



## 用于拓扑优化的 SIMP 方法

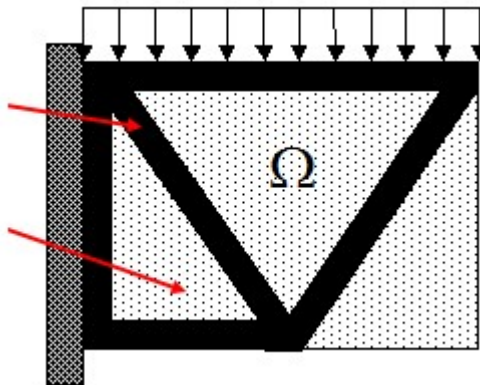
拓扑优化是最常见的结构优化类型。它被用于设计的初始阶段以预测结构的给定初始设计空间内的优化材料分布并考虑功能规格和制造约束。

用于拓扑优化的最受欢迎的数学方法是具有惩罚的实体各向同性材料方法 (SIMP)。Bendsoe 和 Kikuchi (1988) 以及 Rozvany 和 Zhou (1992) 最早提出 SIMP 方法。SIMP 针对给定负载案例、边界条件、制造约束和性能要求预测给定设计空间内的优化材料分布。

根据 Bendsoe (1989): “形状优化在其最常见的设置中应包含确定空间中每个点处是否存在材料的步骤。”传统拓扑优化方法是将域离散到被称作各向同性实体微结构的有限元素网格内。将为需要材料的区域用材料填充每个元素, 或为您可移除材料的区域 (代表空隙) 清空每个元素的材料。设计域内的材料密度分布  $\rho$  是离散的, 且每个元素都被分派有一个二进制值:

- $\rho_{(e)} = 1$ , 其中需要材料 (黑色)
- $\rho_{(e)} = 0$ , 其中将移除材料 (白色)

例如, 下图显示载荷钢梁的优化材料布局。具有密度  $\rho_{(e)} = 1$  的实体元素为黑色, 而具有  $\rho_{(e)} = 0$  的空隙元素则将被移除。

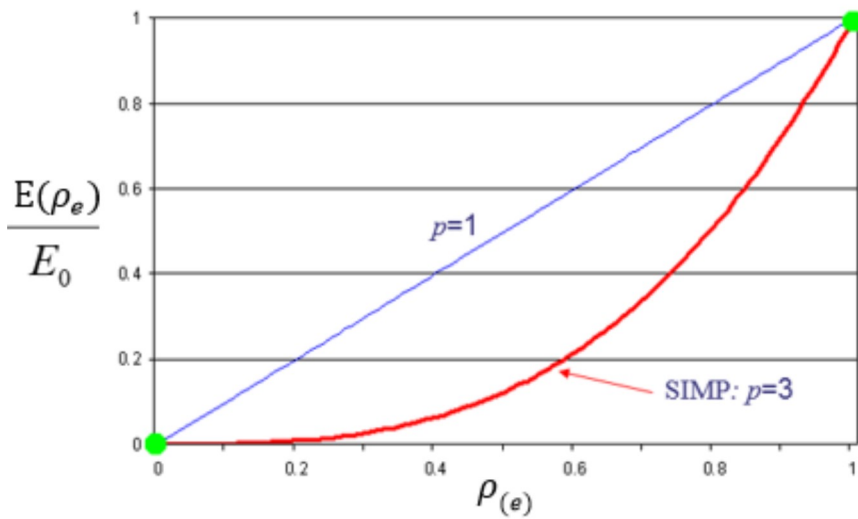


引入了连续相对密度分布函数, 可避免问题的二进制开关性质。对于每个元素, 分派的相对密度可在最小值  $\rho_{\min}$  和 1 之间变化, 这使得能够为元素 (被视作多孔元素) 分派中间密度:

对于大于零的空元素,  $\rho_{\min}$  是允许的最小相对密度值。此密度值可确保有限元分析的数值稳定性。

由于材料相对密度可连续变化, 因此每个元素处的材料杨氏模量也可连续变化。对于每个元素  $e$ , 将通过幂律计算材料相对密度因子  $\rho_e$  与已分派的各向同性材料模型的杨氏弹性模量  $E_0$  之间的关系:

$$E(\rho_e) = \rho_e^p E_0$$



惩罚因子  $p$  将减少具有中间密度的元素（灰色元素）对总刚度的贡献。惩罚因子将优化解决方案调控为实体黑色 ( $\rho_e = 1$ ) 或空隙白色 ( $\rho_e = \rho_{\min}$ ) 的元素。数值实验表明，惩罚因子值  $p = 3$  是合适的。

减小元素的材料弹性模量将导致元素刚度被减小。根据 SIMP 方法，将根据以下条件调整全局刚度：

$$K_{SIMP(\rho)} = \sum_{e=1}^N [\rho_{\min} + (1 - \rho_{\min}) \rho_e^p] K_e$$

其中  $K_e$  是元素刚度矩阵， $\rho_{\min}$  是最小相对密度， $\rho_e$  是元素相对密度， $p$  是惩罚因子， $N$  是设计域中的元素数。

例如，对于已分派有相对密度  $\rho_e = 0.5$ 、惩罚因子  $= 3$  且  $\rho_{\min} = 0.001$  的元素，将使用系数  $(0.001 + (1 - 0.001) * 0.5^3) = 0.12587$  按比例获得全局刚度矩阵。

## 目标函数：最大化刚度

最普遍的优化目标是最大化结构的整体刚度或最小化其在给定质量移除条件下的合规性。

合规性用于衡量结构的整体柔性或柔顺度，它是刚度的倒数。全局合规性等于元素弹性或应变能量的总和。最小化全局合规性  $C$  即等于最大化全局刚度。通过迭代流程实现的优化算法将解析元素密度（即优化设计变量）以最小化结构的全局合规性。

$$\min C(\{\rho\}) = \sum_{e=1}^N (\rho_e)^p [u_e]^T [K_e] [u_e]$$

$[u_e]$  是元素  $e$  的节点位移向量， $[K_e]$  是元素  $e$  的刚度，且向量  $\{\rho\}$  包含元素的相对密度  $\rho_e$ 。

在每个优化迭代中，必须满足目标质量约束、全局力-刚度平衡以及所需的功能约束：

$$\sum_{e=1}^N \{v_e\}^T \rho_e \leq M_{target}$$

$v_e$  是元素包络体，目标质量是优化的目标质量。

$$[K\{\rho\}]\{u\} = \{F\}$$

$[K\{\rho\}]$  是通过相对密度向量调整的全局刚度矩阵,  $\{u\}$  是位移向量,  $\{F\}$  是外部力向量。

$$\theta(\{\rho\}, \{u\})_1 \leq \theta_1^*, \theta(\{\rho\}, \{u\})_2 \leq \theta_2^*, \dots$$

上述公式包含诸如应力上的限制、位移、本征频率等设计响应约束。

---

## 灵敏度分析

在每次迭代中, 优化算法都将执行灵敏度分析以评估材料密度变化对目标函数的影响, 从而最大化刚度。

在数学上, 灵敏度分析被表达为目标函数相对于材料密度的导数:

$$\frac{dC}{d\rho_e} = -p(\rho_e)^{p-1}[u_e]^T[K_e][u_e]$$

在灵敏度分析过程中, 具有低权重材料密度因子的元素最终将失去其结构重要性, 并将在进一步的迭代过程中被忽略。

如果您单独计算每个元素的灵敏度并且不考虑元素之间的连接性, 则这可能会导致材料不连续以及会使得包络体与主几何体断开连接。这就是所谓的棋盘效应。为了减少棋盘效应, 过滤方法将应用元素影响半径并求取各元素在其影响范围内的灵敏度的平均值。

优化迭代将继续, 直到目标函数变化收敛且迭代达到其收敛条件。