

Конспект по алгебре

Содержание

1	Вопрос 1	3
2	Вопрос 2	4

1 Вопрос 1

Группа, подгруппа, гомоморфизм групп. Ядро и образ гомоморфизма.

Определение. $\langle G, *, e \rangle$ - группа, $*$: $G \times G \rightarrow G, e \in G$

1. $\forall a, b, c \in G \ (ab)c = a(bc)$
2. $\forall g \in G \ eg = ge = g$
3. $\forall g \in G \ \exists g^{-1} \in G \ gg^{-1} = g^{-1}g = e$

Если $\forall a, b \in G \ ab = ba$ то группу называют *абелевой*

Теорема. $\exists! e \in G \ eg = ge = g$

Определение. G - группа, тогда $H \subset G$ называют *подгруппой*, если

1. $e \in H$
2. $\forall h_1, h_2 \in H \ h_1 h_2 \in H \mid HH \subset H$
3. $\forall h \in H \ h^{-1} \in H \mid H^{-1} \subset H$

Определение. G, W - группы.

$f : G \rightarrow W$ называют *гомоморфизмом (групп)*, если $\forall g_1, g_2 \in G \ f(g_1 g_2) = f(g_1) * f(g_2)$

Теорема. $f : G \rightarrow W$ - гомоморфизм
 $f(e_G) = e_W$

Определение. $f : G \rightarrow W$ - гомоморфизм, тогда
 $\ker f = \{g \in G \mid f(g) = e_W\}$ - называют *ядром гомоморфизма f*

Теорема. $\ker f$ - подгруппа G

Определение. $f : G \rightarrow W$ - гомоморфизм, тогда
 $\operatorname{Im} f = \{w \in W \mid \exists g \in G \ f(g) = w\}$ - называют *образом гомоморфизма f*

2 Вопрос 2

Мономорфизмы, эпиморфизмы и изоморфизмы. Понятие нормального делителя (нормальной подгруппы). Факторгруппа.

Определение. Сюръективный гомоморфизм - эпиморфизм.

Инъективный гомоморфизм - мономорфизм.

Биективный гомоморфизм - изоморфизм.

Изоморфизм $f : G \rightarrow G$ - автоморфизм.

Пусть $H \subset G$. Введем отношение эквивалентности \sim соответствующее подгруппе. $g_1, g_2 \in G$. $g_1 \sim g_2$, если $g_1 g_2^{-1} \in H$

Определение. $\tilde{g} = \{k \in G | k \sim g\}$ - класс эквивалентности элемента g

Определение. G/H - факторгруппа, левые смежные классы. $\tilde{g} = Hg$

Заметим, что в случае некоммутативной группы можно ввести правые смежные классы gH .

Теорема. Если $gH = Hg$, то G/H - группа.

Доказательство. Введем умножение: $\forall g_1 H, g_2 H \in G/H$ $(g_1 H)(g_2 H) = g_1 g_2 H$. Проверим корректность умножения: пусть $g'_1 \sim g_1, g'_2 \sim g_2$. Тогда $g'_1 = g_1 h_1, g'_2 = g_2 h_2$, а значит $g'_1 g'_2 = g_1 h_1 g_2 h_2 = g_1 g_2 h_1 h_2$. То есть $g'_1 g'_2 H = g_1 g_2 H$.

Теперь проверим свойства умножения:

1. $eH gH = gH$
2. $g_1 H g_2 H g_3 H = g_1 g_2 g_3 H$
3. $gH g^{-1}H = eH$

□

Определение. $H \subset G$ назовем нормальной подгруппой, если $\forall g \in G$ $gH = Hg$ или $gHg^{-1} = H$ или $ghg^{-1} \in H$

Обозначение: $H \triangleleft G$

Теорема. G - абелева группа, тогда $\forall H \subset G$ - нормальная.

Теорема. Ядра гомоморфизмов и только они суть нормальные подгруппы.

Доказательство. Сперва докажем, что если $f : G \rightarrow W$ - гомоморфизм, то $\ker f \triangleleft G$. $g \in G, h \in \ker f$, тогда $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)f(g)^{-1} = e_W$.

Теперь покажем, что $\forall H \triangleleft G \exists f$ - гомоморфизм и $\ker f = H$. Введем $\pi_H : G \rightarrow G/H$ - канонический гомоморфизм. Пусть $g \in G, h \in H$ тогда $\pi_H(g) = gH, \pi_H(h) = hH = H$. Следовательно $\ker \pi_H = H$. \square