## 二.随机过程的分类及其例子

- **根据参数集与状态空间离散与否,随机过程可分为**

- 离散参数,离散状态的随机过程
- 离散参数,连续状态的随机过程
- 连续参数,离散状态的随机过程
- 连续参数,连续状态的随机过程

进一步的举例

例2.1.1 伯努利过程与二项过程(离散参数,离散状态)

设有随机过程$\mathbf{X}=\{\mathbf{X}_n, \mathbf{n}=1, 2, \ldots, \}$,
其中随机变量$X_1$, $X_2$, …, $X_n$, …, 相互独立同分布.

如果$X_n$同服从0-1分布，则称X为伯努利过程.

伯努利过程描述了一系列独立同分布的随机试验.

如果令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $\quad S_0 = 0$

则称$S=\{S_n, n=0,1,2, \ldots, \}$为二项过程.

## 例2.2.2 严高斯白噪声过程(离散参数,连续状态)

设有随机过程**X={X$_n$, n=**1, 2, … , },

其中$X_1, X_2, \cdots, X_n, \ldots$, 相互独立同分布.

如果$X_n$同服从高斯分布$N(0,\sigma^2)$,

则称X为严高斯白噪声过程.

## 例2.2.3.泊松过程（连续参数离散状态）

称随机过程N={$N_t, t\geq 0$}是参数为$\lambda$ 的泊松过程，如果N它满足以下三条件：

（1） $N_0 = 0$

(2) 对任意的$0 \leq s < t$,增量$N_t$ -$N_s$服从参数为$\lambda(t-s)$的泊松分布，即

$$P(N_t - N_s = k) = \frac{(\lambda(t-s))^k e^{-\lambda(t-s)}}{k!}, k = 0,1,2,\cdots$$

(3)对任意的$n \geq 2$,及$0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$, $n$个增量$N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, \cdots, N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_1} - N_{t_0}$是相互独立的随机变量.

其中(2)(3)合称为平稳独立增量性。

## 例2.2.4.正态(高斯)过程

设X= $\{X_t, t\in T\}$是一实值随机过程,若对任意$n\geq 1$及$t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, n维随机变量$(X_{t1}, X_{t2}, \ldots, X_{t\,n})$服从n维正态分布,则称X是正态(高斯).过程

如参数集为$T=[0，+\infty)$，X就是连续参数连续状态随机过程.

## 回顾：n维正态分布定义及性质

定义 如果$n$维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$有联合概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|B|^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)B^{-1}(x-\mu)^T}$$

则称$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$服从均值向量为$\mu$，协方差矩阵为$B$的是$n$维正态分布. 记 $N(\mu,B)$

性质　设X=$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$服从n维正态分布$N$(μ,B)，则

（1）$Y=\sum_{k=1}^{n} l_k X_k$（$l_k$是常数）服从一维正态分布.

即$Y$服从$N\left(\sum_{k=1}^{n} l_k \mu_k, \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} l_i l_k \operatorname{cov}(X_i, X_k)\right)$

（2）$X$的$m(m<n)$个分量服从$m$维正态分布.

（3）Y=XC服从$m$维正态分布$N(\mu C, C^{\mathrm{T}}BC)$.

(这里C是n×m矩阵)

补例5. 设$X_t = A\cos\omega t + B\sin\omega t, t \in R$,

**其中 A,B为相互独立的,且都服从正态分布N(0,** $\sigma^2$) **的随机变量, ω是常数.**

证明:随机过程$X = \{X_t, t \in R\}$是正态过程.

例2. 2.5. 设随机变量R和Θ相互独立，其中R服从瑞利分布，

密度函数为：
$$f(r)=\begin{cases}\dfrac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & r\geq 0\\ 0, & r<0\end{cases}$$

Θ服从$[0, 2\pi]$上均匀分布.

定义：

$$X_t = R\cos(\Theta + at), \qquad t\in R, a\text{为常数}$$

验证：随机过程$X=\{X_t, t\in R\}$为正态过程.

提示：$$f_{(\xi,\eta)}(x,y)=f_{(R,\Theta)}(\sqrt{x^2+y^2},\arctan\frac{y}{x})|J|$$

$$=f_R(\sqrt{x^2+y^2})\times f_\Theta(\arctan\frac{y}{x})\times\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

（其中，$|J|=\frac{\partial(R,\Theta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y}\\ \frac{\partial \Theta}{\partial x} & \frac{\partial \Theta}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{-x}{x^2+y^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$）

- **根据样本轨道连续与否,随机过程可分为**
- 连续轨道随机过程
- 跳跃轨道随机过程

例2.2.6 （连续轨道随机过程）设 $\xi(\omega)$，$\eta(\omega)$ 是定义在同一概率空间上的两个随机变量。定义随机过程X={$X_t$：$t \geq 0$}为：

$$X_t = \xi(\omega) + t\,\eta(\omega)$$

则X是一个连续轨道随机过程。

例2.2.7 标准布朗运动(维纳过程)（连续轨道）

若实随机过程W=$\{W_t, t \geqslant 0\}$ 满足:

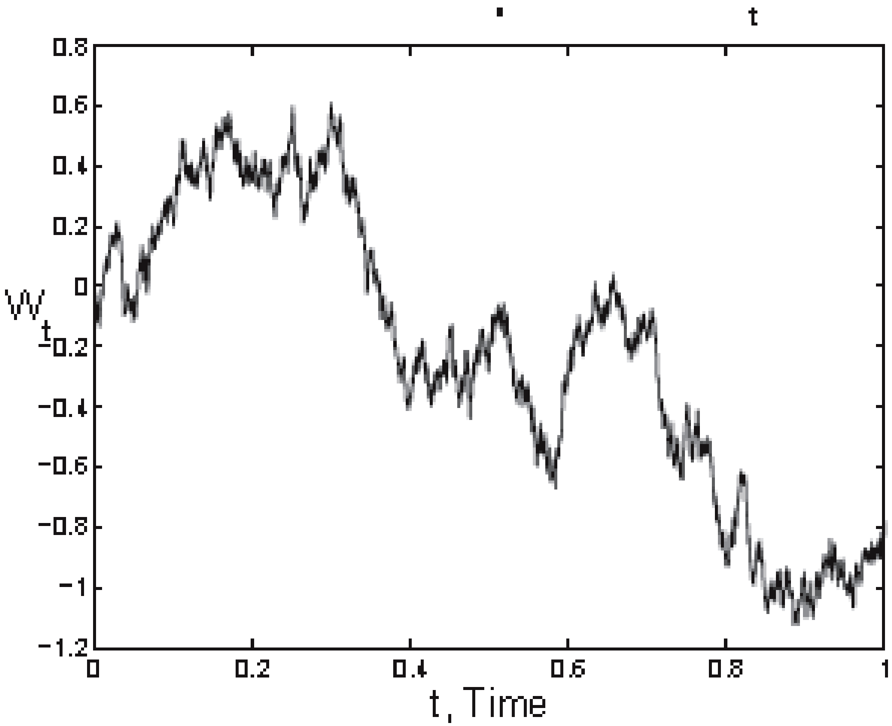
(1) $W_0 = 0$

(2) $W = \{W_t, t \geq 0\}$**是平稳的独立增量过程.**

(3) 对任意的$0 \leq s < t$,有$W_t - W_s \sim N(0,(t-s))$

则称随机过程W是标准布朗运动(维纳过程).

布朗运动是连续轨道，以下是其仿真样本轨道



**定义2.2.1** 复合泊松过程设N= {$N_t, t\ge 0$} 是参数为$\lambda$ 的泊松过程, {$Y_k$.k=1,2,…}是一列独立同分布的随机变量, 且与$N$独立.

$$令 X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k, t \ge 0$$

称 X={$X_t, t\ge 0$}为复合泊松过程.（轨道不连续）

若将$N_t$表示[0,t)内的随机点数, $Y_k$表示第k个随机点所携带的某种(能)量,则总量为

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$$

即 X={$X_t$,$t$≥0}为复合泊松过程.

# 轨道不连续的随机过程——泊松过程

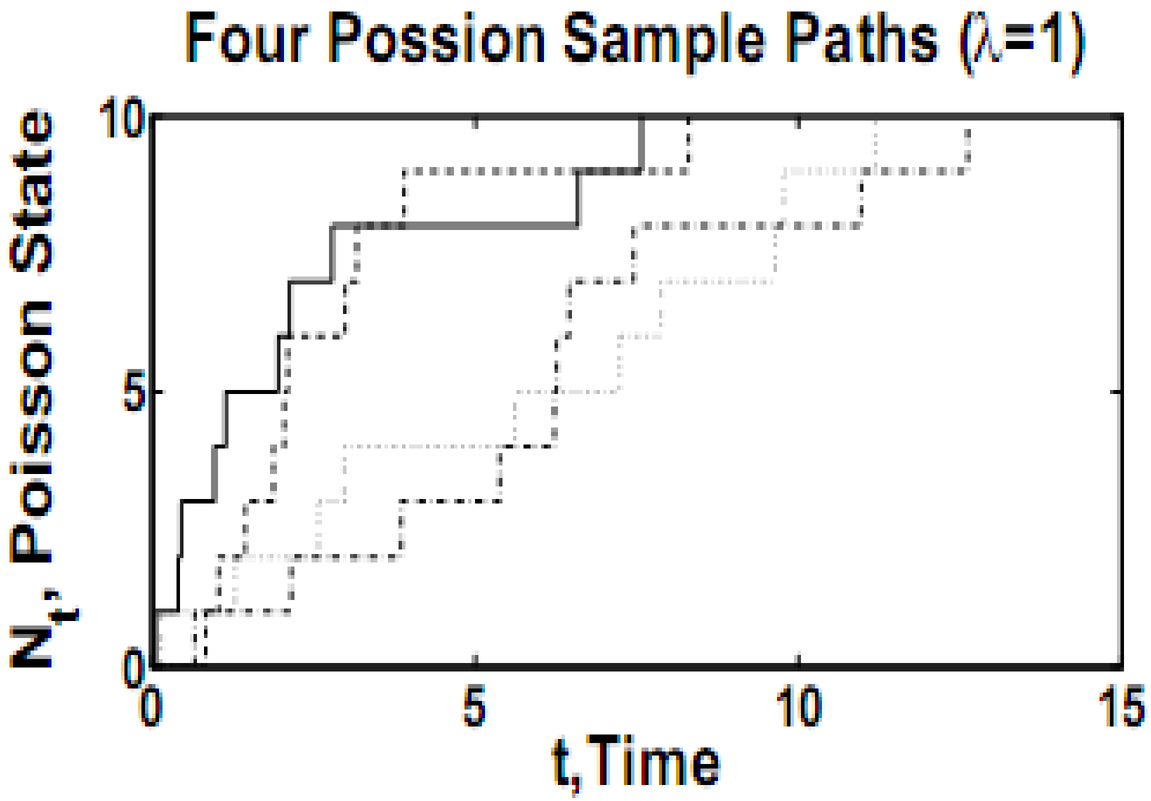



图 4.2 四条泊松过程的仿真样本轨道

- 根据随机过程增量满足的性质，随机过程可分为

- 正交增量过程
- 独立增量过程
- 平稳的独立增量过程

## 正交增量过程定义

设X={$X_t$,t∈T}是实值随机过程，若对任意的 $t_1<t_2 \le t_3 < t_4 \in T$都有

$$E[(X_{t_2} - X_{t_1})(X_{t_4} - X_{t_3})] = 0$$

则称X是一正交增量过程.

注：这里将 E[XY] 视为内积

## 独立增量过程

**设X={$X_t$,t∈T是一随机过程，如果对** 任意的$n \geq 3$

和任意的$t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T$, **有**

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \quad X_{t_3} - X_{t_2}, \quad \cdots, \quad X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

是相互独立的随机变量，则称X是独立增量过程.

平稳增量过程

设X={$X_t$,t∈T}是一随机过程，如果对 $\forall s<t\in T$,

有 $X_t - X_s$ 的分布仅依赖于$t-s$

则称X是平稳增量过程.

平稳的独立增量过程:

泊松过程、复合泊松过程、布朗运动均为平稳的独立增量过程.

- **根据随机过程数字特征存在与否，随机过程可分为**
- 二阶矩过程
- p-阶矩过程（$p \geq 3$）

## 二阶矩过程

若随机过程$X=\{X_t, t\in T\}$的二阶矩存在，则称X是二阶矩过程.

**注：二阶矩过程的均值函数与相关函数一定存在**

- **根据随机过程马氏性存在与否，随机过程可分为**
  - 马氏过程
  - 非马氏过程
- **根据随机过程的平稳性，随机过程可分为**
  - 平稳过程
  - 非平稳过程

随机过程可推广到

➢ 多维随机过程

定义 设$\{X_t, t\in T\}$和$\{Y_t, t\in T\}$是定义 在同一概率空间$(\Omega, F, P)$上的两个实随机过程. 则称$\{X_t, Y_t, t\in T\}$是二维随机过程.

➢ 复随机过程

定义 设$\{X_t, t\in T\}$和$\{Y_t, t\in T\}$是定义在同一概率空间$(\Omega, F, P)$上的两个实随机过程.令

$$Z_t = X_t + jY_t \quad t\in T$$

则称$\{Z_t, t\in T\}$是复随机过程.