PGS. TS. ĐẬU THẾ CẤP

Đại Số Tuyến Tính

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

PGS. TS. ĐẬU THẾ CẤP

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

283-2008/CXB/15-635/GD

Mã số: 7K718M8-CPH

LỜI NÓI ĐẦU

Phạm trù không gian vectơ và ánh xạ tuyến tính, nói rộng ra là phương pháp của Đại số tuyến tính, có mặt trong mọi ngõ ngách của toán học, trong các ngành khoa học, kĩ thuật, kinh tế và trong các ngành khoa học ứng dụng. Do đó Đại số tuyến tính là một môn đại cương của sinh viên ngành toán và tất cả các ngành khoa học tự nhiên, kĩ thuật, kinh tế ...

Hiện nay, sách về Đại số tuyến tính có rất nhiều, do nhiều tác giả viết. Tuy nhiên qua nhiều năm giảng dạy Đại số tuyến tính cũng như các môn học có ứng dụng Đại số tuyến tính, chúng tôi rất muốn có một giáo trình có thể phục vụ tốt cho một lực lượng đông đảo bạn đọc. Giáo trình này phải đồng thời đáp ứng được những yêu cầu sau :

1. *Không đưa ra quá nhiều kiến thức, với ngôn ngữ quá hàn lâm, chỉ phù hợp với đối tượng bạn đọc cần nghiên cứu, khảo cứu.*
2. *Không quá đơn giản, chỉ cung cấp được các định nghĩa, tính chất, thuật toán sơ sài, khiến cho bạn đọc lúng túng khi sử dụng (muốn tìm hiểu thêm điều gì cũng phải tìm nguồn tài liệu khác).*
3. *Có một hệ thống bài tập phong phú, đủ dạng cơ bản, đủ mức độ khó, dễ, có hướng dẫn giải để không cần một quyển bài tập kèm theo.*
4. *Không quá dày trang, phù hợp với điều kiện kinh tế của sinh viên, nhẹ nhàng khi mang lên lớp.*
5. *Phải có đủ các kiến thức tối thiểu về đại số tuyến tính để sinh viên học tốt toán giải tích, chẳng hạn môn giải tích hàm có thể xem là sự kết hợp của đại số tuyến tính và tôpô.*

Với những mong muốn đó, chúng tôi đã biên soạn giáo trình này. Hi vọng rằng, với những tiêu chí đã đưa ra khi biên soạn, đây là cuốn sách đáp ứng được các yêu cầu học tập và giảng dạy của giảng viên và sinh viên tại khoa Toán và các khoa khác của các trường Đại học và Cao đẳng.

Cuối sách, chúng tôi có giới thiệu 15 tác phẩm ở mục tài liệu tham khảo. Các kiến thức chuẩn bị về lí thuyết tập hợp bạn đọc có thể tham khảo thêm [6], về số phức và hàm phức có thể tham khảo thêm Chương 1 của [8]. Một vài kiến thức về cấu trúc đại số, đại số sơ cấp và số học dùng trong sách có thể tham khảo [3, 4, 5].

Tác giả xin được cảm ơn TS. Phan Dân, Trường Đại học Giao thông Vận tải TP.Hồ Chí Minh đã có những trao đổi và khích lệ tác giả trong quá trình biên soạn bản thảo.

Tuy đã cố gắng nhiều trong việc biên soạn, nhưng chắc chắn cuốn sách không thể tránh khỏi những sai sót, chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến quý báu của bạn đọc .

Xin chân thành cảm ơn .

Tác giả

CHƯƠNG I

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

§1. Ngôn ngữ lí thuyết tập hợp

1. Kí hiệu lôgic

Cho A và B là các mệnh đề. Ta kí hiệu

$\overline{A}$ là mệnh đề phủ định của A

$A \Rightarrow B$ là mệnh đề A suy ra B

$A \Leftrightarrow B$ là mệnh đề A và B tương đương.

Ta có

$A \Rightarrow B$ tương đương với mệnh đề $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

2. Các tập hợp số

Ta kí hiệu

$\mathbb{N}$ là tập các số nguyên dương

$\mathbb{N}_0$ là tập các số nguyên, không âm

$\mathbb{Z}$ là tập các số nguyên

$\mathbb{Q}$ là tập các số hữu tỉ

$\mathbb{R}$ là tập các số thực

$\mathbb{C}$ là tập các số phức.

3. Các phép toán tập hợp

Kí hiệu $\varnothing$ là tập hợp rỗng. Cho các tập E, F. Ta kí hiệu :

$E \subset F$ nếu $x \in E$ thì $x \in F$

$E = F$ nếu $E \subset F$ và $F \subset E$.

$E \cup F = \{x \mid x \in E \text{ hoặc } x \in F\}$

$E \cap F = \{x \mid x \in E \text{ và } x \in F\}$

$E \setminus F = \{x \mid x \in E \text{ và } x \notin F\}$.

Với mọi tập E ta có

$$\varnothing \subset E \subset E.$$

Cho ξ là một họ khác rỗng các tập. Ta gọi hợp và giao của họ tập này tương ứng là

$$\bigcup_{E\in\xi} E = \{x \mid x \in E \text{ với ít nhất một } E \in \xi\};$$

$$\bigcap_{E\in\xi} E = \{x \mid x \in E \text{ với mọi } E \in \xi\}.$$

Nếu họ ξ được đánh chỉ số bởi tập $\wedge$, tức là

$$\xi = \{E_\alpha \mid \alpha \in \wedge\} = (E_\alpha)_{\alpha\in\wedge}$$

thì hợp và giao nói trên tương ứng được kí hiệu là

$$\bigcup_{\alpha\in\wedge} E_\alpha, \bigcap_{\alpha\in\wedge} E_\alpha.$$

Nếu họ ξ được đánh chỉ số bởi tập $\mathbb{N}$, tức là

$$\xi = \{E_n \mid n \in \mathbb{N}\} = (E_n)_{n\in\mathbf{N}} = (E_n)_{n=1}^{\infty}$$

thì hợp và giao của chúng được kí hiệu tương ứng là

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Với mọi tập X, ta kí hiệu

$$\mathscr{P}(X) = \{E \mid E \subset X\}$$

là tập có các phần tử là các tập con của X. Với mọi $E \in \mathscr{P}(X)$, ta gọi $E^c = X \setminus E$ là phần bù của E trong X.

Cho $(E_\alpha)_{\alpha\in\wedge}$ là một họ các tập con của tập X. Ta có quy tắc sau đây, gọi là quy tắc đối ngẫu De Morgan

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\wedge} E_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\wedge} E_\alpha^c, \left(\bigcap_{\alpha\in\wedge} E_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in\wedge} E_\alpha^c.$$

§2. Quan hệ và ánh xạ

1. Quan hệ

Cho các tập X và Y, ta gọi tích Descartes của X và Y là tập

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\},$$

có các phần tử là các cặp (x, y) với $x \in X$, $y \in Y$.

Tích Descartes $X \times X$ được kí hiệu là X^2 và gọi là bình phương Descartes của tập X.

Ta gọi một tập con S của $X \times Y$ là một quan hệ trên X và Y ; một tập con S của X^2 là một quan hệ trên X.

Nếu S là quan hệ thì thay cho cách viết $(x, y) \in S$ ta sẽ viết là xSy.

Quan hệ S trên tập X gọi là có tính chất phản xạ nếu mọi $x \in X$ đều có xSx ; gọi là có tính chất đối xứng nếu mọi $x, y \in X$, xSy thì ySx ; gọi là có tính chất phản xứng nếu mọi $x, y \in X$, xSy và ySx thì $x = y$; gọi là có tính chất bắc cầu nếu mọi $x, y, z \in X$, xSy và ySz thì xSz.

Quan hệ S trên X gọi là quan hệ tương đương nếu S có các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Cho S là quan hệ tương dương trên X. Với số $a \in X$, đặt $[a] = S[a] = \{x \in X \mid xSa\}$. Rõ ràng $a \in [a]$. Ta gọi [a] là lớp tương đương chứa a. Các lớp tương đương hoặc trùng nhau, hoặc rời nhau. Ta gọi tập X/S có các phần tử là các lớp tương đương của X theo quan hệ tương đương S là tập thương của X theo quan hệ tương đương S.

2. Tập được sắp

Quan hệ S trên X gọi là quan hệ thứ tự nếu S có các tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu. Khi S là quan hệ thứ tự thì thay cho S ta sẽ kí hiệu là $\leq$.

Tập X cùng một quan hệ thứ tự trên X gọi là một tập được sắp. Nếu mọi $x, y \in X$ đều có $x \leq y$ hoặc $y \leq x$ thì X gọi là được sắp tuyến tính. Trong trường hợp trái lại thì X gọi là được sắp bộ phận.

Cho X là một tập được sắp. Phần tử $x \in X$ gọi là phần tử tối đại (tương ứng : tối tiểu) nếu mọi $y \in X$, $x \leq y$ (tương ứng : $y \leq x$) thì $x = y$.

Cho X là một tập được sắp và E là tập con của X. Phần tử $x \in X$ gọi là biên trên (tương ứng : biên dưới) của E nếu $y \leq x$ (tương ứng : $x \leq y$) với mọi $y \in E$. Nếu x là biên trên (tương ứng : biên dưới) của E và $x \in E$ thì x gọi là phần tử lớn nhất (tương ứng : phần tử nhỏ nhất) của E.

Tập X gọi là được sắp tốt nếu mọi tập con khác rỗng E của X đều có phần tử nhỏ nhất.

Cho X là một tập được sắp bộ phận. Tập con E của X gọi là tập con được sắp tuyến tính (hay toàn phần) nếu mọi $x, y \in E$ đều có $x \leq y$ hoặc $y \leq x$. Tập con E của X gọi là tập con được sắp tuyến tính tối đại nếu E được sắp tuyến tính và với mọi tập con D được sắp tuyến tính của X, $E \subset D$ thì $E = D$.

Nguyên lí tối đại Hausdoff. *Trong mọi tập được sắp bộ phận đều tồn tại một tập con được sắp tuyến tính tối đại.*

3. Ánh xạ

Một quan hệ f trên X và Y gọi là một ánh xạ từ X vào Y nếu mọi $x \in X$ tồn tại duy nhất $y \in Y$ sao cho $(x, y) \in f$. Nếu f là ánh xạ thì thay cho cách viết $(x, y) \in f$ ta sẽ viết là $y = f(x)$, $x \in X$.

Ánh xạ f từ X vào Y cũng được viết là

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

Cho các ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$. Ta gọi hợp thành của các ánh xạ này là ánh xạ $g_0 f$

$$\begin{aligned} g_0 f : X &\to Z \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Cho ánh xạ $f : X \to Y$, $D \subset X$ và $E \subset Y$. Ta gọi ảnh của D là tập

$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\},$$

tạo ảnh của E là tập

$$f^{-1}(E) = \{x \in X \mid f(x) \in E\}.$$

Như vậy, nếu $f : X \to Y$ là một ánh xạ thì ta có ánh xạ

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathscr{P}(Y) &\to \mathscr{P}(X) \\ E &\mapsto f^{-1}(E). \end{aligned}$$

Với mọi $E \subset Y$ và mọi họ $(E_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ các tập con của Y ta có

$$f^{-1}(E^c) = f^{-1}(E)^c$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}(E_\alpha)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}(E_\alpha).$$

Ánh xạ $f : X \to Y$ gọi là đơn ánh nếu mọi $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$; gọi là toàn ánh nếu $f(X) = Y$; gọi là song ánh nếu vừa đơn ánh vừa toàn ánh.

Nếu f là toàn ánh thì thay cho cách nói f từ X vào Y ta còn nói f từ X lên Y.

Ánh xạ $I_X : X \to X$, $I_X(x) = x$ với mọi $x \in X$ gọi là ánh xạ đồng nhất trên X.

Nếu $f : X \to Y$ là song ánh thì tồn tại duy nhất ánh xạ $f^{-1} : Y \to X$ thoả mãn

$$f^{-1} \circ f = I_X,\ f \circ f^{-1} = I_Y,$$

f^{-1} gọi là ánh xạ ngược của f.

Cho ánh xạ $f : X \to Y$ và $D \subset X$. Ta có ánh xạ

$$f|_D : D \to Y,\ f|_D(x) = f(x)$$

gọi là ánh xạ thu hẹp của f trên tập con D.

4. Lực lượng của tập hợp

Tập rỗng $X = \varnothing$ và tập $X = \{x_1, ..., x_n\}$ gọi là tập hữu hạn. Trong trường hợp này ta định nghĩa lực lượng (hay bản số) của X, kí hiệu Card(X), là

$$\text{Card}(\varnothing) = 0$$

$$\text{Card}\left(\{x_1, ..., x_n\}\right) = n.$$

Như vậy, lực lượng của tập hữu hạn là số phần tử của nó.

Các tập không phải hữu hạn gọi là tập vô hạn.

Ta gọi X là tập vô hạn đếm được nếu có một song ánh từ X lên $\mathbb{N}$. Trường hợp này ta kí hiệu

$$\text{Card}(X) = \omega$$

Ta gọi X là tập continum nếu có một song ánh từ X lên đoạn [0, 1]. Trường hợp này ta kí hiệu

$$\text{Card}(X) = c.$$

Ta có : $\text{Card}(X) = \omega$ thì $\text{Card}(X^2) = \omega$; $\text{Card}(X) = c$ thì $\text{Card}(X^2) = c$.

Cho hai tập X và Y. Ta viết $\text{Card}(X) \le \text{Card}(Y)$ nếu có một đơn ánh từ X vào Y ; $\text{Card}(X) < \text{Card}(Y)$ nếu có một đơn ánh từ X vào Y nhưng không có một song ánh từ X lên Y ; $\text{Card}(X) = \text{Card}(Y)$ nếu có một song ánh từ X lên Y. Ta có

1) $X \subset Y$ thì $\text{Card}(X) \le \text{Card}(Y)$

2) $\text{Card}(X) \le \text{Card}(Y)$ và $\text{Card}(Y) \le \text{Card}(X)$

thì $\text{Card}(X) = \text{Card}(Y)$.

Tập X gọi là tập đếm được nếu Card (X) $\le \omega$; tập X gọi là tập không đếm được nếu Card (X) $> \omega$.

Ta có : $\omega < c$.

§3. Trường số phức

1. Tập số phức

Số phức là số có dạng $z = a + bi$ trong đó $a, b \in \mathbb{R}$, i là một kí hiệu gọi là đơn vị ảo.

Trong số phức $z = a + bi$, ta gọi a là phần thực của z, b là phần ảo của z, kí hiệu tương ứng là Rez và Imz.

Hai số phức z_1 và z_2 gọi là bằng nhau nếu $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$, $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$, kí hiệu $z_1 = z_2$.

Tập tất cả các số phức kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Sử dụng các đồng nhất thức

$$a + 0i \equiv a,\ 0 + bi \equiv bi,\ (\pm 1)i \equiv \pm i,$$

ta có

1) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;

2) $z \in \mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu $\operatorname{Im} z = 0$;

3) $z = 0$ nếu và chỉ nếu $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0$.

Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi một điểm duy nhất (a, b) của mặt phẳng toạ độ xOy. Do đó ta có thể đồng nhất $\mathbb{C}$ với mặt phẳng xOy. Mặt phẳng dùng để biểu diễn số phức gọi là mặt phẳng phức. Trong mặt phẳng phức, trục Ox gọi là trục thực, trục Oy gọi là trục ảo.

2. Phép toán số phức

Phép toán số phức được thực hiện như phép toán trên các biểu thức số thực, trong đó $ii = i^2 = -1$.

Theo định nghĩa đó, với mọi $z = a + bi$, $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ ta có

1) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

2) $z_1.z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

3) $-z = (-a) + (-b)i$

4) $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{-b}{a^2+b^2} i \ (z \neq 0)$

Dễ dàng thấy rằng phép cộng và phép nhân số phức có các tính chất giao hoán, kết hợp, phép nhân phân phối đối với phép cộng. Mọi số phức z đều có số đối là $-z$ và mọi số phức z khác 0 đều có nghịch đảo là z^{-1}. Do đó, $\mathbb{C}$ là một trường, gọi là trường số phức.

3. Số phức liên hợp

Cho số phức $z = a + bi$. Ta gọi số phức liên hợp của z là $\bar{z} = a - bi$. Với mọi $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ta có

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

2) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$

3) $z = \bar{z}$ nếu và chỉ nếu $z \in \mathbb{R}$.

4. Môđun của số phức

Cho số phức $z = a + bi$. Ta gọi môđun (hay giá trị tuyệt đối) của z là

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Với mọi $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ta có

1) $|z| \geq 0, |z| = 0$ nếu và chỉ nếu $z = 0$

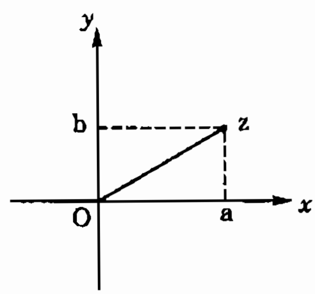
2) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

4) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

5. Dạng lượng giác

Trong mặt phẳng phức cho điểm $z = a + bi$



Đặt $|z| = r$. Ta gọi argumen của z là góc lượng giác $\varphi = (O_x, O_z)$. Nếu φ là một argumen của z thì họ tất cả các argumen của z là

$$\varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ta có

$z = r\ (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trong đó $r = |z|$ và φ là một argumen của z.

Dạng trên của số phức gọi là dạng lượng giác.

Cho hai số phức dưới dạng lượng giác

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Khi đó thực hiện phép tính ta có

$$z_1.z_2 = (r_1r_2)\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)],\ z_2 \neq 0.$$

Như vậy:

Tích (thương) của hai số phức là số phức có môđun bằng tích (thương) của các môđun, argumen bằng tổng (hiệu) của các argumen.

Từ các công thức trên, mọi $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ ta có

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), n \in \mathbb{Z}.$$

Đặc biệt ta có công thức sau đây, gọi là công thức Moivre

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Dưới dạng lượng giác ta có

$$z_1 = z_2 \text{ nếu và chỉ nếu } r_1 = r_2 \text{ và } \varphi_1 = \varphi_2 + k2\pi$$

với số nguyên k nào đó.

6. Căn của số phức

Cho số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Số phức w gọi là căn bậc n của z nếu $w^n = z$. Đặt $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Ta có

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = z.$$

Từ đó $\begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \varphi + k2\pi \end{cases}$ hay $\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \dfrac{\varphi}{n} + k\dfrac{2\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$

và ta có

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right].$$

Vì sin và cosin tuần hoàn với chu kỳ 2π nên

$$\sqrt[n]{z} = \left\{\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right] \middle|\ k = 0, 1, \ldots, n - 1\right\}$$

Như vậy mọi số phức $z \neq 0$, $\sqrt[n]{z}$ có đúng n giá trị khác nhau.

7. Công thức Euler

Theo công thức khai triển Maclaurin của e^x, với mọi $\varphi \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!}$$

từ đó

$$e^{i\varphi} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots\right).$$

Theo khai triển Maclaurin của cosx và sinx ta có công thức sau đây, gọi là công thức Euler

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Theo công thức Euler, số phức z có môđun r, argumen φ còn được viết dưới dạng sau đây, gọi là dạng mũ của z

$$z = re^{i\varphi}.$$

Sử dụng công thức Euler, với mọi $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ta định nghĩa

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right).$$

Bài tập

I.1. Cho tập $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Tìm các phần tử lớn nhất, nhỏ nhất, tối đại, tối tiểu trên các tập được sắp sau đây với quan hệ thứ tự $\subset$

a) $\mathcal{P}(X)$; b) $\mathcal{P}(X)\setminus\{\varnothing\}$; c) $\mathcal{P}(X)\setminus\{X\}$.

I.2. Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$.

Đặt $h = g_0 f$. Chứng minh

a) f và g đơn ánh thì h đơn ánh

b) f và g toàn ánh thì h toàn ánh

c) f và g song ánh thì h song ánh

d) h đơn ánh thì f đơn ánh

e) h toàn ánh thì g toàn ánh.

I.3. Cho $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$ là các song ánh.

Chứng minh

a) $(f^{-1})^{-1} = f$. b) $(g_0 f)^{-1} = f^{-1}{}_0 g^{-1}$.

I.4. Chứng minh mọi tập vô hạn X đều có một tập con vô hạn đếm được. Do đó Card (X) $\geq \omega$.

I.5 Chứng minh Card ($\mathbb{Z}$) = Card ($\mathbb{Q}$) = ω.

I.6 Chứng minh Card ($\mathbb{N}$) < Card ([0, 1]) (tức là $\omega < c$).

I.7 Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$. Chứng minh

Card ((a, b)) = Card ([a, b]) = Card ($\mathbb{R}$) = c.

I.8 Với mọi tập X, chứng minh Card (X) < Card ($\mathcal{P}$(X)).

I.9 Thực hiện các phép tính

a) $\dfrac{4+i}{2-i}$; b) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{10}$; c) $(-\sqrt{3}+i)^9$; d) $(-\sqrt{3}-1)^{-5}$.

I.10 Tính $i^n, n \in \mathbb{Z}$

I.11 Tìm môđun và argumen

a) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$; b) $(1 + i)\ (\sqrt{3}+i)^3$;

c) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^3}{-1-i}$; d) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{(1-i)^5}$.

I.12 Tìm căn của số phức

a) $\sqrt[3]{-1}$; b) $\sqrt[4]{1}$; c) $\sqrt[3]{-2+2i}$; d) $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$.

I.13 Lập công thức tổng quát tìm

$\sqrt{a+bi}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

I.14 Giải các phương trình trên $\mathbb{C}$

a) $z^2 = i$; b) $z^2 = 3-4i$; c) $z^2+4z+13 = 0$.

I.15 Chứng minh nếu $\sqrt[n]{z} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ thì $\sqrt[n]{\bar{z}} = \{\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n\}$.

I.16 Số phức w gọi là logarit phức của z nếu $e^w = z$. Tập các logarit phức của z kí hiệu là Lnz. Với mọi $z = re^{i\varphi} \neq 0$, chứng minh

$$\mathrm{Ln}z = \{\ln r + i(\varphi + k2\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

I.17 Giải các phương trình trên $\mathbb{C}$

a) $e^z = 2$;

b) $\cos z = 2$;

c) $\sin z = 2$;

d) $(e^z - 1)^2 = e^{2z}$.

CHƯƠNG II

MA TRẬN – ĐỊNH THỨC – HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

§1. Ma trận

1. Định nghĩa ma trận

Một ma trận cấp m × n là một bảng gồm m × n số được sắp thành m dòng, n cột theo một thứ tự nhất định.

Ma trận A cấp m × n được viết dưới dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Số a_{ij} nằm ở dòng i, cột j, gọi là phần tử thứ (i,j) của ma trận A. Ta cũng kí hiệu $a_{ij} = (A)_{ij}$.

Hai ma trận A và B gọi là bằng nhau, kí hiệu A = B, nếu có cùng cấp m × n và

$(A)_{ij} = (B)_{ij}$ với mọi i = 1, ..., m, j = 1, ..., n.

2. Phép toán ma trận

Cho hai ma trận A và B cấp m × n và số λ. Ta gọi tổng của A và B, kí hiệu A + B, tích của λ và A, kí hiệu λA, là các ma trận cấp m × n xác định như sau :

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij},$$

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda(A)_{ij}$$

với mọi i = 1, ..., m, j = 1, ..., n.

Như vậy: Cộng ma trận là cộng các phần tử tương ứng của các ma trận số hạng; nhân một số với ma trận là nhân tất cả các phần tử của ma trận với số đó.

Cho ma trận A cấp m × n và ma trận B cấp n × p. Ta gọi tích của ma trận A và B, kí hiệu AB, là ma trận cấp m × p có các phần tử xác định bởi

$$(AB)_{ik} = (A)_{i1}(B)_{1k} + (A)_{i2}(B)_{2k} + \dots + (A)_{in}(B)_{nk}$$

với mọi i = 1, ..., m, k = 1, ..., p.

Như vậy : Phần tử thứ (i, k) của ma trận $A \times B$, bằng tổng các tích tương ứng của các phần tử nằm trên dòng i của ma trận A và cột k của ma trận B.

Kí hiệu $\mathbb{K}$ là trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, là tập tất cả các ma trận cấp $m \times n$ có các phần tử thuộc $\mathbb{K}$.

Ma trận $O = O_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ có tất cả các phần tử đều bằng không gọi là ma trận không cấp $m\times n$. Với mọi ma trận A, ta gọi $-A = (-1)A$ là ma trận đối của A.

Từ định nghĩa ta có :

Định lí 1.1 . *Với mọi* $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

ta có

1) $(A + B) + C = A + (B + C)$
2) $A + B = B + A$
3) $A + O = A$
4) $A + (-A) = O$
5) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
7) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
8) $1A = A$.

Ma trận $I = I_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, có các phần tử xác định bởi

$$(I)_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ nếu } i \neq j \end{cases}$$

với mọi $i, j = 1, ..., n$, gọi là ma trận đơn vị cấp n.

Chẳng hạn : $I_1 = (1) \equiv 1, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dễ dàng kiểm tra bổ đề sau :

Bổ đề 1.1. *Với mọi* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, *ta có*

a) $AI_n = I_mA = A$.

b) $A\ O_{n\times p} = O_{m\times p}$, $O_{l\times m}A = O_{l\times n}$.

Như vậy: Khi phép tính có thể thực hiện thì nhân một ma trận với ma trận đơn vị bằng chính nó, nhân một ma trận với ma trận không bằng ma trận không.

Bổ đề 1.2. *Với mọi* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *ta có :*

a) $(AB)C = A(BC)$.

b) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Chứng minh. a) Với mọi $i = 1, ..., m$, $l = 1, ..., q$ ta có

$$\big((AB)C\big)_{il} = \sum_{k=1}^{p}(AB)_{ik}(C)_{kl} \qquad = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n}(A)_{ij}(B)_{jk}\right)(C)_{kl}$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n}(A)_{ij}(B)_{jk}(C)_{kl}\right) \quad = \sum_{j=1}^{n}(A)_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p}(B)_{jk}(C)_{kl}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(A)_{ij}(BC)_{jl} \qquad = \big(A(BC)\big)_{il}$$

Vậy $(AB)C = A(BC)$.

b) Suy ra từ $\lambda\sum_{j=1}^{n}(A)_{ij}(B)_{jk} = \sum_{j=1}^{n}(\lambda A)_{ij}(B)_{jk} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{ij}(\lambda B)_{jk}$. □

Theo bổ đề 1.2 a), khi một dãy phép nhân ma trận được thực hiện thì nó có tính chất kết hợp.

Chú ý rằng phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ta có $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{2\times 2}$;

$BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Vậy trường hợp này, $AB \neq BA$.

Ta bỏ qua chứng minh đơn giản của bổ đề sau.

Bổ đề 1.3. a) *Với mọi* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ *ta có* $A(B + C) = AB + AC$.

b) *Với mọi* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$

ta có $(A + B)C = AC + BC$.

Như vậy : Khi phép tính được thực hiện thì phép nhân ma trận phân phối đối với phép cộng ma trận.

3. Ma trận chuyển vị và ma trận liên hợp

Cho ma trận A cấp $m \times n$. Ta gọi ma trận chuyển vị của A, kí hiệu A^T, là ma trận cấp $n \times m$ có các phần tử xác định bởi

$$(A^T)_{ji} = (A)_{ij} \text{ với mọi } j = 1, ..., n, i = 1, ..., m.$$

Như vậy để có ma trận chuyển vị của A, ta chỉ việc đổi các dòng của A theo thứ tự thành các cột hoặc ngược lại.

Bổ đề 1.4. a) *Với mọi* A, B $\in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *ta có*

$$(A^T)^T = A\,;\ (A+B)^T = A^T + B^T,\ (\lambda A)^T = \lambda A^T.$$

b) *Với mọi* A $\in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, B $\in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ta có

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Chứng minh. Chứng minh a) là tầm thường. Ta chứng minh b).

Với mọi $i = 1, ..., m$, $k = 1, ..., p$ ta có

$$\left((AB)^T\right)_{ki} = (AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij}(B)_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (B^T)_{kj}(A^T)_{ji}$$

$$= (B^T A^T)_{ki}.$$

Do đó $(AB)^T = B^T A^T$. □

4. Ma trận vuông

Ma trận có n dòng, n cột gọi là ma trận vuông cấp n. Tập tất cả các ma trận vuông cấp n có các phần tử thuộc trường $\mathbb{K}$, kí hiệu là $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Từ định lí 1.1 và các bổ đề 1.1, 1.2, 1.3 ta có :

Định lí 1.2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *với phép cộng và phép nhân ma trận là một vành có đơn vị, tức là mọi* A, B, C $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *ta có*

1) $(A + B) + C = A + (B + C)$ 2) $A + B = B + A$

3) $A + O = A$ 4) $A + (-A) = O$

5) $(AB)C = A(BC)$

6) $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$

7) $AI = IA = A$.

Ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ gọi là ma trận khả nghịch nếu tồn tại $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, sao cho :

$$AB = BA = I.$$

Ma trận B thoả mãn điều kiện định nghĩa trên nếu có là duy nhất. Thật vậy nếu ma trận C cũng thoả mãn $AC = CA = I$ thì

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B.$$

Khi A khả nghịch, đặt $B = A^{-1}$ và gọi là nó là ma trận nghịch đảo của A. Ta có

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Hiển nhiên $O \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ không khả nghịch, $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ khả nghịch. Ma trận khác không $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ khác không nhưng không khả nghịch, vì nếu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

thì $a + c = 1$ và $a + c = 0$, không thể xảy ra.

Vấn đề khi nào ma trận khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo như thế nào sẽ xét ở §3.

Bổ đề 1.5. *Cho* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *là các ma trận khả nghịch. Khi đó*

a) A^{-1} *khả nghịch và* $(A^{-1})^{-1} = A$.

b) A^T *khả nghịch và* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

c) AB *khả nghịch và* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Chứng minh. a) Suy ra từ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

b) Ta có $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I.$$

c) Ta có

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I.$$ □

Cho A là một ma trận vuông. Với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta định nghĩa

$$A^k = AA...A \text{ (k lần A)}$$

Khi A là ma trận vuông khả nghịch thì ta đặt

$$A^o = I$$

$$A^k = (A^{-1})^{|k|} \text{ với } k \in \mathbb{Z},\ k < 0,$$

ta có A^k với mọi $k \in \mathbb{Z}$.

§2. Định thức

1. Hoán vị

Cho tập $S = \{1, 2, ..., n\}$. Một song ánh $P: S \to S$ gọi là một hoán vị. Nếu đặt $P(i) = j_i$ thì hoán vị P có thể viết dưới dạng

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

hay vắn tắt hơn $P = (j_1, j_2, \dots, j_n)$

Một hoán vị P được gọi là một phép chuyển vị nếu chỉ có hai phần tử đổi chỗ cho nhau còn những phần tử khác giữ nguyên. Phép chuyển vị đổi i cho j kí hiệu là T_{ij}. Chẳng hạn :

$$T_{12} = (2, 1, 3, \dots, n).$$

Ta có

$$T_{ij}(k) = \begin{cases} i \text{ nếu } k = j \\ j \text{ nếu } k = i \\ k \text{ nếu } k \neq i, j \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$T_{ij} = T_{ji}\,;\ T_{ij} \circ T_{ji} = I \text{ (hoán vị đồng nhất)}$$

Do đó $T_{ji} = T_{ij}^{-1}$.

Định lí 2.1. *Mọi hoán vị đều là tích của các phép chuyển vị.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh rằng một hoán vị P giữ nguyên vị trí của ít nhất r phần tử đều phân tích được thành tích của các phép chuyển vị.

Điều này là hiển nhiên với $r = n$, khi đó

$$P = I = T_{ij} \circ T_{ji} \text{ với } i, j \text{ bất kì.}$$

Giả sử kết quả đúng với r, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với r – 1. Kí hiệu P_{r-1} là một hoán vị có ít nhất r – 1 phần tử giữ nguyên và nó không phải là hoán vị đồng nhất. Khi đó tồn tại j sao cho $P_{r-1}(j) = k \neq j$. Xét phép chuyển vị T_{kj}.

Nếu $P_{r-1}(i) = i$ thì

$$T_{kj} \circ P_{r-1}(i) = T_{kj}(i) = i.$$

Vậy nếu P_{r-1} giữ nguyên vị trí của i thì $T_{kj} \circ P_{r-1}$ cũng giữ nguyên vị trí của i. Ngoài ra

$$T_{kj} \circ P_{r-1}(j) = T_{kj}(k) = j,$$

do đó $T_{kj} \circ P_{r-1}$ giữ nguyên vị trí của ít nhất r phần tử. Theo giả thiết $P_r = T_{kj} \circ P_{r-1}$ bằng tích của các phép chuyển vị, vì vậy $P_{r-1} = T_{kj}^{-1} \circ P_r$ cũng bằng tích của các phép chuyển vị. □

Chú ý rằng sự phân tích một hoán vị thành tích của các chuyển vị là không duy nhất.

Cho hoán vị $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, ta nói rằng j_i, j_k tạo nên một nghịch thế nếu $i < k$ nhưng $j_i > j_k$.

Ví dụ. P = (3, 1, 2) thì 3, 1 ; 3, 2 cho ta hai nghịch thế, 1, 2 không cho ta nghịch thế.

Cho hoán vị P. Ta kí hiệu N(P) là số nghịch thế của hoán vị P và $s(P) = (-1)^{N(P)}$. Nếu N(P) chẵn thì ta nói P là chẵn (hay dương), lúc đó s(P) = 1. Nếu N(P) lẻ thì ta nói P là lẻ (hay âm), lúc đó s(P) = – 1.

Ta có $s(I) = 1$, $s(T_{ij}) = -1$ và

$$s(P \circ T_{ij}) = -s(P).$$

Từ đó bằng cách viết mỗi hoán vị thành tích các chuyển vị, ta có :

s(P) = 1 nếu số chuyển vị chẵn;

s(P) = – 1 nếu số chuyển vị lẻ;

$s(P \circ P') = s(P) \,.\, s(P')$;

$s(P^{-1}) = s(P)$.

2. Định nghĩa định thức

Cho A là ma trận vuông cấp n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ta gọi định thức của A là số

$$\det A = \sum s(P) a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

tổng lấy khắp tất cả các hoán vị $P = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$. Ta còn sử dụng kí hiệu detA là $|A|$.

Ta thấy rằng nếu A cấp n thì $|A|$ gồm tổng của n! số hạng. Trong số hạng $a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ mỗi dòng, mỗi cột chỉ có duy nhất một phần tử tham gia vào.

Định thức của ma trận vuông cấp n gọi là định thức cấp n. Trường hợp n = 2 ta có

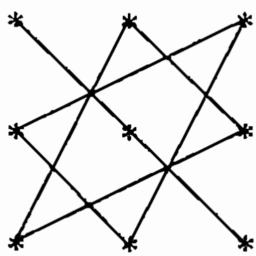
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = s(1, 2) a_{11} a_{22} + s(2,1) a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Ta thường nói định thức cấp 2 bằng "tích các số trên đường chéo chính, trừ tích các số trên đường chéo phụ".

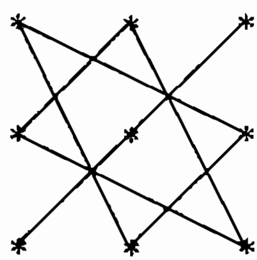
Tương tự, ta có định thức cấp 3 :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2.$$

Khai triển này thường được nhớ theo quy tắc Sarrus sau :



Dấu (+)



Dấu (–)

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = [1.(-3).0 + 3.2(-2) + 4(-2).1] - [2(-3).4 + 1(-2).1 + 3.(-2).0]$$

$$= (-12 - 8) - (24 - 2) = 6.$$

3. Các tính chất của định thức

Tính chất 1. $\det A^T = \det A$

Chứng minh. Kí hiệu $a_{ji} = b_{ij}$, khi đó

$$\det A^T = \sum s(j_1, j_2, ..., j_n)\, b_{1j_1} b_{2j_2} ... b_{nj_n} = \sum s(P) a_{P(1)1} a_{P(2)2} ... a_{P(n)n} =$$

$$= \sum s(P) a_{1P^{-1}(1)} a_{2P^{-1}(2)} ... a_{nP^{-1}(n)} =$$

$$= \sum s(P^{-1}) a_{1P^{-1}(1)} a_{2P^{-1}(2)} ... a_{nP^{-1}(n)} = \det A,$$

vì P chạy khắp các hoán vị thì P^{-1} cũng chạy khắp các hoán vị. □

Theo tính chất 1, trong định thức vai trò của dòng và cột là như nhau. Một tính chất ta phát biểu cho cột thì cũng đúng với dòng và ngược lại.

Tính chất 2. *Nếu tất cả các phần tử của một cột được nhân với số λ thì định thức được nhân lên với λ.*

Kí hiệu $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ ... \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, khi đó ma trận A có thể viết một cách hình thức dưới dạng $A = (a_1, ..., a_j, ..., a_n)$.

Chứng minh.

$$\det(a_1, ..., \lambda a_j, ..., a_n) = \sum s(P) \lambda a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n} =$$

$$= \lambda \sum s(P) a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n} = \lambda \det A.$$ □

Nếu $\lambda = 0$ thì $\det\,(a_1, ..., 0, ..., a_n) = 0$, do đó định thức có một cột bằng 0 thì bằng 0 (cột gọi là bằng 0 nếu tất cả các phần tử trong cột đều bằng 0).

Tính chất 3. *Nếu* $a_j = a'_j + a''_j$ *thì*

$$\det A = \det(a_1,...,a'_j,...,a_n) + \det(a_1,...,a''_j,...,a_n)$$

Chứng minh.

$$\det A = \sum s(P)a_{1j_1}...(a'_{ij} + a''_{ij})...a_{nj_n} =$$

$$= \sum s(P)a_{1j_1}...a'_{ij}...a_{nj_n} + \sum s(P)a_{1j_1}...a''_{ij}...a_{nj_n} =$$

$$= \det(a_1,...,a'_j,...,a_n) + \det(a_1,...,a''_j,...,a_n).$$ □

Tính chất 4. *Nếu đổi chỗ hai cột cho nhau thì định thức đổi dấu.*

Chứng minh. Nếu đổi chỗ cột i cho cột k thì số hạng của nó sẽ có dạng :

$$s(P')a_{1j_1}...a_{ij_k}...a_{kj_i}...a_{nj_n} = s(P.T_{jk})a_{1j_1}...a_{ij_i}...a_{kj_k}...a_{nj_n}$$

$$= -s(P)a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$$

với mọi $P = (j_1, j_2, ..., j_n)$. Vậy mỗi số hạng của định thức mới đều bằng, trái dấu của một số hạng của định thức cũ, nghĩa là định thức đổi dấu. □

Tính chất 4'. *Một định thức có hai cột giống nhau thì định thức đó bằng* 0.

Chứng minh. Nếu $a_j = a_k$ thì

$$\det A = \det(a_1,...,a_j,...,a_k,...,a_n) =$$

$$= \det(a_1,...,a_k,...,a_j,...a_n) = -\det A.$$

Vì detA = – detA nên detA = 0. □

Tính chất 5. *Nếu một cột của định thức là tổ hợp tuyến tính của những cột khác thì định thức bằng 0.*

Chứng minh. Giả sử cột j là tổ hợp tuyến tính của các cột khác, tức là $a_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k a_k$. Khi đó :

$$\det(a_1,...,\sum_{k\neq j}\lambda_k a_k,...,a_n) = \sum_{k\neq j}\det(a_1,...,\lambda_k a_k,...,a_n) \quad \text{(tính chất 3)}$$

$$= \sum_{k\neq j}\lambda_k \det(a_1,...,a_k,...,a_n) \quad \text{(tính chất 2)}$$

$$= \sum_{k\neq j}\lambda_k 0 = 0 \quad \text{(tính chất 4')}.$$ □

Tính chất 6. *Nếu cộng thêm vào cột nào đó một tổ hợp tuyến tính của các cột khác thì định thức không thay đổi.*

Chứng minh. Giả sử thay cột a_j bởi cột

$$a'_j = a_j + \sum_{k \neq j} \lambda_k a_k.$$

Ta có

$$\det(a_1, \dots, a'_j, \dots, a_n) =$$

$$= \det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, \sum_{k \neq j} \lambda_k a_k, \dots, a_n) \text{(tính chất 3)}$$

$$= \det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n) = \det A \qquad \text{(tính chất 5).} \qquad \square$$

4. Phương pháp khai triển định thức. Định lí Laplace

Cho định thức cấp n

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum s(P) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \qquad (1)$$

Ta gọi phần phụ của phần tử a_{ij} là định thức con M_{ij} cấp n – 1 nhận được từ D bằng cách bỏ đi dòng i, cột j. Số

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

gọi là phần phụ đại số của phần tử a_{ij}.

Sau đây là công thức khai triển định thức theo dòng hoặc cột

Bổ đề 2.1. *Với mọi* i, j = 1, 2, ..., n *ta có*

(i) $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$,

hoặc

(ii) $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$.

Chứng minh. Từ (1), nhóm các số hạng có chứa $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ và đặt thừa số chung ta viết được D dưới dạng

$$D = a_{i1}B_{i1} + a_{i2}B_{i2} + \dots + a_{in}B_{in}.$$

Do vậy để chứng minh (i), và từ đó có (ii), ta chỉ cần kiểm tra

$$a_{ij}B_{ij} = a_{ij}A_{ij} \text{ với } i, j = 1, 2, ..., n. \qquad (2)$$

Thật vậy

$$a_{11}B_{11} = a_{11}\sum s(1, j_2, ..., j_n)\, a_{2j_2}a_{3j_3}...a_{nj_n}$$

$$= a_{11}\sum s(j_2, ..., j_n)a_{2j_2}a_{3j_3} ... a_{nj_n} = a_{11}M_{11}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} = a_{11}.A_{11}.$$

tức là (2) đúng với $i = j = 1$.

Bây giờ ta sẽ chứng tỏ (2) đúng với i, j bất kì.

Nếu đổi chỗ dòng i lên dòng $i - 1$ rồi dòng $i - 1$ lên dòng $i - 2$, ..., sau $i - 1$ lần đổi dòng ta đưa dòng i lên dòng 1. Tương tự, qua $j - 1$ lần đổi cột ta đưa cột j thành cột 1. Như vậy, qua $i + j - 2$ lần đổi dòng và cột ta được định thức D thành định thức D' có phần tử $a'_{11} = a_{ij}$. Trong quá trình đổi dòng và cột trên, thứ tự các dòng và cột (trừ dòng i và cột j) vẫn giữ nguyên, do đó $M'_{11} = M_{ij}$. Theo tính chất 4 của định thức, $D = (-1)^{i+j-2}D'$. Do đó

$$a_{ij}B_{ij} = (-1)^{i+j-2}\, a'_{11}.M'_{11} = (-1)^{i+j-2}\, a_{ij}M_{ij} = a_{ij}A_{ij}. \qquad \square$$

Ví dụ. Tính

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Giải. Khai triển D theo cột 3 ta được : $D = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Khai triển theo cột 2 ta được : $D = -(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.$

Bây giờ ta sẽ tổng quát hoá công thức khai triển định thức theo dòng hoặc cột.

Xét các phần tử của định thức D nằm trên h dòng, h cột, giữ nguyên thứ tự, ta được định thức cấp h

$$M = M^{i_1, i_2, ..., i_h}_{j_1, j_2, ..., j_h}$$

trong đó $i_1 < i_2 < ... < i_h$ là các dòng và $j_1 < j_2 < ... < j_h$ là các cột.

n – h dòng và n – h cột còn lại cho ta một định thức, gọi là định thức phụ của M, kí hiệu là

$$\overline{M} = \overline{M}^{i_1,i_2,\dots,i_h}_{j_1,j_2,\dots,j_h}$$

và ta gọi phần phụ đại số của M là

$$A_M = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_h+j_1+j_2+\dots+j_h}\,\overline{M}$$

Ta sẽ chứng minh.

Bổ đề 2.2. $M.A_M$ *là một bộ phận các số hạng của* D.

Chứng minh. Giả sử M tạo thành bởi h dòng đầu tiên và h cột đầu tiên của D. Khi đó một số hạng của $M.A_M$ sẽ có dạng

$$d = s(j_1, j_2, \dots, j_h)\, a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{hj_h}\, s(j_{h+1}, \dots, j_n)\, a_{h+1,j_{h+1}}\dots a_{nj_n}\,.$$

Vì mọi $k \le h$ thì $j_k \le h$ và mọi l thì $j_{h+l} \ge h$, do đó

$$N(j_1, \dots, j_h, j_{h+1}, \dots, j_n) = N(j_1, \dots, j_h) + N(j_{h+1}, \dots, j_n).$$

Vì vậy

$$d = s(j_1, \dots, j_h, \dots, j_n)\, a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n},$$

tức là mọi số hạng của $M.A_M$ đều là số hạng của D.

Bây giờ giả sử M nằm ở vị trí tổng quát. Sau $i_1 - 1$ lần đổi dòng, ta đưa dòng i_1 về dòng 1, sau $i_2 - 2$ lần đổi dòng ta đưa dòng i_2 về dòng 2, ... Như vậy sau :

$$(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \dots + (i_h - h) = i_1 + i_2 + \dots + i_h - \frac{h(h+1)}{2}$$

lần đổi dòng ta đưa h dòng của M về h dòng đầu tiên với thứ tự giữ nguyên. Tương tự, sau

$$j_1 + j_2 + \dots + j_h - \frac{h(h+1)}{2}$$

lần đổi cột ta đưa h cột của M về h cột đầu tiên.

Như vậy sau $(i_1 + \dots + i_h) + (j_1 + \dots + j_n) - h(h+1)$ lần đổi dòng và cột ta đưa D thành D', M thành M', $\overline{M}$ thành $\overline{M}'$.

Chú ý rằng h(h + 1) là số chẵn, ta có

$$D = (-1)^{(i_1+\dots+i_h)+(j_1+\dots+j_h)}D'.$$

Vì $M'.\overline{M}' = M\overline{M}$ là một bộ phận các số hạng của D' nên $M.A_M$ là một bộ phận các số hạng của D. □

Định lí 2.2. (Định lí Laplace). *Nếu trong một định thức D ta lấy ra h dòng (hoặc h cột), $1 \le h \le n - 1$ thì tổng tất cả các định thức con cấp h chứa trong các dòng (hoặc các cột) ấy nhân với phần phụ đại số của chúng bằng định thức D.*

Chứng minh. Giả sử ta lấy ra h dòng. Kí hiệu các định thức con cấp h lấy từ h dòng này là $M_1, M_2, \ldots, M_s$, phần phụ đại số tương ứng của chúng là $A_1, A_2, \ldots, A_s$. Theo kết quả đã trình bày ở trên

$$M_1A_1 + M_2A_2 + \ldots + M_sA_s \qquad (3)$$

là tổng các số hạng của D, các số hạng này là khác nhau. Để chứng minh tổng trên bằng D ta chỉ cần chỉ ra nó có đúng n! số hạng.

Số định thức M_i có được bằng số cách chọn không kể thứ tự h phần tử khác nhau từ n phần tử, do đó

$$s = C_n^h = \frac{n!}{h!(n-h)!}.$$

M_i có h! số hạng, A_i có (n−h)! số hạng, do đó M_iA_i có h! (n−h)! số hạng. Từ đó tổng (3) có s.h!(n−h)! = n! số hạng. □

Ví dụ. Tính

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Giải. Chọn dòng 1 và dòng 4, chỉ có một định thức con khác không là $M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, phần phụ đại số của nó là :

$$A_M = (-1)^{1+4+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Do đó

$$D = M.A_M = 1.1 = 1.$$

5. Vài định thức có dạng đặc biệt

a) Theo định lí Laplace ta có

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

b) Ma trận vuông A gọi là có dạng tam giác nếu $a_{ij} = 0$ với mọi $i > j$ hoặc $a_{ij} = 0$ với mọi $i < j$, tức là

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ hoặc } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Trong cả hai trường hợp, theo định nghĩa định thức ta có

$$|A| = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Trường hợp đặc biệt của ma trận tam giác là ma trận (đường) chéo : $a_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$.

Kí hiệu $I = I_n$ là ma trận đơn vị, ta có $|I| = 1$.

Ví dụ. a) Tính

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Giải. Nhân dòng thứ nhất với (–2), cộng vào dòng thứ hai, sau khi đã nhân dòng thứ hai với (–1), cộng vào các dòng phía dưới ta được

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = 1.(-2).1.2\dots(n-2) = -2\left((n-2)!\right)(n \geq 2).$$

b) Tính định thức cấp n

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Giải. Khai triển theo dòng đầu ta được

$$D_n = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

Chú ý rằng cả hai định thức đều là cấp n – 1, do đó định thức thứ nhất chính là D_{n-1}, khai triển định thức thứ hai theo cột đầu ta thấy nó chính là D_{n-2}. Vì vậy

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}.$$

Bởi vì $D_1 = 2, D_2 = 3$ nên bằng quy nạp ta được

$$D_n = 2n - (n - 1) = n + 1.$$

6. Hệ phương trình tuyến tính Cramer

Hệ phương trình tuyến tính gồm n phương trình, n ẩn dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

gọi là hệ Cramer nếu $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$

Nếu đặt $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

thì hệ trên có thể viết lại thành

$$x_1a_1 + \dots + x_ja_j + \dots + x_na_n = b.$$

Đặt $D_j = \det(a_1, \ldots, b, \ldots, a_n)$ (b ở vị trí thứ j). Khi đó ta có định lí sau đây, gọi là quy tắc Cramer để giải hệ Cramer.

Định lí 2.3. (Định lí Cramer). *Hệ Cramer có một nghiệm duy nhất là*

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Chứng minh. Nếu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một nghiệm của hệ thì

$$\begin{aligned} D_1 &= \det(b, a_2, \ldots, a_n) \\ &= \det(x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n, a_2, \ldots, a_n) \\ &= \det(x_1a_1, a_2, \ldots, a_n) + \det(x_2a_2 + \ldots + x_na_n, a_2, \ldots, a_n) \\ &= x_1 \det(a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ (do tính chất 5 của định thức)} \\ &= x_1 D. \end{aligned}$$

Vì $D \neq 0$ nên $x_1 = \frac{D_1}{D}$. Tương tự như vậy ta có $x_j = \frac{D_j}{D}$ với j = 1, ..., n. Vậy hệ Cramer có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất : $x_j = \frac{D_j}{D}$, j = 1,..., n.

Ta còn phải chứng minh $x_j = \frac{D_j}{D}$ đúng là một nghiệm của hệ.

Trước hết, ta chứng minh rằng :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{ij} = \begin{cases} D \text{ nếu } k = i \\ 0 \text{ nếu } k \neq i. \end{cases}$$

Thật vậy, bằng cách đổi dòng thành cột, ta sẽ chứng minh

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ij} = \begin{cases} D \text{ nếu } k = j \\ 0 \text{ nếu } k \neq j. \end{cases}$$

Nếu k = j thì theo công thức khai triển theo cột, ta có ngay $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = D$. Nếu $k \neq j$ thì

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ij} = \det(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_k, \ldots, a_n) = 0$$

(định thức nhận được từ D bằng cách thay cột j bởi cột k).

Tương tự như vậy ta có

$$D_j = \sum_{i=1}^{n} b_iA_{ij}.$$

Vế trái của phương trình thứ k trong hệ có dạng $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j$. Thay $x_j = \frac{D_j}{D}$ vào ta có

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\frac{D_j}{D} = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}\right) =$$

$$= \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{n} b_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{ij}\right) = \frac{1}{D}b_k D = b_k.$$

Vậy $x_j = \frac{D_j}{D}$, $j = 1, ..., n$ đúng là nghiệm của hệ. □

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0. \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -28,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -16. \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -20.$$

Do vậy hệ có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{7}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$.

§3. Liên hệ giữa định thức và ma trận

1. Phép toán ma trận và định thức

Cho A và B là các ma trận vuông cấp n. Khi đó dễ dàng thấy rằng, nói chung $|A + B| \neq |A| + |B|$. Đối với phép nhân với số ta có $|\lambda A| = \lambda^n |A|$. Đối với phép nhân ta có :

Định lí 3.1. *Với mọi* A, B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *ta có*

$$|AB| = |A||B|.$$

Chứng minh. Giả sử

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

và xét định thức cấp 2n

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Theo định lí Laplace, khai triển D theo n dòng đầu ta được

$$D = |A||B|$$

Vì vậy để chứng minh định lí, ta chỉ cần chỉ ra $D = |C|$, trong đó $C = AB$. Nhân cột thứ nhất của D với b_{11}, cột thứ hai với $b_{21}, \dots,$ cột thứ n với b_{n1} rồi cộng vào cột thứ n + 1, cột thứ n + 1 trở thành

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} + 0 = c_{11} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1} + 0 = c_{21} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots + a_{nn}b_{n1} + 0 = c_{n1} \\ -b_{11} + \quad 0 \quad + \dots + \quad 0 \quad + b_{11} = 0 \\ \quad 0 \; - \quad b_{21} \quad + \dots + \quad 0 \quad + b_{21} = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad 0 \; + \quad 0 \quad + \dots - \; b_{n1} \quad + b_{n1} = 0 \end{cases}$$

Từ đó ta thấy, nếu nhân cột thứ nhất với b_{1j}, cột thứ hai với $b_{2j}, \dots,$ cột thứ n với b_{nj} rồi cộng vào cột thứ n + j thì cột thứ n + j có các phần tử theo thứ tự là

$$c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj}, 0, \dots, 0 \text{ với } j = 1, 2, \dots, n.$$

Tất cả các phép biến đổi trên đều không làm thay đổi giá trị D, do đó

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Khai triển D theo n cột cuối ta được

$$D = (-1)^{1+2+\ldots+n+[(n+1)+(n+2)+\ldots+2n]} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2n^2+n}(-1)^n |C| = |C|.$$

Định lí được chứng minh. □

2. Điều kiện ma trận khả nghịch. Công thức tìm ma trận nghịch đảo

Định lí 3.2. *Ma trận vuông* A *khả nghịch nếu và chỉ nếu* $D = |A| \neq 0$ *và khi đó*

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Chứng minh. Nếu A khả nghịch thì $AA^{-1} = I$ nên theo định lí 3.1, $|A||A^{-1}| = 1$, do đó $|A| \neq 0$.

Bây giờ giả sử $D = |A| \neq 0$. Theo chứng minh định lí 2.5

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{ij} = \begin{cases} D \text{ nếu } k = i \\ 0 \text{ nếu } k \neq i \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ij} = \begin{cases} D \text{ nếu } k = j \\ 0 \text{ nếu } k \neq j \end{cases}$$

vì vậy nếu đặt $B = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ thì AB = BA = I, tức là $A^{-1} = B$. □

Theo định lí 3.2, ma trận vuông cấp hai $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ khả nghịch nếu và chỉ nếu $ad - bc \neq 0$ và

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Giải. Bởi vì $|A| = 6$ nên A khả nghịch. Ngoài ra

$A_{11} = 4$; $A_{21} = -3$; $A_{31} = -5$;

$A_{12} = 0$; $A_{22} = 3$; $A_{32} = 3$;

$A_{13} = 2$; $A_{23} = -3$; $A_{33} = -1$,

Nên theo định lí 3.2

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

3. Hạng của ma trận. Phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

Cho $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Ta gọi hạng của ma trận A là cấp cao nhất của định thức con khác không tìm được ở trong A. Hạng của ma trận A kí hiệu là rank(A) hoặc r(A). Hiển nhiên rằng $r(A) \le \min\{m,n\}$ và $r(A^T) = r(A)$.

Ví dụ. Tìm hạng ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

Giải. Vì $|A| = 0$ nên $r(A) < 3$. Mặt khác, định thức con $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$ nên $r(A) \geq 2$.

Vậy $r(A) = 2$.

Ma trận A gọi là có dạng bậc thang nếu nó có k dòng đầu khác không, các dòng còn lại bằng không và nếu kí hiệu a_{ij_i} là phần tử khác không đầu tiên của dòng thứ i thì

$$j_1 < j_2 < \ldots < j_k.$$

Nếu A có dạng bậc thang thì định thức con cấp k

$$M^{1,2,\ldots,k}_{j_1,j_2,\ldots,j_k} = a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{kj_k} \neq 0$$

và mọi định thức con cấp lớn hơn k đều bằng không, do đó

$$r(A) = k.$$

Như vậy : Hạng của một ma trận dạng bậc thang bằng số dòng khác không của ma trận đó.

Ta gọi các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng của ma trận là những phép biến đổi sau đây :

Loại 1 : Đổi chỗ hai dòng cho nhau, còn những dòng khác giữ nguyên;

Loại 2 : Nhân vào một dòng với một số khác không, còn những dòng khác giữ nguyên ;

Loại 3 : Cộng vào một dòng một dòng khác đã nhân với một số, còn các dòng khác giữ nguyên.

Ma trận vuông A gọi là không suy biến nếu $|A| \neq 0$. Theo các tính chất của định thức dễ dàng thấy rằng, nếu A không suy biến thì sau các phép biến đổi sơ cấp, ma trận nhận được cũng không suy biến.

Ta có định lí sau đây, sẽ được chứng minh trong chương III.

Định lí 3.3. *Hạng của một ma trận không đổi khi thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng*

Áp dụng định lí 3.3, để tìm hạng của một ma trận ta sẽ thực hiện liên tiếp các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận về dạng bậc thang. Số dòng khác không của ma trận dạng bậc thang nhận được là hạng của ma trận.

Ví dụ. Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải. Ta có

$$r(A) = r\begin{pmatrix}1 & 2 & -4 & 1\\ 0 & -1 & 7 & -1\\ 0 & -2 & 14 & -2\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1 & 2 & -4 & 1\\ 0 & -1 & 7 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2.$$

4. Biến đổi sơ cấp tìm ma trận nghịch đảo

Ta gọi ma trận vuông nhận được từ ma trận đơn vị bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng là ma trận sơ cấp.

Từ định nghĩa hạng và định lí 3.2 suy ra $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ khả nghịch nếu và chỉ nếu $r(A) = n$. Vì vậy mọi ma trận sơ cấp đều khả nghịch.

Cho A là một ma trận vuông cấp n. Khi đó mỗi phép biến đổi sơ cấp trên hai dòng của A tương đương với việc nhân vào bên trái của A ma trận sơ cấp cấp n nhận được từ I_n bằng phép biến đổi tương ứng.

Thật vậy, đổi chỗ dòng thứ i và dòng thứ j của A tương đương với việc nhân vào bên trái A ma trận sơ cấp nhận được từ I_n bằng cách đổi chỗ dòng thứ i cho dòng thứ j. Ví dụ

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$$

là phép đổi chỗ dòng thứ nhất cho dòng thứ hai. Hoàn toàn tương tự đối với hai loại phép biến đổi trên dòng khác.

Nếu A khả nghịch thì tồn tại các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa nó về ma trận đơn vị, tức là tồn tại các ma trận sơ cấp $P_1, P_2, \ldots, P_k$ để

$$P_k P_{k-1} \ldots P_1 A = I.$$

Nhân hai vế về bên phải với A^{-1} ta được

$$A^{-1} = P_k P_{k-1} \ldots P_1 = P_k P_{k-1} \ldots P_1 . I$$

nghĩa là A^{-1} có thể nhận được từ I bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa A thành I.

Từ đó ta có phương pháp tìm ma trận nghịch đảo của A như sau: Ghép A và I thành một ma trận cấp $n \times 2n$ $(A|I)$; dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận này sao cho n cột đầu thành ma trận đơn vị I. Khi đó n cột sau của $(A \mid I)$ sẽ thành A^{-1}. Quá trình này được tóm tắt

$$(A \mid I) \xrightarrow[\text{trên dòng}]{\text{Biến đổi sơ cấp}} (I \mid A^{-1})$$

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Giải. Theo "phương pháp biến đổi sơ cấp" ta có

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2/3 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/2 & -1/6 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/2 & -5/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/2 & -1/6 \end{array}\right) = (I|A^{-1}).$$

Vậy ta cũng tìm được

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/2 & -5/6 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & -1/6 \end{pmatrix}$$

§4. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

1. Định nghĩa. Điều kiện tồn tại nghiệm

Hệ phương trình tuyến tính với m phương trình, n ẩn số là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .. + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

trong đó a_{ij} (i = 1, 2, ... m, j = 1, 2,... n) là các hệ số của ẩn ; b_i (i = 1, 2, ..., m) là các hệ số tự do ; x_j (j = 1, ..., m) là các ẩn số.

Kí hiệu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

và gọi chúng lần lượt là ma trận các hệ số của ẩn và ma trận các hệ số bổ sung của hệ (1).

Bộ số $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ gọi là một nghiệm của hệ (1) nếu

$$a_{i1}\overline{x}_1 + a_{i2}\overline{x}_2 + \dots + a_{in}\overline{x}_n = b_i$$

là đẳng thức đúng với mọi i = 1, ..., m.

Giải hệ phương trình là tìm tập các nghiệm của hệ.

Ta có định lí sau đây sẽ được chứng minh trong chương III.

Định lí 4.1. (Định lí Kronecker – Capelli) *Hệ (1) có nghiệm nếu và chỉ nếu* $r(A) = r(\overline{A})$. *Cụ thể hơn, ta có*

– *Nếu* $r(A) < r(\overline{A})$ *thì hệ vô nghiệm.*

– *Nếu* $r(A) = r(\overline{A}) = n$ *(số ẩn của hệ) thì hệ có nghiệm duy nhất.*

– *Nếu* $r(A) = r(\overline{A}) = r < n$ *thì hệ có vô số nghiệm phụ thuộc* $n - r$ *tham số.*

2. Các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

a) Quy tắc Cramer

Nếu hệ (1) có số phương trình bằng số ẩn và $\det A \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất được tính theo quy tắc Cramer (xem định lí 2.3).

b) Phương pháp định thức

Nếu hệ (1) có hạng $r < n$ thì bằng cách loại các phương trình không cần thiết, hệ (1) tương đương với một hệ gồm r phương trình, n ẩn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + x_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + x_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + x_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

Giả sử $\det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$

Khi đó ta viết hệ dưới dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \dots\dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Với $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ tuỳ ý, hệ này là hệ Cramer nên ta có thể giải nó theo quy tắc Cramer.

Ví dụ. Giải hệ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$.

Giải. Ta có $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 - 2x_3 \\ x_1 + 4x_2 = 2 + 3x_3 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1-2x_3 & -1 \\ 2+3x_3 & 4 \end{vmatrix} = 6 - 5x_3, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1-2x_3 \\ 1 & 2+3x_3 \end{vmatrix} = 1 + 5x_3.$$

Do đó hệ có nghiệm là $\begin{cases} x_1 = \dfrac{6-5x_3}{5} \\ x_2 = \dfrac{1+5x_3}{5} \\ x_3 \quad \text{tuỳ ý} \end{cases}$

c) Phương pháp khử (phương pháp Gauss)

Ta gọi các phép biến đổi sơ cấp trên hệ phương trình tuyến tính là các phép biến đổi sau đây :

Loại 1 : Đổi chỗ hai phương trình cho nhau, còn những phương trình khác giữ nguyên ;

Loại 2 : Nhân một số khác 0 với một phương trình còn những phương trình khác giữ nguyên ;

Loại 3 : Cộng vào một phương trình một phương trình khác đã nhân với một số, còn những phương trình khác giữ nguyên.

Dễ dàng thấy rằng : các phép biến đổi sơ cấp đưa hệ phương trình tuyến tính thành một hệ mới tương đương.

Ta có thể giải hệ phương trình theo phương pháp sau đây : Dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa hệ về hệ có dạng bậc thang (tức là ma trận hệ số có dạng bậc thang), sau đó thế từ dưới lên để tìm nghiệm.

Ví dụ

a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \\ -1 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 4 \\ x_3 = 11 \end{cases}$$

Từ đó hệ có nghiệm duy nhất là (–40, 15, 11).

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Giải. Ta có $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \\ 0 & -7 & 6 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -7x_2 + 6x_3 = -11 \\ 0x_3 = 7 \end{cases}$

Vì phương trình thứ ba vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

c) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Giải. Ta có $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2. \\ -x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$

Cho x_4 tùy ý, ta có $x_3 = 2 - x_4$. Cho x_2 tùy ý, ta có $x_1 = 2 - 2x_2 - 2x_4$. Hệ có vô số nghiệm dạng

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 - 2x_4 \\ x_2 \text{ tuỳ ý} \\ x_3 = 2 - x_4 \\ x_4 \text{ tuỳ ý}. \end{cases}$$

Bài tập.

II.1. Cho các ma trận

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Tính a) $A^3 - 3A$; b) $B^TA - B^T$; c) $A(B + C)$; d) $A - BC^T$.

II.2. Với A, B, C như trong bài tập II.1, tìm ma trận X sao cho

a) $B + 2X = C$; b) $AX = B$;

c) $A(X + C) = B$; d) $XB = C$.

II.3. Tính

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$; b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; d) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

II.4. Tìm $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sao cho

a) $A^2 = O$; b) $A^2 = I$.

II.5. Tìm $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sao cho $AB = BA$ với mọi $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

II.6. Ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ gọi là luỹ linh nếu tồn tại $r \in \mathbb{N}$ sao cho $A^r = O$. Cho $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ luỹ linh và $AB = BA$.

Chứng minh AB và $A + B$ luỹ linh.

II.7. Ta gọi vết của $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ là $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} (A)_{ii}$.

Với mọi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Chứng minh

a) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$. b) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. c) $AB - BA \neq I$.

II.8. Tính các định thức

a) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} \sin\alpha+\sin\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{vmatrix}$.

II.9. Tính các định thức

a) $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$, $\varepsilon = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$, $\varepsilon = \cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi$.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$, $\varepsilon = \cos\dfrac{4}{3}\pi + i\sin\dfrac{4}{3}\pi$.

II.10. Tính các định thức

a) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$.

II.11. Tính các định thức

a) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$.

II.12. Tính các định thức cấp n

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & -4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 6 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 6 \end{vmatrix}$.

II. 13. Tính các định thức cấp n

a) $\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$.

II.14. a) Tính định thức Vandermonde

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

b) Giải phương trình $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & a_1 & \dots & a_n \\ x^2 & a_1^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n & a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = 0$,

trong đó $a_1, \dots, a_n$ là các hằng số khác nhau.

II.15. Chứng minh

a) $\begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 & 1 + x_1 y_2 & \dots & 1 + x_1 y_n \\ 1 + x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & \dots & 1 + x_2 y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 + x_n y_1 & 1 + x_n y_2 & \dots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix} = 0$ với mọi $n \geq 3$.

b) $\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0$ với mọi $n \geq 2$, nếu $f_i(x)$ là đa thức bậc không quá $n - 2$.

II.16. Giải các hệ phương trình sau bằng quy tắc Cramer

a) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$;

$$\text{c)}\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3\,; \end{cases} \qquad \text{d)}\ \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -4 \\ 9x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 13 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 9x_2 + 2x_4 = 11. \end{cases}$$

II.17. Tìm giá trị lớn nhất của định thức cấp 3 khi

a) Các phần tử của nó chỉ nhận ± 1.

b) Các phần tử của nó chỉ nhận 0 hoặc 1.

II.18. Cho một định thức D_n cấp n, $n > 2$, có định thức cấp thấp hơn được xác định tương tự và có mối liên hệ

$$D_n = p\,D_{n-1} + q\,D_{n-2}$$

Chứng minh

a) $q = 0$ thì $D_n = p^{n-1}D_1$

b) $q \neq 0$, phương trình $x^2 - px - q = 0$ có hai nghiệm α, β thì

$$D_n = \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha - \beta}\cdot\alpha^{n-1} + \frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta - \alpha}\cdot\beta^{n-1} \text{ nếu } \alpha \neq \beta\,;$$

$$D_n = (n-1)\alpha^{n-2}D_2 - (n-2)\alpha^{n-1}D_1 \text{ nếu } \alpha = \beta.$$

II.19. Sử dụng bài tập II.18, hãy tính định thức cấp n

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

II.20. Cho $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ thoả mãn $AB = I$. Chứng minh A khả nghịch và $A^{-1} = B$.

II.21. Cho $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Chứng minh

a) $A^9 = A^{20} = I$ thì $A = I$.

b) $A^2B^3 = A^3B^7 = A^8B^4 = I$ thì $A = B = I$.

II.22. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

II.23. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận cấp n sau

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

II.24. Giải các phương trình ma trận sau

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; b) $X . \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} . X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} . X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

II.25. Tính A^n

a) $A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

II.26. Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Chứng minh

a) $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I = 0$.

b) Nếu tồn tại $n > 2$ sao cho $A^n = 0$ thì $A^2 = 0$.

II.27. Tìm hạng của các ma trận sau

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & 5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

II.28. Tìm hạng của các ma trận sau

a) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & \lambda \\ \lambda & 10 & 1 & -6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

II.29. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

II.30. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + by + z = 1 \\ x + y + cz = 1 \end{cases}$

II.31. Chứng minh

a) Nếu hệ phương trình tuyến tính có nghiệm thì hoặc có một nghiệm duy nhất hoặc vô số nghiệm.

b) Nếu hệ phương trình tuyến tính có số ẩn nhiều hơn số phương trình thì hoặc vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.

II.32. Cho hệ phương trình tuyến tính có m phương trình, ma trận hệ số là A. Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm nếu r(A) = m.

CHƯƠNG III

KHÔNG GIAN VECTƠ

§1. Các khái niệm cơ bản

1. Định nghĩa không gian vectơ

Kí hiệu $\mathbb{K}$ là trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$.

Ta gọi X là không gian vectơ trên trường $\mathbb{K}$, nếu mỗi cặp phần tử x, $y \in X$ được đặt tương ứng với một phần tử duy nhất, kí hiệu là $x + y \in X$, gọi là tổng của x và y, mỗi $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$ đặt tương ứng với một phần tử duy nhất, kí hiệu là $\lambda x \in X$, gọi là tích của λ và x, thoả mãn các điều kiện sau đây với mọi x, y, $z \in X$, λ, $\mu \in \mathbb{K}$:

1) $(x + y) + z = x + (y + z)$

2) $x + y = y + x$

3) Tồn tại $0 \in X$, gọi là phần tử không, $x + 0 = x$

4) Tồn tại $-x \in X$, gọi là phần tử đối của x

   $x + (-x) = 0$

5) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

7) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

8) $1.x = x$.

Mỗi phần tử của một không gian vectơ thường gọi là một vectơ.

Ta sẽ viết $x + (-y) = x - y$ (đọc là x trừ y).

Phép toán $x + y$ gọi là phép cộng vectơ.

Phép toán λx gọi là phép nhân với vô hướng, số λ còn gọi là vô hướng.

Không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ còn gọi là không gian vectơ thực.

Không gian vectơ trên $\mathbb{C}$ còn gọi là không gian vectơ phức.

Mỗi không gian vectơ phức đều có thể coi là một không gian vectơ thực nếu phép nhân vô hướng chỉ xét với λ thực.

Khi cho một không gian vectơ mà không nói rõ trên trường nào, ta hiểu đó là trường thực hoặc trường phức. Tuy nhiên, đã hiểu là không gian trên trường nào rồi thì phải nhất quán, chẳng hạn đã hiểu là không gian phức thì các vô hướng trong các khái niệm và tính chất tiếp theo đó đều phải hiểu là số phức.

Nếu chưa cần thiết nghiên cứu không gian vectơ trên trường số phức thì luôn hiểu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mà không vấp một trở ngại nào.

2. Ví dụ

a) $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{K}\}$, với mọi

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n), \lambda \in \mathbb{K}$$

ta định nghĩa

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n).$$

$\mathbb{K}^n$ cùng với các phép toán trên là một không gian vectơ, gọi là không gian vectơ $\mathbb{K}^n$. Đặc biệt $\mathbb{K} = \mathbb{K}^1$ là một không gian vectơ.

b) $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ với phép cộng ma trận và nhân số với ma trận là không gian vectơ (định lí 1.1, chương II).

c) Tập $\mathbb{K}[x]$ các đa thức hệ số trong $\mathbb{K}$ là một không gian vectơ trên $\mathbb{K}$ với phép cộng và phép nhân số với đa thức thông thường.

d) Tập $\mathbb{K}_n[x]$ các đa thức bậc $\leq n$ là không gian vectơ với phép toán trong $\mathbb{K}[x]$.

e) Tập $C_{[a,b]}$ các hàm số thực (tương ứng : phức) liên tục trên đoạn [a, b] với phép cộng hàm số và nhân số với số thông thường là không gian vectơ thực (tương ứng : phức).

f) Tập $C^1_{[a,b]}$ các hàm số liên tục trên [a, b], khả vi liên tục trên (a, b) là không gian vectơ với phép toán như trong $C_{[a,b]}$.

3. Một số tính chất đơn giản của không gian vectơ

1) *Phần tử 0 là duy nhất*

Thật vậy, nếu 0' thoả mãn 3) thì

$$0 + 0' = 0$$

$$0' + 0 = 0'.$$

Theo 2) thì $0 + 0' = 0' + 0$, do đó $0 = 0'$.

2) $0x = 0$ *với mọi* $x \in X$; $\lambda 0 = 0$ *với mọi* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Thật vậy, $x + 0x = (1 + 0)x = x$ nên cộng hai vế với $- x$ ta có $0x = 0$. Bởi vì $\lambda 0 + \lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0$ nên cộng hai vế với $- (\lambda 0)$ ta có $\lambda 0 = 0$.

3) $-x$ *là duy nhất và* $-x = (- 1) x$.

Thật vậy, nếu x' cũng thoả mãn $x + x' = 0$ thì

$$-x = -x + 0 = -x + (x + x') = (-x + x) + x' = 0 + x' = x'.$$

Mặt khác

$$x + (- 1)x = 1.x + (- 1)x = (1 - 1)x = 0.x = 0.$$

Do đó $-x = (- 1)x$.

Từ các tính chất đó dễ dàng thấy rằng với mọi $x, y, z \in X$

$$x = y \text{ nếu và chỉ nếu } x - y = 0$$

$$x + z = y + z \text{ nếu và chỉ nếu } x = y.$$

§2. Không gian vectơ con

1. Định nghĩa không gian vectơ con

Cho X là không gian vectơ và M là tập con của X. Nếu phép cộng và phép nhân với vô hướng trên X cảm sinh ra phép toán tương ứng trên M, và M với các phép toán đó cũng là không gian vectơ, thì M gọi là không gian (vectơ) con của X.

Định lí 2.1. *Tập con* M *của không gian vectơ* X *là không gian con của X nếu và chỉ nếu thoả mãn các điều kiện*

1) $M \neq \varnothing$

2) $x + y \in M$ *với mọi* $x, y \in M$

3) $\lambda x \in M$ *với mọi* $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in M$.

Chứng minh. Nếu M là không gian con thì hiển nhiên thoả mãn 1) vì trong M có vectơ không ; M thoả mãn 2) và 3) vì đó là điều kiện để phép toán trên X cảm sinh ra phép toán trên M.

Ngược lại, nếu M có các tính chất 1) – 3) thì trên M có phép cộng và phép nhân với vô hướng. Dễ thấy M thoả mãn các điều kiện của không gian vectơ ngoại trừ việc kiểm tra trong M có vectơ 0. Do $M \neq \varnothing$ nên tồn tại $x \in M$. Từ đó theo 3), $0 = 0x \in M$. Hiển nhiên $x + 0 = x$ với mọi $x \in M$. □

Từ chứng minh định lí 1.1, dễ dàng có khẳng định sau

Bổ đề 2.1. *Tập con* M *của không gian vectơ* E *là không gian vectơ con nếu và chỉ nếu thoả mãn hai điều kiện sau*

1) $0 \in M$

2) $\lambda x + y \in M$ *với mọi* $x, y \in M$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Ví dụ. a) Theo ví dụ ở §1, ta có $\mathbb{K}_n[x]$ là không gian vectơ con của $\mathbb{K}[x]$; $C^1_{[a,b]}$ là không gian vectơ con của $C_{[a,b]}$.

b) $V = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$.

c) $0 \equiv \{0\} \subset X$ và X là không gian vectơ con của X.

2. Không gian con sinh bởi một tập

Cho S là tập con tuỳ ý của một không gian vectơ X. Ta gọi một tổng dạng

$$x = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \qquad (1)$$

trong đó $v_1, \ldots, v_k \in S$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ thuộc S.

Vectơ x viết dưới dạng (1) gọi là biểu diễn tuyến tính được qua $v_1, \ldots, v_k$.

Tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của S kí hiệu là $< S >$

$$<S> = \left\{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \,\middle|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K} \; ; \; v_1, \ldots, v_k \in S\right\}.$$

Ta quy ước $<\varnothing> = \{0\} \equiv 0$. Với mọi tập con S của X ta có

$$0 \in <S> \, , \; S \subset <S>.$$

Bổ đề 2.2. *Với mọi tập con* S *của không gian vectơ* X, $<S>$ *là không gian con nhỏ nhất chứa* S.

Chứng minh. Theo bổ đề 2.1, dễ thấy $<S>$ là không gian con của X và $S \subset <S>$. Nếu M là không gian con bất kì của X chứa S, theo định lí 1.1, M chứa tất cả các vectơ dạng $x = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $v_i \in S$. Do đó $M \supset < S >$. Vậy $<S>$ là không gian con nhỏ nhất chứa S. □

Tập S được gọi là một hệ sinh của không gian vectơ X nếu $<S> = X$.

Như vậy : S là hệ sinh của X nếu và chỉ nếu mọi $x \in X$ đều là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ thuộc S.

Ví dụ. a) Tập $\varnothing$ là hệ sinh của không gian không.

b) Trong $\mathbb{K}^n$ đặt $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, 1 ở vị trí thứ i. Dễ thấy tập $\{e_1, ..., e_n\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{K}^n$.

c) $\{x^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ là một hệ sinh của không gian vectơ $\mathbb{K}[x]$.

§3. Hệ độc lập và phụ thuộc tuyến tính

1. Định nghĩa và tính chất

Cho S là một hệ vectơ trong không gian vectơ X, các vectơ của hệ S có thể trùng nhau.

Chú ý rằng hệ vectơ khác tập vectơ.

Hệ S gọi là độc lập tuyến tính nếu mọi tổ hợp tuyến tính $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$ các vectơ của S

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0 \text{ kéo theo } \lambda_1 = 0, ..., \lambda_k = 0.$$

Hệ S gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu nó không độc lập tuyến tính. Nói cách khác, S phụ thuộc tuyến tính, nếu tồn tại $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ không đồng thời bằng không, $v_1, ..., v_k \in S$ sao cho có quan hệ tuyến tính

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0.$$

Ví dụ. a) Trong mọi không gian vectơ, hệ $\varnothing$ là độc lập tuyến tính.

b) Hệ $\{e_1, ..., e_n\}$ trong $\mathbb{K}^n$ là độc lập tuyến tính. Thật vậy

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0 \quad &\Rightarrow (\lambda_1, ..., \lambda_n) = (0, ..., 0) \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 0, ..., \lambda_n = 0. \end{aligned}$$

c) Hệ $\{P_n = x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ trong $\mathbb{K}[x]$ là độc lập tuyến tính.

Thật vậy, bằng cách bổ sung vào các $\lambda_i = 0$, mỗi tổ hợp tuyến tính của hệ này đều có dạng

$$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + ... + \lambda_n P_n.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + ... + \lambda_n P_n = 0 \quad &\Leftrightarrow \lambda_0 + \lambda_1 x + ... + \lambda_n x^n = 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{K} \\ &\Leftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0. \end{aligned}$$

d) Hệ S chứa vectơ 0 là phụ thuộc tuyến tính. Thật vậy khi đó 1.0 là một tổ hợp tuyến tính của S, 1.0 = 0 nhưng hệ số khác 0.

e) Hệ S có hai vectơ trùng nhau thì phụ thuộc tuyến tính.

Theo ví dụ e), hệ độc lập tuyến tính có các vectơ khác nhau, do đó cũng là tập vectơ.

Bổ đề 3.1. *Cho các hệ vectơ* S *và* T *của không gian vectơ* X *và* $S \subset T$. *Khi đó*

a) S *phụ thuộc tuyến tính thì* T *phụ thuộc tuyến tính.*

b) T *độc lập tuyến tính thì* S *độc lập tuyến tính.*

Chứng minh. Mọi tổ hợp tuyến tính của S cũng là tổ hợp tuyến tính của T nên ta có các khẳng định trong bổ đề. □

Bổ đề 3.2. *Hệ hữu hạn vectơ* $S = \{v_1, ..., v_k\}$ *phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu tồn tại một vectơ của hệ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.*

Chứng minh. Nếu chẳng hạn v_1 là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại thế thì

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + ... + \lambda_k v_k$$

hay $\quad v_1 - \lambda_2 v_2 - ... - \lambda_k v_k = 0.$

Hiển nhiên $1, -\lambda_2, ..., -\lambda_k$ không đồng thời bằng không nên hệ là phụ thuộc tuyến tính.

Ngược lại, nếu hệ phụ thuộc tuyến tính. Khi đó tồn tại các số $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ không đồng thời bằng không để

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k = 0.$$

Giả sử $\lambda_1 \neq 0$. Khi đó ta có

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3 - ... - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} v_k,$$

nghĩa là v_1 là tổ hợp tuyến tính của $v_2, v_3, ..., v_k$. □

Định lí 3.1. (Bổ đề cơ bản về sự phụ thuộc tuyến tính). *Cho* $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ *là một hệ vectơ và* $T = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ *là một hệ vectơ độc lập tuyến tính sao cho* $T \subset \langle S \rangle$. *Khi đó* $m \leq k$.

Chứng minh. Giả sử trái lại m > k. Vì $u_1 \in < S >$ nên

$$u_1 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k.$$

Do $u_1 \neq 0$ nên tồn tại $\lambda_i \neq 0$, ta có thể giả thiết $\lambda_1 \neq 0$. Khi đó có thể viết

$$v_1 = b_1 u_1 + b_2 v_2 + \dots + b_k v_k. \qquad (1)$$

Ta lại có

$$u_2 = \lambda'_1 v_1 + \dots + \lambda'_k v_k.$$

Thay v_1 bởi (1) ta có

$$u_2 = c_1 u_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k.$$

Các số $c_2, \dots, c_k$ không đồng thời bằng 0 (vì nếu trái lại thì $u_2 = c_1 u_1$, mâu thuẫn vì T độc lập tuyến tính). Giả sử $c_2 \neq 0$, khi đó v_2 và do đó u_3 là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1, u_2, v_3, \dots, v_k$. Tiếp tục quá trình này sau k + 1 bước, ta có u_{k+1} là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1, u_2, \dots, u_k$. Ta gặp mâu thuẫn vì T độc lập tuyến tính. Vậy $m \leq k$. □

Cho hệ vectơ $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ trong không gian vectơ X. Hệ S' lập nên từ một số vectơ của S gọi là hệ con của S. S' gọi là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S nếu S' độc lập tuyến tính và nếu bổ sung vào S' một vectơ bất kì của S thì hệ nhận được là phụ thuộc tuyến tính.

Định lí 3.2. *Số vectơ trong một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ vectơ là không đổi.*

Chứng minh. Giả sử $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ và $T = \{u_1, \dots, u_m\}$ là hai hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ vectơ. Vì $\{v_1, \dots, v_k, u_j\}$, $j = 1, \dots, m$ là phụ thuộc tuyến tính và S độc lập tuyến tính nên u_j, $j = 1, \dots, m$ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ của hệ S. Theo định lí 3.1, $m \leq k$. Tương tự ta cũng có $k \leq m$. Vậy m = k. □

Định lí 3.3. *Một hệ vectơ độc lập tuyến tính trong* $\mathbb{K}^n$ *có không quá* n *vectơ.*

Chứng minh. Hệ vectơ $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots,$ $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ là độc lập tuyến tính, hơn nữa mọi vectơ $v = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{K}^n$ đều có

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \in < e_1, e_2, \dots, e_n > .$$

Nếu $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính bất kì trong $\mathbb{K}^n$ thì theo định lí 3.1 ta có $m \leq n$. □

2. Hạng của hệ vectơ

Cho hệ vectơ $S = \{v_1, ..., v_k\}$. Ta gọi hạng của S, kí hiệu r(S), là số vectơ trong một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của nó.

Theo định lí 3.2, hạng của một hệ vectơ là duy nhất.

Để tìm hạng của hệ vectơ S ta có thể tiến hành như sau. Kí hiệu v_{i_1} là vectơ khác không đầu tiên của hệ, v_{i_2} là vectơ đầu tiên của hệ sau v_{i_1} mà $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}$ độc lập tuyến tính. Do hệ chỉ có hữu hạn vectơ nên sau một số bước ta tìm được hệ con

$$v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_m}$$

độc lập tuyến tính và mọi vectơ của hệ đều là tổ hợp tuyến tính của các vectơ thuộc hệ này. Vậy hệ con nói trên là độc lập tuyến tính tối đại và r(S) = m.

Rõ ràng rằng S có k vectơ độc lập tuyến tính nếu và chỉ nếu r(S) = k.

Cho ma trận A cấp m × n,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Kí hiệu $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ và gọi là vectơ dòng thứ i của ma trận A.

$$S = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$$

là một hệ vectơ trong $\mathbb{K}^n$.

Định lí 3.4. *Hạng của ma trận* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *bằng hạng của hệ vectơ dòng* $\{A_1, ..., A_m\}$ *của nó trong* $\mathbb{K}^n$.

Chứng minh. Giả sử r(A) = k. Khi đó tồn tại k dòng của A mà trong k dòng đó có một định thức con cấp k khác không. Ta có thể giả thiết đó là k dòng đầu. Xét quan hệ tuyến tính

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \dots + a_{k1}\lambda_k = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1k}\lambda_1 + a_{2k}\lambda_2 + \dots + a_{kk}\lambda_k = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}\lambda_1 + a_{2n}\lambda_2 + \dots + a_{nk}\lambda_k = 0 \end{cases}$$

Theo giả thiết, hệ gồm k phương trình đầu tiên của hệ này là hệ Cramer, do đó nó chỉ có một nghiệm duy nhất là $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_k = 0$. Hiển nhiên đây cũng là nghiệm duy nhất của hệ. Vậy $A_1, A_2, \ldots, A_k$ độc lập tuyến tính và $r(\{A_1, \ldots, A_m\}) \geq r(A)$.

Ngược lại, giả sử $r(\{A_1, \ldots, A_m\}) = k$. Khi đó có thể tìm được trong các vectơ $A_1, \ldots, A_m$ k vectơ độc lập tuyến tính. Ta có thể giả thiết đó là k dòng đầu tiên. Ta sẽ chứng minh trong k dòng này có một định thức con cấp k khác không. Khi đó $r(A) \geq r(\{A_1, \ldots, A_m\})$. Thật vậy giả sử k dòng nói trên chỉ tìm được định thức con khác không cấp cao nhất là $p < k$. Có thể giả thiết định thức con cấp p đó nằm ở góc trên bên trái.

Xét hệ vectơ $v_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1p})$, $v_2 = (a_{21}, \ldots, a_{2p})$, $v_p = (a_{p1}, \ldots, a_{pp})$. Vì định thức có các dòng là các vectơ này khác không, do đó theo phần chứng minh trên, $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính trong $\mathbb{K}^p$. Đặt $v_{p+1} = (a_{p+1,1}, a_{p+1,2}, \ldots, a_{p+1,p})$. Vì hệ $\{v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}\}$ phụ thuộc tuyến tính theo định lí 3.3, do đó ta có :

$$v_{p+1} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p.$$

Kí hiệu

$$v = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_p A_p.$$

Vì hệ $\{A_1, A_2, \ldots, A_{p+1}\}$ độc lập tuyến tính nên $v \neq A_{p+1}$. Do p toạ độ đầu của hai vectơ này bằng nhau nên ta có thể giả thiết toạ độ thứ p + 1 của chúng khác nhau. Khi đó A có định thức con cấp p + 1 bằng

$$\Delta_{p+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & a_{1,p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & a_{p,p+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

trong đó $\quad c = a_{p+1,p+1} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{i,p+1} \neq 0.$ Từ đó

$$\Delta_{p+1} = c\Delta_p \neq 0.$$

Ta gặp mâu thuẫn. □

Định lí 3.5. *Hạng của một ma trận không đổi khi thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng.*

Chứng minh. Kí hiệu $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ là hệ các vectơ dòng của ma trận A. Theo định lí 3.6 ta có r(A) = r(S).

Trước hết ta nhận xét rằng : nếu thêm vào một hệ vectơ một vectơ là tổ hợp tuyến tính của hệ hoặc bớt đi từ hệ một vectơ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại thì hạng hệ mới bằng hạng hệ cũ.

Vì hạng của hệ vectơ không phụ thuộc vào thứ tự của các vectơ nên hiển nhiên hạng không thay đổi qua phép biến đổi loại 1.

Giả sử nhân dòng thứ i với $\lambda \neq 0$. Khi đó λA_i là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ của hệ S và

$$A_i = 0A_1 + \ldots + \frac{1}{\lambda}(\lambda A_i) + \ldots + 0A_n$$

là một tổ hợp tuyến tính của hệ các vectơ

$$\{A_1, \ldots, \lambda A_i, \ldots, A_n\}.$$

Do đó thêm vào hệ S vectơ λA_i, sau đó bớt đi vectơ A_i, ta có

$$r(S) = r(A_1, \ldots, \lambda A_i, \ldots, A_n),$$

nghĩa là hạng không thay đổi qua phép biến đổi loại 2.

Tương tự, đối với phép biến đổi loại 3, giả sử cộng vào dòng thứ A_i dòng λA_j. Bởi vì $A_i + \lambda A_j$ là một tổ hợp tuyến tính của S và

$$A_i = 0.A_1 + \ldots + 1.(A_i + \lambda A_j) + \ldots + (-\lambda)A_j + \ldots + 0A_n$$

nên A_i là một tổ hợp tuyến tính của hệ vectơ

$$\{A_1, \ldots, A_i + \lambda A_j, \ldots, A_n\}.$$

Do đó

$$r(S) = r(A_1, \ldots, A_i + \lambda A_j, \ldots, A_n). \qquad \square$$

Ví dụ. Xét tính độc lập của hệ vectơ sau đây trong $\mathbb{K}^3$:

$v_1 = (1, 3, -2, 5)$, $\qquad v_2 = (2, 1, 3, -1)$, $\qquad v_3 = (1, -2, 5, -6)$.

Giải. Ta có

$$r(v_1, v_2, v_3) = r\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & -6 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & -7 & -11 \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 < 3.$$

Do đó hệ phụ thuộc tuyến tính.

§4. Cơ sở và toạ độ. Không gian hữu hạn chiều

1. Cơ sở và toạ độ

Ta gọi một tập con B của một không gian vectơ X là cơ sở của X nếu B độc lập tuyến tính và $\langle B \rangle = X$.

Định lí 4.1. *Cho* L *và* S *là các tập con của một không gian vectơ* X, L *độc lập tuyến tính,* $L \subset S$ *và* $\langle S \rangle = X$. *Khi đó tồn tại cơ sở* B *của* X *sao cho* $L \subset B \subset S$.

Chứng minh. Kí hiệu $\mathscr{C}$ là họ tất cả các tập con độc lập tuyến tính của S chứa L. Sắp $\mathscr{C}$ theo quan hệ $\subset$. Theo nguyên lí tối đại Hausdorff, trong $\mathscr{C}$ có một họ con $\mathcal{M}$ được sắp tuyến tính tối đại. Đặt

$$B = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M.$$

Dễ dàng thấy rằng $L \subset B \subset S$. Ta sẽ chứng minh B là cơ sở.

Với hữu hạn $v_1, \ldots, v_k \in B$, tồn tại $M \in \mathcal{M}$ sao cho $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset M$. Do M độc lập tuyến tính nên

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Vậy B độc lập tuyến tính.

Ta có $S \subset \langle B \rangle$. Thật vậy, nếu tồn tại $x \in S \setminus \langle B \rangle$ thì $B \cup \{x\}$ độc lập tuyến tính, $B \cup \{x\} \notin \mathcal{M}$, $M \subset B \cup \{x\}$ với mọi $M \in \mathcal{M}$. Mâu thuẫn với tính tối đại của $\mathcal{M}$. Vậy $\langle B \rangle = \langle S \rangle = X$. □

Hệ quả 4.1. *Mọi không gian vectơ* X *đều có cơ sở.*

Chứng minh. Chọn $L = \varnothing$, $S = X$ và áp dụng định lí 4.1. □

Bổ đề 4.1. *Cho* $B = \{v_i\}_{i \in I}$ *là một cơ sở của không gian vectơ* X. *Khi đó mỗi* $x \in X$, *tồn tại duy nhất bộ số* $(\lambda_i)_{i\in I}$ *trong* $\mathbb{K}$, *trong đó chỉ có hữu hạn* $\lambda_i \neq 0$, *sao cho*

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i .$$

Chứng minh. Do B là hệ sinh nên tồn tại ít nhất một bộ số $(\lambda_i)_{i\in I}$ thoả mãn $x = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$. Nếu hệ số $(\mu_i)_{i\in I}$ cũng thoả mãn $x = \sum_{i\in I} \mu_i v_i$ thì

$$\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = \sum_{i \in I} \mu_i v_i .$$

Suy ra $\sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0$

Do B độc lập tuyến tính nên $\lambda_i - \mu_i = 0$ hay

$$\lambda_i = \mu_i \text{ với mọi } i \in I. \qquad \square$$

Từ bổ đề 4.1, ta gọi $x/_B = (\lambda_i)_{i\in I}$ là toạ độ của vectơ x trong cơ sở B.

2. Không gian vectơ hữu hạn chiều

Không gian vectơ X gọi là hữu hạn chiều nếu X có một hệ sinh hữu hạn. Khi đó theo định lí 4.1, X có một cơ sở hữu hạn n vectơ.

Bổ đề 4.2. *Nếu* X *có một cơ sở hữu hạn* B *gồm* n *vectơ thì*

a) *Mọi hệ vectơ độc lập tuyến tính trong* X *có không quá* n *vectơ*

b) *Mọi cơ sở của* X *đều có* n *vectơ*

c) *Mọi hệ gồm* n *vectơ độc lập tuyến tính của* X *đều là cơ sở.*

Chứng minh. a) Giả sử B' là hệ độc lập tuyến tính. Do $B' \subset \langle B \rangle$ nên theo định lí 3.1 số vectơ của $B' \leq n$.

b) Giả sử B' cũng là cơ sở thì B và B' đều là hệ độc lập tối đại trong $B \cup B'$. Theo định lí 3.2 ta có số vectơ của B và B' bằng nhau.

c) Giả sử $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính trong X. Với mọi $x \in X$, $W \cup \{x\}$ theo b) là phụ thuộc tuyến tính. Do đó theo bổ đề 3.2 :

$$x = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n \in \langle W \rangle.$$

Vậy W cũng là hệ sinh của X nên là cơ sở. $\square$

Không gian vectơ X không hữu hạn chiều gọi là không gian vô hạn chiều, kí hiệu $\dim X = \infty$.

Ví dụ. a) $\varnothing$ là cơ sở không gian O gồm chỉ một vectơ không.

b) $\mathbb{K}^n$ có cơ sở là hệ $\{e_1,\dots,e_n\}$, xem ví dụ trong §3, gọi là cơ sở chính tắc. Mọi hệ n vectơ độc lập tuyến tính $\{v_1,\dots,v_n\}$ trong $\mathbb{K}^n$ đều là cơ sở. Ta có $\{v_1,\dots,v_n\}$ là cơ sở nếu và chỉ nếu $r(v_1,\dots,v_n) = n$.

c) Kí hiệu $E_{ij} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ là ma trận có phần tử thứ (i,j) bằng 1, tất cả các phần tử khác bằng 0. Dễ thấy $E = \{E_{ij} \mid i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n\}$ là một cơ sở của $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Do đó $\dim \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$.

d) $\{1, x,\dots,x^n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{K}_n[x]$. Do đó

$$\dim \mathbb{K}_n[x] = n + 1.$$

e) $\{x^k \mid k \in N_0\}$ là một cơ sở của $\mathbb{K}[x]$. Do đó $\dim \mathbb{K}[x] = \infty$.

Cho B = $\{v_1,\dots,v_n\}$ là một cơ sở của không gian vectơ X. Mọi $x \in X$, theo bổ đề 4.1, tồn tại duy nhất bộ số $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ sao cho

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Bộ số $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, toạ độ của vectơ x trong cơ sở B, được kí hiệu là

$$x/_B = (x_1,\dots,x_n)$$

hoặc

$$[x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ $v_1 = (1, 3, 0)$, $v_2 = (-2, 2, 1)$, $v_3 = (0, 1, 2)$. Chứng minh rằng $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Tìm toạ độ của vectơ v = (1, 1, − 1) trong cơ sở B.

Giải. Vì B có 3 vectơ nên ta chỉ cần chứng minh B độc lập tuyến tính.

Vì $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$, do đó r(B) = 3. Vậy B độc lập tuyến tính.

Phương trình vectơ

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = v$$

tương đương với hệ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Giải theo phương pháp Cramer ta có $D_1 = 9, D_2 = -3, D_3 = -6$, do đó $x_1 = 3/5$, $x_2 = -1/5$, $x_3 = -2/5$. Vậy

$$v/_B = \left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right).$$

3. Cơ sở và chiều của không gian vectơ con

Không gian vectơ con cũng là một không gian vectơ nên có cơ sở và chiều như đã định nghĩa ở phần trên. Ở đây ta chỉ xét không gian vectơ con sinh bởi một hệ vectơ

$$V = < v_1, v_2, \ldots, v_k > .$$

Hệ vectơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ gọi là một hệ sinh của V.

Định lí 4.2. *Mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của* $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ *là một cơ sở của V và do đó*

$$\dim V = r(v_1, v_2, \ldots, v_k).$$

Chứng minh. Giả sử $E = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m}\}$ là một hệ độc lập tuyến tính tối đại của $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Khi đó mọi vectơ v_i đều là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ của hệ E. Từ đó suy ra mọi $v \in V$ đều là một tổ hợp tuyến tính các vectơ của E. Vậy E là cơ sở của V. □

Ví dụ. Trong R^4 cho các vectơ

$$v_1 = (1, 1, -2, 1),\ v_2 = (1, -2, 3, 0),\ v_3 = (2, 1, 0, 3),\ v_4 = (2, 4, -5, 4).$$

Tìm chiều và một cơ sở của $V = < v_1, v_2, v_3, v_4 >$.

Giải. Ta có

$$\dim V = r(v_1, v_2, v_3, v_4) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -5 & 4 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Vì dim V = 3 nên mọi hệ gồm ba vectơ độc lập tuyến tính của V đều là cơ sở của V. Ta có thể chọn một cơ sở của V là $\{v_1, v_2, v_3\}$ hoặc

$$\{(1, 1, -2, 1), (0, -1, 4, 1), (0, 0, 7, 4)\}.$$

4. Tổng của các không gian con

Cho M_1 và M_2 là không gian con của không gian vectơ X. Ta gọi

$$M_1 + M_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}$$

là tổng của các không gian con M_1 và M_2

Dễ dàng thấy rằng $M_1 \cap M_2$ là không gian vectơ con của X.

Bổ đề 4.3. *Cho M_1 và M_2 là các không gian con của X. Khi đó $M_1 + M_2 = \langle M_1 \cup M_2 \rangle$, và do đó, $M_1 + M_2$ là không gian con của X.*

Chứng minh. Hiển nhiên $M_1 + M_2 \subset \langle M_1 \cup M_2 \rangle$. Với mọi $x \in \langle M_1 \cup M_2 \rangle$ đều có thể viết

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m + \mu_1 y_1 + \ldots + \mu_n y_n$$

với $x_i \in M_1$ và $y_j \in M_2$. Vì

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m \in M_1, \ \mu_1 y_1 + \ldots + \mu_n y_n \in M_2$$

nên $x \in M_1 + M_2$. Vậy $\langle M_1 \cup M_2 \rangle \subset M_1 + M_2$. □

Cho M_1 và M_2 là không gian con của không gian vectơ X. Nếu $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ thì tổng $M_1 + M_2$ gọi là tổng trực tiếp, kí hiệu $M_1 \oplus M_2$.

Bổ đề 4.4. *Cho M_1 và M_2 là các không gian con của X. Khi đó $M = M_1 \oplus M_2$ nếu và chỉ nếu mọi $x \in M$ được viết một cách duy nhất dưới dạng $x = x_1 + x_2$ trong đó $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$.*

Chứng minh. Giả sử $M = M_1 \oplus M_2$. Khi đó mọi $x \in M$ hiển nhiên được viết dưới dạng $x = x_1 + x_2, x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$. Ta sẽ chứng minh cách viết đó là duy nhất. Thật vậy nếu cũng có $x = x_1' + x_2'$ với $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$ thì

$$x_1 + x_2 = x_1' + x_2' \text{ hay } x_1 - x_1' = x_2' - x_2$$

Từ đó suy ra $x_1 - x_1' \in M_1 \cap M_2$, $x_2' - x_2 \in M_1 \cap M_2$.

Vì $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ nên $x_1 = x_1'$ và $x_2 = x_2'$.

Ngược lại nếu mọi $x \in M$ đều được viết một cách duy nhất dạng $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$. Với mọi $x \in M_1 \cap M_2$ ta có

$$x = x + 0 = 0 + x \in M_1 + M_2$$

nên $x = 0$. Vậy $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ và tổng là trực tiếp. □

Định lí 4.3. *Nếu* M_1 *và* M_2 *là các không gian con hữu hạn chiều của* X *thì* $M_1 + M_2$ *hữu hạn chiều và*

$$\dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \cap M_2).$$

Chứng minh. Đặt $\dim(M_1 \cap M_2) = p$, $\dim M_1 = m + p$, $\dim M_2 = n + p$. Giả sử $\{z_1, \ldots, z_p\}$ là một cơ sở của $M_1 \cap M_2$. Theo định lí 4.1, chọn được $u_1, \ldots, u_m \in M_1$ và $v_1, \ldots, v_n \in M_2$ sao cho

$$S_1 = \{z_1, \ldots, z_p, u_1, \ldots, u_m\} \text{ là cơ sở của } M_1$$

$$S_2 = \{z_1, \ldots, z_p, v_1, \ldots, v_n\} \text{ là cơ sở của } M_2.$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$S = S_1 \cup S_2 = \{z_1, \ldots, z_p, u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n\}$$

là cơ sở của $M_1 + M_2$.

Trước hết dễ thấy S là hệ sinh của $M_1 + M_2$, vì $x = x_1 + x_2 \in M_1 + M_2$ thì x_1 là một tổ hợp tuyến tính các vectơ thuộc S_1, x_2 là tổ hợp tuyến tính các vectơ thuộc S_2 nên tổng của chúng là một tổ hợp tuyến tính các vectơ thuộc S. Ta còn phải chứng minh S độc lập tuyến tính. Xét quan hệ tuyến tính

$$t_1z_1 + \ldots + t_pz_p + \lambda_1u_1 + \ldots + \lambda_mu_m + \mu_1v_1 + \ldots + \mu_nv_n = 0, \ t_h, \lambda_i, \mu_j \in \mathbb{K}. \text{ Ta có}$$

$$u = t_1z_1 + \ldots + t_pz_p + \lambda_1u_1 + \ldots + \lambda_mu_m = -(\mu_1v_1 + \ldots + \mu_nv_n) \ (1)$$

Do biểu thức giữa thuộc M_1, biểu thức cuối thuộc M_2 nên $u \in M_1 \cap M_2$. Từ đó có thể viết

$$u = s_1z_1 + \ldots + s_pz_p.$$

Thế vào (1) ta có

$$s_1z_1 + \ldots + s_pz_p + \mu_1v_1 + \ldots + \mu_nv_n = 0.$$

Do S_2 độc lập tuyến tính nên

$$s_1 = \ldots = s_p = \mu_1 = \ldots = \mu_n = 0.$$

Từ (1) suy ra

$$t_1z_1 + \ldots + t_pz_p + \lambda_1u_1 + \ldots + \lambda_mu_m = 0.$$

Do S_1 độc lập tuyến tính nên

$$t_1 = \ldots = t_p = \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Vậy mọi t_h, λ_i, μ_j bằng 0 nên S độc lập tuyến tính. □

Với mọi họ các không gian con $M_1, \ldots, M_n$ của X ta định nghĩa

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = M_1 + \ldots + M_n = \{x_1 + \ldots + x_n \,|\, x_1 \in M_1, \ldots, x_n \in M_n\}$$

Nếu $M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j = \{0\}$ với mọi i = 1, ..., n thì tổng gọi là trực tiếp và kí hiệu là

$$\bigoplus_{i=1}^{n} M_i.$$

Tương tự định lí 4.3 ta cũng có :

$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ nếu và chỉ nếu mọi $x \in M$ được viết một cách duy nhất dưới dạng

$$x = x_1 + \ldots + x_n, \; x_1 \in M_1, \ldots, x_n \in M_n.$$

§5. Ứng dụng vào hệ phương trình tuyến tính

1. Điều kiện tồn tại nghiệm

Xét hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn số

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

Đặt $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ với $j = 1, \dots, n$; $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$.

Khi đó hệ phương trình (1) có thể viết dưới dạng vectơ

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n = b \tag{2}$$

Định lí 5.1. (Định lí Kronecker – Capelli). *Hệ (1) có nghiệm nếu và chỉ nếu* $r(A) = r(\overline{A})$, *trong đó*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Chứng minh. Dễ thấy rằng

(2) có nghiệm $\Leftrightarrow b \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$

$\Leftrightarrow r(a_1, \dots, a_n) = r(a_1, \dots, a_n, b)$

$\Leftrightarrow r(A^T) = r(\overline{A}^T)$

$\Leftrightarrow r(A) = r(\overline{A})$. □

Nhận xét. Nếu một phương trình của hệ (1) là tổ hợp tuyến tính của các phương trình khác (tức vectơ hệ số của nó là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ hệ số của các phương trình khác thì có thể loại phương trình đó ra khỏi hệ.

Vì vậy, nếu $r(A) = r(\overline{A}) = r$ thì bằng cách loại bớt các phương trình không cần thiết, hệ đã cho tương đương với một hệ chỉ gồm r phương trình.

Kí hiệu $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{rj})$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_r)$.

Nếu $r = n$ thì $D = \det(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$. Do đó hệ (1) có một nghiệm duy nhất là $x_j = \dfrac{D_j}{D}$, $j = 1, 2, \dots, n$, trong đó $D_j = \det(a_1, \dots, b, \dots a_n)$, b ở vị trí thứ j (theo định lí Cramer).

Nếu $r < n$ thì ta có thể giả thiết $\det(a_1, a_2, \dots, a_r) \neq 0$.

Vì $b \in \langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle$ nên tồn tại duy nhất $c_1, c_2, \dots, c_r$ để

$$b = c_1a_1 + c_2a_2 + \dots + c_ra_r$$

Vì $a_{r+1}, \dots, a_n \in \langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle$ nên

$$a_{r+j} = d_{r+j,1}a_1 + \dots + d_{r+j,r}\, a_r\,, \ j = 1, 2, \dots, n - r$$

Từ đó nếu $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một nghiệm của (1) thì thay vào (2) ta có

$$x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_{r+1}a_{r+1} + ... + x_na_n = b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{h=1}^{r} x_h a_h + \sum_{j=1}^{n-r} x_{r+j}\left(\sum_{h=1}^{r} d_{r+j,h}a_h\right) = b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{h=1}^{r}\left(x_h + \sum_{j=1}^{n-r} x_{r+j}d_{r+j,h}\right)a_h = b.$$

Từ đó, do hệ $\{a_1, a_2, ..., a_r\}$ độc lập tuyến tính, ta có

$$x_h + \sum_{j=1}^{n-r} x_{r+j}d_{r+j,h} = c_h, h = 1, ..., r$$

Nếu chọn $x_{r+j} = t_j$ tuỳ ý thì

$$x_h = c_h - \sum_{j=1}^{n-r} d_{r+j,h}t_j\,,\quad h = 1,2,..., r.$$

Do đó, hệ (1) có nghiệm là

$$\begin{cases} x_h = c_h - \displaystyle\sum_{j=1}^{n-r} d_{r+j,h}t_j\,, & h = 1, 2, ..., r \\ x_{h+j} = t_j, j = 1, 2, ..., n-r \end{cases} \tag{3}$$

Trường hợp này hệ có vô số nghiệm phụ thuộc $n - r$ tham số tuỳ ý.

Như vậy :

– Nếu $r(A) < r(\overline{A})$ thì hệ (1) vô nghiệm ;

– Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = n$ (số ẩn) thì hệ (1) có một nghiệm duy nhất ;

– Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = r < n$ thì hệ (1) có vô số nghiệm phụ thuộc $n - r$ tham số.

Nghiệm dạng (3) gọi là nghiệm tổng quát của hệ. Nghiệm riêng là nghiệm ứng với $t_1, t_2, ..., t_{n-r}$ cụ thể.

2. Hệ thuần nhất

Hệ phương trình tuyến tính được gọi là hệ thuần nhất nếu tất cả các hệ số tự do của nó bằng không.

Hệ thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{4}$$

luôn có nghiệm vì $r(A) = r(\overline{A})$. Cụ thể, hệ luôn có ít nhất một nghiệm là $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, gọi là nghiệm tầm thường.

Theo định lí 4.1, nếu $r(A) = n$ thì hệ có duy nhất một nghiệm, đó là nghiệm tầm thường.

Nếu $r(A) = r < n$, ta đưa hệ về hệ chỉ gồm r phương trình. Với giả thiết $a_1, a_2, \ldots, a_r$ độc lập tuyến tính thì

$$b = 0a_1 + 0a_2 + \ldots + 0a_r$$

do đó theo công thức (3) với $c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0$, ta được nghiệm tổng quát của hệ (4) là

$$\begin{cases} x_h = -\sum_{j=1}^{n-r} d_{r+j,h} t_j, \; h = 1, 2, \ldots, r \\ x_{h+j} = t_j, j = 1, 2, \ldots, n-r. \end{cases}$$

Thay $(t_1, t_2, \ldots, t_{n-r})$ với $t_j = 1, t_k = 0$ nếu $k \neq j$, $j = 1, 2, \ldots, n-r$, ta được $n - r$ nghiệm riêng

$$\begin{array}{l} d_1 = (-d_{r+1,1}, -d_{r+1,2}, \ldots, -d_{r+1,r}, 1, 0, \ldots, 0) \\ d_2 = (-d_{r+2,1}, -d_{r+2,2}, \ldots, -d_{r+2,r}, 0, 1 \ldots, 0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{n-r} = (-d_{n1}, -d_{n2}, \ldots, -d_{nr}, 0, 0, \ldots, 1) \end{array} \qquad (5)$$

Ta thấy ngay rằng $r(d_1, d_2, \ldots, d_{n-r}) = n - r$ nên hệ $(d_1, d_2, \ldots, d_{n-r})$ độc lập tuyến tính. Nghiệm của hệ ứng với $t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}$ tuỳ ý là

$x = \sum_{j=1}^{n-r} t_j d_j \in \langle d_1, d_2, \ldots, d_{n-r} \rangle$, do đó nghiệm của hệ (4) là không gian vectơ con

$$V = \langle d_1, d_2, \ldots, d_{n-r} \rangle \subset \mathbb{K}^n.$$

Rõ ràng là $\dim V = n - r$ nên ta có định lí sau :

Định lí 5.2. *Tập nghiệm V của hệ thuần nhất (4) là một không gian vectơ con của* $\mathbb{K}^n$ *với số chiều* $\dim V = n - r(A)$.

Chú ý rằng định lí 5.2 đúng cả trong trường hợp $r(A) = n$, khi đó $\dim V = 0$ và $V = \{0\}$.

Không gian vectơ con V thường gọi là không gian nghiệm của hệ thuần nhất. Mỗi cơ sở của không gian nghiệm V gọi là một hệ nghiệm cơ bản. Hệ các nghiệm (5) là một hệ nghiệm cơ bản.

Hệ thuần nhất (4) gọi là hệ thuần nhất liên kết với hệ tổng quát (1).

Định lí 5.3. *Nếu* $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ *là một nghiệm của hệ (1) thì tập tất cả các nghiệm của hệ (1) là*

$$\{c + v \mid v \in V\},$$

trong đó V là không gian vectơ con nghiệm của hệ thuần nhất liên kết (4).

Chứng minh. Cho $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Đặt $d_j = x_j - c_j$ ta được vectơ $d = (d_1, d_2, ..., d_n) \in \mathbb{R}^n$. Ta chỉ cần chứng minh rằng x là nghiệm của hệ (1) nếu và chỉ nếu $d \in V$. Thật vậy, với mọi i = 1, 2, ..., m ta có :

$$\text{x là nghiệm của (1)} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(d_j + c_j) = b_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j = 0$$

$$\Leftrightarrow d \in V. \qquad \square$$

Ví dụ. a) Giải hệ

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 2 \\ \phantom{x_1 -{}} 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Giải. Hệ thuần nhất liên kết $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ \phantom{x_1 -{}} 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

có nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -2x_2, x_2 \text{ tuỳ ý.} \end{cases}$

Dễ thấy hệ không thuần nhất có một nghiệm riêng là $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

Do đó, hệ không thuần nhất có nghiệm tổng quát là

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 3x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 1 - 2x_2, x_2 \text{ tuỳ ý.} \end{cases}$$

b) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình và tìm một hệ nghiệm cơ bản.

Giải. Ma trận của hệ

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ta có hệ tương đương

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ x_3 = c_2 \\ x_4 = c_1 \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{K}.$$

Một hệ nghiệm cơ bản là $\{(1,0,0,1) ; (0,1,1,0)\}$.

Bài tập

III.1. Cho A là một tập tuỳ ý. Kí hiệu M(A) là tập tất cả các ánh xạ từ A vào $\mathbb{K}$. Trong M(A) định nghĩa các phép toán.

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

với mọi $f, g \in M(A)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in A$.

a) Kiểm lại rằng M(A) là không gian vectơ trên $\mathbb{K}$.

b) Với mọi $a \in A$, đặt

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x = a \\ 0 \text{ nếu } x \neq a \end{cases}$$

Kiểm lại rằng tập $\{f_a \mid a \in A\}$ là độc lập tuyến tính.

c) Cho A là tập hữu hạn, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Chứng minh $\{f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}\}$ là cơ sở của M(A).

III.2. Kí hiệu $V = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Trên V xác định phép toán

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d), \ \lambda(a,b) = (\lambda a, 0),$$

Chứng tỏ V không là không gian vectơ.

III.3. Kí hiệu $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Trong X định nghĩa phép toán

$$x \oplus y = x.y \quad (\forall x, y \in X)$$

$$\lambda \odot x = x^{\lambda} \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in X)$$

(phép toán ở vế phải là phép toán thông thường).

a) Chứng tỏ X với phép cộng và phép nhân với vô hướng như trên là một không gian vectơ thực.

b) Tìm một cơ sở và chiều của X.

c) X có phải là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^1$ không?

III.4. Cho E là tập tất cả các dãy (x_n) trong $\mathbb{K}$. Trong E xét phép toán cộng

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$$

và phép nhân với vô hướng

$$\lambda(x_n) = (\lambda x_n).$$

a) Chứng minh E là một không gian vectơ trên $\mathbb{K}$.

b) Chứng minh E là vô hạn chiều.

c) Trong các tập sau tập nào là không gian vectơ con của E :

c_1) Tập F các dãy bị chặn

c_2) Tập G các dãy hội tụ

c_3) Tập H các dãy hội tụ đến một số a cố định

c_4) Tập I các dãy phân kì.

III.5. Cho $(V_i)_{i \in I}$ là một họ các không gian con của không gian vectơ V. Ta gọi tổng của họ không gian này là

$$\sum_{i \in I} V_i = \left\{ \sum_{i \in J} x_i \mid x_i \in V_i, J \subset I, J \text{ hữu hạn} \right\}.$$

Chứng minh $\bigcap_{i \in I} V_i$, $\sum_{i \in I} V_i$ là các không gian con của V.

III.6. Trong các tập sau, tập nào là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$. Trong trường hợp là không gian con, hãy tìm cơ sở và chiều của nó.

a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0\}$

b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_2$ và $2x_2 = x_3\}$

c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2^2\}$

d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3^3\}$

e) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_3^2 = 0\}$

f) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 = 0\}$.

III.7. Cho M là một không gian con khác $\{0\}$ của không gian vectơ X. Chứng minh $\mathrm{Card}(M) \geq \mathrm{Card}(\mathbb{K})$.

III.8. Ta gọi chiều của một không gian vectơ X là Card(B), trong đó B là một cơ sở của X. Chứng minh

a) $\mathbb{K}[x]$ có chiều đếm được.

b) C[a, b], không gian các hàm liên tục trên đoạn [a, b] với phép toán hàm, có chiều không đếm được ($a < b$).

III.9. Cho M_1 và M_2 là không gian vectơ con của X. Chứng minh rằng nếu $M_1 \cap M_2 \neq \{0\}$ thì mỗi vectơ thuộc $M_1 + M_2$ có ít nhất hai cách viết thành tổng của hai vectơ thuộc M_1 và M_2.

III.10. Kí hiệu X_n là tập tất cả các ma trận vuông đối xứng (tức $a_{ij} = a_{ji}$ với $i, j = 1, \ldots, n$) cấp n, Y_n là tập tất cả các ma trận vuông phản đối xứng (tức $a_{ij} = -a_{ji}$ với $i, j = 1, \ldots, n$) cấp n.

a) Chứng minh rằng X_n và Y_n là không gian vectơ con của không gian vectơ $\mathcal{M}_n$ các ma trận vuông cấp n.

b) Tìm cơ sở và chiều của X_n và Y_n.

c) Chứng minh rằng $\mathcal{M}_n = X_n \oplus Y_n$.

III.11. Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, (\beta \neq 0) \text{ và } B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

a) Chứng minh rằng AB = BA nếu và chỉ nếu tồn tại k để

$$y = k\beta,\ z = k\gamma,\ x - t = k(\alpha - \delta).$$

b) Chứng minh rằng tập tất cả các ma trận B giao hoán được với ma trận A cố định là một không gian vectơ con hai chiều của $\mathcal{M}_2$.

III.12. Cho E và F là hai không gian con của không gian vectơ V. Chứng minh rằng nếu $E \cup F$ là không gian con thì $E \subset F$ hoặc $F \subset E$.

III.13. Cho E và F là hai không gian con của một không gian vectơ V hữu hạn chiều có

$$\dim(E + F) = \dim(E \cap F) + 1.$$

Chứng minh rằng E + F bằng E hoặc F và $E \cap F$ bằng F hoặc E.

III.14. Cho X là một không gian vectơ trên $\mathbb{C}$. Khi đó X cũng là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$, kí hiệu không gian con này là $X_{\mathbb{R}}$. Chứng minh

a) Mọi hệ độc lập tuyến tính trong X là hệ độc lập tuyến tính trong $X_{\mathbb{R}}$; mọi hệ sinh của $X_{\mathbb{R}}$ là hệ sinh của X. Các điều ngược lại không đúng.

b) Nếu $B = \{b_j\}$ là cơ sở của X thì $B' = \{b_j, ib_j\}$ là cơ sở của $X_{\mathbb{R}}$.

III.15. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $v_1 = (1,0,0,-1)$, $v_2 = (0,0,1,-1)$, $v_3 = (1,0,1,-2)$.

a) Chứng minh

$$< v_1, v_2, v_3 > = \{(x, 0, y, -x-y) | x, y \in \mathbb{R}\}.$$

b) v = (2, 0, 1, −2) thuộc $< v_1, v_2, v_3 >$ không ?

III.16. Trong $\mathbb{R}^4$ cho $v_1 = (2,-1,0,1)$, $v_2 = (1,1,3,2)$, $v_3 = (3,-1,1,2)$, $v_4 = (1,-1,-1,0)$. Chứng minh

$$< v_1, v_2 > = < v_3, v_4 >.$$

III.17. Trong các hệ vectơ sau, hệ nào là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

a) $\{(2,1,3), (-1,1,0)\}$ b) $\{(2,1,3), (-1,1,0), (-1,1,0)\}$

c) $\{(2,1,3), (-1,1,0), (3,0,3)\}$ d) $\{(2,1,3), (-1,1,0), (1,1,-1), (0,0,4)\}$.

III.18. Cho $\{v_1, v_2, v_3\}$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính trong không gian vectơ X. Đặt $M = < v_1, v_2, v_3 >$.

a) Chứng minh $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ là cơ sở của M.

b) Cho $v_4 \in M$ có toạ độ trong cơ sở S là $v_4 / S = (a_1, a_2, a_3)$. Tìm điều kiện để

$T = \{v_2, v_3, v_4\}$ là cơ sở của M.

III.19. Cho $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{K}^3$ và vectơ $v \in \mathbb{K}^3$ có $v / B = (2, -3, 5)$.

Chứng minh S là cơ sở của $\mathbb{K}^3$ và tìm v/S nếu

a) $S = \{2v_2, v_1, v_3\}$.   b) $S = \{v_1 - v_2, 3v_3, v_2\}$.

III.20. Trong $\mathbb{K}^3$ tìm toạ độ của vectơ v trong cơ sở B

a) $v = (0, 5, -1)$, $B = \{(2, 3, 2), (4, 2, 5), (1, 2, 1)\}$.

b) $v = (-6, -17, 2)$, $B = \{(1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1)\}$.

c) $v = (a, b, c)$, $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

III.21. Chứng tỏ

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

là một cơ sở của $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Tìm toạ độ của $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -7\end{pmatrix}$ trong cơ sở đó.

III.22. Trong $\mathbb{R}_2[x]$ cho

$p_1(x) = 1 + 2x + x^2$, $p_2(x) = 1 - x - 5x^2$, $p_3(x) = -1 + 2x + 6x^2$ và $p(x) = 3 + 2x + x^2$.

a) Chứng minh $B = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Tìm toạ độ của p(x) trong cơ sở trên.

III.23. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

$$v_1 = (1, -2, 1, 3), \qquad v_2 = (2, 3, 1, 2), \qquad v_3 = (1, 5, 1, -2).$$

Tìm chiều và một cơ sở của không gian con

$$V = < v_1, v_2, v_3 >.$$

III.24. Trong $\mathbb{R}[x]$ cho

$f_1 = x^3 - 2x^2 + 4x + 1$, $f_2 = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 1$,

$f_3 = x^3 + 6x - 5$, $f_4 = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 5$.

Tìm chiều và một cơ sở của không gian con $V = < f_1, f_2, f_3, f_4 >$.

III.25. Trong $\mathbb{R}^4$ cho U là không gian con sinh bởi

$(1, 1, 0, -1), (1, 2, 4, 0), (0, 1, 4, 1)$

và V là không gian con sinh bởi

$(3, 2, 2, -3), (2, 3, 4, -1), (1, -1, -2, -2)$.

Tìm $\dim(U \cap V)$ và một cơ sở của $U \cap V$.

III.26. Giải và tìm một hệ nghiệm cơ bản của các hệ thuần nhất sau :

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

III.27. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Chứng minh rằng $\{e_1 = (1, -2, -1, -5),\ e_2 = (2, 1, 3, 0)\}$ là một cơ sở của không gian vectơ con M của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ là các dòng của ma trận A.

b) Vectơ $v = (1, -3, -1, -8)$ có thuộc M không ?

c) Tìm toạ độ của vectơ $v = (8, -1, 7, -10)$ trong cơ sở $\{e_1, e_2\}$.

d) Tìm tập D các vectơ $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ sao cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 = z_1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = z_2 \\ 2x_1 + 2x_3 - 2x_4 = z_3 \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

e) Chứng minh rằng D là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$. Tìm dim D.

III.28. Cho $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $|A| = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \neq 0$ sao cho $AB = 0$.