

Lineare Abbildung und Dimensionsformel

August 17, 2021

1 K-Lineare Abbildung

Eine Funktion $f : V \rightarrow W$ heißt K-Lineare Abbildung wenn gilt:

$$\forall v, w \in V, \lambda \in K : f(v + w) = f(v) + f(w) \wedge f(\lambda v) = \lambda f(x)$$

2 Dimensionsformel

Definition: $\dim(A) = \dim(\text{Kern}(A)) + \dim(\text{Bild}(A))$

2.1 Rang und Defekt einer Matrix

Der Defekt von A ist : $\text{Def}(A) = \dim(\text{Kern}(A))$

Der Rang von A ist : $\text{rk}(A) = \dim(\text{Bild}(A))$

$$\Rightarrow \dim(A) = \text{Def}(A) + \text{rk}(a)$$

2.2 Faustregeln (Ohne Anspruch auf totale Gültigkeit)

1. $\text{rk}(A) \rightarrow$ "Anzahl an Linear unabhängigen Spalten einer Matrix"
2. $\text{Def}(A) \rightarrow$ "Anzahl der Spalten - rk(A)"
3. $\dim(A) \rightarrow$ "Anzahl der Spalten"

3 Beispiele

3.1 K-Lineare Abbildung

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

Die Funktion ist nicht \mathbb{R} -Linear, denn
die Funktion ist \mathbb{R} -Linear wenn gilt:

$$\forall v, w \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R} : f(v + w) = f(v) + f(w) \wedge f(\lambda v) = \lambda f(x)$$

Setzte $v, \lambda = 2$ so gilt

$$f(\lambda v) = f(2 \cdot 2) = 4^2 = 16$$

$$\lambda f(v) = 2f(2) = 2 \cdot 2^2 = 8$$

$$\Rightarrow f(\lambda v) \neq \lambda f(v)$$

□

3.2 Dimensionsformel

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ so folgt:

- Dimension : $\dim(A) = 4$
- Rang : $rk(A) = 2$
- Defekt: $Def(A) = 2$