数值分析公式总结

目录

一、数值计算误差

1.1 计算误差

误差：$e^* = x - x^*$

相对误差：$e_r^* = \frac{x-x^*}{x^*} = \frac{e^*}{x^*}$ (分母也可以取 x)

误差限：$|e^*| = |x - x^*| \le \varepsilon^*$

相对误差限：$|e_r^*| = \left|\frac{e^*}{x^*}\right| \le \frac{\varepsilon^*}{|x^*|}$

1.2 函数的误差

误差：$\mathrm{e}(\mathrm{f}(x^*)) = f'(x^*)e(x^*)$

误差限：$\varepsilon(\mathrm{f}(x^*)) = |f'(x^*)|e(x^*)$

相对误差：$e_r(\mathrm{f}(x^*)) = f'(x^*)e(x^*)/f(x^*)$

相对误差限：$\varepsilon_r(\mathrm{f}(x^*)) = |f'(x^*)|e(x^*)/f(x^*)$

1.3 数值运算的误差估计

$$\begin{cases} \varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) \leqslant \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*) \\ \varepsilon(x_1^* x_2^*) \leqslant |x_1^*|\varepsilon(x_2^*) + |x_2^*|\varepsilon(x_1^*) \\ \varepsilon(x_1^*/x_2^*) \leqslant \dfrac{|x_1^*|\varepsilon(x_2^*) + |x_2^*|\varepsilon(x_1^*)}{|x_2^*|^2}, \quad x_2^* \neq 0 \end{cases}$$

1.4 误差限和有效位数的关系

$$\varepsilon^* = |x - x^*| \le \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}$$

例： $193.4 \ \Rightarrow 1.934 \times 10^2 \ \Rightarrow \mathrm{m} = 2 \ \ \mathrm{n} = 4$

1.5 相对误差限和有效位数的关系

$$\varepsilon^* \le \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}$$

例： $193.4 \ \Rightarrow 1.934 \times 10^2 \ \Rightarrow a_1 = 1 \ \ \mathrm{n} = 4$

二、插值法

2.1 多项式插值

$P(x)$ 为 n 阶多项式, $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, a_i$ 为实数。

解法: $\mathbf{a}$ 解方程组: $\mathbf{A}a = \mathbf{y}$, 其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}, \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

2.2 Lagrange 插值

插值多项式: $L_n(x) = l_0 y_0 + l_1 y_1 + \cdots + l_n y_n$

$$l_0 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)}$$

插值余项: $R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W_{n+1}(x)$

截断误差: $|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|, M_{a+1} = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$

2.3 Newton 插值

均差（差商）

一阶差商：$f[x_0,x_k]=\frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}$

二阶差商：$f[x_0,x_1,x_k]=\frac{f[x_0,x_1]-f[x_0,x_k]}{x_k-x_1}$

K 阶差商：$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]-f[x_0,\dots,x_{k-2},x_k]}{x_k-x_{k-1}}$

k	x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	…
0	x_0	$f(x_0)$				
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$			
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
3	x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
4	x_4	$f(x_4)$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

（均差表）

插值多项式：

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+f[x_0,x_1,x_2\cdots x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

插值余项：

$$R_n(x)\&=f[x,x_0,x_1\cdots x_n](x-x_0)\cdots(x-x_n)=f[x,x_0,x_1\cdots x_n]w_{n+1}(x)$$

2.4 等距插值（差分形式的牛顿插值公式）

k	f_k	Δ (∇)	Δ^2 (∇^2)	Δ^3 (∇^3)	$\Delta^4(\nabla^4)$	$\cdots$
0	f_0					
		$\Delta f_0(\nabla f_1)$				
1	f_1		$\Delta^2 f_0(\nabla^2 f_2)$			
		$\Delta f_1(\nabla f_2)$		$\Delta^3 f_0(\nabla^3 f_3)$		
2	f_2		$\Delta^2 f_1(\nabla^2 f_3)$		$\Delta^4 f_0(\nabla^4 f_4)$	
			$\cdots$			
		$\Delta f_2(\nabla f_3)$		$\Delta^3 f_1(\nabla^3 f_4)$		
					$\vdots$	
3	f_3		$(\nabla^2 f_4)$			
		$\Delta f_3(\nabla f_4)$	$\Delta^2 f_2$	$\vdots$		
4	f_4	$\vdots$	$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$					

$(\nabla f_k=f_k-f_{k-1})$

（差分表）

差分多项式:

$$P_n(x_0+th)=f_0+t\Delta f_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\cdots\ +\frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

前插余项: $\mathrm{Rn}=\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(n+1)!}\mathrm{h}^{n+1}\mathrm{f}^{(n+1)}(\xi)$

截断误差: $\mathrm{Rn}(x)\leqslant\frac{M_n+1}{(n+1)!}\omega_{\mathrm{n+1}}(x)$

三、曲线拟合的最小二乘法

3.1 曲线拟合

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^n & \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} & \cdots & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \vdots \\ \vdots \\ x_i^m y_i \end{bmatrix}$$

对一组(x_i,y_i)用次数 m<<n 的多项式拟合时的误差：

$$\| e \|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j y_i$$

3.2 线性拟合

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}$$

（注：n 为节点个数，a1 为系数 k，a0 为常数 b）

四、数值积分

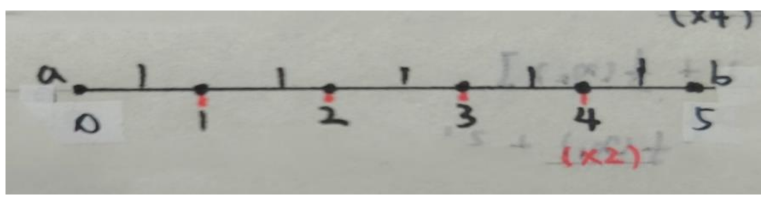
4.1Newton-Cotes 公式

	公式	余项
中矩形公式	$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\int\left(\frac{a+b}{2}\right)$	
Cotes 公式	$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k)$ A_k是全系数，C_k是科特斯系数，右侧为代数精度	$\begin{cases} n & n为奇数 \\ n+1 & n为偶数 \end{cases}$ 这里的 n 为等分数
梯形公式(1 次代数精度)	$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$	$R[f] = \frac{-(b-a)^3}{12}f''(\eta)$
辛普森公式(3 次代数精度)	$S = \frac{b-a}{b}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$	$R[f] = \frac{-(b-a)^5}{360}f^4(\eta)$

4.2 科特斯系数表

n	$C_k^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

4.3 复合求积公式

<table>
<tr><th></th><th>公式</th><th>余项</th></tr>
<tr><td>复合梯形公式</td><td>$$T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]=$$ $$\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{n=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$</td><td>$R[f]=I-T_n=-\frac{\mathrm{b-a}}{12}h^2f''(\eta)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">将区间[a,b]n 等分，步长 h=$\frac{b-a}{h}$，分点$x_k=\mathrm{a+kh}$</td></tr>
<tr><td>复合辛普森公式</td><td>$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{6}\left[f(x_k)+4f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+f(x_{k+1})\right]$$ $$=\frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_{k+1})+f(b)\right]$$</td><td>$R[f]=I-h_n=-\frac{b-a}{2880}h^4f^{(4)}(\eta)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">将区间[a,b]n 等分，在每个子区间$[x_k,x_{k+\frac{1}{2}}]$上采用 Simpson 公式，记$x_{k+\frac{1}{2}}$=$x_k+\frac{1}{2}h$
</td></tr>
<tr><td>*Gauss 公式</td><td colspan="2">$$I(f)=\int_a^b\rho(x)f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">选择互异节点使插值求积公式代数精度为 2n+1，则该求积公式为高斯型，这些节点为高斯节点
$\Leftrightarrow w(x)=\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$与任意次数不大于 n 的多项式 P(x)（带权）正交</td></tr>
</table>

五、数值微分

5.1 两点公式

	公式	余项
前点公式	$f'(a)\approx\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	$-\dfrac{h}{2}f''(\xi)=0(h)$
中点公式	$f'(a)\approx\dfrac{f(a)-f(a+h)}{h}$	$\dfrac{h}{2}f''(\xi)=0(h)$
后点公式	$f'(a)\approx\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$	$-\dfrac{h}{6}f''(\xi)=0(h)$

5.2 三点公式

	公式	余项
前点 公式	$P_2'(x_0)=\dfrac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)]$	$\dfrac{h^2}{3}f'''(\xi_0)$
中点 公式	$P_2'(x_1)=\dfrac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_2)]$	$-\dfrac{h^2}{6}f'''(\xi_1)$
后点 公式	$P_2'(x_2)=\dfrac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)]$	$\dfrac{h^2}{3}f'''(\xi_2)$

六、非线性方程迭代法

6.1 二分法

迭代次数：$k > \frac{\ln(b-a)-\ln b}{\ln 2} - 1$

例：求$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$在[1,1.5]的一个实根精度要求小数点后两位

$$k > \frac{\ln(1.5-1) - \ln 0.01}{\ln 2} - 1 \Rightarrow k = 6$$

K	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$符号
1	1	1.5	1.25	−
2	1.25	1.5	1.375	+
………				
6	1.3125	1.3281	1.3203	+

6.2 不动点迭代法

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \quad k = 0,1,2\cdots \quad \text{(收敛速度慢)}$$

迭代次数：

①$k > \ln\frac{\varepsilon(1-L)}{|x_1-x_0|} \div \ln L$

②$|x_k - x_{k-1}| < \frac{\varepsilon(1-L)}{L}$

③$L = max|f'(x)|$

局部收敛:φ(x)，不动点x^*，φ'(x)在某领域连续，且|φ'(x)|<1，则局部收敛。

6.3 牛顿迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0,1\cdots)$$

*(为了防止迭代发散，迭代过程有$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$的单调性为牛顿下山法)

牛顿法$\begin{cases}\text{单根：平方收敛}\\ \text{重根：线性收敛}\end{cases}$

6.4 弦截法

$$y = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k)$$

将牛顿法中的$f'(x_k)$用 $\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$ 代替

6.5 抛物线法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{w \pm \sqrt{w^2 - 4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}}$$

$$w = f[x_k, x_{k-1}] + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x_k - x_{k-1})$$

讨论正负号取舍问题：在x_{k-1},x_k,x_{k+1}三个近似根中，自然假定x_k 更接近根x^*，为了保证精度，取x_{k+1}，为此只需要取根式前的符号与w相同

七、常微分方程初值问题数值解法

定义一：$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\varphi(x_n, y(x_n), h)$为显式单步法的局部截断误差

定义二：局部截断误差满足$T_{n+1} = y(x+h) - y(x) - h\varphi(x, y, h) = O(h^{p+1})$

则称方法具有 p 阶精度；若展开写成$T_{n+1} = \psi\big(x_n, y(x_n)\big)h^{p+1} + O(h^{p+2})$，则$\psi\big(x_n, y(x_n)\big)h^{p+1}$为局部截断误差主项

	公式	局部截断误差
前进 Euler 法（显式）	$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ $y_{n+1} = y_n + h(y_n - \frac{2x_n}{y_n})$ 一阶精度	局部截断误差是 $\frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)$
后退 Euler 法（隐式）	$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ 一阶精度	局部截断误差是 $\frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)$
两步欧拉法	$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)$ 二阶精度	局部截断误差是$O(h^2)$
梯形法	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$ 二阶精度 梯形公式是将欧拉公式与隐式欧拉公式的算术平均，也是隐式公式	局部截断误差主项为 $-\frac{h^3}{12}y'''(x_n)$
改进欧拉公式	$\begin{cases} y_p = y_n + h\left(y_n - \frac{2x_n}{y_n}\right) \\ y_c = y_n + h\left(y_p - \frac{2x_{n+1}}{y_p}\right) \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$	

例：用改进欧拉法求初值问题

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

取 h=0.1，n=0，1，…，9

n=0 时

$$\mathrm{y_p} = \mathrm{y_0} + \mathrm{h}\left(\mathrm{y_0} - \frac{2\mathrm{x_0}}{\mathrm{y_0}}\right) = 1 + 0.1\left(1 - \frac{2 \times 0}{1}\right) = 1.1$$

$$\mathrm{y_c} = \mathrm{y_0} + \mathrm{h}\left(\mathrm{y_p} - \frac{2\mathrm{x_1}}{\mathrm{y_p}}\right) = 1 + 0.1\left(1.1 - \frac{2 \times 0.1}{1.1}\right) = 1.091818$$

$$\mathrm{y_1} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{y_p} + \mathrm{y_c}\right) = 1.095909$$

$$\vdots$$

逐步迭代到 n=9