课程：随机过程引论

时间：2014秋季学期

对象：理工科各专业学术型研究生

课时： 48

教师：冯海林

➢ 随机过程的研究对象

随机过程是研究随机现象随时间（广义）变化过程中的规律性的一门数学学科.

——是概率论的深入和发展.

- 随机过程应用广泛

随机过程在自然科学、社会科学以及工程技术的各领域均有应用.

——在我校的一些专业：雷达、通信、无线电技术、自动控制、生物工程、经济管理等领域有极为广泛的应用.

➢ 本课程的教学目标

- 掌握随机过程的基本理论和方法
- 培养处理随机性问题的思维方式和意识
- 提高应用随机过程的能力

➢ 参考教材

1.《随机过程——计算与应用》冯海林 薄立军 西安电子科技大学出版社 2012（第二次印刷）

2《An introduction to stochastic processes》 Edward P.C. kao Thomson 2003

。。。。。。

➢ 本课程的教学内容

- 随机过程的基本知识
- 布朗运动及其相关的随机过程
- 跳跃随机过程
- 二阶矩过程与平稳过程
- 离散时间马尔可夫链

➢ 作业与考试

作业：每章均有一定量的作业

考试：期末闭卷考试

第二章——随机过程基本知识

- 教学内容
- 随机过程的定义
- 随机过程的分类及其例子
- 有限维分布函数族与特征函数族
- 随机过程的数字特征

- 本章作业：　教材39页：1.2.5.6.7

一. 随机过程的定义

——先从几个引例开始……

请从引例体会：

如何才能量化和全面的反映一个随机现象?

量化的形式?

补例1. 考察某网站的访问情况

概率论提示：给定$t_0(>0)$, $[0,t_0]$时间内该网站的访问次数记为X_{t0}是一个随机变量．

思考：X_{t0}是否能反映该网站的访问情况？

如果不能，则怎样的量才能够反映？

则需要对每个t（t>0），去观察对应的随机变量X_t，即用一族随机变量X_t（t>0）方可全面反映网站的访问情况。

记这样一族随机变量为$\{X_t, t\in[0,\infty)\}$

补例 2 . 研究具有随机初位相的简谐波的波形规律

$$X_t = A\cos(\omega t + \Phi)$$

其中A ω为常数，随机变量Φ服从[0, 2π]上的均匀分布.

需要观察任一时刻t的随机变量X_t，此时X_t是一族随机变量.

即用一簇随机变量方能反映波形与规律.

记为$\{X_t, t\in[0, +\infty)\}$

补例3．考察某种生物群体的增长情况并表示之

思考：若令 X_t 表示t时刻该生物群体的个数，则这个随机变量 X_t 是否可以较为全面反映生物群体增长情况？

一般需要每隔一定时间，即在 $t=0,1,2,\dots$ 时观察相应的群体个数 X_t，

即需要一族随机变量，记为 $\{X_t, t=0,1,2,\dots\}$

补例4. 调研某地区最高气温并表示

若以X_t 表示第t次观测所得最高气温,则仅用第t次的观察量X_t是不全面的。**需要多次的观测该地区的最高气温，即用一族随机变量X_t , t=0,1,2,…,**

所以该地区的最高气温需要用一族随机变量X_t，t=0,1,2,…，方可表达之

记为$\{X_t, t=0,1,2,\ldots\}$

以上4个例子说明:

用一族随机变量可以较全面的反映所看到的随机现象.

为此将概率论中的随机变量推广为一族随机变量.
就是随机过程.

以下是其定义:

随机过程定义

设(Ω,F,P)为一概率空间,T为一参数集,$T\subset R$,

若对每一 $t\in T$,均有定义在(Ω,F,P)上的一个随机变量$X(\omega,t)$,$(\omega\in\Omega)$与之对应,

则称$X(\omega,t)$为(Ω,F,P)上的一个**随机过程**(S.P.)

记$X=\{X(\omega,t),\ \omega\in\Omega,t\in T\}$,

简记$X=\{X_t\ ,t\in T\}$,或$X(t)$或X_t

T称为参数集或参数空间，t称为参数，一般表示时间或空间.

参数集通常有以下形式:

(1) T={0,1,2,…}或 T= {…-2,-1,0,1,2,…}

(2) T=[a,b],其中a 可以为－∞, b可以为+∞.

当参数集为形式(1)时,随机过程X(t)也称为

随机序列

随机过程定义的进一步解释：

1. $X(\omega\ \ t)$ 的两个特点：**随机性与函数性．** 因此，$X(\omega, t)$，实质上为定义在$T\times\Omega$上的二元单值函数．

2. 对每一个固定的t，X_t 为一随机变量．$X_t(t\in T)$所有可能取值的集合,称为随机过程$X(\omega,t)$ 的**状态空间**,记为S．S中的元素称为**状态**．

3. 对每一个$\omega_0\in\Omega$，$X(\omega_0,t)$是定义在T上的普通函数．记为 $x(\omega_0,t)$，称为随机过程的一个**样本函数**．或**样本轨道**．
样本函数的图形称为**样本曲线**．

4. 样本轨道的连续性一些定义

设X={X(ω,t), t∈T} 为定义在(Ω,F,P)上的一个随机过程。

（1）若对任意的t∈T有 $P(\lim\limits_{s\to t}|X_s - X_t| = 0) = 1$

则称随机过程X在T上以概率1连续.

（2）若对任意的t∈T和常数 $\varepsilon > 0$，有 $\lim\limits_{s\to t} P(|X_s - X_t| \ge \varepsilon) = 0$

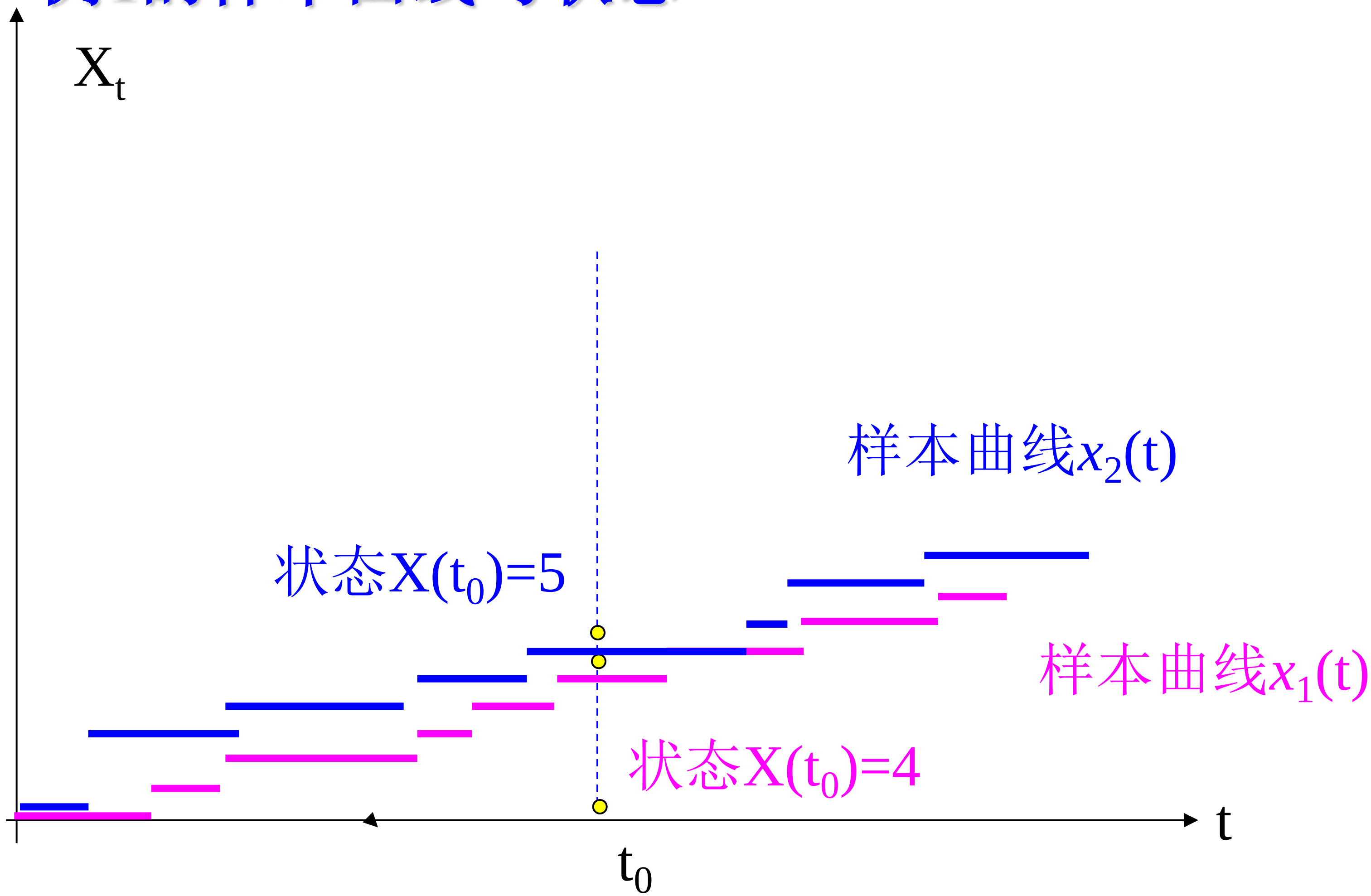
则称随机过程X在T上依概率连续.

（3）若对任意的t∈T和 常数 $p \ge 1$，有 $E|X_t|^p < \infty$,

$$\lim_{s\to t} E[|X_s - X_t|^p] = 0$$

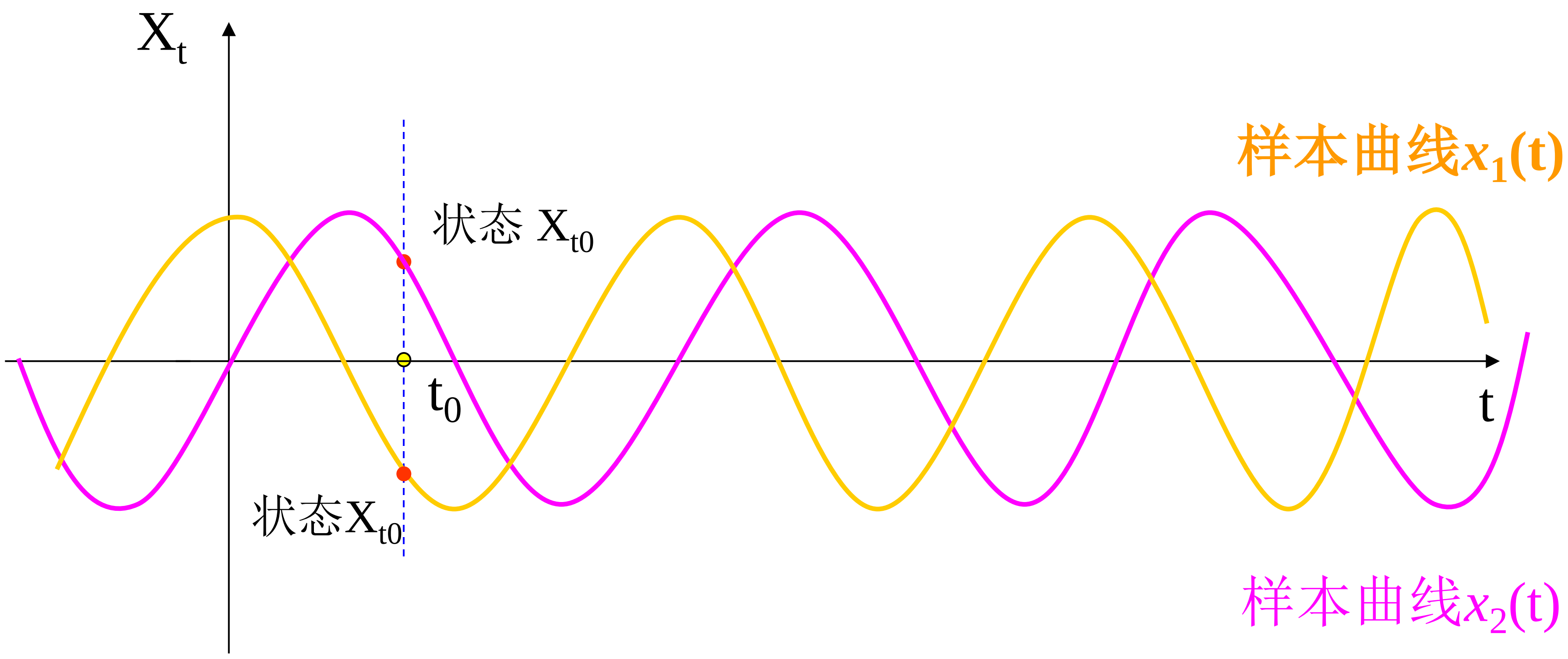
则称随机过程X在T上 L^p **连续.（*p*=2时称为均方连续）**

例1的样本曲线与状态



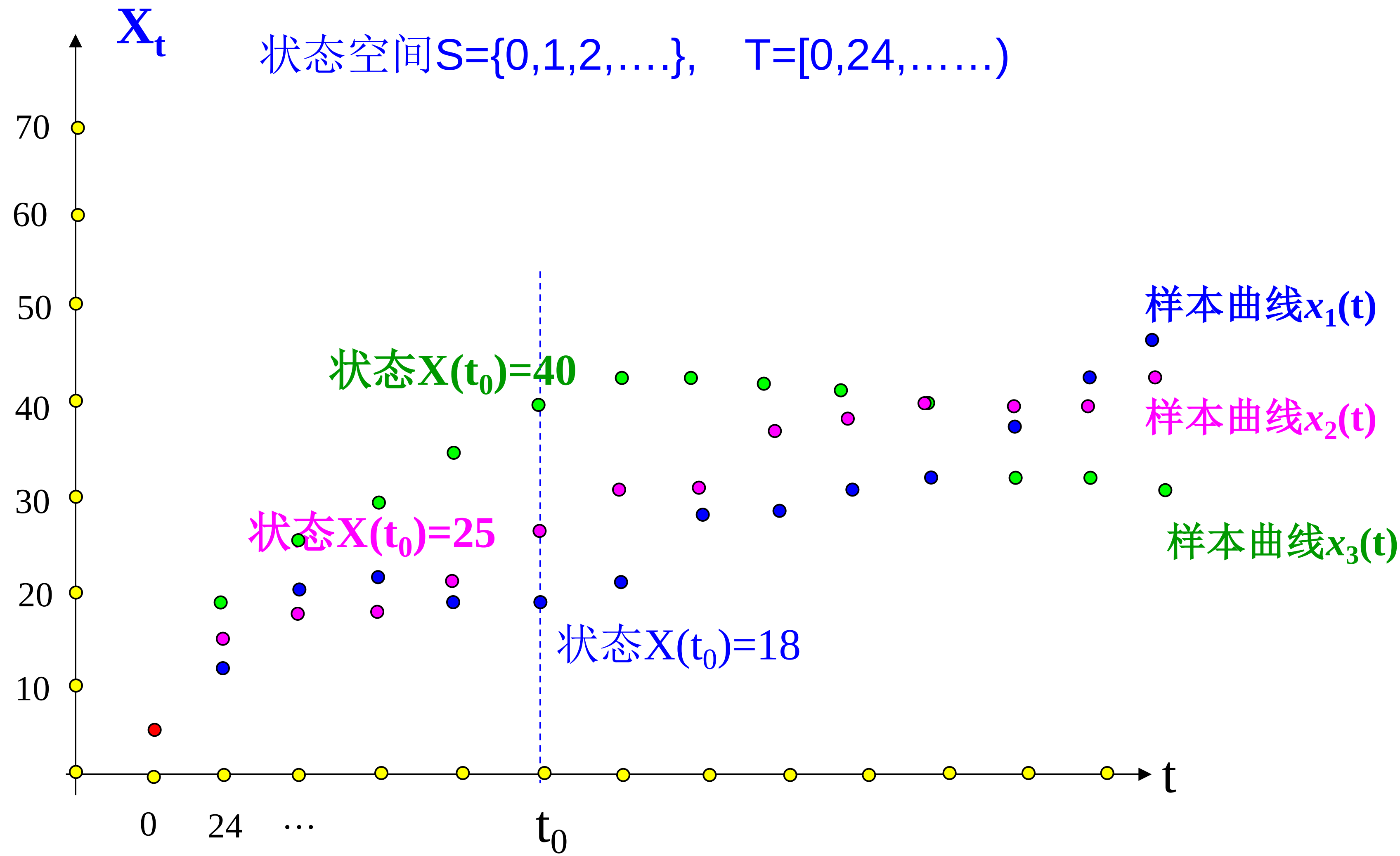
状态空间S={0,1,2,….}，　T=[0,+∞)

例2 的样本曲线与状态



状态空间S=[-A,A],参数集T=[-∞,+ ∞]

例3 的样本曲线与状态


X_t
状态空间S={0,1,2,….}, T=[0,24,……)
70
60
50
40
30
20
10
0
24
…
t_0
t
状态X(t_0)=40
状态X(t_0)=25
状态X(t_0)=18
样本曲线x_1(t)
样本曲线x_2(t)
样本曲线x_3(t)

根据参数集与状态空间离散与否, 随机过程可分为

- 离散参数,离散状态的随机过程 (例3)
- 离散参数,连续状态的随机过程 (例4)
- 连续参数,离散状态的随机过程 (例1)
- 连续参数,连续状态的随机过程 (例2)

参数集为离散的随机过程也称为随机序列,
或时间序列.

根据不同的标准可以对随机过程进行分类.