# Révisions Master IMA

Axel PIGEON

8 juillet 2025

# Table des matières

# Chapitre 1

# Probabilités

## 1.1 Espaces Probabilisés et Mesures

### 1.1.1 Univers

Introduisons les concepts fondamentaux des probabilités, les univers et les espaces probabilisés.

**Définition** (**Univers**) . On appelle univers $\Omega$ pour une expérience aléatoire, l'ensemble de toutes les issues (situations finales) possibles de cette expérience aléatoire. Chaque élément $\omega \in \Omega$ représente une **issue** de cette expérience aléatoire.

**Exemple**
- Pour une expérience aléatoire de lancer de dé, il existe 6 issues possibles correspondant aux 6 faces du dé. On a donc $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Si on pioche un boule dans une urne contenant une boule rouge et deux boules noires, on a $\Omega = \{\text{rouge}, \text{noir}\}$.

A partir d'un univers, on peut définir la notion d'espace probabilisé. Plus complexe, la définition nécessaire les prérequis du cours d'intégration et de théorie de la mesure.

**Définition** (**Espace Probabilisé**) . Un espace probabilisé est un **triplet** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où :
- $\Omega$ est un univers.
- $\mathcal{F}$ est une tribu ($\sigma$-algèbre) sur $\Omega$.
- $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{F}$ (voir plus loin).

### 1.1.2 Évènements, Issues et Mesure de Probabilité

**Définition** (**Évènement**) . Soit $\Omega$ un univers. On définit un évènement de $\Omega$ comme un sous-ensemble $A \subseteq \Omega$.

**Remarque** Comme définit au début, les **issues** $\omega \in \Omega$ correspondent à des résultats élémentaires de l'expérience aléatoire, à ne pas confondre avec les évènements. Dans notre expérience de lancer de dé, $\{2\} \in \Omega$ est **l'issue** correspondant à "obtenir un 2" et $A = \{1, 2\} \subset \Omega$ est **l'évènement** correspondant à "le résultat est inférieur ou égal à 2".

Par construction, $\mathcal{F}$ contient donc tous les évènements et issues possibles de l'expérience aléatoire. Elle est dont "plus complète" que $\Omega$, on retrouve les propriétés des espaces mesurables, vus en intégration en Licence.

**Définition** (**Mesure de Probabilité**) . Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}$ est une mesure (au sens de la théorie de la mesure) qui vérifie :

1. $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

**Remarque (Rappel : Mesure)** Une fonction $\mu : (X, \mathcal{B}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ telle que :

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. **(Sigma-additivité)** : $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de parties mesures **deux à deux disjointes**, on ait :
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$
est appelée mesure sur l'espace $(X, \mathcal{B}, \mu)$ alors appelé **espace mesuré**.

### 1.1.3 Variable Aléatoire

Pour pouvoir quantifier des calculs de probabilités ou ce que nous appellerons plus tard des lois, nous devons définir les variables aléatoires.

**Définition** (**Variable Aléatoire**) . Une variable aléatoire est une fonction mesurable qui associe une valeur numérique à chaque issue d'un espace probabilisé.

Plus formellement, une variable aléatoire $X$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une fonction $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout ensemble $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (tribu borélienne), on ait $X^{-1}(B) \subset \mathcal{F}$.

On définit l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire comme l'image de $\Omega$ par $X$ noté $X(\Omega)$.

La mesurabilité d'une variable aléatoire permet donc garantir que les évènements associés aux valeurs de la variable aléatoire sont bien mesurables par la mesure de probabilité.

**Proposition** Maintetant que nous avons définit formellement le concept de variable aléatoire, on peut lier cette définition à celle des évènements. En effet, une variable aléatoire est une fonction mesurable sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que :

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, X^{-1}(B) \subset \mathcal{F}$$

On peut alors caractériser un évènement $A$ comme la préimage d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ par $X$ de la façon suivante.

$$A = X^{-1}(B) \text{ pour un certain } B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

### 1.1.4 Variables Discrètes et Continues

Selon la nature de l'espérience aléatoire et de l'univers choisis, on distingue deux grands types de variables aléatoires : les variables aléatoires **discrètes** et **continues**. Cette distinction est fondamentale car elle caractérise la façon dont on exprime et calcule ensuite les probabilités.

**Définition** (**Variable aléatoire discrète**) . Une variable aléatoire $X$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dite **discrète** si l'ensemble de ses valeurs possibles $X(\Omega)$ est un ensemble **fini ou dénombrable**. Dans ce cas, la loi de probabilité de $X$ est donnée par une fonction de masse et les probabilités s'expriment comme des sommes.

**Exemple** Le résultat d'un lancer de dé est une variable aléatoire discrète. Par exemple, si $X$ désigne le résultat d'un lancer de dé, alors $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

**Définition** (**Variable aléatoire continue**) . Une variable aléatoire $X$ est dite **continue** si elle peut prendre une infinité non dénombrable de valeurs, typiquement un intervalle de $\mathbb{R}$. Dans ce cas, il n'existe pas de fonction de masse mais une **densité de probabilité**, et les probabilités s'expriment par des **intégrales**.

**Exemple** Le temps d'attente avant un événement (modélisé par une loi exponentielle), ou la taille d'une personne (loi normale), sont des variables continues. Si $X$ est la taille d'un individu, alors $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle de réels.

**Remarque** La distinction entre lois discrètes et lois continues repose donc sur la nature de la mesure de probabilité utilisée :

- **Mesure de comptage** (ou somme de Dirac) $\Rightarrow$ lois discrètes.
- **Mesure de Lebesgue** (avec densité) $\Rightarrow$ lois continues.

Nous allons maintenant étudier les deux grands types de lois de probabilité selon la nature de la variable aléatoire :

- Dans le cas discret : lois binomiale, géométrique, de Poisson...
- Dans le cas continu : loi uniforme, loi exponentielle, loi normale...

# Chapitre 2

# Optimisation

# Chapitre 3

# Simulation