Lineare Abbildung und Dimensionsformel

August 17, 2021

1 K-Lineare Abbildung

Eine Funktion $f : V \to W$ heißt K-Lineare Abbildung wenn gilt:

$$\forall v, w \in V, \lambda \in K : f(v + w) = f(v) + f(w) \wedge f(\lambda v) = \lambda f(x)$$

2 Dimensionsformel

Definition: $dim(A) = dim(Kern(A)) + dim(Bild(A))$

2.1 Rang und Defekt einer Matrix

Der Defekt von A ist : $Def(A) = dim(Kern(A))$

Der Rang von A ist : $rk(A) = dim(Bild(A))$

$\Rightarrow dim(A) = Def(A) + rk(a)$

2.2 Faustregeln (Ohne Anspruch auf totale Gültigkeit)

1. $rk(A) \to$ "Anzahl an Linear unabhänigen Spalten einer Matrix"
2. $Def(A) \to$ "Anzahl der Spalten - rk(A)"
3. $dim(A) \to$ "Anzahl der Spalten"

3 Beispiele

3.1 K-Lineare Abbildung

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

Die Funktion ist nicht $\mathbb{R}$-Linear, denn
die Funktion ist $\mathbb{R}$-Linear wenn gilt:

$$\forall v, w \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R} : f(v + w) = f(v) + f(w) \wedge f(\lambda v) = \lambda f(x)$$

Setzte $v, \lambda = 2$ so gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda v) &= f(2 \cdot 2) = 4^2 = 16 \\ \lambda f(v) &= 2f(2) = 2 \cdot 2^2 = 8 \\ \Rightarrow f(\lambda v) &\neq \lambda f(v) \end{aligned}$$

$\square$

3.2 Dimensionsformel

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ so folgt:

- Dimension : $dim(A) = 4$
- Rang : $rk(A) = 3$
- Defekt: $Def(A) = 1$