

Révisions Master IMA

Axel PIGEON

9 juillet 2025

Table des matières

I Probabilités	5
1 Espaces Probabilisés et Variables Aléatoires	7
1.1 Espaces Probabilisés, Mesures et Variables Aléatoires	7
1.1.1 Univers	7
1.1.2 Évènements, Issues et Mesure de Probabilité	7
1.2 Variable Aléatoire	8
1.2.1 Définition et Loi	8
1.2.2 Variables Discrètes et Continues	9
2 Variables Aléatoires Réelles Discrètes	11
2.1 Espérance, Variance et Écart-type	11
2.2 Principales Lois	12
2.2.1 Loi Uniforme	13
2.2.2 Loi de Bernoulli	13
2.2.3 Loi Binomiale	13
2.2.4 Loi géométrique	13
2.2.5 Loi de Poisson	14
3 Variables Aléatoires Réelles Continues	15
3.1 Généralités	15
3.1.1 Vers les variables aléatoires continues	15
3.1.2 Définitions et propriétés	15
3.1.3 Fonction de répartition	16
3.1.4 Propriétés des variables aléatoires continues	16
3.2 Principales Lois	17
3.2.1 Loi Uniforme	17
3.2.2 Loi Exponentielle	18
3.2.3 Loi Normale	18
3.2.4 Loi de Cauchy	19
3.2.5 Loi Gamma	19
3.2.6 Loi de Rayleigh	20
3.2.7 Loi χ^2	20
4 Convergence de Suite de Variables Aléatoires	23
4.1 Suites de variables aléatoires	23
4.1.1 Généralités	23
4.1.2 Exemple Introductif : lancer d'une pièce	24
4.2 Convergence en Probabilités	25
4.2.1 Opérations	25
4.2.2 Inégalités utiles et loi faible des grands nombres	25

4.3	Convergence Presque Sûre	26
4.3.1	Convergence Presque Sûre et Opérations	27

Probabilités

Chapitre 1

Espaces Probabilisés et Variables Aléatoires

1.1 Espaces Probabilisés, Mesures et Variables Aléatoires

1.1.1 Univers

Introduisons les concepts fondamentaux des probabilités, les univers et les espaces probabilisés.

Définition (Univers) . On appelle univers Ω pour une expérience aléatoire, l'ensemble de toutes les issues (situations finales) possibles de cette expérience aléatoire. Chaque élément $\omega \in \Omega$ représente une **issue** de cette expérience aléatoire.

Exemple • Pour une expérience aléatoire de lancer de dé, il existe 6 issues possibles correspondant aux 6 faces du dé. On a donc $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
• Si on pioche une boule dans une urne contenant une boule rouge et deux boules noires, on a $\Omega = \{\text{rouge, noir}\}$.

A partir d'un univers, on peut définir la notion d'espace probabilisé. Plus complexe, la définition nécessite les prérequis du cours d'intégration et de théorie de la mesure.

Définition (Espace Probabilisé) . Un espace probabilisé est un **triplet** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où :

- Ω est un univers.
- \mathcal{F} est une tribu (σ -algèbre) sur Ω .
- \mathbb{P} est une mesure de probabilité sur \mathcal{F} (voir plus loin).

1.1.2 Évènements, Issues et Mesure de Probabilité

Définition (Évènement) . Soit Ω un univers. On définit un évènement de Ω comme un sous-ensemble $A \subseteq \Omega$.

Remarque Comme défini au début, les **issues** $\omega \in \Omega$ correspondent à des résultats élémentaires de l'expérience aléatoire, à ne pas confondre avec les évènements. Dans notre expérience de lancer de dé, $\{2\} \in \Omega$ est l'**issue** correspondant à "obtenir un 2" et $A = \{1, 2\} \subset \Omega$ est l'**évènement** correspondant à "le résultat est inférieur ou égal à 2".

Par construction, \mathcal{F} contient donc tous les évènements et issues possibles de l'expérience aléatoire. Elle est donc "plus complète" que Ω , on retrouve les propriétés des espaces mesurables, vus en intégration en Licence.

Définition (Mesure de Probabilité) . Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Une mesure de probabilité \mathbb{P} sur \mathcal{F} est une mesure (au sens de la théorie de la mesure) qui vérifie :

1. $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Remarque (Rappel : Mesure) Une fonction $\mu : (X, \mathcal{B}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. **(Sigma-additivité)** : $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de parties mesures **deux à deux disjointes**, on ait :

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

est appelée mesure sur l'espace (X, \mathcal{B}, μ) alors appelé **espace mesuré**.

1.2 Variable Aléatoire

1.2.1 Définition et Loi

Pour pouvoir quantifier des calculs de probabilités ou ce que nous appellerons plus tard des lois, nous devons définir les variables aléatoires.

Définition (Variable Aléatoire) . Une variable aléatoire est une fonction mesurable qui associe une valeur numérique à chaque issue d'un espace probabilisé.

Plus formellement, une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une fonction $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout ensemble $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (tribu borélienne), on ait $X^{-1}(B) \subset \mathcal{F}$.

On définit l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire comme l'image de Ω par X noté $X(\Omega)$.

La mesurabilité d'une variable aléatoire permet donc garantir que les évènements associés aux valeurs de la variable aléatoire sont bien mesurables par la mesure de probabilité.

Maintenant que nous avons défini formellement le concept de variable aléatoire, on peut lier cette définition à celle des évènements. En effet, une variable aléatoire est une fonction mesurable sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que :

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, X^{-1}(B) \subset \mathcal{F}$$

On peut alors caractériser un évènement A comme la préimage d'un sous-ensemble de \mathbb{R} par X de la façon suivante.

$$A = X^{-1}(B) \text{ pour un certain } B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

D'où la définition suivante...

Définition (Evènement d'une expérience aléatoire) . Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un univers Ω . On appelle évènement $[X = x]$ de l'expérience aléatoire l'ensemble des issues possibles correspondant à cet évènement $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit :

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} = X^{-1}(x)$$

Définition (Loi) . Soit X une variable aléatoire. On appelle loi de X la donnée de toutes les probabilités $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Pour donner la loi d'une variable aléatoire, il faut d'abord déterminer le support de la variable aléatoire puis en suite calculer la probabilité de chaque issue. On note le résultat dans un tableau pour plus de praticité.

Exemple Soit l'expérience aléatoire du lancer d'un dé à 6 faces non truqué. On a :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Nous nous trouvons dans une situation d'équiprobabilité d'où :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{6}$$

D'où le tableau suivant :

Ω	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

1.2.2 Variables Discrètes et Continues

Selon la nature de l'expérience aléatoire et de l'univers choisis, on distingue deux grands types de variables aléatoires : les variables aléatoires **discrètes** et **continues**. Cette distinction est fondamentale car elle caractérise la façon dont on exprime et calcule ensuite les probabilités.

Définition (Variable aléatoire discrète) . Une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dite **discrète** si l'ensemble de ses valeurs possibles $X(\Omega)$ est un ensemble **fini ou dénombrable**. Dans ce cas, la loi de probabilité de X est donnée par une fonction de masse et les probabilités s'expriment comme des sommes.

Exemple Le résultat d'un lancer de dé est une variable aléatoire discrète. Par exemple, si X désigne le résultat d'un lancer de dé, alors $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Définition (Variable aléatoire continue) . Une variable aléatoire X est dite **continue** si elle peut prendre une infinité non dénombrable de valeurs, typiquement un intervalle de \mathbb{R} . Dans ce cas, il n'existe pas de fonction de masse mais une **densité de probabilité**, et les probabilités s'expriment par des **intégrales**.

Exemple Le temps d'attente avant un événement (modélisé par une loi exponentielle), ou la taille d'une personne (loi normale), sont des variables continues. Si X est la taille d'un individu, alors $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle de réels.

Remarque La distinction entre lois discrètes et lois continues repose donc sur la nature de la mesure de probabilité utilisée :

- **Mesure de comptage** (ou somme de Dirac) \Rightarrow lois discrètes.

- **Mesure de Lebesgue** (avec densité) \Rightarrow lois continues.

Nous allons maintenant étudier les deux grands types de lois de probabilité selon la nature de la variable aléatoire :

- Dans le cas discret : lois binomiale, géométrique, de Poisson...
- Dans le cas continu : loi uniforme, loi exponentielle, loi normale...

Chapitre 2

Variables Aléatoires Réelles Discrètes

2.1 Espérance, Variance et Écart-type

Définition (Espérance) . Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète. On appelle espérance l'application $\mathbb{E} : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui calcule la moyenne de X pondérée par les valeurs qu'elle prend. Plus formellement :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$$

Propriété (Espérance) . L'espérance est une fonction linéaire. Autrement dit, pour toutes variables aléatoires X, Y sur un univers Ω , et pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \quad \mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

Lors d'une expérience aléatoire, par exemple un jeu d'argent l'espérance représente le gain moyen d'un joueur par partie s'il joue un grand nombre de fois. Son signe permet de savoir si le jeu est dit équitable (autant de chances de gagner que de perdre).

Il peut souvent arriver que l'on veuille appliquer une fonction à notre variable aléatoire. Un théorème nous permet alors simplement de calculer l'espérance de cette "nouvelle" variable aléatoire.

Théorème (Transfert) . Soit X une variable aléatoire discrète sur un univers Ω et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. L'espérance de la variable aléatoire $g(X) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'application $\mathbb{E}(g(X)) : \mathcal{F}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \mathbb{P}(X = x)$$

Définition (Variance et écart-type) . Soit X une variable aléatoire discrète sur un

univers Ω . On appelle variance l'application $\mathbb{V} : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x)$$

De même, on appelle écart type l'application $\sigma : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

La variance permet de mesurer la dispersion de la variable aléatoire autour de son espérance.

Remarque Les notions d'espérance, variance et écart-type sont définies par des sommes potentiellement infinies. Il se peut donc que dans le cas de variables aléatoires définies sur des univers infinis, leur espérance, variance et écart-type n'existent pas. Une étude de convergence de la somme est donc judicieuse. En revanche pour les variables aléatoires définies sur un univers fini ces valeurs existent bien.

Théorème (Formule de König-Huygens) . Soit X une variable aléatoire sur un univers Ω fini. On a alors :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Remarque Le calcul de la variance d'une variable aléatoire réelle finie est donc assez facile quand on le met en relation avec la formule de König-Huygens et la formule du transfert...

A partir de toutes ces formules, on peut en déduire quelques propriétés sympatiques sur la variance :

Propriété (Variance) . Soit X une variable aléatoire finie et $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X) \quad \mathbb{V}(X + b) = \mathbb{V}(X)$$

La variance est donc assez similaire à une forme quadratique et est invariante par translation. De plus, la variance d'une variable aléatoire est invariable par translation des valeurs de la variable aléatoire.

Théorème (Inégalité de Markov) . Si X est une variable aléatoire réelle discrète **positive** ou nulle sur Ω d'espérance $\mathbb{E}(X)$, alors :

$$\forall a \in]0, +\infty[\quad P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Cela fournit un majorant de la probabilité que X dépasse un seuil a donné. Ce résultat est particulièrement utile pour borner des queues de distributions sans connaître leur loi exacte.

2.2 Principales Loïs

Abordons en détail maintenant quelques lois usuelles à connaître sur le bout des doigts. Ces lois permettent de modéliser la plupart des expériences aléatoires.

2.2.1 Loi Uniforme

Définition (Loi Uniforme) . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ lorsque son support est $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et chaque issue a la même probabilité de se produire. Autrement dit :

$$\forall x \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = x) = \frac{1}{n}$$

On note alors $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Proposition Soit $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ alors l'espérance et la variance de X sont de la forme :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

2.2.2 Loi de Bernoulli

Définition (Loi de Bernoulli) . Une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in]0, 1[$ si il n'existe que deux issues possibles $X(\Omega) = \{0, 1\}$ telles que :

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Proposition Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors l'espérance et la variance de X sont de la forme :

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = p(1 - p)$$

2.2.3 Loi Binomiale

L'expérience aléatoire consistant à répéter $n \in \mathbb{N}$ fois une expérience de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ de manière indépendante est appelée **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p .

Définition (Loi Binomiale) . La variable aléatoire X égale au **nombre de succès** d'un schéma de Bernoulli suit une loi binomiale de paramètres n et p .

On note alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Proposition Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. On a alors $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$, la probabilité d'obtenir k succès est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

Proposition Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors l'espérance et la variance de X sont de la forme :

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = np(1 - p)$$

2.2.4 Loi géométrique

Définition (Loi géométrique) . Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

On note alors $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Une loi géométrique représente le temps d'attendre du premier succès d'une expérience de Bernoulli. Autrement dit X est le rang de l'épreuve ayant mené au premier succès.

Proposition Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$ l'espérance et la variance de X sont de la forme :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

2.2.5 Loi de Poisson

Définition (Loi de Poisson) . Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}$$

On note alors $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Une loi de Poisson modélise le nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps ou d'espace donné, lorsque ces événements sont rares et indépendants. Par exemple, elle peut modéliser le nombre de voitures passant par un péage en une journée, ou le nombre de fautes de frappe sur une page de texte.

Proposition Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors l'espérance et la variance de X sont de la forme :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda$$

Résumé des lois discrètes usuelles

Loi	Support	Espérance $\mathbb{E}(X)$	Variance $\mathbb{V}(X)$
$\mathcal{U}([1, n])$	$[1, n]$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$\mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	p	$p(1-p)$
$\mathcal{B}(n, p)$	$[0, n]$	np	$np(1-p)$
$\mathcal{G}(p)$	\mathbb{N}^*	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\mathcal{P}(\lambda)$	\mathbb{N}	λ	λ

Les lois étudiées jusque-là sont toutes des lois discrètes, c'est-à-dire que la variable aléatoire prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs. Dans de nombreux cas, on souhaite modéliser des phénomènes à valeurs continues (comme une durée, une taille, une température, etc.). Nous allons maintenant introduire les lois continues les plus classiques : loi uniforme, loi exponentielle, loi normale, etc.

Chapitre 3

Variables Aléatoires Réelles Continues

On s'intéresse maintenant à des variables aléatoires qui prennent des valeurs réelles mais pas forcément en nombre fini ou dénombrable. Il est donc nécessaire de définir une probabilité sur \mathbb{R} telle que la probabilité des singletons soit nulle. Pour cela, nous allons très fortement nous appuyer sur l'intégrale de Lebesgue et la théorie de la mesure.

3.1 Généralités

3.1.1 Vers les variables aléatoires continues

Dans les chapitres précédents, nous avons vu comment construire, à partir d'univers, des espaces probabilisés muni d'une tribu (structure mesurable) et d'une mesure de probabilité. Dans ce cadre probabiliste, une mesure particulière joue un rôle significatif sur \mathbb{R} : la **mesure de Lebesgue**.

Il est temps maintenant de définir les variables aléatoires réelles continues, c'est à dire, des fonctions mesurables dont la loi de probabilité est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Intuitivement, cela signifie que nous serons capables de calculer des probabilités par une densité : une fonction intégrable positive sur \mathbb{R} dont l'intégrale vaut 1 et permettant de calculer des probabilités par intégration.

Ceci nécessitera l'introduction de quelques outils d'analyse (densité, intégration, espérance sous forme intégrale), qui généraliseront les formules que nous avons pour les lois discrètes.

3.1.2 Définitions et propriétés

Définition (Variable aléatoire continue) . Une variable aléatoire X est dite **continue** si elle peut prendre une infinité non dénombrable de valeurs, typiquement un intervalle de \mathbb{R} . C'est donc une application $X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ mesurable.

$$\text{i.e } \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

On peut donc appliquer la mesure de probabilité \mathbb{P} aux événements de la forme $\{\omega \in \Omega\}$.

Définition (Loi d'une variable aléatoire réelle continue) . La loi d'une variable

aléatoire continue X est définie comme la **mesure image** de \mathbb{P} par X notée \mathbb{P}_X telle que :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\})$$

Cette loi permet donc de calculer la probabilité que la variable X soit dans un intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(\{X \in]a, b]\}) = \mathbb{P}_X(]a, b])$$

Définition (Densité de Probabilité) . Si la mesure \mathbb{P}_X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} on dit que X admet une **densité de probabilité** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad \mathbb{P}_X(B) = \int_B f(x) dx$$

3.1.3 Fonction de répartition

Définition (Fonction de répartition) . Soit X une variable aléatoire réelle continue. Sa fonction de répartition F_X est définie par :

$$F_X : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1] \\ a \longmapsto F_X(a) = \mathbb{P}(X \leq a) \end{cases}$$

F_X est une fonction croissante admettant la limite 0 en $-\infty$ et la limite 1 en $+\infty$ et elle est continue à droite.

Proposition (Lien avec la densité) Si X admet une densité de probabilité f , alors F_X est dérivable et :

$$F'_X(x) = f(x), \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

On a aussi, pour tout $a < b$:

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

3.1.4 Propriétés des variables aléatoires continues

Définition (Espérance) . Soit X une variable aléatoire continue réelle continue de densité f_X . On appelle espérance de X le nombre

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} t f_X(t) dt$$

Si cette intégrale est finie, on dit que l'espérance de X existe. Dans le cas contraire, on dit que la variable aléatoire X n'a pas d'espérance. Autrement dit, on dit que X admet une espérance si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} t f_X(t) dt$ est absolument convergente.

Théorème (Formule de Transfert) . Soit X une variable aléatoire réelle continue de densité f_X , et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| f_X(t) dt$ soit finie. Alors :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) f_X(t) dt$$

Cette formule est une généralisation de l'espérance, on peut par exemple calculer $\mathbb{E}(\ln X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, ...

Définition (Variance) . Soit X une variable aléatoire admettant une espérance. La variance de X est le nombre :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \int_{\mathbb{R}} (t - E(X))^2 f_X(t) dt$$

Toujours comme chez les variables aléatoires réelles discrètes, l'écart-type de X est la racine carrée de $V(X)$ si $V(X)$ existe.

Théorème (Koenig-Huyghens) . Ce théorème permet de calculer plus simplement la variance, à condition que l'espérance $E(X)$ et $E(X^2)$ existent :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

C'est souvent la méthode la plus directe pour déterminer la variance d'une variable aléatoire continue.

3.2 Principales Loïs

Définissons maintenant quelques lois fondamentales à connaître par coeur...

3.2.1 Loi Uniforme

Définition (Loi Uniforme) . Une variable aléatoire continue X suit une loi uniforme sur $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ lorsque sa densité f est une fonction porte sur l'intervalle $[a, b]$.

$$\text{i.e } f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1] \\ t \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On note alors $X \sim \mathcal{U}([a, b])$.

Ces variables aléatoires généralisent la notion d'équiprobabilité dans des espaces continus.

Proposition Si $X \sim \mathcal{U}([a, b])$, alors la fonction de répartition de X est donnée par :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 1 & \text{si } t > b \end{cases}$$

De plus, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3.2.2 Loi Exponentielle

Définition (Loi Exponentielle) . Soit X une variable aléatoire continue. On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité de probabilité est de la forme :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1] \\ t \longmapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

On note alors $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire. Autrement dit, elle mesure la probabilité d'un phénomène ait duré pendant t unités de temps.

Proposition Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors sa fonction de répartition est donnée par :

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

De plus, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

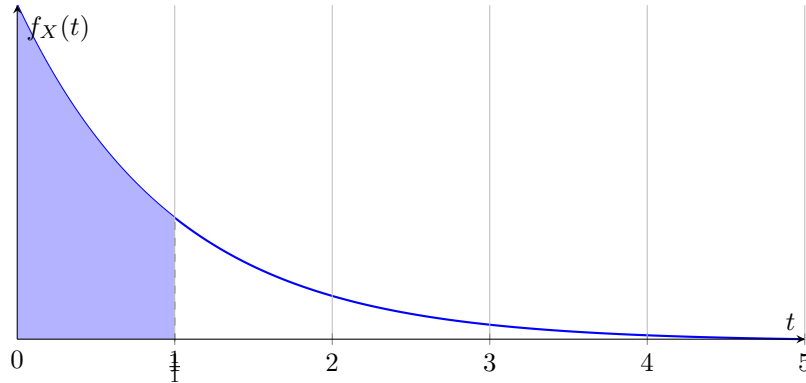


FIGURE 3.1 – Densité de probabilité de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec espérance $\frac{1}{\lambda}$

3.2.3 Loi Normale

Définition (Loi Normale) . Soit X une variable aléatoire continue. On dit que X suit une loi normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \longmapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \end{cases}$$

On note alors $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

La loi normale est très utilisée pour modéliser des phénomènes aléatoires centrés autour d'une moyenne μ , avec une variabilité mesurée par l'écart-type σ . Elle est également appelée loi de Gauss.

Proposition Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2$$

Sa fonction de répartition $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ n'a pas d'expression simple à l'aide de fonctions élémentaires. On utilise donc souvent la loi normale centrée réduite :

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

avec densité :

$$f_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

et on a :

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{t - \mu}{\sigma}\right)$$

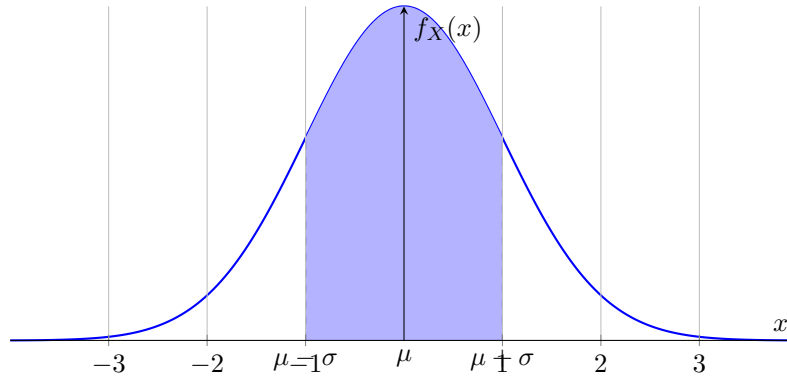


FIGURE 3.2 – Densité de probabilité d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec mise en évidence de l'intervalle $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$

3.2.4 Loi de Cauchy

Définition (Loi de Cauchy) . Une variable aléatoire X suit une loi de Cauchy de paramètre $x_0 \in \mathbb{R}$ (localisation) et $\gamma > 0$ (échelle) si :

$$f(t) = \frac{1}{\pi\gamma} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{t-x_0}{\gamma}\right)^2}$$

On note $X \sim \mathcal{C}(x_0, \gamma)$.

La loi de Cauchy est une loi sans espérance ni variance, utilisée en physique (résonances).

Proposition La fonction de répartition de $X \sim \mathcal{C}(x_0, \gamma)$ est :

$$F_X(t) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{t - x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}$$

3.2.5 Loi Gamma

Définition (Loi Gamma) . Une variable aléatoire X suit une loi Gamma de paramètres $k > 0$ (forme) et $\lambda > 0$ (taux) si :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $X \sim \Gamma(k, \lambda)$.

La loi Gamma modélise des durées de vie cumulées (somme de k exponentielles).

Proposition

$$\mathbb{E}(X) = \frac{k}{\lambda} \quad V(X) = \frac{k}{\lambda^2}$$

3.2.6 Loi de Rayleigh

Définition (Loi de Rayleigh) . Une variable aléatoire X suit une loi de Rayleigh de paramètre $\sigma > 0$ si sa densité est :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sigma^2} e^{-t^2/(2\sigma^2)} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $X \sim \mathcal{R}(\sigma)$.

Proposition

$$\mathbb{E}(X) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad V(X) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2$$

3.2.7 Loi χ^2

Définition (Loi χ^2) . Une variable aléatoire X suit une loi χ^2 à $\nu \in \mathbb{N}^*$ degrés de liberté si :

$$X \sim \Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Soit :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} t^{\nu/2-1} e^{-t/2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition

$$\mathbb{E}(X) = \nu \quad V(X) = 2\nu$$

Loi	Notation	Densité $f(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$V(X)$
Uniforme	$\mathcal{U}([a, b])$	$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$	$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
Cauchy	$\mathcal{C}(x_0, \gamma)$	$f(t) = \frac{1}{\pi\gamma} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{t-x_0}{\gamma}\right)^2}$	–	–
Gamma	$\Gamma(k, \lambda)$	$f(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$
Rayleigh	$\mathcal{R}(\sigma)$	$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} & t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$
Khi-deux	$\chi^2(\nu)$	$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} t^{\nu/2-1} e^{-t/2} & t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	ν	2ν

TABLE 3.1 – Résumé des lois de probabilité continues usuelles

Chapitre 4

Convergence de Suite de Variables Aléatoires

Dans ce chapitre nous considérons un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où toutes les variables aléatoires sont discrètes ou à densité.

4.1 Suites de variables aléatoires

4.1.1 Généralités

Commençons tout d'abord par définir formellement les suites de variables aléatoires et étudions quelques-unes de leurs propriétés.

Définition (Suite de variables aléatoires) . Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle suite de variables aléatoires une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n : \begin{cases} \Omega \longrightarrow E \\ \omega \longmapsto X(\omega) \end{cases} \quad \text{est une fonction mesurable}$$

Dans le cas où $E = \mathbb{R}$ on parlera de suite de variables aléatoires réelles.

Définition (Suite i.i.d.) . Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- On dit que la suite est *identiquement distribuée* si toutes les variables X_n ont la même loi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n \sim \mathcal{L}.$$

- On dit que les variables sont *indépendantes* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on a :

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \in A_k\} \right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k \in A_k)$$

(Cette condition traduit l'indépendance des variables aléatoires en termes de lois de distribution.)

Lorsque (X_n) est à la fois indépendante et identiquement distribuée, on dit que c'est une suite *i.i.d.* (independent and identically distributed).

Les suites de variables aléatoires sont très utiles en modélisation. En effet elles peuvent servir à :

- La modélisation d'une expérience répétée : comme n lancers d'une pièce de monnaie ou n relevés de température.
- Relever des séquences de mesures aléatoires : en statistiques, on collecte souvent des données issues d'un même échantillon aléatoire via le processus d'échantillonnage. Cela revient à considérer une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que les X_n sont :
 - définies sur un même espace probabilisé
 - souvent identiquement distribuées
 - et indépendantes

Exemple (Simple) Considérons l'expérience aléatoire de n lancers d'une pièce équilibrée non truquée. On a alors $\Omega = \{\text{Pile, Face}\} = \{p, f\}$ et soit la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que :

$$U_n = \begin{cases} 0 & \text{si le } n^{\text{ième}} \text{ lancer donne Pile} \\ 1 & \text{si le } n^{\text{ième}} \text{ lancer donne Face} \end{cases}$$

Alors $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli ($\mathcal{B}(1/2)$), indépendantes et identiquement distribuées.

4.1.2 Exemple Introductif : lancer d'une pièce

Reprenons un exemple classique : le lancer d'une pièce de monnaie. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires modélisant les résultats successifs d'un tel lancer. On modélise l'espace probabilisé par l'univers : $\Omega = \{s, \bar{s}\}^{\mathbb{N}^*}$ où s désigne un « succès » (par exemple, pile) et \bar{s} un « échec » (face), et où chaque élément $\omega \in \Omega$ est une suite infinie de résultats.

On suppose que les X_n sont des variables de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p.$$

Cela signifie que chaque lancer est indépendant des précédents, et a une probabilité p de donner 1 (succès).

Considérons la variable aléatoire suivante :

$$X_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

Elle représente la fréquence de succès (i.e. de « pile ») parmi les n premiers lancers. Intuitivement, on s'attend à ce que cette fréquence se rapproche de p quand n devient grand. C'est ce que l'on veut exprimer par une notion de convergence.

Mais si l'on regarde certaines suites particulières $\omega \in \Omega$, par exemple :

- $\omega_1 = (1, 1, 1, 1, \dots)$,
- $\omega_2 = (0, 0, 0, 0, \dots)$,
- $\omega_3 = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \dots)$ (suite périodique),

on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega_1) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega_2) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega_3) = \frac{2}{3}.$$

Ces valeurs ne sont pas égales à p en général. Autrement dit, la convergence point par point (c'est-à-dire pour chaque ω fixé) ne suffit pas à garantir que $X_n(\omega) \rightarrow p$.

Il va donc nous falloir introduire des notions de convergence plus fines, adaptées aux variables aléatoires, qui prennent en compte la structure probabiliste de l'espace. Cela nous amène aux différentes formes de convergence en probabilité. Ces outils permettent de formaliser ce que signifie réellement « X_n tend vers p » dans un contexte probabiliste.

4.2 Convergence en Probabilités

Définition (Convergence en Probabilités) . Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge en probabilité* vers la variable X si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

on note alors : $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Intuitivement, cela signifie que plus n est grand, plus la probabilité que X_n s'écarte significativement de la limite X devient faible. En d'autres termes, les réalisations de X_n deviennent, avec une probabilité croissante, arbitrairement proches de celles de X .

4.2.1 Opérations

Propriété (Convergence en probabilités et somme) . Soient deux suites de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ on a alors :

$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y$$

Propriété (Convergence en probabilités et application continue) . Soient une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telles que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ alors, on a :

$$f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$$

4.2.2 Inégalités utiles et loi faible des grands nombres

Pour effectuer des calculs et calculer des convergences en probabilités, deux inégalités sont très utiles.

Proposition (Inégalité de Markov) Soit X une variable aléatoire **positive** sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ admettant une espérance, alors :

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Proposition (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) Soit X une variable aléatoire admettant une variance, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Théorème (Loi faible des grands nombres (version de Khinchine)) . Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, identiquement distribuées (i.i.d), admettant une espérance $\mu = \mathbb{E}(X_1) < \infty$.

Alors, la moyenne empirique :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

converge en probabilité vers μ :

$$\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu.$$

Autrement dit, en répétant une même expérience aléatoire de manière indépendante, la moyenne des résultats observés finit par se rapprocher, avec une forte probabilité, de la moyenne théorique. C'est le fondement des statistiques empiriques.

Corollaire (Théorème d'or de Bernoulli) . Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre p . Alors la moyenne empirique converge en probabilités vers p .

$$\text{i.e } \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\mathbb{P}} p$$

C'est une version particulière de la loi faible des grands nombres appliquée à une variable de Bernoulli. Elle justifie l'interprétation fréquentiste des probabilités. Cela nous permet de dire que la fréquence statistique d'un événement tend vers sa probabilité. Par exemple, si l'on répète un tirage « pile ou face » (avec $p = 0,5$) un grand nombre de fois, la proportion de « pile » obtenue se rapproche de 0.5 avec une forte probabilité.

4.3 Convergence Presque Sûre

Le modèle de convergence presque sûre s'appuie sur le fait que l'on va négliger le résultat d'événements de probabilité nulle dans le calcul de la convergence. En effet, dans l'exemple d'introduction, nous contredisons notre hypothèse grâce à des événements qui sont en réalité presque impossibles à réaliser. La probabilité qu'ils se produisent est presque nulle, on peut donc ne pas les considérer. C'est ce que va nous permettre la convergence presque sûre.

Définition (Convergence presque sûre) . Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et soit X une variable aléatoire. On dit que (X_n) converge presque sûrement vers X si :

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$$

Autrement dit, il existe un ensemble $A \subset \Omega$ de probabilité 1 tel que, pour tout $\omega \in A$, on ait $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$.

On note alors :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} X \quad \text{ou} \quad X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$$

Cela signifie que presque tous les scénarios de Ω (sauf un ensemble négligeable de probabilité nulle) voient la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendre vers X .

Propriété (Comparaison) . La convergence presque sûre est plus forte que la convergence en probabilités. Soient une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une variable aléatoire

X on a alors :

$$X_n \xrightarrow{p.s.} X \implies X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$$

La réciproque est en général fausse.

4.3.1 Convergence Presque Sûre et Opérations

Propriété (Stabilité par somme et produit) . Soient (X_n) et (Y_n) deux suites de variables aléatoires telles que $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ et $Y_n \xrightarrow{p.s.} Y$. On a alors :

$$X_n + Y_n \xrightarrow{p.s.} X + Y \quad \text{et} \quad X_n \times Y_n \xrightarrow{p.s.} X \times Y$$

Propriété (Convergence presque sûre et application continue) . Soient une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telles que $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ alors, on a :

$$f(X_n) \xrightarrow{p.s.} f(X)$$