i^*, u_j^*) = -\delta_{ij}, (u_i, u_j^*) = 0 \quad (2.2.6)$$

可以将实标量场进行展开：

$$\phi = \sum_i (\hat{a}_i u_i + \hat{a}_i^\dagger u_i^*) \quad (2.2.7)$$

其中 \hat{a}_i 称为湮灭算符(annihilation operator), \hat{a}_i^\dagger 称为产生算符(creation operator)。

在离散情况下(比如(2.2.7)中所示的可数模), 满足以下对易关系:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \quad (2.2.8)$$

真空态 $|0\rangle_u$ 被定义为:

$$\hat{a}_i |0\rangle_u = 0 \quad (2.2.9)$$

当然, 这组正交归一模并不唯一, 我们也可以用另一组模将这个量子场进行展开。但要注意的事, 我们前面已经提到, 在不同模展开下的真空态是不一样的, 这也是安鲁效应的主要结论之一。根本原因是不同模态意味着我们选择了不同的坐标系, 而不同坐标系下的真空并不相同!

在近视界处, 我们可以进行一种坐标变换, 使得施瓦西度规有如下形式:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\rho^2 dw^2 + d\rho^2 + dY^2 + dZ^2 \\ &= -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

我们用乌龟坐标进行变换, 在近视界近似下, 此时度规可写为:

$$ds^2 = e^{2a\xi} (-d\eta^2 + d\xi^2) + dY^2 + dZ^2 \quad (2.2.11)$$

观察式(2.2.10)和式(2.2.11), 我们惊人的发现这种坐标变换与闵氏时空中的Rindler变换如出一辙。于是我们当然也可以运用第一节中关于安鲁效应的做法, 使用一种特殊的模态将黑洞视界附近的量子场进行模态展开, 于是我们一定可以得到和安鲁效应相似的结论——即黑洞的温度是真实的热温度, 即存在热辐射。通过计算, 我们可以找到与此坐标系所对应的一组模态, 记作 g_k 和 g_k^* , 它们是这样一组函数, 正频部分可表示为:

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} e^{(-i\Omega\eta + ik\xi)}, \Omega = |k| \quad (2.2.12)$$

对于正频且右行($k > 0$)的部分, 可以简化成:

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} e^{(-i\Omega u)}, u = \eta - \xi \quad (2.2.13)$$

负频右行部分可以用 g_k^* 表示, 于是一个右行的实标量场可以被展开为:

$$\phi_R(u) = \int_0^\infty dk \left(\frac{\hat{b}_k}{\sqrt{4\pi\Omega}} e^{(-i\Omega u)} + \frac{\hat{b}_k^\dagger}{\sqrt{4\pi\Omega}} e^{(+i\Omega u)} \right) \quad (2.2.14)$$

式中 g_k 和 \hat{b}_k 均满足连续情况下的对易关系, 即对易关系为 $\delta(k - k')$

现在我们讨论在另一类参考系下的模态形式——Kruskal 坐标系，直接写出在近视界附近两类坐标系下量子场的展开式：

$$kruskal: \phi(X, T) = \int_0^\infty \frac{dv}{2\pi} \left(\frac{\hat{a}_v}{\sqrt{2v}} e^{(-ivU)} + \frac{\hat{a}_{-v}}{\sqrt{2v}} e^{(-ivV)} + h.c. \right) \quad (2.2.15)$$

$$tortoise: \phi(t, r_*) = \int_0^\infty \frac{dw}{2\pi} \left(\frac{\hat{b}_w}{\sqrt{2w}} e^{(-iwu)} + \frac{\hat{b}_{-w}}{\sqrt{2w}} e^{(-iwv)} + h.c. \right) \quad (2.2.16)$$

式中 (X, T) 为 Kruskal 坐标， (t, r_*) 为乌龟坐标，在黑洞视界附近时，我们可以将 Kruskal 坐标类比为闵氏时空中的惯性坐标系，而乌龟坐标则类比为闵氏时空中的匀加速坐标系（Rindler 坐标系）。接着我们就可以借助最简单的实标量场在黑洞视界附近来分析所谓的热辐射效应。通过引入粒子数算符 $N_w = \hat{b}_w^\dagger \hat{b}_w$ ，我们可以计算处于 Kruskal 坐标系的真空态时关于 b 粒子(能量为 w)的期望值，显然这个算符关于乌龟坐标真空态的期望为 0，因为标量场的最低能量真空态是由 kruskal 坐标系的真空给出的（闵氏时空自由下落观者的真空能量最低）。因此，渐进施瓦西观者观察到的视界旁 b 粒子的期望值为：

$$\langle 0_K | N_w | 0_K \rangle = \langle 0_K | \hat{b}_w^\dagger \hat{b}_w | 0_K \rangle = \int_0^\infty dv |\beta_{wv}|^2 \quad (2.2.17)$$

经过一系列数学上繁琐的计算，最终我们得到期望值的表达式如下：

$$\langle 0_K | N_w | 0_K \rangle = \int_0^\infty dv |\beta_{wv}|^2 = \frac{\delta(0)}{e^{\left(\frac{2\pi w}{a}\right)} - 1} \quad (2.2.18)$$

B 粒子在 Kruskal 坐标真空态 $|0_K\rangle$ 的密度为：

$$n_w = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{e^{\left(\frac{2\pi w}{a}\right)} - 1} \quad (2.2.19)$$

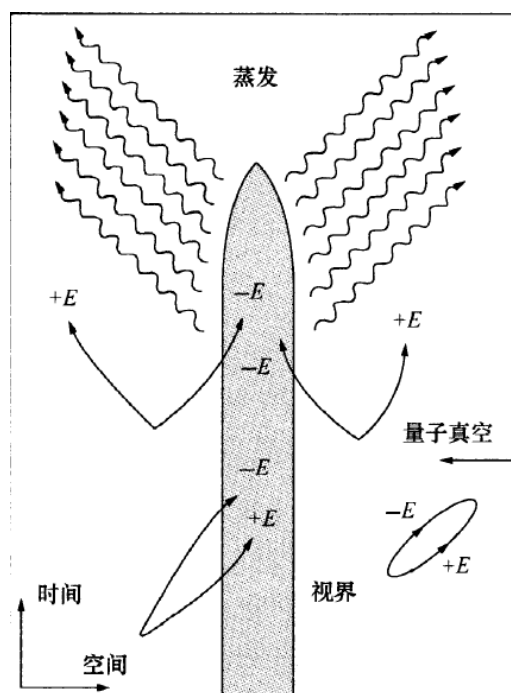
这是一个由以下温度辐射出的普朗克黑体谱：

$$T_H = \frac{a}{2\pi} = \frac{1}{4\pi r_s} \quad (2.2.20)$$

$$T_H = \frac{\hbar \kappa_+}{2\pi k_B c} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} (SI \text{ units}) \quad (2.2.21)$$

这个温度被称作霍金温度^[10]（Hawking temperature）。因此我们证明了，黑洞的渐进观者确实会观察到黑洞在向外辐射能量，因此自身质量减少，但温度增加，这表明黑洞有一个负的比热。霍金的证明也证实了黑洞的温度是真实温度，因此在第一章所表述的黑洞力学四定律确实也是热力学四定律，而黑洞的这种由于存在温度而自发辐射粒子的现象也被称为霍金辐射（Hawking radiation）。

对于霍金辐射我们可以简单的进行物理上的理解（图 4）：根据量子场论，黑洞视界附近的真空也存在量子涨落。量子涨落会产生一对虚粒子，一个携带正能量，一个能量为负。黑洞表面引力越强，量子涨落产生的负能粒子进入视界内部的概率越大，此时带正能的虚粒子实化可被观测，而黑洞质量则会减少，对外表现为黑洞向外辐射出正能粒子，并且表面引力越大，温度越高，辐射速率越快。



图表 4 黑洞附近的真空涨落导致的霍金辐射^[2]

1976 年，霍金在它的著名论文中提出了黑洞在蒸发过程中信息会被丢失。如果上述推导无误，则黑洞最终会蒸发为一个完全的热态，而这与其初始状态的信息不守恒——既无角动量、电荷又无质量，可以说在蒸发完之后，黑洞的信息完全丢失了。

然而，根据量子力学的基本原理，黑洞如果在初始时刻是稳定的，那么它将处于纯态。根据量子力学基本原理，么正演化并不改变熵，这意味着在黑洞演化过程中一直处于纯态，而如果黑洞一直在向外辐射，最终一定会变成某种热态（混态）。这显然是与么正性不符合的。此外，因为黑洞辐射谱是黑体谱，这意味着这个辐射过程是完全随机的，并不携带任何信息。因此，在辐射过程中信息是守恒的，换句话说，量子力学的么正性要求任何物理过程的信息必须守恒！

第三章 佩奇曲线和近期研究

1. 各类猜想简介

在霍金关于信息丢失问题的论文发表后，许多物理学家提出了各种模型来解释在黑洞蒸发过程中信息是否守恒。这里主要介绍三种主流观点，即黑洞互补（**Black hole complementarity**）理论、防火墙^{[11][13]}（**firewalls**）理论和黑洞残留^[20]（**remnants**）理论。

黑洞互补理论认为信息既反映在事件视界，又通过事件视界而不能逃脱。但是没有观察者能够同时确定这两种说法。根据外部观察者的说法，视界因为是无限红移面，使它看起来好像需要无限的时间才能到达视界。他还假设了一个拉伸的视界，这是一个在视界外大约普朗克长度的薄膜，它既是物理的，也是热的。根据外部观察者的说法，掉入的信息使拉伸的视界升温，然后视界以霍金辐射的形式重新辐射它，整个演化过程是幺正的。然而，据一个正在下落的观察者说，在事件视界本身并没有什么特别的事情发生，观察者和信息都会“撞击”奇点。这并不是说有两个信息的“分身”在周围——一个在或刚好在视界外，另一个在黑洞内——因为那将违反无克隆定理（**No-cloning theorem**）。相反，观察者只能探测到视界本身的信息，或者视界内部的信息，但绝不可能同时探测到这两种信息。互补性是非交换可观察量子力学的一个特征，苏斯金德（**Susskind**）提出这两个说法在量子意义上是互补的。这种理论认为信息是否丢失取决于观察者，但我们无法只通过一种观者的描述来获得所有信息，这也是互补原理的根本所在。

防火墙理论则认为在黑洞蒸发过程中，它的行为和半经典理论有重大偏离，这种偏离导致了不管是外部还是内部量子场的观者，都大大减少了内外部分之间的纠缠（甚至根本没有纠缠）。这个想法非常激进，因为在蒸发过程中，要想消除内外之间的纠缠，我们需要量子场理论在任意低的曲率下崩溃。特别地，在视界上显著减少纠缠需要量子场在视界上是奇异的——即存在一道防火墙（**firewall**）。这个防火墙由视界附近的高能粒子组成。因为切断黑洞与外部粒子的纠缠需要巨大的能量，所以火枪的能量很高，一切落入视界的物体立刻就会被这道高能屏障撕碎，而不是不可逆的落入奇点。这种观点认为黑洞

在蒸发过程中确实出现了信息丢失，但这种丢失在某种情况下是合理的。但显然火墙的出现机制是非因果性（acausal）的，这显然违背了相对论性量子力学的基本原理。

第三种观点认为黑洞会在蒸发到普朗克尺度的时候停止——即当量子引力开始占主导地位的时候停止蒸发。此时产生的“残留物（remnant）”继续包含所有进入黑洞的“信息”（即残留物与残留物的外部高度纠缠），以这种方式，残留物和外部的联合态依然是纯态。现在一个关键的问题是，蒸发产生的残留物能否和外界发生相互作用。如果不能，那这类信息是无意义的，因为我们无法获取，最终还是成为混态。如果能，又会引发一个严重的热力学问题：残余物需要无限大的状态数才可能与霍金辐射的粒子全部都纠缠在一起。这意味着它需要比其他物质受到熵的影响更大，这个比值趋于无穷。

2. 纠缠熵与佩奇曲线

纠缠（Entanglement）是量子力学里面普遍存在的一个特征。我们考虑两个独立量子系统对应希尔伯特空间的张量积（tensor product）：

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (3.2.1)$$

在 \mathcal{H} 这个希尔伯特空间中，任何一个可能态都应该有如下展开形式：

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |\Psi_{Ai}\rangle \otimes |\Psi_{Bj}\rangle \quad (3.2.2)$$

式中 $|\Psi_{Ai}\rangle$ 和 $|\Psi_{Bj}\rangle$ 分别是 \mathcal{H}_A 和 \mathcal{H}_B 的一组正交归一基。定义概率密度算符 ρ_{AB} ：

$$\rho_{AB} = \sum_{\alpha} p_{\alpha} |\Psi_{\alpha}\rangle \langle \Psi_{\alpha}| \quad (3.2.3)$$

其中 p_{α} 为此系统处于态 $|\Psi_{\alpha}\rangle$ 的概率， $|\Psi_{\alpha}\rangle$ 的具体表达式由（3.2.2）描述。我们定义纯态（pure state）为：该系统仅有可能处于某一种特定状态，其对应的概率 $p_{\alpha} = 1$ ；一个系统若不处于纯态，即认为它处于混态（mix state）。可以证明，一个系统处于纯态当且仅当其概率密度算符 ρ 满足：

$$\rho^2 = \rho \quad (3.2.4)$$

一般来说，一个张量积系统的密度算符 ρ 无法写成 $\rho_A \otimes \rho_B$ 的形式，这是因为对于一个一般系统，就算处于纯态，其密度算符 ρ 也会有交叉项出现。但是这种

情况非常重要，我们定义独立系统 A、B 处于纠缠态当且仅当：

$$\rho_{AB} \neq \rho_A \otimes \rho_B \quad (3.2.5)$$

从物理角度来说这很好解释，密度算符处于张量积态意味着 A 系统和 B 系统互不干扰，考虑一个处于纯态的物理系统，我们在某时刻观察 A 的某个物理量，则该物理态坍缩到对应本征态，但由于其密度算符是张量积形式，这意味着我们并不能得到此时 B 系统的任何信息，即无论我们是否已知 A 的具体状态，B 的状态都不受影响，反过来也一样。引入冯诺依曼熵^[12]（Von Neumann Entropy）：

$$S(\rho) = -\text{tr}(\rho \ln \rho) \quad (3.2.6)$$

它可以用来很好的衡量系统的混合程度，有如下几个非常好的性质：

- 系统处于纯态当且仅当 $S(\rho) = 0$ ；
- 么正演化不改变冯诺依曼熵：即 $S(U^\dagger \rho U) = S(\rho)$ ；

上述第二条性质阐述了：对于一个随时间演化的量子系统，虽然其密度算符随时间变化，但冯诺依曼熵不变，即该系统的混态度不变，这也是量子力学么正性保证了信息守恒的原因之一。

冯诺依曼熵又被称作精细熵（Fine-grained entropy）。这是因为在热力学中我们还会引入一种熵，它随时间演化时会单向增加，而这种热力学熵有时也被称为粗粒熵^[14]（coarse-grained entropy）。在量子力学框架下，我们按如下方式定义粗粒熵：它是所有满足已知宏观热力学状态函数（如能量）的允许量子态中，对应冯诺依曼熵最大的那个值。可以证明，在这样的定义下，这个熵符合热力学熵的所有性质，所以我们可以用粗粒熵^[14]来衡量系统的混乱程度（热力学性质）。

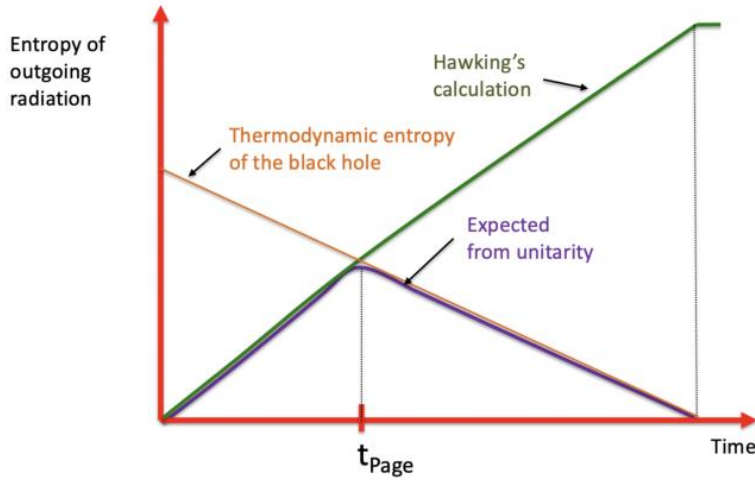
如果我们有一个非常复杂的量子系统（从外部观察黑洞可看作一个有限自由度的量子系统），它从纯态开始，不停地发出热辐射。在早期阶段，我们可以计算出发射辐射的冯诺依曼熵，它几乎是完全热的，因为辐射和量子系统纠缠在一起。因此我们有理由认为，在蒸发的初期，辐射熵上升。然而随着黑洞蒸发的越来越多，它的表面积会缩小，当辐射熵大于黑洞热力学熵时，我们就会遇到麻烦。原因是此时我们无法再用和量子系统相纠缠的辐射熵来描述黑洞——黑洞的自由度由其热力学熵给出（正比于表面积）。换句话说，如果黑洞的自由度和辐射一起产生一个纯态，那么黑洞的精细熵应该由辐射熵描述，即：

$$S_{\text{black hole}} = S_{\text{radiation}} \quad (3.2.7)$$

但这个精细熵应该小于黑洞的热力学熵——即贝根斯坦—霍金熵，即：

$$S_{black\ hole} \leq S_{Bekenstein-Hawking} = S_{coarse-grained} \quad (3.2.8)$$

Page 指出^{[15][16]}，如果黑洞蒸发这个过程是正确的，那么黑洞的辐射熵将小于它的热力学熵。在辐射熵增到和热力学熵相等时 ($S_{black\ hole} = S_{Bekenstein-Hawking}$)，便无法像霍金计算的那样继续增加，而是和热力学熵一起减小到 0。这意味着黑洞在蒸发过程中要遵循图六所示的紫色的佩奇曲线^[19] (Page curve)，而非绿色的霍金曲线，而当黑洞的辐射熵增到和热力学熵相等时的时间称作佩奇时间 (Page time)。



图表 5 Page curve

因此，如果我们选择了“正确的”蒸发黑洞的熵，那么这个过程可以是信息守恒的。一个粗略的精细熵公式由下式给出^[17]：

$$S \sim \min \left[\frac{Area}{4G_N} + S_{outside} \right] \quad (3.2.9)$$

一个更精确的公式需要寻找最小曲面来得到。首先选择一个空间切片并找到最小曲面（纠缠熵最小的曲面），然后对所有空间切片求最大值。严格的公式表述如下所示^[18]：

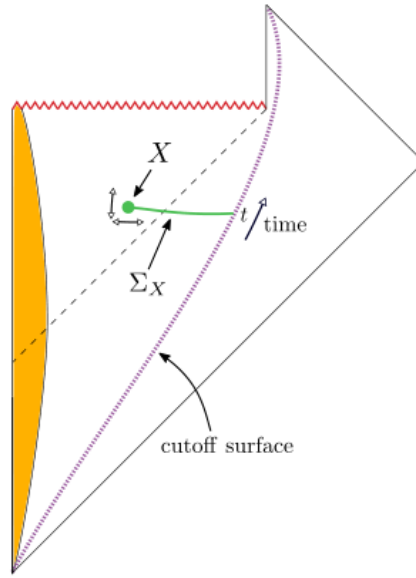
$$S = \min_X \left\{ ext_X \left[\frac{Area}{4G_N} + S_{semi-cl}(\sum X) \right] \right\} \quad (3.2.10)$$

式中 $S_{semi-cl}(\sum X)$ 是边界量子场的冯半经典诺依曼熵。 X 为时空的柯西切片（空间切片）， $\sum X$ 为空间切片的二维边界。我们可以用图 7 来描述这个过程。

括号中的量又称为广义熵（generalized entropy）：

$$S_{gen}(X) = \frac{Area}{4G_N} + S_{semi-cl}(\sum X) \quad (3.2.11)$$

这个想法是，我们从黑洞外的一个表面开始，我们可以让它穿过视界进入黑洞内部，找到最小值。这意味着答案取决于黑洞内部的几何形状。我们可以有外形相似但内部不同的黑洞。这样的黑洞会有不同的细粒度熵。在黑洞内部表面可能会完全收缩为一点。在这种情况下，没有表面积的贡献。式（3.2.10）中的 S 被称为“量子极值面^{[18][19]}（quantum extremal surface）”。



图表 6 量子极值面的 Penrose 图描述

如果黑洞蒸发过程中的精细熵真的遵循佩奇曲线，那么信息丢失问题将得到初步解决。这是因为佩奇是在假设么正演化的前提下，推断出黑洞熵应该满足如下公式。著名物理学家 Andrew Strominger 说过：不先验的假定么正演化而能从引力的角度计算出 Page 曲线意味着黑洞信息丢失问题的解决。而上述通过寻找量子极值面的方法给出了佩奇曲线的一种得到方式。这是否意味着黑洞信息丢失问题已经得到解决？其实不然。

3. 未解决的谜团

虽然我们已经可以找到某种方法计算出佩奇曲线，但是将黑洞看作某个自由度有限的量子系统时，我们却无法精确计算出其密度矩阵或散射振幅的某个具体矩阵元，用版经典理论计算引力的精细熵已经算是一个“奇迹”了。但如果要了

解更多的信息，我们必须精确计算矩阵元。

第二个问题是，我们在利用量子极值面来计算黑洞精细熵时，截断面外的时空背景是固定的，但内部确是和引力耦合的。推广到平直时空时，引力不可能突变为 **0**，而是渐变的，所以从某种程度来说我们的计算是近似的，而更加精确的计算需要考虑引力的渐变。这些问题都有待科学家们的进一步研究。

第四章 总结

黑洞作为一个奇特的天体，一直是量子引力研究的热点之一。量子力学和广义相对论这两个优美理论的不相容性在黑洞附近体现的淋漓尽致。自从霍金 1976 年提出信息丢失问题以来，它一直作为一个最为基本的问题困扰了物理学家们数十年。这是这两个理论不相容的直接体现——当我们试图用半经典理论来分析问题时，悖论便出现了。

回顾黑洞热力学的建立，安鲁效应的发现，霍金辐射，科学家们的步伐其实是坚实且缓慢的，而并非突然的飞跃。安鲁效应的提出暗示我们可以在量子场论中引入弯曲时空的性质，从而进行半经典计算。而霍金则利用这一工具强有力的得出了黑洞存在热辐射。再到信息丢失与么正性的违背，细想之下，这每一步都是合理的。正是因为广义相对论和量子理论的不相容，导致了当我们要考虑的天体有很强的量子效应时，问题就会出现。黑洞就是这样的天体。但这难不倒喜欢思考的物理学家们。佩奇曲线的提出，量子极值面的计算——运用半经典理论得到满足么正性的黑洞蒸发过程中熵的变化。这是一个奇迹。我不知道它是否意味着广义相对论和量子力学还有着部分相容的可能性，但我知道，正是因为这些科学家们的思考，物理才会向前推动，我们才能更加接近真理！

参考文献

- [1] Hawking S W. Breakdown of predictability in gravitational collapse[J]. Physical Review D, 1976, 14(10): 2460. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.14.2460>
- [2] 刘辽,赵峥. 黑洞与时间的性质[M]. 北京大学出版社, 2008.
- [3] Hawking S W, Ellis G F R. The large scale structure of space-time[M]. Cambridge university Press, 1973.
- [4] Hawking S W. Gravitational Radiation from Colliding Black Holes[J]. Physical Review Letters, 1971,26(21): 1344. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.26.1344>
- [5] Daniel Harlow. Jerusalem Lectures on Black Holes and Quantum Information[J]. Rev. Mod. Phys, 2016, 88(1): 015002.<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.88.015002>
- [6] Badis Ydri. Quantum Black Holes[J]. <https://arxiv.org/abs/1708.00748>
- [7] Unruh W G. Notes on black-hole evaporation[J]. Physical Review D, 1976, 14(4): 870. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.14.870>
- [8] 梁灿彬. 微分几何入门与广义相对论[M]. 科学出版社, 2006
- [9] Carroll S M. Spacetime and geometry: An introduction to general relativity[M]. San Francisco, USA: Addison-Wesley, 2004.
- [10] Hawking S W. Particle creation by black holes[J]. Communications in Mathematical Physics, 1976, 46: 206. <https://doi.org/10.1007/BF01608497>
- [11] Almheiri A, Marolf D, Polchinski J and Sully J. Black holes: complementarity or firewalls?[J]. Journal of High Energy Physics, 2013,62. [https://doi.org/10.1007/JHEP02\(2013\)062](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2013)062)
- [12] Nielsen M A and Chuang I L, Quantum computation and quantum information[M]. Cambridge university press, 2010.
- [13] Ahmed Almheiri, Donald Marolf, Joseph Polchinski, Douglas Stanford & James Sully. An apologia for firewalls[J]. Journal of High Energy Physics, 2013, 18. [https://doi.org/10.1007/JHEP09\(2013\)018](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2013)018)
- [14] Bekenstein J D. Black holes and entropy[J]. Physical Review D, 1973, 7(8): 2333. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.7.2333>
- [15] Page D. N. Information in black hole radiation[J]. Physical Review Letters, 1993, 71(23): 3743. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.3743>
- [16] Page D. N. Time Dependence of Hawking Radiation Entropy[J]. Journal of

Cosmology and Astroparticle Physics, 2013, 028.

[10.1103/PhysRevLett.71.3743](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.3743)

[17]V. E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi. A Covariant holographic entanglement entropy proposal,[J]. Journal of High Energy Physics, 2007, 62.

[10.1088/1126-6708/2007/07/062](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2007/07/062)

[18]N. Engelhardt and A. C. Wall. Quantum Extremal Surfaces: Holographic Entanglement Entropy beyond the Classical Regime[J]. Journal of High Energy Physics, 2015, 73. [10.1007/JHEP01\(2015\)073](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2015)073)

[19]Ahmed Almheiri, Thomas Hartman, Juan Maldacena, Edgar Shaghoulian, Amirhossein Tajdini. The entropy of Hawking radiation[J].

[arXiv:2006.06872v1](https://arxiv.org/abs/2006.06872v1)

[20]William G Unruh, Robert M Wald. Information loss[J]. Reports on Progress in Physics, 2017, 80: 9. <https://doi.org/10.1088/1361-6633/aa778e>