Matrizen

August 18, 2021

1 Multiplikation

1.1 Dimensionen

Es können nur Matrizen mit den Dimensionen:

$$A_{a\times b}\, und\, B_{b\times c}$$

multipliziert werden. Es ergibt sich für das Produkt:

$$A_{a\times b} \cdot B_{b\times c} = C_{a\times c}$$

1.2 Rechenbeispiel

Sei $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2\cdot 2+1\cdot 2+1\cdot 2 & 2\cdot 2+1\cdot 2+1\cdot 1 \\ 1\cdot 2+1\cdot 2+0\cdot 2 & 1\cdot 2+1\cdot 2+0\cdot 1 \\ 2\cdot 2+0\cdot 2+1\cdot 2 & 2\cdot 2+0\cdot 2+1\cdot 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Somit gilt:

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 2+1\cdot 2+1\cdot 2 & 2\cdot 2+1\cdot 2+1\cdot 1 \\ 1\cdot 2+1\cdot 2+0\cdot 2 & 1\cdot 2+1\cdot 2+0\cdot 1 \\ 2\cdot 2+0\cdot 2+1\cdot 2 & 2\cdot 2+0\cdot 2+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 4 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Die Komponenten werden von außen nach innen paarweise multipliziert und die Paare addiert.

2 Inverse einer Matrix

2.1 Formel

Die Formel für das Inverse einer Matrix lautet:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot Adj(A)$$

2.2 Adjunkte Matrix

Sei (R,+,·,0,1) ein kommutativer Ring mit Eins. Für $A \in M_n(R)$ definieren wir die Adjunkte von A durch $A^* = (\alpha^*_{ij})_{ij}$ mit

$$(\alpha^*_{ij})_{ij} := (-1)^{i+j} det A_{ji}$$

für $i, j \in \{1, \dots, n\}$

2.3 Beispiel Adjunkte

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

So ist $A^* = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
mit

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} det A_{11} = det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = -4$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2} det A_{21} = det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3} det A_{31} = det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = -1$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} det A_{12} = det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = -4$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2} det A_{22} = det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$$

$$\alpha_{23} = (-1)^{2+3} det A_{32} = det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1} det A_{13} = det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2$$

$$\alpha_{32} = (-1)^{3+2} det A_{23} = det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 2$$

$$\alpha_{33} = (-1)^{3+3} det A_{33} = det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = -4$$