CHƯƠNG IV

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

§1. Định nghĩa và tính chất

1. Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

Cho X và X' là hai không gian vectơ trên cùng một trường $\mathbb{K}$ (tức là cùng trên trường thực hoặc cùng trên trường phức). Một ánh xạ

$$f : X \to X'$$

được gọi là tuyến tính nếu mọi u, v $\in$ X và mọi $\lambda \in \mathbb{K}$ đều có

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$

2) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Tính chất 1) gọi là tính cộng tính, tính chất 2) gọi là tính thuần nhất.

Bổ đề 1.1. *Cho* $f : X \to X'$ *là một ánh xạ tuyến tính.* Khi đó

a) $f(0) = 0$;

b) $f(u - v) = f(u) - f(v)$ *với mọi* u, v $\in$ X ;

c) $f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(u_i)$ *với mọi* $u_1, ..., u_k \in X$; $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$.

Chứng minh. Do $f(0) = f(0.0) = 0.f(0) = 0$ nên có a) ; $f(u - v) = f(u + (-1)v) = f(u) + f((-1)v) = f(u) - f(v)$ tức là có b) ; c) nhận được từ 1), 2) và quy nạp theo k.□

Ví dụ

a) Các ánh xạ sau đây là tuyến tính :

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1, f(x,y) = 3x - 2y.$

2) $f : X \to X'$, $f(x) = 0$ (ánh xạ không)

3) $I_X : X \to X$, $I_X(x) = x$ (ánh xạ đồng nhất)

4) $f : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$, $f(P) = P'$, P' là đạo hàm của P

5) $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $(Af)(x) = x^2 f(x)$ với mọi $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$

6) $f : C[a,b] \to \mathbb{K}$, $f(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)dt$.

b) Các ánh xạ sau đây không là tuyến tính

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x - y + 1$

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Bổ đề 1.2. *Ánh xạ tuyến tính* $f : X \to X'$ *là đơn ánh nếu và chỉ nếu* $f^{-1}(0) = 0$.

Chứng minh : Nếu f đơn ánh thì hiển nhiên $f^{-1}(0) = 0$. Bây giờ giả sử $f^{-1}(0) = 0$ và lấy tuỳ ý $x_1, x_2 \in X$. Ta có

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Leftrightarrow f(x_1 - x_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 - x_2 \in f^{-1}(0) \\ &\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Vậy f là đơn ánh. □

2. Điều kiện xác định ánh xạ tuyến tính

Định lí 1.1. *Cho X và X' là hai không gian vectơ trên cùng một trường* $\mathbb{K}$, $E = \{v_i\}_{i \in I}$ *là một cơ sở của X,* $\{v'_i\}_{i \in I}$ *là một hệ vectơ tuỳ ý của X'. Khi đó* $f : X \to X'$, $f(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i v'_i$ *với mọi* $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \in X$ *là ánh xạ tuyến tính duy nhất từ X vào X' thoả mãn* $f(v_i) = v'_i$ *với mọi* $i \in I$.

Chứng minh. Ta nhớ lại rằng toạ độ của x trong cơ sở E là $x/_E = (\lambda_i)_{i \in I}$. Do $v_i/_E = (\lambda_i)_{i \in I}$, trong đó $\lambda_i = 1, \lambda_j = 0$ với mọi $j \neq i$, nên

$f(v_i) = v'_i$ với mọi $i \in I$.

Ta sẽ chứng minh f là tuyến tính. Với mọi $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Giả sử $x/_E = (\lambda_i)_{i \in I}$, $y/_E = (\mu_i)_{i \in I}$. Ta có

$$f(x+y) = f\left(\sum_{i\in I}(\lambda_i+\mu_i)v_i\right) = \sum_{i\in I}(\lambda_i+\mu_i)v_i'$$

$$= \sum_{i\in I}\lambda_i v_i' + \sum_{i\in I}\mu_i v_i'$$

$$= f(x) + f(y)\ ;$$

$$f(\lambda x) = f(\sum_{i\in I}(\lambda\lambda_i v_i) = \sum_{i\in I}(\lambda\lambda_i v_i')$$

$$= \lambda\sum_{i\in I}\lambda_i v_i'$$

$$= \lambda f(x).$$

Do đó f là ánh xạ tuyến tính.

Bây giờ giả sử $g : X \to X'$ là ánh xạ tuyến tính có tính chất $g(v_i) = v_i'$ với mọi $i \in I$. Với mọi $x = \sum_{i\in I}\lambda_i v_i \in X$ ta có

$$g(x) = g(\sum_{i\in I}(\lambda_i v_i) = \sum_{i\in I}\lambda_i g(v_i) = \sum_{i\in I}\lambda_i v_i' = f(x).$$

Vậy g = f và tính duy nhất của f được chứng minh. □

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở $\{e_1 = (1, -1, 2), e_2 = (2, -1, 5), e_3 = (-1, 1, -1)\}$. Tìm ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ thoả mãn $f(e_1) = (1, 1, 1)$, $f(e_2) = (1, 1, 0)$, $f(e_3) = (1, 0, 0)$.

Giải. Với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ta tìm $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ để

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = x_1\\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = x_2\\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 - \lambda_3 = x_3\end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 = -4x_1 - 3x_2 + x_3\\ \lambda_2 = x_1 + x_2\\ \lambda_3 = -3x_1 - x_2 + x_3\end{cases}$$

Từ đó

$$f(x) = (-4x_1 - 3x_2 + x_3)(1, 1, 1) + (x_1 + x_2)(1,1,0) + (-3x_1 - x_2 + x_3)(1,0,0).$$

Vậy

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-6x_1 - 3x_2 + 2x_3, -3x_1 - 2x_2 + x_3, -4x_1 - 3x_2 + x_3)$$

với mọi $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến tính muốn tìm.

3. Không gian L(X,X')

Cho X và X' là các không gian vectơ trên trường $\mathbb{K}$. Kí hiệu L(X, X') là tập tất cả các ánh xạ tuyến tính từ X vào X'.

Với mọi f, g $\in$ L(X, X'), $\lambda \in \mathbb{K}$ ta định nghĩa f + g và λf là các ánh xạ từ X vào X' xác định bởi

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Dễ dàng thấy rằng f + g và λf là ánh xạ tuyến tính, tức là thuộc L(X, X').

L(X, X') với các phép toán trên là một không gian vectơ trên $\mathbb{K}$, gọi là không gian các ánh xạ tuyến tính từ X vào X'.

§2. Ảnh, nhân và đẳng cấu

1. Ảnh và nhân

Cho ánh xạ tuyến tính $f : X \to X'$. Khi đó ta gọi ảnh của ánh xạ f là tập

$$\operatorname{Im} f = f(X) = \{u' = f(u) \mid u \in X\} \subset X' ;$$

nhân của ánh xạ f là tập

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0) = \{u \in X \mid f(u) = 0\} \subset X.$$

Như vậy f toàn ánh nếu và chỉ nếu Imf = X' và theo bổ đề 1.2, f đơn ánh nếu và chỉ nếu Ker f = {0}.

Ví dụ. a) Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x,y,x + y)$

Ta có

$$\operatorname{Ker} f = \{f(x,y) \mid f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \mid x = 0, y = 0, x + y = 0\}$$

$$= \{(0, 0)\} = \{0\}.$$

$$\operatorname{Im} f = \{f(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{f(x(1, 0) + y(0, 1)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{xf(1, 0) + yf(0, 1)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= <(1, 0, 1), (0, 1, 1)>$$

là không gian vectơ con sinh bởi (1, 0, 1) và (0, 1, 1).

b) Cho $f: \mathbb{K}_n[x] \to \mathbb{K}_n[x]$, $f(P) = P'$, $\mathbb{K}_n[x]$ là không gian vectơ các đa thức bậc $\leq n$, hệ số trong $\mathbb{K}$.

Ta có

$$\text{Ker } f = \{P \in \mathbb{K}_n[x] | P' = 0\} = \{P | P = \text{const}\} = \mathbb{K}$$

$\text{Im} f = f(\mathbb{K}_n[x]) = \mathbb{K}_{n-1}[x]$ là không gian vectơ các đa thức bậc $\leq n - 1$.

Bổ đề 2.1. *Cho* $f: X \to X'$ *là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó* Ker f *là một không gian vectơ con của* X *và* Im f *là một không gian vectơ con của* X'.

Chứng minh. Với mọi $u, v \in \text{Ker } f$, $\lambda \in \mathbb{K}$, ta có

$f(u + v) = f(u) + f(v) = 0 + 0 = 0$ nên $u + v \in \text{Ker } f$

$f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda. 0 = 0$ nên $\lambda u \in \text{Ker } f$

Vậy Ker f là không gian vectơ con của X.

Với tuỳ ý $u', v' \in \text{Im } f$, $\lambda \in \mathbb{K}$, chọn $u, v \in X$ sao cho $f(u) = u'$, $f(v) = v'$, ta có

$u' + v' = f(u) + f(v) = f(u + v) \in \text{Im } f$,

$\lambda u' = \lambda f(u) = f(\lambda u) \in \text{Im} f$.

Vậy Im f là không gian vectơ con của X'. □

Bổ đề 2.2. *Cho* $f: X \to X'$ *là ánh xạ tuyến tính và* S *là một hệ sinh của* X. *Khi đó* f(S) *là một hệ sinh của* Imf.

Chứng minh. Lấy tuỳ ý $x' \in \text{Imf}$ và chọn $x \in X$ sao cho $f(x) = x'$. Do S là hệ sinh của X nên tồn tại các vectơ $v_i \in S$ và các số $\lambda_i \in \mathbb{K}$ sao cho $x = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$. Khi đó

$$x' = f(x) = \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_k f(v_k) \in < f(S)) >.$$ □

Từ bổ đề 2.2 đặc biệt suy ra nếu E là một cơ sở của X thì f(E) là một hệ sinh của X'.

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 - x_3, - x_2 + x_3)$$

Hãy xác định Im f.

Giải. Chọn $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ thì

$$\text{Im} f = < f(e_1), f(e_2), f(e_3) > = <(1, 1, 0), (-1, 0, -1), (0, -1, 1)> =$$

$$= <(1, 1, 0), (-1, 0, -1)>.$$

2. Liên hệ giữa dim(Im f) và dim(Ker f)

Định lí 2.1. *Cho* $f : X \to X'$ *là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó nếu* $\dim X < \infty$ *thì*
$$\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim X.$$

Chứng minh. Giả sử $\dim \mathrm{Im}\, f = r$, $\dim \mathrm{Ker}\, f = s$. Khi đó chọn một cơ sở $u_1', u_2', \ldots u_r'$ của Im f và một cơ sở $u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_{r+s}$ của Ker f. Gọi $u_i \in X$ là một vectơ sao cho $f(u_i) = u_i'$, $i = 1, \ldots, r$ (có thể có nhiều u_i, chọn một trong số đó). Để hoàn thành chứng minh ta chỉ cần chứng minh.

$u_1, u_2, \ldots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_{r+s}$ là một cơ sở của X.

Trước hết ta chứng minh hệ này độc lập tuyến tính. Xét quan hệ tuyến tính tuỳ ý

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r + \lambda_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \lambda_{r+s} u_{r+s} = 0 . \ (1)$$

Cho ánh xạ f tác động vào hệ này. Chú ý rằng $f(u_i) = u_i'$ với $i = 1, \ldots, r$ và $f(u_{r+j}) = 0$ với $j = 1, \ldots, s$, ta có

$$\lambda_1 u_1' + \lambda_2 u_2' + \ldots + \lambda_r u_r' = 0 .$$

Vì $u_1', u_2', \ldots, u_r'$ độc lập tuyến tính nên $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$. Kết hợp với (1) ta có

$$\lambda_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \lambda_{r+s} u_{r+s} = 0$$

Lại vì $u_{r+1}, \ldots, u_{r+s}$ độc lập tuyến tính nên $\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \ldots = \lambda_{r+s} = 0$. Như vậy từ (1) suy ra $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_{r+s} = 0$, do đó hệ $u_1, \ldots, u_{r+s}$ độc lập tuyến tính.

Bây giờ ta sẽ chứng minh hệ này là hệ sinh của X. Với mọi $u \in X$ ta có $f(u) \in \mathrm{Im}\, f$, vì vậy có thể viết

$$f(u) = \lambda_1 u_1' + \ldots + \lambda_r u_r'$$

Đặt $v = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r$ ta có $f(v) = f(u)$.

Đặt $w = u - v$ thì $f(w) = 0$, tức là $w \in \mathrm{Ker}\, f$, vì vậy có thể viết

$$w = \lambda_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \lambda_{r+s} u_{r+s}$$

Từ đó

$$u = v + w = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r + \lambda_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \lambda_{r+s} u_{r+s}$$

Vậy $u_1, \ldots, u_{r+s}$ là hệ sinh của X. □

3. Đẳng cấu tuyến tính

Một ánh xạ tuyến tính $f : X \to X'$ là song ánh được gọi là một đẳng cấu (tuyến tính). Nếu có một đẳng cấu $f : X \to X'$ thì các không gian vectơ X và X' gọi là đẳng cấu (với nhau), kí hiệu $X \cong X'$.

Bổ đề 2.3. *Nếu* $f : X \to X'$ *là đẳng cấu thì* $f^{-1} : X' \to X$ *cũng là đẳng cấu.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh f^{-1} là tuyến tính. Với mọi u', $v' \in X'$, $\lambda \in \mathbb{K}$, đặt $u = f^{-1}(u')$, $v = f^{-1}(v')$

Ta có

$$f(u + v) = f(u) + f(v) = u' + v',$$

$$f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda u',$$

nên $f^{-1}(u' + v') = u + v = f^{-1}(u') + f^{-1}(v')$

$$f^{-1}(\lambda u') = \lambda u = \lambda f^{-1}(u').$$

Vậy f^{-1} là ánh xạ tuyến tính. □

Định lí 2.2. *Hai không gian vectơ* X *và* X' *trên cùng một trường* $\mathbb{K}$ *đẳng cấu nếu và chỉ nếu chúng có những cơ sở có cùng lực lượng.*

Chứng minh. Giả sử $f : X \to X'$ là một đẳng cấu, E là một cơ sở của X. Đặt $E' = f(E)$. Ta sẽ chứng minh E' là cơ sở của X'. Khi đó $f|_E : E \to E'$ là song ánh nên E và E' cùng lực lượng. Theo bổ đề 2.2, E' là hệ sinh. Ta sẽ chứng minh E' độc lập tuyến tính. Xét quan hệ tuyến tính $\lambda_1 v_1' + ... + \lambda_k v_k' = 0$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $v_1', ..., v_k' \in E'$. Do f là song ánh, nên tồn tại các $v_i \in X$ đôi một khác nhau sao cho $f(v_i) = v_i'$. Từ đó $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k) = \lambda_1 v_1' + ... + \lambda_k v_k' = 0$. Vì $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ nên $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0$. Do E độc lập tuyến tính nên $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$. Vậy E' độc lập tuyến tính.

Ngược lại giả sử X có cơ sở E, X' có cơ sở E', E và E' cùng lực lượng. Gọi $\varphi : E \to E'$, $\varphi(v) = v'$ là song ánh từ E lên E'.

Theo định lí 1.3, tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính $f : X \to X'$ sao cho $f(v) = \varphi(v) = v'$ với mọi $v \in E$. Ta sẽ chứng minh f là song ánh. Với mọi $x' \in X'$, do E' là cơ sở nên $x' = \lambda_1 v_1' + ... + \lambda_k v_k'$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $v_i' \in E'$. Đặt $x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$. Ta có $f(x) = x'$. Vậy f là toàn ánh. Để chứng minh f là đơn ánh ta giả sử $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$. Khi đó tồn tại $x \in X$, $x \neq 0$ có $f(x) = 0$. Do B là cơ sở nên tồn tại các số $\lambda_i \neq 0$ và $v_i \in B$ đôi một khác nhau sao cho

$$x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k.$$

Từ $f(x) = 0$ suy ra $\lambda_1 v'_1 + ... + \lambda_k v'_k = 0$. Vì các v'_i đôi một khác nhau và E' độc lập tuyến tính nên $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$, ta gặp mâu thuẫn. □

Hai tập hữu hạn có cùng lực lượng nếu và chỉ nếu chúng có cùng số phần tử nên ta có

Hệ quả 2.1. *Hai không gian hữu hạn chiều trên cùng một trường* $\mathbb{K}$ *đẳng cấu nếu và chỉ nếu chúng có cùng số chiều.*

Như vậy, mọi không gian n – chiều trên trường $\mathbb{K}$ đều đẳng cấu với $\mathbb{K}^n$.

Cho $f : X \to X'$ là ánh xạ tuyến tính. Nếu $\dim(\mathrm{Im}f) < \infty$ thì ta gọi $r(f) = \dim(\mathrm{Im}f)$ là hạng của ánh xạ tuyến tính f.

Bổ đề 2.4. *Cho* X, X' *là không gian vectơ hữu hạn chiều,* $f : X \to X'$ *là ánh xạ tuyến tính. Khi đó*

a) f *toàn ánh nếu và chỉ nếu* $r(f) = \dim X'$.

b) f *đơn ánh nếu và chỉ nếu* $r(f) = \dim X$.

Chứng minh. a) Vì $f(X) \subset X'$ nên $\dim f(X) = \dim X'$ tương đương với trong f(X) có chứa một cơ sở của X'. Điều đó tương đương với $f(X) = X'$ hay f là toàn ánh.

b) Theo bổ đề 1.2 và định lí 2.3, f đơn ánh $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0 \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}f) = \dim X$. □

Định lí 2.3. *Cho* X, X' *là không gian vectơ hữu hạn chiều và* $f : X \to X'$ *là ánh xạ tuyến tính. Khi đó*

a) f *đẳng cấu nếu và chỉ nếu* $\dim X = \dim X' = n$ và $r(f) = n$.

b) f *đẳng cấu nếu và chỉ nếu* $\dim X = \dim X' = n$ và $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.

Chứng minh.

a) Suy ra từ bổ đề 2.7

b) Do $\mathrm{Ker}f = \{0\} \Leftrightarrow r(f) = n$ nên b) suy ra từ a). □

§3. Không gian thương

1. Định nghĩa

Cho X là không gian vectơ và A là không gian con của X. Dễ dàng thấy rằng

$$xSy \text{ nếu } x - y \in A$$

là một quan hệ tương đương trên X.

Ta kí hiệu tập thương của X theo quan hệ tương đương S là X/A.

Với mỗi $x \in X$ ta có

$$S[x] = \{y \in X | ySx\}$$

$$= \{y \in X | y - x \in A\}$$

$$= \{y \in X | y \in x + A\}$$

$$= x + A.$$

Do đó

$$X/A = \{x + A | x \in X\}.$$

Với $x + A,\ y + A \in X/A$ và $\lambda \in \mathbb{K}$ đặt

$$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$$

$$\lambda(x + A) = \lambda x + A.$$

Nếu $x + A = x' + A$, $y + A = y' + A$ thì

$$x - x' \in A,\ y - y' \in A.$$

Do A là không gian con, suy ra

$$(x - x') + (y - y') = (x + y) - (x' + y') \in A$$

$$\lambda(x - x') = \lambda x - \lambda x' \in A$$

Từ đó

$$(x + y) + A = (x' + y') + A,\ \lambda x + A = \lambda x' + A.$$

Vậy cách đặt trên cho ta phép cộng trên X/A và phép nhân số với phần tử của X/A.

Với các phép toán đó ta có

Bổ đề 3.1. *X/A là một không gian vectơ.*

Việc kiểm tra các tiên đề là tầm thường. Ở đây chỉ lưu ý rằng phần tử không của X/A là

$$A = 0 + A = x + A \text{ với mọi } x \in A,$$

phần tử đối của $x + A$ là $-x + A$.

Ta gọi ánh xạ $\pi : X \to X/A$, $\pi(x) = x + A$ là ánh xạ chính tắc.

Dễ dàng kiểm tra điều sau

Bổ đề 3.2. *Ánh xạ* $\pi : X \to X/_A$ *là toàn ánh, tuyến tính và* Ker $\pi = A$.

2. Định lí đẳng cấu

Cho $f : X \to X'$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó Ker f là một không gian con của X, do đó ta có không gian thương $X/_{\mathrm{Ker}f}$. Bằng cách đặt $\bar{f}(x + \mathrm{Ker}f) = f(x)$ ta có một ánh xạ

$$\bar{f} : X/_{\mathrm{Ker}f} \to X'$$

(cách đặt là hợp lí vì $x + \mathrm{Ker}f = x' + \mathrm{Ker}f$ thì $x - x' \in \mathrm{Ker}f$ do đó $f(x - x') = 0$ hay $f(x) = f(x')$).

Ánh xạ $\bar{f}$ gọi là ánh xạ cảm sinh bởi f.

Ta có

Bổ đề 3.3. *Ánh xạ* $\bar{f} : X/_{\mathrm{Ker}f} \to X'$ *là đơn ánh tuyến tính.*

Từ cách xây dựng trên dễ dàng thấy rằng

$$f = \bar{f} \circ \pi .$$

Định lí 3.1. (Định lí đẳng cấu). *Với mọi ánh xạ tuyến tính* $f : X \to X'$ *ta có* $X/_{\mathrm{Ker}f} \cong f(X)$.

Chứng minh. Do $\bar{f}$ là đơn ánh tuyến tính nên

$$X/_{\mathrm{Ker}f} \cong \bar{f}\left(X/_{\mathrm{Ker}f}\right) = \bar{f} \circ \pi(X) = f(X). \qquad \square$$

§4. Dạng tuyến tính và không gian đối ngẫu

1. Dạng tuyến tính

Cho X là một không gian vectơ. Khi đó ta gọi ánh xạ tuyến tính $f : X \to \mathbb{K}$ là dạng tuyến tính.

Định lí 4.1. *Cho X là một không gian vectơ,* $E = \{v_i\}_{i \in I}$ *là một cơ sở của X,* $\{c_i\}_{i \in I}$ *là một họ các số trong* $\mathbb{K}$. *Khi đó* $f : X \to \mathbb{K}$ *xác định bởi* $f(x) = \sum_{i \in I} a_i c_i$ *với mọi* $x = \sum_{i \in I} a_i v_i$ *là dạng tuyến tính duy nhất trên X thoả mãn* $f(v_i) = c_i$ *với mọi* $i \in I$.

Chứng minh. Là trường hợp riêng của định lí 1.3 khi $X' = \mathbb{K}$. □

Theo định lí 4.1, dạng tuyến tính f trên E hoàn toàn xác định khi biết ảnh của nó trên một cơ sở.

Ví dụ.

Giả sử $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ là một dạng tuyến tính. Đặt $f(e_i) = c_i$ với $i = 1, ..., n$. Ta có

$$f(x_1, ..., x_n) = x_1c_1 + .. + x_nc_n.$$

Rõ ràng mọi dạng tuyến tính trên $\mathbb{K}^n$ đều có dạng này.

2. Không gian đối ngẫu

Với mọi không gian vectơ X, ta gọi

$$X^* = L(X, \mathbb{K})$$

là không gian đối ngẫu của X. Theo §1, X* là không gian vectơ trên $\mathbb{K}$.

Cho $E = (v_i)_{i \in I}$ là một cơ sở của X. Theo định lí 4.1 với mỗi $i \in I$, có duy nhất $v_i^* \in X^*$ xác định bởi

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} \text{ với mọi } j \in I,$$

ở đây δ_{ij} là kí hiệu Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ nếu } i \neq j. \end{cases}$$

Định lí 4.2. *Nếu X là không gian hữu hạn n– chiều,* $E = \{v_i\}_{i=1}^n$ *là một cơ sở của X thì* $E^* = \{v_i^*\}_{i=1}^n$ *là một cơ sở của* X*.

Chứng minh. Cho $f \in X^*$ và $x \in X$ tùy ý. Do E là cơ sở nên có thể viết $x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$. Ta có

$$v_i^*(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_i^*(v_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{ij} = \lambda_i$$

với mọi $i = 1, ..., n$. Do đó

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(v_j) = \sum_{j=1}^n v_j^*(x).f(v_j) = \left(\sum_{j=1}^n f(v_j) v_j^*\right)(x)$$

Vậy $f = \sum_{j=1}^{n} f(v_j)v_j^* \in \langle E^* \rangle$, suy ra E^* là hệ sinh của X^*. Ta còn phải chứng minh E^* độc lập tuyến tính. Xét hệ thức $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^* = 0$. Khi đó

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^*\right)(v_j) = 0 \text{ với mọi } j = 1, ..., n.$$

Vì $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^*\right)(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^*(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j$ nên $\lambda_j = 0$ với mọi $j = 1, ..., n$. Vậy E^* độc lập tuyến tính. □

Với không gian vectơ X có đối ngẫu là $X^* = L(X, \mathbb{K})$, ta định nghĩa song đối ngẫu của X là $X^{**} = L(X^*, \mathbb{K})$.

Với mỗi $x \in X$, đặt

$$J(x)(f) = f(x), \ f \in X^*.$$

Với mọi $f, g \in X^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ta có

$$J(x)(f + g) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) =$$
$$= J(x)(f) + J(x)(g),$$
$$J(x)(\lambda f) = (\lambda f)(x)$$
$$= \lambda f(x) = \lambda J(x)(f).$$

Do đó $J(x)$ là dạng tuyến tính trên X^* hay $J(x) \in X^{**}$.

Ta có ánh xạ

$$J : X \to X^{**}.$$

Định lí 4.3. a) *Với mọi không gian vectơ* X, $J : X \to X^{**}$ *là đơn ánh tuyến tính.*

b) *Với mọi không gian vectơ hữu hạn chiều* X, $J : X \to X^{**}$ *là đẳng cấu tuyến tính.*

Chứng minh. a) Với mọi $x, g \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in X^*$ ta có

$$J(x + y)(f) = f(x + y) = f(x) + f(y) = (J(x) + J(y))(f),$$

$$J(\lambda x)(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = (\lambda J(x))(f).$$

Do đó $J(x + y) = J(x) + J(y)$, $J(\lambda x) = \lambda J(x)$ và J là ánh xạ tuyến tính.

Với tuỳ ý $v \in X$, $v \neq 0$ do $\{v\}$ độc lập tuyến tính nên có cơ sở E của X, $v \in E$. Với mỗi $x \in X$, kí hiệu toạ độ của x trong cơ sở E là $x/_E = (x_e)_{e \in E}$

Do tính duy nhất của toạ độ, dễ dàng thấy

$$f : X \to \mathbb{K}, \ f(x) = x_v$$

là dạng tuyến tính, tức là $f \in E^*$. Vì $v/_E = (v_e)_{e \in E}$ trong đó $v_e = \begin{cases} 1 \text{ nếu } e = v \\ 0 \text{ nếu } e \neq v \end{cases}$ nên $f(v) = 1$.

Từ đó $J(v)(f) = f(v) = 1 \neq 0$.

Ta có $J(v) \neq 0$ và $\operatorname{Ker} J = \{0\}$. Vậy J là đơn ánh.

b) Suy ra từ a) và định lí 2.8 b). □

Định lí 4.4. *Cho X là không gian vectơ và $f_0, f_1, \dots, f_n \in X^*$. Khi đó hoặc f_0 là tổ hợp tuyến tính của $f_1, \dots, f_n$ hoặc tồn tại $a \in X$ sao cho $f_0(a) = 1$ và $f_1(a) = \dots = f_n(a) = 0$.*

Chứng minh. Ta có thể giả thiết $\{f_1, \dots, f_n\}$ độc lập tuyến tính, vì nếu không thì thay nó bằng một hệ con độc lập tuyến tính tối đại. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

Trường hợp $n = 1$. Do f_1 độc lập tuyến tính nên $f_1 \neq 0$. Chọn $a_1 \in X$ sao cho $f_1(a_1) = 1$. Với mọi $x \in X$ dễ thấy

$$x - f_1(x)a_1 \in f_1^{-1}(0) = Z_1.$$

Do đó hoặc tồn tại $a \in Z_1$ sao cho $f_0(a) = 1, f_1(a) = 0$, hoặc $f_0(a) = 0$ với mọi $a \in Z_1$. Nếu trường hợp sau xảy ra thì

$$f_0(x - f_1(x)a_1) = 0 \text{ với mọi } x \in X$$

Khi đó $f_0(x) = f_0(a_1)f_1(x)$, tức là $f_0 = \lambda f_1$.

Bây giờ giả sử khẳng định đúng với $n - 1 \geq 1$ và giả sử $f_1, \dots, f_n \in E^*$. Theo giả thiết quy nạp, với mọi i, tồn tại $a_i \in E$ sao cho $f_i(a_i) = 1$ và $f_j(a_i) = 0$ với mọi $j \neq i$. Với mọi $x \in E$ ta có

$$x - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)a_i \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(0) = Z.$$

Do đó hoặc tồn tại $a \in Z$, $f_0(a) = 1$ và hiển nhiên $f_1(a) = ... = f_n(a) = 0$, hoặc $f_0(a) = 0$ với mọi $a \in Z$. Nếu trường hợp sau xảy ra thì

$$f_0\left(x - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)a_i\right) = 0.$$

Từ đó $f_0(x) = \sum_{i=1}^{n} f_0(a_i)f_i(x)$, tức là $f_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$. □

3. Ánh xạ đối ngẫu

Cho $\varphi : X \to Y$ là một ánh xạ tuyến tính. Với mỗi $f \in Y^*$ ta có ánh xạ $\varphi^*(f) : X \to \mathbb{K}$ xác định bởi công thức

$$\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x)),\ x \in X.$$

Mọi $x, x_1, x_2 \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ ta có

$$\varphi^*(f)(x_1 + x_2) = f(\varphi(x_1 + x_2)) = f(\varphi(x_1)) + f(\varphi(x_2))$$
$$= \varphi^*(f)(x_1) + \varphi^*(f)(x_2)$$

$$\varphi^*(f)(\lambda x) = f(\varphi(\lambda x) = f(\lambda\varphi(x))$$
$$= \lambda f(\varphi(x)) = \lambda\varphi^*(f)(x)$$

Do đó $\varphi^*(f) \in X^*$. Vậy ta có ánh xạ

$$\varphi^* : Y^* \to X^*.$$

Với mọi $f, g \in Y^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$ ta có

$$\varphi^*(f + g)(x) = (f + g)(\varphi(x)) = f(\varphi(x)) + g(\varphi.(x))$$
$$= (\varphi^*(f) + \varphi^*(g))(x),$$
$$\varphi^*(\lambda f)(x) = (\lambda f)(\varphi(x)) = \lambda f(\varphi(x))$$
$$= \lambda\varphi^*(f)(x).$$

Do đó φ^* là ánh xạ tuyến tính.

Vậy $\varphi \in L(X,Y)$ thì $\varphi^* \in L(Y^*,X^*)$. Ta gọi φ^* là ánh xạ đối ngẫu của φ.

§5. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

1. Định nghĩa

Cho X, X' là các không gian vectơ hữu hạn chiều, $f : X \to X'$ là một ánh xạ tuyến tính.

Giả sử $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của X, $E' = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ là một cơ sở của X'. Khi đó ta có thể viết một cách duy nhất

$$f(e_1) = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \dots + a_{m1}\varepsilon_m$$

$$f(e_2) = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \dots + a_{m2}\varepsilon_m$$

....

$$f(e_n) = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \dots + a_{mn}\varepsilon_m .$$

Ta gọi ma trận

$$[f]_{E,E'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cặp cơ sở (E,E').

Bổ đề 5.1. *Nếu* $u/E = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *là toạ độ của vectơ* $u \in X$ *trong cơ sở* E *thì toạ độ của vectơ* f(u) *trong cơ sở* E' *là*

$$f(u)/E' = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\lambda_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\lambda_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\lambda_j\right).$$

Chứng minh. Bởi vì $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ và tính tuyến tính của f ta có

$$f(u) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j\right)\varepsilon_i ,$$

theo định nghĩa toạ độ ta có ngay điều phải chứng minh. □

Ví dụ. Nếu $[f]_{E,E'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, u/E' = (1, 2, 3) thì

$$f(u)/E' = (1 \times 1 + 2 \times 2 + (-1) \times 3, (-2) \times 1 + 0 \times 2 + 3 \times 3)$$

$$= (2, 7).$$

2. Ánh xạ tuyến tính xác định bởi ma trận

Định lí 5.1. *Cho* X *và* X' *là các không gian vectơ hữu hạn chiều có cơ sở tương ứng là* $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ *và* $E' = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$. *Khi đó mọi ma trận* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, *tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính* $f : X \to X'$ *có* $[f]_{E,E'} = A$.

Chứng minh. Giả sử

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Vì f có ma trận trong cơ sở E, E′ là A nên

$$f(e_1) = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \dots + a_{m1}\varepsilon_m$$

$$f(e_2) = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \dots + a_{m2}\varepsilon_m.$$

....

$$f(e_n) = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \dots + a_{mn}\varepsilon_m$$

Ánh xạ tuyến tính $f : X \to X'$ thoả mãn các đẳng thức đó là tồn tại và duy nhất theo định lí 1.3. □

3. Ánh xạ tuyến tính $\mathbb{K}^n$ vào $\mathbb{K}^m$

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Nếu E là cơ sở chính tắc trong $\mathbb{K}^n$, E′ là cơ sở chính tắc trong $\mathbb{K}^m$ thì ta kí hiệu $[f]_{E,E'}$ là [f]. Giả sử

$$[f] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

thì với mọi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ theo bổ đề 5.1 ta có

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \right) \quad (1)$$

ngược lại, đẳng thức (1) cho ta một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{K}^n$ vào $\mathbb{K}^m$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Kí hiệu $e_1, \dots, e_n$ là cơ sở chính tắc $\mathbb{K}^n$. Theo (1) ta có

$$f(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}),\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Do đó

$$r(f) = r(f(e_1),...,f(e_n)) = r(A).$$

Có thể kiểm tra rằng, f là một ánh xạ tuyến tính và A là ma trận của f trong các cơ sở bất kỳ thì ta cũng có

$$r(f) = r(A).$$

Kết hợp điều này với định lí 2.8, ta có

Định lí 5.2. *Cho* f *là ánh xạ tuyến tính từ không gian vectơ* X, n – *chiều vào chính nó,* A *là ma trận của* f *trong cặp cơ sở* (E, E). *Khi đó f là đẳng cấu (khả nghịch) nếu và chỉ nếu* $|A| \neq 0$.

4. Liên hệ giữa phép toán ma trận và phép toán ánh xạ tuyến tính

Cho A, B là các ma trận cấp $m \times n$ trên $\mathbb{K}, \lambda \in \mathbb{K}$. Gọi f, g là các ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{K}^n$ vào $\mathbb{K}^n$ sao cho A = [f], B = [g]. Khi đó dễ dàng kiểm tra rằng

$$A + B = [f + g]$$

$$\lambda A = [\lambda f]$$

Từ đó có thể định nghĩa A + B là ma trận của ánh xạ tuyến tính f + g, λA là ma trận của ánh xạ tuyến tính λf.

Ta có định lí

Định lí 5.3. *Ánh xạ* $\phi : L(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m) \to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\phi(f) = [f]$ *là đẳng cấu tuyến tính.*

Cho A là ma trận cấp $m \times n$, B là ma trận cấp $n \times p$.

Gọi $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ là ánh xạ tuyến tính có A = [f], $g: \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ là ánh xạ tuyến tính có B = [g]. Khi đó

$$[f_o g] = AB.$$

Thật vậy, kí hiệu $\{e'_i\},\{e''_k\},\{e_j\}$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{K}^m,\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^p$. Với mọi j = 1, 2, ..., p ta có

$$(f_o g)(e_j) = f(g(e_j)) = f\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}e''_k\right) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}f(e''_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik}e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}\right)e'_i$$

Vậy $[f_0 g] = AB$. □

Từ đó có thể định nghĩa AB là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f_o g$.

Cho $f : X \to X'$ là một ánh xạ tuyến tính, E là một cơ sở của X, E' là một cơ sở của X'.

Kí hiệu $[x]_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ là toạ độ của vectơ $x \in X$ trong cơ sở E viết theo cột, $[f(x)]_{E'}$ là toạ độ của vectơ f(x) trong cơ sở E' viết theo cột. Theo bổ đề 5.1 và định lí 5.2

$$[f(x)]_{E'} = [f]_{E,E'}.[x]_E$$

5. Ma trận chuyển cơ sở. Ma trận đồng dạng

Giả sử $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ và $E' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ là hai cơ sở của một không gian vectơ X. Khi đó ta có các biểu diễn

$$e'_1 = p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \dots + p_{n1}e_n$$

$$e'_2 = p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \dots + p_{n2}e_n$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$e'_n = p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \dots + p_{nn}e_n$$

và được ma trận

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

gọi là ma trận chuyển từ cơ sở E sang cơ sở E'.

Trước hết ta chứng tỏ P không suy biến. Thật vậy

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e'_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \lambda_j \right) e_i = 0.$$

Bởi vì E độc lập tuyến tính nên hệ thức cuối cùng cho ta

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \lambda_j = 0 \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n.$$

Đây là một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có ma trận hệ số là P. Do hệ thức đầu tiên, hệ này chỉ có nghiệm tầm thường $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$, do đó

$$|P| \neq 0.$$

Với mỗi vectơ $x \in X$, kí hiệu cột toạ độ của vectơ x trong cơ sở E và E' là

$$[x]_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \ [x]_{E'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Vì $x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right) e_i$ và do tính duy nhất của toạ độ, suy ra

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \ ; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vì vậy dưới dạng ma trận ta có

$$[x]_E = P[x]_{E'} \qquad (2)$$

Do P khả nghịch nên nhân hai vế của (2) với P^{-1} ta được

$$[x]_{E'} = P^{-1}[x]_E \qquad (3)$$

Các công thức (2) và (3) gọi là công thức đổi toạ độ. Từ công thức (3) ta có P^{-1} là ma trận chuyển từ cơ sở E' sang cơ sở E.

Ánh xạ tuyến tính $f : X \to X$ còn gọi là toán tử tuyến tính hay biến đổi tuyến tính. Nếu E là một cơ sở của X thì ma trận của f trong cặp cơ sở (E, E) được gọi là ma trận của f trong cơ sở E và kí hiệu đơn giản là $[f]_E$. Cho E và E' là hai cơ sở của X. Đặt $A = [f]_E, B = [f]_{E'}$. Ta có

$$[f(x)]_E = A[x]_E, \ [f(x)]_{E'} = B[x]_{E'}$$

Theo công thức (3) và sau đó theo công thức (2) ta có

$$[f(x)]_{E'} = P^{-1}[f(x)]_E = P^{-1}A[x]_E =$$

$$= (P^{-1}AP)[x] = B[x]_{E'}.$$

Do tính duy nhất của ma trận của ánh xạ tuyến tính trong một cơ sở, ta có

$$B = P^{-1}AP. \qquad (4)$$

Hai ma trận vuông cấp n, A và B, gọi là đồng dạng nếu tồn tại một ma trận vuông cấp n không suy biến P sao cho

$$B = P^{-1}AP.$$

Bởi vì $B = P^{-1}AP$ thì $A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$ do đó có thể nói A và B đồng dạng với nhau, kí hiệu $A \sim B$.

Theo (4) các ma trận của một phép biến đổi tuyến tính trong các cơ sở khác nhau là đồng dạng.

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$. Tìm ma trận của f trong cơ sở $(e_1 = (1,1,1),\ e_2 = (0,1,1),\ e_3 = (0,0,1))$.

Giải. Ta có

$$f(e_1) = (0,0,0) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

$$f(e_2) = (-1,0,1) = -e_1 + e_2 + e_3$$

$$f(e_3) = (0,-1,1) = 0e_1 - e_2 + 2e_3.$$

Do đó ma trận của f trong cơ sở $E = (e_1, e_2, e_3)$ là

$$[f]_E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ta cũng có thể tìm theo phương pháp khác : Ma trận của f trong cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở E là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Do đó theo (4)

$$[f]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bài tập

IV.1 Xét hai không gian vectơ $\mathbb{R}$ và $\mathbb{R}^2$. Các ánh xạ sau đây từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}$ có phải là ánh xạ tuyến tính hay không?

a) $(x, y) \mapsto x$ b) $(x, y) \mapsto xy$ c) $(x, y) \mapsto x + y$

d) $(x, y) \mapsto x - y$ e) $(x, y) \mapsto ax + by$, $(a, b \in \mathbb{R})$.

IV.2. Các ánh xạ sau đây từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$ có phải là ánh xạ tuyến tính không ?

a) $(x, y) \mapsto (y, x)$; b) $(x, y) \mapsto (x, -y)$;

c) $(x, y) \mapsto (x + 1, y + 1)$; d) $(x, y) \mapsto (x^2, y)$.

IV.3. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_4, x_3 + 2x_2 - x_4)$$

a) Chứng tỏ rằng f là ánh xạ tuyến tính ;

b) Tìm Ker f và Im f.

IV.4. a) Xác định ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ biết

$f(3, 1) = (2, 12)$; $f(1, 1) = (0, 2)$

b) Xác định ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ biết

$f(1, 2, 3) = (1, 0)$; $f(1, 0, 10) = (0, 1)$;

$f(2, 3, 5) = (15, -4)$

c) Xác định biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ biết

$f(1, 1, 1) = (-1, 1, 1)$; $f(1, 1, 0) = (1, 1, -1)$;

$f(1, 0, 0) = (2, 1, 2)$.

IV.5 Cho $u_1 = (1, -1)$, $u_2 = (-1, 2)$, $u_3 = (0, -1)$

$v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (1, 1)$.

Tồn tại hay không ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(u_i) = v_i$, $i = 1, 2, 3$.

IV.6. Tìm ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ có nhân sinh bởi hai vectơ (1, 2, 3, 4) và (0, 1, 1, 1). Ánh xạ f như vậy có duy nhất không ?

IV.7. Tìm phép biến đổi tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có ảnh sinh bởi hai vectơ (1, – 1, 1) và (1, 2, 2). Biến đổi như vậy có duy nhất không?

IV.8 Cho biến đổi tuyến tính f trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2 + \lambda x_3).$$

a) Tìm λ để f không là đẳng cấu.

b) Với λ tìm được ở a), tìm cơ sở và số chiều của Ker f, Im f.

IV.9 Giả sử $\mathbb{R}[x]$ là không gian các đa thức trên $\mathbb{R}$.

Với $f \in \mathbb{R}[x]$ cố định xác định $\varphi: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$.

$$\varphi(g) = fg' - f'g.$$

a) Chứng tỏ φ là phép biến đổi tuyến tính của $\mathbb{R}[x]$;

b) Tìm Ker φ.

IV.10 Cho f biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_1 + x_2, 3x_1 + x_2 - x_3).$$

a) Chứng tỏ f khả nghịch. Tìm f^{-1} ;

b) Chứng minh $(f^2 - I)(f - 2I) = 0$.

IV.11 Cho $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, toán tử tuyến tính f trên V xác định bởi $f(A) = BA$.

a) Tìm r(f) ; b) Mô tả f^2.

IV.12 Cho $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ là các ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng $g_o f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ không khả nghịch.

IV.13 Tìm hai toán tử tuyến tính f, g trên $\mathbb{R}^2$ sao cho $g_o f = 0$ nhưng $f_o g \neq 0$.

IV.14 Cho toán tử tuyến tính φ có ma trận trong cơ sở $u_1 = (8, -6, 7)$, $u_2 = (-16, 7, -13)$, $u_3 = (9, -3, 7)$

là $\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận của f trong cơ sở $v_1 = (1, -2, 1)$, $v_2 = (3, -1, 2)$, $v_3 = (2, 1, 2)$.

IV.15. Trong $\mathbb{R}^3$ cho các hệ vectơ

$v_1 = (1,1,1)$, $v_2(1,0,1)$, $v_3 = (1,1,0)$;

$w_1 = (2,1,1)$, $w_2 = (0,1,1)$, $w_3 = (0,0,1)$:

a) Chứng minh $E = (v_1, v_2, v_3)$, $E' = (w_1, w_2, w_3)$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển từ E sang E'.

c) Tìm toạ độ của vectơ $v = (1, 1, 1)$ trong cơ sở E và cơ sở E'.

IV.16 Cho biến đổi tuyến tính f trên $\mathbb{R}^3$

$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 3x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, -3x_1 - x_2)$.

a) Tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc.

b) Tìm ma trận của f trong cơ sở E = (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1).

IV.17 Cho $E = (v_1, v_2, v_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Tìm ma trận của phép biến đổi tuyến tính f trong cơ sở E nếu

a) $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_3 - 2v_1$, $f(v_3) = 0$.

b) $f(v_1) = v_3 - v_1 - v_2$, $f(v_2) = 2v_2$, $f(v_3 - v_2) = 2v_3 - 5v_1$.

IV.18 Tìm ma trận của phép lấy đạo hàm từ không gian $\mathbb{R}_n[x]$ các đa thức bậc $\le n$ vào chính nó.

a) Trong cơ sở $1, x, x^2, \dots, x^n$

b) Trong cơ sở $1, x - \alpha, \dfrac{(x-\alpha)^2}{2!}, \dots, \dfrac{(x-\alpha)^n}{n!}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

IV.19 Cho $f_1, \dots, f_n$ là một cơ sở của X^*. Chứng minh tồn tại cơ sở $a_1, \dots, a_n \in X$ sao cho $a_i^* = f_i$ với mọi $i = 1, \dots, n$.

IV.20 Cho $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, W là không gian con của V gồm tất cả B sao cho AB = 0. Cho f là dạng tuyến tính trên V, triệt tiêu trên W. Giả sử $f(I_2) = 0$, $f(C) = 3$ với $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Tính f(A).

IV.21 Coi C là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Hãy tìm một dạng tuyến tính thực trên $\mathbb{C}$ không phải là dạng tuyến tính phức.

IV.22 Kí hiệu $\mathbb{C}_n[x]$ là không gian vectơ phức các đa thức hệ số phức của ẩn x có bậc $\leq n$. Cho α và β là hai số phức $\alpha \neq \beta$ và ánh xạ

$$f : \mathbb{C}_3[x] \to \mathbb{C}_2[x]$$

$$p(x) \mapsto p(x + \alpha) - p(x + \beta)$$

a) Chứng minh rằng f là toàn ánh tuyến tính (toàn cấu)

b) Tìm Ker f.

IV.23 Cho các ánh xạ tuyến tính

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_2 - x_3)$$

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ h(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -x_3)$$

$$k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ k(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 - x_2)$$

Tìm các ánh xạ tuyến tính sau

a) $f - 2g$ b) $h_o f$

c) $f_o(2k)$ d) $(f_o k)^3$

e) $(k_o f)^2$ f) h^n.

CHƯƠNG V

DẠNG CHÍNH TẮC CỦA MA TRẬN

§1. Trị riêng. Vectơ riêng. Đa thức đặc trưng

1. Trị riêng và vectơ riêng

Cho X là một không gian vectơ và $\varphi : X \to X$ là một toán tử tuyến tính. Số λ được gọi là trị riêng của φ nếu tồn tại $x \in X$, $x \neq 0$ sao cho

$$\varphi(x) = \lambda x.$$

Vectơ x được gọi là vectơ riêng ứng với trị riêng λ của φ.

Ứng với một trị riêng có vô số vectơ riêng. Thật vậy, nếu x là một vectơ riêng ứng với trị riêng λ thì với mọi $y = \alpha x$, α là số khác không, ta có

$\varphi(y) = \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x) = \lambda y$, tức là y cũng là vectơ riêng ứng với trị riêng λ.

Giả sử x là một vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính φ. Kí hiệu $V = \langle x \rangle$ là không gian vectơ con một chiều của X sinh bởi vectơ x. Khi đó dễ dàng thấy rằng :

$$\varphi(V) \subset V.$$

Không gian vectơ con V của X có tính chất $\varphi(V) \subset V$ gọi là không gian con bất biến của φ. Như vậy với mọi vectơ riêng x của φ, $V = \langle x \rangle$ là một không gian con bất biến một chiều của φ.

Xét trường hợp X hữu hạn chiều. Giả sử $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của X. Gọi A là ma trận của φ trong cơ sở E thì A là một ma trận vuông cấp n. Ánh xạ $x \mapsto \lambda x$ xác định trên X cũng là tuyến tính và có ma trận trong cơ sở E là λI do đó ánh xạ.

$$x \mapsto \varphi(x) - \lambda x$$

là một toán tử tuyến tính trên X, có ma trận trong cơ sở E là

$$A - \lambda I.$$

Nếu λ là một trị riêng của φ và x là một vectơ riêng tương ứng với λ thì

$$\varphi(x) - \lambda x = 0$$

hay

$$(A - \lambda I)\,[x]_E = 0. \qquad (1)$$

Vì hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (1) có nghiệm không tầm thường nếu và chỉ nếu

$$|A - \lambda I| = 0,$$

ta có

Bổ đề 1.1. *λ là trị riêng của φ nếu và chỉ nếu λ là nghiệm của phương trình*

$$|A - \lambda I| = 0. \qquad (2)$$

Ta gọi (2) là phương trình đặc trưng của ma trận A, đó là một phương trình đại số bậc n của ẩn λ.

Nghiệm của (2) gọi là trị riêng của ma trận A, đó cũng chính là trị riêng của φ.

Giải phương trình (2) ta có các trị riêng. Thay trị riêng λ tìm được vào (1), nghiệm không tầm thường của hệ thuần nhất này gọi là vectơ riêng của ma trận A ứng với trị riêng λ, đó cũng chính là toạ độ của vectơ riêng của φ ứng với trị riêng λ trong cơ sở E.

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính φ có ma trận trong cơ sở $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ là

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm trị riêng, vectơ riêng của φ.

Giải. Phương trình đặc trưng của A là

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 4 \\ 1 & -1-\lambda & -8 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

hay

$$-(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0.$$

Vậy φ có trị riêng là 1 (bội hai) và – 2.

Với λ = 1 hệ (1) trở thành

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm là $x_1 = 2c$, $x_2 = c$, $x_3 = 0$. Vì vậy toạ độ vectơ riêng có trong cơ sở E là

$$(2c, c, 0),\ \ c \neq 0$$

hay vectơ riêng của f ứng với trị riêng $\lambda = 1$ là

$$v = 2ce_1 + ce_2,\ c \neq 0.$$

Với $\lambda = -2$ hệ (1) trở thành

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm là $x_1 = 28c$, $x_2 = 44c$, $x_3 = 9c$. Vì vậy toạ độ của vectơ riêng trong cơ sở E là

$$(28c, 44c, 9c),\ c \neq 0$$

hay vectơ riêng của f ứng với trị riêng $\lambda = -2$ là

$$v = 28c\ e_1 + 44c\ e_2 + 9c\ e_3,\ c \neq 0.$$

Định lí 1.1. *Các vectơ riêng ứng với các trị riêng khác nhau của một toán tử tuyến tính (hay của một ma trận vuông) là độc lập tuyến tính.*

Chứng minh. Kí hiệu v_k là vectơ riêng ứng với trị riêng λ_k của toán tử tuyến tính f (nếu là của ma trận A thì xét toán tử tuyến tính f có A là ma trận). Ta chứng minh bằng quy nạp theo số vectơ của hệ.

Nếu hệ chỉ gồm một vectơ, chẳng hạn v_1, thì hệ này độc lập tuyến tính vì $v_1 \neq 0$. Giả sử mọi hệ gồm r vectơ riêng ứng với các trị riêng khác nhau đều độc lập tuyến tính, $r \geq 1$, ta sẽ chứng minh mọi hệ gồm r + 1 vectơ riêng ứng với các trị riêng khác nhau là độc lập tuyến tính. Giả sử r + 1 vectơ riêng đó là

$$v_1, v_2, \dots, v_{r+1}$$

Xét quan hệ tuyến tính

$$\omega = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{r+1} v_{r+1} = 0, \qquad (1)$$

ta cần chỉ ra $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{r+1} = 0$. Giả sử trái lại, chẳng hạn $\alpha_1 \neq 0$. Khi đó

$$f(\omega) = \alpha_1\lambda_1 v_1 + \alpha_2\lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_{r+1}\lambda_{r+1} v_{r+1} = 0 \qquad (2)$$

Lấy (1) nhân với λ_{r+1} rồi trừ (2) ta được

$$\alpha_1(\lambda_{r+1} - \lambda_1)v_1 + \alpha_2(\lambda_{r+1} - \lambda_2)v_2 + \dots + \alpha_r(\lambda_{r+1} - \lambda_r)v_r = 0.$$

Vì $\alpha_1(\lambda_{r+1} - \lambda_1) \neq 0$ nên điều này mâu thuẫn với tính độc lập tuyến tính của hệ gồm r vectơ $v_1, v_2, \ldots, v_r$. □

2. Đa thức đặc trưng

Cho X là không gian vectơ hữu hạn n – chiều có một cơ sở là E, φ là toán tử tuyến tính trên X, có ma trận trong cơ sở E là A. Ta gọi đa thức đặc trưng của φ là

$$f_\varphi(t) = |tI - A|$$

Bổ đề 1.2. *Đa thức đặc trưng của toán tử tuyến tính φ là duy nhất, không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở.*

Chứng minh. Giả sử B là ma trận của φ trong một cơ sở E′ khác E. Theo 5§5 chương IV, A và B đồng dạng, tức là tồn tại ma trận không suy biến P sao cho $B = P^{-1}AP$. Từ đó

$$\begin{aligned} |tI - B| &= \left|P^{-1}(tI)P - P^{-1}AP\right| \\ &= \left|P^{-1}(tI - A)P\right| = \left|P^{-1}\right|\left|tI - A\right|\left|P\right| \\ &= |tI - A|. \end{aligned}$$

□

Ta cũng gọi $|tI - A|$ là đa thức đặc trưng của ma trận A. Từ chứng minh bổ đề 1.2 ta có : Hai ma trận đồng dạng có cùng đa thức đặc trưng.

Định lí 1.2. *Cho X là không gian vectơ hữu hạn chiều và φ là toán tử tuyến tính trên X. Khi đó các điều kiện sau tương đương*

a) λ là trị riêng của φ

b) Toán tử $\varphi - \lambda I_X$ không đơn ánh (nên không khả nghịch)

c) λ là nghiệm của đa thức đặc trưng $f_\varphi(t)$

Chứng minh. Gọi A là ma trận của φ trong một cơ sở E nào đó. Vì

$$f\varphi(t) = |tI - A| = (-1)^n |A - tI|$$

nên theo bổ đề 1.1 ta có a) ⇔ c).

Với mọi v ∈ E, $(\varphi - \lambda I_X)(v) = 0$ tương đương với cách viết dưới dạng ma trận $(A - \lambda I)\ [v]_E = 0$. Do đó $\varphi - \lambda I_X$ không đơn ánh tương đương với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có ma trận A – λI có nghiệm không tầm thường, tức là tương đương với $|A - \lambda I| = 0$. Vậy a) ⇔ b). □

3. Không gian con riêng

Giả sử λ là một trị riêng của toán tử tuyến tính φ trên X ta kí hiệu

$$E(\lambda) = \{x \in X \mid \varphi(x) = \lambda x\}.$$

Bổ đề 1.3. *Với mọi trị riêng λ của φ, $E(\lambda)$ là không gian con bất biến của φ, gọi là không gian riêng ứng với trị riêng λ.*

Chứng minh. Ta có $0 \in E(\lambda)$. Mọi $x_1, x_2 \in E(\lambda)$, $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\varphi(\alpha x_1 + x_2) = \alpha\varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

$$= \alpha\lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(\alpha x_1 + x_2), \text{ nên } \alpha x_1 + x_2 \in E(\lambda)$$

Mặt khác $\varphi(E(\lambda)) \subset \lambda E(\lambda) \subset E(\lambda)$ nên $E(\lambda)$ là không gian con bất biến của φ. □

Chú ý rằng $E(\lambda) = \text{Ker } (\varphi - \lambda I_X)$.

§2. Chéo hoá ma trận

Ma trận vuông A gọi là ma trận chéo nếu $(A)_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$, nói cách khác, các phần tử không nằm trên đường chéo chính bằng 0.

Ma trận vuông A gọi là chéo hoá được nếu tồn tại ma trận không suy biến P (cùng cấp với A) sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo.

Định lí sau đây cho ta điều kiện cần và đủ để một ma trận chéo hoá được.

Định lí 2.1. *Ma trận vuông A cấp n chéo hoá được nếu và chỉ nếu A có n vectơ riêng độc lập tuyến tính trong $\mathbb{K}^n$.*

Chứng minh. Nếu A chéo hoá được thì tồn tại ma trận không suy biến P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo, tức là

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Kí hiệu

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

là cơ sở chính tắc của $\mathbb{K}^n$ viết theo dạng cột. Bởi vì

$$(P^{-1}AP)e_i = \lambda_i e_i \qquad (1)$$

do đó e_i là vectơ riêng của ma trận $P^{-1}AP$ với i = 1, 2, ..., n.

Nhân bên trái hai vế của (1) với P ta được

$$A(Pe_i) = \lambda_i(Pe_i) \qquad (2)$$

Theo đẳng thức (2) các vectơ $Pe_1, Pe_2, \dots, Pe_n$ là vectơ riêng của ma trận A. Ta sẽ chứng minh hệ vectơ này độc lập tuyến tính. Xét quan hệ tuyến tính

$$\alpha_1 Pe_1 + \alpha_2 Pe_2 + \dots + \alpha_n Pe_n = 0 \qquad (3)$$

ta sẽ suy ra $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Thật vậy từ (3) ta có

$$P(\alpha_1 e_1) + P(\alpha_2 e_2) + \dots + P(\alpha_n e_n) = 0$$

hay $$P(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) = 0.$$

Vì P không suy biến nên phương trình này chỉ có nghiệm tầm thường

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0.$$

Từ đó $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ bởi $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ độc lập tuyến tính.

Bây giờ giả sử A có các vectơ riêng độc lập tuyến tính $v_1, \dots, v_n$ tương ứng với các trị riêng $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (các trị riêng λ_i có thể trùng nhau). Giả sử $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ là phép biến đổi tuyến tính có A là ma trận trong cơ sở chính tắc. Khi đó

$$[\varphi(x)] = A[x].$$

Đồng nhất v_i với $[v_i]$ ta có

$$\varphi(v_i) = Av_i = \lambda_i v_i = 0v_1 + \dots + \lambda_i v_i + \dots + 0v_n$$

Vì vậy trong cơ sở $E = (v_1, \dots, v_n)$, ma trận của φ là

$$D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Gọi P là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở E. Khi đó P có các cột là các vectơ $v_1, \dots, v_n$. Từ mối liên hệ giữa các ma trận của φ trong các ma trận khác nhau, ta có

$$D_\lambda = P^{-1}AP \text{ hay } A = PD_\lambda P^{-1}.$$

Vậy A chéo hoá được. □

Ta gọi chéo hoá ma trận A là tìm ma trận chéo D_λ và ma trận không suy biến P sao cho

$$D_\lambda = P^{-1}AP.$$

Nếu λ là trị riêng đơn thì ứng với nó chỉ có một vectơ riêng độc lập tuyến tính. Nếu λ là trị riêng bội m thì số vectơ riêng độc lập ứng với nó ≤ m. Do đó ta có

Hệ quả 2.1. *Nếu ma trận* A *có* n *trị riêng đơn thì* A *chéo hoá được.*

Hệ quả 2.2. *Trên trường số phức, ma trận* A *chéo hoá được nếu và chỉ nếu ứng với trị riêng bội* m *có* m *vectơ riêng độc lập tuyến tính. Trên trường số thực, ma trận thực* A *chéo hóa được nếu và chỉ nếu* A *có* n *trị riêng (tính theo số lần bội) và ứng với trị riêng bội* m *có* m *vectơ riêng độc lập tuyến tính.*

Ví dụ. a) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hãy chéo hoá ma trận A.

Giải. Phương trình đặc trưng của ma trận A

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\ (\lambda^2+\lambda-12) = 0.$$

Do đó ma trận có ba trị riêng là 1, 3, – 4. Theo hệ quả 2.2, A chéo hoá được.

Với λ = 1, ta có hệ phương trình tìm vectơ riêng

$$\begin{cases} 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3c \end{cases}$$

Ta chọn một vectơ riêng là $v_1 = (1,0,3)$.

Với λ = 3, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3c \\ x_2 = -2c \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Ta chọn một vectơ riêng là $v_2 = (-3, -2, 1)$.

Với $\lambda = -4$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3c \\ x_2 = 5c \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Ta chọn một vectơ riêng là $v_3 = (-3, 5, 1)$.

Theo định lí 1.2, $\{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập tuyến tính. Theo định lí 2.1, đặt

$$D_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ta có $D_\lambda = P^{-1}AP$.

b) Tính $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^{100}$

Giải. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ có hai trị riêng là 1 và -3, tương ứng với các vectơ riêng $(1, 0)$ và $(1, -2)$. Đặt $D_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ta có

$$P^{-1}AP = D_\lambda \quad \text{hay} \quad A = PD_\lambda P^{-1}$$

Từ đó mọi $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = PD_\lambda^n P^{-1}$$

Với $n = 100$ ta có

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^{100} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - 3^{100}) \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}.$$

§3. Đa thức tối tiểu và phân tích không gian vectơ

1. Đa thức tối tiểu

Đa thức f(t) trên trường $\mathbb{K}$ gọi là linh hoá của toán tử tuyến tính φ nếu $f(\varphi) = 0$.

Nếu p(t) là đa thức có bậc thấp nhất linh hoá của φ thì ta nói p là đa thức tối tiểu của φ.

Định lí 3.1. *Nếu đa thức* g(t) *linh hoá toán tử tuyến tính* φ *thì* g(t) *chia hết cho đa thức tối tiểu* p(t) *của* φ.

Chứng minh. Sử dụng phép chia đa thức, ta có

$$g(t) = g_1(t)p(t) + r(t)\ ,\ \deg(r) < \deg(p).$$

Nhận xét rằng với mọi đa thức f(t), g(t) và $\alpha \in \mathbb{K}$, ta có

$$(fg)(\varphi) = f(\varphi)g(\varphi)$$

$$(f + g)(\varphi) = f(\varphi) + g(\varphi)$$

$$(\alpha f)(\varphi) = \alpha f(\varphi).$$

Do đó $g(\varphi) = g_1(\varphi).p(\varphi) + r(\varphi)$. Vì $g(\varphi) = p(\varphi) = 0$ nên $r(\varphi) = 0$. Vì p có bậc nhỏ nhất để $p(\varphi) = 0$ nên r phải là đa thức 0. Vậy g(t) chia hết cho p(t). □

Định lí 3.2. *Nếu* φ *là toán tử tuyến tính trên không gian vectơ* X *hữu hạn chiều thì đa thức đặc trưng và đa thức tối tiểu của* φ *có cùng tập nghiệm. Nói cách khác, nghiệm của đa thức tối tiểu là các trị riêng của* φ.

Chứng minh. Gọi p(t) là đa thức tối tiểu của φ, $\alpha \in \mathbb{K}$. Ta sẽ chứng minh

$p(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha$ là trị riêng của φ.

Giả sử $p(\alpha) = 0$. Khi đó

$$p(t) = (t - \alpha)q(t),\ \deg(q) < \deg(p).$$

Vì $\deg(q) < \deg(p)$ nên $q(\varphi) \neq 0$. Chọn $x \in X$ sao cho $q(\varphi)x \neq 0$. Đặt $y = q(\varphi)x$. Ta có

$$\begin{aligned} 0 = p(\varphi)x &= [(\varphi - \alpha I_X)q(\varphi)]x \\ &= (\varphi - \alpha I_X)(q(\varphi)x) \\ &= (\varphi - \alpha I_X)y. \end{aligned}$$

Vậy α là trị riêng của φ.

Ngược lại, nếu α là trị riêng của φ với $\varphi(v) = \alpha v$, $v \neq 0$, thì $p(\varphi)v = p(\alpha)v$. Vì $p(\varphi) = 0$ nên $p(\alpha)v = 0$.

Do $v \neq 0$ nên $p(\alpha) = 0$, tức α là nghiệm của $p(t)$. □

Định lí 3.3. *Cho toán tử tuyến tính φ trên không gian vectơ hữu hạn chiều X. Giả sử $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ là tất cả các trị riêng khác nhau của φ, $p(t)$ là đa thức tối tiểu của φ. Khi đó nếu φ chéo hoá được thì $p(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\dots(t-\lambda_k)$.*

Chứng minh. φ chéo hoá được nếu và chỉ nếu X có một cơ sở E gồm toàn vectơ riêng của φ. Nếu v là một vectơ riêng của φ thì một trong các toán tử $\varphi - \lambda_i I_X$ chuyển v thành 0. Do đó

$$p(\varphi) = (\varphi - \lambda_1 I_X)\dots(\varphi - \lambda_k I_X)$$

sẽ chuyển các vectơ của E thành vectơ 0. Vậy $p(\varphi) = 0$ và đa thức tối tiểu của φ phải là ước của $p(t)$. Theo định lí 3.2, đa thức tối tiểu của φ phải nhận $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ làm nghiệm nên đa thức tối tiểu phải có bậc $\geq k$. Vậy $p(t)$ chính là đa thức tối tiểu. □

2. Phân tích không gian vectơ

Định lí 3.4. *Cho f(t) là một đa thức trên $\mathbb{K}$, và $f = f_1 f_2$ với f_1, f_2 là các đa thức bậc ≥ 1, có ước chung lớn nhất bằng 1. Giả sử φ là toán tử tuyến tính trên X thoả mãn $f(\varphi) = 0$. Đặt $V_1 = \mathrm{Ker}(f_1(\varphi))$, $V_2 = \mathrm{Ker}(f_2(\varphi))$. Khi đó $X = V_1 \oplus V_2$.*

Chứng minh. Do ước chung lớn nhất của f_1 và f_2 bằng 1 nên tồn tại các đa thức g_1, g_2 sao cho

$$g_1(t)f_1(t) + g_2(t)f_2(t) = 1.$$

Từ đó $g_1(\varphi)f_1(\varphi) + g_2(\varphi)f_2(\varphi) = I_X$. Suy ra với mọi $x \in X$

$$x = g_1(\varphi)f_1(\varphi)x + g_2(\varphi)f_2(\varphi)x. \quad (1)$$

Vì $f_2(\varphi)g_1(\varphi)f_1(\varphi)x = g_1(\varphi)f_2(\varphi)f_1(\varphi)x = g_1(\varphi)f(\varphi)x = 0$

nên $g_1(\varphi)f_1(\varphi)x \in V_2$. Tương tự ta có $g_2(\varphi)f_2(\varphi)x \in V_1$. Vậy

$$X = V_1 + V_2. \quad (2)$$

Giả sử $x \in V_1 \cap V_2$. Khi đó

$$f_1(\varphi)x = f_2(\varphi)x = 0.$$

Từ (1) suy ra $x = 0$. Do đó

$$V_1 \cap V_2 = \{0\}. \qquad (3)$$

Từ (2) và (3), $X = V_1 \oplus V_2$. □

Định lí 3.5. *Cho X là không gian vectơ trên $\mathbb{C}$, φ là toán tử tuyến tính trên X. Gọi p là một đa thức thoả mãn $p(\varphi) = 0$ và*

$$p(t) = (t - \alpha_1)^{m_1} \ldots (t - \alpha_n)^{m_r}$$

với $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ là các nghiệm phân biệt. Đặt

$$V_i = \mathrm{Ker}(\varphi - \alpha_i I_X)^{m_i}.$$

Khi đó X là tổng trực tiếp của các không gian con $V_1, \ldots, V_r$.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo r. Theo định lí 3.4, $V = V_1 \oplus W$ với

$$V_1 = \mathrm{Ker}(\varphi - \alpha_1 I_X)^{m_1}$$

và $$W = \mathrm{Ker}[(\varphi - \alpha_2 I_X)^{m_2} \ldots (\varphi - \alpha_r I_X)^{m_r}]$$

Theo giả thiết quy nạp

$$W = V_2 \oplus \ldots \oplus V_r$$

với $$V_j = \mathrm{Ker}(\varphi - \alpha_j I_W)^{m_j} \text{ trên } X (j = 2, \ldots, r). \text{ Vậy}$$

$$X = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_r.$$

Cuối cùng chỉ còn phải chứng minh

$$V_j = \mathrm{Ker}(\varphi - \alpha_j I_X)^{m_j} \text{ trên } X, j = 2, \ldots, r.$$

Thật vậy, nếu

$$v = u_1 + u_2 + \ldots + u_r \in \mathrm{Ker}\ (\varphi - \alpha_j I_X)^{m_j},\ u_i \in V_i,\ i = 1, \ldots, n \text{ thì do } j \geq 2 \text{ nên}$$

$$v \in \mathrm{Ker}\ (\varphi - \alpha_2 I_X)^{m_2} \ldots (\varphi - \alpha_r I_X)^{m_r},$$

từ đó $v \in W$. Vì $v \in W$, suy ra $u_1 = 0$. Do

$$v \in W \text{ và } W = V_2 \oplus \ldots \oplus V_r \text{ nên } v = u_j.$$ □

§4. Dạng chính tắc Jordan

1. Không gian tuần hoàn

Cho X là không gian vectơ trên $\mathbb{C}$, φ là toán tử tuyến tính trên X, $\alpha \in \mathbb{C}$ và $v \in X$, $v \neq 0$. Ta nói v là φ – tuần hoàn nếu tồn tại số nguyên $r \geq 1$ sao cho $\varphi^r(v) = 0$. Số nguyên dương r nhỏ nhất có tính chất trên gọi là chu kì của v đối với φ. Khi đó $\varphi^k(v) \neq 0$ với mọi k thoả mãn $0 \leq k < r$.

Bổ đề 4.1. *Nếu* $v \neq 0$ *là* φ – *tuần hoàn chu kì* r *thì tập các phần tử* $\left\{v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{r-1}(v)\right\}$ *độc lập tuyến tính.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại các λ_i không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\lambda_0 v + \lambda_1 \varphi(v) + \ldots + \lambda_{r-1}\varphi^{r-1}(v) = 0 . \qquad (1)$$

Đặt $f(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \ldots + \lambda_{r-1}t^{r-1}$, ta có đa thức $f \neq 0$, $\deg(f) \leq r - 1$ và (1) được viết lại dưới dạng

$$f(\varphi)v = 0.$$

Đặt $g(t) = t^r$ thì $g(\varphi)v = 0$. Gọi h(t) là ước chung lớn nhất của f(t) và g(t) thì tồn tại các đa thức f_1 và g_1 sao cho

$$h = f_1 f + g_1 g$$

Từ đó suy ra $h(\varphi)v = 0$. Do h là ước của f nên $\deg(h) \leq r - 1$, h là ước của g nên $h(t) = t^d$, $d \leq r - 1$.

Từ đó $h(\varphi)v = \varphi^d(v) = 0$ với $d < r$, mâu thuẫn với r là chu kì của v đối với φ. □

Không gian vectơ X hữu hạn chiều gọi là φ – tuần hoàn nếu tồn tại $\alpha \in \mathbb{C}$ và $v \in X$ sao cho v là $(\varphi - \alpha I_X)$ – tuần hoàn có chu kì $r = \dim X$.

Từ bổ đề 4.1 ta có

Hệ quả 4.1. *Nếu* X *là không gian vectơ* r – *chiều,* φ – *tuần hoàn thì tồn tại* $v \in X$ *và* $\alpha \in \mathbb{C}$ *sao cho*

$$\left\{(\varphi - \alpha I_X)^{r-1}v, \ldots, (\varphi - \alpha I_X)v, v\right\} \qquad (2)$$

là một cơ sở của X.

2. Dạng chính tắc Jordan

Với mỗi k = 0, ..., r − 1 ta có

$$\varphi(\varphi-\alpha I_X)^k v=(\varphi-\alpha I_X)^{k+1}v+\alpha(\varphi-\alpha I_X)^k v$$

nên ma trận của toán tử φ trong cơ sở (2) có dạng

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0\dots & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 1\dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha\dots & 0 & 0\\ - & - & -- & - & -\\ 0 & 0 & 0- & \alpha & 1\\ 0 & 0 & 0- & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Ma trận này có phần tử thứ (i,i) bằng α (i = 1, ..., r), phần tử thứ (i, i + 1) bằng 1 (i = 1, .., r − 1), các phần tử còn lại bằng 0.

Ma trận trên gọi là một khối Jordan, kí hiệu là J(α), cơ sở (2) gọi là cơ sở Jordan của φ.

Cho các ma trận vuông $A_1,\dots,A_k$ có cấp tương ứng là $n_1,\dots,n_k$. Ta gọi tổng trực tiếp của k ma trận này là ma trận vuông cấp $n = n_1+\dots+n_k$ có dạng

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix},$$

trong đó $A_1,\dots,A_k$ nằm trên đường chéo chính, các vị trí còn lại của A bằng 0.

Dễ dàng thấy rằng

Bổ đề 4.2. *Nếu* $X=V_1\oplus\dots\oplus V_k$, V_i *có cơ sở là* $E_i, i=1,\dots,k$, φ *là một toán tử tuyến tính trên* X *thoả mãn* $\varphi(V_i)\subset V_i$, i = 1, ..., k, *thì* $E=E_1\cup\dots\cup E_n$ *là một cơ sở của* X *và ma trận* $[\varphi]_E$ *bằng tổng trực tiếp của các ma trận* $[\varphi|_{V_i}]_{E_i}$, i = 1, ..., k.

Giả sử X là tổng trực tiếp của các không gian con φ − bất biến.

$$X=V_1\oplus\dots\oplus V_k,$$

trong đó mỗi V_i là không gian tuần hoàn. Chọn cơ sở Jordan cho mỗi V_i. Hợp các cơ sở này theo thứ tự tạo nên một cơ sở của X, ta cũng gọi nó là cơ sở Jordan của φ.

Ma trận J của φ trong cơ sở này là tổng trực tiếp của k khối Jordan. Nếu V_i là $(\varphi - \alpha_i I_X)$ – tuần hoàn với i = 1, ..., k thì J có dạng

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \alpha_1 & 1 & & \\ & \alpha_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha_1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} \alpha_k & 1 & & \\ & \alpha_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha_k \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Ở mỗi khối, α_i nằm trên đường chéo chính, 1 nằm ở phía trên đường chéo chính, 0 ở các vị trí còn lại.

Định lí 4.1. *Cho X là không gian vectơ hữu hạn chiều trên* $\mathbb{C}$, $X \neq \{0\}$, φ *là một toán tử tuyến tính trên X. Khi đó X bằng tổng trực tiếp của các không gian con tuần hoàn* φ *– bất biến.*

Chứng minh. Áp dụng định lí 3.5 vào đa thức đặc trưng $f_\varphi(t)$ của φ, ta có thể giả thiết rằng có một số $\alpha \in \mathbb{C}$ và số nguyên $r \geq 1$ sao cho $(\varphi - \alpha I_X)^r = 0$. Đặt $\Psi = \varphi - \alpha I_X$, ta có $\Psi^r = 0$. Giả sử r là số nguyên nhỏ nhất có tính chất trên, ta có $\Psi^{r-1} \neq 0$. Từ đó $\Psi(X)$ là không gian con thực sự của X. Thật vậy, chọn $w \in X$ sao cho $\Psi^{r-1}(w) \neq 0$. Đặt $v = \Psi^{r-1}(w)$ thì $v \in \operatorname{Ker}\Psi$ nên $\dim \operatorname{Ker}(\psi) \geq 1$ và $\dim \Psi(X) < \dim X$.

Do giả thiết quy nạp, $\Psi(X)$ là tổng trực tiếp của các không gian con tuần hoàn φ – bất biến

$$\psi(X) = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m,$$

sao cho V_i có cơ sở gồm các phần tử $\Psi^k(w_i)$ với vectơ tuần hoàn $w_i \in V_i$, có chu kì r_i.

Lấy $v_i \in X$ sao cho $\Psi(v_i) = w_i$. Khi đó mỗi vectơ v_i là tuần hoàn, vì nếu $\Psi^{r_i}(w_i) = 0$ thì $\Psi^{r_i+1}(v_i) = 0$.

Gọi W_i là không gian con của X sinh bởi các phần tử $\Psi^k(v_i)$, $k = 1, ..., r_i + 1$. Ta sẽ chứng minh

$$V' = W_1 + ... + W_m$$

là tổng trực tiếp, tức là mọi $u \in V'$ được viết một cách duy nhất dạng

$$u = u_1 + ... + u_m, \ u_i \in W_i,$$

hay một cách tương đương vectơ $0_{V'} \in V'$ được viết duy nhất dạng

$$0_{V'} = 0_1 + ... + 0_m, \ 0_i \in W_i.$$

Mọi phần tử của W_i đều có dạng $f_i(\Psi)v_i$ với f_i là đa thức bậc $\leq r_{i+1}$. Giả sử

$$0 = f_1(\Psi)v_1 + ... + f_m(\Psi)v_m \qquad (3)$$

Tác động Ψ vào (3) với chú ý $\Psi f_i(\Psi) = f_i(\Psi)\Psi$, ta có

$$f_1(\Psi)w_1 + ... + f_m(\Psi)w_m = 0.$$

Do $V_1 + ... + V_m$ là tổng trực tiếp của $\Psi(X)$ nên

$$f_i(\Psi)w_i = 0, \ i = 1, ..., m.$$

Suy ra t^{r_i} là ước của $f_i(t)$ (xem chứng minh bổ đề 4.1), vì vậy

$$f_i(t) = g_i(t)t \ \text{ với } \ g_i \in \mathbb{C}[t].$$

Từ đó (3) trở thành

$$g_1(\varphi)w_1 + ... + g_m(\varphi)w_m = 0.$$

Tương tự trên, ta lại có t^{r_i} là ước của $g_i(t)$ nên t^{r_i+1} là ước của $f_i(t)$. Suy ra $f_i(\Psi)v_i = 0$.

Vậy V' là tổng trực tiếp của $W_1, ..., W_m$.

Do $V' \subset X$ nên $\Psi(V') \subset \Psi(X)$. Mọi phần tử của $\Psi(X)$ đều có dạng

$$f_1(\Psi)w_1 + ... + f_m(\Psi)w_m$$

với các đa thức f_i nào đó nên ảnh qua Ψ của phần tử này là

$$f_1(\Psi)v_1 + ... + f_m(\Psi)v_m$$

và phần tử này thuộc V'. Vậy $\Psi(X) \subset \Psi(V')$ và do đó $\Psi(X) = \Psi(V')$.

Cho $v \in X$. Do $\Psi(v) = \Psi(v')$ nên $\Psi(v - v') = 0$. Vì thế

$$v = v' + (v - v') \in V' + \mathrm{Ker}\varphi.$$

Ta có $X = V' + \mathrm{Ker}\ \Psi$.

Gọi E' là cơ sở Jordan của V'. Ta có thể bổ sung vào E' một số phần tử thuộc một cơ sở của $\mathrm{Ker}\Psi$ để được một cơ sở E của X :

$$E = E' \cup \{u_1, ..., u_l\}$$

Do $\Psi(u_j) = 0$ nên u_j là vectơ riêng của φ, và không gian con một chiều sinh bởi u_j là tuần hoàn và φ – bất biến. Kí hiệu không gian ấy là U_j. Ta có

$$\begin{aligned} X &= V' \oplus U_1 \oplus ... \oplus U_l \\ &= V_1 \oplus ... \oplus V_m \oplus U_1 \oplus ... \oplus U_l \end{aligned}$$

là một phân tích X thành tổng trực tiếp của các không gian con tuần hoàn, φ – bất biến. □

Hệ quả 4.2. a) *Mọi toán tử tuyến tính φ trên không gian vectơ hữu hạn chiều X, tồn tại một cơ sở E của X sao cho $[\varphi]_E$ là ma trận dạng Jordan.*

b) *Mọi ma trận vuông A đồng dạng với một ma trận dạng Jordan, gọi là dạng chính tắc Jordan của A.*

Định lí 4.2. *Toán tử tuyến tính φ trên không gian hữu hạn chiều X chéo hóa được nếu và chỉ nếu đa thức tối thiểu của φ có dạng*

$$p_\varphi(t) = (t - \lambda_1)...(t - \lambda_k), \qquad (4)$$

với $\lambda_1, ..., \lambda_k$ là các trị riêng phân biệt của φ.

Chứng minh. Nếu φ chéo hoá được thì theo định lí 3.3, $p_\varphi(t)$ có dạng (4). Ngược lại, giả sử $p_\varphi(t)$ có dạng (4), ta sẽ chỉ ra dạng chính tắc Jordan phải có dạng chéo, tức là chỉ gồm các khối vuông 1 × 1.

Xét khối vuông Jordan k × k

$$J_k(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Đa thức tối tiểu của khối này là $(t - \alpha)^k$. Đa thức tối tiểu $p_J(t)$ của mỗi khối Jordan J của φ là ước của đa thức tối tiểu $p_\varphi(t)$ của φ, do đó k = 1. □

Định lí 4.3. *Cho toán tử tuyến tính φ có các trị riêng phân biệt $\lambda_1,\dots,\lambda_r$. Khi đó đa thức tối tiểu của φ có dạng*

$$p_\varphi(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}\dots(t-\lambda_r)^{m_r} \qquad (5)$$

nếu và chỉ nếu trong dạng chính tắc Jordan của φ, các khối Jordan $J(\lambda_i)$ ứng với trị riêng λ_i có bậc cao nhất là m_i.

Chứng minh. Hiển nhiên $p_\varphi(t)$ có dạng (5) thì các khối Jordan $J(\lambda_i)$ ứng với trị riêng λ_i có bậc cao nhất là m_i. Ngược lại giả sử m_i là bậc cao nhất của các khối Jordan tương ứng với trị riêng λ_i. Khi đó các khối Jordan $J(\lambda_i)$ đều bị linh hoá bởi $(t-\lambda_i)^{m_i}$, nên $[\varphi]$ bị linh hoá bởi $p_\varphi(t)$ có dạng (5). Vì mỗi $(t-\lambda_i)^{m_i}$ là đa thức có bậc thấp nhất linh hoá các khối $J(\lambda_i)$ nên $p_\varphi(t)$ là đa thức bậc thấp nhất linh hoá $[\varphi]$. Vậy $p_\varphi(t)$ là đa thức tối tiểu của φ. □

Bài tập

V.1 Tìm trị riêng, vectơ riêng thực của các ma trận sau

a) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

V.2 Chéo hoá các ma trận sau

a) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

V.3 Tìm trị riêng, vectơ riêng của toán tử tuyến tính

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

a) $\varphi(x,y,z) = (2x - y + 2z,\ 5x - 3y + 3z,\ -x - 3z)$

b) $\varphi(x,y,z) = (y,\ -4x + 4y,\ -2x + y + 2z)$

c) $\varphi(x,y,z) = (4x - 5y + 2z,\ 5x - 7y + 3z,\ 6x - 9y + 4z)$

d) $\varphi(x,y,z) = (x - 3y + 3z,\ -2x - 6y + 13z,\ -x - 4y + 8z)$.

V.4 Chứng minh rằng mọi vectơ khác 0 đều là vectơ riêng của toán tử tuyến tính φ trên X nếu và chỉ nếu tồn tại $\alpha \in \mathbb{K}$ sao cho $\varphi = \alpha I_X$.

V.5 Cho φ là toán tử tuyến tính khả nghịch trên X. Chứng minh λ là trị riêng của φ thì $\frac{1}{\lambda}$ là trị riêng của φ^{-1}. Hơn nữa nếu v là vectơ riêng của φ ứng với λ thì nó cũng là vectơ riêng của φ^{-1} ứng với $\frac{1}{\lambda}$.

V.6 Chứng tỏ rằng mọi toán tử tuyến tính trên không gian vectơ phức hữu hạn chiều đều có vectơ riêng. Điều đó còn đúng không với không gian vô hạn chiều.

V.7 Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 chéo hoá được

a) Trên $\mathbb{R}$, b) Trên $\mathbb{C}$.

V.8 Chứng tỏ hai ma trận vuông A và A^T có chung trị riêng. Cho ví dụ chứng tỏ chúng không chung vectơ riêng.

V.9 Chứng minh tổng và giao của hai không gian con bất biến là không gian con bất biến.

V.10 Cho φ và Ψ là hai toán tử tuyến tính trên X giao hoán với nhau. Chứng minh U là không gian con bất biến của φ thì $\Psi(U)$ cũng là không gian con bất biến của φ.

V.11 Cho φ và Ψ là hai toán tử tuyến tính trên X giao hoán với nhau. Chứng minh $\mathrm{Ker}(\Psi)$ và $\mathrm{Im}(\Psi)$ là không gian con bất biến của φ.

V.12 Cho φ là toán tử tuyến tính trên X, U là không gian con bất biến của φ và $W \subset U$. Chứng minh

a) W là không gian con bất biến của $\varphi|_U$ nếu và chỉ nếu nó là không gian con bất biến của φ.

b) $\varphi(U)$ và $\varphi^{-1}(U)$ là không gian con bất biến của φ.

V.13 Cho toán tử tuyến tính $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ có n trị riêng phân biệt. Hãy tìm tất cả các không gian con bất biến của φ.

V.14 Tìm tất cả các không gian con bất biến của toán tử tuyến tính φ trên $\mathbb{K}^3$

$$\varphi(x,y,z) = (4x - 2y + 2z,\ 2x + 2z,\ -x + y + z)$$

V.15 Tìm dạng Jordan của các ma trận sau

a) $\begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -25 & 10 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

CHƯƠNG VI

DẠNG SONG TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

§1. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

1. Định nghĩa

Cho X là một không gian vectơ. Ta gọi một dạng song tuyến trên X là một quy tắc đặt hai vectơ bất kì $x, y \in X$ với một số $f(x, y) \in \mathbb{K}$ thoả mãn các điều kiện sau đây với mọi $x, y, z \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$:

1) $f(x + z, y) = f(x, y) + f(z, y)$

$f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$;

2) $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z)$,

$f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$.

Một ánh xạ tuyến tính $\varphi : X \to \mathbb{K}$ gọi là một dạng tuyến tính. Theo tính chất 1), với mỗi y cố định, $f(x, y)$ là một dạng tuyến tính theo x và theo tính chất 2), với mỗi x cố định, $f(x, y)$ là một dạng tuyến tính theo y. Theo từng biến dạng song tuyến tính có các tính chất của một ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ.

a) Nếu φ và Ψ là hai dạng tuyến tính trên X thì

$$f(x, y) = \varphi(x)\Psi(y)$$

là một dạng song tuyến tính trên X.

b) $$\varphi(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$$

là một dạng song tuyến tính trên không gian vectơ C[a,b] các hàm liên tục trên đoạn [a,b].

2. Ma trận của dạng song tuyến tính

Cho f là một dạng song tuyến tính trên không gian vectơ X và $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là một cơ sở của X. Kí hiệu $x = (x_1, x_2, ... x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ là toạ độ của vectơ x và y trong cơ sở E. Khi đó

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j f(e_i, e_j).$$

Đặt $f(e_i, e_j) = a_{ij}$, ta có

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \qquad (1)$$

Ta gọi ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

là ma trận của dạng song tuyến tính f trong cơ sở E. Kí hiệu $[z]_E$ là toạ độ của vectơ z trong cơ sở E. Khi đó ta có

$$f(x, y) = [y]_E^T A[x]_E \qquad (1')$$

Như vậy : Mỗi dạng song tuyến tính f đều có thể viết dưới dạng (1) ; ngược lại cho một ma trận vuông A cấp n bất kì, công thức (1') cho ta một dạng song tuyến tính có A là ma trận trong cơ sở E.

Giả sử $E' = \{e'_1, e'_2, ... e'_n\}$ là một cơ sở khác của X và P là ma trận chuyển từ E sang E'. Gọi B là ma trận của dạng song tuyến tính f trong cơ sở khi E'. Khi đó

$$f(x, y) = [y]_E^T A[x]_E =$$

$$= (P[y]_{E'})^T A(P[x]_{E'}) = [y]_{E'}^T (P^T AP)[x]_{E'}$$

Vì vậy ta có

$$B = P^T AP \qquad (2)$$

Bởi vì $|P| = \left|P^T\right|$ nên từ (2) ta có

$$|B| = |A||P|^2 \qquad (3)$$

Từ (3) suy ra định thức của ma trận một dạng song tuyến tính thực trong các cơ sở khác nhau có cùng dấu.

Cho hai ma trận vuông S và P cấp n. Kí hiệu $S_1,...,S_n$ là các vectơ dòng của S. Theo định nghĩa phép nhân, mỗi dòng của ma trận tích SP là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $S_1,...,S_n$. Do đó

$$r(SP) \le r(S) \qquad (4)$$

Vì $r(A) = r(A^T)$ nên từ (4) suy ra $r(SP) \le r(P)$. Vậy

$$r(SP) \le \min\{r(S), r(P)\}$$

Giả sử S không suy biến. Khi đó

$$r(P) = r(S^{-1}(SP)) \le r(SP)$$

Do đó trong trường hợp này ta có $r(P) = r(SP)$. Tương tự nếu P không suy biến thì $r(S) = r(SP)$. Áp dụng điều này vào (2) ta có

$$r(A) = r(B)$$

Từ đó ta gọi hạng của dạng song tuyến tính f là hạng của ma trận của nó trong một cơ sở tuỳ ý.

Ví dụ. Cho f là dạng tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ (cho trong cơ sở chính tắc)

$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2 + 3x_3y_3$$

Tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ và trong cơ sở

$$E' = \{(1,1,0),(1,1,1),(1,0,1)\}.$$

Giải. Bởi vì

$$f(e_1,e_1) = 1, \quad f(e_2,e_1) = 0, \quad f(e_3,e_1) = 0;$$

$$f(e_1,e_2) = 2, \quad f(e_2,e_2) = -1, \quad f(e_3,e_2) = 0;$$

$$f(e_1,e_3) = 0, \quad f(e_2,e_3) = 0, \quad f(e_3,e_3) = 3;$$

nên ma trận của f trong cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở E' là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nên ma trận của f trong cơ sở E' là

$$B = P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vậy $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Dạng song tuyến tính đối xứng

Dạng song tuyến tính f trên X gọi là đối xứng nếu

$$f(x, y) = f(y, x)$$

với mọi $x, y \in X$.

Nếu f đối xứng thì trong một cơ sở E bất kì

$$a_{ij} = f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i) = a_{ji}$$

với mọi i, j.

Ma trận vuông $A = (a_{ij})$ gọi là ma trận đối xứng nếu $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi i, j. Dễ dàng kiểm tra rằng nếu dạng song tuyến tính f có ma trận trong một cơ sở nào đó là ma trận đối xứng thì f là dạng song tuyến tính đối xứng, ngược lại, nếu f là dạng song tuyến tính đối xứng thì ma trận của f trong một cơ sở bất kì là ma trận đối xứng.

§2. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

1. Định nghĩa

Cho f là một dạng song tuyến tính trên X. Khi đó

$$\omega(x) = f(x, x)$$

gọi là một dạng toàn phương trên X.

Nếu f là một dạng song tuyến tính không đối xứng thì bằng cách đặt

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(f(x,y) + f(y,x)),$$

ta có φ là một dạng song tuyến tính đối xứng và

$$\omega(x) = \varphi(x, x)$$

Vì vậy sau này trong định nghĩa dạng toàn phương ta luôn giả thiết dạng song tuyến tính f là đối xứng.

Kí hiệu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ là toạ độ của vectơ x trong một cơ sở E nào đó của X. Khi đó, ta có phương trình của dạng toàn phương là

$$\omega(x) = f(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

trong đó $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi i, j = 1, 2,...,n.

Từ hệ thức

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(f(x + y, x + y) - f(x,x) - f(y,y)) =$$
$$= \frac{1}{2}(\omega(x + y) - \omega(x) - \omega(y))$$

suy ra rằng chỉ có một dạng song tuyến tính đối xứng duy nhất xác định dạng toàn phương $\omega(x)$.

2. Ma trận của dạng toàn phương

Cho dạng toàn phương $\omega(x)$ xác định bởi dạng song tuyến tính đối xứng $f(x, y)$. Khi đó ma trận của f trong cơ sở E cũng gọi là ma trận của dạng toàn phương $\omega(x)$ trong cơ sở E.

Giả sử A là ma trận của dạng toàn phương $\omega(x)$ trong cơ sở E. Khi đó ta có

$$\omega(x) = [x]_E^T A [x]_E = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

Ví dụ. Dạng toàn phương

$$\omega(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$$

có ma trận là $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dễ dàng kiểm tra $$\omega(x) = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

§3. DẠNG CHÍNH TẮC CỦA DẠNG TOÀN PHƯƠNG

1. Dạng chính tắc

Phương trình của dạng toàn phương

$$\omega(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

trong đó $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là toạ độ của vectơ x trong cơ sở E xuất phát trên X. Rõ ràng phương trình này thay đổi khi cơ sở thay đổi.

Dạng toàn phương gọi là có dạng chính tắc nếu

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 .$$

Cơ sở để dạng toàn phương có dạng chính tắc gọi là cơ sở chính tắc của dạng toàn phương.

Mỗi dạng toàn phương đều tồn tại một cơ sở để trong cơ sở đó nó có dạng chính tắc. Việc tìm cơ sở để trong cơ sở đó dạng toàn phương có dạng chính tắc gọi là phương pháp đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

2. Phương pháp Lagrange

Xét dạng toàn phương

$$\omega(x) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + ...$$

Nếu $a_{11} \neq 0$ thì

$$\omega(x) = a_{11}\left(x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + ... + \frac{2a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right) + ...$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + g_1$$

trong đó g_1 là một dạng toàn phương không phụ thuộc x_1.

Đặt

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\ y_2 = x_2 \\ ... \\ y_n = x_n \end{cases}$$

ta được phép đổi toạ độ với ma trận chuyển từ cơ sở xuất phát sang cơ sở mới là

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Trong cơ sở mới phương trình của dạng toàn phương là

$$\omega(y) = a_{11}y_1^2 + g_1$$

với g_1 không phụ thuộc y_1.

Nếu $a_{11} = 0$ nhưng tồn tại $a_{1j} \neq 0$, $j > 1$, chẳng hạn $a_{12} \neq 0$ thì ta sử dụng phép đổi toạ độ

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \dots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

với ma trận chuyển cơ sở xuất phát sang cơ sở mới là

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Chú ý rằng ma trận này không suy biến.

Trong cơ sở mới, phương trình của dạng toàn phương là

$$\omega(y) = a_{12}y_1^2 + 2a_{12}y_2^2 + 2a_{13}(y_1 + y_2)y_3 + \dots,$$

có dạng như đã xét ở trường hợp thứ nhất.

Sau khi đã sử dụng phép đổi cơ sở thứ nhất ta cũng tiến hành tương tự đối với dạng toàn phương g_1. Tiếp tục như vậy sau một số hữu hạn phép đổi cơ sở, ta sẽ tìm được một cơ sở trong đó ω có dạng chính tắc.

Ví dụ. a) Đưa dạng toàn phương sau đây về dạng chính tắc

$$\omega(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

Giải. Ta có

$$\omega(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2 =$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4\left(x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - 9x_3^2$$

Sử dụng phép đổi toạ độ

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = \phantom{x_1 +{}} x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_3 = \phantom{x_1 + x_2 +{}} x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{5}{2}y_3 \\ x_2 = \phantom{y_1 -{}} y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 = \phantom{y_1 - y_2 -{}} y_3 \end{cases}$$

dạng toàn phương sẽ có dạng chính tắc là

$$\omega(y) = y_1^2 + 4y_2^2 - 9y_3^2$$

b) Đưa dạng toàn phương sau đây về dạng chính tắc

$$\omega(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

Giải. Sử dụng phép đổi toạ độ

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Ta được

$$\omega(y) = y_1^2 = y_2^2\ (y_1 + y_2)y_3 + (y_1 - y_2)y_3$$

$$= (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2$$

Sử dụng phép đổi toạ độ

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = \phantom{y_1 +{}} y_2 \\ z_3 = \phantom{y_1 + y_2 +{}} y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = \phantom{z_1 +{}} z_2 \\ y_3 = \phantom{z_1 + z_2 +{}} z_3 \end{cases}$$

Ta có

$$\omega(z) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2,$$

với phép đổi toạ độ

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_3 = \phantom{z_1 + z_2 -{}} z_3 \end{cases}$$

3. Phương pháp Jacobi

Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp n. Ta gọi các định thức

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_n = |A|$$

là các định thức con chính của A.

Giả sử $\omega(x)$ là một dạng toàn phương sinh bởi dạng song tuyến tính đối xứng f(x, y) có ma trận trong cơ sở $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là A.

Định lí 3.1. *Nếu tất cả các định thức con chính của A khác 0 thì tồn tại một cơ sở để trong cơ sở đó phương trình của dạng toàn phương là*

$$\omega(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n^2.$$

Chứng minh. Với mọi j = 1, 2,..., n xét hệ phương trình sau đây :

$$\begin{cases} b_{1j}f(e_1,e_1) + b_{2j}f(e_1,e_2) + \ldots + b_{jj}f(e_1,e_j) = 0 \\ b_{1j}f(e_2,e_1) + b_{2j}f(e_2,e_2) + \ldots + b_{jj}f(e_2,e_j) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{1j}f(e_j,e_1) + b_{2j}f(e_j,e_2) + \ldots + b_{jj}f(e_j,e_j) = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

chỉ có vế phải của phương trình cuối cùng là khác 0. Bởi vì $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ nên định thức ma trận hệ số của (1) là $\Delta_j \neq 0$. Theo định lí Cramer hệ này có nghiệm duy nhất, ta cũng kí hiệu là $(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{jj})$, đặc biệt

$$b_{jj} = \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j} \neq 0.$$

Đặt $e'_1 = b_{11}e_1$

$e'_2 = b_{12}e_1 + b_{22}e_2$

... ...

$e'_n = b_{1n}e_1 + b_{2n}e_2 + \ldots + b_{nn}e_n$

Từ hệ thức $\lambda_1 e'_1 + \ldots + \lambda_n e'_n = 0$ ta có

$$\begin{cases} b_{11}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + \ldots + b_{1n}\lambda_n = 0 \\ \qquad\qquad b_{22}\lambda_2 + \ldots + b_{2n}\lambda_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad b_{nn}\lambda_n = 0 \end{cases}$$

Vì mọi $b_{jj} \neq 0$ nên từ hệ này suy ra $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, tức là hệ $e'_1, e'_2, ... e'_n$ độc lập tuyến tính. Vậy ta có $E' = \{e'_1, e'_2, ... e'_n\}$ là một cơ sở của X với ma trận chuyển từ E sang E' là

$$P = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & b_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Ta sẽ chứng minh rằng trong cơ sở E' dạng toàn phương có phương trình như mong muốn, tức là cần chỉ ra

$$f(e'_j, e'_j) = \begin{cases} \dfrac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j} & \text{nếu } i = j \text{ (kí hiệu } \Delta_0 = 1) \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

Thật vậy với $i \leq j$ ta có

$$f(e'_j, e_i) = f(e_i, e'_j) = f(e_i, b_{1j}e_1 + ... + b_{jj}e_j) =$$

$$= b_{1j}f(e_i, e_1) + ... + b_{jj}f(e_i, e_j)$$

Theo hệ (1) ta có

$$f(e'_j, e_i) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } i < j \\ 1 \text{ nếu } i = j \end{cases} \qquad (3)$$

Từ (3) ta có

$$f(e'_j, e'_j) = f(e'_j, b_{1j}e_1 + ... + b_{jj}e_j) =$$

$$= b_{1j}f(e'_j, e_1) + ... + b_{j-1j}f(e'_j, e_{j-1}) + b_{jj}f(e'_j, e_j) =$$

$$= b_{jj} = \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}.$$

Với $i < j$ thì

$$f(e'_j, e'_i) = f(e'_j, b_{1i}e_1 + ... + b_{ii}e_i) =$$

$$= b_{1i}f(e'_j, e_1) + ... + b_{ii}f(e'_j, e_i) = 0.$$

Bởi vì $f(e'_j, e'_i) = f(e'_i, e'_j)$ nên điều cuối cùng này cho ta $f(e'_i, e'_j) = 0$ với mọi $i \neq j$. □

Chú ý rằng để tìm ma trận chuyển cơ sở (2) ta cần giải n hệ phương trình (1).

Ví dụ. Đưa dạng toàn phương có phương trình

$$\omega(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + x_3^2$$

về dạng chính tắc.

Giải. Ma trận của dạng toàn phương là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = -2,\ \Delta_3 = -2$ nên tồn tại một cơ sở để phương trình dạng toàn phương có dạng

$$\omega(x) = x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2$$

Để tìm ma trận chuyển cơ sở ta xét hệ phương trình (5) :

Với $j = 1$: $b_{11} = 1$

Với $j = 2$: $\begin{cases} b_{12} + b_{22} = 0 \\ b_{12} - b_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{12} = \dfrac{1}{2} \\ b_{22} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Với $j = 3$: $\begin{cases} b_{13} + b_{23} = 0 \\ b_{13} - b_{23} = 1 \\ b_{33} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{13} = 0 \\ b_{23} = 0 \\ b_{33} = 1 \end{cases}$

Vậy ma trận chuyển cơ sở là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tức là nếu cơ sở xuất phát là e_1, e_2, e_3 thì cơ sở để dạng toàn phương có dạng nói trên là

$$\begin{cases} e_1' = e_1 \\ e_2' = \dfrac{1}{2}e_1 - \dfrac{1}{2}e_2 \\ e_3' = \qquad\qquad e_3 \end{cases}$$

4. Luật quán tính

Cho dạng toàn phương thực có dạng chính tắc

$$\omega(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2,\ \lambda_i \neq 0.$$

Thực hiện phép đổi biến

$$x_i' = \sqrt{|\lambda_i|}x_i \text{ nếu } i \le r,\ x_i' = x_i \text{ nếu } i > r,$$

dạng toàn phương trở thành

$$\omega(x') = \varepsilon_1 x_1'^2 + \varepsilon_2 x_2'^2 + \ldots + \varepsilon_r x_r'^2$$

trong đó $\varepsilon_i = \pm 1$. Ta gọi dạng toàn phương dưới dạng này là dạng chuẩn tắc.

Định lí 3.2. (Luật quán tính). *Số $\varepsilon_i = 1$ và $\varepsilon_i = -1$ của một dạng toàn phương thực dưới dạng chuẩn tắc là những bất biến (tức là không phụ thuộc vào cơ sở mà ta chọn).*

Chứng minh.

Giả sử $\omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ và

$$\omega = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2$$

$$\omega = z_1^2 + \ldots + z_q^2 - z_{q+1}^2 - \ldots - z_r^2 \qquad (4)$$

là hai cách đưa ω về dạng chuẩn tắc. Khi đó tồn tại hai ma trận $S = (s_{ij}), T = (t_{ij})$ vuông cấp n, không suy biến sao cho

$$\begin{cases} y_1 = s_{11}x_1 + \ldots + s_{1n}x_n \\ y_2 = s_{21}x_1 + \ldots - s_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = s_{n1}x_1 + \ldots - s_{nn}x_n \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} z_1 = t_{11}x_1 + \ldots + t_{1n}x_n \\ z_2 = t_{21}x_1 + \ldots + t_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n = t_{n1}x_1 + \ldots + t_{nn}x_n. \end{cases}$$

Giả sử rằng $p < q$. Khi đó xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất của các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ \ldots\ldots \\ y_p = 0 \\ z_{q+1} = 0 \\ \ldots\ldots \\ z_n = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Vì hệ này có số phương trình ít hơn số ẩn nên có một nghiệm không tầm thường $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$. Thay C vào (4) và chú ý đến (5) ta có

$$\begin{cases} \omega(C) = -y_{p+1}^2 - ... - y_r^2 \le 0 \\ \omega(C) = z_1^2 + ... + z_q^2 \ge 0. \end{cases}$$

Vì vậy $\omega(C) = z_1^2 + ... + z_q^2 = 0$, tức là $z_1 = 0, ..., z_q = 0$.

Kết hợp với (5) suy ra hệ

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ z_n = 0 \end{cases}$$

có một nghiệm không tầm thường là C. Đây là điều mâu thuẫn, vì ma trận của hệ là T không suy biến. Vậy $p \ge q$. Hoàn toàn tương tự ta cũng có $q \ge p$, do đó $p = q$. □

5. Dạng toàn phương xác định dương, xác định âm

Dạng toàn phương thực $\omega(x)$ được gọi là xác định dương nếu $\omega(x) > 0$ với mọi $x \ne 0$ và gọi là xác định âm nếu $\omega(x) < 0$ với mọi $x \ne 0$.

Định lí 3.3. *Một dạng toàn phương $\omega(x)$ là xác định dương nếu và chỉ nếu trong cơ sở chính tắc, phương trình của $\omega(x)$ có dạng*

$$\omega(x) = b_1x_1^2 + b_2x_2^3 + ... + b_nx_n^2,$$

trong đó $b_i > 0$ *với mọi* $i = 1, 2, ..., n$.

Chứng minh. Nếu $\omega(x)$ có dạng trên thì hiển nhiên $\omega(x) > 0$ với mọi $x \ne 0$, tức là $\omega(x)$ xác định dương. Ngược lại, nếu một dạng toàn phương đưa về dạng chính tắc không có dạng trên thì hoặc tồn tại $b_i = 0$ hoặc $b_i < 0$. Chẳng hạn $b_n \le 0$. Ta chọn x có toạ độ trong cơ sở chính tắc đó là (0, ..., 0, 1) thì $x \ne 0$ nhưng $\omega(x) \le 0$. Vậy $\omega(x)$ không xác định dương. □

Tương tự ta có :

Định lí 3.4. *Một dạng toàn phương $\omega(x)$ là xác định âm nếu và chỉ nếu trong cơ sở chính tắc phương trình của $\omega(x)$ có dạng*

$$\omega(x) = b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + ... + b_nx_n^2,$$

trong đó $b_i < 0$ *với mọi* $i = 1, 2, ..., n$.

Định lí 3.5. (Tiêu chuẩn Sylvester). *Dạng toàn phương*

$$\omega(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

xác định dương nếu và chỉ nếu tất cả các định thức con chính Δ_m *của ma trận* $A = (a_{ij})$ *đều dương ; xác định âm nếu và chỉ nếu* $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$.

Chứng minh. Nếu mọi $\Delta_m \neq 0$ thì theo định lí 3.1 sẽ có một cơ sở để trong cơ sở đó

$$\omega(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n^2$$

Do đó, nếu mọi $\Delta_m > 0$ thì $\omega(x)$ xác định dương theo định lí 3.3 ; nếu $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$ thì $\omega(x)$ xác định âm theo định lí 3.4.

Ngược lại, nếu $\omega(x)$ xác định dương (hoặc âm), xét định thức con chính cấp m

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

Gọi X_m là không gian vectơ con của X sinh bởi các vectơ cơ sở $e_1, e_2, \dots, e_m$. Khi đó $\omega_m(x) = \omega(x), x \in X_m$ cũng là một dạng toàn phương xác định dương (hoặc âm). Xét cơ sở mới trong X_m để $\omega_m(x)$ có dạng chính tắc, ma trận của $\omega_m(x)$ trong cơ sở này có dạng

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_m \end{pmatrix}$$

Nếu gọi P là ma trận chuyển từ cơ sở $(e_1, \dots, e_m)$ sang cơ sở chính tắc thì theo (3) §1 ta có

$$b_1 b_2 \dots b_m = \Delta_m |P|^2 .$$

Do đó nếu $\omega_m(x)$ xác định dương thì mọi $b_j > 0$ nên $\Delta_m > 0$. Nếu $\omega_m(x)$ xác định bởi âm thì mọi $b_i < 0$, nên $\Delta_m > 0$ nếu m chẵn, $\Delta_m < 0$ nếu m lẻ. □

§4. KHÔNG GIAN EUCLIDE

1. Định nghĩa.

Cho X là một không gian vectơ thực. Ta gọi một tích vô hướng trên X là một quy tắc đặt hai vectơ bất kì x, y $\in$ X tương ứng với một số thực $(x|y)$ thoả mãn các điều kiện sau đây với mọi x, y, z $\in$ X, $\lambda \in \mathbb{R}$

1) $(x|y) = (y|x)$;

2) $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$;

3) $(x + y\ |z) = (x|z) + (y|z)$;

4) $(x|x) \geq 0$, $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Không gian vectơ thực X cùng một tích vô hướng trên X gọi là một không gian Euclide.

Chú ý rằng, nếu đặt $f(x, y) = (x|y)$ thì f là một dạng song tuyến tính đối xứng trên X. Do đó có thể định nghĩa tích vô hướng là một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương, tức là thoả mãn 4).

Ví dụ.

a) Với mọi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ thuộc $\mathbb{R}^n$, đặt

$$(x \mid y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

ta được một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n$ là một không gian Euclide với tích vô hướng này.

b) Với các hàm f, g liên tục trên đoạn [a, b] đặt

$$(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

ta được một tích vô hướng trên không gian vectơ C[a,b] các hàm liên tục trên đoạn [a,b]. Với tích vô hướng ấy C[a,b] là một không gian Euclide.

2. Độ dài vectơ, góc giữa các vectơ

Cho không gian Euclide X và vectơ x $\in$ X. Ta gọi độ dài hay chuẩn của vectơ x (sinh bởi tích vô hướng trên X) là số

$$|x| = \sqrt{(x|x)}.$$

Định lí 4.1. (Bất đẳng thức Cauchy – Buniakovski). *Với mọi* x, y *thuộc không gian Euclide* X *ta có*

$$(x \mid y)^2 \le |x|^2 |y|^2 .$$

Dấu đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu x và y phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh. Nếu y = 0 thì kết quả là hiển nhiên.

Giả sử $y \neq 0$. Xét vectơ $x - ty$, $t \in \mathbb{R}$. Ta có

$$(x - ty \mid x - ty) = t^2(y \mid y) - 2t(x \mid y) + (x \mid x) \ge 0$$

với mọi t, do đó theo định lí về dấu tam thức bậc hai

$$\Delta' = (x \mid y)^2 - (x \mid x)\,(y, y) \le 0$$

Vậy có bất đẳng thức cần chứng minh.

Theo tính chất (4), dấu đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu y = 0 hoặc tồn tại t để $x - ty = 0$, tức là nếu và chỉ nếu x và y phụ thuộc tuyến tính. □

Định lí 4.2. *Với mọi vectơ* x, y *thuộc không gian Euclide* X *ta có*

$$|x + y| \le |x| + |y|.$$

Chứng minh. Ta có

$$|x + y|^2 = (x + y \mid x + y) = (x \mid x) + 2(x \mid y) + (y \mid y) =$$

$$= |x|^2 + 2(x \mid y) + |y|^2 .$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Buniakovski

$$(x \mid y) \le |x||y|$$

do đó

$$|x + y|^2 \le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2, \text{ hay}$$

$$|x + y| \le |x| + |y|.$$ □

Theo bất đẳng thức Cauchy – Buniakovski ta có

$$\frac{|(x \mid y)|}{|x||y|} \le 1$$

với mọi x, y khác 0. Nếu $x \neq 0$, $y \neq 0$ thì ta định nghĩa góc giữa x và y là

$$\varphi = \arccos \frac{(x|y)}{|x||y|}$$

tức là

$$\cos\varphi = \frac{(x|y)}{|x||y|} \text{ và } 0 \le \varphi \le \pi.$$

Nếu $X = \mathbb{R}^2$ hoặc $X = \mathbb{R}^3$ thì góc giữa các vectơ chính là góc ta đã biết trong hình học giải tích.

Hai vectơ được gọi là trực giao với nhau nếu tích vô hướng của chúng bằng 0. Nếu $x \neq 0$, $y \neq 0$ thì $(x|y) = 0$ khi và chỉ khi góc giữa x và y bằng $\frac{\pi}{2}$. Do đó khi x và y trực giao ta cũng kí hiệu là $x \perp y$.

3. Cơ sở trực giao, cơ sở trực chuẩn

Cho một không gian Euclide X n chiều. Một hệ gồm n vectơ khác 0 của X được gọi là một cơ sở trực giao của X nếu chúng đôi một trực giao.

Một cơ sở trực giao gồm các vectơ có môđun bằng 1 gọi là cơ sở trực chuẩn. Như vậy, $\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn nếu

$$(e_i \mid e_j) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ nếu } i \neq j \end{cases}$$

Nếu $\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở trực giao của X thì $\left\{\frac{e_1}{|e_1|},...,\frac{e_n}{|e_n|}\right\}$ là một cơ sở trực chuẩn của X, gọi là trực chuẩn hoá cơ sở trực giao đã cho.

Mọi cơ sở trực giao của không gian Euclide X đều là cơ sở không gian vectơ X. Thật vậy, ta chỉ cần chỉ ra một cơ sở trực giao $\{e_1,...,e_n\}$ là độc lập tuyến tính. Xét hệ thức

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = 0.$$

Với mọi j ta có

$$(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n | e_j) = (0|e_j) = 0,$$

mặt khác ta cũng có

$$(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n | e_j) = \lambda_j (e_j | e_j),$$

do đó $\lambda_j |e_j|^2 = 0$. Vì $|e_j| > 0$ nên $\lambda_j = 0$ với j = 1, ..., n, tức là $e_1,...,e_n$ độc lập tuyến tính.

Giả sử $E = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của X với mỗi $x \in X$, giả sử

$$x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$$

Khi đó $(x|e_j) = \lambda_j(e_j, e_j) = \lambda_j |e_j|^2 = \lambda_j$ với $j = 1, ..., n$.

Vì vậy ta có

$$x/E = ((x|e_1), (x|e_2), ..., (x|e_n)).$$

Từ một cơ sở $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ bất kì của X có thể xây dựng được một cơ sở trực giao $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ có tính chất $< e_1, ..., e_j > = < f_1, ..., f_j >$ với $j = 1, ..., n$. Phương pháp xây dựng được cho trong định lí sau đây gọi là phương pháp Gram – Schmidt. Một cách tự nhiên, ta có các khái niệm hệ trực giao, hệ trực chuẩn trong một không gian Euclide X. Khi đó phương pháp có thể áp dụng cho một hệ vectơ độc lập tuyến tính bất kì trong X.

Định lí 4.3. *Cho* $\{f_1, ..., f_n\}$ *là cơ sở trong không gian Euclide X. Khi đó* $\{e_1, ..., e_n\}$ *xác định bởi*

$$e_1 = f_1,$$

$$e_i = f_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(f_i|e_k)}{|e_k|^2} e_k, \quad i = 2, ..., n$$

là một cơ sở trực giao của X.

Chứng minh. Vì $f_1, ..., f_n$ độc lập tuyến tính nên dễ thấy $e_i \neq 0$ với mọi $i = 1, ..., n$. Ta có

$$(e_1 | e_2) = \left(f_1 | f_2 - \frac{(f_2|e_1)}{|e_1|^2} e_1\right) = (f_1|f_2) - \frac{(f_2|e_1)}{|e_1|^2}(f_1|e_1)$$

Bởi vì $(f_1|e_1) = (e_1|e_1) = |e_1|^2$, $(f_2|e_1) = (f_1|f_2)$ nên

$$(e_1|e_2) = 0.$$

Giả sử $i > 2$ và các vectơ $e_1, ..., e_{i-1}$ tạo thành một hệ trực giao, ta sẽ chứng minh $e_1, ..., e_{i-1}, e_i$ cũng là một hệ trực giao. Với mỗi p, $1 \leq p \leq i - 1$.

$$(e_i|e_p) = \left(f_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(f_i|e_k)}{|e_k|^2} e_k \,|\, e_p\right) =$$

$$= (f_i \mid e_p) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(f_i | e_k)}{|e_k|^2}(e_k | e_p) =$$

$$= (f_i \mid e_p) - \frac{(f_i | e_p)}{|e_p|^2}(e_p | e_p) = 0.$$

Vậy hệ $e_1, \ldots, e_i$ trực giao. Từ đó theo quy nạp ta có $e_1, \ldots, e_n$ trực giao. □

Ví dụ.

a) Trong $\mathbb{R}^3$ trực giao hoá hệ

$$f_1 = (0, 1, 2),\ f_2 = (1, 1, 0),\ f_3 = (2, 0, 1).$$

Giải. Ta có

$$e_1 = f_1 = (0, 1, 2);$$

$$e_2 = f_2 - \frac{(f_2 | e_1)}{|e_1|^2} e_1 = (1,2,0) - \frac{2}{5}(0,1,2) = \left(1, \frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right);$$

$$e_3 = f_3 - \frac{(f_3 | e_1)}{|e_1|^2} e_1 - \frac{(f_3 | e_2)}{|e_2|^2} e_2 =$$

$$= (2,0,1) - \frac{2}{5}(0,1,2) - \frac{6}{21}\left(1, \frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{12}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{3}{7}\right).$$

b) Trong C[−1, 1) trực giao hoá hệ

$$f_1 = 1,\ f_2 = t,\ f_3 = t^2.$$

Giải. Ta có

$$e_1 = 1;$$

$$e_2 = t - \frac{(t|1)}{|1|^2}.\ 1 = t - \frac{\int_{-1}^{1} t\,dt}{\int_{-1}^{1} dt} = t;$$

$$e_3 = t^2 - \frac{\int_{-1}^{1} t^2 dt}{\int_{-1}^{1} dt}.1 - \frac{\int_{-1}^{1} t^3 dt}{\int_{-1}^{1} dt} t = t^2 - \frac{1}{3}.$$

§5. ĐƯA MA TRẬN ĐỐI XỨNG VỀ DẠNG CHÉO

1. Tính chất của ma trận đối xứng

Cho A là ma trận thực đối xứng, cấp n. Với mọi $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ đặt

$$Ax = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \right)$$

ta được một phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^n$ có ma trận trong cơ sở chính tắc A.

Với mọi $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ta có

$$(Ax|y) = (x|Ay) \qquad (1)$$

Thật vậy

$$(Ax|y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} y_i \right) = (x|Ay).$$

Nếu v_1 và v_2 là hai vectơ riêng ứng với hai trị riêng $\lambda_1 \neq \lambda_2$ của A thì

$$(v_1|v_2) = 0 \qquad (2)$$

Thật vậy, ta có $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2$. Từ đó

$$(Av_1|v_2) = (\lambda_1 v_1|v_2) = \lambda_1 (v_1|v_2)$$

$$(v_1|Av_2) = (v_1|\lambda_2 v_2) = \lambda_2 (v_1|v_2)$$

Theo tính chất (1), $(Av_1|v_2) = (v_1|Av_2)$, do đó

$$\lambda_1 (v_1|v_2) = \lambda_2 (v_1|v_2) \text{ hay } (\lambda_1 - \lambda_2)(v_1|v_2) = 0.$$

Vì $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ nên $(v_1|v_2) = 0$.

Định lí 5.1. *Mọi nghiệm của phương trình đặc trưng của một ma trận thực đối xứng A đều là thực.*

Chứng minh. Giả sử a + bi là một nghiệm của phương trình $|A - \lambda I| = 0$. Khi đó

$$|A - (a + bi)I| = 0 \text{ hay } |A - aI - ibI| = 0.$$

Tương tự như hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với hệ số thực, hệ thuần nhất có ma trận hệ số A – aI – ibI có một nghiệm không tầm thường

$$u + iv = (u_1 + iv_1, \ldots, u_n + iv_n) \neq 0.$$

Bởi vì

$$(A - aI - ibI)(u + iv) = 0$$

nên tách riêng phần thực, phần ảo ta được

$$(A - aI)u + bv = 0, \ (A - aI)v - bu = 0.$$

Từ đó ta có

$$((A - aI)u|v) + b(v|v) = 0 \ ;$$

$$((A - aI)v|u) - b(u|u) = 0.$$

Vì A đối xứng nên A – aI đối xứng, từ đó theo (1) ta có $((A - aI)u|v) = (u|(A - aI)v) = ((A - aI)v|u)$. Trừ vế với vế hai đẳng thức trên ta có

$$b(|u|^2 + |v|^2) = 0.$$

Đẳng thức này cho ta b = 0, vì $|u|^2 + |v|^2 \neq 0$. □

Bởi vì $|A - \lambda I| = 0$ là một phương trình đại số bậc n nên theo định lí 5.1, mọi ma trận đối xứng thực cấp n có đúng n trị riêng kể theo số lần bội.

2. Chéo hoá trực giao ma trận đối xứng

Ma trận vuông P được gọi là trực giao nếu

$$PP^T = I$$

Theo tính chất của ma trận nghịch đảo, nếu P trực giao thì P khả nghịch và

$$P^{-1} = P^T.$$

Vì vậy ta cũng có

$$P^TP = I.$$

Từ tính chất này dễ dàng thấy rằng P trực giao thì P^T trực giao và P, Q là các ma trận vuông cấp n trực giao thì PQ cũng trực giao.

Gọi $P_1, \ldots, P_n$ là các vectơ dòng của P, từ định nghĩa phép nhân ma trận dễ dàng thấy rằng :

Ma trận P trực giao nếu và chỉ nếu hệ $\{P_1, \ldots, P_n\}$ trực chuẩn. (3)

Bằng cách xét P^T ta thấy tính chất (3) cũng đúng với hệ các vectơ cột.

Định lí 5.2. *Mọi ma trận thực, đối xứng* A *đều tồn tại ma trận trực giao* P *sao cho* $P^TAP = P^{-1}AP$ *là ma trận chéo.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo cấp của A.

Với n = 1 kết quả là hiển nhiên.

Giả sử mọi ma trận đối xứng cấp $n - 1$, $n \geq 2$ định lí đúng. Xét ma trận $A = (a_{ij})$ đối xứng, cấp n. Theo định lí 5.1, A có một trị riêng λ_1. Chọn vectơ riêng e_1 ứng với trị riêng λ_1 có $|e_1| = 1$. Khi đó

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1.$$

Bổ sung vào e_1 các vectơ $v_2, ..., v_n$ để được một cơ sở của $\mathbb{R}^n$, sau đó trực giao hoá và trực chuẩn hoá, ta được một cơ sở trực chuẩn $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ của $\mathbb{R}^n$.

Gọi B là ma trận của phép biến đổi tuyến tính A trong cơ sở E. Khi đó

$$B = S^TAS.$$

Với S là ma trận có các cột là $e_1, ..., e_n$. Bởi vì ma trận S trực giao nên

$$B^T = (S^TAS)^T = S^TAS^{TT} = S^TAS = B$$

nghĩa là B đối xứng. Do $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ nên cột thứ nhất của B là $\lambda_1, 0, ..., 0$. Vì B đối xứng nên dòng thứ nhất của B cũng như vậy. Từ đó

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

với $C = \begin{pmatrix} \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$ là ma trận đối xứng cấp $n - 1$. Theo giả thiết quy nạp, tồn tại ma trận trực giao cấp $n - 1$

$$P_o = \begin{pmatrix} p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

sao cho

$$P_o^TCP_o = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

là một ma trận chéo. Đặt

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

dễ dàng thấy P_1 trực giao và

$$P_1^T B P_1 = D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Vì $B = S^T A S$ nên

$$P_1^T S^T A S P_1 = D_\lambda$$

Đặt $P = SP_1$. Vì S, P_1 trực giao nên P trực giao và

$$P^T A P = D_\lambda. \qquad \square$$

Định lí 5.3. *Cho* A *là ma trận thực đối xứng, cấp* n. *Khi đó trong* $\mathbb{R}^n$ *tồn tại một cơ sở trực chuẩn gồm những vectơ riêng của* A.

Chứng minh. Theo định lí 5.2

$$AP = PD_\lambda$$

trong đó P là ma trận trực giao, D_λ là ma trận chéo. Gọi $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ là hệ các vectơ cột của P. Khi đó E là cơ sở trực chuẩn và $Ae_i = \lambda_i e_i$ với i = 1,..., n. Vậy các vectơ thuộc E là vectơ riêng của A. $\square$

Bây giờ ta chỉ ra phương pháp xây dựng cơ sở nói trong định lí 5.3 và cũng là phương pháp tìm ma trận P nói trong định lí 5.2

Cho ma trận đối xứng A. Vì A chéo hoá được nên mỗi trị riêng bội m của A có đúng m vectơ riêng độc lập tuyến tính. Giả sử λ_0 là một trị riêng bội m, chọn m vectơ riêng độc lập ứng với λ_0 và sau đó trực chuẩn hoá hệ m vectơ này ta được một hệ trực chuẩn gồm m vectơ. Hiển nhiên m vectơ này cũng là vectơ riêng ứng với trị riêng λ_0. Tiến hành như vậy đối với tất cả các trị riêng ta được hệ n vectơ $E = \{e_1, \dots, e_n\}$. Từ phương pháp xây dựng và tính chất (2) ta có ngay E là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$. Gọi P là ma trận có các vectơ của E là các cột thì P là trực giao và

$$P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

trong đó λ_i là giá trị riêng tương ứng vectơ riêng e_i.

Ví dụ. Chéo hoá trực giao ma trận đối xứng

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải. Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2 = 0$$

Vậy A có các trị riêng $\lambda = 5$ (đơn) và $\lambda = -1$ (kép).

Với $\lambda = 5$, ta có hệ phương trình tìm vectơ riêng là

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = c \\ x_3 = c \end{cases}$$

Ta được một vectơ riêng độc lập là $v_1 = (1,1,1)$, trực chuẩn hoá ta được

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Với $\lambda = -1$, ta có phương trình tìm vectơ riêng là

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -(c_1 + c_2) \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \end{cases}$$

Ta được hai vectơ riêng độc lập là $v_2 = (-1, 1, 0)$, $v_3 = (-1, 0, 1)$. Trực giao hoá ta được $f_2 = (-1, 1, 0)$

$$f_3 = (-1,0,1), -\frac{1}{2}(-1,1,0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Trực chuẩn hoá ta được $e_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$$e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Từ đó, với

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

ta có

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao

Cho dạng toàn phương $\omega(x)$ trên $\mathbb{R}^n$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là ma trận đối xứng cấp n, $A = (a_{ij})$.

Gọi $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ là cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$ gồm các vectơ riêng của A. P là ma trận có các cột là $e_1, \dots, e_n$. Khi đó P là ma trận trực giao và là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở E.

Trong cơ sở E ma trận của dạng toàn phương $\omega(x)$ là

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

trong đó λ_i là trị riêng ứng với e_i. Vì vậy trong cơ sở này phương trình của $\omega(x)$ có dạng chính tắc

$$\omega(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

Ví dụ. a) Đưa dạng toàn phương

$$\omega(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_3x_1$$

về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao.

Giải. Ma trận của dạng toàn phương là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Giá trị riêng của A là $\lambda = 0$ (kép) và $\lambda = 6$.

Với $\lambda = 0$, hệ phương trình tìm vectơ riêng là

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -c_2 - 2c_1 \\ x_2 = c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases}$$

Ta được hai vectơ riêng độc lập là

$$v_1 = (-1, 1, 0), \; v_2 = (-2, 0, 1).$$

Trực chuẩn hoá ta được $e_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$;

$$e_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Với $\lambda = 6$, hệ phương trình tìm vectơ riêng là

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = c \\ x_3 = 2c \end{cases}$$

Ta được một vectơ riêng độc lập là $v_3 = (1, 1, 2)$, trực chuẩn hoá ta được $e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Từ đó $\omega(y) = 6y_3^2$

với ma trận của phép biến đổi là ma trận trực giao

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ hay } \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}y_3 \end{cases}$$

b) Tìm dạng của đường cong bậc hai

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 = 1.$$

Giải. Ma trận của dạng toàn phương

$$\omega(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2$$

trong cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Phương trình đặc trưng của A

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 3 \end{array}\right.$$

Với $\lambda = 1$ ta được vectơ riêng $v_1 = (1, 1)$ chuẩn hoá ta được $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Với $\lambda = 3$ ta được vectơ riêng $v_2 = (1, -1)$, chuẩn hoá ta được $e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Trong cơ sở (e_1, e_2), phương trình của ω là

$$\omega(\xi, \eta) = \xi^2 + 3\eta^2$$

Từ đó, trong cơ sở trực chuẩn (e_1, e_2) phương trình của đường cong đang xét là

$$\xi^2 + 3\eta^2 = 1.$$

Vậy đường cong là một đường elip có các bán trục là 1 và $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài tập

VI.1. Với mọi $x, y \in \mathbb{R}^2$, đặt

$$f(x, y) = 3x_1y_2 - 2x_1y_2 + 4x_2y_1 - x_2y_2.$$

a) Chứng tỏ f là dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$.

b) Tìm ma trận của f trong cơ sở {(1, 1), (1, 2)}.

VI.2. Trên $\mathbb{R}^3$ cho dạng song tuyến tính

$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3.$$

Tìm ma trận của f

a) Trong cơ sở chính tắc.

b) Trong cơ sở {(1, 1, 1), (1, 1, –1), (1, –1, –1)}.

VI.3. Chứng minh rằng dạng song tuyến tính khác 0 trên $\mathbb{K}^n$ được viết thành tích của hai dạng tuyến tính nếu và chỉ nếu hạng của nó bằng 1.

VI.4. Cho f(x, y) là một dạng song tuyến tính trên không gian vectơ n – chiều X, M là không gian vectơ con k – chiều của X, đặt

$$M' = \{y \in X \mid f(x,y) = 0 \text{ với mọi } x \in M\}.$$

Chứng minh rằng

a) M' là không gian vectơ con của X, dim M' $\geq$ n – k.

b) Nếu f(x, x) $\neq$ 0 với mọi x $\in$ M, x $\neq$ 0 thì $X = M \oplus M'$.

VI.5. Cho dạng song tuyến tính f trên $\mathbb{R}^3$ có ma trận trong cơ sở {(1,0,0), (–1,1,0), (0,–1,1)} là

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

a) Tìm ma trận A của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm a để ma trận A có hai trị riêng.

c) Tìm dạng toàn phương tương ứng với f trong cơ sở chính tắc.

VI.6. Tìm dạng chuẩn tắc của các dạng toàn phương sau :

a) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^3 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

b) $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$

d) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

VI.7. Tìm dạng chính tắc của các dạng toàn phương sau, chỉ rõ phép biến đổi để có dạng chính tắc đó.

a) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$

b) $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 + x_2x_3$

c) $x_1^2 - 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$

d) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.

VI.8. Đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc, chỉ rõ phép biến đổi.

a) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j$. b) $\sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$.

VI.9. Tìm λ để các dạng toàn phương thực sau xác định dương.

a) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

b) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$

c) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$

d) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

VI.10. Xét tính xác định của các dạng toàn phương sau.

a) $-x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2$

b) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

c) $9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$

d) $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$.

VI.11. Tìm m để

$x.y = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + mx_2y_2$ là tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$.

VI.12. Trực giao hóa theo phương pháp Gram-Schmidt.

a) Hệ $\{(1, 2, 3), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

b) Hệ $\{(1, 2, 2, -1), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

VI.13. Tìm góc giữa các vectơ.

a) $x = (1, 1, 2)$, $y = (2, -1, 1)$ trong $\mathbb{R}^3$.

b) $x = (2, -1, 1, -2)$, $y = (3, 0, -1, 0)$ trong $\mathbb{R}^4$.

VI.14. Trên $\mathbb{R}^3$ cho dạng song tuyến tính đối xứng

$$\eta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

Chứng minh $\mathbb{R}^3$ và η là một không gian Euclide. Trực chuẩn hóa cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ theo tích vô hướng η.

VI.15. Cho M là một tập con của không gian Euclide X. Ta gọi phần bù trực giao của M là

$$M^{\perp} = \{x \in X \mid x \perp y \text{ với mọi } y \in M\}.$$

Chứng minh $M^{\perp}$ là không gian vectơ con của X.

VI.16. Chứng minh $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ là không gian Euclide với tích vô hướng

$$(A \mid B) = \mathrm{tr}(AB^T).$$

Trong không gian đó hãy tìm phần bù trực giao của không gian các ma trận chéo, không gian các ma trận đối xứng.

VI.17. Trong không gian Euclide $\mathbb{R}_n[x]$ các đa thức bậc $\leq n$ với tích vô hướng.

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Chứng minh hệ các đa thức Legendre

$$P_0(t) = 1,\ P_k(t) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}\left[(t^2 - 1)^k\right],\ k = 1, \ldots, n$$

là một cơ sở trực giao.

VI.18. Kí hiệu $L^2[0,1]$ là không gian các hàm thực bình phương khả tích trên đoạn $[0, 1]$ với tích vô hướng.

$$(f \mid g) = \int_{0}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Chứng minh các hàm Rademacher

$$r_n(x) = \text{sign}(\sin 2^{n+1}\pi x),\ n \in \mathbb{N}_0$$

lập thành một hệ trực chuẩn trong $L^2[0,1]$.

VI.19. Chéo hóa trực giao các ma trận đối xứng sau

a) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \\ -6 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

VI. 20. Tìm phép biến đổi trực giao đưa các dạng toàn phương về dạng chính tắc.

a) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

b) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

c) $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

d) $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

VI.21. Tìm dạng của các đường bậc hai sau

a) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$

b) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0$

c) $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$

d) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

Chương I

I.1. a) $\varnothing$ là phần tử nhỏ nhất, X là phần tử lớn nhất.

b) Không có phần tử nhỏ nhất, X là phần tử lớn nhất. Phần tử tối tiểu là $\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}$.

c) $\varnothing$ là phần tử nhỏ nhất, không có phần tử lớn nhất. Phần tử tối đại là các tập con có 4 phần tử.

I.2. a) Mọi $x_1, x_2 \in X$

$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \text{ (do g đơn ánh)}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (do f đơn ánh)}$$

Vậy h đơn ánh.

b) $h(X) = f(f(X)) = g(Y)$ (do g toàn ánh)

$= Z$ (do g toàn ánh)

Vậy h toàn ánh.

c) Suy ra từ a) và b).

d) Mọi $x_1, x_2 \in X$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$$\Rightarrow h(x_1) = h(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (do h đơn ánh)}$$

Vậy f đơn ánh.

e) Do h toàn ánh nên

$$h(X) = Z \Rightarrow g(f(X)) = Z$$

$$\Rightarrow g(Y) = Z \text{ (vì } f(X) \subset Y).$$

Vậy g toàn ánh.

I.3. a) Mọi $x \in X$, đặt $f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

$$\Rightarrow (f^{-1})^{-1}(x) = y.$$

Vậy $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ với mọi $x \in X$ hay $(f^{-1})^{-1} = f$.

b) Mọi $z \in Z$, đặt $(g_0f)^{-1}(z) = x$

$$\Rightarrow g_0f(x) = g(f(x)) = z$$

$$\Rightarrow f(x) = g^{-1}(z)$$

$$\Rightarrow x = f^{-1}(g^{-1}(z) = f_0^{-1}g^{-1}(z).$$

Vậy $(g_0f)^{-1}(z) = f_0^{-1}g^{-1}(z)$ với mọi $z \in Z$ hay

$$(g_0f)^{-1} = f_0^{-1}g^{-1}.$$

I.4. Cho X là tập vô hạn. Chọn tùy ý $x_1 \in X$.

Giả sử đã chọn được $x_1, \ldots, x_n$, ta chọn

$$x_{n+1} \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$$

(do X vô hạn nên chọn được x_{n+1}). Ta có

$$D = \{x_n \mid n \in N\} \subset X$$ và D là vô hạn đếm được.

Từ đó ω = Card (D) ≤ Card (X).

I.5. Ánh xạ $f : N \to \mathbf{Z}$, $f(1) = 0$, $f(2n) = n$, $f(2n+1) = -n$ là song ánh nên $\mathrm{Card}(\mathbf{Z}) = \omega$.

Mọi $r \in Q$ đều được viết dưới dạng $r = \frac{a}{b}$, trong đó $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{Z}$. Khi $a = 0$ ta chọn $b = 1$, khi $a \neq 0$ ta chọn sao cho $|a|$ và b nguyên tố cùng nhau. Ta có cách viết $r = \frac{a}{b}$ là duy nhất. Ánh xạ

$$f : Q \to \mathbf{Z}^2,\ f\left(\frac{a}{b}\right) = (a, b)$$

là đơn ánh. Do đó $\mathrm{Card}(Q) \leq \mathrm{Card}(\mathbf{Z}^2) = \omega$.

Theo bài tập 1.4, $\mathrm{Card}(Q) \geq \omega$ nên $\mathrm{Card}(Q) = \omega$.

I.6. Vì ánh xạ $n \to \frac{1}{n}$ là đơn ánh từ N vào [0,1] nên $\mathrm{Card}(N) \leq \mathrm{Card}([0,1])$.

Ta sẽ chứng minh không có một song ánh từ N lên [0,1].

Thật vậy, giả sử có một song ánh $\varphi : N \to [0,1]$.

Với mỗi $n \in N$ ta viết $\varphi(n)$ dưới dạng số thập phân vô hạn.

$$\varphi(n) = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots$$

Xét phần tử $y_0 \in [0,1]$, $y_0 = 0, b_1b_2b_3\ldots$ trong đó

$$b_k = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a_{kk} \neq 1 \\ 2 & \text{nếu } a_{kk} = 1 \end{cases}$$

Ta có $y_0 \neq \varphi(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Mâu thuẫn với φ toàn ánh.

I.7. $f : [0,1] \to [a,b]$, $f(x) = a + x(b - a)$ là song ánh nên $\mathrm{Card}([a,b]) = c$;

$g : (a,b) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{\frac{a+b}{2} - x}{x - a(x - b)}$ là song ánh nên

$\mathrm{Card}((a,b)) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$. Vì $(a,b) \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$

nên $\mathrm{Card}((a,b)) = \mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \mathrm{Card}([a,b]) = c$.

I.8. Ánh xạ $f : X \to \mathcal{P}(X)$, $f(a) = \{a\}$ là đơn ánh nên $\mathrm{Card}(X) \le \mathrm{Card}(\mathcal{P}(X))$. Ta sẽ chứng minh không có một song ánh $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$. Thật vậy nếu φ là song ánh thì đặt $S = \{x \in X \mid x \notin \varphi(x)\}$.

Chọn $a \in X$ sao cho $\varphi(a) = S$. Khi đó nếu $a \in S$ thì mâu thuẫn vì $a \notin \varphi(a) = S$; nếu $a \notin S$ thì ta cũng gặp mâu thuẫn vì $a \in \varphi(a) = S$.

Vậy không tồn tại song ánh $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$.

I.9. a) $\dfrac{7}{5} + \dfrac{6}{5}i$;

b) $\dfrac{1+i}{1-i} = i$, $i^{10} = -1$.

c) $-\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $\left(-\sqrt{3} + i\right)^9 = 2^9.e^{i\frac{15\pi}{2}} = -512i$.

d) $\dfrac{1}{64}\left(\sqrt{3} + i\right)$.

I.10. Ta có $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$. Theo công thức Moivre $i^n = \cos\dfrac{n\pi}{2} + i\sin\dfrac{n\pi}{2}$. Từ đó

$i^{2k} = (-1)^k$, $i^{2k+1} = (-1)^k i$.

I.11. a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\pi}{12}$;

b) $8\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}$;

c) $4\sqrt{2}, \dfrac{7\pi}{4}$;

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \dfrac{19\pi}{12}$.

I.12. a) $\left\{-1, \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

b) $\{\pm 1, \pm i\}$.

c) $r = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ áp dụng công thức.

d) $r = 2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, áp dụng công thức.

I.13. Đặt $(x+yi)^2 = a+bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$.

Từ đó x^2 và $-y^2$ là nghiệm dương và nghiệm âm của phương trình $t^2 - at^2 - \frac{b^2}{4} = 0$. Vậy

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ y^2 = \dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \end{cases},$$

x và y chọn cùng dấu nếu $b > 0$, trái dấu nếu $b < 0$.

I.14. a) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. b) $2 - i, -2 + i$. c) $-2 \pm 3i$.

I.15. Vì $\alpha_j^n = z \Leftrightarrow \left(\bar{\alpha}_j\right)^n = \bar{z}$ nên ta có kết quả.

I.16. Đặt $\mathrm{Ln}z = u + iv$, ta có

$$e^u e^{iv} = r e^{i\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} e^u = r \\ v = \varphi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \ln r \\ v = \varphi + k2\pi \end{cases}.$$

Vậy $\mathrm{Ln}z = \{\ln r + i(\varphi + k2\pi) | k \in \mathbf{Z}\}$.

I.17. a) $e^z = 2 \Leftrightarrow z \in \mathrm{Ln}2 = \{\ln 2 + ik2\pi | k \in \mathbf{Z}\}$

b) $\cos z = 2 \Leftrightarrow \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$

$$\Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 4e^{iz} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow iz \in \mathrm{Ln}\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow z \in \left\{k2\pi + i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) | k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

c) $z \in \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi + i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) | k \in \mathbf{Z}\right\}$.

d) $z \in \{-\ln 2 + i(\pi + 2k\pi) | k \in \mathbf{Z}\}$.

Chương II

II.1. a) $\begin{pmatrix}-12 & 24\\ -60 & 12\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}-15 & 4\\ -5 & -2\\ 20 & -14\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}-4 & 4 & -4\\ -11 & 2 & 16\end{pmatrix}$; d) $\begin{bmatrix}5 & -4\\ -10 & 10\end{bmatrix}$.

II.2. a) $\begin{bmatrix}-2 & -2 & -1\\ \frac{7}{2} & 0 & -2\end{bmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-\frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9}\\ -\frac{8}{9} & -\frac{11}{9} & -\frac{11}{9}\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}\frac{20}{9} & \frac{14}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{44}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{11}{9}\end{pmatrix}$; d) Vô nghiệm.

II.3. a) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ nếu n chẵn ; $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ nếu n lẻ. b) $\begin{pmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha\\ \sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$.

II.4. a) Đặt $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Ta có $A^2 = \begin{pmatrix}a^2+bc & (a+d)b\\ (a+d)c & d^2+bc\end{pmatrix}$.

Do đó $A^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}a = -d\\ a^2+bc = 0\end{cases}$.

b) $A = \pm I$ hoặc $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$ trong đó $a^2+bc = 1$.

II.5. Chọn $B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, suy ra A có dạng $A = \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}$

Chọn $B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, suy ra a = d. Vậy A có dạng A = aI. Dễ thấy tất cả ma trận dạng này đều thỏa mãn bài toán.

II.6. Giả sử $A^r = 0$, $B^r = 0$.

Vì $(AB)^r = A^rB^r = 0.B^r = 0$ nên AB lũy linh.

Do AB = BA nên dễ thấy

$$(A+B)^{r+s-1} = \sum_{k=0}^{r+s-1} C_{r+s-1}^{k} A^{r+s-1-k}B^k.$$

Do $(r + s - 1 + k) + k = r + s - 1$ nên hoặc $k \geq s$ hoặc
$r + s - 1 + k \geq r$.

Suy ra mỗi số hạng đều bằng 0 nên $(A+B)^{r+s-1} = 0$.

II.7. a) $\operatorname{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(A+B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(A)_{ii} + \sum_{i=1}^{n}(B)_{ii}$

$= \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$

b) $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(A)_{ij}(B)_{ji}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(B)_{ji}(A)_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}(BA)_{jj}$

$= \operatorname{tr}(BA)$

c) Theo b), $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$, trong khi đó $\operatorname{tr}(I) = n$.

Do đó $AB - BA \neq I$.

II.8. a) $4ab$; b) $-2b^3$; c) 1 ; d) $\cos(\alpha + \beta)$; e) $\sin(\alpha - \beta)$; f) 0.

II.9. a) 0 ; b) -3 ; c) $3i\sqrt{3}$.

II.10. a) 0 ; b) 0 ;
c) $(b - a)(c - a)(c - b)$; d) $(ab + ac + bc)(b - a)(c - a)(c - b)$.

II.11. a) 150 ; b) $9\sqrt{10}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$;
c) $-(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$; d) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac + 2d$.

II.12. a) $n!$ (cộng dòng 1 vào các dòng khác)

b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n$ (dòng 1 nhân (-1) cộng vào các dòng khác).

c) Khai triển theo dòng 1 : $D_n = 3D_{n-1} + 4D_{n-2}$.

Từ đó $D_n = \frac{1}{5}\left(4^{n+1} + (-1)^n\right)$. Có thể sử dụng bài tập II.18.

d) $D_n = \frac{1}{4}(5^{n+1} - 1)$.

II.13. a) $\left[x + (n-1)a\right](x-a)^{n-1}$. b) $(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$.

c) $(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$. d) $(a_1 + \ldots + a_n)x^{n-1}$.

e) $a_1(x - a_2)\ldots(x - a_n)$. f) $(a+b)a(a-b)^{n-1}$

II.14. a) Lấy dòng n – 1 nhân với x_1 cộng vào dòng n, sau đó lấy dòng n – 2 nhân với x_1 cộng vào $n-1, \ldots,$ tiếp tục như vậy cho đến dòng thứ 2. Ta có

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & x_2 - x_4 & \ldots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_n(x_n - x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1).D_{n-1}.$$

Từ đó suy ra $D_n = \prod\limits_{i>j}(x_i - x_j)$.

b) Phương trình có n nghiệm là $a_1, \ldots, a_n$.

II.15. a) Lấy cột 1 nhân với (–1) cộng vào cột 2 và cột 3, định thức nhận được có hai cột tỉ lệ với nhau.

b) Với mỗi j, viết cột thứ j thành tổng của các cột đơn, tức là trong mỗi cột đó, số mũ của a_j bằng nhau. Sau đó viết định thức thành tổng của các định thức có các cột chỉ là cột đơn. Do $\deg f_i \le n-2$, nên có không quá n – 1 cột đơn độc lập, từ đó trong n cột của mỗi định thức số hạng, có ít nhất hai cột tỉ lệ với nhau. Vậy chúng đều bằng không.

II.16. a) $(3, -1, 2)$; b) $(1, 2, -2)$;

c) $(-2, 0, 1, -1)$; d) $\left(\frac{2}{3}, -1, \frac{3}{2}, 0\right)$.

II.17. a) Định thức có 6 số hạng, giá trị tuyệt đối bằng 1, ít nhất hai số hạng trái dấu nhau. Do đó định thức không quá 4. Giá trị đó đạt được vì

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

b) Khai triển định thức chỉ có nhiều nhất ba số hạng dương. Chúng cũng không bằng 1 tất cả vì khi đó định thức bằng 0. Vậy định thức không quá 2. Giá trị này đạt được vì

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

II.18. a) Dễ dàng.

b) Ta có $p = \alpha + \beta$, $q = -\alpha\beta$, nên từ $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$ suy ra

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2}), \qquad (1)$$

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}). \qquad (2)$$

Từ (1), (2), do cách xác định D_n, suy ra

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-2}(D_2 - \beta D_1),$$

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1).$$

• Nếu $\alpha \neq \beta$ thì nhân đẳng thức thứ nhất với α, đẳng thức thứ hai với β rồi trừ cho nhau, ta được

$$D_n = \frac{\alpha^{n-1}(D_2 - \beta D_1)}{\alpha - \beta} + \frac{\beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1)}{\beta - \alpha}.$$

• Nếu $\alpha = \beta$ thì từ (1) và (2) ta có

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}).$$

Từ đó $D_n - \alpha D_{n-1} = A\alpha^{n-1}$ với $A = D_2 - \alpha D_1$. (3)

Thay n bởi n − 1 ta có

$$D_{n-1} = \alpha D_{n-2} + A\alpha^{n-3}.$$

Thế biểu thức này vào (3) ta đi đến

$$D_n = \alpha^2 D_{n-2} + 2A\alpha^{n-3}$$

Tiếp tục quá trình này ta nhận được

$$D_n = \alpha^{n-1}D_1 + (n-1)A.\alpha^{n-2}$$

$$= (n-1)\alpha^{n-2}D_2 - (n-2)\alpha^{n-1}D_1.$$

II.19. a) Ta có $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$, $D_1 = 1$, $D_2 = 2$. (Vậy $\{D_n\}$ là dãy Fibonacci), $\alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Do đó

$$D_n = \frac{2}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

b) $\cos n\alpha$.

II.20. Ta có $|AB| = |A|\,|B| = 1$. Do đó $|A| \neq 0$ và vì vậy A khả nghịch. Từ đó $A^{-1}(AB) = A^{-1}I$. Vậy $A^{-1} = B$.

II.21. a) Ta có $(A^9)^9 = I$, $(A^{20})^4 = I$. Từ đó $A = I$.

b) Theo bài tập II.20, A, B khả nghịch. Từ $A^2B^3 = A^3B^7$ suy ra $AB^4 = I$. Vì $A^2B^3 = I$ nên $AB^4 = A^2B^3$ và từ đó $A = B$.

Thay vào điều kiện đã cho ta có :

$$A^5 = A^{12} = I \Rightarrow A^{25} = I = A^{24} \Rightarrow A = I.$$

II.22. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$ b) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

II.23. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & (-1)^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ d) $\dfrac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2-n \end{pmatrix}$.

II.24. a) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

II.25. $A^2 = I$. Từ đó $A^n = I$ nếu n chẵn, $A^n = A$ nếu n lẻ.

II.26. a) Thử trực tiếp.

b) Nếu $A^n = 0$ thì $|A| = 0$. Theo a), ta có

$$A^2 = (a+d)A.$$

Nếu $a + d = 0$ thì $A^2 = 0$. Nếu $a + d \neq 0$ thì $A^n = (a+d)A^{n-1} = 0$ suy ra $A^{n-1} = 0$. Tiếp tục như vậy ta có $A^2 = 0$.

II.27. a) 2 ; b) 3.

II.28. a) 3 ; b) 3.

II.29. a) $x_1 = \dfrac{x_3 - 9x_4 - 2}{11}$, $x_2 = \dfrac{-5x_3 + x_4 + 10}{11}$; x_3, x_4 tùy ý.

b) $x_3 = 22x_1 - 33x_2 - 11$, $x_4 = -16x_1 + 24x_2 + 8$; x_1, x_2 tùy ý.

c) Hệ có nghiệm duy nhất $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

d) Vô nghiệm.

II.30. a) $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -2$ hệ có nghiệm duy nhất

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda + 2}.$$

$\lambda = 1$ hệ có nghiệm : $x_1 = 1 - x_2 - x_3$; x_2, x_3 tùy ý.

$\lambda = -2$ hệ vô nghiệm.

b) $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -3$ hệ có nghiệm duy nhất

$$x_1 = \frac{2 - \lambda^2}{\lambda(\lambda+3)},\ x_2 = \frac{2\lambda - 1}{\lambda(\lambda+3)},\ x_3 = \frac{\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda(\lambda+3)}$$

$\lambda = 0$ hoặc $\lambda \neq -3$ hệ vô nghiệm

c) Nếu a, b, c đôi một khác nhau thì theo định thức Vandermonde, hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)},\ y = \frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)},\ z = \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Nếu chỉ hai trong các số a, b, c, d khác nhau và $a \neq b$ hoặc $a \neq c$ hoặc $b \neq c$ thì hệ có nghiệm phụ thuộc một tham số.

Nếu $a = b = c = d$ thì hệ có nghiệm phụ thuộc hai tham số $x = 1 - y - x$; y, z tùy ý.

Nếu tồn tại hai trong các số a, b, c khác nhau và nếu d không bằng một trong các số đó hoặc $a = b = c \neq d$ thì hệ vô nghiệm.

d) Nếu $D = abc - a - b - c + 2 \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

$$x = \frac{(b-1)(c-1))}{D},\ y = \frac{(a-1)(c-1)}{D},\ z = \frac{(a-1)(b-1)}{D}.$$

II.31. a) Theo định lí Kronecker – Capelli.

b) Theo định lí Kronecker – Capelli, nếu hệ có nghiệm thì $r(A) \leq$ số phương trình $<$ số ẩn $= n$.

Do đó hệ có vô số nghiệm phụ thuộc $n - r(A) \geq 1$ tham số.

Chú ý rằng hệ có số ẩn nhiều hơn số phương trình cũng có thể vô nghiệm. Chẳng hạn hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

có số ẩn nhiều hơn số phương trình nhưng vô nghiệm.

II.32. Vì $\overline{A}$ có m dòng nên $m = r(A) \leq r(\overline{A}) \leq m$.

Từ đó $r(A) = r(\overline{A})$ và hệ có nghiệm.

Chương III

III.1. b) Xét quan hệ tuyến tính

$$\lambda_1 f_{a_1} + \cdots + \lambda_k f_{a_k} = 0$$

Suy ra $(\lambda_1 f_{a_1} + \cdots + \lambda_k f_{a_k})(a_j) = 0$ với mọi $j = 1, \ldots, k$. Từ đó $\lambda_j f_{a_j}(a_j) = \lambda_j = 0$ với mọi $j = 1, \ldots, k$.

c) Theo b), $\{f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}\}$ độc lập tuyến tính.

Mọi $f \in M(A)$ ta có

$$f = \lambda_1 f_{a_1} + \cdots + \lambda_n f_{a_n}, \text{ trong đó } \lambda_i = f(a_i).$$

Vậy $\{f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}\}$ cũng là hệ sinh.

III.2. $1.(1,1) = (1.1, 0) = (1, 0) \neq (1,1)$ nên V với các phép toán đã cho không phải là không gian vectơ.

III.3. b) Cơ sở là $\{x\}$, $x \in X$, $x \neq 1$.

c) X không phải là không gian con của $\mathbb{R}^1$ (vì $X \subset \mathbb{R}^1$ nhưng phép toán trên X khác phép toán trên $\mathbb{R}^1$).

III.4. b) Đặt $e_i = (\delta_{in})$, trong đó $\delta_{nn} = 1$, $\delta_{in} = 0$ nếu $n \neq i$.

Dễ thấy hệ $(e_i)_{i \in N}$ độc lập tuyến tính có vô hạn vectơ.

c) F, G là không gian con ; H, I không phải là không gian con.

III.5. Kiểm theo tiêu chuẩn không gian con.

III.6. a), b), e) là không gian con, các trường hợp khác không phải.

III.7. Lấy $x \in M$, $x \neq 0$. Ánh xạ $f : \mathbb{K} \to M$, $f(\lambda) = \lambda x$ là đơn ánh. Do đó $\mathrm{Card}(\mathbb{K}) \leq \mathrm{Card}(M)$

III.8. a) $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ là một cơ sở đếm được của $\mathbb{K}[x]$.

b) Giả sử $\{e_n\}_{n \in N}$ là một cơ sở đếm được của C[0, 1]. Trang bị cho C[a, b] chuẩn sup. Khi đó C[a, b] là không gian đầy đủ. Đặt $M_n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$.

Ta có $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = C[a, b]$ và M_n đúng trong C[a, b].

Theo định lí Baire về phạm trù, tồn tại n_o sao cho phần trong của M_{n_o} khác rỗng. Từ đó tồn tại số $r > 0$ sao cho hình cầu tâm 0, bán kính r của C[a, b] nằm trong M_{n_o}. Suy ra $M_{n_o} = X$. Ta gặp mâu thuẫn vì $\dim M_{n_o} = n_o$.

III.9. Chọn $a \in M_1 \cap M_2$, $a \neq 0$. Khi đó mọi $v \in M_1 + M_2$, $v = v_1 + v_2$ ta cũng có

$$v = (v_1 + a) + (v_2 - a),$$

$$v_1 + a \in M_1,\ v_1 + a \neq v_1 \text{ và } v_2 - a \in M_2,\ v_2 - a \neq v_2.$$

III.10. b) Một cơ sở của X_n là các ma trận E_{ij} có phần tử (i, j) bằng phần tử (j, i) bằng 1, các vị trí khác bằng 0. Có $\frac{n^2 + n}{2}$ ma trận như vậy. Do đó $\dim X_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Một cơ sở của Y_n là các ma trận E_{ij}, $i < j$ có phần tử (i, j) bằng 1, phần tử (j, i) bằng -1. Có $\frac{n^2 - n}{2}$ ma trận như vậy. Do đó $\dim Y_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

c) Dễ thấy $X_n \cap Y_n = \{0\}$. Với mọi

$M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n$, đặt

$$d_{ij} = \frac{m_{ij} - m_{ji}}{2}, \ i < j$$

Chọn $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ theo cách sau

$a_{ij} = m_{ij} - d_{ij}$, $a_{ji} = m_{ji} + d_{ij}$ nếu $i < j$, $a_{ii} = m_{ii}$;

$b_{ij} = d_{ij}$, $b_{ji} = -d_{ij}$ nếu $i < j$, $b_{ii} = 0$.

Ta có $A \in X_n$, $B \in Y_n$ và $A + B = M$.

Vậy $\mathcal{M}_n = X_n \oplus Y_n$.

III.11. a) $AB = BA \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma y - \beta z = 0 \\ (\delta - \alpha)y - \beta(t - x) = 0 \\ (\alpha - \delta)z + \gamma(t - x) = 0 \end{cases}$.

Coi đây là một hệ thuần nhất của ba ẩn y, z, t − x, vì

$$\begin{vmatrix} \gamma & -\beta & 0 \\ \delta - \alpha & 0 & -\beta \\ 0 & \alpha - \delta & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

nên $AB = BA \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma y - \beta z = 0 \\ (\delta - \alpha)y - \beta(t - x) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = k\beta \\ z = k\gamma \\ x - t = k(\alpha - \delta) \end{cases} \quad (\text{đặt } y = k\beta, \text{ do } \beta \neq 0).$$

b) Ta có

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & k\beta \\ k\gamma & x - k(\alpha - \delta) \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & \delta - \alpha \end{pmatrix}$$

$$= x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\alpha}{\beta} & \frac{\delta - \alpha}{\beta} \end{pmatrix}$$

Vì $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\alpha}{\beta} & \frac{\delta - \alpha}{\beta} \end{pmatrix}$ độc lập tuyến tính nên tập tất cả các ma trận B giao hoán được với A là một không gian vectơ con 2 chiều của $\mathcal{M}_2$.

III.12. Giả sử tóm lại, tồn tại $x_1 \in E \setminus F$ và $x_2 \in F \setminus E$. Do $E \cup F$ là không gian con nên $x_1 + x_2 \in E \cup F$. Khi đó hoặc $x_1 + x_2 \in E$, suy ra $x_2 \in E$; hoặc $x_1 + x_2 \in F$, suy ra $x_1 \in F$. Cả hai trường hợp đều gặp mâu thuẫn.

III.13. Vì $E + F \neq E \cap F$ nên $E \neq F$. Từ đó $E \cap F$ là không gian con thực sự của E hoặc F. Ta giả sử $E \cap F \neq E$. Khi đó

$$\dim(E + F) \geq \dim E \geq \dim(E \cap F) + 1 .$$

Từ giả thiết suy ra $\dim E = \dim(E + F)$.

Vì $E \subset E + F$ nên $E = E + F$. Từ đó ta cũng có $F \subset E$ hay $E \cap F = F$.

III.14. Chú ý rằng về mặt tập hợp, $X_{\mathbb{R}} = X$.

a) Giả sử $\{v_1, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính trong X. Khi đó mọi quan hệ tuyến tính tùy ý trong $X_{\mathbb{R}}$

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 , \ \lambda_j \in \mathbb{R} ,$$

cũng là quan hệ tuyến tính trong X. Do đó $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Vậy $\{v_1, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính trong $X_{\mathbb{R}}$.

Điều ngược lại không đúng : Lấy tùy ý $x \in X$, $x \neq 0$. Khi đó $\{x, ix\}$ độc lập tuyến tính trong $X_{\mathbb{R}}$ vì mọi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\lambda x + \mu(ix) = 0 \quad \Rightarrow (\lambda + \mu i)x = 0 \Rightarrow \lambda + \mu i = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = \mu = 0 .$$

Tuy nhiên $\{x, ix\}$ không độc lập tuyến tính trong X vì có quan hệ tuyến tính không tầm thường

$$1.x + i.(ix) = 0.$$

Nếu S là hệ sinh của $X_{\mathbb{R}}$ thì mọi $x \in X$, tồn tại $v_1, \ldots, v_n \in S$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ sao cho $x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$.

Vậy $x \in \langle S \rangle$ trong X.

Điều ngược lại không đúng : Lấy tùy ý $x \in X$, $x \neq 0$.

Gọi S là cơ sở của X, $x \in S$. Khi đó $ix \notin S$ (do $\{x, ix\}$ phụ thuộc tuyến tính trong X). Dễ dàng thấy S là hệ sinh của X và $ix \notin \langle S \rangle$ trong $X_{\mathbb{R}}$.

b) Dễ dàng kiểm tra B' là hệ sinh và độc lập tuyến tính.

III.15. a) $v_3 = v_1 + v_2$ nên $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle = \{(x, 0, y, -x - y) | x, y \in \mathbb{R}\}$.

b) $v \notin \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

III.16. Chứng minh $v_1, v_2 \in \langle v_3, v_4 \rangle$ và $v_3, v_4 \in \langle v_1, v_2 \rangle$.

Chú ý rằng $w \in \langle u, v \rangle \Leftrightarrow r(u, v, w) = r(u, v)$.

III.17. Vì số vectơ khác 3 nên a) và d) không phải là cơ sở. Hệ b) không là cơ sở vì phụ thuộc tuyến tính. Hệ c) có đúng 3 vectơ và độc lập tuyến tính nên là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

III.18. a) S độc lập tuyến tính và là hệ sinh của M.

b) Tìm điều kiện để T độc lập tuyến tính. Ta có T độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow a_1 \neq 0$.

III.19. a) $v/S = \left(-\frac{3}{2}, 2, 5\right)$; b) $v/S = \left(1, \frac{5}{3}, -2\right)$.

III.20. a) (1, −1, 2) ; b) (11, 2, −3) ; c) (c, b − c, a − b).

III.21. (−7, 11, −21, 30).

III.22. (4, −9, −8).

III.23. $r(v_1, v_2, v_3) = 2 \Rightarrow \dim V = 2$; $r(v_1, v_2) = 2$ nên một cơ sở của V là $\{v_1, v_2\}$.

III.24. Kí hiệu $B = \{1, x, x^2, x^3\}$, B là một cơ sở của $\mathbb{R}_3[x] \subset \mathbb{R}[x]$. Ta có

$$f_1/B = (1, 4, -2, 1),\ f_2/B = (-1, 9, -3, 2),$$

$$f_3/B = (-5, 6, 0, 1),\ f_4/B = (5, 7, -5, 2).$$

Do đó $r(f_1, f_2, f_3, f_4) = r\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 9 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 0 & 1 \\ 5 & 7 & -5 & 2 \end{pmatrix} = 2$.

Ta có dim V = 2 và một cơ sở của V là $\{f_1, f_2\}$.

III.25. Ta có dim U = 2, dim V = 2 và dim (U + V) = 3 (bằng hạng của 6 vectơ sinh ra U và sinh ra V). Từ đó

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) = 1.$$

Vì $U = \langle (1, 1, 0, -1), (1, 2, 4, 0) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$

$V = \langle (3, 2, 2, -3), (2, 3, 4, -1) \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$

nên $v \in U \cap V \Leftrightarrow$ Tồn tại $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - \lambda_3 v_3 - \lambda_4 v_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 - 3\lambda_4 = 0 \\ 4\lambda_2 - 2\lambda_3 - 4\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = c,\ \lambda_2 = c,\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = c,\ c \in \mathbb{R}$$

Vậy $v = c(v_1 + v_3) = cv_4$. Từ đó

$$U \cap V = \langle v_4 \rangle.$$

Một cơ sở của $U \cap V$ là $\{(2, 3, 4, -1)\}$.

III.26. a) $x_1 = 8x_3 - 7x_4$, $x_2 = -6x_3 + 5x_4$ (x_3, x_4 tùy ý). Một hệ nghiệm cơ bản là

$\{(8, -6, 1, 0), (-7, 5, 0, 1)\}$.

b) Hệ chỉ có nghiệm tầm thường $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Không có hệ nghiệm cơ bản.

c) $x_3 = -\frac{5}{2}x_1 + 5x_2$, $x_4 = \frac{7}{2}x_1 - 7x_2$ (x_1, x_2 tùy ý).

Một hệ nghiệm cơ bản là.

$$\left\{\left(1, 0, -\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right), (0, 1, 5, -7)\right\}$$

d) Nghiệm tổng quát

$$x_1 = x_4 - x_5,\ x_2 = x_4 - x_6,\ x_3 = x_4\ (x_4, x_5, x_6 \text{ tùy ý})$$

Một hệ nghiệm cơ bản là

$$\{(1,1,1,1,0,0), (-1,0,0,0,1,0), (0,-1,0,0,0,1)\}.$$

III.27. a) $r(A) = 2$ và $r(e_1, e_2) = 2$ nên $\{e_1, e_2\}$ là cơ sở của M.

b) $v \notin M$ vì phương trình $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = v$ vô nghiệm.

c) (2, 3).

d) Hệ có nghiệm

$$\Leftrightarrow r\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -5 & z_1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & z_2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & z_3 \end{array}\right) = r(A) = 2$$

$$\Leftrightarrow r\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -5 & z_1 \\ 0 & 5 & 5 & 10 & z_2 - 2z_1 \\ 0 & 4 & 4 & 8 & z_3 - 2z_1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow r\left(\begin{array}{cccc|l} 1 & -2 & -1 & -5 & z_1 \\ 0 & 5 & 5 & 10 & z_2 - 2z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2z_1 + 4z_2 - 5z_3 \end{array}\right) = 2$$

$\Leftrightarrow 2z_1 + 4z_2 - 5z_3 = 0$.

Vậy $D = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2z_1 + 4z_2 - 5z_3 = 0\}$.

e) D là không gian nghiệm của một hệ thuần nhất nên là không gian con của $\mathbb{R}^3$. Hạng của hệ này bằng 1 do đó

$$\dim D = 3 - 1 = 2.$$

III.28. Đặt $B = (b_{ij})$. Khi đó $AB = 0$ tương đương với một hệ thuần nhất n^2 phương trình, n^2 ẩn số, có ma trận dạng

$$\begin{pmatrix} A & & O \\ & \ddots & \\ O & & A \end{pmatrix}.$$

Theo định lý Laplace, $\det \begin{pmatrix} A & & O \\ & \ddots & \\ O & & A \end{pmatrix} = (\det A)^n = 0$.

Do đó hệ có nghiệm không tầm thường. Vậy tồn tại $B \neq 0$ để $AB = 0$.

Chương IV

IV.1. a), c), d), e) là ánh xạ tuyến tính ; b) không phải.

IV. 2. a), b) là ánh xạ tuyến tính ; c), d) không phải.

IV. 3. b) $\operatorname{Ker} f = \langle(-3, 1, 4, 6)\rangle$; $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

IV.4. a) $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 5x_1 - 3x_2)$.

b) $f(x_1, x_2, x_3) = (30x_1 - 10x_2 - 3x_3,\ -9x_1 + 3x_2 + x_3)$.

c) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - 2x_3,\ x_1, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3)$.

IV.5. Không tồn tại vì

$$v_3 = f(u_3) = f((-1)u_1 + (-1)u_2) \neq (-1)f(u_1) + (-1)f(u_2).$$

IV.6. Dễ thấy $e_1 = (1,2,3,4)$, $e_2 = (0,1,1,2)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$. Ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(e_1) = f(e_2) = 0$, $f(e_3) = v_3$, $f(e_4) = v_4$, v_3, v_4 là vectơ khác không tùy ý thuộc $\mathbb{R}^3$, có $\operatorname{Ker} f = \langle e_1, e_2 \rangle$. Rõ ràng f không duy nhất.

IV.7. Gọi (e_1, e_2, e_3) là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Các biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$.

$$e_1 \mapsto (1,-1,1),\ e_2, e_3 \mapsto (1,2,2)$$

hoặc

$$e_1, e_2 \mapsto (1,-1,1),\ e_3 \mapsto (1,2,2)$$

đều có ảnh là $\langle (1,-1,1),(1,2,2) \rangle$. Vậy biến đổi tuyến tính có tính chất đó tồn tại nhưng không duy nhất.

IV.8. a) f không đẳng cấu

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

b) $\operatorname{Ker} f = \langle (1,0,-1) \rangle$, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

$\operatorname{Im} f = \langle (1,1,1),(-1,0,1) \rangle$, $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

IV.9. a) $\varphi(g) = (fg)'$. Dễ thấy φ là biến đổi tuyến tính.

b) $\operatorname{Ker}\varphi = \{ g \in \mathbb{R}[x] \mid (fg)' = 0 \}$

$= \{ g \in \mathbb{R}[x] \mid fg = c,\ c \in \mathbb{R} \}$.

Vậy $\deg(f) \geq 1$ thì $\operatorname{Ker} f\varphi = \{0\}$; $f = a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ thì $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}$; $f = 0$ thì $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}[x]$.

IV.10. a) Ma trận của f trong cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Từ đó $f^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}x_1, -\frac{1}{2}x_1 + x_2, x_1 + x_2 - x_3 \right)$.

b) Ma trận của $(f^2 - I)(f - 2I)$ trong cơ sở chính tắc là

$$(A^2 - I_3)(A - 2I_3) = O_3,$$

do đó có đẳng thức cần chứng minh.

IV.11. a) Đặt $E_{ij} \in \mathcal{M}_2(k)$ là ma trận có phần tử thứ (i, j) bằng 1, các phần tử khác bằng 0. $\{E_{ij} | i, j = 1, 2\}$ là cơ sở của V. Ta có

$$f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},\ f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},\ f(E_{21}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$ Vì $f(E_{11}) = -f(E_{21})$, $f(E_{12}) = -f(E_{22})$ nên $r(f) = 2$.

b) $f^2(A) = B^2A$.

IV.12. $r(g_0f) = \dim g_0f(\mathbb{R}^3) = \dim g(f(\mathbb{R}^3)) \leq \dim g(\mathbb{R}^2) \leq 2$ nên g_0f không khả nghịch.

IV. 13. Chọn f và g có ma trận trong cơ sở chính tắc lần lượt là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

IV.14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

IV. 15. b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $v = v_1$, $v/E = (1,0,0)$; $v/E' = (1/2, 1/2, 0)$.

IV. 16. a) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -12 & -8 & -9 \\ 12 & 10 & 8 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

IV. 17. a) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

IV. 18. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

IV. 19. Áp dụng định lí 4.4, tồn tại $a_j \in X$ sao cho $f_i(a_j) = \delta_{ij}$. Dễ dàng thấy $a_j^* = f_j$ và $a_1, \ldots, a_n$ là cơ sở của X.

IV. 20. Dễ thấy $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ thuộc W và

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do đó $f(A) = 3.0 - 0 - 2 . 0 - 2 . 3 = -6$.

IV.21. Đặt $f(z) = f(x+iy) = x$ với mọi $z \in \mathbb{C}$, f là dạng tuyến tính thực trên $\mathbb{C}$. Vì $f(iz) = -y \neq if(z) = ix$ nên f không phải là dạng tuyến tính phức.

IV.22. a) Dễ dàng chứng minh f là tuyến tính. Ta có

$$x \mapsto \alpha - \beta$$
$$x^2 \mapsto 2(\alpha - \beta)x + \alpha^2 - \beta^2$$
$$x^3 \mapsto 3(\alpha - \beta)x^2 + 3(\alpha^2 - \beta^2)x + \alpha^3 - \beta^3.$$

Vì $\alpha - \beta \neq 0$ nên hệ $\{\alpha - \beta, 2(\alpha - \beta)x + \alpha^2 + \beta^2,$

$$3(\alpha - \beta)x^2 + 3(\alpha^2 - \beta^2)x + \alpha^3 - \beta^3\}$$

là một cơ sở của $\mathbb{C}_2[x]$. Vậy ánh xạ là toàn ánh.

b) $ax^3 + bx^2 + cx + d \mapsto 3a(\alpha - \beta)x^2 + \left[3a((\alpha^2 - \beta^2) + 2b(\alpha - \beta)\right]x +$

$$+ \left[a(\alpha^3 - \beta^3) + b(\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha - \beta)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a = b = c = 0$$

Vậy $\operatorname{Ker} f = \{d : d \in \mathbb{C}\} \equiv \mathbb{C}$.

IV.23. $[f] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $[g] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $[h] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $[k] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Biết ma trận của các ánh xạ tuyến tính thì dễ dàng viết được phương trình của nó.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -5 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$; f) $h^n = \begin{cases} h & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ I_{\mathbb{R}^2} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$

Chương V

V.1. a) Trị riêng : 1 ; 2. Vectơ riêng : c(2, 1, 0) ; c(24, 7, 1), $c \neq 0$.

b) Trị riêng : 1. Vectơ riêng : c(1, 1, 1), $c \neq 0$.

c) Trị riêng : 0 ; 6. Vectơ riêng : $(-c_1, -2c_2, c_1, c_2)$, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$; c(1, 1, 2), $c \neq 0$.

d) Trị riêng : 0. Vectơ riêng $(0, c_1, c_2)$, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

V.2. a) $D_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $D_\lambda = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Không chéo hóa được

d) $D_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

V.3. a) Trị riêng : −1. Vectơ riêng : c(1, 1, −1), $c \neq 0$.

b) Trị riêng : 2. Vectơ riêng : (c_1, c_2, c_1), $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

c) Trị riêng : 0 ; 1. Vectơ riêng : c(1, 2, 3) ; c(1, 1, 1), $c \neq 0$.

d) Trị riêng : 1. Vectơ riêng : c(3, 1, 1), $c \neq 0$.

V.4. Giả sử $B = \{v_i\}_{i \in I}$ là một cơ sở của X, ta chỉ cần chứng minh tồn tại $\lambda \in \mathbb{K}$ sao cho $\varphi(v_i) = \lambda v_i$ với mọi $i \in I$. Giả sử $i, j \in I$, $i \neq j$. Khi đó tồn tại $\lambda_i, \lambda_j, \lambda$ sao cho $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, $\varphi(v_j) = \lambda_j v_j$, $\varphi(v_i + v_j) = \lambda(v_i + v_j)$. Từ đó $\lambda_i v_i + \lambda_j v_j = \lambda v_i + \lambda v_j$. Do v_1, v_2 độc lập tuyến tính nên $\lambda_i = \lambda_j = \lambda$.

V.5. Ta có $\varphi(v) = \lambda v$. Do $v \neq 0$ và φ khả nghịch nên $\lambda \neq 0$. Từ đó $\varphi^{-1}(\varphi(v)) = \varphi^{-1}(\lambda v)$ hay $\varphi^{-1}(v) = \dfrac{1}{\lambda} v$.

V. 6. Nếu $\dim X = n$ thì mọi toán tử tuyến tính φ trên X, đa thức đặc trưng $f_\varphi(t)$ có bậc n nên có n nghiệm phức (tính theo số lần bội). Do đó φ có các trị riêng và do đó có các vectơ riêng.

Khi $\dim X = \infty$, kết quả trên không đúng. Ví dụ $\varphi : \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}[t],\ f(t) \mapsto t f(t)$.

$$\varphi(f) = \lambda f \quad \Leftrightarrow t f(t) = \lambda f(t) \text{ với mọi } t \in \mathbb{C}$$

$$\Leftrightarrow f = 0.$$

Vậy φ không có vectơ riêng.

V.7. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ chéo hóa được nếu và chỉ nếu phương trình đặc trưng.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Có hai nghiệm phân biệt hoặc có nghiệm kép thì hệ thuần nhất tìm vectơ riêng phải có hai nghiệm độc lập tuyến tính. Từ đó

a) $(a-d)^2 + 4bc > 0$ hoặc $a = d,\ b = c = 0$

b) $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$ hoặc $a = d,\ b = c = 0$.

V.8. Vì $f_A(t) = f_{A^T}(t)$ nên A và A^T cùng chung trị riêng. Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dễ thấy A và A^T không chung vectơ riêng.

V.9. Giả sử V và W là không gian con bất biến của φ. Khi đó

$$\varphi(V + W) = \varphi(V) + \varphi(W) \subset V + W$$

$$\varphi(V \cap W) = \varphi(V) \cap \varphi(W) \subset V \cap W.$$

V.10. $\varphi(\psi(u)) = \psi(\varphi(u)) \subset \psi(u)$.

V.11. • $v \in \operatorname{Ker}\psi \quad \Rightarrow \varphi(\varphi(v)) = \varphi(\psi(v)) = \varphi(0) = 0$

$$\Rightarrow \varphi(v) \in \operatorname{Ker}\psi$$

Vậy $\varphi(\operatorname{Ker}\psi) \subset \operatorname{Ker}\psi$.

• $\varphi(\operatorname{Im}\psi) = \varphi(\psi(X)) = \varphi(\varphi(X)) \subset \psi(X) = \operatorname{Im}\psi$.

V.12. a) Do $W \subset U$ nên $\varphi(W) = \varphi|_U(W)$. Từ đó

$$\varphi(W) \subset W \Leftrightarrow \varphi|_U(W) \subset W$$

b) • $\varphi(U) \subset U$ nên $\varphi(\varphi(U)) \subset \varphi(U)$

• $\varphi(\varphi^{-1}(U)) \subset U \subset \varphi^{-1}(\varphi(U)) \subset \varphi^{-1}(U)$.

V.13. Giả sử φ có các trị riêng phân biệt là $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Chọn vectơ riêng v_i ứng với λ_i. $E = \{v_1, \dots, v_n\}$ là cơ sở của $\mathbb{K}^n$. Các không gian con sinh bởi một tập con của E đều là không gian con bất biến của φ. Có 2^n không gian con như vậy. φ không còn không gian con bất biến nào khác. Để chứng minh điều đó, xét U là không gian con bất biến bất kì, chỉ cần chứng tỏ nếu $u = a_1 v_{i_1} + \dots + a_k v_{i_k} \in U$, $a_1, \dots, a_k \neq 0$ và $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ thì $v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \in U$. Hiển nhiên khẳng định đúng với k = 1.

Nếu khẳng định đúng với mọi $l < k$ thì $\varphi(u) - \lambda_{i_k} u \in U$ mà

$$\varphi(u) - \lambda_{i_k} u = a_1(\lambda_{i_1} - \lambda_{i_k})v_{i_1} + \dots + a_{k-1}(\lambda_{i_{k-1}} - \lambda_{i_k})v_{i_{k-1}}$$

nên theo giả thiết quy nạp $v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}} \in U$. Kết hợp với $u \in U$ suy ra $v_{i_k} \in U$.

V.14. φ có hai trị riêng là 1 và 2. Ứng với 1 có một vectơ riêng độc lập tuyến tính là $v_1 = (2, 2, -1)$, ứng với 2 có hai vectơ riêng độc lập tuyến tính là $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, -1)$. Suy ra các không gian con bất biến của φ là

• $0, \mathbb{K}^3$.

• $\mathbb{K}v_1$, $\mathbb{K}w$, $w \in \langle v_2, v_3 \rangle$, $w \neq 0$.

• $\langle v_2, v_3 \rangle$, $\langle v_1, w \rangle$, $w \in \langle v_2, v_3 \rangle$, $w \neq 0$.

V.15. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Chương VI

VI.1. b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

VI.2. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

VI.3. Giả sử $f(x,y) = l_1(x).l_2(y)$. Trong đó

$$l_1(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n,\ l_2(x) = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n$$

Ma trận của f trong cơ sở chính tắc là

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

Ma trận này có tất cả các dòng tỉ lệ với nhau nên có hạng bằng 1 (hạng khác 0 do $f \neq 0$).

Ngược lại giả sử hạng của f bằng 1. Khi đó ma trận của f trong cơ sở chính tắc có một dòng i khác 0, các dòng khác là một bội của nó. Khi đó dòng thứ j của ma trận của f là

$$(d_jc_1, d_jc_2, \dots, d_jc_n),$$

trong đó $c_1, \dots, c_n$ không đồng thời bằng 0, $d_i = 1$. Đặt

$$l_1(x) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n,$$

$$l_2(y) = d_1x_1 + \cdots + d_nx_n.$$

Ta có $f(x,y) = l_1(x).l_2(y)$.

VI.4. a) Chọn cơ sở $\{e_1, \dots, e_n\}$ của X sao cho $\{e_1, \dots, e_k\}$ là cơ sở của M. Gọi $A = (a_{ij})$ là ma trận của f trong cơ sở này, $y/\{e_1, \dots, e_n\} = (y_1, \dots, y_n)$. Ta có

$$y \in M' \Leftrightarrow f(x, y) = 0 \text{ với mọi } x \in M \Leftrightarrow f(e_i, y) = 0 \text{ với mọi } i = 1, \dots, k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = 0 \text{ với mọi } i = 1, \dots, k$$

Vậy M' là không gian nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất k phương trình, n ẩn số. Do đó

$$\dim M' \geq n - k.$$

b) Theo a), $f(x, x) \neq 0$ với mọi $x \in M$, $x \neq 0$ thì $M \cap M' = \{0\}$,

$\dim(M + M') \geq k + (n - k) = n$, do đó $X = M \oplus M'$.

VI.5. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$; b) $a = 1$; c) $\omega = x_1^2 + 4x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

VI.6. a) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; b) $y_1^2 - y_2^2$;

c) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$; d) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

VI.7. a) $2y_1^2 + 10y_2^2 + 190y_3^2$;

$$y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3,\ y_2 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_3,\ y_3 = \frac{1}{10}x_3.$$

b) $3y_1^2 - 30y_2^2 + 530y_3^2$;

$$y_1 = x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3,\ y_2 = \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{20}x_3,\ y_3 = \frac{1}{20}x_3.$$

c) $y_1^2 - 9y_2^2 + \frac{31}{9}y_3^2$;

$$y_1 = x_1 + 2x_2 - x_3,\ y_2 = x_2 - \frac{2}{9}x_3,\ y = x_3.$$

d) $y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 - y_3^2$;

$$y_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3,\ y_2 = -x_1 + x_2,\ y_3 = x_3.$$

VI.8. a) $y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \cdots + \frac{n+1}{2n}y_n^2$;

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + \cdots + x_n)$$

$$y_2 = x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + \cdots + x_n)$$

....

$$y_n = x_n$$

b) Nếu n chẵn : $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - \cdots + y_{n-1}^2 - y_n^2$;

$$y_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1} + x_{i+2}) \quad (i = 1, 3, 5, \ldots, n-2),$$

$$y_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} - x_i + x_{i+1}) \quad (i = 2, 4, \ldots, n-2),$$

$$y_{n-1} = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_n), \quad y_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} - x_n).$$

Nếu n lẻ : $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - \cdots + y_{n-2}^2 - y_{n-1}^2$

$$y_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1} + x_{i+2}) \quad (i = 1, 3, 5, \ldots, n-2)$$

$$y_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} - x_i + x_{i+1}) \quad (i = 2, 4, \ldots, n-2)$$

$$y_n = x_n.$$

VI.9. a) $\lambda > 0$; b) $|\lambda| < \sqrt{\frac{5}{3}}$; c) Không tồn tại λ ; d) Không tồn tại λ.

VI.10. a) Xác định âm ; b) Xác định dương ;

c) Xác định dương ; d) Không xác định.

VI.11. $m > 4$.

VI.12. a) $(1, 2, 3)$, $\left(-\frac{2}{7}, \frac{10}{7}, \frac{6}{7}\right)$, $\left(-\frac{9}{10}, 0, \frac{3}{10}\right)$.

b) $(1, 1, -5, 3)$, $(2, 3, -3, 2)$, $(2, -1, -1, -2)$.

VI.13. a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{3}$.

VI.14. $\eta(x, x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 > 0$

với mọi $x \neq 0$ nên η là tích vô hướng trên R^3.

Trực giao hóa của (1, 0), (0, 1) là (1, 0), (2, 1).

Vì $\eta((1,0), (1,0)) = 1$, $\eta((2,1), (2,1)) = 1$ nên (1, 0), (2, 1) cũng là trực chuẩn hóa.

VI.15. $(0|y) = 0$ với mọi $y \in M$ nên $0 \in M^\perp$ Nếu $a, b \in M^\perp$, $\lambda \in \mathbb{R}$ thì mọi $y \in M$.

$$(\lambda a + b|y) = \lambda(a|y) + (b|y) = \lambda.0 + 0 = 0$$

nên $\lambda a + b \in M^\perp$.

VI.16. Đặt $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, ta có

$$(A \mid B) = \mathrm{tr}(AB^\perp) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}.$$

Do đó dễ dàng kiểm tra $(.\,|\,.)$ là một tích vô hướng trên $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Kí hiệu $\mathcal{D}$ là không gian các ma trận chéo cấp n, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$. Ta có

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{D}^\perp &\Leftrightarrow (A \mid D) = 0 \text{ với mọi } D \in \mathcal{D} \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\lambda_i = 0 \text{ với mọi } D \in \mathcal{D} \\ &\Leftrightarrow a_{ii}\lambda_i = 0 \text{ với mọi } \lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\ldots,n \\ &\Leftrightarrow a_{ii} = 0 \text{ với mọi } i = 1,\ldots,n. \end{aligned}$$

Vậy $\mathcal{D}^\perp = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | a_{ii} = 0 \text{ với } i = 1,\ldots,n\}$.

Kí hiệu $\mathcal{S}$ là không gian các ma trận đối xứng cấp n.

Dễ thấy $\mathcal{S}^\perp$ chứa tất cả các ma trận phản đối xứng.

Mặt khác với $A \in \mathcal{S}^\perp$ thì mọi (i, j), chọn $S \in \mathcal{S}$ là ma trận có $s_{ij} = s_{ji} = 1$, các phần tử khác bằng 0, ta có $(A \mid S) = a_{ij} + a_{ji} = 0 \Rightarrow a_{ij} = -a_{ij}$. Suy ra A là ma trận phản đối xứng. Vậy $\mathcal{S}^\perp$ là không gian các ma trận phản đối xứng.

VI.17. Đặt $g_k(t) = (t^2 - 1)^k$. Với mọi j, $0 \le j < k$ đạo hàm bậc j của g_k có chứa nhân tử $t^2 - 1$, do đó $g_k^{(j)}(\pm 1) = 0$. Theo công thức tích phân từng phần

$$\int_{-1}^{1} g_k^{(k)}(t)t^j\,dt = \int_{-1}^{1} t^j\,d\left(g_k^{(k-1)}(t)\right) = t^j g_k^{(k-1)}(t)\Big|_{-1}^{1} - j\int_{-1}^{1} g_k^{(k-1)}(t)\,t^{j-1}dt$$

$$= -j\int_{-1}^{1} g_k^{(k-1)}(t)\,t^{j-1}dt$$

....

$$= (-1)^j j!\int_{-1}^{1} g_k^{(k-j)}(t)\,dt$$

$$= (-1)^j j!\, g_k^{(k-j-1)}(t)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= 0.$$

Vì $g_j^{(j)}(t)$ là đa thức bậc j nên

$$\left(g_k^{(k)}(t)\middle|g_j^{(j)}(t)\right) = \sum_{i\le j}\alpha_i\int_{-1}^{1} g_k^{(k)}(t)\,t^i dt = 0.$$

Hệ $P_0(t), P_1(t), \ldots, P_n(t)$ là hệ trực giao, n + 1 vectơ, nên là cơ sở trực giao của $\mathbb{R}_n[x]$.

VI.18. Với mọi $n \in \mathbb{N}_0$, $(r_n(x))^2 = 1$ hầu khắp nơi, do đó $|r_n| = 1$. Ta sẽ chứng minh $(r_m \mid r_n) = 0$ với mọi $m \neq n$.

Đặt $$\Delta_k^n = \left(\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right),\ k = 0, 1, \ldots, 2^{n+1} - 1.$$

Khi đó $$r_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \Delta_{2m}^n,\ m = 0,1,\ldots,2^n - 1 \\ -1 & \text{nếu } x \in \Delta_{2m+1}^n,\ m = 0,1,\ldots,2^n - 1 \\ 0 & \text{nếu } x = \dfrac{k}{2^{n+1}},\ k = 0,1,\ldots,2^{n+1} \end{cases}$$

Với mọi m > n, trong mỗi khoảng Δ_k^n $\left(\text{có độ dài } \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ chứa 2^{m-n} đoạn Δ_l^m $\left(\text{có độ dài } \dfrac{1}{2^{m+1}}\right)$. Trên mỗi khoảng Δ_k^n, $r_n(x)$ có giá trị không đổi, trong khi đó $r_m(x)$ có 2^{m-n-1} khoảng nhỏ nhận giá trị 1 và có 2^{m-n-1} khoảng nhỏ nhận giá trị −1. Do đó $\int_{\Delta_k^n} r_m(x)r_n(x)dx = 0$ và do đó $\int_0^1 r_m(x)r_n(x)dx = 0$.

VI.19. a) $D_\lambda = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

b) $D_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$

c) $D_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

d) $D_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{4}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

VI.20. a) $3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$,

$x_2 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3$; $x_3 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$.

b) $3y_1^2 + 6y_2^2 + 2y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$,

$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_2$.

c) $9y_1^2 + 12y_2^2 + 18y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$,

$x_2 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3$, $x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3$

d) $3y_1^2 - 6y_2^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}\sqrt{2}\ y_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\ y_3$,

$$x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}\ y_2,\ x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}\sqrt{2}\ y_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\ y_3.$$

VI.21. a) Xét dạng toàn phương $\omega = 5x^2 + 4xy + 8y^2$, có ma trận $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Chéo hóa trực giao ω, ta được ma trận trực giao $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. Sử dụng phép đổi biến

$x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'$, $y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'$ ta có

$$9x'^2 + 4y'^2 - \frac{144}{\sqrt{5}}x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + 80 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9\left(x' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36$$

Đặt $X = x' - \frac{8}{\sqrt{5}}$, $Y = y' + \frac{1}{\sqrt{5}}$, ta có phương trình

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1.$$

Vậy đường bậc hai đã cho là ellip.

b) Parabol ; c) Hyperbol ; d) Parabol.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] G.Birkhoff, S.Mac Lane, *Tổng quan về đại số hiện đại*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1979.

[2] Đậu Thế Cấp, *Toán cao cấp*, Tập 2 : Đại số tuyến tính và Phương trình vi phân, NXB Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, 2002.

[3] Đậu Thế Cấp, *Đại số sơ cấp*, NXB Giáo dục, 2004.

[4] Đậu Thế Cấp, *Cấu trúc đại số*, NXB Giáo dục, 2007.

[5] Đậu Thế Cấp, *Số học*, NXB Giáo dục, 2005.

[6] Đậu Thế Cấp, *Tôpô đại cương*, NXB Giáo dục 2008.

[7] Đậu Thế Cấp, *Giải tích hàm*, NXB Giáo dục 2003.

[8] Đậu Thế Cấp, *Hàm phức và phép tính toán tử*, NXB Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, 2006.

[9] I.M. Gelfand, *Bài giảng đại số tuyến tính*, Nauka, Moscow, 1966 (Tiếng Nga).

[10] Bùi Xuân Hải (chủ biên), Trần Nam Dũng, Trịnh Thanh Đèo, Thái Minh Đường, Trần Ngọc Hội, *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, 2001.

[11] Lê Tuấn Hoa, *Đại số tuyến tính qua các ví dụ và bài tập*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2006.

[12] Ngô Thúc Lanh, *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1970.

[13] G.Lefort, *Bài tập giải tích và đại số*, Tập 1, 2, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1984.

[14] I.V.Porskuryakov, *Problems in linear algebra*, Mir, Moscow, 1978.

[15] Ngô Việt Trung, *Giáo trình đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội 2002.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :
Phó Tổng Giám đốc kiêm Giám đốc NXBGD tại TP. Hồ Chí Minh
VŨ BÁ HOÀ

Biên tập nội dung :
ĐỖ LĨNH

Biên tập kĩ thuật :
TRẦN KHẮC HIẾU

Trình bày bìa :
VŨ MINH HẢI

Sửa bản in :
THANH HÀ – DƯƠNG HÀ

Chế bản tại :
PHÒNG CHẾ BẢN - NXBGD TẠI TP. HỒ CHÍ MINH

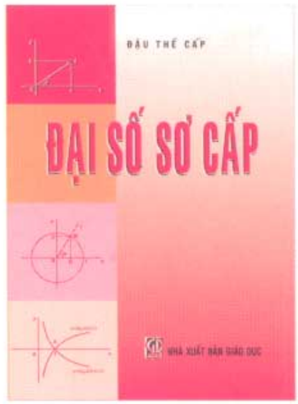
ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

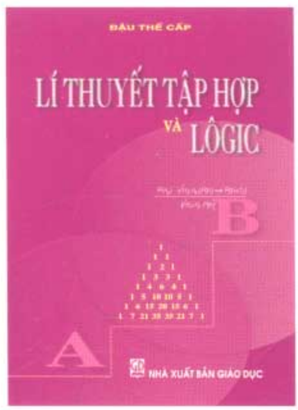
Mã số: 7K718M8-CPH

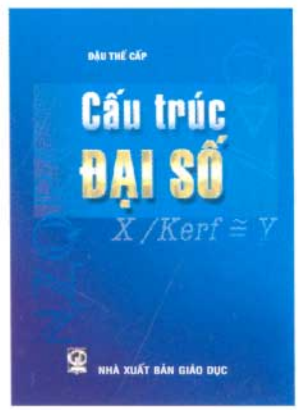
In 3.000 bản, khổ 17 x 24 cm. In tại Công ty Cổ phần In và Bao bì Đồng Tháp: 212 Lê Lợi - Phường 3 - Thị xã Sađéc - Tỉnh Đồng Tháp. Số in: 59/IĐT. Số xuất bản: 283-2008/CXB/15-635/GD. In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2008.

QUALITY CROWN
QC 100
VƯƠNG MIỆN KIM CƯƠNG
CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ

TÌM ĐỌC SÁCH CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC







Bạn đọc có thể mua sách tại các Công ti Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục :

- **Tại TP. Hà Nội** : 187 Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền ; 25 Hàn Thuyên ; 32E Kim Mã ; Số 3 ngõ 127, Văn Cao, Quận Ba Đình.
- **Tại TP. Đà Nẵng** : 15 Nguyễn Chí Thanh ; 78 Pasteur.
- **Tại TP. Hồ Chí Minh** : 104 Mai Thị Lựu, Quận 1 ; 5 Bình Thới, Quận 11 ; 231 Nguyễn Văn Cừ và 240 Trần Bình Trọng, Quận 5.
- **Tại TP. Cần Thơ** : 5/5 Đường 30 tháng 4, Quận Ninh Kiều.

Website : www.nxbgd.com.vn

8 934980 824092

Giá: 23.000đ