«Математичсеский анализ и основы вычислений»

Лабораторная работа

Романюк Анастасия Руслановна
501696

Подуровская Софья Петровна
501895

J3110

Дата: 30 ноября 2025 г.

Easy

Задача 1

Докажите, что для логистического отображения

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

при любом $r \in (0, 1]$ и начальном условии x_0 выполнено

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, r \in (0, 1] \quad (0 < x_0 < 1) \implies 0 < x_n < 1.$$

Доказательство (методом математической индукции):

1. **База индукции** ($n = 0$). По условию задачи дано $0 < x_0 < 1$. Утверждение выполнено.

2. **Предположение индукции** Предположим, что для некоторого $k \geqslant 0$ уже доказано: $0 < x_k < 1$.

3. **Шаг индукции** ($k \to k + 1$). По формуле

   $$x_{k+1} = rx_k(1 - x_k).$$

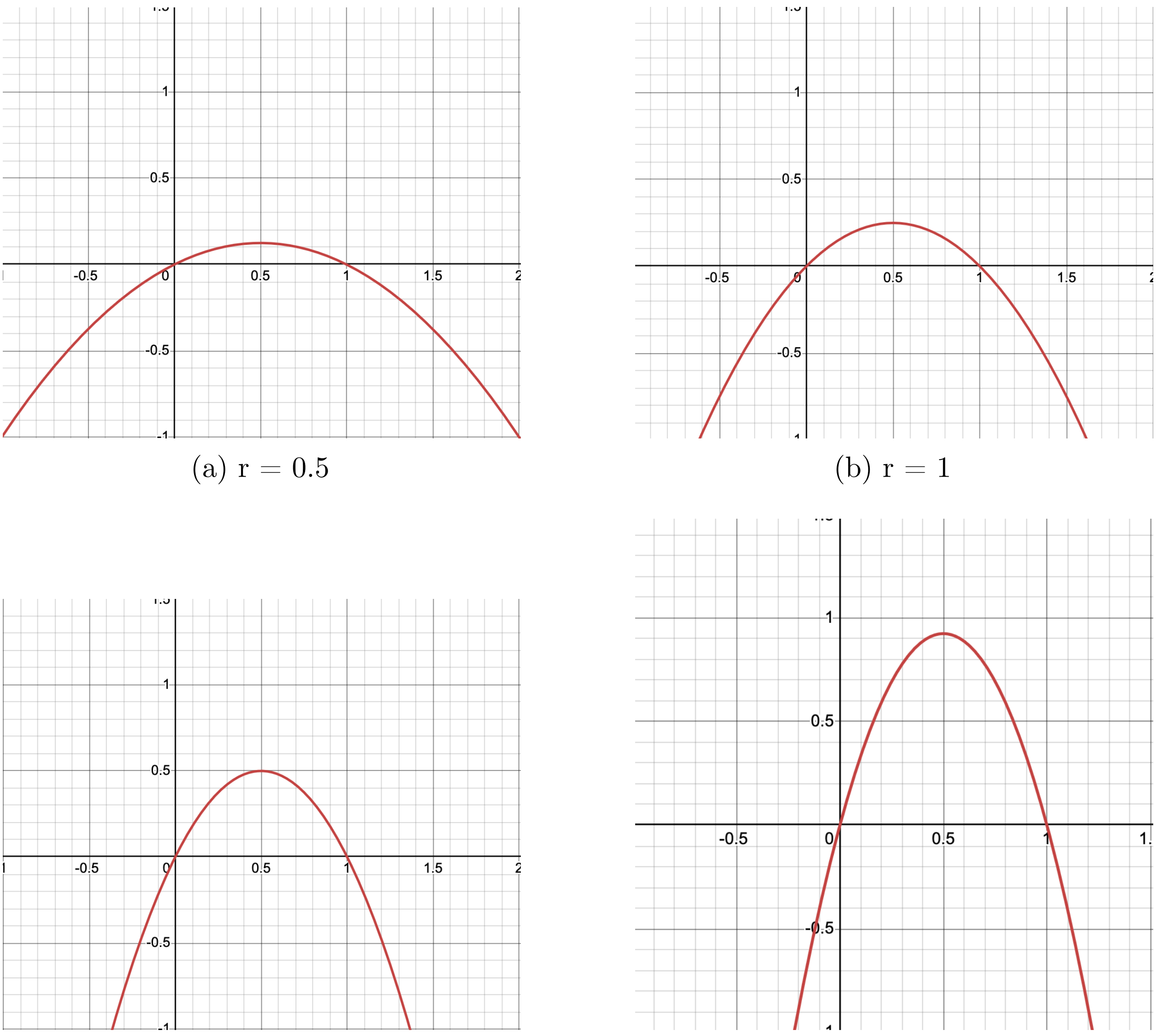
   Так как $r \in (0; 1]$ и по предположению индукции $0 < x_k < 1$
   $x_k > 0$ и $1 - x_k > 0 \implies x_k(1 - x_k) > 0 \implies$
   $\implies x_{k+1} = r \cdot x_k(1 - x_k) \geqslant 0$

   Докажем теперь верхнюю оценку. Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = x(1 - x)$ на отрезке $[0; 1]$. Её максимум достигается в точке $x = \frac{1}{2}$ и равен $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. Следовательно,

   $$0 < x_k(1-x_k) \leqslant \frac{1}{4} \quad \implies \quad 0 < rx_k(1-x_k) \leqslant r\cdot\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4} < 1 \implies x_{k+1} < 1.$$

   Итак, $0 < x_{k+1} < 1$.

По принципу математической индукции утверждение доказано для всех $n \in \mathbb{N}$. $\square$



(a) r = 0.5 (b) r = 1

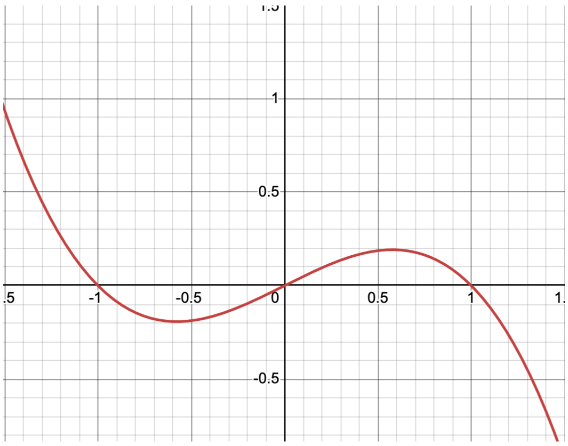
(c) r = 2 (d) r = 3.7

Рис. 1: График функции при различных r для логистического отображения

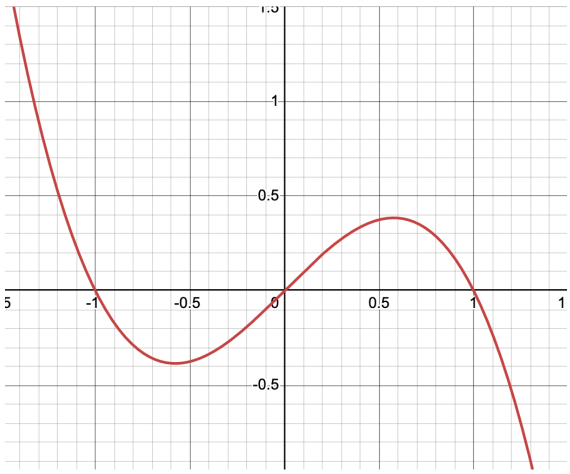
Вывод о влиянии r на поведение функции зависимости x_n от x_{n+1}:

Параметр r влияет на форму параболы, описывающей зависимость x_{n+1} от x_n. При увеличении r парабола становится более узкой, а ее вершина поднимается.

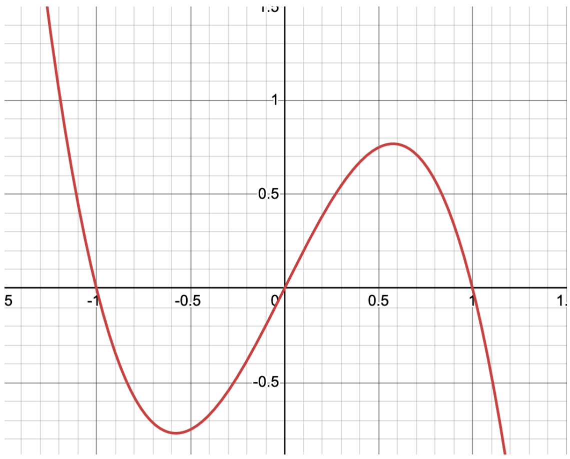
Задача 2



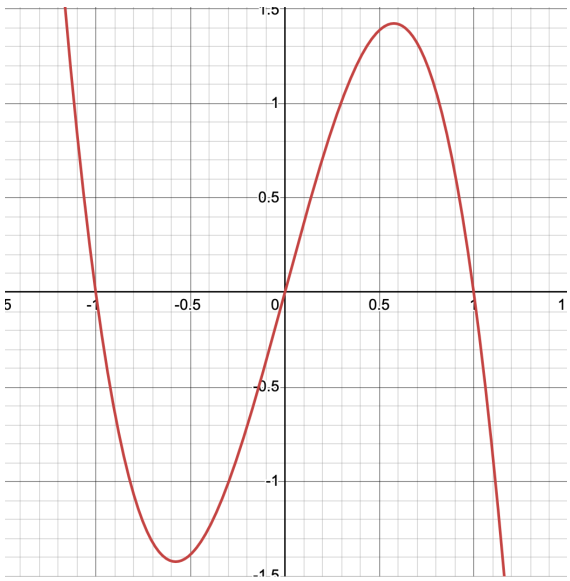
(a) r = 0.5



(b) r = 1



(c) r = 2



(d) r = 3.7

Рис. 2: График функции при различных r для отображения g(x)

Функция для N = 1:

$$g(x_{n+1}) = rx_n(1 - x_n^2) \quad \text{при} \quad r \in \left[0; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$$

Вывод о влиянии r на поведение функции зависимости xn+1 от xn для отображения g(x$_{n+1}$), .

С ростом r кривая сильно деформируется, «растягивается» по вертикали, как и в логистическом отображении. График $g(x_{n+1})$ изменяется более интенсивно, чем график логистического отображения. Скорее всего динамика изменения графиков отличается из-за того, что в логистическое отображение содержит x_n^2, а $g(x_{n+1})$ содержит уже x_n^3 .

Normal

Задача 1.1

Найти все неподвижные точки для отображения:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

Решение:

Неподвижная точка x^* удовлетворяет условию $x^* = f(x^{*)}$:

$$x^* = rx^*(1 - x^*)$$

Перенесем все члены в левую часть и вынесем x^* за скобки:

$$x^* - rx^*(1 - x^*) = 0$$

$$x^*[1 - r(1 - x^*)] = 0$$

1. **Случай $x^* = 0$:**

$$0 \cdot [1 - r(1 - 0)] = 0,$$

что верно. Следовательно,

$$\mathbf{x_1^* = 0}$$

является неподвижной точкой при любом значении r.

2. **Случай** $1 - r(1 - x^*) = 0$**:**

$$1 - r + rx^* = 0$$

$$rx^* = r - 1$$

При $r \neq 0$ получаем:

$$\mathbf{x_2^* = \frac{r - 1}{r} = 1 - \frac{1}{r}}$$

Ответ: Неподвижные точки логистического отображения: $x_1^* = 0$ и $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$ (при $r \neq 0$).

Задача 1.2 и 1.3

Найти, при каких r отображение имеет одну неподвижную точку, при каких – несколько. Определить максимальное количество неподвижных точек.

Решение:

Мы рассматриваем точки $x^* \in [0, 1]$ и параметр $r \in [0, 4]$.

Отображение имеет ровно одну неподвижную точку $\mathbf{x^* = 0}$, если x_2^* совпадает с x_1^* или $x_2^* \notin [0, 1]$.

1. **Точки совпадают:** $x_1^* = x_2^* \implies 0 = 1 - \frac{1}{r} \implies \mathbf{r = 1}$.

2. **Точка** $x_2^* \notin [0, 1]$**:**
   1). Случай $r = 0$**:**
   $\mathbf{r = 0}$ дает единственную точку $x^* = 0$.

   2). Случай $r \in (0, 1)$**:**
   $\frac{1}{r} > 1 \implies 1 - \frac{1}{r} < 0 \implies$ будет только одна неподвижная точка $x^* = 0$.

3). Случай $r \in (1,4]$:
$1 < r \leqslant 4 \implies \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{r} < 1 \implies -1 < \frac{-1}{r} \leqslant \frac{-1}{4} \implies 0 < 1 - \frac{1}{r} \leqslant \frac{3}{4}$
Тогда $1 - \frac{1}{r} \in [0;1]$, и будет 2 неподвижные точки: $x_1^* = 0$ и $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$.

Таким образом: при $r \in [0;1]$ - одна неподвижная точка $x_1^* = 0$, при $r \in (1;4]$ - две неподвижные точки $x_1^* = 0$ и $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$.

Максимальное количество неподвижных точек

Уравнение $x^* = rx^*(1 - x^*)$ может быть переписано как квадратное уравнение относительно x^*:

$$rx^{*2} - (r-1)x^* = 0$$

Квадратное уравнение имеет **не более двух** корней. Следовательно, максимальное количество неподвижных точек логистического отображения равно **2**.

Задача 2

Докажите, что при $x_0 \in (0;1)$ и $r \in (0;1]$ последовательность $\{x_n\}$, заданная логистическим отображением, монотонно убывает. Существует ли предел у данной последовательности при $r \in (0;1]$?

Доказательство монотонного убывания:

Последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает, если $x_{n+1} < x_n$, что при $x_n > 0$ эквивалентно $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$.

Рассмотрим отношение:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{rx_n(1 - x_n)}{x_n} = r(1 - x_n)$$

1. По условию, $\mathbf{r} \in (\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.
2. По результату из **Easy** уже известно, что
$\forall n \geqslant 0 \quad x_n \in (0;1)$. Следовательно,

$$0 < x_n < 1 \quad \implies \quad 0 < 1 - x_n < 1$$

Тогда произведение 1 :

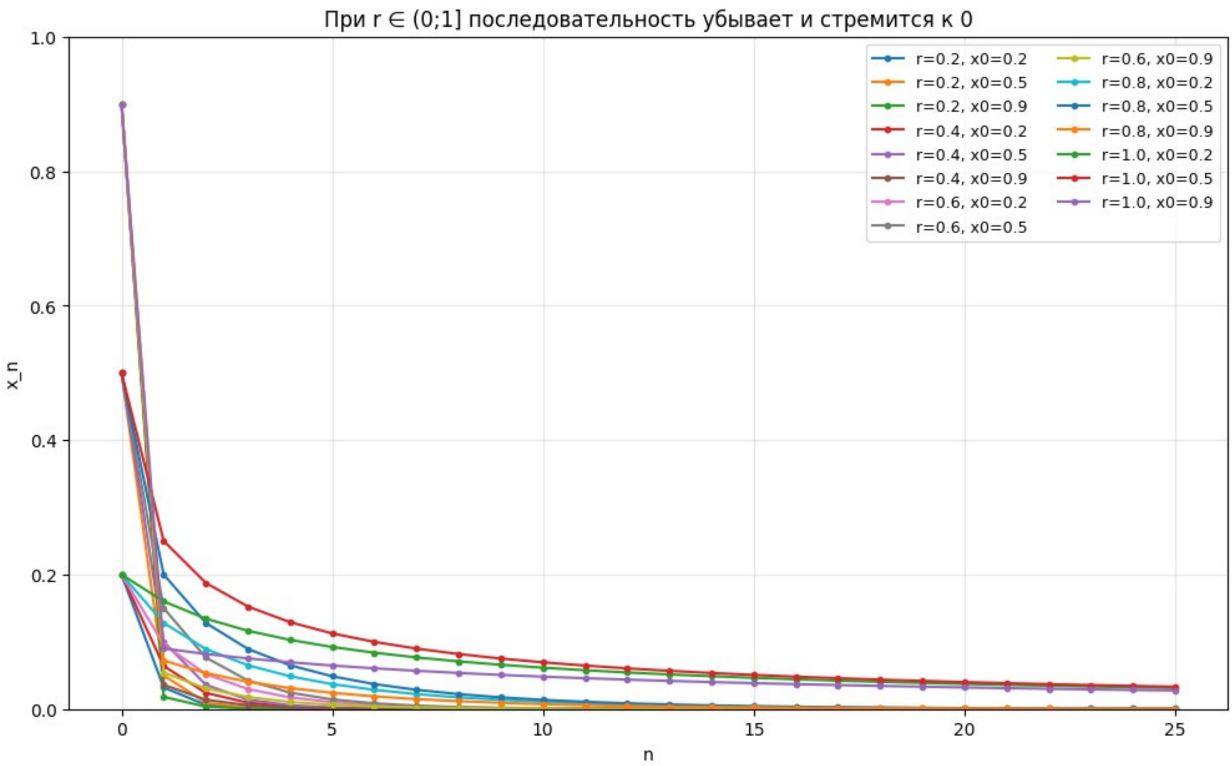
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = r(1 - x_n) < 1 \cdot 1 = 1$$

Поскольку $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, получаем $x_{n+1} < x_n$. Последовательность $\{x_n\}$ **монотонно убывает**.

Существование и нахождение предела:

Последовательность $\{x_n\}$ **монотонно убывает** и **ограничена снизу** нулем ($x_n > 0$). По теореме Вейерштрасса о монотонной сходимости, предел $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ **существует**.

$\square$



Задача 3

Дано: $r \in (2;3)$, $x_{2n} > x^*$, $x_{2n+1} < x^*$, где $x^* = \frac{r-1}{r}$.

Рассмотрим подпоследовательность $\{x_{2n}\}$, $x_{2n} > x^* = \frac{r-1}{r}$:

$$\begin{aligned} x_{2n+2} &= rx_{2n+1}(1 - x_{2n+1}) = \\ &= r \cdot rx_{2n}(1 - x_{2n}) \cdot (1 - rx_{2n}(1 - x_{2n})) = \\ &= r^2 x_{2n}(1 - x_{2n})\left(1 - rx_{2n}(1 - x_{2n})\right) \end{aligned}$$

Вычислим разность:

$$\begin{aligned} x_{2n+2} - x_{2n} &= x_{2n}\left(r^2(1 - x_{2n})\left(1 - rx_{2n}(1 - x_{2n})\right) - 1\right) = \\ &= x_{2n}\left(r^2 - x_{2n}r^3 + 2x_{2n}^2 r^3 - x_{2n}r^2 - x_{2n}^3 r^3 - 1\right) = \\ &= x_{2n}\left(rx_{2n} - r + 1\right)\left(-r^2 x_{2n}^2 + r^2 x_{2n} + rx_{2n} - r - 1\right) = \\ &= x_{2n}\left(rx_{2n} - r + 1\right)\left(-r^2 x_{2n}^2 + (r^2 + r)x_{2n} - (r + 1)\right) \end{aligned}$$

Рассмотрим квадратичное выражение:

$$(-r^2 x_{2n}^2 + (r^2 + r)x_{2n} - (r + 1))$$

Его дискриминант:

$$\begin{aligned} D = (r^2 + r)^2 - 4r^2(r + 1) = r^4 + 2r^3 + r^2 - 4r^3 - 4r^2 = \\ = r^4 - 2r^3 - 3r^2 = r^2(r^2 - 2r - 3) = r^2(r + 1)(r - 3) \end{aligned}$$

При $r \in (2;3)$:

$$D = r^2(r + 1)(r - 3) < 0$$

Так как коэффициент при x_{2n}^2 равен $-r^2 < 0$ (ветви параболы направлены вниз) и $D < 0$, то график квадратичной функции не пересекается с осью абсцисс:

$$(-r^2 x_{2n}^2 + (r^2 + r)x_{2n} - (r + 1)) < 0$$

Рассмотрим выражение $(rx_{2n} - r + 1)$:

$$rx_{2n} - r + 1 > r \cdot \frac{r-1}{r} - r + 1 = \frac{r^2 - r - r^2 + r}{r} = 0$$

Следовательно,
$$(rx_{2n} - r + 1) > 0$$

Имеем:

- $x_{2n} > 0$
- $(rx_{2n} - r + 1) > 0$
- $(-r^2x_{2n}^2 + (r^2 + r)x_{2n} - (r + 1)) < 0$

Таким образом:

$$x_{2n+2} - x_{2n} = x_{2n}(rx_{2n} - r + 1)(-r^2x_{2n}^2 + (r^2 + r)x_{2n} - (r + 1)) < 0$$

Следовательно, подпоследовательность $\{x_{2n}\}$ является монотонно убывающей.

Рассмотрим подпоследовательность $\{x_{2n+1}\}$, $x_{2n+1} < x^* = \frac{r-1}{r}$:

$$\begin{aligned} x_{2n+3} &= rx_{2n+2}(1 - x_{2n+2}) = \\ &= r \cdot rx_{2n+1}(1 - x_{2n+1}) \cdot (1 - rx_{2n+1}(1 - x_{2n+1})) = \\ &= r^2x_{2n+1}(1 - x_{2n+1})\,(1 - rx_{2n+1}(1 - x_{2n+1})) \end{aligned}$$

Вычислим разность:

$$\begin{aligned} x_{2n+3} - x_{2n+1} &= x_{2n+1}\left[r^2(1 - x_{2n+1})\,(1 - rx_{2n+1}(1 - x_{2n+1})) - 1\right] = \\ &= x_{2n+1}\left(r^2 - x_{2n+1}r^3 + 2x_{2n+1}^2r^3 - x_{2n+1}r^2 - x_{2n+1}^3r^3 - 1\right) = \\ &= x_{2n+1}\,(rx_{2n+1} - r + 1)\left(-r^2x_{2n+1}^2 + r^2x_{2n+1} + rx_{2n+1} - r - 1\right) = \\ &= x_{2n+1}\,(rx_{2n+1} - r + 1)\left(-r^2x_{2n+1}^2 + (r^2 + r)x_{2n+1} - (r + 1)\right) \end{aligned}$$

Рассмотрим квадратичное выражение (то же самое, что и для четных):
$$(-r^2x_{2n+1}^2 + (r^2 + r)x_{2n+1} - (r + 1))$$

При $r \in (2; 3)$, как доказано выше:

$$D = r^2(r + 1)(r - 3) < 0$$

Так как коэффициент при x_{2n+1}^2 равен $-r^2 < 0$ (ветви параболы направлены вниз) и $D < 0$, то график квадратичной функции не пересекается с осью абсцисс:

$$(-r^2 x_{2n+1}^2 + (r^2 + r)x_{2n+1} - (r + 1)) < 0$$

Рассмотрим выражение $(rx_{2n+1} - r + 1)$. Поскольку $x_{2n+1} < x^* = \frac{r-1}{r}$, имеем:

$$rx_{2n+1} - r + 1 < r \cdot \frac{r-1}{r} - r + 1 = \frac{r^2 - r - r^2 + r}{r} = 0$$

Следовательно,

$$(rx_{2n+1} - r + 1) < 0$$

Имеем:

- $x_{2n+1} > 0$
- $(rx_{2n+1} - r + 1) < 0$
- $(-r^2 x_{2n+1}^2 + (r^2 + r)x_{2n+1} - (r + 1)) < 0$

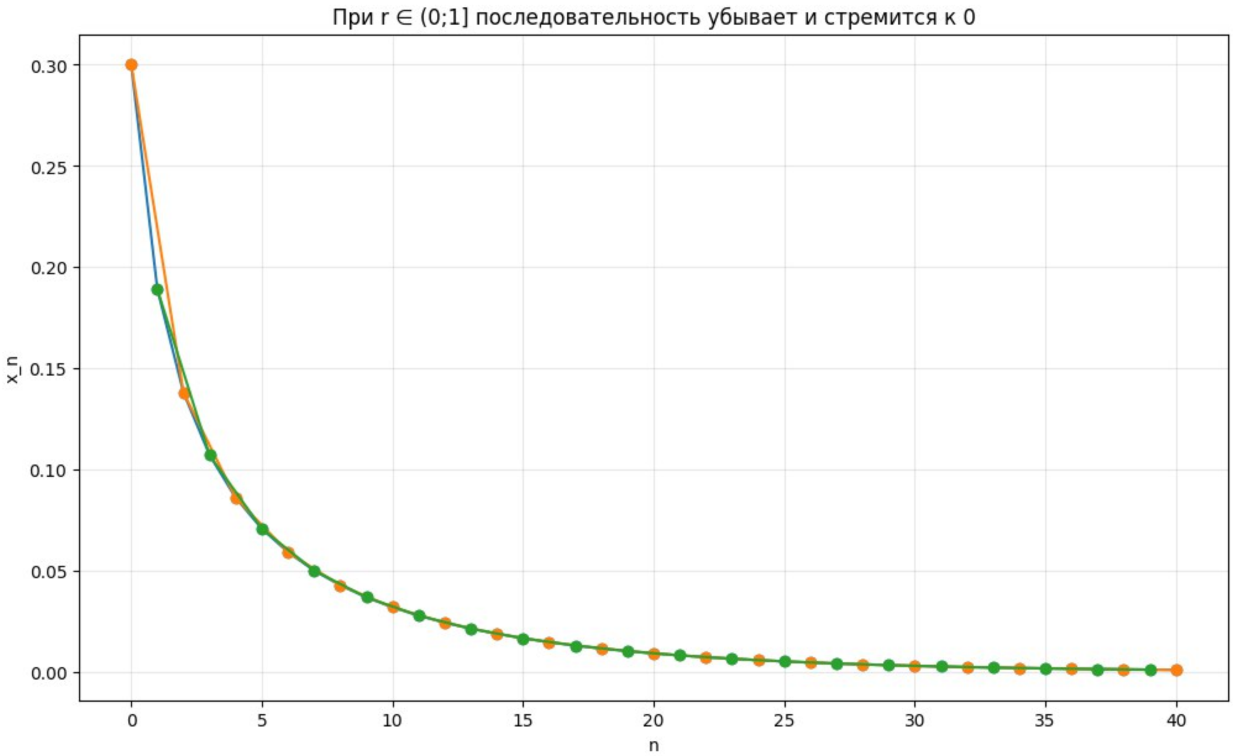
Таким образом:

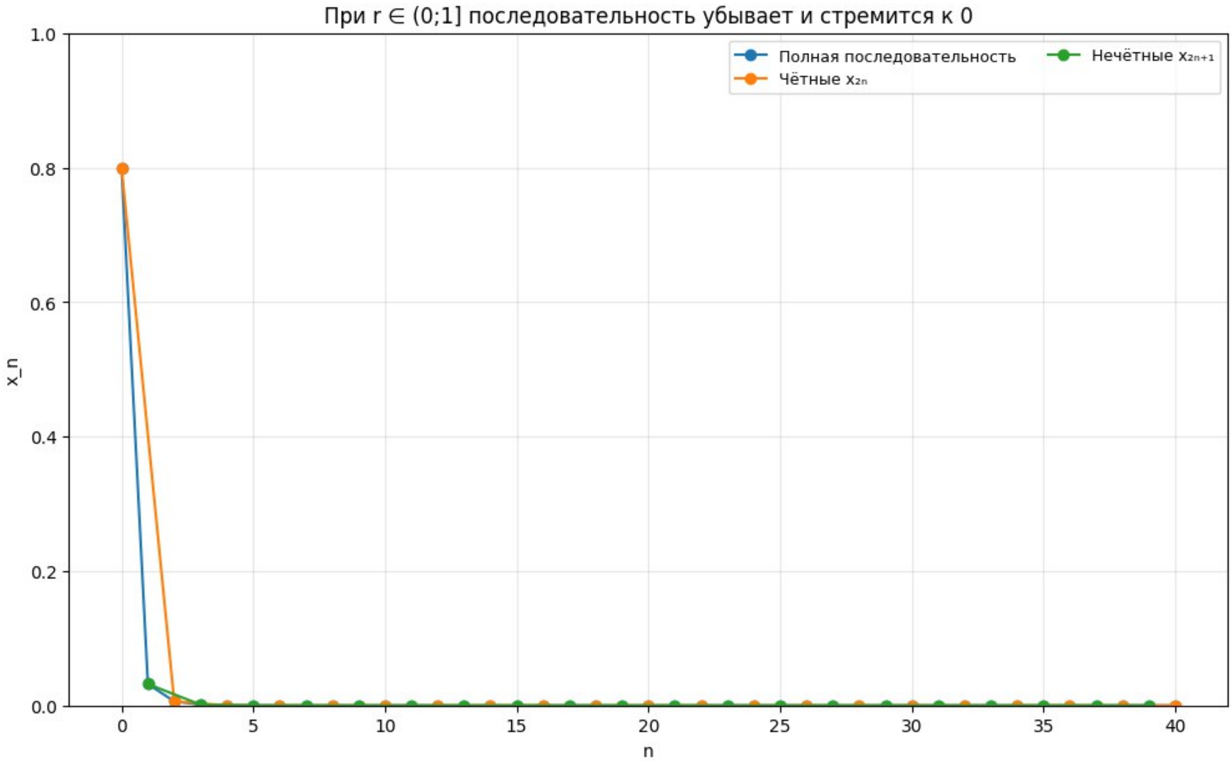
Произведение: положительное $\times$ отрицательное $\times$ отрицательное $=$ положительное.

Следовательно:

$$x_{2n+3} - x_{2n+1} > 0$$

Последовательность $\{x_{2n+1}\}$ является монотонно **возрастающей**. $\square$





Задача 4

Исследуемое отображение:

$$g(x_{n+1}) = rx_n(1 - x_n^2), \quad r \in \left[0; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$$

1. Аналитическое нахождение неподвижной точки

Неподвижная точка x^* удовлетворяет условию:

$$x^* = g(x^*) = rx^*(1 - (x^*)^2)$$

Решение уравнения

1. Точка $x^* = 0$ является неподвижной для всех r/
2. При $x^* \neq 0$:
$$1 = r(1 - (x^*)^2)$$
$$(x^*)^2 = 1 - \frac{1}{r}$$
$$x^* = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{r}}$$
Так как существует ограничение $x_n \in [0, 1]$, берем только неотрицательный корень:
$$x^* = \sqrt{1 - \frac{1}{r}}$$
Ограничение для r (так как выражение под корнем):
$$1 - \frac{1}{r} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad r \geq 1$$

Вывод

- При $0 \leq r < 1$: одна неподвижная точка $x^* = 0$
- При $r \geq 1$: две неподвижные точки: $x^* = 0$ и $x^* = \sqrt{1 - \frac{1}{r}}$

2. Диапазон параметра r для монотонной сходимости к нулю

Так как $0 < x_n < 1$, последовательность $\{x_n\}$ должна быть монотонно убывающей, чтобы она сходилась к нулю: $x_{n+1} - x_n < 0$
$x_{n+1} - x_n = rx_n(1 - x_n^2) - x_n = x_n(r - rx_n^2 - 1) < 0$ Так как $0 < x_n < 1$, $(r - rx_n^2 - 1) < 0$

$$r - rx_n^2 - 1 < 0$$
$$r < \frac{1}{1 - x_n^2}$$

$$\frac{1}{1-x_n^2} > \frac{1}{1} = 1$$

$$r \le 1 < \frac{1}{1-x_n^2}$$

При $r \le 1$ последовательность монотонно убывает.

Покажем, что при этом она сходится к нулю.

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} x_n = l$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} (rx_n(1-x_n^2))$$

$$l = rl(1-l^2)$$

$$l(r - rl^2 - 1) = 0$$

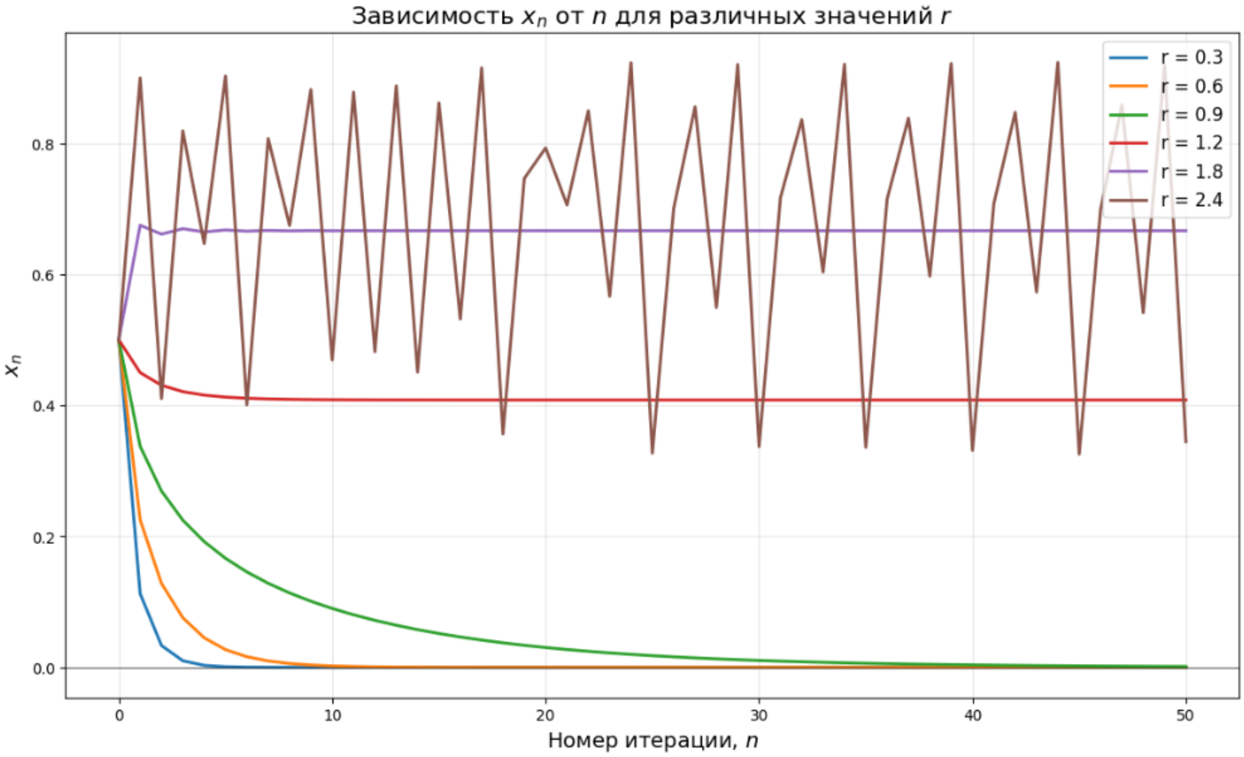
$$\left[\begin{aligned} &l = 0 \\ &r - rl^2 - 1 = 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &l = 0 \\ &rl^2 = r - 1 \end{aligned}\right.$$

При $r \le 1$: $r - 1 < 0$

Тогда должно быть $rl^2 < 0$, но $rl^2 \ge 0$ — противоречие.

Значит, $l = \lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ при $r \in [0;1]$



3. Исследование графика

Анализ графиков

1. При $r = 0.3, 0.6, 0.9$ $(r < 1)$: последовательность монотонно убывает к нулю. Скорость сходимости выше при меньших r.

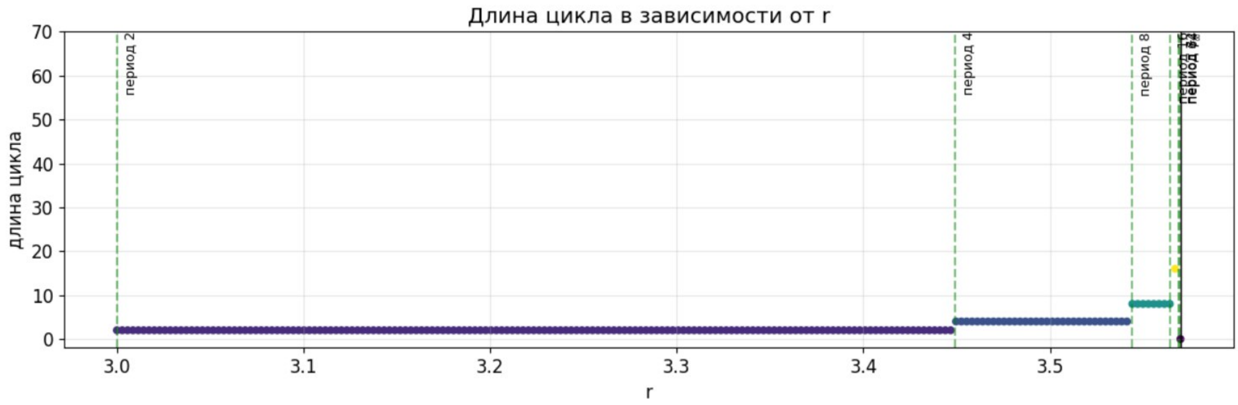
2. При $r = 1.2$ $(r > 1)$: последовательность сходится к ненулевой неподвижной точке $x^* \approx 0.408$.

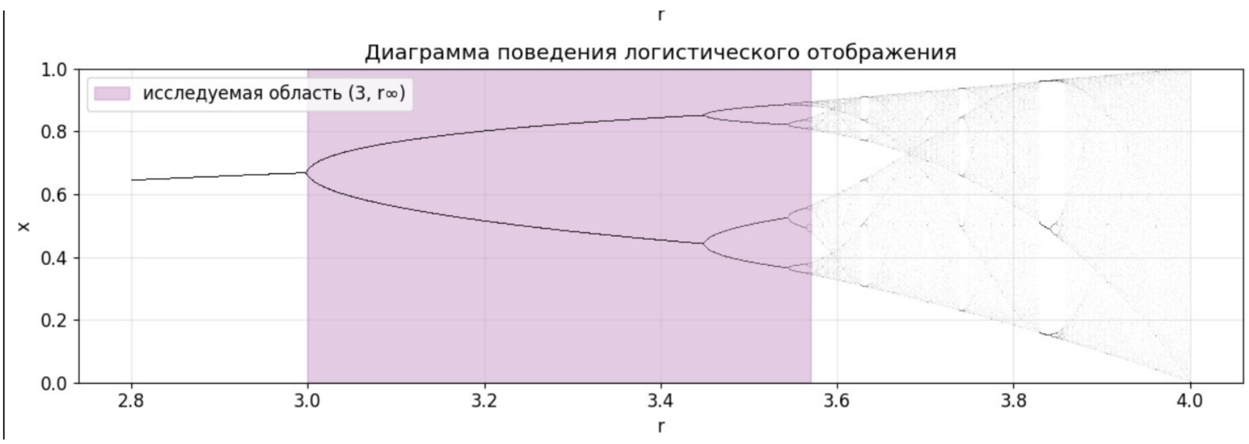
3. При $r = 1.8$ и $r = 2.4$ (число, близкое к $3\sqrt{3}/2 \approx 2.598$) :

   - При $r = 1.8$: сходимость к $x^* \approx 0.745$
   - При $r = 2.4$: установление цикла длины 2

Hard

Задача 1





Исследование логистического отображения

Положим $r_\infty \approx 3.5699456$. Как изменяется длина цикла при $r \in (3; r_\infty)$?

При увеличении параметра r в системе происходят изменения — удваивается период цикла:

- при $r = 3$ появляется цикл длины 2,
- при дальнейшем увеличении r период удваивается: $2 \to 4 \to 8 \ldots,$
- при $r \to r_\infty$ длина цикла стремится к бесконечности.

На графике видно:

$$\begin{aligned}
r &\approx 3.000071: && \text{период } 1 \to 2 \\
r &\approx 3.448931: && \text{период } 2 \to 4 \\
r &\approx 3.543919: && \text{период } 4 \to 8 \\
r &\approx 3.564371: && \text{период } 8 \to 16 \\
r &\approx 3.568789: && \text{период } 16 \to 32 \\
r &\approx 3.569715: && \text{период } 32 \to 64
\end{aligned}$$

Эти значения получены с помощью кода, который ищет значения r, при которых меняется период. При $r \to r_\infty$ период стремится к бесконечности.

Для $r \in (3; r_\infty)$ экспериментально установите, какие ограничения действуют на m?

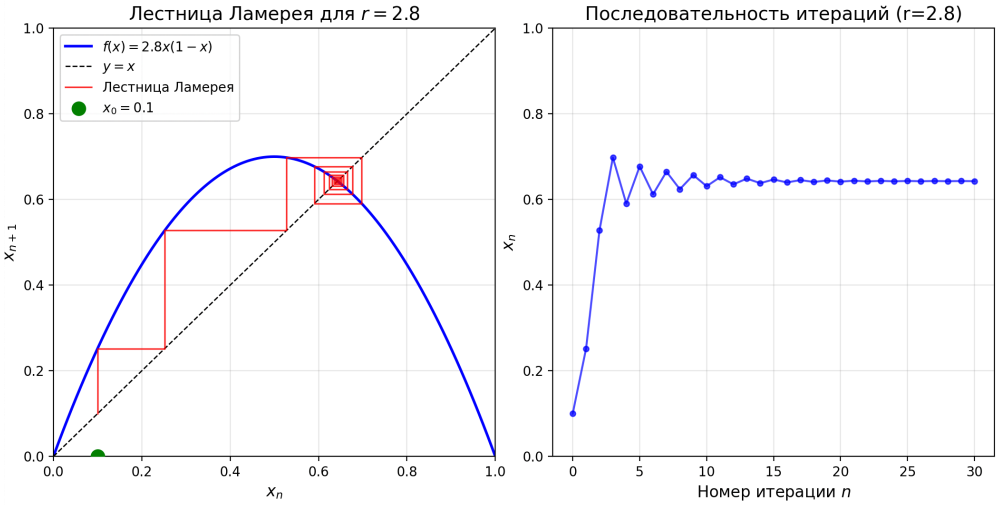
На графике видно, что для $r \in (3; r_\infty)$ m может принимать только значения, равные степеням двойки. Также можно заметить, что сокращается расстояние между моментами изменений длины цикла. Длина цикла стремится к бесконечности и при $r > r_\infty$ наблюдается хаотическое поведение.

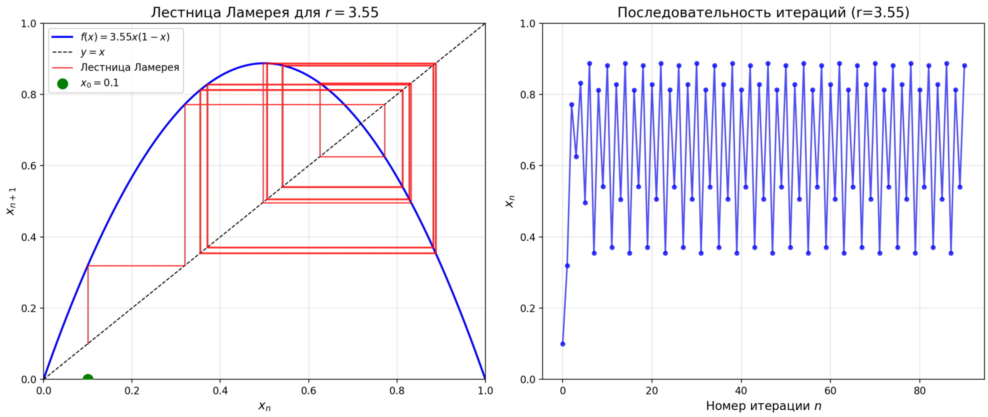
Задача 2

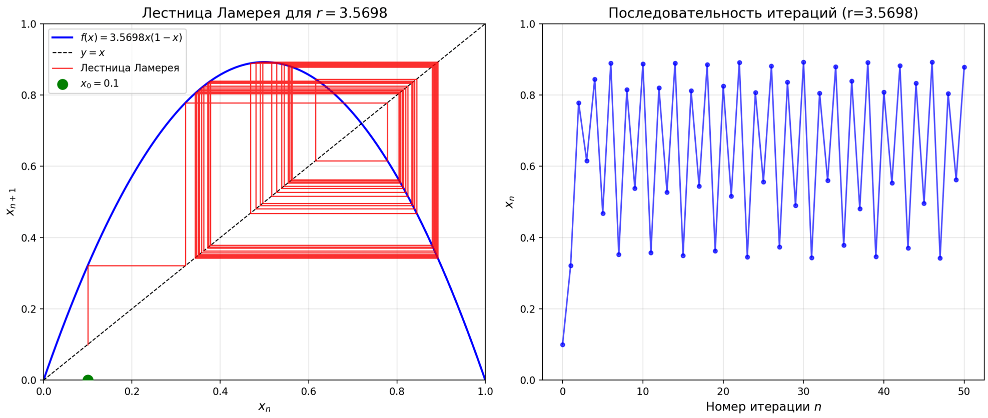
2.1 Функция, которая строит лестницу Ламерея по заданному r реализована в Google Colab

2.2 Мы построили 7 графиков, на которых изображена лестница Ламерея с различными циклами:

При r=2.8 и цикле длины 1: траектория после нескольких итераций стремится к 1 точке.
При r=3 и цикле длины 2: после нескольких итераций траектория начинает циклически чередовать две точки(описывает прямоугольник)
При r=3.45 и цикле длины 4: траектория циклически проходит через 4 точки.
При r=3.55 и цикле длины 8: траектория циклически проходит через 8 точек.
При r>3.55 траектория проходит циклически, количество точек равно степени 2, но они уже слабо различимы. Начинается хаос.


Лестница Ламерея для $r = 2.8$
$f(x) = 2.8x(1-x)$
$y = x$
Лестница Ламерея
$x_0 = 0.1$
x_{n+1}
x_n
Последовательность итераций (r=2.8)
x_n
Номер итерации n

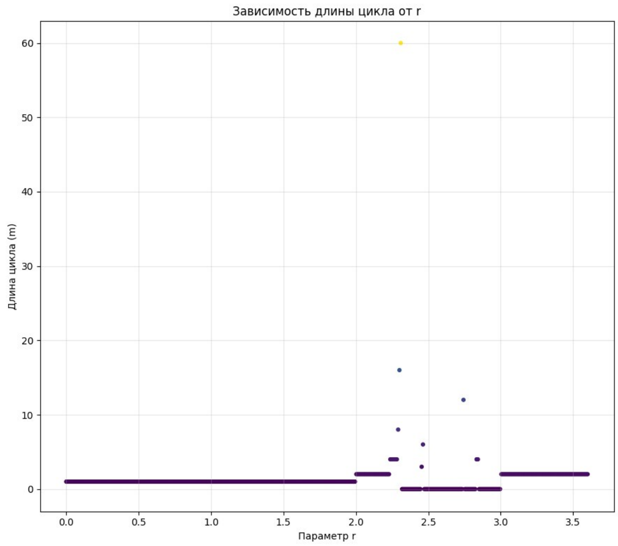

Лестница Ламерея для $r = 3.55$
$f(x) = 3.55x(1-x)$
$y = x$
Лестница Ламерея
$x_0 = 0.1$
x_{n+1}
x_n
Последовательность итераций (r=3.55)
x_n
Номер итерации n

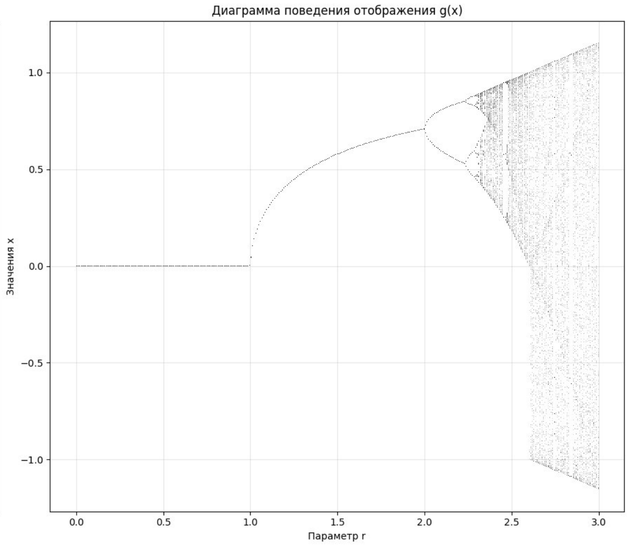

Лестница Ламерея для $r = 3.5698$
$f(x) = 3.5698x(1-x)$
$y = x$
Лестница Ламерея
$x_0 = 0.1$
x_{n+1}
x_n
Последовательность итераций (r=3.5698)
x_n
Номер итерации n

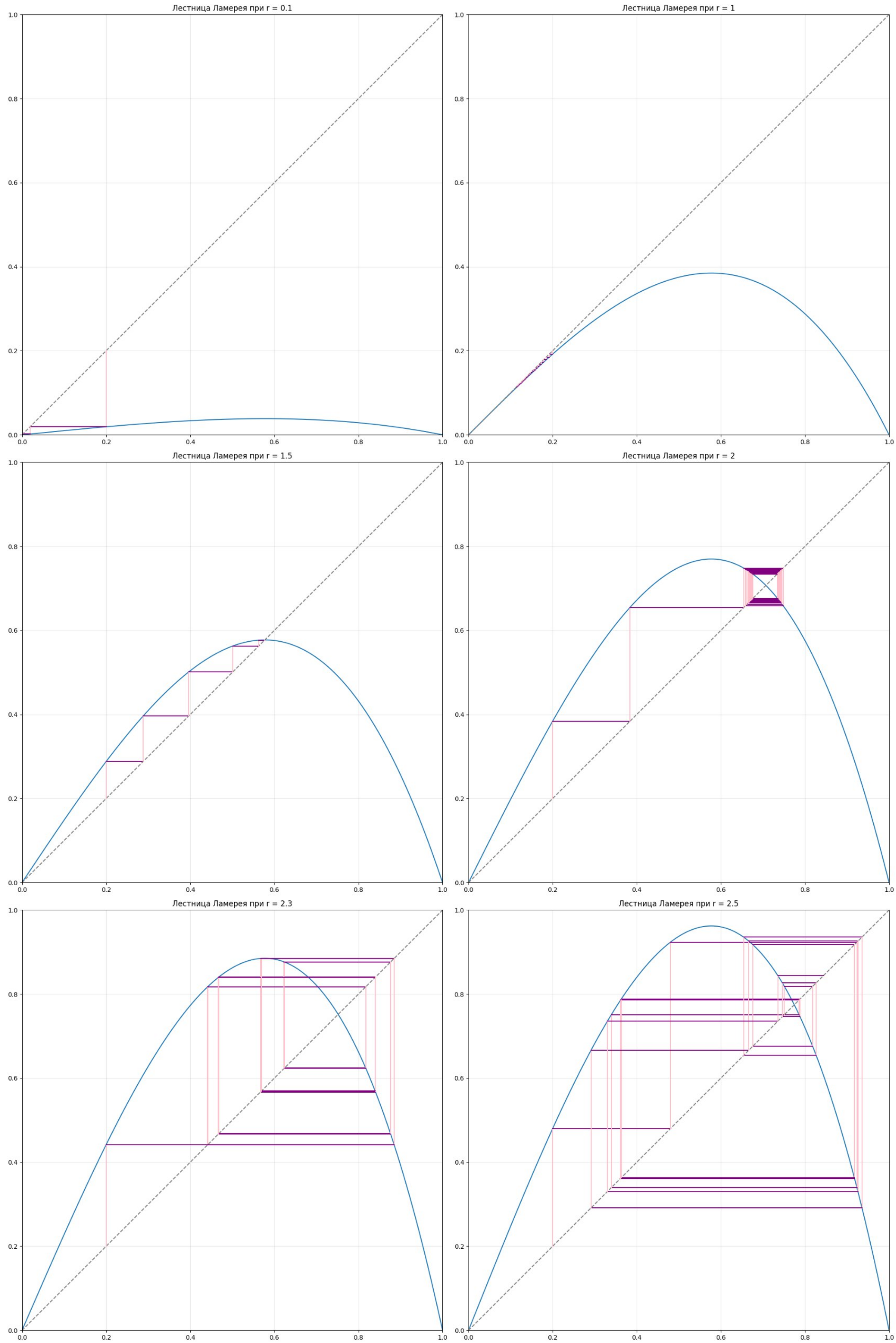
Задача 3

Сравнение логистического отображения и $g(x_n)$:

- У обоих происходит удвоение периода (1→2→4→8...)
- Оба переходят в хаос при увеличении r
- g(x) хаос наступает раньше ($r \approx 2.3$ для $g(x_n)$ и $r \approx 3.57$ для логистического)
- У $g(x_n)$ переход от периода 1 к 2 происходит при $r \approx 2$, у логистического отображения - при r = 3






Лестница Ламерея при r = 0.1
Лестница Ламерея при r = 1
Лестница Ламерея при r = 1.5
Лестница Ламерея при r = 2
Лестница Ламерея при r = 2.3
Лестница Ламерея при r = 2.5