Program Logics Hand-in 1

Zijun Yu 202203581

September 2023

Exercise 1

Part 1

$$
\begin{aligned}
&([], [0 \mapsto \mathsf{singleton} 1]) \\
&\to ([], [0 \mapsto \mathsf{inr}(\mathsf{ref}\,(1, \mathsf{inl}()))]) \\
&\to ([l_1 \mapsto (1, \mathsf{inl}())], [0 \mapsto \mathsf{inr} l_1])
\end{aligned}
$$

Part 2

$([], [0 \mapsto \mathsf{inc}(\mathsf{singleton} 1)])$
$\to ([l_1 \mapsto (1, \mathsf{inl}())], [0 \mapsto \mathsf{inc}(\mathsf{inr} l_1)])$
$\to ([l_1 \mapsto (1, \mathsf{inl}())], [0 \mapsto$
$\quad \mathsf{match}\ \mathsf{inr} l_1\ \mathsf{with}\ \mathsf{inl} x_1 \Rightarrow () \mid \mathsf{inr} x_2 \Rightarrow \mathsf{let}\ v := \pi_1(!x_2)\ \mathsf{in}\ \mathsf{let}\ t := \pi_2(!x_2)\ \mathsf{in}\ x_2 \leftarrow (v+1, t); \mathsf{inc} t\ \mathsf{end}])$
$\to ([l_1 \mapsto (1, \mathsf{inl}())], [0 \mapsto \mathsf{let}\ v := \pi_1(!l_1)\ \mathsf{in}\ \mathsf{let}\ t := \pi_2(!l_1)\ \mathsf{in}\ l_1 \leftarrow (v+1, t); \mathsf{inc} t])$
$\to ([l_1 \mapsto (1, \mathsf{inl}())], [0 \mapsto \mathsf{let}\ v := \pi_1(1, \mathsf{inl}())\ \mathsf{in}\ \mathsf{let}\ t := \pi_2(!l_1)\ \mathsf{in}\ l_1 \leftarrow (v+1, t); \mathsf{inc} t])$
$\to ([l_1 \mapsto (1, \mathsf{inl}())], [0 \mapsto \mathsf{let}\ v := 1\ \mathsf{in}\ \mathsf{let}\ t := \pi_2(!l_1)\ \mathsf{in}\ l_1 \leftarrow (v+1, t); \mathsf{inc} t])$
$\to ([l_1 \mapsto (1, \mathsf{inl}())], [0 \mapsto \mathsf{let}\ t := \pi_2(!l_1)\ \mathsf{in}\ l_1 \leftarrow (1+1, t); \mathsf{inc} t])$
$\to ([l_1 \mapsto (1, \mathsf{inl}())], [0 \mapsto \mathsf{let}\ t := \pi_2(1, \mathsf{inl}())\ \mathsf{in}\ l_1 \leftarrow (1+1, t); \mathsf{inc} t])$
$\to ([l_1 \mapsto (1, \mathsf{inl}())], [0 \mapsto \mathsf{let}\ t := \mathsf{inl}()\ \mathsf{in}\ l_1 \leftarrow (1+1, t); \mathsf{inc} t])$
$\to ([l_1 \mapsto (1, \mathsf{inl}())], [0 \mapsto l_1 \leftarrow (1+1, \mathsf{inl}()); \mathsf{inc}\ \mathsf{inl}()])$
$\to ([l_1 \mapsto (1, \mathsf{inl}())], [0 \mapsto l_1 \leftarrow (2, \mathsf{inl}()); \mathsf{inc}\ \mathsf{inl}()])$
$\to ([l_1 \mapsto (2, \mathsf{inl}())], [0 \mapsto (); \mathsf{inc}\ \mathsf{inl}()])$
$\to ([l_1 \mapsto (2, \mathsf{inl}())], [0 \mapsto \mathsf{inc}\ \mathsf{inl}()])$
$\to ([l_1 \mapsto (2, \mathsf{inl}())], [0 \mapsto$
$\quad \mathsf{match}\ \mathsf{inl}()\ \mathsf{with}\ \mathsf{inl} x_1 \Rightarrow () \mid \mathsf{inr} x_2 \Rightarrow \mathsf{let}\ v := \pi_1(!x_2)\ \mathsf{in}\ \mathsf{let}\ t := \pi_2(!x_2)\ \mathsf{in}\ x_2 \leftarrow (v+1, t); \mathsf{inc} t\ \mathsf{end}])$
$\to ([l_1 \mapsto (2, \mathsf{inl}())], [0 \mapsto ()])$

The syntactic sugars are not expanded in the reduction.

Exercise 2

Approach 1

$$\dfrac{\dfrac{}{P * Q \vdash P} \qquad \dfrac{}{P * Q \vdash Q}}{P * Q \vdash P \wedge Q}$$

Approach 2

Using the result from Exercise 3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}}{P \vdash Q \mathrel{-\!\!*} (P \wedge Q)} \qquad \dfrac{}{Q \vdash Q}}{P * Q \vdash P \wedge Q}$$

Exercise 3

$$\dfrac{P \vdash Q \mathrel{-\!\!*} R \qquad \dfrac{}{Q \vdash Q}}{P * Q \vdash R}$$

Exercise 4

From left to right:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \mid \exists x.P * Q \vdash \exists x.P * Q}}{\Gamma, x \mid P * Q \vdash \exists x.P * Q}}{\Gamma, x \mid Q \vdash P \mathrel{-\!\!*} \exists x.P * Q}}{\Gamma \mid \exists x.Q \vdash P \mathrel{-\!\!*} \exists x.P * Q}}{\Gamma \mid P * \exists x.Q \vdash \exists x.P * Q}$$

From right to left:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, x \mid P \vdash P} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, x \mid \exists x.Q \vdash \exists x.Q}}{\Gamma, x \mid Q \vdash \exists x.Q}}{\Gamma, x \mid P * Q \vdash P * \exists x.Q}}{\Gamma \mid \exists x.P * Q \vdash P * \exists x.Q}$$