Determinanten

August 18, 2021

1 Eigenschaften

(a) Für $A, B \in M_n(R)$ gilt

$$det(AB) = detA \cdot detB.$$

(b) Ist $A \in M_n(R)$ in $M_n(R)$ invertierbar, so ist detA in R invertierbar mit

$$(detA)^{-1} = detA^{-1}.$$

2 Determinantenbestimmung

2.1 Für $n \geq 4;\ n \times n$ Matrizen

Definition:

$$detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot detA_{ij} \cdot \alpha_{ij}$$

2.1.1 Rechenvorschrift

Bei dem Entwickeln nach einer Zeile bieten sich solche an, welche viele Nullen haben, da die Spalten, welche diese teilen nicht entwickelt werden müssen. Weiterhin sollte darauf geachtet werden, dass $detA_{ij}$ die übriggebliebene Matrix mit der je weggestrichenen Zeile und Spalte ist.

2.1.2 Rechenbeispiel

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \; Bestimme\ detA$$

1. Setze die erste Zeile aufgrund der Nullen als die zu entwickelnde Zeile

2. Entwickel die zweite und dritte Spalte

$$detA = (-1)^3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2 + (-1)^4 \cdot det \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot (-1)$$

3. Rechne die Determinanten per Jägerzaunregel aus und fasse zusammen

$$= -2 \cdot det(\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}) - det \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \cdot (1 - 36 + 4 - 4 + 6 - 6) - (-1 - 36 + 6 + 4 + 6 - 3)$$

$$= 70 - (-30)$$

$$= 100$$

2.2 Für $n = 3$; $n \times n$ Matrizen - Jägerzaunregel

2.2.1 Rechenvorschrift

Bei dem Bestimmen von der Determinante der 3×3 Matrize ist es hilfreich die Matrize zu erweitern, sodass die zu verrechnenden Diagonalen klar zu erkennen sind. Die Diagonalen von links oben nach rechts unten (später grün) werden multiplikativ addiert und die Diagonalen von rechts unten nach links oben (später rot) werden multplikativ subtrahiert.

2.2.2 Rechenbeispiel

1. Erweitere notfalls die Matrix wie folgt

$$det \left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{31} & \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix}$$

2. Notiere die Diagonalen (links oben nach rechts unten)

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{31} & \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} + \alpha_{12} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{31} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{32}$$

3. Notiere die Diagonale (rechts unten nach links oben)

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix}$$

$$detA = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} + \alpha_{12} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{31} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{32} - \alpha_{31} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{13} - \alpha_{32} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{11} - \alpha_{33} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{12}$$

2.3 Für $n = 2$; $n \times n$ Matrizen

2.3.1 Rechenvorschrift

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{21} \cdot \alpha_{12}$$