第八章 命题逻辑

逻辑是研究思维的形式结构及其规律的科学

- 逻辑
  - 辨证逻辑 —— 传统逻辑
  - 数理逻辑 —— 符号逻辑(用数学方法)
    - 命题逻辑
    - 谓词逻辑

两种逻辑的区别只是在于它们工具语言的不同。

数理逻辑是计算机应用和理论研究的理论基础。本章介绍命题逻辑

§8.1 命题和命题联结词

自然语言中的句子，只有陈述句能分辨真假。

定义：把每个能分辨真假的陈述句称为*命题*，命题的结果称为*真值*。

如果一个命题是真的，则称它的真值为*真*，用“1”表示；如果一个命题是假的，则称它的真值为*假*，用“0”表示

习题：1——作业

例：⑴ 今天下雪

⑵ 光绪皇帝死的那一天，是大晴天

⑶ 任何一个大于 2 的偶数都可以表示成两个素数之和

⑷ 上帝保佑！

⑸ 天蓝蓝，海蓝蓝

⑹ $x+y=5$

规定：在数理逻辑中，命题用大写字母或带下标的大写字母表示。

原子命题：若一个命题已不能分解成更简单的命题，则称该命题为*原子命题* 或 *原始命题*

命题联结词：若干原子命题通过以下五种联结词可以构成新的命题，称这五种联结词为*命题联结词*

五种联结词是

"*否定*"、"*合取*"、"*析取*"、"*蕴涵*"、"*等*

复合命题：若干原子命题通过命题联结词构成的新的命题称为*复合命题*

习题：

1. *否定* “¬”

把对一个命题 P 的否定的命题称为*否命题*，记为“¬ *P*”，读成“*非 P*”。

定义：当且仅当 P 为假时，¬P 为真。

真值表：

P	$\neg P$
0	1
1	0

例： P：“今天上午打雷了”，它的否定句可以是：

(1) ¬P：今天上午没有打雷；

(2) ¬P：今天上午打雷这件事不成立

“¬”在自然语言中相当于“非”、“不”、“没有”、“不成立”等词

习题：

注：⑴数理逻辑中的“¬”，是对一个命题的严格否定。自然语言中的否定词往往有较大的差别，使用时要注意。

例如： P：这些都是男同学；

则 ¬P 应是：“这些不都是男同学”；

不能是：“这些都不是男同学”

⑵ “¬”联结词在集合运算中相当于“补”运算符 “ ′ ”

习题：

2. 合取 “∧”

合取是关于两个命题的联结词，记为“∧”

定义：当且仅当命题 P 和 Q 均为真时，P∧Q 才为真

真值表：

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

合取“∧”在自然语言中相当于“并且”、“和”、“以及
“既…又…”、“不仅…而且…”、“虽然…但是…”等

习题：

例： ① P：张新成绩很好，Q：张新性格很好。

$P \wedge Q$： 张新不仅成绩很好而且性格很好

② $P \wedge Q$：李珊与刘菲到五楼去了。

P：李珊到五楼去了 Q：刘菲到五楼去了。

③ P：桌子是黄色的，Q：火星上有生命。

$P \wedge Q$：桌子是黄色的并且火星上有生命

④ 李珊与刘菲是同乡

习题：

3. 析取 “ $\vee$ ”

析取是关于两个命题的联结词，记为“$\vee$”

定义：当且仅当命题 P 和 Q 至少有一个取值为真时，$P \wedge Q$ 便取值为真。

真值表：

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

析取 “$\vee$” 在自然语言中相当于“或者”

习题：

例： ① P：这餐饭吃鱼，　Q：这餐饭吃白菜。

$P \vee Q$：这餐饭吃鱼或吃白菜

② $P \vee Q$：今晚我写字或看书。

P：今晚我写字　　Q：今晚我看书

③ 张曜在图书馆或在宿舍里。

设 P：张曜在图书馆　　Q：张曜在宿舍里。

则复合命题应为：$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

习题：1

注：⑴集合运算中的“∪”是“∨”的特例

⑵ 自然语言中的“或者”的含义有两种，一种是“可兼或”，一种是“不可兼或”。

而数理逻辑中定义的析取“∨”的含义是“可兼或”的意思：命题P成立，或者命题Q成立，或者命题P和Q都成立。

不能表示“不可兼或”的意思

⑶ “不可兼或”在命题逻辑中表示成 $(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

意为：“要么…要么…”

习题：

4. *蕴涵* “→”

蕴涵的真值表：

P	Q	$P\rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

P→Q 定义 中的 P 称为蕴涵式的*前件*，Q 称为蕴涵式的*后件* 。

蕴涵 “→”在自然语言中相当于 “如果…必须”、“如果…那么…”、 “必须…以便…”、 “Q 对于 P 是必要的 ”、 “P 对于 Q 是充分的 ”

习题：

例：① 如果你走路时看书，那么你一定会成为近视眼

解：设：P：你走路；Q：你看书；

R：你会成为近视眼

则复合命题为：$(P \wedge Q) \rightarrow R$

② $P \rightarrow Q$：“如果我放了假，我就到桂林去”

解：P：我放了假， Q：我到桂林去

习题：

注：⑴ 蕴涵的真假值表的特点是，只有当后件为“假”，
前件为“真”时，蕴涵式的值才为“假”，其他情况

⑵ 蕴涵式的值均为“真”

蕴涵式的值就是通常的“必要条件”的一种抽象

讨论：蕴涵的真假值表中不大好理解的是，当后件为“真”时，无论前件为真为假，蕴涵式的值都为“真”

其实，这样的定义方式也反映了客观实际，它并不违背我们的逻辑思维常识。

看看前面的例②

习题：

5. *等值* “↔”

等值的真值表：

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

等值“↔”在自然语言中相当于“当且仅当”、“相当于”、“…和…一样”、“等价于”、“P是Q的充要条件”

习题：

例：① 除非他以书面或口头的方式正式通知我，否则我不参加明天的会议。

解：设 P：他书面通知我；Q：他口头通知我；

R：我参加明天的会议

则复合命题表示为：

$$(P \vee Q) \leftrightarrow R$$

② $P \leftrightarrow Q$： “仅当你去我将留下”；

P： 我留下　　Q: 你去

习题：

如何把一个句子符号化

步骤：分析出句子中的原子命题，将它符号化；

使用合适的联结词把原子命题联结起来，组成复合命题的符号化表示。

注意：自然语言中的联结词与命题联结词的含义不是完全对应的，需要具体分析。

习题：1、2、3

例： ① 小李虽聪明，但不用功

解：令 P：小李聪明， Q：小李用功

命题表示为：$P \wedge \neg Q$

② 若不是他生病或出差了，我是不会同意他不参加学习。

解:令 P：他生病了， Q：他出差了，

R：我同意他不参加学习

命题表示为：

$\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg R$ 或者 $(P \vee Q) \leftrightarrow R$

习题：1、2、3

③ 小张现在在图书馆或在宿舍里

解：令 P：小张在图书馆， Q：小张在宿舍

命题表示为：

$$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$$

④ 他写了 30 行或 50 行字

解：这里的“或”可以有两种不同的理解：

一是，“不可兼得的或”，如上题写成一复合命题；

二是，可作“或许”，“大概”理解，就是一个原子命题。

习题：

⑥ 赵常与钱深是好学生

解：令 P：赵常是好学生，　Q：钱深是好学生

命题表示为：$P \wedge Q$

⑦ 赵常与钱深是好朋友

解：这是一个原子命题。

习题：1、2、3

判断下列语句哪些是命题

⑴ 我正在说谎。

⑵ $3x+5\leqslant 8$

⑶ 圆的面积等于半径的立方乘以 π。

⑷ 2 或是质数或是合数。

⑸ 你学过了法语，真好!

⑹ 公元前 194 年发生过十天日食。

⑺ 如果你下午不开会就到我这里来，好吗?

命题符号化练习

⑴ 2+3=5 当且仅当$\sqrt{2}$是无理数

⑵ 如果你来了，那么他唱不唱歌将看你是否伴奏而定

⑶ 生命不息战斗不止

⑷ 张颖是 18 岁，或是 19 岁

⑸ 李珊学过德语或法语

⑹ 赵玲与陈实在讨论问题

⑺ 莫伸手，伸手必被捉。

⑻ 小代和小李是俩夫妻，他们都很贪婪

§ 8.2 命题公式

一、几个概念

命题常元：若一个表示命题的符号具有确定的真值 (1 或 0)，则称它为***命题常元***

命题变元：一个任意的，真值不确定的命题我们称它为***命题变元***，仍用大写字母表示

习题：4

定义 8-6：关于*命题公式*(或简称*公式*)的定义

⑴ 0、1是命题公式

⑵ 命题变元是命题公式

⑶ 如果 A 是命题公式，则 ¬ P 是命题公式

⑷ 如果 A 和 B 是命题公式，则(A∧B)、(A∨B)、(A→B)、(A↔B) 也是命题公式

⑸ 只有有限次地利用上述 ⑴、⑵、⑶、⑷ 产生的符号串才是命题公式

习题：4

例： **看看下面的符号串哪些是公式：**

$(A \wedge B) \rightarrow (\neg (P \rightarrow Q))$

$((A \vee B) \wedge R) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$

$(A \wedge B) \rightarrow P\ Q$

$\vee B \rightarrow Q$　　　　$1 \vee 0$

$P \rightarrow Q$．P.

注： **命题公式不一定是命题，若公式中有命题变元时，只有每一个命题变元都被赋以确定的真值时，公式的真值才被确定，成为一个命题**

习题：4——作业

真值指派：为一个公式的所有变元取一组确定的真值，称为该公式关于各变元的一组***真值指派***

例：$(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg Q \rightarrow S)$

公式的各组真值指派就是其中3个变元在真值表最左边列出的8组值

习题：4——作业

二、公式的类型

重言式：若一个公式对于它的所有命题变元的任何一组真值指派，取值恒为真，则称该公式为***重言式***或***永真公式***，常用“1”表示

例：命题公式 $F_1=(P\to Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$ 的真值表如下：

P	Q	$P\to Q$	$\neg P$	$\neg P\vee Q$	$(P\to Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

习题：5、6——作业

矛盾式：若一个公式对于它的所有命题变元的任何一组真值指派，取值恒为假，则称该公式为***矛盾式***或***永假公式***，常用“0”表示

可满足公式：若一个公式至少有一组真值指派使公式的值为真，则称该公式为***可满足公式***

例：$(P\leftrightarrow Q)\wedge(\neg Q\rightarrow S)$

P Q S	$P\leftrightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg Q\rightarrow S$	$(P\leftrightarrow Q)\wedge(\neg Q\rightarrow S)$
0 0 0	1	1	0	0
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	0	0	1	0
0 1 1	0	0	1	0
1 0 0	0	1	0	0
1 0 1	0	1	1	0
1 1 0	1	0	1	1
1 1 1	1	0	1	1

习题：5、6——作业

就像代数式之间有等式和不等式一样，命题公式之间也常有一些关系，最基本的关系是等值关系和蕴涵关系

§8.3 命题公式的等值关系和蕴涵关系

公式等值：设A和B是两个命题公式，当且仅当A和B的真值表完全相同时，称 A 和 B 是*等值公式*记为 $A \Leftrightarrow B$

注：(1) 公式等值的另一种定义是：

若 $A \leftrightarrow B$ 为重言式，则称 A和B是*等值公式*

(2) 等值关系实质上是表示两个公式之间的一种关系，“$\Leftrightarrow$”是一个表示关系的符号。

习题：4——作业

基本等值关系：下面列出 26 个重要的等值关系，它们可以像集合恒等式一样用于推导其它等值关系

E_1： $P\lor Q \Leftrightarrow Q\lor P$ E_1'： $P\land Q \Leftrightarrow Q\land P$ **交换律**

E_2： $(P\lor Q)\lor R \Leftrightarrow P\lor(Q\lor R)$

E_2'： $(P\land Q)\land R \Leftrightarrow P\land(Q\land R)$ } **结合律**

E_3： $P\land(Q\lor R)\Leftrightarrow(P\land Q)\lor(P\land R)$

E_3'： $P\lor(Q\land R)\Leftrightarrow(P\lor Q)\land(P\lor R)$ } **分配律**

E_4： $P\land 1 \Leftrightarrow P$ E_1'： $P\lor 0 \Leftrightarrow P$ **同一律**

E_5： $P\lor\neg P \Leftrightarrow 1$ E_5'： $P\land\neg P \Leftrightarrow 0$ **互否律**

E_6、E_6'： $\neg(\neg P)\Leftrightarrow P$ **双重否定律**

E_7： $P\land P \Leftrightarrow P$ E_7'： $P\lor P \Leftrightarrow P$ **等幂律**

E_8： $P\land 0 \Leftrightarrow 0$ E_8'： $P\lor 1 \Leftrightarrow 1$ **零一律**

E_9： $P\land(P\lor Q)\Leftrightarrow P$ E_9'： $P\lor(P\land Q)\Leftrightarrow P$ **吸收律**

E_{10}： $\neg(P\lor Q)\Leftrightarrow \neg P\land\neg Q$

E_{10}'： $\neg(P\land Q)\Leftrightarrow \neg P\lor\neg Q$ } **德．摩根定律**

习题：

E_{11}: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

E_{12}: $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

E_{13}: $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$

E_{14}: $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

E_{15}: $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

E_{16}: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$

E_{17}: $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$

说明：⑴ 这 26 个等值关系中，前 19 个与集合恒等式的基本公式 (参见书 p16)非常相似

这里的“∧”相当于集合运算符“∩”

这里的“∨”相当于集合运算符“∪”

这里的“¬”相当于集合运算符“′”

⑵ 这 26 个等值关系中，后 7 个关系表明，所有命题公式都能用 “∧”、“∨”、“¬”表示

⑶ 这 26 个等值关系的证明都可以用真值表进行，这是最基本的证明方法。

习题：

例 1：证明等值关系： $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

解：列真值表

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

从真值表可看出 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ 成立

习题：

例 2：证明等值关系： $\mathbf{P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)}$

解：列真值表

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \land Q$	$\neg P \land \neg Q$	$(P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1

从真值表可看出 $\mathbf{P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)}$

习题：

在代数中对公式进行推导时，可以使用变量代换和公式代换。在这里，等值关系的推导中也有同样的代换规则。

代换实例：**设 A 是一个命题公式，P_1，P_2，…，P_n 是其中出现的所有命题变元。**

① 用某些表达式代换 A 中的某些命题变元；

② 若用表达式 Q_i 代换 P_i 则必须用 Q_i 代换 A 中所有的 P_i。

那么，由此得到的新命题公式 B 叫做表达式 A 的一个*代换实例*

习题：5——作业

例 1：对于表达式 $A=P\rightarrow(R\wedge P)$中，用 $Q\leftrightarrow S$ 代换其中的 P，得到表达式 $B=(Q\leftrightarrow S)\rightarrow(R\wedge(Q\leftrightarrow S))$

则表达式 B 就是 A 的一个代换实例

注：用表达式 $Q\leftrightarrow S$ 代换表达式 A 中的 P 时，必须把 A 中的所有 P 都代换掉，不能漏掉一个。

例 2：对于表达式 $A=P\rightarrow Q$，先用 $Q\leftrightarrow S$ 代换其中的 P，得到表达式 $B_1=(Q\leftrightarrow S)\rightarrow Q$；再用 R 代换其中的 Q，得到表达式 $B_2=(R\leftrightarrow S)\rightarrow R$，则 B_2 就不是 A 的代换实例

注：若用多个表达式对多个变元进行代换，则代换必须同时进行

习题：5——作业

定理 8-2：（*代入规则*）重言式的任一代换实例仍然是重言式

解释：这个定理的意义在于，前面的 26 个等值关系中的变元 P、Q、R 不仅可以是任何命题变元，而且它们被换成命题公式时，这些等值关系也是成立的。

这相当于代数式中的任何一个变量可以全部换成另一个变量，也可换成另一个表达式

例：分配律 E_3'：$P\lor(Q\land R)\Leftrightarrow(P\lor Q)\land(P\lor R)$

用表达式 $X\to Y$ 代换其中的变量 Q 得：

$$P\lor((X\to Y)\land R)\Leftrightarrow(P\lor(X\to Y))\land(P\lor R)$$

习题：7——作业

子公式：如果 C 是表达式 A 的一个符号子串，而 C 本身也是一个表达式，则称 C 为 A 的**子公式**(子表达式)

例 1：表达式 $A = (P \vee Q) \rightarrow (Q \vee (R \wedge P))$ 中，

$(P \vee Q)$、$R \wedge P$、$Q \vee (R \wedge P)$ 都是 A 的子表达式

$(P \vee Q) \rightarrow$、$(R \wedge P))$、$Q \vee$ 都不是 A 的子表达式

习题：7——作业

定理 8-3：（*置换规则*）表达式 A 的任何一个子表达式 C，可以用 C 的等值表达式 D 置换，所得的新的表达式仍与原表达式 A 等值

解释：

⑴ 定理9-3 就像代数中的表达式一样，可以把其中的任何一个子表达式换成另一个与它等值的表达式，保持原表达式值不变。

在命题公式中，也可把其中的任何一个子表达式换成另一个等值的表达式。

⑵ 有了代入规则和置换规则，我们就可以像代数中的恒等变换一样，利用已知的等值关系式推导出其它一些更复杂的等值关系式。

习题：7——作业

例 1　证明：$(P\wedge(Q\wedge S))\vee(\neg P\wedge(Q\wedge S))\Leftrightarrow Q\wedge S$

证：$(P\wedge(Q\wedge S))\vee(\neg P\wedge(Q\wedge S))$

$\Leftrightarrow (P\vee\neg P)\wedge(Q\wedge S)$　　　　(分配律)

$\Leftrightarrow 1\wedge(Q\wedge S)$　　　　(互否律)

$\Leftrightarrow Q\wedge S$　　　　(零一律)

$\therefore$ 原等值关系式成立

习题：7——作业

例 3　证明：$P\rightarrow(Q\rightarrow R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\rightarrow R$

证：一般，把“蕴涵”转换为“非”、“且”、“或”

$\because$ 左边为　$P\rightarrow(Q\rightarrow R)\Leftrightarrow\neg P\vee(Q\rightarrow R)$　**(公式 E_{11})**

$\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q\vee R$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)\vee R$

$\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)\vee R$　**(摩根定律)**

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\rightarrow R$

$\therefore$ 原等值关系式成立

例 4 证明：$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$

证： $\because$ **右边为** $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge(\neg Q\vee P))\vee(Q\wedge(\neg Q\vee P))$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge P))\vee(Q\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge P)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge P)$

左边为 $P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge P)$

$\therefore$ **原等值关系式成立**

习题：7——作业

例 5　证明：$Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge P)$ 是一个重言式

证： $Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow Q \vee \neg((\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P))$

$$\Leftrightarrow Q \vee \neg(0 \vee (Q \wedge P))$$

$$\Leftrightarrow Q \vee \neg(Q \wedge P))$$

$$\Leftrightarrow Q \vee \neg Q \vee \neg P$$

$$\Leftrightarrow 1$$

∴ 原式是一个重言式

公式蕴涵：设 A 和 B 是两个命题公式，若表达式 A→B 是重言式，

即 (A→B)⇔1，则称公式 ***A 蕴涵 B***，记为 **A⇒B**

注：⑴ 注意"⇒"和"→"是两个完全不同的符号。

"→"是命题联结词，A→B 是一个公式，表示一个命题

"⇒"不是联结词，而只是一个表示关系的符号，A⇒B 不是公式，不代表任何命题

⑵ 蕴涵关系是一个偏序关系，满足自反性、反对称性、可传递性(为以下定理4、定理5支持)：

对任意公式 A，有 A⇒A

对任意公式 A、B，若 A⇒B，B⇒A，则必有 A⇔B

对任意公式 A、B、C，若 A⇒B，B⇒C，则 A⇒C

⑶ 集合中的被包含关系与这里的蕴涵关系完全相似，可以对照着理解和记忆

习题：

定理 8-4：设 A、 B 为两个命题公式，$A\Leftrightarrow B$ 的充要条件是， $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$

证：设 $A\Leftrightarrow B$，则 $A\leftrightarrow B$ 是重言式，即 $A\leftrightarrow B \Leftrightarrow 1$

而 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$

$\therefore (A\rightarrow B)\wedge (B\rightarrow A)\Leftrightarrow 1$，则 $A\rightarrow B \Leftrightarrow 1$ 且 $B\rightarrow A \Leftrightarrow 1$

$\therefore$ 按蕴涵关系的定义，有 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$

反之亦然

习题：

定理 8-5：设 A、B、C 是公式，若 A⇒B ，B⇒C ，则 A⇒C

证：由 A⇒B 和B⇒C 得 A→B 和 B→C 都是重言式

而 $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$，$B \to C \Leftrightarrow \neg B \vee C$

$\therefore\ \neg A \vee B \Leftrightarrow 1$，$\neg B \vee C \Leftrightarrow 1$

$$\because\ \neg A \vee C \Leftrightarrow (\neg A \vee C) \vee 0$$
$$\Leftrightarrow (\neg A \vee C) \vee (\neg B \wedge B)$$
$$\Leftrightarrow (\neg A \vee C \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee C \vee B)$$
$$\Leftrightarrow (\neg A \vee 1) \wedge (1 \vee C) \Leftrightarrow 1 \wedge 1 \Leftrightarrow 1$$

即 $A \to C \Leftrightarrow 1$

$\therefore\ A \Rightarrow C$成立

习题：

蕴涵关系：下面列出几个重要的蕴涵关系，它们可以按照定义直接证明

$P \wedge Q \Rightarrow P$　　　　$P \wedge Q \Rightarrow Q$

$P \Rightarrow P \vee Q$　　　　$Q \Rightarrow P \vee Q$

$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$　　　　$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$

习题：

证明蕴涵关系的方法

1. 列出蕴涵关系左右公式的真值表，用真值表比较

2. 根据蕴涵关系的定义证。把蕴涵关系相应的蕴涵式 $P\to Q$ 的等值式 $\neg P\vee Q$ 变换成 1 即可。

3. 根据蕴涵联结词的定义证。蕴涵关系相应的蕴涵式 $P\to Q$ 的前件 P 为真时，证明后件 Q 必为真，则 $P\to Q \Leftrightarrow 1$，于是就有了 $P\Rightarrow Q$，否则该蕴涵关系不成立

4. 根据蕴涵联结词的定义证。蕴涵关系相应的蕴涵式 $P\to Q$ 的后件 Q 为假时，证明前件 P 必为假，则 $P\to Q \Leftrightarrow 1$，于是就有了 $P\Rightarrow Q$，否则该蕴涵关系不成立

习题：

例 1　证明：　$((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R))\Rightarrow P\rightarrow R$

证：　设 $X \Leftrightarrow ((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow(P\rightarrow R)$　　(取蕴涵关系的蕴涵式)

$\because X \Leftrightarrow \neg((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R))\vee(P\rightarrow R)$　　(取蕴涵式的等值式)

$\Leftrightarrow (\neg(\neg P\vee Q)\vee\neg(\neg Q\vee R))\vee(\neg P\vee R)$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg R)\vee\neg P\vee R$　　(德．摩根定律)

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee\neg P\vee(Q\wedge\neg R)\vee R$　　(交换律)

$\Leftrightarrow \neg Q\vee\neg P\vee Q\vee R$

$\Leftrightarrow(\neg Q\vee Q)\vee\neg P\vee R$

$\Leftrightarrow 1\vee\neg P\vee R$　　(互否律)

$\Leftrightarrow 1$

$\therefore$ 原蕴涵关系成立

习题：

例 2 证明： $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$

证㈡ ：

假设前件 $\neg P \wedge (P \vee Q)$ 为真，

则必有 $\neg P$ 为真，且 $(P \vee Q)$ 为真 (根据合取的真值表)

由 $\neg P$ 为真，得 P 为假，

由 P 为假，再由 $P \vee Q$ 为真，得后件 Q 必为真 (析取的真值表)

$\therefore (\neg P \wedge (P \vee Q)) \rightarrow Q$ 是个重言式 (蕴涵的真值表)

$\therefore$ 原蕴涵关系成立 (蕴涵关系的定义)

习题：

例 2　证明：$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$

证㈢：

假设后件 Q 为假，

若 P 为真，则 $\neg P$ 为假，则 $\neg P \wedge (P \vee Q)$为假　　(合取的真值表)

若 P 为假，由 Q 为假，则得 $P \vee Q$ 为假，仍有 $\neg P \wedge (P \vee Q)$为假

$\therefore$ 前件 $\neg P \wedge (P \vee Q)$必然为假

$\therefore$ $(\neg P \wedge (P \vee Q)) \rightarrow Q$ 是个重言式　　(蕴涵的真值表)

$\therefore$ 原蕴涵关系成立　　(蕴涵关系的定义)

习题：

例 3　证明：$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$

证㈠：设 $X \Leftrightarrow (\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow \neg P$　　(取蕴涵关系的蕴涵式)

$\because X \Leftrightarrow \neg(\neg Q \wedge (\neg P \vee Q)) \vee \neg P$　　(取蕴涵式的等值式)

$\Leftrightarrow \neg((\neg Q \wedge \neg P) \vee (\neg Q \wedge Q)) \vee \neg P$　　(分配律)

$\Leftrightarrow \neg((\neg Q \wedge \neg P) \vee 0) \vee \neg P$　　(互否律)

$\Leftrightarrow \neg(\neg Q \wedge \neg P) \vee \neg P$　　(同一律)

$\Leftrightarrow Q \vee P \vee \neg P \Leftrightarrow Q \vee 1$　　(德．摩根定律)

$\Leftrightarrow 1$

$\therefore$ 原蕴涵关系成立　　(蕴涵关系的定义)

习题：

例 3 证明：$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$

证㈡：假设前件 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$为真，

则必有 $\neg Q$ 为真，且$(P \rightarrow Q)$为真　(根据合取的真值表)

由 $\neg Q$ 为真，得 Q 为假

由 Q 为假，再由 $P \rightarrow Q$ 为真，又得 P 必为假

(根据蕴涵的真值表)

∴后件 $\neg P$ 必为真

∴ $(\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow \neg P$ 是个重言式　(根据蕴涵的真值表)

∴ 原蕴涵关系成立　(蕴涵关系的定义)

习题：

证㈢：假设后件 $\neg P$ 为假，则 P 为真

若 $\neg Q$ 为假，则 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$ 为假 (根据合取的真值表)

若 $\neg Q$ 为真，则 Q 为假

由 Q 为假，加上 P 为真，则得 $P \rightarrow Q$ 为假

(根据蕴涵的真值表)

仍有 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$为假

$\therefore$ 前件 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$ 总是为假

$\therefore (\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow \neg P$ 是个重言式 (根据蕴涵的真值表)

$\therefore$ 原蕴涵关系成立 (蕴涵关系的定义)

习题：

例 4　设 A、B、C 是公式，若 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$，证明：$A \Rightarrow (B \wedge C)$

证：设 $X \Leftrightarrow A \to (B \wedge C)$　　(取蕴涵关系的蕴涵式)

$\because X \Leftrightarrow \neg A \vee (B \wedge C)$　　(取蕴涵式的等值式)

$\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$

$\Leftrightarrow (A \to B) \wedge (A \to C)$　　(蕴涵的定义)

由 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$　得 $A \to B \Leftrightarrow 1$　且　$A \to C \Leftrightarrow 1$

代入 $(A \to B) \wedge (A \to C)$ 得 $\Leftrightarrow 1$

$\therefore A \to (B \wedge C) \Leftrightarrow 1$

$\therefore A \Rightarrow (B \wedge C)$成立　　(蕴涵关系的定义)

习题：

例 5 设 A、B 是公式，若 $A \Rightarrow B$ 且 A 是重言式，则 B 一定也是重言式

证： $\because A \Rightarrow B$

$\therefore 1 \Leftrightarrow A \to B$ (蕴涵关系的定义)

$\Leftrightarrow \neg A \vee B$

$\because A$ 是重言式 $\therefore \neg A \Leftrightarrow 0$

$\therefore$ 上式为： $1 \Leftrightarrow 0 \vee B \Leftrightarrow B$

$\therefore$ B 是重言式

习题：

公式中的所有联结词 → 和 ↔ 都可以置换成 ¬、∧、，所以，在公式推导中总是把公式变成只包含 ¬、∧、∨ 这三种联结词的形式。

对偶：在公式 A 中，若把所有联结词 ∧ 代换成 ∨，把 ∨ 代换成 ∧，把 0 代换成 1，把1 代换成 0，则所得的公式称为 A 的*对偶*，记作 A^D

定理 8：设 A 、 A^D 是两个互为对偶的公式，P_1，P_2，…，P_n 是其命题变元，则

$$\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow A^D(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

习题：

定理 9(对偶原理):

设 $A(P_1，P_2，\ldots，P_n)$和 $B(P_1，P_2，\ldots，P_n)$是两个公式，若 $A \Leftrightarrow B$，则 $A^D \Leftrightarrow B^D$

习题:

§ 8.5 命题演算的推理理论

逻辑推理就是由已知命题得到新命题的思维过程

$$\text{前提(命题)} \xrightarrow{\text{推理}} \text{结论(命题)}$$

定义：设 A、B 是两个命题公式，若 $A \Rightarrow B$(即 $A \to B$ 是重言式)，则称 B 是***前提*** A 的***结论***，或 ***从 A 推出结论 B***。

一般地，前提可以是若干个命题的“且”

设 H_1，H_2，…，H_n 和 C 是一些命题公式，

若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C$ 则称

从前提 H_1，H_2，…，H_n 推出结论 C，

也可记为 H_1，H_2，…，$H_n \Rightarrow C$ 并称

$\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$为 C 的***前提集合***

注：从一组前提是否可以推出某个结论的实质就是证明下述蕴涵关系是否成立 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C$

习题：

分析：前面已经讲了证明蕴涵关系处理的四种方法：

1. 列出蕴涵关系左右公式的真值表，用真值表比较
2. 列出蕴涵关系的蕴涵式，通过等值变换把该蕴涵式变换成 1 即可。
3. 设蕴涵式的前件为真，证明后件必为真
4. 设蕴涵式的后件为假，证明前件必为假

这四种方法都可以用于证明前提由多个命题变元组成的蕴涵关系。

显然，前两种方法受蕴涵关系的规模的限制，在前提和结论都是比较复杂的命题公式或者包含的命题变元很多时，这两种方法就很困难了。

第 3 种方法在前提由多个命题变元组成时，要设所有前提为真，由此推出结论为真，即可。这就是一般的“*直接证明法*”。

第 4 种方法在前提由多个命题变元组成时，要设结论为假，由此推出前提中有一个为假，即可。这就是我们很熟悉的“*反证法*”，也叫“*间接证明法*”。

习题：

形式证明：一个描述推理过程的命题序列，其中每个命题或者是已知命题，或者是由某些前提推得的结论，序列中最后一个命题就是所要求的结论，这样的命题序列称为***形式证明***。

构造一个逻辑结构严谨的形式证明，需要以下推理规则的支持

推理规则：

(1) ***前提引入规则***：**在证明的任何步骤上都可以引入前提**

(2) ***结论引用规则***：**在证明的任何步骤上所得到的结论都可以在其后的证明中引用**

(3) ***置换规则***：**在证明的任何步骤，命题公式的子公式都可以用与它等值的其它命题公式置换**

(4) ***代入规则***：**在证明的任何步骤，重言式的任一命题变元都可用一命题公式代入，得到的仍是重言式。**

习题：

例 1：有前提 H_1，H_2，和结论 C，判断推理能否成立：

(1) $H_1: P \to Q$ ，　$H_2: P$ ，　$C: Q$

(2) $H_1: P \to Q$ ，　$H_2: Q$ ，　$C: P$

列真值表如下：

P	Q	$P \to Q$	$(P \to Q) \wedge P$	$(P \to Q) \wedge Q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

$((P \to Q) \wedge P) \to Q$	$((P \to Q) \wedge Q) \to P$
1	1
1	0
1	1
1	1

习题：

例 1：有前提 H_1，H_2，和结论 C，判断推理能否成立：

(1) H_1 ： $P \to Q$ ， H_2 ： P ， C ： Q

(2) H_1 ： $P \to Q$ ， H_2 ： Q ， C ： P

显然，第 (1) 小题中，从 H_1，H_2 能够推出 C；
第 (2) 小题中，不能从 H_1，H_2 推出 C

把具体命题代入上例中的命题变元 P，Q，则更容易理解

(1) $P \to Q$ ： 如果今天出太阳，他就进城

P ： 今天出了太阳 Q ： 他进城了

(2) $P \to Q$ ： 如果狗有翅膀，则狗会飞上天

P ： 狗有了翅膀 Q ： 狗飞上了天

(3) $P \to Q$ ： 如果 n 是素数，则 n 一定是整数

Q ： n 是整数 P ： n 是素数

习题：

例 2：证明 C：$\neg P$ 是前提 H_1：$P \rightarrow Q$ 和 H_2：$\neg(P \wedge Q)$的结论

证 $(H_1 \wedge H_2) \rightarrow C \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge \neg (P \wedge Q)) \rightarrow \neg P$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow \neg P$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \rightarrow \neg P$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q)) \rightarrow \neg P$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee 0) \rightarrow \neg P$

$\Leftrightarrow \neg P \rightarrow \neg P$

$\Leftrightarrow P \vee \neg P \Leftrightarrow 1$

$\therefore C$ 是前提 H_1 和 H_2 的结论

习题：

用直接证明法，我们设每一个前提的真值为真，能推导出结论的真值也为真，则原推理正确，否则不正确。

例 3：证明 $\neg P$ 是前提 $\neg(P \wedge \neg Q)$，$\neg Q \vee R$，$\neg R$ 的结论

证　设 $\neg R$为真　　(前提3为真)

得 R 为假

设 $\neg Q \vee R$ 为真　　(前提2为真)

将 R为假代入得：$\neg Q$为真　　继得 Q 为假

设 $\neg(P \wedge \neg Q)$为真　　(前提1为真)

得 $\neg P \vee Q$ 为真

将 Q 为假代入得：$\neg P$为真 (结论为真)

$\therefore$ $\neg P$ 是前提 $\neg(P \wedge \neg Q)$，$\neg Q \vee R$，$\neg R$ 的结论

习题：

例 4：证明 $(P\wedge Q)\rightarrow R$，$\neg R\vee S$，$\neg S \Rightarrow P\rightarrow \neg Q$

证：设 $\neg S$ 为真　　(前提3为真)　　得 S 为假

设 $\neg R\vee S$为真　(前提2为真)　将 S为假代入得：$\neg R$为真　继得R为假

设 $(P\wedge Q)\rightarrow R$为真　(前提1为真) 将 R 为假代入得：$P\wedge Q$为假

$\therefore \neg P \vee \neg Q$ 为真　　　即 $P \rightarrow \neg Q$为真　(结论为真)

$\therefore (P\wedge Q)\rightarrow R$，$\neg R\vee S$，$\neg S \Rightarrow P \rightarrow \neg Q$　成立

讨论：这一题用反证法如何?

例：证明 $(P\wedge Q)\rightarrow R$，$\neg R\vee S$ ，$\neg S \Rightarrow P\rightarrow\neg Q$

此题的结论是一个蕴含式，这种情况下可以将该蕴含式的前件也作为题目的前提，称之为“附加前提”；该蕴含式的后件作为题目的结论，使原题成为下面等价的形式:

证明 $(P\wedge Q)\rightarrow R$，$\neg R\vee S$，$\neg S$，$P \Rightarrow \neg Q$

习题：

例 5：证明 $P \vee Q$ 是 $S \rightarrow Q$，$R \rightarrow P$，$S \vee R$ 的结论

讨论：此题用"直接证明"好，还是用"反证法"好?

证 设 $P \vee Q$为假　　　(设结论为假)

则有： P 为假　且 Q 为假

若 $S \rightarrow Q$为真　　　(前提 1为真)

即： $\neg S \vee Q$ 为真　　代入 Q 为假　　得 $\neg S$ 为真

$\therefore S$ 为假

再设 $R \rightarrow P$ 为真　　(前提 2为真)

把 P 为假 代入 得 R 为假

于是 $S \vee R$ 为假　　(得前提 3 为假)

$\therefore P \vee Q$ 是 $S \rightarrow Q$ ，$R \rightarrow P$，$S \vee R$ 的结论

习题：

在上述例子中，无论是直接证明还是反证法，都用到了各种推理规则，例如，全体引入规则，置换规则，代入规则等。而直接使用已知的蕴涵关系式却没有。

下面列出一些常用的蕴涵关系式(*推理定理*)：

I_1： $P \wedge Q \Rightarrow P$

I_2： $P \wedge Q \Rightarrow Q$

I_3： $P \Rightarrow P \vee Q$

I_4： $Q \Rightarrow P \vee Q$

I_5： $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$

I_6： $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$

I_7： $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$

I_8： $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$

I_9： P，$Q \Rightarrow P \wedge Q$

I_{10}： $\neg P$，$P \vee Q \Rightarrow Q$

I_{11}： P，$P \rightarrow Q \Rightarrow Q$

I_{12}： $\neg Q$，$P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$

I_{13}： $P \rightarrow Q$，$Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$

I_{14}： $P \vee Q$，$P \rightarrow R$，$Q \rightarrow R \Rightarrow R$

I_{15}： $P \rightarrow Q \Rightarrow (P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)$

I_{16}： $P \rightarrow Q \Rightarrow (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)$

习题：

如果证明过程的每一步所得到的结论都是根据推理规则得到的，则称这样的证明为“*有效的*”，或曰“*合理的*”

通过有效的证明得到的结论，我们称为是“*有效的结论*”或“*合理的结论*”

下面举例介绍利用推理定理进行推理的一种方法——推理表

习题：

例 7：证明 $P \to \neg Q$，$\neg R \vee Q$，$R \wedge \neg S \Rightarrow \neg P$

证明：

编号	公式	依据	
(1)	$R \wedge \neg S$	前提 3	
(2)	R	(1), I_1	I_1： $P \wedge Q \Rightarrow P$
(3)	$\neg R \vee Q$	前提 2	
(4)	Q	(2), (3), I_{10}	I_{10}： $\neg P$，$P \vee Q \Rightarrow Q$
(5)	$P \to \neg Q$	前提 1	
(6)	$\neg P$	(4), (5), I_{12}	I_{12}： $\neg Q$，$P \to Q \Rightarrow \neg P$

习题：

例 8：证明 P∨Q 是 S→Q 、R →P、S∨R 的结论

证明：设结论 $P \vee Q$ 为假，即 $\neg(P \vee Q)$ 为真，

亦即 $\neg(\neg P \rightarrow Q)$ 为真

编号	公　　　式	依　　　据	
(1)	$\neg(\neg P \rightarrow Q)$	结论	即结论为假
(2)	$\neg P$	(1)，I_7	I_7： $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$
(3)	$\neg Q$	(1)，I_7	
(4)	$S \rightarrow Q$	前提 1	
(5)	$\neg S$	(3)，(4)，I_{12}	I_{12}： $\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$
(6)	$R \rightarrow P$	前提 2	
(7)	$\neg R$	(2)，(6)，I_{12}	
(8)	$\neg S \wedge \neg R$	(5)，(7)，I_9	
(9)	$\neg(S \vee R)$	(8)，摩根定理	即前提 3 为假

说明：此例是反证法的一个实例：由结论为假，以及若干前提为真，推得某一前提为假

习题：

在前述的16 个推理定理中，值得特别提出的是

I_{11}：P，P→Q ⇒ Q 。

它表示：两个前提中，若一个是蕴涵式命题，另一个是其前件，则该蕴涵式的后件也是真命题。

因此，I_{11} 又被称为"*假言推理*"和"*分离规则*"。这个公式用得很多。

特别在被推理的蕴涵关系式中，结论是一个蕴涵式P →Q 时，可以把结论中的前件P 作为附加前提加到前提集合中，最后证得结论的后件为真即可。

习题：

例 9　证明：$(P \wedge Q) \to R$，$\neg R \vee S$，$\neg S \Rightarrow P \to \neg Q$

编号	公　　式	依　　据
(1)	$\neg R \vee S$	前提 2
(2)	$\neg S$	前提 3
(3)	$\neg R$	(1), (2), I_{10}
(4)	$(P \wedge Q) \to R$	前提 1
(5)	$\neg(P \wedge Q)$	(3), (4), I_{12}
(6)	$\neg P \vee \neg Q$	(5), 摩根定理
(7)	P	假设(附加前提)
(8)	$\neg Q$	(6), (7), I_{10}
(9)	$P \to \neg Q$	(8)，I_6

I_{10}：　$\neg P$，$P \vee Q \Rightarrow Q$

I_{12}：　$\neg Q$, $P \to Q \Rightarrow \neg P$

I_6：　$Q \Rightarrow P \to Q$

习题：

例10，确定以下推理是否正确？对正确的推理构造证明。对不正确的推理描述其错误。

(1) 如果今天是星期二，那么我有一次计算方法测验或物理测验。如果物理老师生病，那么没有物理测验。今天是星期二且物理老师生病，所以，我有一次计算方法测验。

证： 该论证有效。证明如下

设 P：今天是星期二， Q：我有一次计算方法测验

R：我有物理测验， S：物理老师生病

论证为：$P \to (Q \vee R)$，$S \to \neg R$，$P \wedge S \Rightarrow Q$

编号	公　　式	依　　据
(1)	$P \wedge S$	前提 3
(2)	P	I_1
(3)	$P \rightarrow (Q \vee R)$	前提 1
(4)	$Q \vee R$	(2)，(3)，I_{11}
(5)	S	(1)，I_2
(6)	$S \rightarrow \neg R$	前提 2
(7)	$\neg R$	(5)，(6), I_{11}
(8)	Q	(4)，(7)，I_5

∴该论证有效

习题：

⑵ 如果张小三的手沾满了鲜血，那么他杀了人，张小三手很清洁。所以，张小三没有杀人。

证： 该论证无效。证明如下

设 P：张小三的手沾满了鲜血， Q：张小三杀了人

论证为：$P \rightarrow Q$，$\neg P \Rightarrow \neg Q$

$\because\ (P \rightarrow Q) \wedge \neg P \rightarrow \neg Q \Leftrightarrow \neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg P) \vee \neg Q$

$\Leftrightarrow P \vee \neg Q$

这显然是一个可满足公式

$\therefore$ 该论证无效

例11，证明由 $P\rightarrow Q$，$P\rightarrow R$，$Q\rightarrow \neg R$，P 推得 M

编号	公式	依据
(1)	P	前提 4
(2)	$P\rightarrow Q$	前提 1
(3)	Q	(1)，(2)，I_{11}
(4)	$P\rightarrow R$	前提 2
(6)	R	(1)，(4)，I_{11}
(7)	$Q\rightarrow \neg R$	前提 3
(8)	$\neg R$	(2)，(7)，I_{11}
(9)	$R\wedge\neg R$	(6)，(8)，I_5

即前提为假

而假前提可推得任意结论

$\therefore$原推理成立

第八章结束