

1/ Bài toán Stefan 1D: Tìm hàm (nhiệt độ) $u(x, t)$ thỏa

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, 0 < x < s(t), t > 0 & (1) \\ u(0, t) = u_H, t > 0 & (2) \\ u(x, 0) = 0, x > 0 & (3) \\ s(0) = 0 & (4) \\ x = s(t), t > 0: u = 0 \text{ \& } -u_x = \lambda s'(t) & (5) \end{cases}$$

Khảo sát bắt đầu từ thời điểm kích hoạt nguồn nhiệt tiếp xúc từ trái $\Rightarrow u(0, 0) = u_H$ (6).

2/ Ký hiệu: Bước chia trục x: Δx , trục t: Δt . Nút lưới $(i\Delta x; j\Delta t)$, giá trị tại nút $u(i\Delta x; j\Delta t) = u_i^j$, vectơ $u^{(n)} = [u_0^n; u_1^n; u_2^n \dots]$: Giá trị nhiệt độ trên thanh cùng 1 mức thời gian $n\Delta t$, $s_j = s(j\Delta t)$: vị trí của biên Stefan ở thời điểm $j\Delta t$.

Ý tưởng sơ đồ số: Giả sử $u^{(j)}, s_j$ đã biết, cần tính $u^{(j+1)}$.

Bước 1: Dùng sai phân tiến theo t và sai phân phù hợp theo x, từ (5) $\Rightarrow s_{j+1}$.

Bước 2: Tìm đoạn chia trên trục Ox chứa biên Stefan s_{j+1} : $m_{j+1}\Delta x < s_{j+1} \leq (m_{j+1} + 1)\Delta x$.

Bước 3: Dùng sơ đồ ẩn, Crank – Nicholson với (1) để tính u_i^{j+1} , $1 \leq i \leq m_{j+1} - 1$ (các mốc chia trên trục x cách đều) và phối hợp nội suy spline bậc 3 biên tự nhiên để tính $u_{m_{j+1}}^{j+1}$ (sử dụng 2 mốc $(m_{j+1} - 1)\Delta x, m_{j+1}\Delta x$ và biên Stefan s_{j+1} không cách đều).

Công thức xấp xỉ đạo hàm cấp 1 (*), cấp 2 (**) tại mốc chia (không cách đều): Gọi $f(x)$ là đa thức nội suy spline bậc 3 biên tự nhiên của bảng 3 mốc (xem hình dưới) $a - \Delta x, a, a + p\Delta x$ ($0 < p < 1$). Khi đó ta có

$a - \Delta x$	a	$a + p\Delta x$	$f'(a + p\Delta x) \approx \frac{p^2 y_1 - (p^2 - 3p + 2)y_2}{2\Delta x \cdot p(p+1)}, f''(a) \approx \frac{3(py_1 - (p+1)y_2)}{(\Delta x)^2 p(p+1)}$
y_1	y_2	0	

7/ Công thức lắp ghép (đề code) cho sơ đồ ẩn. Công thức này chỉ dùng cho trường hợp hay xảy ra nhất trong thực tế, khi biên s_i ($i \geq 1$) KHÔNG TRÙNG các điểm chia $k\Delta x \Rightarrow p_i > 0$.

Trường hợp s_i trùng với điểm chia nào đó sẽ bổ sung sau (xử lý như bài toán biên cơ bản).

Ký hiệu $\mu = \frac{k \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2}$.

Các bước dùng để viết code

Bước 1: Tính $s_1 = s_0 - \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (u_1^0 - u_0^0)$.

Bước 2: Tính $m_1 = \left\lceil \frac{s_1}{\Delta x} \right\rceil \in \mathbb{N}$, $p_1 = \frac{s_1 - m_1 \Delta x}{\Delta x}$. Chú ý $p_1 > 0$.

Bước 3: Tính ma trận 3 đường chéo $A_{m_1 \times m_1}$ và vector vế phải b:

Chéo trên $a_{i,i+1} = -\mu \quad (1 \leq i \leq m_1 - 1)$

Chéo chính $a_{i,i} = 1 + 2\mu \quad (1 \leq i \leq m_1 - 1)$, $a_{m_1,m_1} = 1 + \frac{3\mu}{p_1}$.

Chéo dưới $a_{i+1,i} = -\mu \quad (1 \leq i \leq m_1 - 2)$, $a_{m_1+1,m_1} = -\frac{3\mu}{p_1 + 1}$.

Vế phải $b_1 = u_1^0 + \mu u_h$, $b_i = u_i^0 \quad (2 \leq i \leq m_1)$.

Giải hệ tuyến tính $Au^{(1)} = b \Rightarrow u^{(1)}$ (V1)

Bước 4: (Giả sử nhiệt độ mức j và biên Stefan $u^{(j)}, s_j$ đã biết).

Tính $s_{j+1} = s_j - \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \left[\frac{p_j u_{m_j-1}^j}{p_j + 1} - \frac{(p_j + 2) u_{m_j}^j}{p_j} \right]$

Bước 5: Tính $m_{j+1} = \left\lceil \frac{s_{j+1}}{\Delta x} \right\rceil \in \mathbb{N}$, $p_{j+1} = \frac{s_{j+1} - m_{j+1} \Delta x}{\Delta x}$. Chú ý $p_{j+1} > 0$.

Set $u_i^j := 0 \quad (m_j + 1 \leq i \leq m_{j+1})$

Bước 6: Tính ma trận 3 đường chéo $A_{m_{j+1} \times m_{j+1}}$ và vector vế phải b:

Chéo trên $a_{i,i+1} = -\mu \quad (1 \leq i \leq m_{j+1} - 1)$

Chéo chính $a_{i,i} = 1 + 2\mu \quad (1 \leq i \leq m_{j+1} - 1)$, $a_{m_{j+1},m_{j+1}} = 1 + \frac{3\mu}{p_{j+1}}$.

Chéo dưới $a_{i+1,i} = -\mu \quad (1 \leq i \leq m_{j+1} - 2)$, $a_{m_{j+1}+1,m_{j+1}} = -\frac{3\mu}{p_{j+1} + 1}$.

Vế phải $b_1 = u_1^j + \mu u_h$, $b_i = u_i^j \quad (2 \leq i \leq m_{j+1})$.

Giải hệ tuyến tính $Au^{(j+1)} = b \Rightarrow u^{(j+1)}$ (V2)

Bước 7: Quay lại bước 4. Dừng khi biên Stefan $s_j > \ell$ (đầu phải của miền khảo sát) hoặc $j > NN$: Số lần tính (mức thời gian) đã quá lớn.

Ví dụ dùng để test code

10/ VD số (có thể dùng để check code) sơ đồ ẩn:

$$\begin{cases} u_t = 5u_{xx}, 0 < x < s(t), t > 0 & (11) \\ u(0, t) = 100, t > 0 & (12) \\ u(x, 0) = 0, x > 0 & (13) \\ s(0) = 0 & (14) \\ x = s(t), t > 0 : u = 0 \& -u_x = 3s'(t) & (15) \end{cases}$$

Chọn bước chia $\Delta x = h_x = 0.01$, $\Delta t = h_t = 0.000025$. Áp dụng các bước đã mô tả ở mục 8, ta có bảng kết quả (dùng để check). Xem phân tích ở cuối mục.

Tham số	$\begin{aligned} ku &:= 5 \\ ht &:= 0.000025 \\ hx &:= 0.01 \\ lb &:= 3 \\ uh &:= 100 \\ s_0 &:= 0 \\ ini &:= 0 \\ \mu &:= 1.250000000 \\ ferr &:= \frac{1}{2} t \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{10} t \sqrt{5}\right) e^{\frac{1}{20} t^2} \\ alp1 &:= -5.107433749 \\ alp &:= 5.107433749 \\ fex &:= 100 - \frac{100 \operatorname{erf}\left(\frac{1}{10} \frac{x \sqrt{5}}{\sqrt{t}}\right)}{\operatorname{erf}\left(0.5107433750 \sqrt{5}\right)} \\ gex &:= 5.107433749 \sqrt{t} \end{aligned}$
---------	--

Level 1	$s_1 := 0.08333333333$ $m_1 := 8$ $p_1 := 0.3333333330$	
	Error of u: 13.7319703 at first level Boundary s: 0.0833333 Error 0.0577962 Node: 1 Solution: 42.020317 Node: 2 Solution: 17.656889 Node: 3 Solution: 7.418971 Node: 4 Solution: 3.116229 Node: 5 Solution: 1.306471 Node: 6 Solution: 0.541889 Node: 7 Solution: 0.210818 Node: 8 Solution: 0.048402	
Level 2		$s_2 := 0.08345254602$ $m_2 := 8$ $p_2 := 0.3452546020$ Error of u: 13.0197 at level: 2 Boundary s: 0.0834525 Error 0.0473375 Node: 1 Solution: 59.174493 Node: 2 Solution: 32.072326 Node: 3 Solution: 16.502510 Node: 4 Solution: 8.199525 Node: 5 Solution: 3.963176 Node: 6 Solution: 1.852191 Node: 7 Solution: 0.789448 Node: 8 Solution: 0.189608

Level 3	$s_3 := 0.08390478243$ $m_3 := 8$ $p_3 := 0.3904782430$ Error of u: 12.5153 at level: 3 Boundary s: 0.0839048 Error 0.0396731 Node: 1 Solution: 67.677723 Node: 2 Solution: 42.158030 Node: 3 Solution: 24.706900 Node: 4 Solution: 13.819282 Node: 5 Solution: 7.427470 Node: 6 Solution: 3.807094 Node: 7 Solution: 1.750639 Node: 8 Solution: 0.463138	
Level 4		$s_4 := 0.08488131348$ $m_4 := 8$ $p_4 := 0.4881313480$ Error of u: 11.9226 at level: 4 Boundary s: 0.0848813 Error 0.0338070 Node: 1 Solution: 72.634567 Node: 2 Solution: 49.234610 Node: 3 Solution: 31.495918 Node: 4 Solution: 19.188439 Node: 5 Solution: 11.176287 Node: 6 Solution: 6.163188 Node: 7 Solution: 3.034964 Node: 8 Solution: 0.934200
Level 5		$s_5 := 0.08645062260$ $m_5 := 8$ $p_5 := 0.6450622600$ Error of u: 11.1258 at level: 5 Boundary s: 0.0864506 Error 0.0293478 Node: 1 Solution: 75.889631 Node: 2 Solution: 54.383312 Node: 3 Solution: 36.995954 Node: 4 Solution: 24.008624 Node: 5 Solution: 14.877443 Node: 6 Solution: 8.707187 Node: 7 Solution: 4.572129 Node: 8 Solution: 1.666805

Level 6		$s_6 := 0.08855140060$ $m_6 := 8$ $p_6 := 0.8551400600$ Error of u: 10.2765 at level: 6 Boundary s: 0.0885514 Error 0.0259984 Node: 1 Solution: 78.211335 Node: 2 Solution: 58.280034 Node: 3 Solution: 41.466110 Node: 4 Solution: 28.228312 Node: 5 Solution: 18.366263 Node: 6 Solution: 11.295271 Node: 7 Solution: 6.294746 Node: 8 Solution: 2.672314
Level 7		$s_7 := 0.09106002979$ $m_7 := 9$ $p_7 := 0.1060029790$ Error of u: 9.4271 at level: 7 Boundary s: 0.0910600 Error 0.0234950 Node: 1 Solution: 79.964795 Node: 2 Solution: 61.332358 Node: 3 Solution: 45.141780 Node: 4 Solution: 31.891738 Node: 5 Solution: 21.572438 Node: 6 Solution: 13.818077 Node: 7 Solution: 8.081962 Node: 8 Solution: 3.775619 Node: 9 Solution: 0.351920

Phân tích kết quả:

- + Biên: Ban đầu $s_0 = 0$ rồi $s_1 \in (8h_x; 9h_x)$ và dịch chuyển từ từ sang phải đến $s_7 \in (9h_x; 10h_x)$.
- + Nghiệm u_i^j : Luôn > 0 (ở các mốc với $1 \leq i \leq m_j$) và tăng: $u_i^j < u_i^{j+1} \forall i: 1 \leq i \leq m_j$ (TC1). Tính chất này chờ thầy Vinh chứng minh với nghiệm của hệ (V1), (V2) nhé!
- + Nghiệm giải tích (Chi tiết xem Cranks, Chương 3, Trang 102 – sách, trang 112 – file).

Giải (xấp xỉ) phương trình $t \cdot e^{-\frac{t^2}{20}} \cdot \int_0^{\frac{t}{2\sqrt{5}}} e^{-x^2} dx = \frac{100\sqrt{5}}{15}$, $t > 0 \Rightarrow$ Nghiệm $\alpha \approx 5.107433749$.

Ký hiệu hàm đặc biệt $\text{erf}(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^v e^{-t^2} dt \Rightarrow$ Nghiệm giải tích của hệ (11) – (15) là

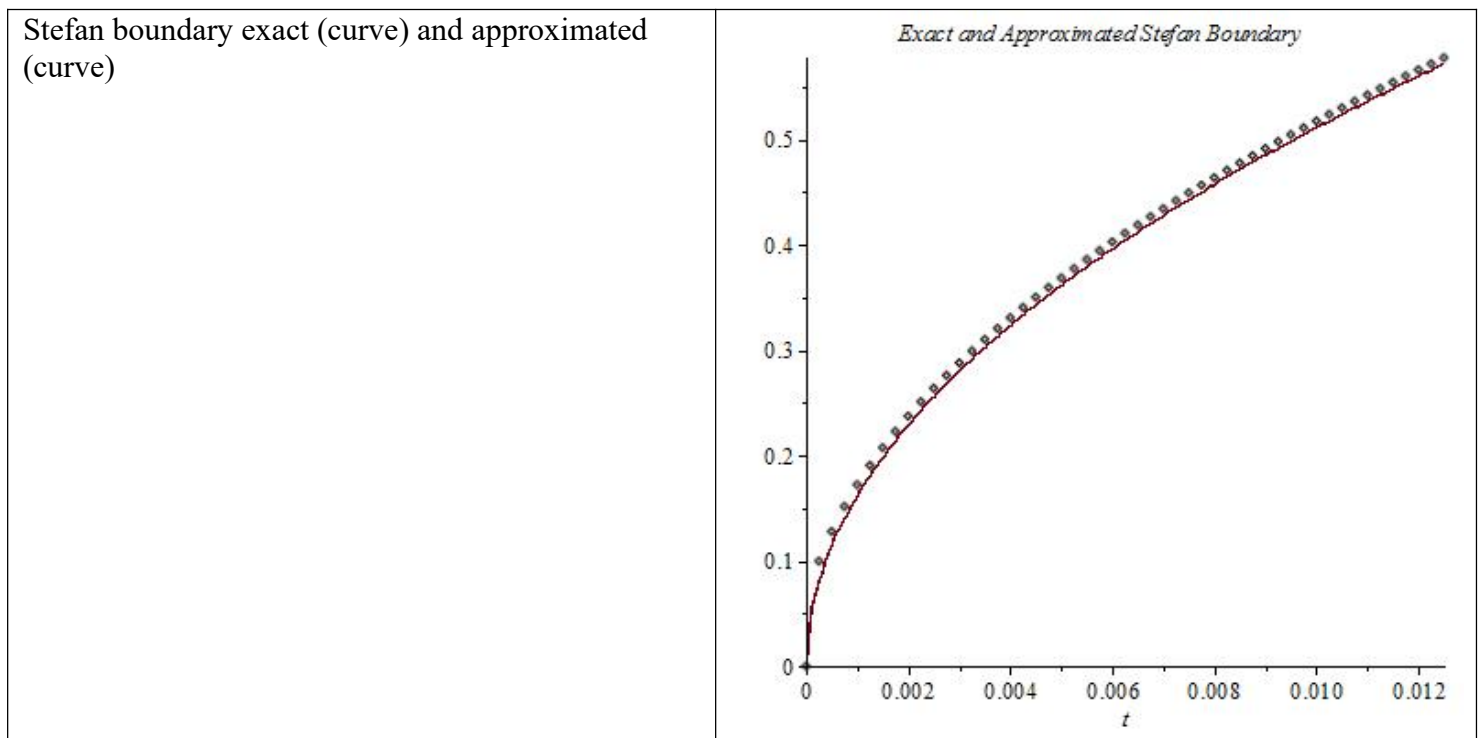
$$f_e(x, t) = 100 - \frac{100}{\operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{5}}\right)} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot t}\right), \text{ và biên Stefan: } g_e(t) = \alpha \cdot \sqrt{t}. \text{ Để theo dõi sai số của}$$

$$\text{biên ta xét } |s_j - g_e(jh_t)|, \text{ sai số nghiệm } u(x, t): \|u(x, t) - f_e(x, t)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m_i} |u_i^j - f_e(ih_x, jh_t)|.$$

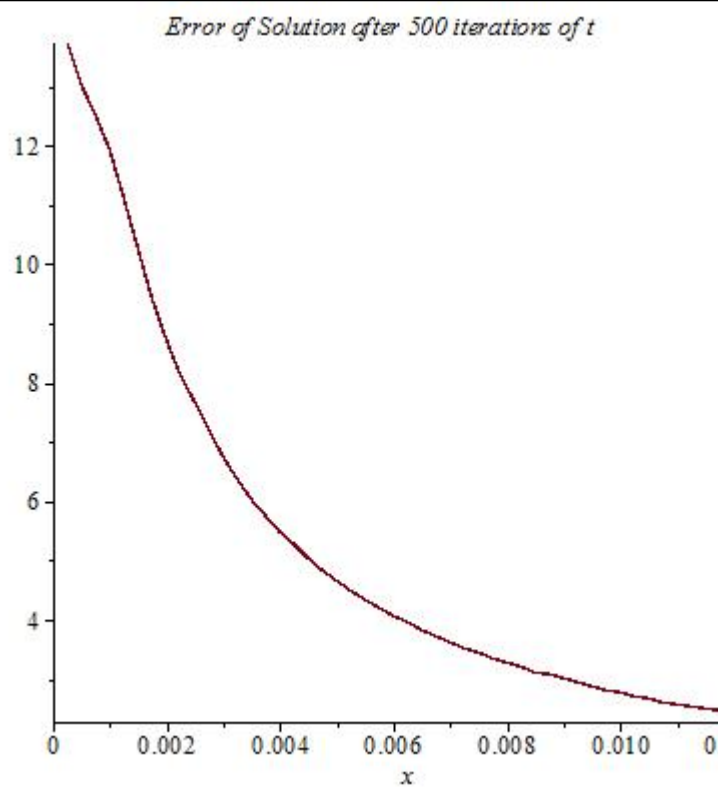
Level	Error of u: $\ u(x, t) - f_e(x, t)\ _\infty = \max_{1 \leq i \leq m_i} u_i^j - f_e(ih_x, jh_t) $	Error of boundary s: $ s_j - g_e(jh_t) $
1 (h_t)	13.7319703	0.0577962
2 ($2h_t$)	13.0197	0.0473375
3 ($3h_t$)	12.5153	0.0396731
4 ($4h_t$)	11.9226	0.0338070
5 ($5h_t$)	11.1258	0.0293478
6 ($6h_t$)	10.276	0.0259984
7 ($7h_t$)	9.4271	0.0234950

+ Với 500 lần tính theo t, ta có các đồ thị so sánh biên xấp xỉ và biên chính xác và sai số $\varepsilon_u, \varepsilon_s$

Hình vẽ để kiểm tra code



Absolute error of solution u (infinity norme)



Absolute error of boundary s

