Конспект по алгебре

Содержание

1 Вопрос 1

Группа, подгруппа, гомоморфизм групп. Ядро и образ гомоморфизма.

Определение. $< G, *, e >$ - группа, $* : G \times G \to G, e \in G$

1. $\forall a, b, c \in G \ (ab)c = a(bc)$
2. $\forall g \in G \ eg = ge = g$
3. $\forall g \in G \ \exists g^{-1} \in G \ gg^{-1} = g^{-1}g = e$

Если $\forall a, b \in G \ ab = ba$ то группу называют *абелевой*

Теорема. $\exists ! e \in G \ eg = ge = g$

Определение. G - группа, тогда $H \subset G$ называют *подгруппой*, если

1. $e \in H$
2. $\forall h_1, h_2 \in H \ h_1 h_2 \in H \mid HH \subset H$
3. $\forall h \in H \ h^{-1} \in H \mid H^{-1} \subset H$

Определение. G, W - группы.
$f : G \to W$ называют *гомоморфизмом (групп)*, если $\forall g_1, g_2 \in G \ f(g_1 g_2) = f(g_1) * f(g_2)$

Теорема. $f : G \to W$ *- гомоморфизм*
$f(e_G) = e_W$

Определение. $f : G \to W$ - гомоморфизм, тогда
$ker f = g \in G | f(g) = e_W$ - называют *ядром гомоморфизма* f

Теорема. $ker f$ *- подгруппа* G

Определение. $f : G \to W$ - гомоморфизм, тогда
$Im f = \{w \in W | \exists g \in G \ f(g) = w\}$ - называют *образом гомоморфизма* f

2 Вопрос 2

Мономорфизмы, эпиморфизмы и изоморфизмы. Понятие нормального делителя (нормальной подгруппы). Факторгруппа.

Определение. Сюръективный гомоморфизм - эпиморфизм.
Инъективный гомоморфизм - мономорфизм.
Биективный гомоморфизм - изоморфизм.
Изоморфизм $f : G \to G$ - автоморфизм.

Пусть $H \subset G$. Введем отношение эквивалентности $\sim$ соответствующее подгруппе. $g_1, g_2 \in G$. $g_1 \sim g_2$, если $g_1 g_2^{-1} \in H$

Определение. $\widetilde{g} = \{k \in G | k \sim g\}$ - класс эквивалентности элемента g

Определение. G/H - факторгруппа, левые смежные классы. $\widetilde{g} = Hg$

Заметим, что в случае некоммутативной группы можно ввести правые смежные классы gH.

Теорема. *Если $gH = Hg$, то G/H - группа.*

Доказательство. Введем умножение: $\forall g_1 H, g_2 H \in G/H$ $(g_1 H)(g_2 H) \overset{def}{=} g_1 g_2 H$.
Проверим корректность умножения: пусть $g_1' \sim g_1, g_2' \sim g_2$. Тогда $g_1' = g_1 h_1, g_2' = g_2 h_2$, а значит $g_1' g_2' = g_1 h_1 g_2 h_2 = g_1 g_2 h_1 h_2$. То есть $g_1' g_2' H = g_1 g_2 H$.
Теперь проверим свойства умножения:

1. $eHgH = gH$
2. $g_1 H g_2 H g_3 H = g_1 g_2 g_3 H$
3. $gHg^{-1}H = eH$

□

Определение. $H \subset G$ назовем нормальной подгруппой, если $\forall g \in G$ $gH = Hg$ или $gHg^{-1} = H$ или $ghg^{-1} \in H$
Обозначение: $H \lhd G$

Теорема. *G - абелева группа, тогда $\forall H \subset G$ - нормальная.*

Теорема. *Ядра гомоморфизмов и только они суть нормальные подгруппы.*

Доказательство. Сперва докажем, что если $f : G \to W$ - гомоморфизм, то $ker f \triangleleft G$. $g \in G, h \in ker f$, тогда $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)f(g)^{-1} = e_W$.
Теперь покажем, что $\forall H \triangleleft G$ $\exists f$ - гомоморфизм и $ker f = H$. Введем $\pi_H : G \to G/H$ - канонической гомоморфизм. Пусть $g \in G, h \in H$ тогда $\pi_H(g) = gH, \pi_H(h) = hH = H$. Следовательно $ker \pi_H = H$. □

3 Вопрос 3

Характеризация мономорфизмов в терминах ядра. Основная теорема о гомоморфизме.

Теорема. ϕ - *мономорфизм* $\Leftrightarrow ker\phi = \{e\}$

Доказательство. [$\Rightarrow$] Пусть $\exists g \neq e$ $\phi(g) = e$. Но $\phi(e) = e$. Таким образом $g \neq e, \phi(g) = \phi(e)$. Противоречие инъективности.
[$\Leftarrow$] Пусть $\exists g_1 \neq g_2, \phi(g_1) = \phi(g_2)$. Тогда $\phi(g_1)\phi(g_2)^{-1} = e$, а это значит, что $g_1 g_2^{-1} \neq e$ и $g_1 g_2^{-1} \in kerf$. Противоречие тривиальности ядра. □

Теорема. $G/kerf \overset{\sim}{=} Imf$

Доказательство. Пусть $\phi : X \leftarrow Y$. Введем отношение эквивалентности: $x_1 \sim x_2$, если $\phi(x_1) = \phi(x_2)$. Рассмотрим $\tau : X/\sim \rightarrow Im\,\phi$, $\tau(\widetilde{x}) = \phi(x)$.
τ - инъекция. Действительно, если $\widetilde{x}_1 \neq \widetilde{x}_2$, то x_1 не эквивалентно x_2 и значит $\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$.
τ - сюръекция. Действительно $\forall y \in Im\,\phi$ $\exists x$ $\phi(x) = y$ и $\widetilde{x} : \tau(\widetilde{x}) = y$. Таким образом изоморфизм установлен.
Теперь пусть $f : G \rightarrow W$ - гомоморфизм. $g_1 \sim g_2$, если $f(g_1) = f(g_2)$, или $f(g_1)f(g_2)^{-1} = e, f(g_1 g_2^{-1}) = e$ это означает, что $g_1 g_2^{-1} \in kerf$. То есть отношение $\sim$ совпадает с отношением эквивалентности порождаемым $kerf \triangleleft G$. Можно записать $G/kerf \overset{\sim}{=} Imf$. □