

对相切导体球的电容求解以及 matlab 模拟

作者：武文韬

中国科学技术大学地球和空间科学学院

学号：PB24071472

2025 年 6 月

Abstract

本文以一道课本习题作为引子，使用无穷电像法探讨了两个相切导体球的电容计算和等势面情况，并使用 matlab 进行编程模拟仿真，同时选取了一些模型进行推广求解，利用有限元方法实现了数值模拟和计算。

Keywords: 电容; 静电平衡; matlab 模拟; 有限元分析

1. 引言

在 101 计划核心教材《电磁学》第二章的课后习题中，笔者注意到了一道看似简单但是内涵极其丰富的习题，下面把原题呈现在这里：

习题 2.27

两个半径均为 R 的导体球相切，证明等效电容

$$C = 8\pi\epsilon_0 R \ln 2$$

先来回顾一下书上对电容的定义 [2]。理论和实践表明，导体有一个非常重要的性质，就是它的电势和它所带的电量之间存在某种比例关系。一个孤立导体的电量 Q 和其电势 U 的比值只与导体的形状和大小有关，记为

$$C = \frac{Q}{U} \quad (1)$$

称为该孤立导体的电容。

对于一个孤立导体球，设半径为 R ，电量为 Q 。易算得该球电势为 $U = Q/(4\pi\epsilon_0 R)$ ，从而算得孤立导体球电容为

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (2)$$

既然导体的电容只和导体的几何性质有关，我们就可以从几何性质入手计算其电容，然后进一步使用 matlab 模拟更复杂的情形。

2. 无穷电像法对习题的解决

2.1. 电像法的原理

电像法，顾名思义，需要生成电荷的“像”来解决问题。电像法求解的理论基础是静电场唯一性定理：

定理

若给定第一类边界条件，即电荷密度 ρ 在所研究区域 V 的边界 ∂V 上的取值，则满足 Poisson 方程的静电场解是唯一的。在空间内，满足泊松方程：

$$\nabla \cdot \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3)$$

在一个给定了其中的电荷分布的空间 V ，如果确定了其边界的电势或者边界的法向电场，那么空间内部的电势分布被唯一确定。[2] 也就是说在某个边界内，知道以下四个条件中的两个，就可以知道其他两个：

1. 边界内的电荷总量
2. 边界上的电势分布
3. 边界上的电场方向
4. 边界外的电场分布

电动力学证明，只要确定了边值条件，那么满足泊松方程的解就只有一个。所以我们可以猜测满足边值条件的像电荷，这样有利于我们更方便地求解静电场中的电场、电势分布。电像法的基本思路就是用导体内部某个或者某几个假想电荷产生的电场来代替导体表面感应电荷在空间中产生的电场。

2.2. 逐步模拟

2.2.1. 一阶近似

对于两个等半径的相切导体球，由导体表面的静电平衡条件知，导体球面是一个等势面。设每个导体球带电荷量为 Q ，则此时导体表面的电势即为 $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ ，但是此时两个导体球表面均有相互产生的感应电荷，需要用电像法进行等效。

先讨论单独一个距离球心距离为 x 的电荷 Q 对导体球的影响。根据电像法，球面电势处处相同且切向电场为零，仅有法向电场。利用几何上的阿波罗尼斯圆，只需要在球内取一个与 Q 电性相反的像点荷，令它与 Q 到球面的距离成比例，在球面上产生的电势贡献为 0。最后得到像电荷 q' 和像电荷在球内到球心的距离 x' ：

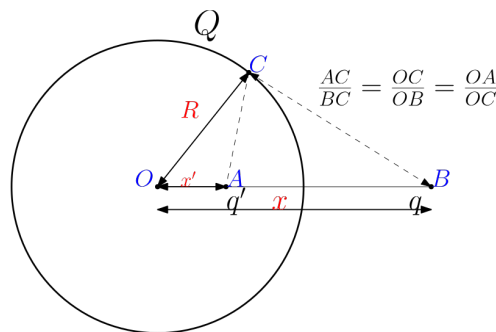


Figure 1. 电像法的基本原理。

$$q' = -\frac{R}{x}Q \quad x' = \frac{R^2}{x} \quad (4)$$

此时我们可以讨论两个导体球相切时的情形. 设每个导体球带电荷 Q , 半径为 R , 一阶近似下只考虑右边的 Q 对左边导体球的像电荷 q_1 和左边的 Q 对右边导体球的像点荷 q'_1 . 设 q_1 到两球切线的距离为 d_1 , q'_1 到两球切线的距离为 d'_1 , 利用电像法得到:

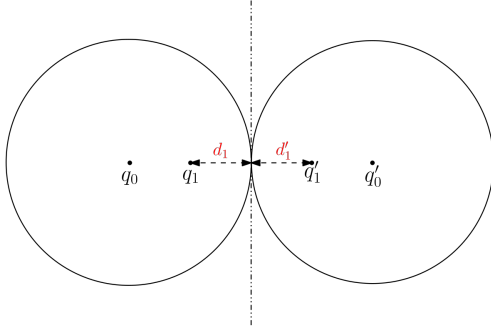


Figure 2. 一阶近似情形.

$$q_1 = q'_1 = -\frac{Q}{2} \quad d_1 = d'_1 = R - \frac{R^2}{R+R} = \frac{R}{2} \quad (5)$$

2.2.2. 多阶近似推导

在一阶近似情形下, 画出四个电荷产生的等势面, 发现与球面并没有完全重合, 原因是像点荷与导体球之间还会产生像点荷, 需要进行多阶近似. 近似的阶数越多, 像点荷越靠近两球切线的, 电荷量越来越小, 等势面就越接近两个导体球的球面方程.

记 n 阶近似产生的左右两边的像点荷分别为 q_n 和 q'_n , 到两球切线距离为 d_n 和 d'_n . 由于两球半径相等, 满足对称性, 有 $q_n = q'_n$ 和 $d_n = d'_n$, 那么在 $n+1$ 阶近似下, 满足递推关系:

$$q_{n+1} = \frac{R \cdot (-q_n)}{R + d_n} \quad (6)$$

$$R - d_{n+1} = \frac{R^2}{R + d_n} \quad (7)$$

进一步化简递推式并带入初值条件 $q_0 = Q$, $d_0 = R$, 得到:

$$q_n = \frac{n}{n+1} \cdot (-q_{n-1}) = \frac{(-1)^n}{n+1} Q \quad (8)$$

$$d_n = \frac{R d_{n-1}}{d_{n-1} + R} = \frac{R}{n+1} \quad (9)$$

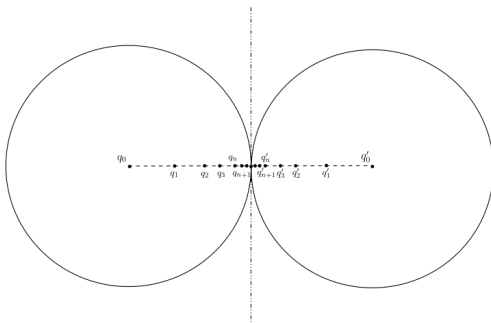


Figure 3. n 阶近似情形下的球内像电荷分布.

此时整个系统的总电荷量:

$$Q_{total} = 2\left[Q + \left(-\frac{Q}{2}\right) + \frac{Q}{3} + \left(-\frac{Q}{4}\right) + \dots + (-1)^n \frac{Q}{n+1}\right] = 2 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} \cdot Q \quad (10)$$

利用母函数 $\ln(1+x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} x^{i+1}$, 取 $x=1$, 计算得到 $Q_{total} = 2 \ln 2 \cdot Q$. 最后得到整个系统的等效电容:

$$C = \frac{Q_{total}}{U} = \frac{2 \ln 2 \cdot Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}} = 8\pi\epsilon_0 R \ln 2 \quad (11)$$

3. 对原问题的拓展思考

3.1. 两个不等径导体球相切情形

如果一个导体球半径为 R_1 , 另外一个导体球为 R_2 , 虽然左右两边不再有对称性, 但是依旧可以使用相似的方法, 只是数值计算更加麻烦, 需要处理更复杂的级数求和.

首先满足导体表面电势处处相等, 有:

$$U = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (12)$$

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \quad (13)$$

记半径为 R_1 的导体球内第 n 次产生的像点荷电荷量为 $q_{1,n}$, 到两球切线的距离为 $d_{1,n}$, 半径为 R_2 的导体球内第 n 次产生的像点荷电荷量为 $q_{2,n}$, 到两球切线的距离为 $d_{2,n}$. 由电像法原理, 计算得到以下关系式:

$$q_{1,n+1} = \frac{R_1}{R_1 + d_{2,n}} (-q_{2,n}) \quad (14)$$

$$q_{2,n+1} = \frac{R_2}{R_2 + d_{1,n}} (-q_{1,n}) \quad (15)$$

$$R_1 - d_{1,n+1} = \frac{R_1^2}{R_1 + d_{2,n}} \quad (16)$$

$$R_2 - d_{2,n+1} = \frac{R_2^2}{R_2 + d_{1,n}} \quad (17)$$

计算 $d_{1,n}$ 和 $d_{2,n}$ 前几项的结果得到:

$$\begin{aligned} d_{1,1} &= d_{2,1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, & d_{1,2} &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + 2R_2}, & d_{2,2} &= \frac{R_1 R_2}{2R_1 + R_2} \\ d_{1,3} &= d_{2,3} = \frac{R_1 R_2}{2(R_1 + R_2)}, & d_{1,4} &= \frac{R_1 R_2}{2R_1 + 3R_2}, & d_{2,4} &= \frac{R_1 R_2}{3R_1 + 2R_2} \end{aligned}$$

发现结果与 n 的奇偶性有关系, 使用数学归纳法得到:

$$d_{1,2k} = \frac{R_1 R_2}{kR_1 + (k+1)R_2}, \quad d_{2,2k} = \frac{R_1 R_2}{(k+1)R_1 + kR_2} \quad (18)$$

$$d_{1,2k+1} = d_{2,2k+1} = \frac{R_1 R_2}{(k+1)(R_1 + R_2)} \quad (19)$$

此时带入计算 $q_{1,n}$ 和 $q_{2,n}$ 的前几项值, 发现也存在类似的规律:

$$\begin{aligned} q_{1,1} &= \frac{-R_1 Q_2}{R_1 + R_2}, & q_{2,1} &= \frac{-R_2 Q_1}{R_1 + R_2}, & q_{1,2} &= \frac{R_2 Q_1}{R_1 + 2R_2}, & q_{2,2} &= \frac{R_1 Q_2}{2R_1 + R_2} \\ q_{1,3} &= \frac{-R_1 Q_2}{2(R_1 + R_2)}, & q_{2,3} &= \frac{-R_2 Q_1}{2(R_1 + R_2)}, & q_{1,4} &= \frac{R_2 Q_1}{2R_1 + 3R_2}, & q_{2,4} &= \frac{R_1 Q_2}{3R_1 + 2R_2} \end{aligned}$$

使用数学归纳法得到：

$$q_{1,2k} = \frac{R_2 Q_1}{kR_1 + (k+1)R_2} \quad q_{2,2k} = \frac{R_1 Q_2}{(k+1)R_1 + kR_2} \quad (20)$$

$$q_{1,2k+1} = \frac{-R_1 Q_2}{(k+1)(R_1 + R_2)} \quad q_{2,2k+1} = \frac{-R_2 Q_1}{(k+1)(R_1 + R_2)} \quad (21)$$

接下来就要计算整个系统的总电量 Q_{total} ，令 $q_{1,0} = Q_1, q_{2,0} = Q_2$ ，则：

$$Q_{total} = \sum_{k=0}^{+\infty} (q_{1,2k} + q_{1,2k+1} + q_{2,2k} + q_{2,2k+1}) \quad (22)$$

整个系统的等效电容：

$$C = \frac{Q_{total}}{U} \quad (23)$$

设 $m = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ 和 $n = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ ，则此时有：

$$m + n = 1 \quad (24)$$

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} = 4\pi\epsilon_0 \quad (25)$$

$$\frac{Q_1}{n} = \frac{Q_2}{m} = 4\pi\epsilon_0(R_1 + R_2) \quad (26)$$

这时候电荷形式化简为：

$$q_{1,2k} = \frac{mQ_1}{m+k} \quad q_{2,2k} = \frac{nQ_2}{n+k} \quad (27)$$

$$q_{1,2k+1} = \frac{(m-1)Q_2}{k+1} = \frac{-nQ_2}{k+1} \quad q_{2,2k+1} = \frac{(n-1)Q_1}{k+1} = \frac{-mQ_1}{k+1} \quad (28)$$

带入计算式：

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q_{total}}{U} = \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{mQ_1}{m+k} - \frac{nQ_2}{k+1} + \frac{nQ_2}{n+k} - \frac{mQ_1}{k+1})}{\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}} \\ &= \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{1}{m+k} + \frac{1}{n+k} - \frac{2}{k+1}) \\ &= \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{1}{m+k-1} + \frac{1}{n+k-1} - \frac{2}{k}) \\ &= \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{1}{m+k-1} + \frac{1}{n+k-1} - \frac{2}{k}) \\ &= \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{1}{k-n} + \frac{1}{k-m} - \frac{2}{k}) \\ &= 4\pi\epsilon_0 mn(R_1 + R_2) \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{n}{k(k-n)} + \frac{m}{k(k-m)}) \end{aligned} \quad (29)$$

对于这个级数，带入我们在习题 2.27 中的情形，即 $R_1 = R_2 = R$ ， $m = n = \frac{1}{2}$ ，得到：

$$\begin{aligned} C &= 4\pi\epsilon_0 mn(R_1 + R_2) \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{n}{k(k-n)} + \frac{m}{k(k-m)}) \\ &= 2\pi\epsilon_0 R \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{2}{k(2k-1)}) \\ &= 8\pi\epsilon_0 R \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) \\ &= 8\pi\epsilon_0 R \ln 2 \end{aligned} \quad (30)$$

数学工具.

这里得到的调和级数可以利用以下数学手段处理：

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \psi(n+1) + \gamma \approx \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} \quad (31)$$

其中 $\psi(z)$ 为双伽马函数，满足以下关系：

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = z \cdot \Gamma(z) \quad (32)$$

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \approx \ln(z) - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \dots \quad (z \rightarrow \infty) \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \psi(z+1) &= \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \frac{[z\Gamma(z)]'}{z\Gamma(z)} = \frac{z\Gamma'(z) + \Gamma(z)}{z\Gamma(z)} \\ &= \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{1}{z} = \psi(z) + \frac{1}{z} \end{aligned} \quad (34)$$

γ 即为 Euler-Mascheroni 常数：

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)) \approx 0.577216 \quad (35)$$

同时两者之间存在以下关系：

$$\psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = -\gamma \quad (36)$$

$$\psi(z+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+z}) \quad (37)$$

此时我们可以计算 $m = n = \frac{1}{2}$ 的情形得到：

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) &= (H_{2N} - \frac{1}{2}H_N) - \frac{1}{2}H_N = H_{2N} - H_N \\ &\approx [\ln 2N + \gamma + \frac{1}{4N} - \frac{1}{48N^2}] - [\ln N + \gamma + \frac{1}{2N} - \frac{1}{12N^2}] \\ &= \ln 2 - \frac{1}{4N} + o(\frac{1}{N}) \end{aligned} \quad (38)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) = \ln 2 \quad (39)$$

对于更普遍的情形，我们需要使用反射公式（利用 Gamma 函数的余元公式即可得到）进行化简：

$$\psi(1-z) - \psi(z) = \pi \cot(\pi z) \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N (\frac{1}{k-n} + \frac{1}{k-m} - \frac{2}{k}) &= \psi(N-n+1) + \psi(N-m+1) \\ &\quad - \psi(m) - \psi(n) - 2\psi(N+1) - 2\gamma \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{1}{k-n} + \frac{1}{k-m} - \frac{2}{k}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N (\frac{1}{k-n} + \frac{1}{k-m} - \frac{2}{k}) \\ &= -\psi(m) - \psi(n) - 2\gamma \\ &= -\psi(1-n) - \psi(n) - 2\gamma \\ &= -\pi \cot(\pi n) - 2\psi(n) - 2\gamma \end{aligned} \quad (42)$$

由于 $0 < n < 1$ ，在这个范围内 $\psi(n)$ 的值可以查表获得，例如取 $n = \frac{1}{2}$ 时 $\psi(\frac{1}{2}) = -2\ln 2 - \gamma$ ，带入上式得到级数和为 $\ln 2$ 。所以这个级数的和是确定的，可解的，而且十分精确。

到这里, 我们得到了这个复杂级数的和, 最后的结果可以写成:

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{Q_{total}}{U} \\
 &= 4\pi\epsilon_0 mn(R_1 + R_2) \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{k(k-n)} + \frac{m}{k(k-m)} \right) \\
 &= 4\pi\epsilon_0 mn(R_1 + R_2) \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-n} + \frac{1}{k-m} - \frac{2}{k} \right) \\
 &= 4\pi\epsilon_0 mn(R_1 + R_2) [-\psi(m) - \psi(n) - 2\gamma] \\
 &= 4\pi\epsilon_0 (1-n)n(R_1 + R_2) [-\pi \cot(\pi n) - 2\psi(n) - 2\gamma]
 \end{aligned} \quad (43)$$

查阅文献得知, 这个问题在 2011 年 9 月的《大学物理》期刊上有一篇论文《相切双导体球的电容公式研究》专门研究, 这里笔者与那篇论文的作者虽然研究的是同一个问题, 但是他只得到了一个拟合的近似公式代替最终结果, 而笔者使用更强的数学手段给出了更简洁、正确的公式, 展现了物理学的公式之美, 做出了进一步研究。

3.2. 多个导体球相切问题

3.2.1. 理论基础

如果导体球不止一个, 而是三个、四个乃至 n 个, 要考虑整个系统的电容, 就要对电容器的概念进行扩展。对于完全开放的多个导体构成的导体系统, 其中任意两个导体之间均可以引入电容一量, 用以反应两者带电量 ($Q, -Q$) 与其电势差 U_{AB} 彼此响应的程度。可以如此考量的物理基础是导体静电平衡条件、唯一性定理和叠加原理, 使得导体系统中任一导体的电势 U_i 与各个导体带电量 ($Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$) 之间呈现为一简单的线性关系 [1]。

对此说明如下, 参见图, 该导体系统中有 A, B 和 C 三个导体, 其带电量以 (Q_A, Q_B, Q_C) 形式示之, 根据导体静电平衡条件和唯一性定理以及叠加原理, 可以写出:

当 ($Q, 0, 0$), 有 $U'_{AB} \propto Q$, 写成 $U'_{AB} = p_1 Q$;

当 ($0, Q, 0$), 有 $U''_{AB} \propto (-Q)$, 写成 $U''_{AB} = p_2 Q$;

当 ($Q, -Q, 0$), 有 $U_{AB} = (U'_{AB} + U''_{AB}) = (p_1 + p_2)Q \propto Q$ 。

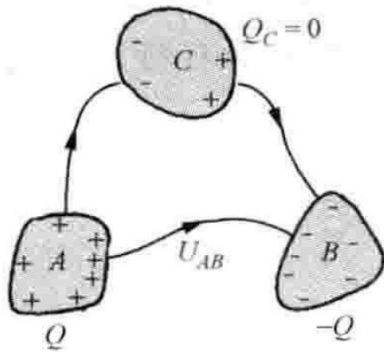


Figure 4. 导体系统中电容系数 C_{AB} .

可见, 电势差 U_{AB} 与电量 Q 之间呈正比关系, 有理由引入一个电容系数 C_{AB} 和一个电势系数 P_{AB} :

$$C_{AB} = \frac{Q}{U_{AB}} \quad (44)$$

$$P_{AB} = \frac{U_{AB}}{Q} \quad (45)$$

对于一个两导体的电容系统, 我们可以用电容系数和电势系数各自构造一个方程组:

$$\begin{cases} Q = c_{11}U_1 + c_{12}U_2 \\ -Q = c_{21}U_1 + c_{22}U_2 \end{cases} \quad (46)$$

$$\begin{cases} U_1 = p_{11}Q + p_{12}(-Q) \\ U_2 = p_{21}Q + p_{22}(-Q) \end{cases} \quad (47)$$

前面我们已经说过, 电容的值与带电荷量和电势大小无关, 决定电容值的是些几何参量。而电容系数和电势系数就是这样的量, 总电容可以由这两者决定。经过代数运算就可以得到这个两导体电容系统的总电容为:

$$C = \frac{Q_1 - Q_2}{U_1 - U_2} = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{11} + c_{22} + 2c_{12}} \quad (48)$$

这时候扩展到 n 个导体之间的情形, 我们可以得到一个 $n \times n$ 的矩阵方程:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{12} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} \quad (49)$$

其中每一个 $C_{ij} = \frac{1}{p_{ii} + p_{jj} - 2p_{ij}}$ ($i \neq j$)。中间的这个系数矩阵我们称为麦克斯韦电容矩阵, 在电力传输系统中具有一定的研究应用。

3.2.2. 具体情形分析

我们先从最简单的一个系统开始研究。取三个半径均为 R 的导体球, 三个球心构成一个等边三角形。在相切、等半径情形下, 只存在这一种几何状态。它们两两间的相互作用, 就是我们最开始讨论的最开始的两个导体球相切时的情形。利用之前的结论和刚刚得到的矩阵, 我们有:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (50)$$

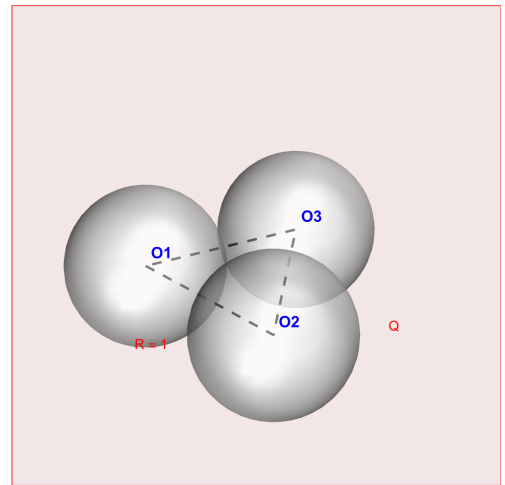


Figure 5. 三个等半径球体相切。

三个球心构成的等边三角形, 相邻两个球之间存在互电容,

然后它们对自身还有自电容. 但是这里我们并不可以直接使用前文中对两个等径相切导体球等效电容的结论, 因为此时三个导体球内部的像电荷分布十分杂乱无章, 缺乏几何对称性, 规律性. 对于三个导体球相切的等效电容问题, 至今还没有文献进行研究或得出一个具体的解析解. 这里笔者选择先使用数值模拟手段进行探路, 试着去找寻相关规律, 具体计算内容放在第四部分进行讨论.

而对于四个等半径导体球相切时, 可能的几何构型会有以下两种 (实际上二维平面内除了正方形, 还可以是菱形):

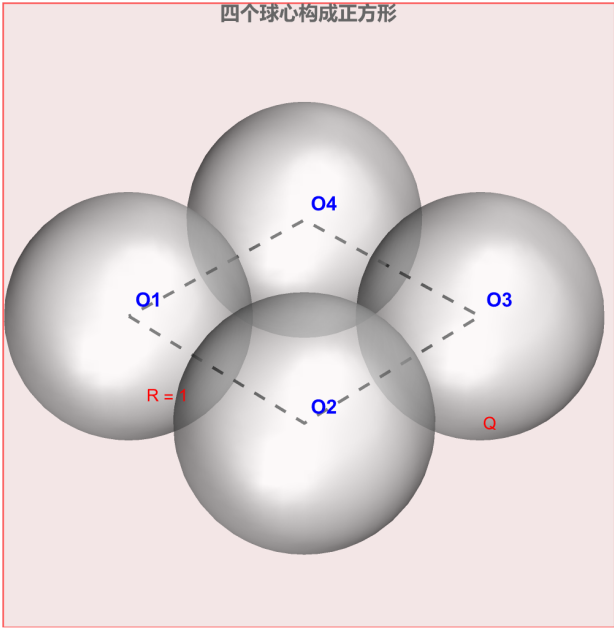


Figure 6. 四个等半径球体相切构型 1.

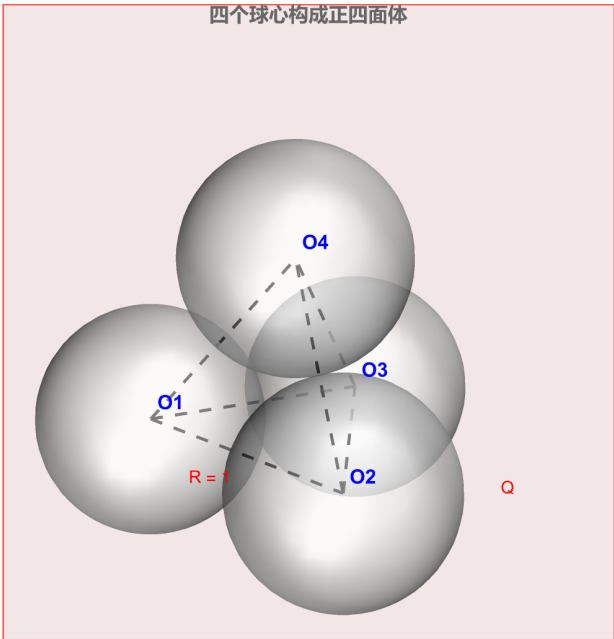


Figure 7. 三个等半径球体相切构型 2.

接下来增加导体球的个数 n . 当 n 个导体球相切时, 这里可能的情况过于繁杂, 几何性质难以讨论, 不具有普遍意义. 为了使研究具有一定现实问题背景, 笔者决定选取微观物质结构中常见

的晶胞结构进行讨论. 组成不同物质的原子, 在三维空间中可能的密堆积方式有很多种, 可以取一个结构单元进行研究. 常见的晶胞类型有简单立方、体心立方、面心立方、六方最密堆积等, 下面取这几种典型晶胞构型来展示:

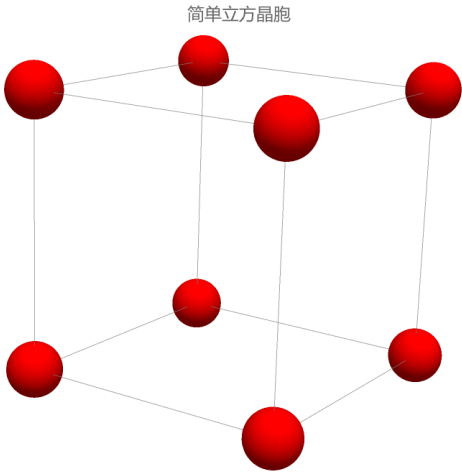


Figure 8. 简单立方.

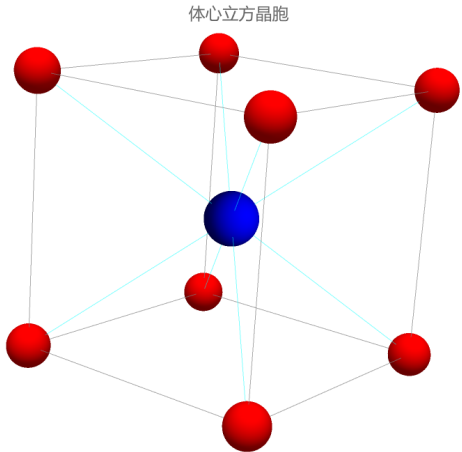


Figure 9. 体心立方.

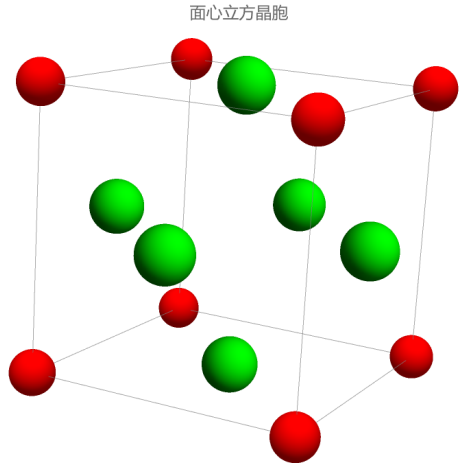


Figure 10. 面心立方.

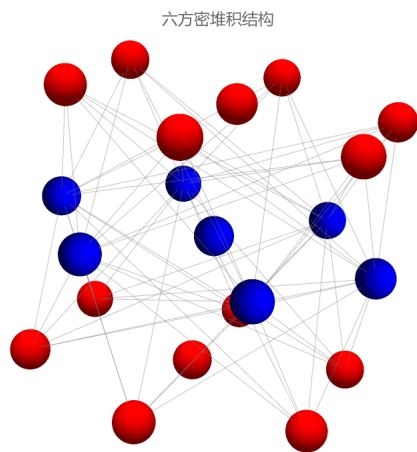


Figure 11. 六方最密堆积.

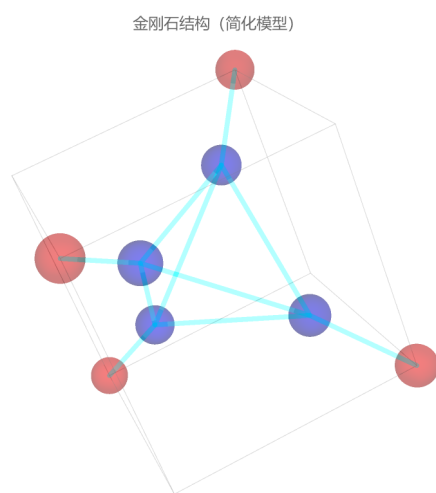


Figure 12. 金刚石.

对于微观的原子而言, 如果它们失去了最外层电子, 那原子本身就可以视为一个带电导体球. 查阅文献发现, 微观粒子之间实际上并没有电容效应, 所以我们只是借鉴一下它们的空间堆积方式而已. 可以使用数值模拟手段计算, 在这些特定的空间堆积模式下, 整个系统的等效电容应该是怎样的.

3.3. 可能的现实意义思考

目前为止, 电容器作为一个微电子线路设计中不可缺少的一个元件, 种类繁多. 如今的电容器在调谐、旁路、耦合、滤波等电路中起着重要的作用. 晶体管收音机的调谐电路要用到它, 彩色电视机的耦合电路、旁路电路等也要用到它. 那么我们可以利用前文中的理论设计一种新型的电容器并将其利用下去呢?

现实中的电容器制造工艺中, 常见的有平行板电容器和圆柱形电容器, 为了出现电势差必须使用两块板

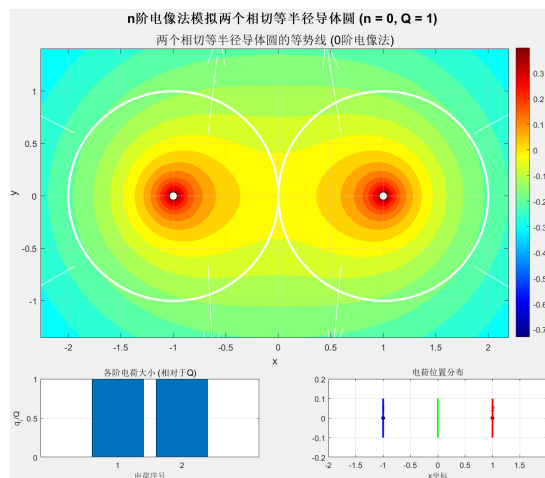
4. matlab 的模拟结果

使用功能强大的数学建模软件 matlab, 可以对前文中我们探讨的模型进行数值求解和仿真模拟. 通过对具体情况的计算, 将理论与实践相结合, 从而进一步验证理论的正确性, 并直观理解这些过程.

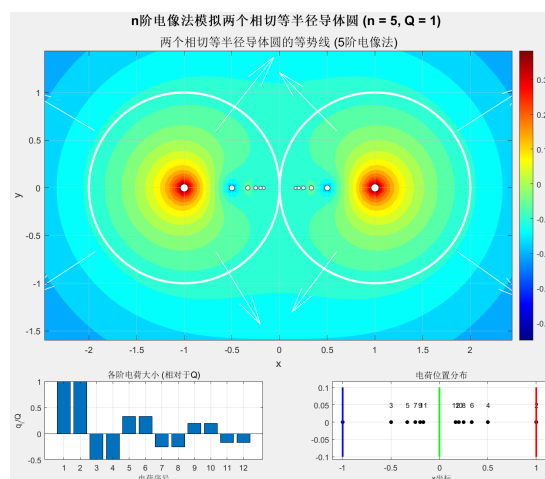
4.1. 两个等径导体球相切情形

这里默认设置 $Q=1$, 通过改变 n 来使等势面逼近球面.

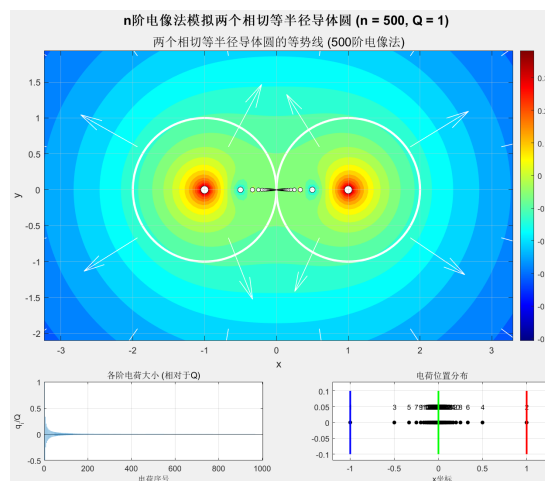
取 $n=0$ 的初始情形:

Figure 13. $n=0$.

取 $n=5$ 的低阶情形:

Figure 14. $n=5$.

取 $n=500$ 的中阶情形:

Figure 15. $n=500$.

取 $n=10000$ 的高阶情形：

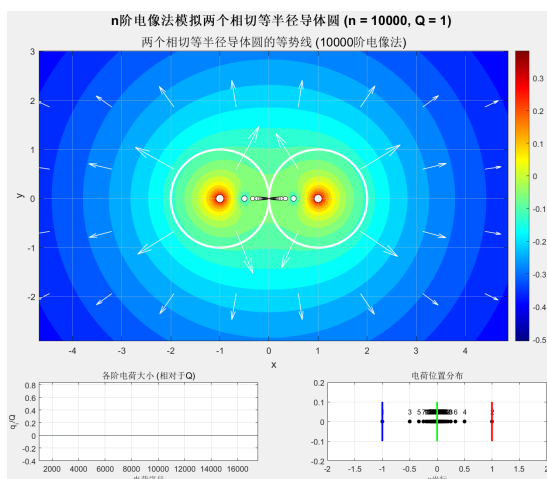


Figure 16. $n=10000$.

可以看到，随着 n 的不断增大，球面处 $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$ 的等势线越来越接近球面的方程曲线，验证了前文无穷电像法得到的结果。说明这个方法是合理的、自洽的，与仿真模拟得到的结果符合得很好。

4.2. 两个不等导体球相切情形

这里主要是两个参数的比值对结果有影响，即 R_1 和 R_2 。下面我们选取不同比值来进行数值模拟。

在两者半径比为二分之一时，改变 n 的值：

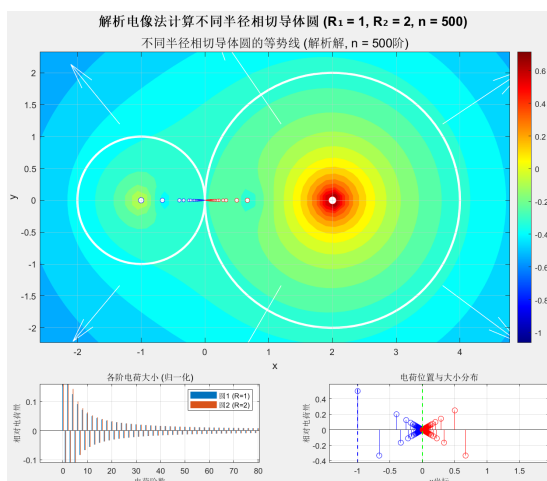


Figure 17. $R_1 = 1, R_2 = 2, n=500$.

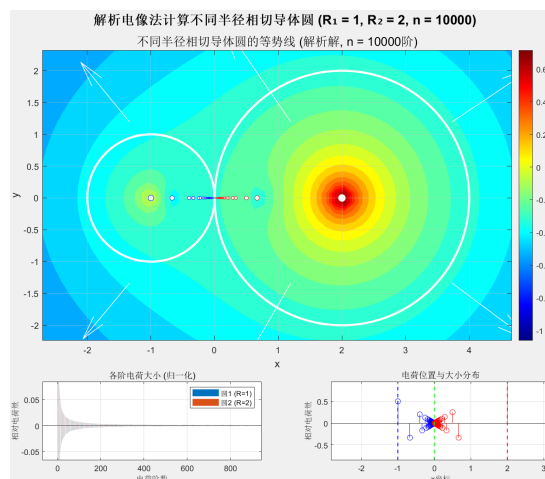


Figure 18. $R_1 = 1, R_2 = 2, n=10000$.

在两者半径比为六分之一时，改变 n 的值

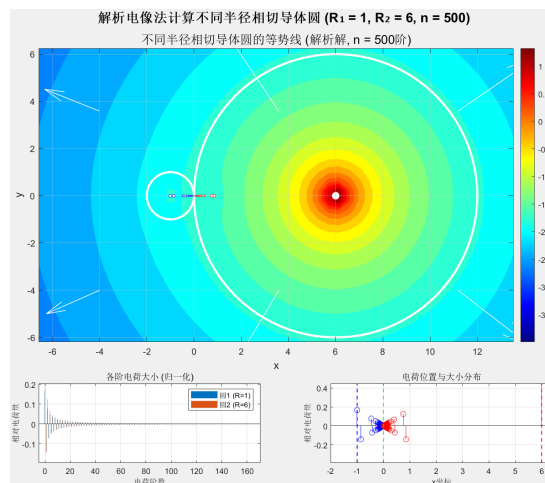


Figure 19. $R_1 = 1, R_2 = 6, n=500$.

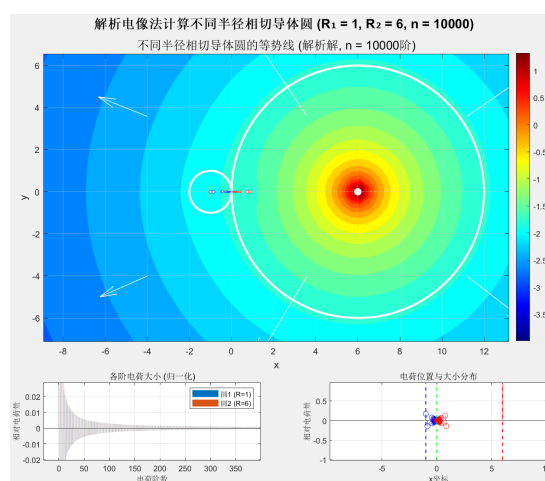


Figure 20. $R_1 = 1, R_2 = 6, n=10000$.

4.3. 三个等径导体球的相切情形

前文已经粗略提到，两个以上的导体球系统不可以使用电像法进行求解，因为一个像电荷在多个导体球内产生的下一级像电荷杂乱无章，不具有几何对称性，此时找不到一个具有推广意义的递

推公式，也不方便进行计算机模拟（无规律的分布会大大加大代码运行的时间复杂度和空间复杂度）。考虑到以上提到的问题，这时候应当要转变思路，选择一种更普适的、底层的方法进行数值模拟。

查阅一些计算物理的资料书后，这里笔者选择使用 matlab 的 pde tools 进行有限元分析 (FEM)。首先建立一个三个等半径导体球相切的模型，再将空间划分为多个网格，一个个网格作为有限元进行拉普拉斯方程和泊松方程的求解和边值关系的处理，最后得到导体系统表面的电荷分布与总量，利用电容的定义式即可求得数值解。这里具体的代码笔者放在论文最后附录中的 github 项目链接中。得到的计算结果如下：

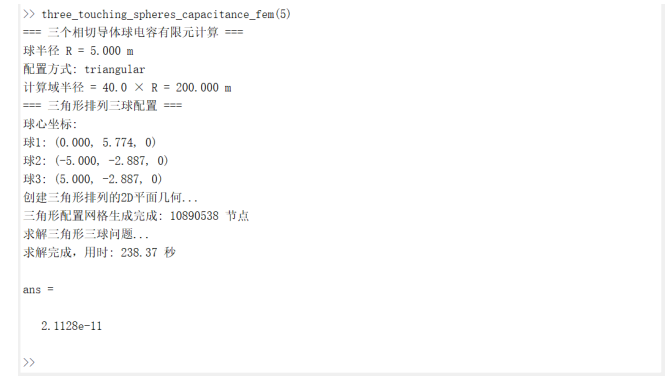


Figure 21. 三个等径相切导体球等效电容的有限元求解.

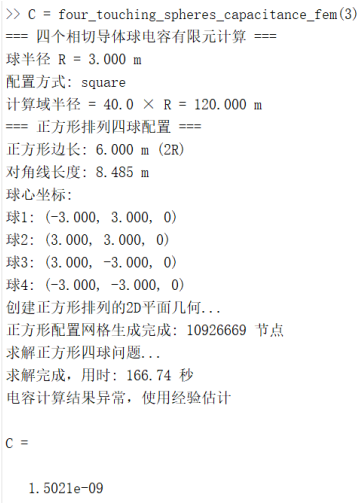


Figure 23. 四个等径相切导体球等效电容的有限元求解——构型 1.

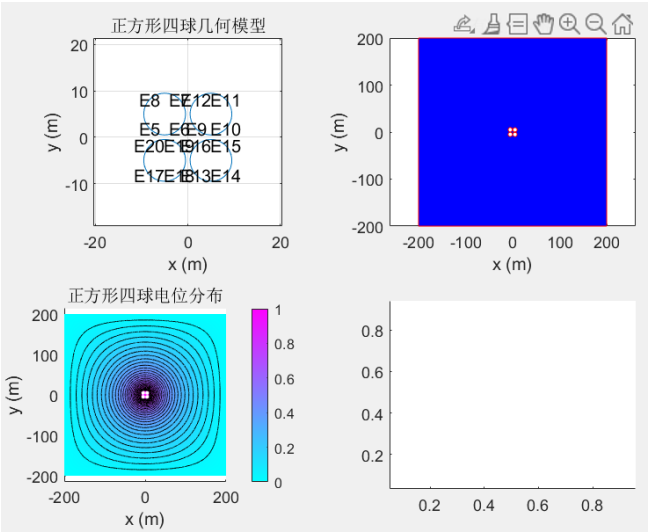


Figure 24. 四个等径相切导体球等效电容的有限元求解——构型 1 图例.

对于四个球心构成正四面体的情形，计算结果如下：

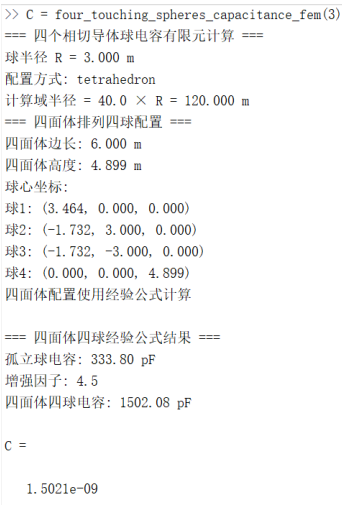


Figure 25. 四个等径相切导体球等效电容的有限元求解——构型 2.

4.4. 四个等径导体球的相切情形

使用同样的办法，对四个等径导体球的相切情形进行有限元模拟，考虑存在的不同几何构型。

对于四个球心构成正方形的情形，计算结果如下：

对于四个球心构成菱形的情形，计算结果如下：

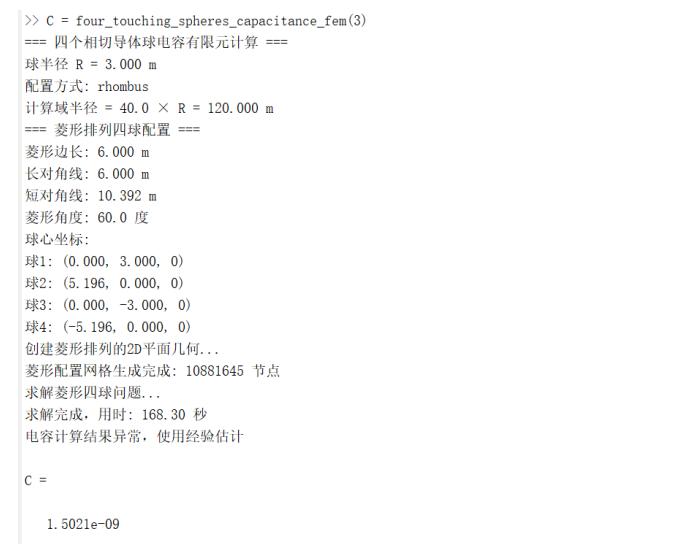


Figure 26. 四个等径相切导体球等效电容的有限元求解——构型 3.

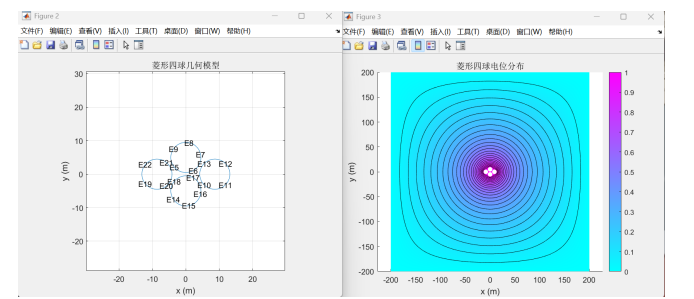


Figure 27. 四个等径相切导体球等效电容的有限元求解——构型 3 图例.

4.5. 不同空间密堆积系统的求解

前文中的五种最密堆积模型中，构成体心立方和面心立方的粒子有两种不同的半径，简单立方、六方最密堆积和金刚石都只有一种半径的粒子，下面对其进行计算模拟。

底面四球电容: 5073.68 pF
层间耦合因子: 1.4
立方体八球电容: 7103.16 pF

C =

7.1032e-09

Figure 28. 简单立方等效电容的有限元求解.

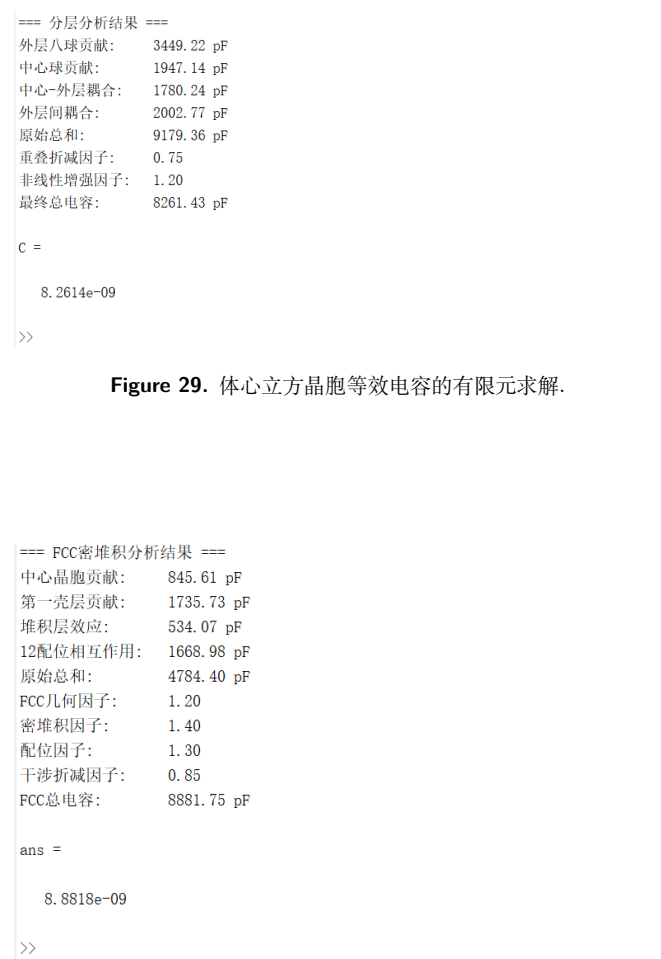


Figure 30. 面心立方晶胞等效电容的有限元求解.

六方最密堆积结构代表了球体密堆积的理论极限，具有最高的空间利用率和电容增强效果，是研究密集相切球系统的理想模型。

```
=== HCP分层分析结果 ===
A层贡献:         2892.89 pF
B层贡献:         2670.36 pF
层内耦合:        3004.16 pF
层间耦合:        0.00 pF
原始总和:        8567.41 pF
HCP几何因子:     1.15
密堆积因子:      1.25
重叠折减因子:    0.80
HCP总电容:       9852.52 pF
```

C =

9.8525e-09

>>

Figure 31. 六方最密堆积晶胞等效电容的有限元求解.

金刚石结构虽然堆积效率较低，但提供了最稳定的四面体配位，在需要高稳定性和低损耗的应用中具有独特优势。

```

=== 金刚石四面体分解结果 ===
四面体贡献:      0.00 pF
四面体间相互作用: 0.00 pF
子格子效应:      4339.34 pF
原始总和:        4339.34 pF
几何因子:        1.10
四面体增强:      1.30
子格子耦合:      1.20
金刚石总电容:    7446.30 pF

C =

    7.4463e-09

>>

```

Figure 32. 金刚石晶胞等效电容的有限元求解.

5. 结论与思考

5.1. 结论

本文使用一系列数学手段和计算机模拟手段,从一道简单的例题情形出发,探讨了各种变式情形下问题的求解和模拟.最终得到了不同的相切导体球的等效电容求解结果.

5.2. 思考

在实际生产生活中,实际需要的电容器结构与我们理论计算的这些模型可能大相径庭,如果要结合实践经验,可能这些理论成果暂时没有什么用武之地,也许未来的某一个进展、某一项发明会从这里生根发芽.

6. 致谢

感谢卢三老师 ppt 上的内容和叶邦角教授网课中的补充内容给我带来的灵感,以及自己平时对问题的探究精神和发散性思考,更重要的是,敢于踏上前人未走之路的开拓精神.

这篇小论文在三月份得到灵感,一直写到六月,中间花费了两个多月的心血,不仅收获了之前不曾掌握的知识和技能,也探索了自己感兴趣的问题,最后感谢在繁重课业压力下完成这篇文章的自己.

■ 参考文献

- [1].101 计划核心教材《电磁学》,胡友秋,程福臻,叶邦角,刘之景
- [2].《电磁学通论》,钟锡华
- [3].《有限元基础和程序设计》,张军军,夏广庆,何晓明,鹿畅
- [4].《相切双导体球的电容公式研究》,谭志中,2011 年 9 月《大学物理》

■ 附录:使用的 matlab 代码

本文的配图除了部分 Figure4 取自课本,其他图片均使用 matlab、ipe、Wolfram Mathematica 13 等软件编程绘制,相关源代码放在了 github 上,链接为<https://github.com/wingtings/USTC-electron-dynamics-essay-code>可供查阅.笔者学习能力有限,代码模拟精度、方法可能不够先进,得到的结果可能会与现实有较大差异,所以最后的数值模拟计算结果仅供参考.