Eigenwerte, Eigenräume und das Charakteristische Polynom

August 17, 2021

1 Eigenwerte und Eigenvektoren

1.1 Definiton Eigenwert, Eigenvektor

Seien V ein K-Vektorraum und $f : V$ ein Endomorphismus.

(a) Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von f, falls folgene Eigenschaft gilt:

$$\exists x \in V \ \{0_V\} : f(x) = \lambda x$$

(b) Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, so heißt jedes $x \in V \ \{0_V\}$ mit $f(x) = \lambda x$ Eigenvektor zum eigenwert λ von f und die Menge

$$Eig_f(\lambda) :)\{x \in V | f(x) = \lambda x\}$$

heißt Eigenraum zum Eigenwert von λ von f.

2 Charakteristisches Polynom

2.1 Definition

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_{\geq}1$ und $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in M_n(K)$. Betrachte über dem Polynomring $K[X]$ die $n \times n$-Matrix

$$XI_n - A = \begin{pmatrix} X - \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & X - \alpha_{22} & \dots & -\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \dots & X - \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K[X]).$$

Deren Determinante

$$\chi_A(X) := det(XI_n - A)$$

ist ein Polynom vom Grad n in K[X] und heißt charakteristisches Polynom von A.

2.2 Eigenwertbestimmung einer Matrix

Es gilt:

"λ ist Eigenwert von A" $\Leftrightarrow$ "λ ist Nullstelle von $\chi_A(X)$"

3 Bestimmung Eigenraum zum Eigenwert

3.1 Rechenvorschrift

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_{\geq}1$ und $A \in M_n(K)$. Dann heißt $\lambda \in K$ Eigenwert von A, falls λ Eigenwert von f_a ist. In diesem Fall ist der Eigenraum

$$Eig_A(\lambda) := \mathcal{L}(\lambda I_n - A, 0_{K^n})$$

3.2 Beispielrechnung

Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Bestimme den Eigenraum zum kleinsten Eigenwert.

1. Bestimme das Charakteristische Polynom.

$$\chi_A(X) := det(XI_n - A) = det \begin{pmatrix} X-3 & -1 & 3 \\ 0 & X+2 & -1 \\ 0 & 0 & X-3 \end{pmatrix} = (X-3) \cdot (X+2) \cdot (X-3)$$

2. Bestimme die Nullstellen des Polynoms. Hier lassen sich die Nullstellen ablesen mit $\mathcal{L} = \{3, -2\}$ daher sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$.

3. Nun bestimmen wir den Eigenraum $Eig_A(-2) := \mathcal{L}(-2I_n - A, 0_{K^n})$

4. $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

5. Es resultieren drei Gleichungen

   (i) $-5x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_3$

   (ii) $-x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0$

   (iii) $-5x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0$

6. Wir setzten die freie Variable $\lambda = x_2$

7. Bestimmung Lösungsmenge

8. $\mathcal{L}(-2I_n - A, 0_{K^n}) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in K \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda : \lambda \in K \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

3.3 Diagonalisierbarkeit

- Eine Matrix ist Diagonalisierbar wenn $\sum_{i=1}^{k} dim_k Eig_A(\lambda_i) = n$ gilt.