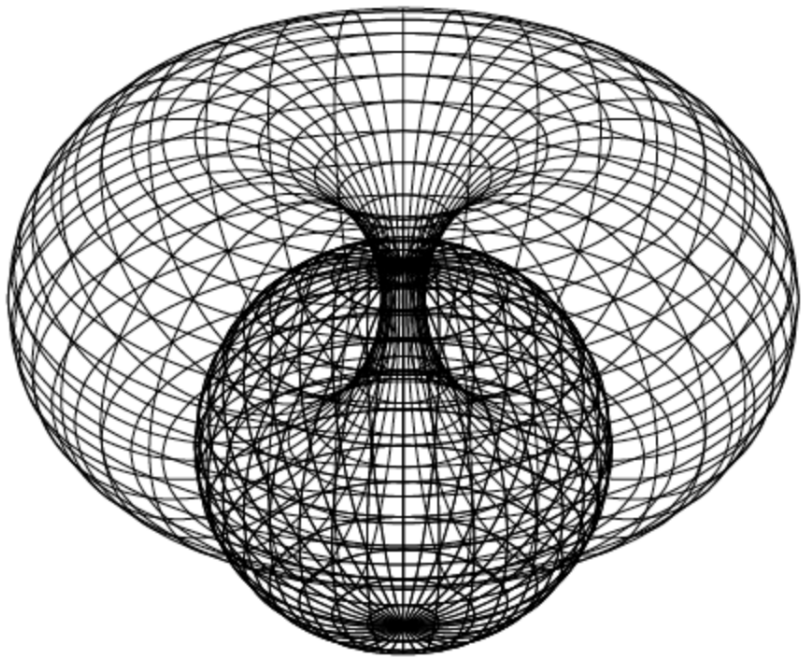
Fiches de Cours
Licence en Mathématiques



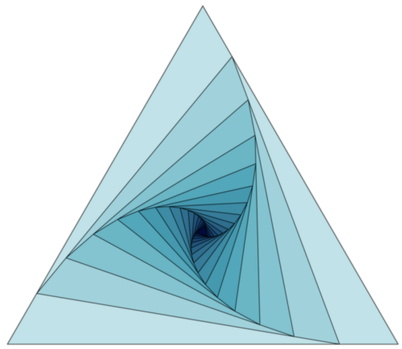
Université Jean François Champollion, Albi

Années universitaires 2022-2025

15 septembre 2025

Table des matières

Topologie



Chapitre 1

Introduction - Les Réels

Contents

Rappellons les propriétés du principal espace que nous allons considérer dans ces chapitres, $\mathbb{R}$.

1.1 Majorant, Minorant, Supremum, Infimum

1.1.1 Définitions

Formellement, $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné muni de 4 opérations compatibles avec cet ordre. Considérons ici un ensemble E et $A \subseteq E$ une partie de E.

Définition (**Majorant**) . On appelle majorant de A, un élément de $M \in E$ supérieur à tous les éléments de A. Plus formellement :

$$M \in E \text{ est un majorant de } A \iff \forall x \in A, M \geqslant x$$

Définition (**Minorant**) . De même que pour les majorants, on appelle minorant de A un élément $m \in E$ inférieur à tous les éléments de A. Plus formellement :

$$m \in E \text{ est un minorant de } A \iff \forall x \in A, m \leqslant x$$

Autrement dit, tous les éléments de A majorent m.

Exemple Soit $E = \mathbb{R}$ et $A = [0, 1] \subset E$. Alors $0, -1$ et $-\pi$ sont des minorants de A et $1, 7$ et e sont des majorants de A.

Définition (**Maximum/Minimum**) . Soit $A \subseteq E$. On appelle **maximum** de A un élément $x \in A$ qui majore tous les éléments de A. De même, un **minimum** de A est un élément $x \in A$ qui minore tous les éléments de A. On les notes généralement $\max(.)$ et $\min(.)$.

Remarque On repère rapidement la différence entre un maximum et un majorant. Un maximum a la propriété d'appartenir à la partie qu'il majore. Idem pour un minimum. Ces objets sont quand même limités. Si on prends $A =]0,1[\subset \mathbb{R}$.
On remarque facilement que l'on ne peut pas trouver de minimum à cette partie. Il existe une infinité de minorants mais si l'on souhaite minimiser A de façon "plus fine", cela risque de ne pas suffire. On va donc définir les supremum et infimum.

Définition (**Supremum**) . Soit $A \subseteq E$, on appelle supremum de A le plus petit des majorants de A. Plus formellement :

$$x \in E \text{ est un supremum de } A \iff \begin{cases} \forall a \in A, x \geqslant a \\ m = \min(\{m \in E, \forall a \in A, m \geqslant a\}) \end{cases}$$

On le note généralement *sup* et on parle de "borne sup".

Définition (**Infimum**) . Soit $A \subseteq E$, on appelle infimum de A le plus grand des minorants de A. Plus formellement :

$$x \in E \text{ est un infimum } deA \iff \begin{cases} \forall a \in A, x \leqslant a \\ x = \max(\{m \in E, \forall a \in A, m \leqslant a\}) \end{cases}$$

On le note inf et on parle de "borne inf".

Proposition S'il exite, un supremum ou un infimum est unique.

Remarque Moins formellement, les bornes inf et sup permettent de résoudre beaucoup de problèmes de majoration/minoration fine en nous permettant de "regarder" de l'autre côté de notre partie $A \subseteq E$.
Les bornes inf et sup sont surtout utilisées dans des espaces tels que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ où les éléments sont "très proches" (nous définirons cette notion plus tard). Intuitivement dans des ensembles tels que $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ nous n'avons pas besoin de tels objets.

Exemple Il peut arriver que l'on considère des parties qui n'admettent pas de majorants/minorants. Par exemple, $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

1.1.2 Propriétés et caractérisations

Théorème (**Existence**) . Dans $\mathbb{R}$ toute partie non vide et majorée admet un supremum. De même, Toute partie non vide et minorée admet un infimum.

Proposition Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. $x \in \mathbb{R}$ est un supremum de A ssi

- x majore A
- pour tout $\varepsilon > 0, \exists a \in A, \quad a > x - \varepsilon$

En français, un supremum de A est un élément $x \in E$ qui majore A et tel que pour tout réel positif ε, on peut trouver un élément $a \in A$ entre x et $x - \varepsilon$.
On a la même propriété pour les infimum.

1.1.3 Densité des rationnels dans les réels

Propriété (**Archimède**) . Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$, tel que $n > x$.

Démonstration La démonstration se fait par l'absurde.

On peut donc démontrer la proprosition principale de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. On veut montrer qu'entre deux réels distincts, il existe une infinité de rationnels. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ distincts. Il suffit juste de montrer qu'il existe un rationnel r entre x et y et, par suite, puisqu'un rationnel est aussi un réel, on pourra trouver un autre rationnel entre x et r puis entre r et y et ainsi de suite...

Proposition (Densité) Entre deux réels distincts, il existe une infinité de rationnels.

Chapitre 2

Espaces Métriques

Contents

Dans tout le début de ce chapitre, nous nous placerons dans un ensemble E quelconque.

2.1 Espace Métrique

2.1.1 Produit Scalaire

Quand on parle de produit scalaire, on pense souvent à l'application dans le cas euclidien permettant de vérifier si deux vecteurs sont orthogonaux, en réalité, il existe une multitute de produits scalaires agissant sur tout autant d'espaces.

Définition (**Produit Scalaire**) . Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ de E est un produit scalaire ssi c'est une forme :

- **Bilinéaire :** $\forall x, y, z \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a :

$$\phi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\phi(x, z) + \mu\phi(y, z) \tag{2.1}$$

$$\phi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\phi(x, z) + \mu\phi(x, z) \tag{2.2}$$

- **Symétrique :** $\forall x, y \in E, \quad \phi(x, y) = \phi(y, x)$
- **Définie :** $\forall x \in E, \quad \phi(x, x) = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow x = 0_E$
- **Positive :** $\forall x, y \in E, \quad \phi(x, y) \geq 0$

On dit qu'un produit scalaire est une forme puisqu'elle est définie de E dans un corps telle que :

$$\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

On note généralement un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ ou $(.|.)$.

Remarque En pratique, pour montrer qu'une application est un produit scalaire, il suffit juste de montrer qu'elle est symétrique, linéaire et définie positive. La bilinéarité découle de la symétrie et de la linéarité.

Exemple (Produits Sclaires) Regardons quelques exemples de produits scalaires...

- En génométrie euclidienne, on utilise un produit scalaire permettant de déterminer si deux vecteur sont orthogonaux. Soient $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$, on définit alors :

$$\vec{AB}.\vec{CD} = AB \times CD \times \cos(\widehat{\vec{AB}\vec{CD}})$$

- Dans l'espace des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ on peut définir le produit scalaire suivant :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a, b]), \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx$$

- Enfin, dans $\mathbb{R}^n$ on a le produit scalaire dit **euclidien** défini par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ tels que : } \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad \text{on a : } \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i)^2$$

Propriété (Inégalité sur un produit scalaire) . Soient $x, y \in E$, on a l'égalité suivante, valable pour tout produit scalaire :

$$\boxed{\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \times \langle y, y \rangle}$$

Remarque Ce résultat découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, vu plus tard.

2.1.2 Norme

Une fois un produit scalaire défini sur un espace, on peut définir une application supplémentaire nous donnant plus d'informations sur un élément de l'espace. Nous allons donc définir une norme de deux façon, à partir d'un produit scalaire mais aussi de façon axiomatique.

Définition (Norme) . Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un application $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ de E est appelée **norme** ssi elle est :

- **Définie :** $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow x = 0_E$
- **Positive :** $\forall x \in E, \quad \|x\| \geqslant 0$
- **Positivement Homogène :** $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- **Sous-additivité :** $\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Remarque (Notation et vocabulaire) Tout comme le produit scalaire, une norme est une application vérifiant quelques propriétés. Généralement, on note une norme $\|.\|$. Un espace muni d'une norme est appelé **espace normé**.
Dans un espace euclidien, une norme sert à "mesurer" la distance d'un point à l'origine.

Exemple Si on se place dans $\mathbb{R}$, le produit scalaire usuel sera la multiplication et la norme, la valeur absolue.

Proposition (Norme à partir du produit scalaire) Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, à partir d'un produit scalaire, on peut facilement définir une norme. Soit $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire sur E, alors l'application :

$$\begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{cases}$$

est une norme sur E.

Exemple Dans $\mathbb{R}^n$, de même que le produit scalaire euclien, on peut définir la norme euclienne telle que :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$

Propriété (Inégalité de Cauchy-Schwarz) . Soit $\langle .,. \rangle$ une produit scalaire sur E. On a alors l'inégalité suivante :

$$\boxed{\forall x, y \in E, \quad |\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \times \|y\|}$$

"La valeur absolue du produit scalaire est inférieure au produit des normes."

2.1.3 Distance et Espace Métrique

Maintenant que nous pouvons "mesurer" des "longueurs" de vecteurs dans notre espace, on peut se demander si il est possible de "calculer" la distance entre deux éléments de E. Grâce à une telle application, on pourrait déterminer si deux éléments sont plus ou moins proches. Dès que l'on a une notion de distance, on peut ensuite l'intéresser à la notion de limite, etc...

Définition (Distance) . Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une application $d(.,.) : E \times E \to \mathbb{R}$ est appelée **distance** ssi elle est :

- **Symétrique :** $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = d(y, x)$
- **Définie :** $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow x = y$
- **Positive :** $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) \geqslant 0_{\mathbb{R}}$
- **Inégalité Triangulaire :** $\forall x, yz \in E, \quad d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

Proposition (Distance à partir d'une norme) Comme précédement, à partir d'une norme sur E, on peut facilement définir une distance entre deux vecteur. Soit $\|.\|$ une norme sur E, l'application :

$$\begin{cases} E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \|x - y\| \end{cases}$$

Est une distance sur E.

Définition (Espace Métrique) . Un espace métrique est un couple (E, d) où E est un ensemble quelconque et d une distance sur cet ensemble.

2.2 Boules, Intérieur et Adhérence

Maintenant que nous savons "mesurer" des "longueurs" et déterminer à quels points deux éléments d'un espace sont "proches", nous pouvons introduire de nouveaux object à la base de tous les raisonnements que nous auront par la suite.
Dans cette section, et pour la suite de ce cours, nous nous placerons dans des espaces métriques quelconques (E, d) comme définis plus haut.

2.2.1 Boules

Introduisons maintenant le concept de boule.

Définition (**Boule ouverte, fermée**) . Soit $a \in E, r \geqslant 0$ on appelle boule ouverte l'ensemble

$$B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$$

De même on définit la boule fermé comme l'ensemble :

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leqslant r\}$$

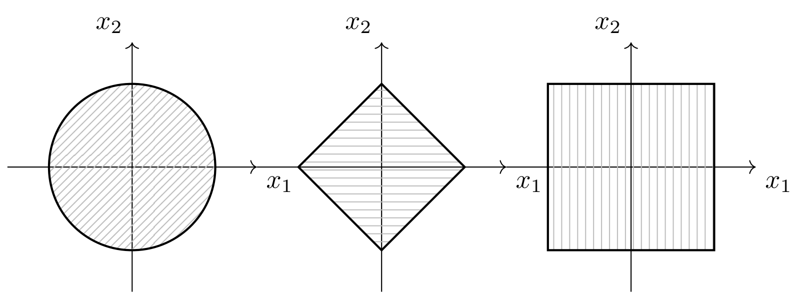
On dit alors que $B(a, r)$ est la boule ouverte de rayon r centrée en a et $\overline{B}(a, r)$ est la boule fermée de rayon r centrée en a.

Exemple Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a :

$$B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\} =]a - r; a + r[$$

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leqslant r\} = [a - r; a + r]$$

Remarque En fonction de la norme (ou de la distance) choisie, une même boule peut avoir plusieurs formes.



Norme $\|.\|_2$ Norme $\|.\|_1$ Norme $\|.\|_\infty$

2.2.2 Intérieur et Adhérence

Définition (**Intérieur**) . Soit $A \subset E$, soit $a \in E$, on dit que a est intérieur à A ssi

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0, \quad B(a, \varepsilon) \subset A}$$

Autrement dit, a est intérieur à A ssi on peut construire une boule autour de a qui soit entièrement contenue dans A.
On dit alors que A est voisinnage de a. L'ensemble des points intérieurs d'une partie est

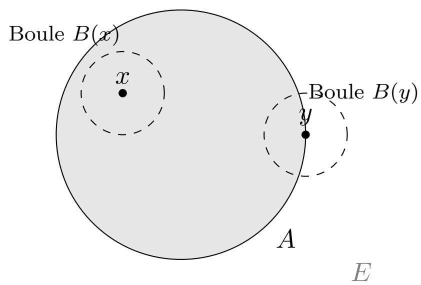
appelé l'intérieur de cette partie. On le note $int(.)$.

Définition (**Adhérence**) . Soit $A \subset E$, soit $a \in E$, on dit que a est adhérent à A ssi

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset}$$

Autrement dit, a est adhérent à A ssi pour toute boule autour de a, cette boule est intersectée avec A (i.e on ne peut pas construire de boule autour de a qui ne "déborde" pas sur A).
On dit alors que a est dans l'adhérence de A. L'adhérence d'une partie est l'ensemble de ses points adhérents. On le note $adh(.)$.

Remarque (Illustration) Soit $A \subseteq E$ et $x, y \in E$ tels que x soit intérieur à A et y soit adhérent à A. On pourrait représenter cela par le dessin ci-dessous :



L'intérieur d'une partie peut se voir comme l'ensemble des points "profonds" de cette partie. Au contraire l'adhérence peut se voir comme tous les points qui sont dedans et "très proches".

Définition (**Frontière**) . Soit $A \subseteq E$, on définit la frontière comme l'ensemble :

$$\partial A = adh(A)/int(A)$$

Exemple Soit A le disque ouvert de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$. Déterminons son intérieur, son adhérence et sa frontière.

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

On a :

- $adh(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$
- $int(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\} = A$
- $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Proposition Soit $A \subset (E, d)$ $int(A)$ est le plus ouvert contenu dans A et $adh(A)$ est le plus petit fermé de E contenant A.

2.2.3 Propriétés

Proposition L'intérieur d'une boule ouverte est la boule fermée correspondante.

Propriété (**Inclusions et complémentaire**) . Soit E un espace métrique et $A, B \subseteq E$.

- Si $A \subset B$ on a alors :

$$int(A) \subset int(B) \quad adh(A) \subset adh(B)$$

- $int(A) = \overline{(adh(\overline{A}))}$ et $adh(A) = \overline{(int(\overline{A}))}$
-
  - $int(A \cup B) \supset int(A) \cup int(B)$
  - $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$
  - $adh(A \cup B) = adh(A) \cup adh(B)$
  - $adh(A \cap B) \subset adh(A) \cap adh(B)$

Proposition (Adhérence et sup dans le cas réel) Soit $A \subset \mathbb{R}$, non vide et majorée alors, $\sup(A) \in adh(A)$.

2.3 Suites et Limites

2.3.1 Généralités

Définissons clairement la notion de suite numérique.

Définition (**Suite Numérique**) . Soit $I \subseteq \mathbb{N}$ une **partie infinie**. On appelle suite à valeurs dans (E, d), un espace métrique, d'ensemble d'indices I, toute application :

$$(u_n)_{n \in I} : n \longrightarrow u_n \in E$$

On dit alors que u_n est le *terme d'indice* $n \in I$. On note E^I l'ensemble des suites à valeurs dans E d'ensemble d'indices I.

Exemple On a par exemple :

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{4n+1}$.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \ln(n + 2n^2)$.

Remarque Par abus de notation on notera souvent (u_n) pour désigner une suite. L'ensemble d'indices et les valeurs que prennent la suite dépendront du contexte.
Attention, il faut toutefois bien différentier la suite (u_n) de son terme général noté u_n qui correspond à une valeur de la suite pour un certain $n \in I$. En effet, le premier élément (u_n) appartient à E^I alors que le second appartient à E.

Proposition Soit $(u_n)_{n \in I}$ à valeur dans E. Si $E = \mathbb{R}$ on dira que la suite (u_n) est *à valeurs réelles.*

2.3.2 Propriétés

Nous allons ici nous concentrer sur les suites à *valeurs réelles*. En effet, la relation d'ordre $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$ nous permettra de comparer différentes valeurs d'une suite et ainsi de définir le concept de monotonie.

Définition (**Monotonie**) . Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite à valeurs réelles d'ensemble d'indices $I \subseteq \mathbb{N}$.

1. On dit que (u_n) est *croissante* (resp. strictement croissante) si

$$\forall n \in I, \quad u_{n+1} \geqslant u_n \quad (\text{resp. } u_{n+1} > u_n)$$

2. On dit que (u_n) est *décroissante* (resp. strictement décroissante) si

$$\forall n \in I, \quad u_{n+1} \leqslant u_n \quad (\text{resp. } u_{n+1} < u_n)$$

3. On dit que (u_n) est *constante* si :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in I, \quad u_n = C$$

4. On dit que (u_n) est *stationnaire* si :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, u_n = C$$

5. On dit que (u_n) est *périodique* si :

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_{n+p}$$

Remarque Dans le cadre de la définition suite :

1. Étudier la monotonie d'une suite revient donc à dire si elle est croissante ou décroissante.
2. On parlera de suite *monotone* lorsqu'elle sera uniquement croissante OU décroissante. Toutes les suites ne sont donc pas monotones.
3. Une suite stationnaire est une suite constante à partir d'un certain rang (noté N dans la définition).

Définition (**Suite Majorée, Minorée, Bornée**) . Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite à valeurs réelles d'ensemble d'indices $I \subseteq \mathbb{N}$.

1. On dit que (u_n) est *majorée* si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in I, \quad u_n \leqslant M$$

On dira que M est le majorant de (u_n).

2. On dit que (u_n) est *minorée* si :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in I, \quad u_n \geqslant m$$

On dira que M est le minorant de (u_n).

3. On dit que (u_n) est *bornée* si :

$$\exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in I, \quad |u_n| \leqslant B$$

Proposition Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. Alors (u_n) est bornée ssi elle est majorée ET minorée.

2.3.3 Convergence et Limites de Suites Numériques

Définition (**Limite et Suite Convergente**) . Soit (u_n) une suite numérique.

1. On dit que (u_n) *converge* ou *tend* vers $l \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

On notera alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ ou $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$.

2. On dit que (u_n) est *convergente* si :

$$\exists l \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

   On utilisera la même notation que précédement.
3. On dit que (u_n) est *divergente* si elle n'est pas convergente :

$$\forall l \in \mathbb{R}, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \text{ et } |u_n - l| \geqslant \varepsilon$$

On peut facilement étendre cette définition aux limites infinies.

Propriété (Unicité de la limite) . Soit (u_n) une suite numérique. Si (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ et qu'elle converge aussi vers une autre limite $l' \in \mathbb{R}$ alors $l = l'$. C'est ce que l'on appelle l'unicité de la limite.

Propriété (Limites et Majoration/Minoration) . Soit (u_n) une suite à valeurs réelles.
- Si (u_n) converge, alors (u_n) est bornée.
- Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $-\infty$) alors (u_n) n'est pas majorée (resp. minorée).

Propriété (Convergence et suites partielles) . Toute suite partielle d'une suite convergente est convergente et converge vers la même limite.

Définition (Suite de Cauchy) . Soit (E, d) un espace métrique et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E. On dit que (u_n) est *de Cauchy* ou *une suite de Cauchy* lorsque ses termes se rapprochent uniformément les uns des autres lorsque n tend vers $+\infty$.

$$i.e \quad \lim_{p,q\to\infty} d(u_p, u_q) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall q \geqslant N,\ \forall q \geqslant N, \quad d(u_p, u_q) < \varepsilon$$

Remarque Attention : il ne suffit pas que la différence des termes consécutifs de la suite tendent vers zéro. Les suites de Cauchy ne sont pas à confondre avec les suites convergentes. En effet, une suite convergente est de Cauchy mais la réciproque est fausse.

Exemple Soit (u_n) une suite décroissante de rationnels positifs dont le carré tend vers 2 définie par :

$$u_0 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$$

La suite $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et minorée par 1. On en déduis facilement que la suite de rationnels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Cependant elle n'a pas de limite rationnelle car une telle limite l vérifierait que $l^2 = 2$. Or $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

On a donc des suites de Cauchy qui ne convergent pas dans certains espaces. Il serait utile de définir des espaces dans lequels ce ne soit jamais le cas. Comme nous venons de le voir, $\mathbb{Q}$ ne suffit pas.

Définition (**Espaces Complets**) . Un espace métrique (E, d) est dit *complet* lors que toute suite de Cauchy de (E, d) converge dans (E, d).

La complétude est donc une notion pour caractériser des espaces "sans trous". Nous avons une propriété très utile dans $\mathbb{R}$:

Propriété (**Critère de Cauchy**) . Dans $\mathbb{R}$ toute suite de nombre réels converge si et seulement si elle est de Cauchy. (i.e les suites convergentes et de Cauchy sont les même dans $\mathbb{R}$).

Chapitre 3

Topologie

Contents

3.1 Ouverts et Fermés

Une fois définies les notions de boules, d'intérieur et d'adhérence, on peut maintenant "caractériser" des ensembles/parties en fonction des propriétés de leur adhérene/intérieur/frontière. Cela va nous permettre de définir les ouverts et les fermés, deux "catégories" d'ensembles essentielles pour la plupart des raisonnements analytiques de topologie.

3.1.1 Définitions et Conventions

Définition (**Ensemble Ouvert**) . Soit $A \subseteq E$, on dit que A est ouvert si $A = \int(A)$. Autrement dit si pour tout élément de A, il existe une boule autour de cet élément entièrement contenue dans A.

Définition (**Ensemble Fermé**) . Soit $A \subseteq E$, on dit que A est ouvert si $adh(A) = A$.

Remarque Quelques conventions sur les ouverts et les fermés.

- $\forall a \in E, \forall r > 0 \quad B(a,r)$ est un ouvert et $\overline{B}(a,r)$ est un fermé.
- $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ sont à la fois ouverts et fermés.
- $[a,b[\subset \mathbb{R}$ n'est ni ouvert, ni fermé.

Proposition Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, A est ouvert ssi son complémentaire dans $\mathbb{R}^n$ est fermé.

Propriété (**Réunion et Intersection**) .

- Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte.
- Une intersection finie d'ouverts est ouverte.

- Une réunion finie de fermés est fermée.
- Une intersection quelconque de fermés est fermés

Remarque (Moyen Mnémotechnique) Pour aider à la mémorisation, on peut s'aider de ces phrases :

- Les ouverts aiment s'étaler (réunion infinie), mais ils sont timides à se croiser (intersection finie).
- Les fermés aiment se serrer (intersection infinie), mais ne se dispersent pas trop (réunion finie).

Exemple (Réunion et Intersection) Quelques exemples pour retenir les propriétés :

- **Réunion infinie d'ouverts :** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[$ une suite d'intervalles ouverts. Alors la réunion infinie de tout ces intervalles reste ouverte :
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[\quad \text{ouvert}$$
- **Intersection Infinie de fermés :** De même, soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$ une suite d'intervalles fermés. Alors leur intersection infinie reste fermée :
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right] \quad \text{fermé}$$

Proposition Soit $A \subset E$, on dit que l'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A et l'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A.

3.1.2 Ouverts/Fermés relativement

Définition (**Ouvert/Fermé relativement**) . Soient $A \subset E$ et $B \subset A$. On dit que B est **ouvert relativement** à A si il existe une ouvert V de E tel que $B = A \cap V$.
D'autre part, on dit que B est **fermé relativement** à A si il existe un fermé U de E tel que $B = A \cap U$.

3.2 Ensembles Compacts

Définition (**Recouvrement**) . Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. Soit I un ensemble quelconque et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E. On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est un *recouvrement de* A si :
$$A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$$
Lorsque les A_i sont des ouverts, on parlera de recouvrement ouvert.

Définition (**Compact**) . Soit $K \subset E$. On dit que K est *compact dans* E si :

Toute suite à valeurs dans K admet une sous-suite convergente dans K.

$\iff$ De tout recouvrement ouvert de K on peut en extraire un recouvrement fini.

Proposition Un ensemble compact est *fermé et borné*.

Théorème (**Cas** $\mathbb{R}^n$) . Dans $\mathbb{R}^n$, les ensembles compacts sont exactement les fermés bornés.

Corollaire (**Théorème de Bolzano-Weierstraß**) . Dans $\mathbb{R}^n$, toute suite bornée possède une suite partielle convergente.

3.3 Ensembles Connexes

Dans cette section, nous allons détailler la notion de connexité chez les ensembles. Intuitivement, un ensemble connexe se résumera à un ensemble "en un seul morceau".

Définition (**Connexité**) . Soit $A \subset E$. On dit que A est connexe s'il est impossible de trouver $B, C \subset E$ tels que :

- $B \cap C = \emptyset$
- $E = B \cup C$
- $E \cap B \neq \emptyset$
- $E \cap C \neq \emptyset$

Chapitre 4

Fonctions Continues

Sûrement l'un des chapitres les plus important de ce cours, les notions et objets définis ici vont permettre de définir pleins de nouveaux objets et de proposer de nouveaux critères/caractérisations pour des propriétés déjà vues.
Fonctions continues
Définitions (séquentielle, par voisinages)
Propriétés : composition, opérations

Chapitre 5

Compacts

Contents

Vous voyez ce qu'est une Twingo ? Maintenant essayez d'y faire rentrer une équipe de rugby entière dedans... On pourrait dire que l'intérieur de la Twingo est compact. Voilà ce que l'on va essayer de définir dans ce chapitre, les ensembles compacts.

On nomme ici E un espace métrique muni d'une distance d.

5.1 Points d'accupulation et recouvrement

Avant de définir la notion de compact, il nous faire un effort théorique en définissant de nouveaux objects qui vont nous aider à caractériser les compacts.

Définition (**Point d'accumulation**) . Soient $A \subset E$ et $x \in E$. On dit que x est un point d'accumulation de A si toute boule de rayon non nul centrée en x contient une infinité de points de A. On remarquera qu'il suffit seulement que cette boule contienne un seul point de A différent de x.

Remarque Un point d'accumulation est un point adhérent. La réciproque est fausse en général. On remarquera que pour qu'une partie admette un point d'accumulation, elle doit contenir un nomre infini de points.

Définition (**Recouvrement**) . Soient $A \subset E$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E. On dit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constitue un recouvrement de A si $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Proposition Soit $A \subset E$, on a les trois propriétés suivantes :

- Toute suite d'éléments de A contient une suite partielle qui converge vers un élément de A.
- Tout ensemble infini d'éléments de A admet un point d'accumulation dans A.
- De tout recouvrement de A par des ensembles ouverts, on peut en extraire un recouvrement fini.

5.2 Compacts

5.2.1 Définition et caractérisations

Définition (**Ensemble Compacts**) . Soit $K \subset E$, on dit que K est compact si il satisfait au moins l'une des propriétés précedentes.

Proposition Un ensemble compact est borné et fermé.

Corollaire (**Caractérisation des compacts de** $\mathbb{R}^n$) . Dans $\mathbb{R}^n$ les compact sont exactement les fermés bornés.

5.2.2 Propriétés

Corollaire (**Théorème de Bolzano-Weierstraß**) . Dans $\mathbb{R}^n$ toute suite bornée possède une suite partielle convergente.

Corollaire (**Théorème de Bolzano-Weierstraß**) . Dans $\mathbb{R}^n$ tout ensemble infini borné admet un point d'accumulation.

Chapitre 6

Connexes

Contents

1793, Place de la Révolution, déconnexification de Louis XVI...

Blague à part, nous allons ici définir la notion de connexité pour un ensemble. Conceptuellement, un ensemble connexe est un ensemble "en une seule partie". Il reste à le définir proprement.

6.1 Connexité

Définition (**Connexité**) . Soit $A \subset E$, on dit que A est connexe (i.e "en une seule partie") si il est impossible de trouver deux ouverts B et C de E, disjoints, tels que leur intersection respective avec A soit non vide et que leur union soit égale à A.

6.2 Connexité et fonctions