Bestimmung der darstellenden Matrix

August 18, 2021

1 Gegeben:

- 2 R-Vektorräume W und V, Basis b von W, Basis a von V.
- Eine R-Lineare Abbildung $f : W \to$ V.

2 Gesucht:

- Die abbildene Matrix $M_a^b(f)$

3 Vorgehensweise

Gegeben seien die lineare Abbildung:

$$f : \mathbb{R}^3 \to V, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \to \alpha - \gamma + (2\beta + 3\gamma)X$$

sowie die Startbasis

$$b := (e3, e2, e1 + e2)\ von\ \mathbb{R}^3$$

und die Zielbasis

$$a := (X, 1)\ von\ V$$

wobei e_i den i-ten Einheitsvektor in $\mathbb{R}^3$ bezeichnet (mit $i \in \{1, 2, 3\}$).

3.1 Alle Einträge der Startbasis b komponentenweise in f einsetzen (Hierbei sollten mehrere Gleichungen entstehen)

1. $f(e3) = -1 + 3X = 3X - 1$
2. $f(e2) = 0 + 2X = 2X + 0$
3. $f(e1 + e2) = 1 + 2X = 2X + 1$

3.2 Bilde für jede entstandene Gleichung eine Linearkombination aus der Zielbasis a.

1. $3X - 1 = 3a_1 - a_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $2X + 0 = 2a_1 + 0a_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $2X + 1 = 2a_1 + 1a_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.3 Übertrage die Koeffizenten der Gleichung in eine Matrix

$$M_a^b(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$