

Конспект по алгебре

Содержание

1	Вопрос 1	3
2	Вопрос 2	4
3	Вопрос 3	6
4	Вопрос 4	7
5	Вопрос 5	8

1 Вопрос 1

Группа, подгруппа, гомоморфизм групп. Ядро и образ гомоморфизма.

Определение. $\langle G, *, e \rangle$ - группа, $*$: $G \times G \rightarrow G, e \in G$

1. $\forall a, b, c \in G (ab)c = a(bc)$
2. $\forall g \in G eg = ge = g$
3. $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G gg^{-1} = g^{-1}g = e$

Если $\forall a, b \in G ab = ba$ то группу называют *абелевой*

Теорема. $\exists! e \in G eg = ge = g$

Определение. G - группа, тогда $H \subset G$ называют *подгруппой*, если

1. $e \in H$
2. $\forall h_1, h_2 \in H h_1 h_2 \in H \mid HH \subset H$
3. $\forall h \in H h^{-1} \in H \mid H^{-1} \subset H$

Определение. G, W - группы.

$f : G \rightarrow W$ называют *гомоморфизмом (групп)*, если $\forall g_1, g_2 \in G f(g_1 g_2) = f(g_1) * f(g_2)$

Теорема. $f : G \rightarrow W$ - гомоморфизм
 $f(e_G) = e_W$

Определение. $f : G \rightarrow W$ - гомоморфизм, тогда
 $\ker f = \{g \in G \mid f(g) = e_W\}$ - называют *ядром гомоморфизма f*

Теорема. $\ker f$ - подгруппа G

Определение. $f : G \rightarrow W$ - гомоморфизм, тогда
 $\operatorname{Im} f = \{w \in W \mid \exists g \in G f(g) = w\}$ - называют *образом гомоморфизма f*

2 Вопрос 2

Мономорфизмы, эпиморфизмы и изоморфизмы. Понятие нормального делителя (нормальной подгруппы). Факторгруппа.

Определение. Сюръективный гомоморфизм - эпиморфизм.

Инъективный гомоморфизм - мономорфизм.

Биективный гомоморфизм - изоморфизм.

Изоморфизм $f : G \rightarrow G$ - автоморфизм.

Пусть $H \subset G$. Введем отношение эквивалентности \sim соответствующее подгруппе. $g_1, g_2 \in G$. $g_1 \sim g_2$, если $g_1 g_2^{-1} \in H$

Определение. $\tilde{g} = \{k \in G | k \sim g\}$ - класс эквивалентности элемента g

Определение. G/H - факторгруппа, левые смежные классы. $\tilde{g} = Hg$

Заметим, что в случае некоммутативной группы можно ввести правые смежные классы gH .

Теорема. Если $gH = Hg$, то G/H - группа.

Доказательство. Введем умножение: $\forall g_1 H, g_2 H \in G/H$ $(g_1 H)(g_2 H) \stackrel{def}{=} g_1 g_2 H$. Проверим корректность умножения: пусть $g'_1 \sim g_1, g'_2 \sim g_2$. Тогда $g'_1 = g_1 h_1, g'_2 = g_2 h_2$, а значит $g'_1 g'_2 = g_1 h_1 g_2 h_2 = g_1 g_2 h_1 h_2$. То есть $g'_1 g'_2 H = g_1 g_2 H$.

Теперь проверим свойства умножения:

1. $eH gH = gH$
2. $g_1 H g_2 H g_3 H = g_1 g_2 g_3 H$
3. $gH g^{-1}H = eH$

□

Определение. $H \subset G$ назовем нормальной подгруппой, если $\forall g \in G$ $gH = Hg$ или $gHg^{-1} = H$ или $ghg^{-1} \in H$

Обозначение: $H \triangleleft G$

Теорема. G - абелева группа, тогда $\forall H \subset G$ - нормальная.

Теорема. Ядра гомоморфизмов и только они суть нормальные подгруппы.

Доказательство. Сперва докажем, что если $f : G \rightarrow W$ - гомоморфизм, то $\ker f \triangleleft G$. $g \in G, h \in \ker f$, тогда $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)f(g)^{-1} = e_W$.

Теперь покажем, что $\forall H \triangleleft G \exists f$ - гомоморфизм и $\ker f = H$. Введем $\pi_H : G \rightarrow G/H$ - канонический гомоморфизм. Пусть $g \in G, h \in H$ тогда $\pi_H(g) = gH, \pi_H(h) = hH = H$. Следовательно $\ker \pi_H = H$. \square

Порой пишут: $\{e\} \subset H \triangleleft G \xrightarrow{\pi_H} G/H$

3 Вопрос 3

Характеризация мономорфизмов в терминах ядра. Основная теорема о гомоморфизме.

Теорема. ϕ - мономорфизм $\Leftrightarrow \ker \phi = \{e\}$

Доказательство. $[\Rightarrow]$ Пусть $\exists g \neq e, \phi(g) = e$. Но $\phi(e) = e$. Таким образом $g \neq e, \phi(g) = \phi(e)$. Противоречие инъективности.

$[\Leftarrow]$ Пусть $\exists g_1 \neq g_2, \phi(g_1) = \phi(g_2)$. Тогда $\phi(g_1)\phi(g_2)^{-1} = e$, а это значит, что $g_1g_2^{-1} \neq e$ и $g_1g_2^{-1} \in \ker \phi$. Противоречие тривиальности ядра. \square

Теорема. $G/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$

Доказательство. Пусть $\phi : X \leftarrow Y$. Введем отношение эквивалентности: $x_1 \sim x_2$, если $\phi(x_1) = \phi(x_2)$. Рассмотрим $\tau : X/\sim \rightarrow \text{Im } \phi$, $\tau(\tilde{x}) = \phi(x)$.

τ - инъекция. Действительно, если $\tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$, то x_1 не эквивалентно x_2 и значит $\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$.

τ - сюръекция. Действительно $\forall y \in \text{Im } \phi \exists x \phi(x) = y$ и $\tilde{x} : \tau(\tilde{x}) = y$. Таким образом изоморфизм установлен.

Теперь пусть $f : G \rightarrow W$ - гомоморфизм. $g_1 \sim g_2$, если $f(g_1) = f(g_2)$, или $f(g_1)f(g_2)^{-1} = e, f(g_1g_2^{-1}) = e$ это означает, что $g_1g_2^{-1} \in \ker f$. То есть отношение \sim совпадает с отношением эквивалентности порождаемым $\ker f \triangleleft G$. Можно записать $G/\ker f \cong \text{Im } f$. \square

4 Вопрос 4

Группа подстановок (симметрическая группа). Четные и нечетные подстановки. Теорема о том, что всякая группа есть подгруппа симметрической группы (для конечных групп).

Определение. Симметрической группой S_X множества X называется группа автоморфизмов $X \rightarrow X$ относительно операции композиции и нейтрального элемента $id_X : \forall x \in X, id_X(x) = x$. Если $X = \{1, 2, \dots, n\}$, то симметрическую группу называют группой подстановок и обозначают S_n .

Группа подстановок S_n допускает следующее копредставление:

Образующие:

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$$

Соотношения:

$$\sigma_i^2 = 1$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \text{ если } |i - j| > 1$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

Вообще, образующие в указанном копредставлении являются *транспозициями*, то есть это такие подстановки, которые меняют два соседних элемента местами, а остальные элементы оставляют на месте.

Определение. Подстановка называется *четной*, если она представляется в виде произведения четного числа транспозиций и *нечетной* в противном случае.

Теорема. Любая группа - подгруппа симметрической группы.

Доказательство. Необходимо сопоставить каждому элементу $g \in G$ некоторую биекцию $G \rightarrow G$, тем самым получив вложение $G \subset S_G$. Рассмотрим $i_g : G \rightarrow G, \forall s \in G, i_g(s) = gs$. Осталось проверить свойства: $i_a \circ i_b = a(bs) = (ab)s = i_{ab}, i_g \circ i_{g^{-1}} = g(g^{-1}s) = es = i_e$. \square

5 Вопрос 5

Левые классы смежности по подгруппе (см. вопрос 2). Индекс подгруппы. Теорема об индексе.

Определение. $H \subset G$

$[G : H] = \#G/H$ - индекс подгруппы.

$\#G$ - порядок, мощность группы.

Замечание: индекс тривиальной подгруппы - порядок группы.

Теорема (Теорема об индексе). $K \subset H \subset G$,

тогда $[G : K] = [G : H][H : K]$

Доказательство. $G = \bigcup_{i=1}^{[G:H]} g_i H$ при этом $g_i H \neq g_j H, i \neq j$. Аналогично

$H = \bigcup_{j=1}^{[H:K]} h_j K$ при этом $h_i K \neq h_j K, i \neq j$. Запишем $G = \bigcup_{i,j} g_i h_j K$.

Теперь достаточно проверить, что $g_i h_j K$ представляют все различные классы смежности по K . Пусть $g_i h_j K = g_l h_m K$. Умножим на H , получим $g_i h_j K H = g_l h_m K H$, и далее $g_i h_j H = g_l h_m H \Rightarrow g_i H = g_l H \Rightarrow i = l$. Вернемся к исходному равенству $g_i h_j K = g_i h_m K \Rightarrow h_j K = h_m K \Rightarrow j = m$. То есть все классы различны.

Возьмем gK . Ясно, что $g = g_i h, h \in H$ и $h = h_m k, k \in K$. Имеем $g = g_i h_m k, g \in g_i h_m K$. Теперь понятно, что исходное представление G представляло все классы смежности по K . \square

Следствия:

1. Порядок подгруппы всегда делитель порядка группы.

Пусть $K = \{e\}$, по теореме об индексе $\#G = \#(G/H)\#H$

2. $\forall G : \#G = p, p \in \mathbb{P}$ - циклическая группа порядка p

Рассмотрим $G : \#G = p, p \in \mathbb{P}$. Рассмотрим $H \subset G$ - циклическая подгруппа, порожденная $g \neq e$. Ясно, что $\#H \geq 2$. Но $\#H$ делитель $\#G = p$, а значит $\#H = p = \#G$. Также из этого следует $\forall G : \#G = p, p \in \mathbb{P} \quad G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$