Конспект по алгебре

Содержание

1 Вопрос 1

Группа, подгруппа, гомоморфизм групп. Ядро и образ гомоморфизма.

Определение. $< G, *, e >$ - группа, $* : G \times G \to G, e \in G$

1. $\forall a, b, c \in G\ (ab)c = a(bc)$
2. $\forall g \in G\ eg = ge = g$
3. $\forall g \in G\ \exists g^{-1} \in G\ gg^{-1} = g^{-1}g = e$

Если $\forall a, b \in G\ ab = ba$ то группу называют *абелевой*

Теорема. $\exists! e \in G\ eg = ge = g$

Определение. G - группа, тогда $H \subset G$ называют *подгруппой*, если

1. $e \in H$
2. $\forall h_1, h_2 \in H\ h_1h_2 \in H \mid HH \subset H$
3. $\forall h \in H\ h^{-1} \in H \mid H^{-1} \subset H$

Определение. G, W - группы.
$f : G \to W$ называют *гомоморфизмом (групп)*, если $\forall g_1, g_2 \in G\ f(g_1g_2) = f(g_1) * f(g_2)$

Теорема. *$f : G \to W$ - гомоморфизм*
$f(e_G) = e_W$

Определение. $f : G \to W$ - гомоморфизм, тогда
$ker f = g \in G | f(g) = e_W$ - называют *ядром гомоморфизма f*

Теорема. *$ker f$ - подгруппа G*

Определение. $f : G \to W$ - гомоморфизм, тогда
$Im f = \{w \in W | \exists g \in G\ f(g) = w\}$ - называют *образом гомоморфизма f*

2 Вопрос 2

Мономорфизмы, эпиморфизмы и изоморфизмы. Понятие нормального делителя (нормальной подгруппы). Факторгруппа.

Определение. Сюръективный гомоморфизм - эпиморфизм.
Инъективный гомоморфизм - мономорфизм.
Биективный гомоморфизм - изоморфизм.
Изоморфизм $f : G \to G$ - автоморфизм.

Пусть $H \subset G$. Введем отношение эквивалентности $\sim$ соответствующее подгруппе. $g_1, g_2 \in G$. $g_1 \sim g_2$, если $g_1 g_2^{-1} \in H$

Определение. $\widetilde{g} = \{k \in G | k \sim g\}$ - класс эквивалентности элемента g

Определение. G/H - факторгруппа, левые смежные классы. $\widetilde{g} = Hg$

Заметим, что в случае некоммутативной группы можно ввести правые смежные классы gH.

Теорема. *Если $gH = Hg$, то G/H - группа.*

Доказательство. Введем умножение: $\forall g_1 H, g_2 H \in G/H$ $(g_1 H)(g_2 H) \overset{def}{=} g_1 g_2 H$.
Проверим корректность умножения: пусть $g_1' \sim g_1, g_2' \sim g_2$. Тогда $g_1' = g_1 h_1, g_2' = g_2 h_2$, а значит $g_1' g_2' = g_1 h_1 g_2 h_2 = g_1 g_2 h_1 h_2$. То есть $g_1' g_2' H = g_1 g_2 H$.
Теперь проверим свойства умножения:

1. $eHgH = gH$
2. $g_1 H g_2 H g_3 H = g_1 g_2 g_3 H$
3. $gHg^{-1}H = eH$

□

Определение. $H \subset G$ назовем нормальной подгруппой, если $\forall g \in G$ $gH = Hg$ или $gHg^{-1} = H$ или $ghg^{-1} \in H$
Обозначение: $H \triangleleft G$

Теорема. *G - абелева группа, тогда $\forall H \subset G$ - нормальная.*

Теорема. *Ядра гомоморфизмов и только они суть нормальные подгруппы.*

Доказательство. Сперва докажем, что если $f : G \to W$ - гомоморфизм, то $kerf \triangleleft G$. $g \in G, h \in kerf$, тогда $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)f(g)^{-1} = e_W$.
Теперь покажем, что $\forall H \triangleleft G \ \exists f$ - гомоморфизм и $kerf = H$. Введем $\pi_H : G \to G/H$ - канонической гомоморфизм. Пусть $g \in G, h \in H$ тогда $\pi_H(g) = gH, \pi_H(h) = hH = H$. Следовательно $ker\pi_H = H$. □

Порой пишут: $\{e\} \subset H \triangleleft G \stackrel{\pi_H}{\to} G/H$

3 Вопрос 3

Характеризация мономорфизмов в терминах ядра. Основная теорема о гомоморфизме.

Теорема. ϕ - *мономорфизм* $\Leftrightarrow ker\phi = \{e\}$

Доказательство. [$\Rightarrow$] Пусть $\exists g \neq e\ \phi(g) = e$. Но $\phi(e) = e$. Таким образом $g \neq e, \phi(g) = \phi(e)$. Противоречие инъективности.
[$\Leftarrow$] Пусть $\exists g_1 \neq g_2, \phi(g_1) = \phi(g_2)$. Тогда $\phi(g_1)\phi(g_2)^{-1} = e$, а это значит, что $g_1 g_2^{-1} \neq e$ и $g_1 g_2^{-1} \in kerf$. Противоречие тривиальности ядра. □

Теорема. $G/kerf \cong Imf$

Доказательство. Пусть $\phi : X \leftarrow Y$. Введем отношение эквивалентности: $x_1 \sim x_2$, если $\phi(x_1) = \phi(x_2)$. Рассмотрим $\tau : X/\sim \to Im\,\phi$, $\tau(\widetilde{x}) = \phi(x)$.
τ - инъекция. Действительно, если $\widetilde{x_1} \neq \widetilde{x_2}$, то x_1 не эквивалентно x_2 и значит $\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$.
τ - сюръекция. Действительно $\forall y \in Im\,\phi\ \exists x\ \phi(x) = y$ и $\widetilde{x} : \tau(\widetilde{x}) = y$. Таким образом изоморфизм установлен.
Теперь пусть $f : G \to W$ - гомоморфизм. $g_1 \sim g_2$, если $f(g_1) = f(g_2)$, или $f(g_1)f(g_2)^{-1} = e, f(g_1 g_2^{-1}) = e$ это означает, что $g_1 g_2^{-1} \in kerf$. То есть отношение $\sim$ совпадает с отношением эквивалентности порождаемым $kerf \triangleleft G$. Можно записать $G/kerf \cong Imf$. □

4 Вопрос 5

Левые классы смежности по подгруппе (см. вопрос 2). Индекс подгруппы. Теорема об индексе.

Определение. $H \subset G$
$[G:H] = \#G/H$ - индекс подгруппы.
$\#G$ - порядок, мощность группы.

Замечание: индекс тривиальной подгруппы - порядок группы.

Теорема (Теорема об индексе)**.** *$K \subset H \subset G$,*
тогда $[G:K] = [G:H][H:K]$

Доказательство. $G = \bigcup\limits_{i=1}^{[G:H]} g_iH$ при этом $g_iH \neq g_jH, i \neq j$. Аналогично $H = \bigcup\limits_{j=1}^{[H:K]} h_jK$ при этом $h_iK \neq h_jK, i \neq j$. Запишем $G = \bigcup\limits_{i,j} g_ih_jK$.
Теперь достаточно проверить, что g_ih_jK представляют все различные классы смежности по K. Пусть $g_ih_jK = g_lh_mK$. Умножим на H, получим $g_ih_jKH = g_lh_mKH$, и далее $g_ih_jH = g_lh_mH \Rightarrow g_iH = g_lH \Rightarrow i = l$. Вернемся к исходному равенству $g_ih_jK = g_ih_mK \Rightarrow h_jK = h_mK \Rightarrow j = m$. То есть все классы различны.
Возьмем gK. Ясно, что $g = g_ih, h \in H$ и $h = h_mk, k \in K$. Имеем $g = g_ih_mk, g \in g_ih_mK$. Теперь понятно, что исходное представление G представляло все классы смежности по K. □

Следствия:

1. Порядок подгруппы всегда делитель порядка группы.
   Пусть $K = \{e\}$, по теореме об индексе $\#G = \#(G/H)\#H$

2. $\forall G : \#G = p, p \in \mathbb{P}$ - циклическая группа порядка р
   Рассмотрим $G : \#G = p, p \in \mathbb{P}$. Рассмотрим $H \subset G$ - циклическая подгруппа, порожденная $g \neq e$. Ясно, что $\#H >= 2$. Но $\#H$ делитель $\#G = p$, а значит $\#H = p = \#G$. Также из этого следует $\forall G : \#G = p, p \in \mathbb{P} \quad G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$