

Eigenwerte, Eigenräume und das Charakteristische Polynom

August 18, 2021

1 Eigenwerte und Eigenvektoren

1.1 Definiton Eigenwert, Eigenvektor

Seien V ein K -Vektorraum und $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

- (a) Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von f , falls folgende Eigenschaft gilt:

$$\exists x \in V \setminus \{0_V\} : f(x) = \lambda x$$

- (b) Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f , so heißt jedes $x \in V \setminus \{0_V\}$ mit $f(x) = \lambda x$ Eigenvektor zum Eigenwert λ von f und die Menge

$$Eig_f(\lambda) := \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$$

heißt Eigenraum zum Eigenwert λ von f .

2 Charakteristisches Polynom

2.1 Definition

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in M_n(K)$. Betrachte über dem Polynomring $K[X]$ die $n \times n$ -Matrix

$$XI_n - A = \begin{pmatrix} X - \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & X - \alpha_{22} & \dots & -\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \dots & X - \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K[X]).$$

Deren Determinante

$$\chi_A(X) := \det(XI_n - A)$$

ist ein Polynom vom Grad n in $K[X]$ und heißt charakteristisches Polynom von A .

2.2 Eigenwertbestimmung einer Matrix

Es gilt:

$$"\lambda \text{ ist Eigenwert von } A" \Leftrightarrow "\lambda \text{ ist Nullstelle von } \chi_A(X)"$$

3 Bestimmung Eigenraum zum Eigenwert

3.1 Rechenvorschrift

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $A \in M_n(K)$. Dann heißt $\lambda \in K$ Eigenwert von A , falls λ Eigenwert von f_a ist. In diesem Fall ist der Eigenraum

$$Eig_A(\lambda) := \mathcal{L}(\lambda I_n - A, 0_{K^n})$$

3.2 Beispielrechnung

Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Bestimme den Eigenraum zum kleinsten Eigenwert.

1. Bestimme das Charakteristische Polynom.

$$\chi_A(X) := \det(XI_n - A) = \det \begin{pmatrix} X-3 & -1 & 3 \\ 0 & X+2 & -1 \\ 0 & 0 & X-3 \end{pmatrix} = (X-3) \cdot (X+2) \cdot (X-3)$$

2. Bestimme die Nullstellen des Polynoms. Hier lassen sich die Nullstellen ablesen mit $\mathcal{L} = \{3, -2\}$ daher sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$.

3. Nun bestimmen wir den Eigenraum $Eig_A(-2) := \mathcal{L}(-2I_n - A, 0_{K^n})$

4. $\mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} -5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

5. Es resultieren drei Gleichungen

(i) $-5x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_3$

(ii) $-x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0$

(iii) $-5x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0$

6. Wir setzen die freie Variable $\lambda = x_2$

7. Bestimmung Lösungsmenge

8. $\mathcal{L}(-2I_n - A, 0_{K^n}) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in K \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda : \lambda \in K \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

3.3 Diagonalisierbarkeit

- Eine Matrix ist Diagonalisierbar wenn $\sum_{i=1}^k \dim_k Eig_A(\lambda_i) = n$ gilt.