NGUYỄN DUY TIẾN (Chủ biên)
ĐẶNG HÙNG THẮNG

CÁC MÔ HÌNH XÁC SUẤT VÀ ỨNG DỤNG

PHẦN II

QUÁ TRÌNH DỪNG VÀ ỨNG DỤNG

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN DUY TIẾN (chủ biên)
ĐẶNG HÙNG THẮNG

CÁC MÔ HÌNH XÁC SUẤT VÀ ỨNG DỤNG

PHẦN II: QUÁ TRÌNH DỪNG VÀ ỨNG DỤNG

(In lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Xác suất Thống kê là lĩnh vực toán ứng dụng, nó đòi hỏi một cơ sở toán học sâu sắc. Ngày nay các mô hình xác suất đã thực sự được ứng dụng rộng rãi trong khoa học tự nhiên cũng như trong khoa học xã hội. Tuy nhiên, ở Việt Nam có rất ít những tài liệu về các mô hình xác suất và ứng dụng của chúng. Đó là lý do chính chúng tôi viết giáo trình này. Nhằm phục vụ các độc giả trong nhiều lĩnh vực khác nhau (toán học, vật lý, cơ học, sinh học, khoa học trái đất, kinh tế, y học, nông nghiệp, v.v...) nên giáo trình được viết theo tinh thần: chính xác về lý thuyết tới mức độ nhất định, nhiều ví dụ ứng dụng cụ thể thường gặp trong thực tế và tương đối dễ hiểu.

Giáo trình **Các mô hình xác suất và ứng dụng** do GS.TSKH. Nguyễn Duy Tiến chủ biên bao gồm:

Phần I. Xích Markov và ứng dụng , GS.TSKH. Nguyễn Duy Tiến viết.

Phần II. Quá trình dừng và ứng dụng , PGS.TSKH. Đặng Hùng Thắng viết.

Phần III. Giải tích ngẫu nhiên , GS.TSKH. Nguyễn Duy Tiến viết.

Các thành viên của Bộ môn Xác suất Thống kê, Khoa Toán - Cơ - Tin học, ĐHKHTN - ĐHQGHN đã nhiều năm giảng dạy quá trình ngẫu nhiên và tích lũy được nhiều kinh nghiệm để viết giáo trình này dưới dạng mô hình ứng dụng phục vụ cho đông đảo bạn đọc. Tuy nhiên, đây không phải là giáo trình sơ cấp. Vì vậy để đạt được hiệu quả cao, bạn đọc cần phải có kiến thức toán của hai năm đầu đại học và đặc biệt phải có kiến thức xác suất cổ điển (chẳng hạn như trong Đào Hữu Hồ **[1]**, Đặng Hùng Thắng **[2]**, hoặc Nguyễn Viết Phú, Nguyễn Duy Tiến **[3]**).

Chúng tôi hy vọng giáo trình này sẽ có ích cho nhiều bạn đọc, phục vụ tốt cho ứng dụng, giảng dạy và nghiên cứu.

Chắc chắn giáo trình còn nhiều thiếu sót. Rất mong nhận được sự góp ý và chỉ bảo của bạn đọc. Chúng tôi xin chân thành cám ơn.

Cuối cùng chúng tôi xin cám ơn Ban Giám hiệu ĐHKHTN - ĐHQGHN, Khoa Toán - Cơ - Tin học, Bộ môn Xác suất Thống kê ĐHKHTN - ĐHQGHN và Nhà Xuất Bản ĐHQGHN đã động viên, cổ vũ và tận tình giúp đỡ chúng tôi khi biên soạn giáo trình này.

Hà Nội mùa thu năm 1999

Các tác giả

MỤC LỤC

Phần II: QUÁ TRÌNH DỪNG VÀ ỨNG DỤNG

MỞ ĐẦU

Xét không gian xác suất cơ sở $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, trong đó:

Ω là không gian mẫu gồm tất cả các kết cục có thể xảy ra của phép thử ngẫu nhiên. Mỗi kết cục $\omega \in \Omega$ gọi là một điểm mẫu hay là một biến cố sơ cấp. Người ta cũng còn gọi Ω là không gian các biến cố sơ cấp.

$\mathcal{F}$ là σ-đại số (σ-trường) các biến cố. Tức là $\mathcal{F}$ là một họ các tập con của Ω thoả mãn 3 điều kiện sau

+) $\Omega \in \mathcal{F}$,

+) nếu $A \in \mathcal{F}$ thì $\Omega \setminus A = A^c = \overline{A} \in \mathcal{F}$,

+) nếu $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ và $A_i \cap A_j = \varnothing \, (i \neq j)$ thì $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Mỗi tập $A \in \mathcal{F}$ gọi là một biến cố.

P là độ đo xác suất xác định trên $\mathcal{F}$. Tức là ánh xạ $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ thoả mãn 3 điều kiện sau

+) $P(A) \geq 0$ với mọi $A \in \mathcal{F}$,

+) $P(\Omega) = 1$,

+) nếu $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ và $A_i \cap A_j = \varnothing \, (i \neq j)$

thì $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Đại lượng ngẫu nhiên hay biến ngẫu nhiên X là ánh xạ $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sao cho

$$\{X < x\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\} \in \mathcal{F} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X được xác định theo công thức

$$F(x) = P(X < x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hàm số này có các tính chất (cần và đủ) sau:

(i) đơn điệu không giảm,

(ii) liên tục bên trái,

(iii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Xét hàm giá trị thực (hoặc phức) $X(\omega, t)$ với $\omega \in \Omega$ và $t \in T$. Nếu cố định $t \in T$ thì ta được $X(\omega, \bullet)$ là một đại lượng ngẫu nhiên hay biến ngẫu nhiên.

Nếu cố định $\omega \in \Omega$ thì ta được $X(\bullet, t)$ là một hàm của biến $t \in T$.

Hàm $X(\omega, t)$ gọi là hàm ngẫu nhiên và thường được viết ngắn gọn là $X(t)$.

Khi $T \subseteq \mathbb{R}$ thì người ta gọi $X(t)$ là quá trình ngẫu nhiên với t là biến thời gian và T là tập chỉ số thời gian.

Với mỗi $\omega \in \Omega$ cố định, hàm $X_\omega : t \to X_\omega(t)$ được gọi là một quỹ đạo của $X(t)$, còn gọi là một thể hiện hay một hàm chọn của $X(t)$.

Phân phối hữu hạn chiều của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$, $t \in T$ được xác định như sau

$$F_{t_1 t_2 \dots t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\Big(X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \dots, X(t_n) < x_n\Big) ,$$

với mỗi $n \in \mathbb{N}$, với mọi $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ và với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Rõ ràng là phân phối hữu hạn chiều thoả mãn các tính chất sau đây:

(i) Tính chất đối xứng, tức là phân phối hữu hạn chiều không thay đổi khi ta hoán vị bộ chỉ số $(1, 2, \dots, n)$.

(ii) Tính chất nhất quán theo nghĩa

$$\lim_{x_n \to \infty} F_{t_1 t_2 \dots t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1 t_2 \dots t_{n-1}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Ngược lại, nếu cho trước phân phối hữu hạn chiều thoả mãn hai tính chất trên thì sẽ tồn tại quá trình ngẫu nhiên $X(t)$, $t \in T$ có phân phối hữu hạn chiều đã cho. Khẳng định đó chính là định lý tồn tại Kolmogorov.

Hai quá trình ngẫu nhiên $X_1(t)$ và $X_2(t)$ với cùng một tập chỉ số thời gian T (nhưng có thể xác định trên hai không gian xác suất cơ sở khác nhau) được gọi là tương đương ngẫu nhiên yếu, nếu chúng có cùng phân phối hữu hạn chiều.

Hai quá trình ngẫu nhiên $X_1(t)$ và $X_2(t)$ với cùng một tập chỉ số thời gian T và xác định trên cùng một không gian xác suất cơ sở được gọi là:

+) Tương đương ngẫu nhiên hay chúng là bản sao của nhau, nếu ta có $P(X_1(t) = X_2(t)) = 1$ đối với mỗi $t \in T$.

+) Bằng nhau, nếu thoả mãn điều kiện

$$P(X_1(t) = X_2(t)\ ,\ \forall t \in T) = 1.$$

Rõ ràng là "Bằng nhau" $\Rightarrow$ "Tương đương ngẫu nhiên" $\Rightarrow$ "Tương đương ngẫu nhiên yếu".

Ta thấy rằng tập $A_t = \{\omega \in \Omega | X_1(\omega, t) = X_2(\omega, t)\}$ phụ thuộc vào $t \in T$ và

$$\{\omega \in \Omega | X_1(\omega, t) = X_2(\omega, t)\ ,\ \forall t \in T\} = \bigcap_{t \in T} A_t.$$

Vì thế, nếu T đếm được, thì hai quá trình tương đương khi và chỉ khi chúng bằng nhau. Tuy nhiên, nếu T không đếm được thì điều khẳng định vừa rồi không đúng. Chẳng hạn, với $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ là σ-trường Borel của $[0,1]$, P là độ đo Lebesgue thông thường, $T = [0,1]$ và

$$X_1(\omega, t) = 0\ ,\ \forall \omega \in [0,1]\ , \forall t \in [0,1]\ ,$$

$$X_2(\omega, t) = \begin{cases} 0 & \text{với} \quad t \neq \omega\ , \\ 1 & \text{với} \quad t = \omega\ . \end{cases}$$

Dễ dàng thấy rằng hai quá trình này tương đương ngẫu nhiên, nhưng không bằng nhau.

Quá trình ngẫu nhiên $X(t)$, $t \in T$ được gọi là liên tục ngẫu nhiên tại $t_0 \in T$, nếu $\forall \varepsilon > 0$ thì $P(|X(t) - X(t_0)| > \varepsilon) \to 0$ khi $t \to t_0$.

Chương 1
QUÁ TRÌNH CẤP 2

Chương này trình bày những khái niệm cơ bản và công cụ toán học cần thiết để nghiên cứu quá trình dừng bao gồm khái niệm quá trình cấp hai, hàm tương quan, phép tính tích phân, vi phân cho quá trình cấp hai và tích phân ngẫu nhiên đối với độ đo ngẫu nhiên gia số trực giao.

1.1. Quá trình cấp 2

Giả sử $X(t)$, $t \in T$ là một quá trình (ngẫu nhiên), trong đó T là tập chỉ số thời gian. Tập chỉ số T có thể là

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \ , \ \mathbb{R}^+ = [0, +\infty) \ ,$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\} \ , \ \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, ...\}.$$

Nếu $T = \mathbb{R}$ hoặc $T = \mathbb{R}^+$ thì ta có một quá trình với thời gian liên tục.

Nếu $T = \mathbb{Z}$ hoặc $T = \mathbb{Z}^+$ thì ta có một quá trình với thời gian rời rạc hay còn gọi là một dãy ngẫu nhiên.

1.1.1. Định nghiã

Quá trình $X(t)$ $, t \in T$ *được gọi là một quá trình cấp 2 nếu*

$$\mathbb{E}|X(t)|^2 < \infty \quad , \quad \forall t \in T \ .$$

Ký hiệu $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là không gian Hilbert các đại lượng ngẫu nhiên X sao cho $\mathbb{E}|X|^2 < \infty$. Tích vô hướng trong $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là

$$< X, Y > = \mathbb{E}(XY) = \int_{\Omega} X(\omega)Y(\omega)dP .$$

Sự hội tụ trong $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ được gọi là hội tụ bình phương trung bình.

Nếu X_n hội tụ bình phương trung bình tới X thì ta viết

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}} X_n = X .$$

Ta có mệnh đề sau đây:

Mệnh đề 1. *Giả sử* (X_n) *là dãy đại lượng ngẫu nhiên với* $\mathbb{E}|X_n|^2 < \infty$.

Điều kiện cần và đủ để tồn tại $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}} X_n = X$ *là:*

(i) *Tồn tại* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X$.

(ii) *Tồn tại* $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \text{Cov}(X_n, X_m) = \text{Var}X$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}} X_n = X$.

Khi đó theo bất đẳng thức Schwarz ta có

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}X| = \lim_{n\to\infty} |\mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}X)| \le \lim_{n\to\infty} \sqrt{\mathbb{E}|X_n - X|^2} = 0.$$

Mặt khác $\text{Cov}(X_n, X_m) = < X_n, X_m > -(\mathbb{E}X_n)(\mathbb{E}X_m)$, nên ta có

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \text{Cov}(X_n, X_m) &= < X, X > -(\mathbb{E}X)^2 \\ &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \text{Var}X .\end{aligned}$$

Ngược lại, giả sử (i) và (ii) được thoả mãn. Khi đó tồn tại

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} < X_n, X_m > &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \text{Cov}(X_n, X_m) \\ &+ (\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n)(\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}X_m) = c .\end{aligned}$$

Ta lại có

$$\mathbb{E}|X_n - X_m|^2 = < X_n - X_m, X_n - X_m >=$$
$$= < X_n, X_n > -2 < X_n, X_m > + < X_m, X_m > \ .$$

Do đó

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mathbb{E}|X_n - X_m|^2 = c - 2c + c = 0 \ .$$

Vậy tồn tại $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} X_n = X$.

Mệnh đề được chứng minh.□

Một quá trình cấp 2 $X(t)$ có thể định nghĩa như là một ánh xạ

$$X \ : \ T \ \rightarrow \ L_2(\Omega, \mathcal{F}, P) \ .$$

1.1.2. Hàm trung bình và hàm tự tương quan

Hàm trung bình $m(t)$ được định nghĩa bởi công thức sau

$$m(t) = \mathbb{E}X(t) \ .$$

Hàm tự tương quan $r(s,t)$ được định nghiã bởi công thức sau

$$r(s,t) = \mathrm{Cov}[X(s), X(t)] = \mathbb{E}\Big(X(s) - m(s)\Big)\Big(X(t) - m(t)\Big) =$$
$$= \mathbb{E}X(s)X(t) - m(s)m(t) \ .$$

Vì $\mathrm{Var}X(t) = \mathrm{Cov}[X(t), X(t)]$ nên ta có $\mathrm{Var}X(t) = r(t,t)$.

Định lý 1. *Hàm tự tương quan $r(s,t)$ là đối xứng và xác định không âm, tức là*

(i) $r(s,t) = r(t,s) \ , \quad \forall s,t \in T$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall t_1, t_2, ..., t_n \in T \ , \ \forall b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$ *thì*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_i b_j r(t_i, t_j) \geq 0 \ .$$

Chứng minh. Tính chất đối xứng là hiển nhiên.

Ta chứng minh (ii). Ta có

$$0 \le \mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i X(t_i)\Big) = \mathrm{Cov}\Big[\sum_{i=1}^{n} b_i X(t_i), \sum_{i=1}^{n} b_i X(t_i)\Big] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j \mathrm{Cov}[X(t_i), X(t_j)] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j r(t_i, t_j)\ .\square$$

Chú ý. Tính chất đối xứng và xác định không âm là tính chất đặc trưng cho các hàm tự tương quan. Nếu cho trước hàm $r(s,t)$ đối xứng và xác định không âm, thì luôn tồn tại một quá trình cấp 2 $X(t)$ nhận $r(s,t)$ là hàm tự tương quan. Hơn nữa có thể chọn $X(t)$ là một quá trình Gauss (bạn đọc tự chứng minh lập luận này).

Ví dụ 1 (Quá trình Wiener). Quá trình $W(t)$, $t \ge 0$ được gọi là một quá trình Wiener với tham số σ^2 nếu nó thoả mãn các tính chất sau:

(i) $W(0) = 0$.

(ii) Với mọi $0 \le s < t$ thì $W(t) - W(s)$ là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với kỳ vọng 0 và phương sai $\sigma^2(t-s)$.

(iii) $W(t)$ là quá trình với gia số độc lập, tức là

với mọi $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ các đại lượng ngẫu nhiên

$W(t_2) - W(t_1)$, $W(t_3) - W(t_2)$, ..., $W(t_n) - W(t_{n-1})$ là độc lập.

Rõ ràng $W(t)$ là một quá trình cấp 2 vì $W(t)$ là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn $N(0,t)$. Vậy hàm trung bình $m(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}^+$.

Ta tính hàm tự tương quan của $W(t)$: giả sử $0 \le s < t$, khi đó

$$\begin{aligned} r(s,t) &= \mathbb{E}W(s)W(t) = \mathbb{E}W(s)[W(s) + W(t) - W(s)] = \\ &= \mathbb{E}|W(s)|^2 + \mathbb{E}[W(s) - W(0)][W(t) - W(s)] \\ &= \mathbb{E}|W(s)|^2 + \mathbb{E}[W(s) - W(0)]\mathbb{E}[W(t) - W(s)] \\ &= \mathbb{E}|W(s)|^2 + \mathbb{E}W(s)\mathbb{E}[W(t) - W(s)] \\ &= \sigma^2 s + m(s)\mathbb{E}[W(t) - W(s)] = \sigma^2 s\ . \end{aligned}$$

Vậy $r(s,t) = \sigma^2 \min(s,t)$.

Ví dụ 2 (Quá trình Poisson). Quá trình $X(t)$, $t \geq 0$ được gọi là quá trình Poisson với cường độ $\lambda > 0$ nếu nó thoả mãn các tính chất sau:

(i) $X(0) = 0$.

(ii) Với mọi $0 \leq s < t$ thì $X(t) - X(s)$ là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối Poisson với tham số $\lambda(t-s)$.

(iii) $X(t)$ là quá trình với gia số độc lập, tức là

với mọi $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ các đại lượng ngẫu nhiên

$X(t_2) - X(t_1)$, $X(t_3) - X(t_2)$, ..., $X(t_n) - X(t_{n-1})$ là độc lập.

Rõ ràng $X(t)$ là một quá trình cấp 2 vì $X(t) = X(t) - X(0)$ là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối Poisson với tham số λt.

Do đó $m(t) = \mathbb{E}X(t) = \lambda t$.

Ta tính hàm tự tương quan của $W(t)$: giả sử $0 \leq s < t$, khi đó

$$\begin{aligned}
r(s,t) &= \operatorname{Cov}\Big(X(s), X(t)\Big) = \operatorname{Cov}\Big(X(s), [X(s) + X(t) - X(s)]\Big) = \\
&= \operatorname{Cov}\Big(X(s), X(s)\Big) + \operatorname{Cov}\Big(X(s), [X(t) - X(s)]\Big) \\
&= \operatorname{Var}X(s) + \operatorname{Cov}\Big([X(s) - X(0)], [X(t) - X(s)]\Big) = \lambda s .
\end{aligned}$$

Vậy $r(s,t) = \lambda \min(s,t)$.

1.1.3. L_2 - liên tục

Xét trường hợp $T = \mathbb{R}$ hoặc $T = \mathbb{R}^+$.

Quá trình cấp 2 $X(t)$, $t \in T$ được gọi là L_2 - liên tục (hay liên tục bình phương trung bình) tại điểm t_0 nếu

$$\underset{t \to t_0}{\text{l.i.m}} X(t) = X(t_0) ,$$

tức là

$$\lim_{t \to t_0} \mathbb{E}|X(t) - X(t_0)|^2 = 0 .$$

Nếu $X(t)$ là L_2 - liên tục tại mọi điểm $t \in T$, thì ta nói $X(t)$ là L_2 - liên tục.

Định lý sau đây cho ta tiêu chuẩn để biết tính L_2 - liên tục của $X(t)$ thông qua tính liên tục của hàm trung bình và hàm tự tương quan.

Định lý 2. *Quá trình* $X(t)$ *là* L_2 *- liên tục khi và chỉ khi hàm trung bình* $m(t)$ *và hàm tự tương quan* $r(s,t)$ *là liên tục.*

Chứng minh. *Điều kiện cần:* Giả sử $X(t)$ là L_2 - liên tục.

Từ bất đẳng thức Schwartz ta có

$$|m(t) - m(t_0)| = \left|\mathbb{E}\Big(X(t) - X(t_0)\Big)\right| \leq$$
$$\leq \mathbb{E}|X(t) - X(t_0)| \leq \sqrt{\mathbb{E}|X(t) - X(t_0)|^2} \ .$$

Suy ra $m(t)$ là liên tục.
Ta lại có $\quad r(s,t) = \mathbb{E}X(s)X(t) - m(s)m(t) =$

$$= < X(s), X(t) > - m(s)m(t) \ .$$

Khi $s \to s_0$ và $t \to t_0$ thì $X(s) \to X(s_0)$ và $X(t) \to X(t_0)$ trong $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Do tính chất liên tục của tích vô hướng ta suy ra

$$\lim_{\substack{s\to s_0\\ t\to t_0}} < X(s), X(t) > = < X(s_0), X(t_0) > \ .$$

Vậy ta được

$$\lim_{\substack{s\to s_0\\ t\to t_0}} r(s,t) = < X(s_0), X(t_0) > - m(s_0)m(t_0) = r(s_0, t_0) \ .$$

Điều kiện đủ: Giả sử $m(t)$ và $r(s,t)$ là liên tục. Ta có

$$\mathbb{E}|X(t) - X(s)|^2 = \Big(\mathbb{E}[X(t) - X(s)]\Big)^2 + \mathrm{Var}[X(t) - X(s)] =$$
$$= [m(t) - m(s)]^2 + \mathrm{Var}X(t) - 2\mathrm{Cov}(X(t), X(s)) + \mathrm{Var}X(s) =$$
$$= |m(t) - m(s)|^2 + r(t,t) - 2r(t,s) + r(s,s) \ .$$

Khi $t \to s$ thì $|m(t) - m(s)|^2 \to 0$ và

$$\lim_{t\to s}\Big(r(t,t) - 2r(t,s) + r(s,s)\Big) = 0 \ .$$

Vì vậy ta được

$$\lim_{t\to s} \mathbb{E}|X(t) - X(s)|^2 = 0 \ .$$

Định lý được chứng minh đầy đủ.□

Định lý trên cho phép ta kết luận quá trình Wiener và quá trình Poisson là L_2 - liên tục.

Chú ý. Cần phân biệt khái niệm L_2 - liên tục với khái niệm liên tục theo quỹ đạo. Ta nhớ lại rằng $X(t)$ được gọi là liên tục theo quỹ đạo nếu với hầu hết $\omega \in \Omega$ thì quỹ đạo $X_\omega : t \to X_\omega(t)$ là một hàm liên tục. Việc tìm tiêu chuẩn nhận biết tính liên tục theo quỹ đạo của một quá trình $X(t)$ là một bài toán khó hơn rất nhiều.

Quá trình Wiener có các quỹ đạo là hàm liên tục, trong khi các quỹ đạo của quá trình Poisson lại là các hàm bậc thang gián đoạn. Chú ý rằng hàm tự tương quan của hai quá trình này có dạng hoàn toàn giống nhau. Như vậy việc biết hàm tự tương quan của một quá trình cấp 2 chưa đủ thông tin để cho phép kết luận về tính liên tục theo quỹ đạo của quá trình đó.

1.2. Phép tính vi tích phân cho quá trình cấp 2

1.2.1. L_2 - khả vi

Quá trình cấp 2 $X(t)$, $t \in T$ được gọi là L_2 - khả vi tại điểm t_0 nếu tồn tại giới hạn

$$\operatorname*{l.i.m}_{h\to 0}\frac{X(t_0+h)-X(t_0)}{h}\ .$$

Giới hạn này được ký hiệu là $X'(t_0)$ và được gọi là L_2 - đạo hàm của quá trình $X(t)$ tại điểm t_0.

Ta nói rằng quá trình $X(t)$ là L_2 - khả vi nếu tồn tại L_2 - đạo hàm $X'(t)$ tại mọi điểm $t \in T$.

Định lý 3. *Quá trình $X(t)$ là L_2 - khả vi tại điểm t_0 nếu và chỉ nếu:*

(i) *Hàm trung bình $m(t)$ khả vi tại $t = t_0$.*

(ii) *Tồn tại giới hạn*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{1}{hk}\Big[r(t_0+h,t_0+k)-r(t_0+h,t_0)-r(t_0,t_0+k)+r(t_0,t_0)\Big]\ .$$

Chứng minh. Áp dụng mệnh đề 1 ở trên ta có $X(t)$ là L_2 - khả vi khi và chỉ khi:

(i) Tồn tại

$$\lim_{h\to 0}\mathbb{E}\Big[\frac{X(t_0+h)-X(t_0)}{h}\Big]=\lim_{h\to 0}\frac{m(t_0+h)-m(t_0)}{h}.$$

Điều này tương đương với $m(t)$ khả vi tại $t=t_0$.

(ii) Tồn tại

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\mathrm{Cov}\Big(\frac{X(t_0+h)-X(t_0)}{h},\frac{X(t_0+k)-X(t_0)}{k}\Big)=$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{1}{hk}\Big[r(t_0+h,t_0+k)-r(t_0+h,t_0)-r(t_0,t_0+k)+r(t_0,t_0)\Big].$$

Định lý được chứng minh.□

Ví dụ 3. Quá trình Wiener không L_2 - khả vi ở bất cứ điểm nào.

Thật vậy, quá trình Wiener có hàm tự tương quan là

$$r(s,t)=\sigma^2\min(s,t)\ .$$

Với $h=k>0$ ta có

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\Big[r(t_0+h,t_0+h)-r(t_0+h,t_0)-r(t_0,t_0+h)+r(t_0,t_0)\Big]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sigma^2}{h^2}[t_0+h-t_0-t_0+t_0]=\lim_{h\to 0}\frac{\sigma^2}{h}=\infty\ .$$

Tương tự quá trình Poisson cũng không L_2 - khả vi ở bất cứ điểm nào.

Chú ý. Tính L_2 - khả vi không có liên quan gì đến tính khả vi của hàm chọn. Thật vậy, hàm chọn của quá trình Poisson là một hàm bậc thang do đó nó chỉ không khả vi tại các điểm bước nhẩy. Đối với quá trình Wiener, bằng một chứng minh rất khó và tinh tế người ta đã chỉ ra rằng hàm chọn của quá trình Wiener là hàm liên tục nhưng không khả vi ở bất cứ điểm nào.

Định lý 4. *Quá trình* $X(t)$ *là* L_2 *- khả vi nếu hàm trung bình* $m(t)$ *khả vi và đạo hàm cấp 2* $\dfrac{\partial^2 r(s,t)}{\partial s \partial t}$ *của hàm tự tương quan là tồn tại và liên tục.*

Chứng minh. Suy từ định lý 3 và sự kiện: nếu $\dfrac{\partial^2 r(s,t)}{\partial s \partial t}$ tồn tại và liên tục thì tồn tại giới hạn

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{1}{hk}[r(t+h,s+k) - r(t+h,s) - r(t,s+k) + r(t,s)] \ .\square$$

Như vậy, nếu $X(t)$ là quá trình L_2 - khả vi thì L_2 - đạo hàm $X'(t)$ của quá trình ấy lại là một quá trình cấp 2 mới. Từ chứng minh của các định lý trên ta suy ra các công thức tính hàm trung bình và hàm tự tương quan của $X'(t)$ như sau:

$$\mathbb{E}X'(t) = m'(t)$$
$$\mathrm{Cov}[X'(s), X'(t)] = \frac{\partial^2 r(s,t)}{\partial s \partial t}$$
$$\mathrm{Cov}[X'(s), X(t)] = \frac{\partial r(s,t)}{\partial s}$$

Tương tự ta có thể xây dựng các khái niệm L_2 - khả vi cấp 2,3,...

1.2.2. L_2 - khả tích

Giả sử $X(t)$ là một L_2 - quá trình (quá trình cấp 2) trên đoạn $[a,b]$.

Ứng với mỗi phép phân hoạch Δ đoạn $[a,b]$

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = b \quad \text{với} \quad |\Delta| = \max(t_{i+1} - t_i)$$

ta lập tổng tích phân $\quad S(\Delta) = \sum_{i=0}^{n} X(s_i)(t_{i+1} - t_i)$,

trong đó s_i là điểm tuỳ ý thuộc $[t_i, t_{i+1}]$.

Nếu tồn tại giới hạn $\quad \underset{|\Delta|\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\, S(\Delta) = I$,

thì ta nói $X(t)$ là L_2 - khả tích và viết

$$I = \int_a^b X(t)dt.$$

Tích phân này có một số tính chất như tích phân thông thường. Chẳng hạn:

Định lý 5. (i) *Nếu* $X(t) \geq 0$, $\forall t \in [a,b]$ *thì* $\int\limits_a^b X(t)dt \geq 0$.

(ii) $\int\limits_a^c X(t)dt + \int\limits_c^b X(t)dt = \int\limits_a^b X(t)dt$, $(a < c < b)$.

(iii) $\int\limits_a^b [\alpha X(t) + \beta Y(t)]dt = \alpha \int\limits_a^b X(t)dt + \beta \int\limits_a^b Y(t)dt$,

(α, β *là các hằng số*).

(iv) *Giả sử* $X(t)$ *là* L_2 *- liên tục. Đặt* $Y(t) = \int\limits_a^t X(s)ds$,

khi đó $Y(t)$ *là* L_2 *- khả vi và* $Y'(t) = X(t)$.

(v) (Công thức Newton - Leibnitz).

Nếu $X(t)$ *là* L_2 *- khả vi liên tục (tức* $X'(t)$ *là* L_2 *- liên tục) trên* $[a,b]$ *thì*

$$\int\limits_a^b X'(t)dt = X(b) - X(a) .$$

Bạn đọc tự chứng minh bằng cách xem $X(t)$ là một hàm xác định trên $[a,b]$ lấy giá trị trong không gian Hilbert $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Chú ý. Nếu $X(t)$ là L_2 - khả tích thì không nhất thiết hàm chọn $X_\omega(t)$ là khả tích Riemann với xác suất 1 . Tuy nhiên, nếu hàm chọn $X_(\omega)(t)$ là khả tích Riemann với xác suất 1 thì tích phân $I = \int\limits_a^b X(t)dt$ có thể hiểu như là tích phân dọc theo mỗi quỹ đạo ω.

Nói cách khác, đại lượng ngẫu nhiên $I = \int\limits_a^b X(t)dt$ có thể tính theo công thức $I(\omega) = \int\limits_a^b X_(\omega)(t)dt$. Thật vậy:

$$S_\Delta(\omega) = \sum_{i=0}^{n} X_(\omega)(s_i)(t_{i+1} - t_i) \quad \text{hội tụ}$$

tới $I(\omega)$ với xác suất 1 .

Mặt khác $\quad \operatorname*{l.i.m}_{|\Delta|\to 0} S_\Delta(\omega) = \int_a^b X(t)dt.$

Thành thử $\quad I(\omega) = \int_a^b X(t)dt \quad$ (h.k.n) .

Định lý sau đây cho ta một tiêu chuẩn để một quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ là L_2 - khả tích thông qua tính khả tích của hàm trung bình và hàm tự tương quan.

Định lý 6. *Quá trình* $X(t)$ *là* L_2 *- khả tích trên* $[a,b]$ *nếu và chỉ nếu hàm trung bình* $m(t)$ *khả tích trên* $[a,b]$ *và hàm tự tương quan* $r(s,t)$ *khả tích trên* $[a,b]\times[a,b]$.

Trong trường hợp đó ta có các công thức sau đây:

$$\mathbb{E}\Big[\int_a^b X(t)dt\Big] = \int_a^b m(t)dt \ ,$$

$$\operatorname{Var}\Big[\int_a^b X(t)dt\Big] = \int_a^b\int_a^b r(s,t)dsdt \ ,$$

$$\operatorname{Cov}\Big[\int_a^b X(s)ds, \int_c^d X(t)dt\Big] = \int_a^b\int_c^d r(s,t)dsdt \quad , \ [c,d]\subseteq[a,b]$$

$$\operatorname{Cov}\Big[X(s), \int_a^b X(t)dt\Big] = \int_a^b r(s,t)dt \ .$$

Chứng minh. *Điều kiện cần:* Giả sử tích phân $I = \int_a^b X(t)dt$ tồn tại và $\sum_{i=0}^{n} m(s_i)(t_{i+1}-t_i)$ là một tổng Riemann ứng với phân hoạch Δ của $[a,b]$.

Vì $S(\Delta) = \sum_{i=0}^{n} X(s_i)(t_{i+1} - t_i)$ hội tụ bình phương trung bình tới I , nên suy ra $\mathbb{E}S(\Delta)$ hội tụ tới $\mathbb{E}I$ khi $|\Delta| \to 0$ theo mệnh đề 1 .

Thế mà $\mathbb{E}S(\Delta) = \sum_{i=0}^{n} m(s_i)(t_{i+1} - t_i)$.

Vậy $\lim\limits_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=0}^{n} m(s_i)(t_{i+1} - t_i) = \mathbb{E}I$.

Điều này chứng tỏ $m(t)$ khả tích và

$$\mathbb{E}\Big[\int_a^b X(t)dt\Big] = \int_a^b m(t)dt.$$

Tiếp theo giả sử $V(\Delta, \Delta') = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} r(s_i, s'_j)(t_{i+1} - t_i)(t'_{j+1} - t'_j)$ là một tổng Riemann ứng với phân hoạch $\Delta \times \Delta'$ của $[a,b] \times [a,b]$. Đặt

$$S(\Delta) = \sum_{i=0}^{m} X(s_i)(t_{i+1} - t_i) \quad \text{và} \quad S(\Delta') = \sum_{j=0}^{n} X(s'_j)(t'_{j+1} - t'_j) \ .$$

Ta có $\operatorname{Cov}\Big[S(\Delta), S(\Delta')\Big] = V(\Delta, \Delta')$.

Vì $\underset{|\Delta| \to 0}{\text{l.i.m}}\, S(\Delta) = \underset{|\Delta'| \to 0}{\text{l.i.m}}\, S(\Delta') = I$, nên theo mệnh đề 1 ta có $\lim\limits_{\substack{|\Delta| \to 0 \\ |\Delta'| \to 0}} V(\Delta, \Delta') = \operatorname{Var} I$.

Vậy $r(s,t)$ khả tích trên $[a,b] \times [a,b]$ và

$$\operatorname{Var}\Big[\int_a^b X(t)dt\Big] = \int_a^b \int_a^b r(s,t)dsdt \ .$$

Xét tương tự với $I' = \int_c^d X(t)dt$ và $\Delta \times \Delta'$ là phân hoạch của $[a,b] \times [c,d]$

ta có $\underset{|\Delta| \to 0}{\text{l.i.m}}\, S(\Delta) = I$ và $\underset{|\Delta'| \to 0}{\text{l.i.m}}\, S(\Delta') = I'$, nên $\lim\limits_{\substack{|\Delta|\to 0\\ |\Delta'|\to 0}} V(\Delta,\Delta') = \mathrm{Cov}(I,I')$.

Vì thế $r(s,t)$ khả tích trên $[a,b]\times[c,d]$ và

$$\mathrm{Cov}\Big[\int\limits_a^b X(s)ds, \int\limits_c^d X(t)dt\Big] = \int\limits_a^b\int\limits_c^d r(s,t)dsdt\ .$$

Cuối cùng với $J(s) = \int\limits_a^b r(s,t)dt$, $U(s,\Delta) = \sum\limits_{i=0}^{m} r(s,s_i)(t_{i+1}-t_i)$ ta có

$$\mathrm{Cov}[X(s),S(\Delta)] = U(s,\Delta), \text{nên } \mathrm{Cov}[X(s),I] = \underset{|\Delta|\to 0}{\mathrm{l.i.m}} U(s,\Delta) = J(s).$$

Điều kiện đủ: Giả sử Δ và Δ' là hai phép phân hoạch tuỳ ý của $[a,b]$

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{m+1} = b\ ,$$
$$\Delta' : a = t'_0 < t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_{n+1} = b\ .$$

Chọn các điểm tuỳ ý $s_i \in [t_i,t_{i+1}]$, $s'_j \in [t'_j,t'_{j+1}]$ và xét các tổng

$$S(\Delta) = \sum_{i=0}^{m} X(s_i)(t_{i+1}-t_i) \quad , \quad S(\Delta') = \sum_{j=0}^{n} X(s'_j)(t'_{j+1}-t'_j).$$

Ta có:

(i) Tồn tại $\lim\limits_{|\Delta|\to 0} \mathbb{E}S(\Delta) = \lim\limits_{|\Delta|\to 0}\sum\limits_{i=0}^{m} m(s_i)(t_{i+1}-t_i) = \int\limits_a^b m(t)dt.$

(ii) Tồn tại $\lim\limits_{\substack{|\Delta|\to 0\\ |\Delta'|\to 0}} \mathrm{Cov}\Big[S(\Delta),S(\Delta')\Big] =$

$$= \lim_{\substack{|\Delta|\to 0\\ |\Delta'|\to 0}} \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} r(s_i,s'_j)(t_{i+1}-t_i)(t'_{j+1}-t'_j) = \int\limits_a^b\int\limits_a^b r(s,t)dsdt.$$

Áp dụng mệnh đề 1 ta suy ra tồn tại $\underset{|\Delta|\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\, S(\Delta)$.

Vậy $X(t)$ là L_2 - khả tích.□

Ví dụ 4 (Quá trình Wiener tích hợp). Giả sử $W(t)$, $t \geq 0$ là quá trình Wiener với tham số σ^2. $W(t)$ có hàm trung bình $m(t) = 0$ và hàm tự tương quan $r(s,t) = \sigma^2 \min(s,t)$. Ta xây dựng một quá trình mới $X(t)$, $t \geq 0$ bằng công thức sau

$$X(t) = \int_0^t W(s)ds.$$

Ta gọi $X(t)$ là quá trình Wiener tích hợp.

Như là một bước đầu tiên để tìm quy luật xác suất của $X(t)$, trước hết ta hãy tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan của nó. Ta có

$$\mathbb{E}X(t) = \int_0^t \mathbb{E}W(s)ds = \int_0^t m(s)ds = 0 \, ,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}X(t) = \mathrm{Var}\Big[\int_0^t W(s)ds\Big] &= \int_0^t\int_0^t r(s,u)dsdu = \\ &= \sigma^2 \int_0^t\int_0^t \min(s,u)dsdu = 2\sigma^2 \int_0^t du \int_0^u \min(s,u)ds = \\ &= 2\sigma^2 \int_0^t du \int_0^u sds = \frac{\sigma^2 t^3}{3} \, .\end{aligned}$$

Để tính hàm tự tương quan của $X(t)$ ta thấy với $0 \leq s < t$ thì

$$X(t) = X(s) + (t-s)W(s) + \int_s^t [W(v) - W(s)]dv \, .$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(s)X(t)] = &\mathbb{E}|X(s)|^2 + (t-s)\mathbb{E}[X(s)W(s)] + \\ &+ \mathbb{E}\Big(X(s)\int_s^t [W(v) - W(s)]dv\Big) \, .\end{aligned}$$

Ta có $\mathbb{E}|X(s)|^2 = \mathbb{E}|X(s) - \mathbb{E}X(s)|^2 = \mathrm{Var}X(s) = \dfrac{\sigma^2 s^3}{3}$,

$$\mathbb{E}[X(s)W(s)] = \mathbb{E}\Big(W(s)\int_0^s W(u)du\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^s W(s)W(u)du\Big) =$$

$$= \int_0^s \mathbb{E}[W(s)W(u)]du = \int_0^s \Big(\mathbb{E}[W(s)W(u)] - m(s)m(u)\Big)du =$$

$$= \int_0^s \mathrm{Cov}[W(s),W(u)]du = \int_0^s r(s,u)du = \sigma^2\int_0^s udu = \frac{\sigma^2 s^2}{2} .$$

Vì $W(u) - W(0)$, $u \in [0,s]$ và $W(v) - W(s)$, $v \in [s,t]$ là độc lập, nên

$$X(s) = \int_0^s W(u)du = \int_0^s [W(u) - W(0)]du \text{ và } \int_s^t [W(v) - W(s)]dv \text{ là độc lập.}$$

Do đó $\mathbb{E}\Big(X(s)\int_s^t [W(v) - W(s)]dv\Big) = \mathbb{E}X(s)\mathbb{E}\Big(\int_s^t [W(v) - W(s)]dv\Big) = 0.$

Vậy ta được

$$\mathrm{Cov}[X(s),X(t)] = \mathbb{E}[X(s)X(t)] - m(s)m(t) = \mathbb{E}[X(s)X(t)] =$$
$$= \frac{\sigma^2 s^3}{3} + (t-s)\frac{\sigma^2 s^2}{2} = (3t-s)\frac{\sigma^2 s^2}{6} .$$

Ví dụ 5. Giả sử $N(t)$, $t \geq 0$ là quá trình Poisson với cường độ $\lambda > 0$ (xem ví dụ 2). Với $t > 0$ ta đặt $V(t) = V(0)(-1)^{N(t)}$, trong đó $V(0)$ là đại lượng ngẫu nhiên độc lập với $N(t)$ và nhận hai giá trị v và $-v$ với xác suất như nhau $P\{V(0) = v\} = P\{V(0) = -v\} = \dfrac{1}{2}$.

Về mặt Vật lý và Cơ học có thể xem $V(t)$ là vận tốc của hạt vật chất tại thời điểm t. $V(t)$ nhận giá trị v hoặc $-v$. Mỗi lần bị va chạm thì vận tốc đổi dấu. $N(t)$ là số lần va chạm của hạt trong khoảng thời gian $(0,t]$.

Trước hết ta thấy $\mathbb{E}V(t) = 0$.

Ta lại thấy với $0 \leq s < t$ thì

$$\mathbb{E}[V(s)V(t)] = v^2\mathbb{E}\left[(-1)^{N(s)+N(t)}\right] =$$
$$= v^2\mathbb{E}\left[(-1)^{2N(s)+N(t)-N(s)}\right] = v^2\mathbb{E}\left[(-1)^{N(t)-N(s)}\right] .$$

Vì $N(t) - N(s)$ có phân phối Poisson với tham số $\lambda(t-s)$ nên ta được

$$\mathbb{E}\left[(-1)^{N(t)-N(s)}\right] = e^{-\lambda(t-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\lambda(t-s))^k}{k!} =$$
$$= e^{-\lambda(t-s)}e^{-\lambda(t-s)} = e^{-2\lambda(t-s)} .$$

Vậy $\mathbb{E}[V(s)V(t)] = v^2 e^{-\beta|t-s|}$, với $\beta = 2\lambda$.

Nếu $X(t)$ là quãng đường mà hạt di chuyển trong khoảng thời gian $(0, t]$ thì ta có $X(t) = \int\limits_0^t V(s)ds.$

Theo định lý 6 thì giá trị trung bình của bình phương khoảng cách $|X(t)|^2$ là

$$\mathbb{E}|X(t)|^2 = \mathrm{Var}X(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^t v^2 e^{-\beta|t_1-t_2|}dt_1dt_2 =$$
$$= 2\int\limits_0^t dt_1 \int\limits_0^{t_1} v^2 e^{-\beta(t_1-t_2)}dt_2 = \frac{2v^2}{\beta^2}(e^{-\beta t} - 1 + \beta t) .$$

Suy ra

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbb{E}|X(t)|^2 = \frac{2v^2}{\beta} \quad \text{và} \quad \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2}\mathbb{E}|X(t)|^2 = v^2 .$$

Như vậy trong một khoảng thời gian rất dài (t rất lớn) ta có

$$\mathbb{E}|X(t)|^2 \approx \frac{2v^2}{\beta}t = \frac{v^2 t}{\lambda}$$

và trong một khoảng thời gian rất ngắn (t rất bé) ta có

$$\mathbb{E}|X(t)|^2 \approx v^2t^2 .$$

Như là một áp dụng của khái niệm L_2 - khả vi và L_2 - khả tích, ta có định lý sau được xem như là bất đẳng thức Chebyshev cho quá trình ngẫu nhiên.

Định lý 7. *Giả sử* $X(t)$, $a \leq t \leq b$ *là quá trình* L_2 *- khả vi liên tục. Khi đó ta có đánh giá sau:*

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{a\leq t\leq b} X^2(t)\Big] \leq \frac{1}{2}[C^2(a) + C^2(b)] + \int_a^b C(t)C_1(t)dt ,$$

trong đó $C(t) = \sqrt{\mathbb{E}|X(t)|^2}$ *và* $C_1(t) = \sqrt{\mathbb{E}|X'(t)|^2}$.

Chứng minh. Đặt $Y(t) = X^2(t)$. Ta có

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \underset{h\to 0}{\mathrm{l.i.m}} \frac{X^2(t+h) - X^2(t)}{h} = \\ &= \underset{h\to 0}{\mathrm{l.i.m}} \frac{X(t+h) - X(t)}{h}[X(t+h) + X(t)] = 2X'(t)X(t) . \end{aligned}$$

Áp dụng công thức Newton - Leibnitz ta có

$$2\int_a^t X'(u)X(u)du = X^2(t) - X^2(a) ,$$

$$2\int_t^b X'(u)X(u)du = X^2(b) - X^2(t) .$$

Suy ra

$$\begin{aligned} 2X^2(t) &= X^2(a) + X^2(b) + 2\int_a^t X'(u)X(u)du - 2\int_t^b X'(u)X(u)du \leq \\ &\leq X^2(a) + X^2(b) + 2\int_a^t |X'(u)X(u)|du + 2\int_t^b |X'(u)X(u)|du = \\ &= X^2(a) + X^2(b) + 2\int_a^b |X'(u)X(u)|du . \end{aligned}$$

Từ đó

$$\sup_{a\le t\le b}|X^2(t)| \le \frac{1}{2}\Big[X^2(a)+X^2(b)\Big] + \int_a^b |X'(u)X(u)|du \ .$$

Lấy kỳ vọng hai vế ta thu được

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{a\le t\le b}|X^2(t)|\Big] \le \frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}|X^2(a)| + \mathbb{E}|X^2(b)|\Big) + \int_a^b \mathbb{E}|X'(u)X(u)|du \le$$

$$\le \frac{1}{2}[C^2(a)+C^2(b)] + \int_a^b C_1(u)C(u)du \ .\square$$

1.2.3. Khai triển Karunen - Loève

Trong mục này chúng ta sẽ trình bày khai triển Karunen - Loève của một quá trình cấp 2 thành các thành phần không tương quan.

Giả sử $X(t)$, $t\in[a,b]$ là một quá trình cấp 2 với hàm trung bình $m(t)$ và hàm tự tương quan $r(s,t)$ liên tục.

Xét toán tử tích phân $A: L_2[a,b]\to L_2[a,b]$ được cho bởi công thức

$$Ax(s) = \int_a^b r(s,t)x(t)dt \ .$$

Theo lý thuyết về phương trình tích phân, tồn tại một cơ sở trực chuẩn của $L_2[a,b]$ gồm các hàm riêng $\{\varphi_n(t)\}$ với các giá trị riêng $\lambda_n>0$ của toán tử tích phân A sao cho

$$A\varphi_n(s) = \int_a^b r(s,t)\varphi_n(t)dt = \lambda_n\varphi_n(s) \quad , \forall s$$

và ta có

$$r(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(s)\varphi_n(t) \ ,$$

trong đó chuỗi ở trên hội tụ tuyệt đối và đều theo cả hai biến s và t.

Ký hiệu $X_0(t) = X(t) - m(t)$ thì $X_0(t)$ là quá trình cấp 2 có hàm trong bình 0 và hàm tự tương quan $r(s,t)$.

Đặt $Z_n = \int_a^b \varphi_n(t)X_0(t)dt$. Ta khẳng định rằng $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ là không tương quan. Thật vậy:

$$\mathrm{Cov}(Z_n, Z_m) = \mathrm{Cov}\Big[\int_a^b \varphi_n(t)X_0(t)dt, \int_a^b \varphi_m(s)X_0(s)ds\Big] =$$

$$= \int_a^b\int_a^b r(s,t)\varphi_m(s)\varphi_n(t)dsdt = \int_a^b \varphi_n(t)dt\int_a^b r(s,t)\varphi_m(s)ds =$$

$$= \lambda_m \int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m(t)dt = \lambda_m\delta_{mn} ,$$

trong đó $\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad m \neq n , \\ 1 & \text{nếu} \quad m = n . \end{cases}$

Vậy $\mathrm{Cov}(Z_n, Z_m) = 0$ nếu $m \neq n$ và $\mathrm{Var}Z_n = \lambda_n$.

Mặt khác

$$\mathbb{E}X_0(t)Z_n = \mathbb{E}\int_a^b X_0(t)X_0(s)\varphi_n(s)ds =$$

$$= \int_a^b r(s,t)\varphi_n(s)ds = \lambda_n\varphi_n(t) ,$$

$$\mathbb{E}\Big|X_0(t) - \sum_{k=1}^{n} Z_k\varphi_k(t)\Big|^2 =$$

$$= \mathbb{E}|X_0(t)|^2 - 2\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(t)\mathbb{E}Z_kX_0(t) + \mathbb{E}\Big|\sum_{k=1}^{n} Z_k\varphi_k(t)\Big|^2 =$$

$$= r(t,t) - 2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k^2(t) + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k^2(t) =$$

$$= r(t,t) - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k^2(t) \quad \to 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty .$$

Do đó $\quad \underset{k\to\infty}{\text{l.i.m}} \sum_{k=1}^{n} Z_k\varphi_k(t) = X_0(t)$,

hay

$$X(t) = m(t) + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k\varphi_k(t).$$

Vậy ta có định lý sau:

Định lý 8 (Khai triển Karunen - Loève). *Giả sử $X(t), t \in [a,b]$ là quá trình L_2 - liên tục với hàm trung bình $m(t)$ và hàm tự tương quan $r(s,t)$. Khi đó tồn tại dãy đại lượng ngẫu nhiên $\{Z_n\}$ không tương quan, với kỳ vọng 0 và dãy hàm không ngẫu nhiên $\{\varphi_n(t)\}$ sao cho $\forall t \in [a,b]$ ta có khai triển sau:*

$$X(t) = m(t) + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n\varphi_n(t) ,$$

trong đó chuỗi ở trên hội tụ bình phương trung bình với mỗi $t \in [a,b]$.

Dãy $\{\varphi_n(t)\}$ là cơ sở trực chuẩn của $L_2[a,b]$ và là các hàm riêng của toán tử tích phân A

$$Ax(s) = \int_a^b r(s,t)x(t)dt$$

và $\mathbb{E}|Z_n|^2 = \lambda_n$, với λ_n là giá trị riêng của A ứng với hàm riêng $\varphi_n(t)$.

Ví dụ 6. Giả sử $W(t)$, $t \in [0,1]$ là quá trình Wiener với tham số $\sigma^2 = 1$. $W(t)$ có hàm trung bình $m(t) = 0$ và hàm tự tương quan $r(s,t) = \min(s,t)$. Tính toán (bạn đọc tự kiểm tra?) cho thấy các hàm riêng $\varphi_n(t)$ và các giá trị riêng λ_n của toán tử tích phân A là

$$\varphi_n(t) = \sqrt{2}\sin(n+\frac{1}{2})\pi t \quad \text{và} \quad \lambda_n = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\pi} \quad , \quad (n = 1,2,...) .$$

Vậy ta có

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n\sqrt{2}\sin(n+\frac{1}{2})\pi t ,$$

trong đó $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy các đại lượng ngẫu nhiên Gauss không tương quan, nên chúng độc lập.

Ta còn có một dạng khai triển khác của $W(t)$ như sau:

Đặt $X(t) = W(t) - tW(1)$. Khi đó $X(t)$ là quá trình Gauss với hàm trung bình $m_X(t) = 0$ và hàm tự tương quan $r_X(s,t) = \min(s,t) - ts$. Tính toán (bạn đọc tự kiểm tra?) cho thấy các hàm riêng và các giá trị riêng là

$$\varphi_n(t) = \sqrt{2}\sin n\pi t \quad \text{và} \quad \lambda_n = \frac{1}{n^2\pi} \quad , (n = 1, 2, \ldots) .$$

Vậy $X(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n\sqrt{2}\sin n\pi t$, trong đó $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy các đại lượng ngẫu nhiên Gauss độc lập.

Đặt $Z_0 = W(1)$ ta có

$$W(t) = Z_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n\sqrt{2}\sin n\pi t .$$

Ta chứng minh rằng Z_0 độc lập với Z_n. Thật vậy:

$$\mathbb{E}Z_0Z_n = \mathbb{E}\Big[W(1)\int_0^1 [W(t) - tW(1)]\sqrt{2}\sin n\pi t dt\Big] =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 \mathbb{E}\Big([W(t) - tW(1)]W(1)\Big)\sin n\pi t dt =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 \Big[\underbrace{\mathbb{E}W(t)W(1) - t\mathbb{E}W^2(1)}_{=0}\Big]\sin n\pi t dt = 0 .$$

1.3. Độ đo ngẫu nhiên và tích phân ngẫu nhiên

1.3.1. Độ đo ngẫu nhiên

Giả sử $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là không gian xác suất cơ bản, $(S, \mathcal{A})$ là không gian đo được nào đó. Hàm giá trị thực (hoặc phức) $Z(A) = Z(\omega, A)$ xác định với $\omega \in \Omega$, $A \in \mathcal{A}$ được gọi là độ đo ngẫu nhiên cộng tính hữu hạn nếu:

a) Với mọi $A \in \mathcal{A}$ thì $\mathbb{E}|Z(A)|^2 < \infty$.

b) Với bất kỳ hai tập $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ mà $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ thì

$$Z(A_1 \cup A_2) = Z(A_1) + Z(A_2) \qquad (P - \text{h.c.c}) .$$

Độ đo ngẫu nhiên cộng tính hữu hạn Z được gọi là độ đo ngẫu nhiên nếu với bất kỳ dãy các tập $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ đôi một không giao nhau thì

$$\mathbb{E}\Big|Z\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) - \sum_{k=1}^{n} Z(A_k)\Big|^2 \to 0 \quad (n \to \infty) ,$$

hay là

$$Z\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} Z(A_k) ,$$

trong đó chuỗi ở trên hội tụ theo nghiã bình phương trung bình. Đây là tính chất cộng tính đếm được (σ - cộng tính).

Thông thường, người ta hay xét độ đo ngẫu nhiên Z là hàm nhận giá trị trong không gian $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, còn tính chất cộng tính đếm được (σ - cộng tính) được hiểu theo nghiã bình phương trung bình ở trên.

Tương tự như đối với độ đo thông thường, tính chất cộng tính đếm được của độ đo ngẫu nhiên (theo nghiã bình phương trung bình) tương đương với tính chất liên tục tại "*không*" (theo nghiã bình phương trung bình), tức là

$$\mathbb{E}|Z(A_n)|^2 \to 0 \quad \text{khi} \quad A_n \searrow \varnothing \quad , A_n \in \mathcal{A} .$$

Độ đo ngẫu nhiên Z được gọi là trực giao (hay là độ đo với giá trị trực giao) nếu với bất kỳ hai tập $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ mà $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ thì

$$\mathbb{E}Z(A_1)Z(A_2) = 0 \quad (\text{hoặc} \quad \mathbb{E}Z(A_1)\overline{Z(A_2)} = 0) ,$$

điều này tương đương với sự kiện: với bất kỳ hai tập $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ thì

$$\mathbb{E}Z(A_1)Z(A_2) = \mathbb{E}|Z(A_1 \cap A_2)|^2 .$$

Đặt $m(A) = \mathbb{E}|Z(A)|^2$ thì ta thấy m là độ đo hữu hạn, nó được gọi là độ đo cấu trúc của độ đo ngẫu nhiên trực giao Z.

Ta còn có thể định nghiã độ đo ngẫu nhiên trực giao và độ đo cấu trúc của nó theo cách khác (tương đương với cách trên) như sau:

Giả sử $(S, \mathcal{A}, m)$ là không gian có độ đo. Ánh xạ $Z : \mathcal{A} \to L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ được gọi là một độ đo ngẫu nhiên trực giao nếu thoả mãn các tính chất:

a) $< Z(A_1), Z(A_2) > = m(A_1 \cap A_2)$, $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$.

b) Với $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy các tập đôi một rời nhau thuộc $\mathcal{A}$ thì

$$Z\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(A_n) \ ,$$

trong đó chuỗi ở trên hội tụ theo nghiã bình phương trung bình.

Độ đo m được gọi là độ đo cấu trúc của độ đo Z. Người ta đã chứng minh được rằng luôn tồn tại độ đo ngẫu nhiên trực giao Z nhận một độ đo m cho trước làm độ đo cấu trúc.

Từ tính chất a) ta có $m(A) = \mathbb{E}|Z(A)|^2$.

1.3.2. Tích phân đối với một độ đo ngẫu nhiên

Cho $Z : \mathcal{A} \to L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là một độ đo ngẫu nhiên với độ đo cấu trúc m. Trong mục này, ta sẽ xây dựng tích phân dạng $\int_S f(t)dZ(t)$, với $f \in L_2(S, \mathcal{A}, m)$ theo cách sau:

Ký hiệu $\mathbb{I}_A$ là hàm chỉ tiêu của tập hợp A tức là

$$\mathbb{I}_A(t) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } t \in A \\ 0 & \text{nếu } t \notin A \end{cases}.$$

Trước hết, nếu $f(t)$ là hàm đơn giản: $f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{I}_{A_k}(t)$, ta định nghiã

$$I(f) = \sum_{k=1}^{n} c_k Z(A_k).$$

Dễ kiểm tra định nghiã này là đúng đắn và I là ánh xạ tuyến tính từ không gian tuyến tính $\mathcal{U}$ các hàm đơn giản vào không gian $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Ta có $$\|I(f)\|^2 = < I(f), I(f) > = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j < Z(A_i), Z(A_j) > =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 m(A_i) = \int_S |f(t)|^2 dm.$$

Vậy $I : \mathcal{U} \to L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là phép đẳng cự giữa $\mathcal{U}$ và một bộ phận của $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Vì $\mathcal{U}$ là trù mật trong $L_2(S, \mathcal{A}, m)$, nên I được mở rộng thành một đẳng cự từ toàn bộ $L_2(S, \mathcal{A}, m)$ lên một bộ phận của $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Ta ký hiệu

$$I(f) = \int_S f(t)dZ(t)$$

và gọi đó là tích phân ngẫu nhiên của f đối với độ đo ngẫu nhiên trực giao Z.

Tính chất tuyến tính, đẳng cự của I được phát biểu lại thành các tính chất sau đây của tích phân ngẫu nhiên.

Định lý 9. *Tích phân ngẫu nhiên có các tính chất sau:*

(i) *Tuyến tính: với các hằng số α, β tuỳ ý thì*

$$\int_S [\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)]dZ(t) = \alpha \int_S f_1(t)dZ(t) + \beta \int_S f_2(t)dZ(t) .$$

(ii) $$\left\langle \int_S f(t)dZ(t), \int_S g(t)dZ(t) \right\rangle = \int_S f(t)g(t)dm(t).$$

(iii) $$\mathbb{E}\left| \int_S f(t)dZ(t) \right|^2 = \int_S |f(t)|^2 dm(t).$$

(iv) $f_n(t) \to f(t)$ *trong* $L_2(S, \mathcal{A}, m)$ *khi và chỉ khi*

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}} \int_S f_n(t)dZ(t) = \int_S f(t)dZ(t) .$$

Bây giờ giả sử $X(t)$ là một quá trình có gia số trực giao và L_2 - liên tục bên trái , nghiã là:

a) Với $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ thì
$\left\langle X(t_2) - X(t_1), X(t_4) - X(t_3) \right\rangle = 0.$

b) $\underset{t\nearrow t_0}{\text{l.i.m}} X(t) = X(t_0).$

Ta sẽ chứng tỏ rằng có một hàm thực không giảm $F(t)$ liên tục bên trái sao cho với $s < t$ thì

$$F(t) - F(s) = \mathbb{E}|X(t) - X(s)|^2 .$$

Thật vậy, chọn cố định một điểm t_0 nào đó và định nghiã

$$F(t) = \begin{cases} \mathbb{E}|X(t) - X(t_0)|^2 & \text{nếu} \quad t \geq t_0 , \\ -\mathbb{E}|X(t) - X(t_0)|^2 & \text{nếu} \quad t \leq t_0 . \end{cases}$$

Khi đó với $t_0 \leq s < t$ ta có

$$F(t) - F(s) = \mathbb{E}|X(t) - X(t_0)|^2 - \mathbb{E}|X(s) - X(t_0)|^2 .$$

Mặt khác

$$\mathbb{E}|X(t) - X(t_0)|^2 = \mathbb{E}|X(t) - X(s) + X(s) - X(t_0)|^2 =$$
$$= \mathbb{E}|X(t) - X(s)|^2 + \mathbb{E}|X(s) - X(t_0)|^2 \quad \text{(do } X(t) \text{ có gia số trực giao).}$$

Suy ra $\quad F(t) - F(s) = \mathbb{E}|X(t) - X(s)|^2.$

Các trường hợp khác được kiểm tra tương tự.

Tính liên tục bên trái của $F(t)$ được suy ra từ tính L_2 - liên tục bên trái của $X(t)$ và hệ thức $F(t) - F(s) = \mathbb{E}|X(t) - X(s)|^2$.

Gọi m là độ đo hữu hạn sinh bởi hàm thực không giảm liên tục bên trái $F(t)$ và Z_X là độ đo ngẫu nhiên trực giao trên $\mathbb{R}$ nhận m là độ đo cấu trúc. Ta định nghiã

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) dX(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t) dZ_X(t) .$$

Ngược lại, nếu cho trước độ đo ngẫu nhiên trực giao Z trên $\mathbb{R}$ thì ta có thể xây dựng một quá trình $X(t)$ có gia số trực giao và L_2 - liên tục bên trái bằng cách đặt

$$X(t) = Z\{(-\infty, t)\}.$$

Dễ dàng kiểm tra rằng $\quad Z = Z_X$.

Định lý 10. (i) *Nếu hàm* $f(t)$ *liên tục trên* $[a,b]$ *thì*

$$\int_a^b f(t)dX(t) = \underset{|\Delta|\to 0}{\text{l.i.m}} \sum_{i=0}^{n} f(s_i)\Big[X(t_{i+1}) - X(t_i)\Big] ,$$

trong đó Δ *là phân hoạch tuỳ ý* $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} = b$, s_i *là điểm tuỳ ý thuộc* $[t_i, t_{i+1}]$ *và* $|\Delta| = \max|t_{i+1} - t_i|$.

(ii) *Nếu* $X(t)$ *là* L_2 *- khả vi liên tục thì*

$$\int_a^b f(t)dX(t) = \int_a^b f(t)X'(t)dt .$$

(iii) (Công thức tích phân từng phần).
Nếu hàm $f(t)$ *khả vi liên tục trên* $[a,b]$ *và* $X(t)$ *là* L_2 *- liên tục thì*

$$\int_a^b f(t)dX(t) = f(b)X(b) - f(a)X(a) - \int_a^b f'(t)X(t)dt =$$

$$= f(t)X(t)\Big|_a^b - \int_a^b f'(t)X(t)dt .$$

Chứng minh. (i) Gọi m là độ đo cấu trúc của Z_X.

Vì $f(t)$ liên tục trên $[a,b]$ nên nó liên tục đều trên $[a,b]$ (theo định lý Cantor), do đó $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ sao cho nếu $|t-s| < \delta$ thì $|f(t)-f(s)| < \varepsilon$.

Đặt $g_\Delta(t) = \sum_{i=0}^{n} f(s_i)\mathbb{I}_{(t_i,\, t_{i+1}]}$, trong đó $|\Delta| < \delta$, ta suy ra

$$\int_a^b |f(t) - g_\Delta(t)|^2 dm(t) \ \le\ \varepsilon^2 m\{[a,b]\} .$$

Mặt khác

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{i=0}^{n} f(s_i)[X(t_{i+1}) - X(t_i)] - \int_a^b f(t)dX(t)\Big|^2 =$$

$$= \mathbb{E}\Big|\int_a^b [g_\Delta(t) - f(t)]dX(t)\Big|^2 = \int_a^b |f(t) - g_\Delta(t)|^2 dm(t) \ \leq \ \varepsilon^2 m\{[a,b]\} \ .$$

Thành thử

$$\underset{|\Delta|\to 0}{\mathrm{l.i.m}} \sum_{i=0}^{n} f(s_i)[X(t_{i+1}) - X(t_i)] = \int_a^t f(t)dX(t) \ .$$

(ii) Ta có

$$\sum_{i=0}^{n} f(s_i)[X(t_{i+1}) - X(t_i)] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(s_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} X'(s)ds = \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s_i)X'(s)ds \ .$$

Giả sử $\|.\|$ là chuẩn trong $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tức là $\|\xi\| = (\mathbb{E}|\xi|^2)^{1/2}$, $\xi \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ta có

$$\Big\|\int_a^b f(t)X'(t)dt - \sum_{i=0}^{n} f(s_i)[X(t_{i+1}) - X(t_i)]\Big\| =$$

$$= \Big\|\sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(s) - f(s_i)]X'(s)ds\Big\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(s) - f(s_i)|.\|X'(s)\|ds \ .$$

Vì $X'(t)$ là L_2 - liên tục nên tồn tại
$M = \sup_{t\in[a,b]} \|X'(t)\| < \infty.$

Vì thế với $|\Delta| < \delta$ ta được

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(s) - f(s_i)|.\|X'(s)\| ds \leq \sum_{i=0}^{n} M\varepsilon(t_{i+1} - t_i) = M\varepsilon(b-a) .$$

Vậy suy ra

$$\underset{|\Delta|\to 0}{\text{l.i.m}} \sum_{i=0}^{n} f(s_i)[X(t_{i+1}) - X(t_i)] = \int_a^b f(t)X'(t)dt .$$

Hay là do (i) thì $\displaystyle\int_a^b f(t)dX(t) = \int_a^b f(t)X'(t)dt.$

(iii) Ta có

$$\int_a^b f(t)dX(t) = \underset{|\Delta|\to 0}{\text{l.i.m}} \sum_{i=0}^{n} f(s_i)[X(t_{i+1}) - X(t_i)] =$$

$$= \underset{|\Delta|\to 0}{\text{l.i.m}} \left[f(b)X(b) - f(a)X(a) - \sum_{i=0}^{n} X(t_{i+1})[f(t_{i+1}) - f(t_i)] \right] .$$

Lại có $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} X(t_{i+1})[f(t_{i+1}) - f(t_i)] = \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} X(t_{i+1})f'(s)ds.$

Do đó suy ra

$$\left\| \int_a^b X(s)f'(s)ds - \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} X(t_{i+1})f'(s)ds \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f'(s)|.\|X(s) - X(t_{i+1})\| ds \leq K\varepsilon(b-a) ,$$

trong đó $K = \sup\limits_{s\in[a,b]} |f'(s)|$ còn $\|X(u) - X(v)\| < \varepsilon$ nếu $|u - v| < \delta$ (do ánh xạ $X(t) : [a,b] \to L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là liên tục đều).

Vậy $\displaystyle\underset{|\Delta|\to 0}{\text{l.i.m}} \sum_{i=0}^{n} X(t_{i+1})[f(t_{i+1}) - f(t_i)] = \int_a^b X(t)f'(t)ds.$

Công thức tích phân từng phần đã được chứng minh.□

Giả sử $W(t)$ là quá trình Wiener với tham số σ^2. Từ nay trở đi ta hiểu quá trình Wiener $W(t), -\infty < t < \infty$, với tham số σ^2 là quá trình gia số trực giao có phân phối chuẩn với trung bình 0 và thỏa mãn $E|W(t) - W(s)|^2 = \sigma^2|t-s|$. Độ đo cấu trúc là độ đo Lebesgue sai khác một hệ số tỷ lệ σ^2. Như ta đã biết quá trình $W(t)$ không L_2 - khả vi tại bất cứ điểm nào (xem ví dụ 3). Tuy nhiên, do nhu cầu của nhiều bài toán thực tiễn, người ta vẫn cần phải gán cho đạo hàm $W'(t)$ một ý nghiã nào đó.

Tương tự như hàm suy rộng Dirac $\delta(x)$ được xem như là phiếm hàm tuyến tính trên không gian $C[a,b]$ các hàm liên tục, xác định bởi công thức

$$\begin{aligned} < \delta, f > &= \int_a^b f(x)\delta(x)dx \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

ta cũng xem $W'(t)$ như một phiếm hàm ngẫu nhiên tuyến tính trên không gian $L_2[a,b]$, xác định bởi công thức

$$\begin{aligned} < W', f > &= \int_a^b f(t)W'(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dW(t) \qquad (*). \end{aligned}$$

Người ta thường gọi $W'(t)$ là "*ồn trắng*" (white noise). Đó là một quá trình ngẫu nhiên "*suy rộng*", tức là một phiếm hàm ngẫu nhiên tuyến tính trên không gian $L_2[a,b]$, xác định bởi công thức $(*)$ ở trên.

Từ định lý 9 ta suy ra các kết quả sau:

$$\mathbb{E}\Big[\int_a^b f(t)dW(t)\Big] = 0 \ ,$$

$$\mathbb{E}\Big[\int_a^b f(t)dW(t)\int_a^b g(t)dW(t)\Big] = \sigma^2\int_a^b f(t)g(t)dt \ ,$$

$$\mathrm{Var}\Big[\int_a^b f(t)dW(t)\Big] = \sigma^2\int_a^b f^2(t)dt \ ,$$

$$\mathbb{E}\Big[\int_a^c f(t)dW(t)\int_d^b g(t)dW(t)\Big] = 0 \ , \text{ với } a \le c \le d \le b \ ,$$

$$\mathbb{E}\Big[\int_a^c f(t)dW(t)\int_a^b g(t)dW(t)\Big] = \sigma^2\int_a^c f(t)g(t)dt \ , \text{ với } a \le c \le b \ .$$

Ví dụ 7. Giả sử $W(t)$, $t \ge 0$ là quá trình Wiener còn $X(t)$, $t \ge 0$ là quá trình được xác định bởi công thức

$$X(t) = \int_0^t e^{\alpha(t-u)}dW(u) \ ,$$

trong đó α là một hằng số thực. Hãy tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan của $X(t)$.

Giải. Ta thấy $X(t)$ có hàm trung bình $m(t) = 0$.

Giả sử $0 \le s < t$, áp dụng kết quả

$$\mathbb{E}\Big[\int_a^c f(t)dW(t)\int_a^b g(t)dW(t)\Big] = \sigma^2\int_a^c f(t)g(t)dt \ , \text{ với } a \le c \le b$$

thì hàm tự tương quan của $X(t)$ là

$$
\begin{aligned}
r(s,t) &= \mathbb{E}[X(s)X(t)] = \\
&= \mathbb{E}\Big[\int_0^s e^{\alpha(s-u)}dW(u)\int_0^t e^{\alpha(t-u)}dW(u)\Big] \\
&= e^{\alpha(s+t)}\mathbb{E}\Big[\int_0^s e^{-\alpha u}dW(u)\int_0^t e^{-\alpha u}dW(u)\Big] \\
&= e^{\alpha(s+t)}\sigma^2\int_0^s e^{-2\alpha u}du \\
&= \sigma^2 e^{\alpha(s+t)}.\frac{1-e^{-2\alpha s}}{2\alpha} .
\end{aligned}
$$

Như vậy

$$
r(s,t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\Big[e^{\alpha(s+t)} - e^{\alpha|t-s|}\Big] .
$$

Với $s = t$ thì ta có

$$
\mathrm{Var}X(t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(e^{2\alpha t} - 1) .
$$

Bài tập

1. Cho X là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với các tham số là μ và σ^2. Đặt $Y(t) = Xe^{-t}$, $t > 0$. Hãy tính hàm trung bình và tự tương quan của $Y(t)$.

2. Cho X là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số $\lambda > 0$. Đặt $Y(t) = e^{-Xt}$, $t > 0$. Hãy tính các hàm $m(t)$ và $r(s,t)$ của $Y(t)$.

3. Tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan của các quá trình ngẫu nhiên sau:

a) $Y(t) = cX + t$, với X là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với các tham số μ và σ^2 , còn c là đại lượng không ngẫu nhiên.

b) $Y(t) = Xt + c$, với X là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối đều trên khoảng (α, β) , còn c là đại lượng không ngẫu nhiên.

4. Tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan của quá trình ngẫu nhiên

$$Y(t) = Ve^{-Ut} \qquad (t > 0) ,$$

trong đó V và U là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập, U có phân phối đều trên khoảng $(0,a)$, $a > 0$, $\mathbb{E}V = m_v$, $\mathrm{Var}V = \sigma_v^2$.

5. Tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan của quá trình ngẫu nhiên

$$Y(t) = V\cos(\varphi t - \Theta) ,$$

trong đó V và Θ là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập, Θ có phân phối đều trên khoảng $(0, 2\pi)$, $\mathbb{E}V = m_v$, $\mathrm{Var}V = \sigma_v^2$, còn φ là tham số không ngẫu nhiên.

6. Cho các quá trình ngẫu nhiên độc lập $X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)$, $t \in T$ có cùng hàm trung bình 0 và các hàm tự tương quan tương ứng là

$$r_1(s,t), r_2(s,t), ..., r_n(s,t).$$

Tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan của

$$Y(t) = X_1(t) + X_2(t) + \dots + X_n(t) .$$

7.* Cho $r(s,t)$, $s,t \in T$ là hàm tự tương quan của một quá trình ngẫu nhiên nào đó, $Q(z)$ là một đa thức với các hệ số dương. Chứng minh rằng tồn tại một quá trình ngẫu nhiên mà $R(s,t) = Q(r(s,t))$ là hàm tự tương quan của nó.

8. Cho các quá trình ngẫu nhiên độc lập $X_1(t), X_2(t)$, $t \in T$ có các hàm trung bình là $m_1(t), m_2(t)$ và các hàm tự tương quan là $r_1(s,t), r_2(s,t)$ tương ứng. Hãy tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan của quá trình ngẫu nhiên

$$Y(t) = X_1(t)X_2(t) .$$

9. Cho $X(t)$, $0 \le t < \infty$ là quá trình Poisson với tham số λ. Đặt $Y(t) = X(t) - tX(1)$, $0 \le t \le 1$. Tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan của $Y(t)$.

10. Cho $U_1, U_2, \dots, U_n$ là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập, có phân phối đều trên đoạn $[0,1]$. Đặt

$$\phi(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad x \le t \\ 0 & \text{nếu} \quad x > t \end{cases} , \text{ trong đó } \quad 0 \le t \le 1 , \ 0 \le x \le 1 .$$

Quá trình $X(t)$ được xác định bằng công thức:

$$X(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \phi(t, U_k).$$

Ta gọi $X(t)$ là hàm phân phối thực nghiệm của $U_1, U_2, \dots, U_n$. Tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan của $X(t)$.

11. Cho $X(t)$, $-\infty < t < \infty$ là quá trình Gauss và $f(t), g(t)$ là hai hàm không ngẫu nhiên nào đó. Đặt

$$Y(t) = f(t)X(g(t)).$$

Chứng tỏ rằng $Y(t)$ là quá trình Gauss, tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan của nó.

12.* Cho $W(t), t \ge 0$ là quá trình Wiener với tham số σ^2.

Tìm phân phối của đại lượng ngẫu nhiên

$$S_n = W(1) + W(2) + ... + W(n) .$$

Tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan của quá trình sau:

a) $X(t) = W^2(t) \ , \ t > 0.$

b) $X(t) = tW(\frac{1}{t}) \ , \ t > 0.$

c) $X(t) = c^{-1}W(c^2 t) \ , \ t > 0$, c là hằng số.

d) $X(t) = W(t) - tW(1) \ , \ 0 \leq t \leq 1.$

13. Cho $W(t), t \geq 0$ là quá trình Wiener với tham số σ^2.

Tìm kỳ vọng và phương sai của $\int\limits_0^1 W^2(t)dt.$

Tìm

$$\operatorname{Cov}\left[W(t), \int\limits_0^1 W(s)ds\right] \quad , \quad 0 \leq t \leq 1 .$$

14.* Cho $X(t)$ là quá trình cấp 2 khả vi n lần và $Y(t)$ là quá trình cấp 2 khả vi m lần. Chứng minh rằng

$$r_{X^{(n)}Y^{(m)}}(s,t) = \frac{\partial^{n+m}}{\partial s^n \partial t^m} r_{XY}(s,t) .$$

15. Cho $W(t), t \geq 0$ là quá trình Wiener với tham số σ^2.

Tìm kỳ vọng và phương sai của các đại lượng ngẫu nhiên

$$X = \int\limits_0^1 t dW(t) \quad , \quad Y = \int\limits_0^1 t^2 dW(t) .$$

Tìm hệ số tương quan của X và Y.

16. Cho $W(t), t \geq 0$ là quá trình Wiener với tham số σ^2.

Tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan của các quá trình sau:

a) $X(t) = \int\limits_0^t s dW(s) \quad , \ t \geq 0.$

b) $X(t) = \int\limits_0^1 \cos tsdW(s) \quad , -\infty < t < \infty.$

c) $X(t) = \int\limits_{t-1}^{t} (t-s)dW(s) \quad , -\infty < t < \infty.$

17. Cho $X(t)$ là quá trình có hàm trung bình 0 và hàm tự tương quan là $r(s,t) = e^{st}$. Chứng minh rằng $X(t)$ là L_2 - khả vi vô hạn.

18. Cho Z là độ đo ngẫu nhiên có độ đo cấu trúc m. Chứng minh rằng:

a) $\mathbb{E}|Z(A_1) - Z(A_2)|^2 = m(A_1 \Delta A_2)$,

trong đó $A_1 \Delta A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$.

b) $Z(A_1 \setminus A_2) = Z(A_1) - Z(A_1 \cap A_2) \qquad (P -$ h.c.c).

c) $Z(A_1 \Delta A_2) = Z(A_1) + Z(A_2) - 2Z(A_1 \cap A_2) \qquad (P -$ h.c.c).

19.* Cho A, η, φ là các đại lượng ngẫu nhiên , φ độc lập với A và η , $A \geq 0$, $\eta \geq 0$, φ có phân phối đều trên đoạn $[0, 2\pi]$.
Tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan của quá trình

$$X(t) = A\cos(\eta t + \varphi) \quad , \ t \in \mathbb{R} .$$

20. Cho $f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)$ là các hàm không ngẫu nhiên. $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ là các đại lượng ngẫu nhiên không tương quan, với $\mathbb{E}\xi_1 = m_1, ..., \mathbb{E}\xi_n = m_n$ và

$\mathrm{Var}\xi_1 = d_1, ..., \mathrm{Var}\xi_n = d_n.$

Tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan của quá trình

$$X(t) = \xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t) + ... + \xi_n f_n(t).$$

21. Chứng minh tính xác định dương của các hàm sau đây:

$$r_1(s,t) = \min(s,t) \ ; \ s,t \geq 0 \ ,$$

$$r_2(s,t) = \begin{cases} 1 - |s-t| & , \text{ nếu } \ |s-t| < 1 \\ 0 & , \text{ nếu } \ |s-t| \geq 1 \quad (s,t \in \mathbb{R}) \end{cases} ,$$

$$r_3(s,t) = \min(s,t) - st \ ; \ s,t \in [0,1] \ ,$$

$$r_4(s,t) = e^{-|s-t|} \ ; \ s,t \in \mathbb{R} \ .$$

22. Cho $W(t), t \geq 0$ là quá trình Wiener. Đặt

$$W_0(t) = \begin{cases} W(t) & , \text{ nếu } \ 0 \leq t \leq T \ , \\ 2W(T) - W(t) & , \text{ nếu } \ t > T \ . \end{cases}$$

Chứng minh rằng $W_0(t)$ cũng là quá trình Wiener.

23.* Cho $W(t), t \geq 0$ là quá trình Wiener với tham số σ^2.

Chứng minh rằng

a) $\mathbb{E}[W(t) - W(s)]^{2n+1} = 0$,

b) $\mathbb{E}[W(t) - W(s)]^{2n} = (2n-1)!!(t-s)^n\sigma^{2n}$.

24. Cho $W(t), t \geq 0$ là quá trình Wiener với tham số σ^2.

Tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan của quá trình sau:

$$X(t) = \int_t^\infty (e^{t-s} - 2e^{2(t-s)})W(s)ds \ , t \geq 0 \ .$$