

浙江大学

本科生毕业论文（设计）



题目 基于汉密尔顿及魏格纳分布方程的伦勃透镜

仿真

姓名 / 学号 王子豪 / 3110100930

指导教师 匡翠方

年级与专业 2011 级 光电信息工程

所在院系 光电科学与工程学院

浙江大学本科生毕业论文（设计）诚信承诺书

- 本人郑重地承诺所呈交的毕业论文（设计），是在指导教师的指导下严格按照学校和学院有关规定完成的。
- 本人在毕业论文（设计）中引用他人的观点和参考资料均加以注释和说明。
- 本人承诺在毕业论文（设计）选题和研究内容过程中没有抄袭他人研究成果和伪造相关数据等行为。
- 在毕业论文（设计）中对侵犯任何方面知识产权的行为，由本人承担相应的法律责任。

毕业论文（设计）作者班级 _____ 学号 _____

毕业论文（设计）作者签名： _____

_____ 年 _____ 月 _____ 日

摘要

渐变折射率透镜由于独特的折射率变化趋势具有更强功能性的成像能力。依托于超材料的制造工艺，渐变折射率超材料的制造已经在最近的研究中得到突破。本文引述一种非周期纳米结构的渐变折射率（伦勃）透镜。为分析实验成像与仿真计算之间的误差，我们运用汉密尔顿光线追迹方法。借用力学中汉密尔顿方法，通过定义位置及动量（方向）实线光线追迹，相较于传统方法，该方法更为快速。与此同时结合魏格纳分布方程对不同位置的光强及方向信息进行调制。魏格纳分布方程是一种可以实现同时在空间及频谱域内表示信号的局部频率变换。我们首先通过魏格纳方程获得光线的初始化信息（位置及方向），在代入汉密尔顿计算的过程中对光强进行调制，从而验证对于实验误差的猜想。

关键词： 渐变折射率，伦勃透镜，汉密尔顿光线追迹，魏格纳分布方程

Abstract

The Gradient Index lens has more powerful imaging capability due to its unique index profile. Based on the advanced fabrication procedure of metamaterial, the realization of GRIN metamaterials has made a breakthrough in recent research. This thesis quotes a model of aperiodic nanostructure GRIN lens, i.e. Lüneburg lens. In order to further analyze the discrepancy between experimental and analytical results, we employed Hamiltonian ray tracing method and Wigner distribution function. Hamiltonian was immigrated originally from the concept in mechanics. By defining position and momentum (i.e. direction), Hamiltonian implements the purpose of ray tracing faster than traditional ray tracing methods. Meanwhile, Wigner distribution function was incorporated to modulate light intensity in terms of positions and directions. Wigner distribution function is a kind of transform that can express local signal information in both space and frequency domain simultaneously. In this case, Wigner distribution function was first used to initialize input information (i.e. position and momentum), and modulate intensity during the propagation from Hamiltonian. In this way, we conduct our explanations to the discrepancy of experimental and simulation results.

Keywords: Gradient Index, Lüneburg lens, Hamiltonian ray tracing, Wigner distribution function

目 录

1 绪论	1
1.1 演变折射率（GRIN）超材料	1
1.2 薄膜型演变折射率光学器件	2
1.3 平板型演变折射率光学器件	3
1.4 伦勃透镜的透镜等式	6
1.5 论文结构	7
2 汉密尔顿光线追迹原理	9
2.1 汉密尔顿光线追迹介绍	9
2.2 屏幕及三维汉密尔顿光线追迹	10
2.3 三维光程汉密尔顿光线追迹	13
3 魏格纳分布方程在光学的应用	17
3.1 魏格纳分布方程作为一种局部频谱	17
3.1.1 魏格纳分布方程的定义	18
3.1.2 魏格纳分布方程的相关方程	19
3.1.3 扩展至随机信号	20
3.2 魏格纳分布方程举例	20
3.2.1 点光源	21
3.2.2 平面波	21
3.2.3 二次方相位信号	22
3.2.4 高斯信号	22
3.3 魏格纳分布方程的性质	24
3.4 光学系统的扩展函数	25
3.4.1 薄透镜；非扩展系统	26
3.4.2 菲涅尔近似的自由空间；移不变系统	27
3.4.3 傅立叶变换器	28
3.5 魏格纳分布方程的传输等式	28
4 纳米结构伦勃透镜的光线追迹	31
4.1 纳米结构伦勃透镜	31
4.2 伦勃透镜的光线追迹	34
5 结论	41
参考文献	43

1 绪论

渐变折射率（Gradient Index, GRIN）材料提供了对于光调制最为通用的可能性。GRIN 材料的应用包括成像系统聚焦，光纤的波导，太阳能电池的光阻绊结构，发光器件（LED）中的光抽取等等。整体上，这些应用可以被分为两个类别：薄膜型渐变折射率光器件和平板型渐变折射率光器件，取决于光是穿过 GRIN 介质还是沿着介质传播。

1.1 渐变折射率（GRIN）超材料

如图 1.1 所示，光与介质的相互作用极强的依赖于光的传播方向，这也决定着如何制造材料用于渐变折射率（GRIN）的目的。许多渐变折射率（GRIN）的应用要求折射率有较大变化，所以在所需波长范围附近制造出结构将会比传统的离子交换或光纤制造中的填塞方法具有更广泛的应用利润。通过改变自然材料以创造人工的电磁特性这种方法制造出的新型设备被称为“超材料”（metamaterial）因为其几乎无法由自然界中的其他任何材料取代。渐变折射率超材料（GRIN materials）的优势包括因全电介质制造而带来的更好的光滞留，以及与硅电子系统的兼容从而实现光的耦合与处理。总体而言，创造渐变折射率超材料的逻辑思路为（1）分析设备周围的折射率；（2）选择具有符合设计要求的材料以及制作流程；（3）仿真并确认渐变折射率超材料的性能；（4）执行制作；（5）特征化渐变折射率超材料。由于应用目的的不同，这一流程可以调整以符合要求。

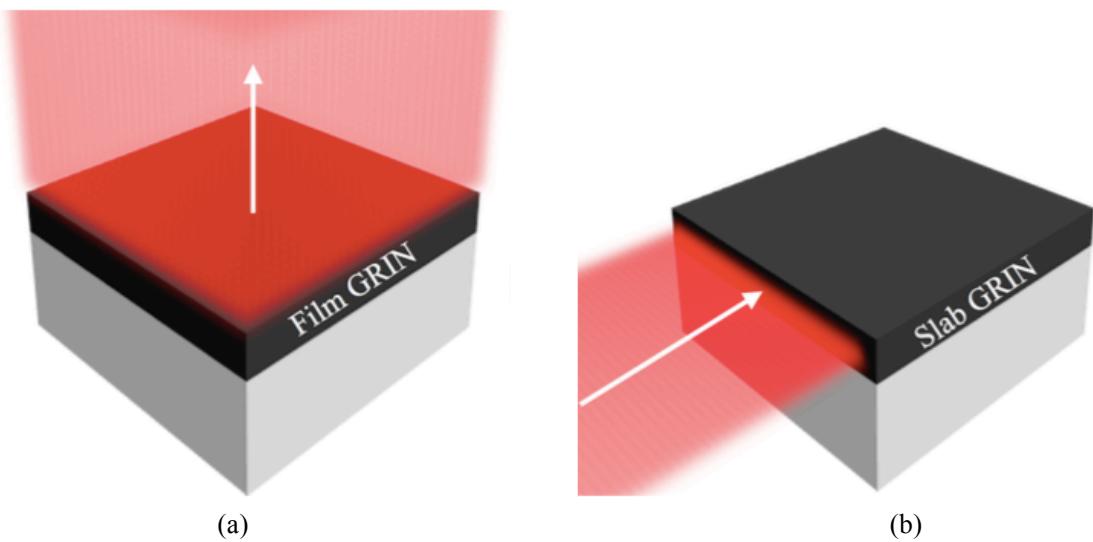


图 1.1 两种类别的渐变折射率超材料。(a) 薄膜型渐变折射率；(b) 平板型渐变折射率。

白色箭头显示出光的传播方向。

1.2 薄膜型渐变折射率光学器件

本文讨论的薄膜型渐变折射率光学器件主要代表了在抗反射及光提取增强方面的应用。他们都是通过穿透薄膜实现光的收集但传播方向相反。在这里最优的设计无法反向应用，因为出射点的光折射率的缘故。当光从低折射率周围入射到高折射率基底，问题仅出现在阻抗匹配上。然而，若条件相反，即光线从高折射率基底入射到低折射率周围，则不仅需要考虑阻抗匹配，还要考虑光线入射超过临界角时的全内反射（total internal reflection, TIR）现象。抗反射的应用之一是用于增强太阳能电池效率的光阻隔结构^[1]，如图 1.2 所示。经过在硅基底表面纳米塑造纹理之后，反射率可以由传统的微纹理结果的 25% 降到 0.52%。与此同时，纳米锥结构在大角度入射光的情况下同样显示出相同的抗反射性能。然而，纳米锥结构无法在全内反射（TIR）情况相完成光抽取过程，所以需要一种像衍射光栅的不同结构打破 TIR 的限制。以 LED 的光抽取为例。发光层通常生长在具有 1.8 折射率的蓝宝石基底上，这使得临界角为 34° 。入射光角度超过 34° 将无法从蓝宝石中传播出去，并且将通过来回的反射绊在基底内直到能量耗散。如图 1.3 所示的二维光栅结构的光子晶体可以解决超过临界角的光提取问题，但新的问题在于小于临界角的入射光束具有更少的透射率。

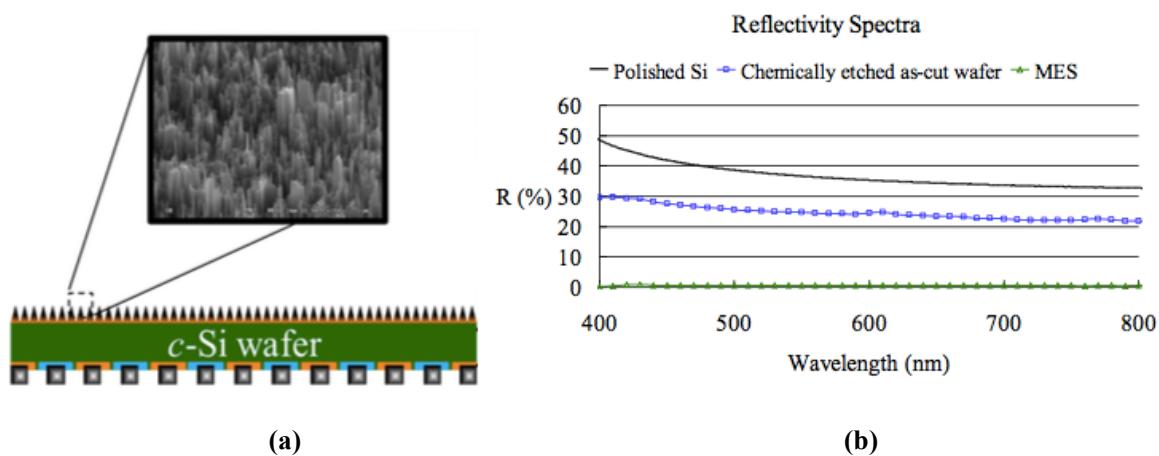


图 1.2 蛾眼结构 (a) 应用在超薄单晶硅太阳能电池上；(b) 可见光范围 (400-800nm) 的反射率。

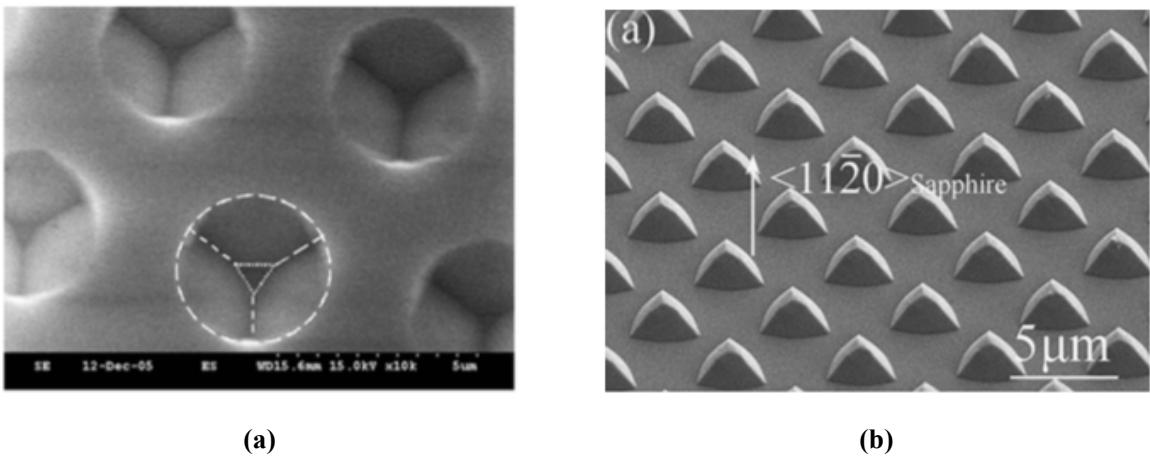


图 1.3 光抽取加强的蓝宝石结构 (a) 反向金字塔结构; (b) 金字塔结构

1.3 平板型渐变折射率光学器件

在平板型 GRIN 光学器件中，满足波导条件的光波沿着波导传播以进行诸如耦合与聚焦等方面的硅光电子应用。其中有三种较为著名且有趣的 GRIN 透镜的例子。

第一种为麦克斯韦鱼眼镜，如图 1.4 所示。该图片有屏幕汉密尔顿（Screen Hamiltonian）计算得到（见第 2 章）。其特性为：若一个点光源位于透镜的边界，则由该点光源发出的朝向透镜区域的光线将聚焦在透镜的另一边界上，且两边界点在透镜直径上。其折射率分布的表达式为：

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2} \quad (1.1)$$

其中， n_0 为透镜边界以外区域的折射率值， R 为透镜区域的半径值， r 为相对于球心位置的半径坐标。

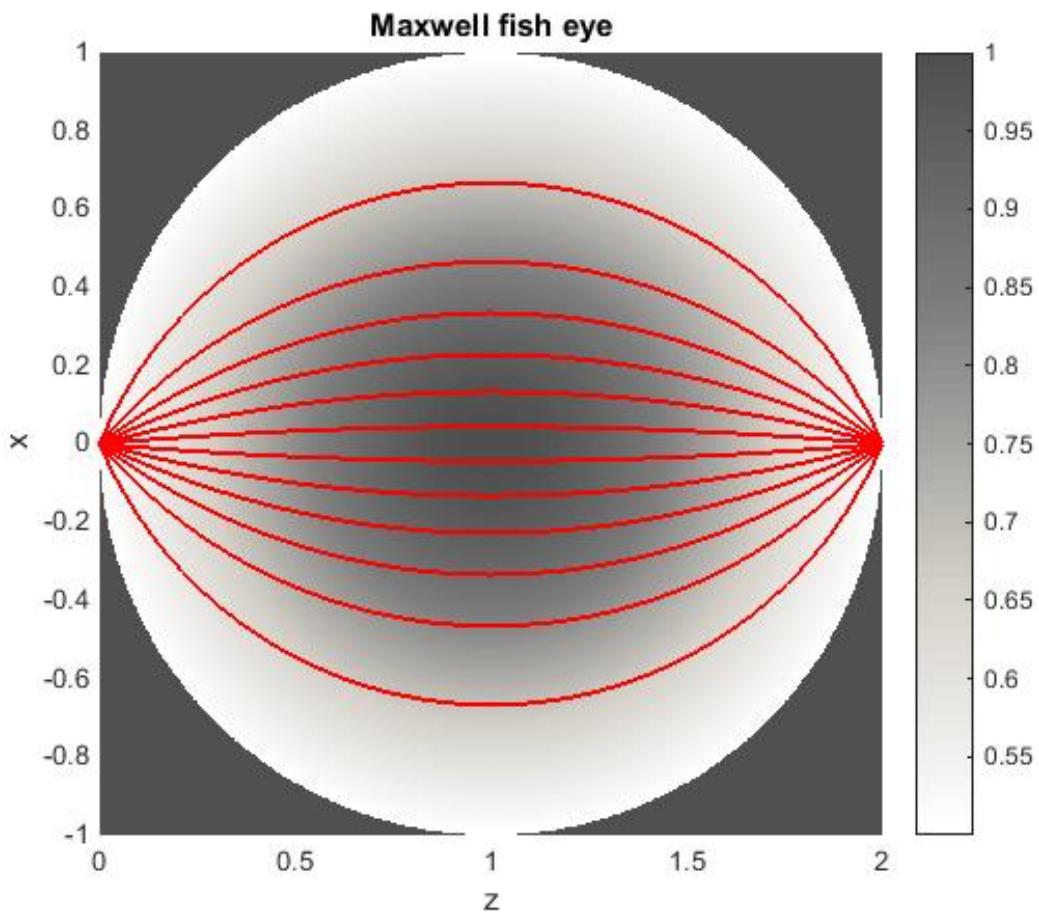


图 1.4 麦克斯韦鱼眼镜示意图。红色为光线示例；灰阶代表折射率分布，颜色越深折射率越高。

第二种透镜为伊顿透镜（Eaton's lens），如图 1.5 所示。该透镜可以实现将光线弯折至所需角度。如图所示，平行光束在经过伊顿透镜后旋转了 180° 。

伊顿透镜的折射率表达式为

$$n(r) = n_0 \sqrt{\frac{2R}{r} - 1} \quad (1.2)$$

其中， n_0 为透镜边界以外区域的折射率值， R 为透镜区域的半径值， r 为相对于球心位置的半径坐标。

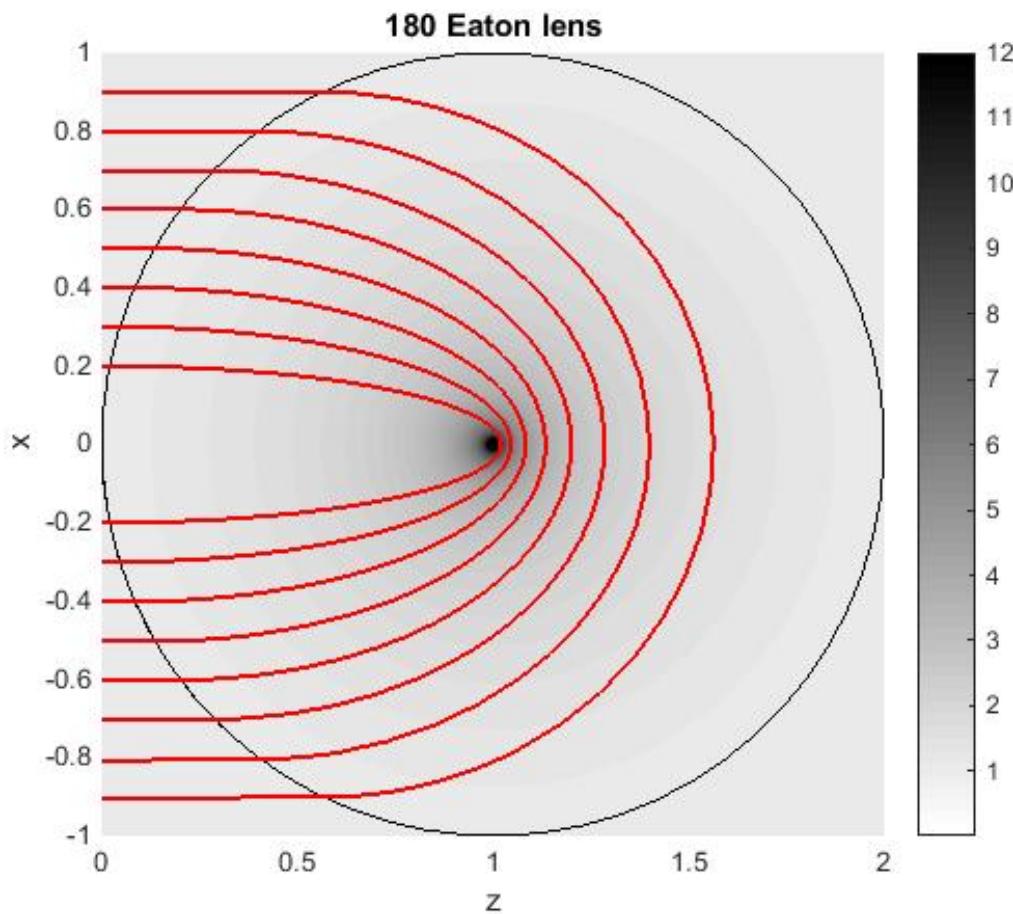


图 1.5 伊顿透镜示意图。红色为光线示例；灰阶代表折射率分布，颜色越深折射率越高。

第三种透镜为伦勃透镜（Lüneburg Lens），如图 1.5 所示。伦勃透镜的特点是可以将任意方向入射的平面波完美的聚焦到透镜的另一边界处。其折射率分布为：

$$n(r) = n_0 \sqrt{2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \quad (1.3)$$

其中， n_0 为透镜边界以外区域的折射率值， R 为透镜区域的半径值， r 为相对于球心位置的半径坐标。伦勃透镜是三种结构中最容易应用的一种，这是因为它具有对于制造来讲合理的折射率变化以及实用的功能性。伦勃透镜的好处在于多方向聚焦；然而，直到目前对于 GRIN 的实现也只在微波频率的应用，比如聚焦进入高增益天线^[2,3,4]。研究人员运用分层材料控制折射率并建立起宏观层面的伦勃透镜。通过开发纳米平板印刷术并通过扩散理解制造折射率的操作步骤，研究人员也实现了红外伦勃透镜的制造。例如，Yao 等人通过改变薄膜厚度来控制有效折射率，但是由于相对较小的厚度，设备层的模式便得不到很好的限制^[5]。使用渐变厚度的全介质这一概念也可以被应用到等离子伦勃透镜以创造所需的模式，但是从金属表面而来的本征传播损耗仍旧无法兼容硅光电子器件，即便使用了光学泵

浦增益介质^[6,7]。伦勃透镜是缓和由光纤耦合进入硅光子器件过程中的不对准现象很好的接口。

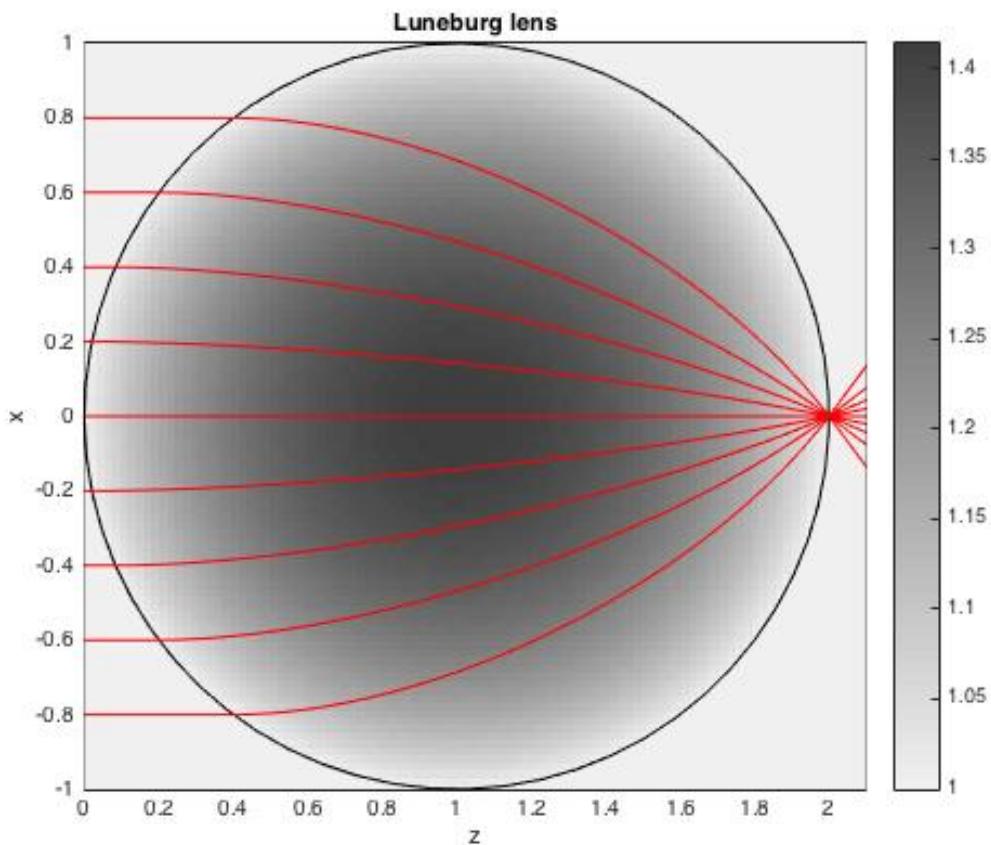


图 1.6 伦勃透镜。红色为光线示例；灰阶代表折射率分布，颜色越深折射率越高。

1.4 伦勃透镜的透镜等式

在旁轴近似下可以推导出伦勃透镜的透镜等式。根据几何光学，首先确定第一和第二主平面的位置。

从图 1.7 可以得出主平面 (Principle planes)。蓝线为某一典型光线轨迹穿过透镜，该光线左侧平行于光轴入射。它聚焦在透镜右侧边界 (点 B) 处。由于可逆性原理，右侧以同样方向入射的光线将沿着同样的光线轨迹以 A 点平行光轴射出。由于伦勃透镜的球对称特性，这条光线将关于虚线 1 对称，如图 1.7(a)。因此角 α 与角 θ' 相等。 $\angle\theta' = \angle\theta$, $\angle\alpha = \angle\theta$ 。通过反向延长出射光线与入射光线可以得到第二主平面，由图可得第二主平面通过球心。同样的，第一主平面也通过球心。

由于得到了两个主平面，我们可以推导出透镜等式。假设物体位于距离透镜左侧边界 z 处，则其像位于距离透镜右侧边界的 z' 处。如图 1.7 (b) 所示。透镜

等式可以表示为

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (1.4)$$

其中 $s = z + R$, $s' = z' + R$ 并且 $f = R$ 。因此

$$zz' = R^2 \quad (1.5)$$

这就是在旁轴近似下伦勃透镜的透镜等式。

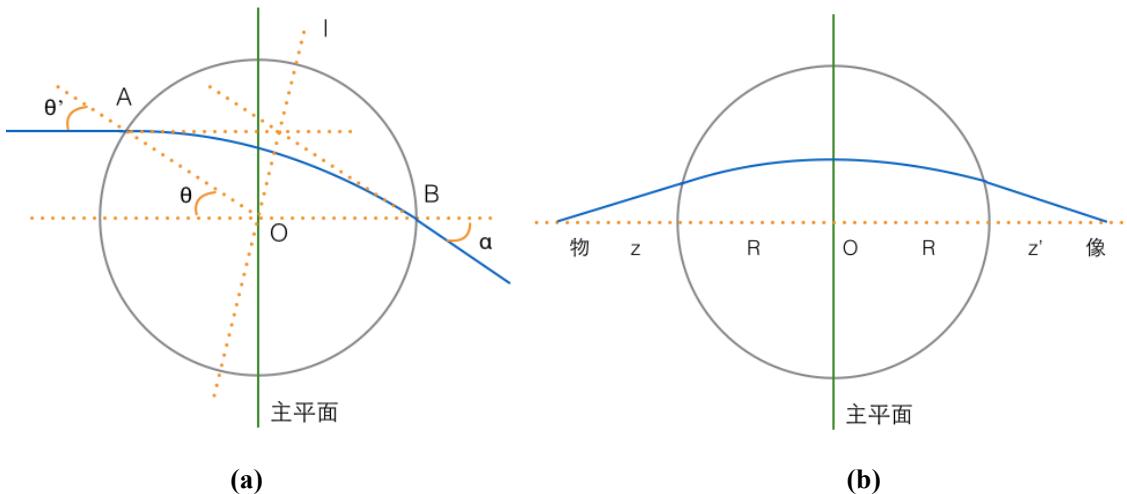


图 1.7 伦勃透镜等式的推导。(a) 决定第一及第二主平面。(b) 推导透镜等式。黑色圆内为伦勃透镜，垂直的绿线为主平面，蓝线为光线轨迹。

1.5 论文结构

本文主要研究渐变折射率透镜的成像特性。由于传统光学中计算光线追迹的方法较难应用到渐变折射率透镜结构中，因此引入汉密尔顿光线追迹方法进行光线追迹。第二章主要介绍汉密尔顿光线追迹方法的原理。汉密尔顿光线追迹方法主要分为屏幕汉密尔顿和三维汉密尔顿。屏幕汉密尔顿即是将光线传播根据横向屏幕（沿 z 轴行进）划分轨迹；而三维汉密尔顿引入另外一个“时间”变量，从而解放出 z 变量，克服了屏幕汉密尔顿的局限性。与此同时，将“时间”变量按照折射率进行修正，即将同一时刻不同光线统一起来，这样可以获取波前信息。这种改进的三维汉密尔顿成为三维光程汉密尔顿。第三章介绍魏格纳分布方程的原理、性质及其在光学中的应用。魏格纳分布方程是一种类似于傅立叶变换的空间一频率域变换，与之不同的是魏格纳分布方程为一种局部频率。该方程可以同时在空间域及频率域内表示信号。这一同时表示空间一频率的描述与几何光学中的光线概念极为相似，在某种意义上，魏格纳分布方程可以理解为光线强度。魏

格纳分布方程实现了将几何光学与物理光学连接起来的工具。第四章介绍运用汉密尔顿及魏格纳分布方程进行的伦勃透镜的光线追迹。引述并分析一种非周期纳米结构伦勃透镜的实验结果并将其与通过有限元分析方法 FDTD 进行比较，猜想结果的不同来自于光线在传播过程中发生了散射。运用魏格纳分布方程对行进过程中的光线进行强度及方向的调制对假设进行验证。

2 汉密尔顿光线追迹原理

2.1 汉密尔顿光线追迹介绍

光线追迹是一种对于波或粒子以保守（汉密尔顿）势通过介质或系统时的通用的路径生成方法。这一方法已经被广泛使用于科学研究领域，诸如水下声学^[9]，地震学^[10]，等离子物理^[11]，辐射物理^[12]，光学^[13]等。在光学领域，尤其是光学设计与工程，光线追迹被广泛的应用。例如，光学设计软件，如 ZEMAX，则是基于光线追迹方法用以设计光学系统。光线追迹在设计及分析渐变折射率（GRAdient-INdex, GRIN）光学器件尤其有帮助。渐变折射率透镜（GRIN lens）^[14]具有渐变折射率分布，这样光线将沿着曲线而非直线传播。光线追迹提供一种近似于麦克斯韦方程组的解，并基于物体尺寸远大于波长的假设。

假设 GRIN 透镜具有折射率 $n(\mathbf{r})$ ，光线路径由光线方程决定^[15,16]

$$\frac{d}{ds} \left[n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] = \nabla n(\mathbf{r}), \quad (2.1)$$

其中 $n(\mathbf{r})$ 表示在位置 \mathbf{r} 处的折射率，用 s 参量化光线轨道。许多光线追迹技术被提出并应用，其中包括柱坐标光线追迹^[17]，解析光线追迹方法^[18,19]，微分方程的多项式解方法^[20]等等。对于大多数现有方法，推导出的光线追迹等式是通过标准数值技巧例如龙库一库塔方法。

汉密尔顿光线追迹^[21, 22]是基于费马极值原理^[23]。光线轨迹满足基于拉格朗日及费马原理而导出的汉密尔顿等式。在这里汉密尔顿满足动量守恒。这种类型的光线追迹是本章主要讨论的话题。

随着在光子晶体及超材料等方面的研究与应用的深入，这些介质中的光线传播具有很高的重要性^[24,25]。对于这一问题的一个传统的解决方法是时域有限差分方法（finite-difference time-domain, FDTD）^[26]。然而，光线追迹通常在计算上较 FDTD 更为高效^[27]。汉密尔顿光线追迹也被扩展到光子晶体^[28,27]以用于高速可靠的光线传播分析。

对于超材料，他们总是被当作有效介质因为操作的光波长远大于单位晶胞，因此可以生成相应的有效折射率分布。以这种方式，可以建立起超材料与相应的 GRIN 介质的类比^[10,29]。GRIN 介质光线追迹方法分在对于超材料的分析基础上描绘光线。

本章通过屏幕（screen）及三维（3D）汉密尔顿简单介绍汉密尔顿光线追迹。由于他们的数值限制，引入一种基于光学路径长度的三维汉密尔顿光线追迹方法作为扩展。

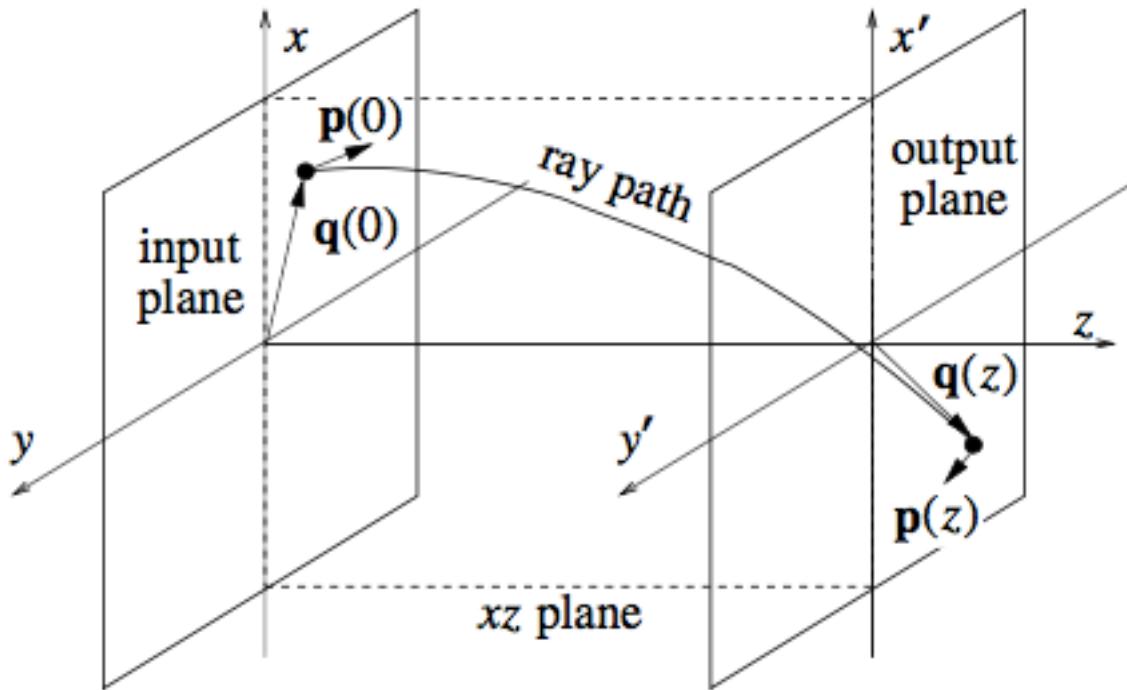


图 2.1 屏幕及三维汉密尔顿光线追迹的几何结构

2.2 屏幕及三维汉密尔顿光线追迹

汉密尔顿光线追迹^[21,22]来自于费马极值原理并且对于各向同性或异性的介质都可应用^[30]。传统意义上其具有两种形式，分别被称作屏幕汉密尔顿（Screen Hamiltonian）及三维汉密尔顿（3D Hamiltonian）。本节简单介绍两者的含义及区别。

汉密尔顿光线追迹的几何结构在图 2.1 中显示。两种表示的主要区别在于表示光线轨迹的参数。屏幕汉密尔顿运用光轴 z 并将 x 和 y 作为“屏幕”上的坐标，而三维汉密尔顿运用轨迹上的参数 s 并保持所有三个参数作为位置及动量的表示。

费马原理定义了光程（optical path length, OPL）为

$$\mathcal{L} \equiv \int_{\Gamma} n(\mathbf{q}) dl \quad (2.2)$$

其中 Γ 是光线路径, dl 是沿着 Γ 的弧长微元。注意这里的 $\mathbf{q} \equiv (q_x, q_y, q_z)$ 用来表示位置, $\mathbf{p} \equiv (p_x, p_y, p_z)$ 用来表示动量。

对于屏幕汉密尔顿, 位置和动量定义在 x-y 平面上, 因此他们是关于 z 的函数:

$$\mathbf{q}(z) = (q_x(z), q_y(z)); \quad \mathbf{p}(z) = (p_x(z), p_y(z)) \quad (2.3)$$

这样, OPL 可以表示为

$$\mathcal{L} = \int_{z_1}^{z_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, z) dz = \int_{z_1}^{z_2} n(\mathbf{q}, z) \sqrt{|\dot{\mathbf{q}}|^2 + 1} dz \quad (2.4)$$

其中 $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, z)$ 为光学拉格朗日 (optical Lagrangian), $\dot{\mathbf{q}}(z) = \left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right)$ 并且 z_1, z_2 表示初始及最终 z “屏幕” 的轨迹。

光学拉格朗日需要满足欧拉等式 (Euler's equation)

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0 \quad (2.5)$$

这里, 通过使用勒让德变换 (Legendre transform)

$$H \equiv \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L \quad (2.6)$$

将拉格朗日 L 替换为汉密尔顿 H, 最终得到屏幕汉密尔顿等式

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{\mathbf{p}}{H}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \frac{n}{H} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.7)$$

其中

$$H = -\sqrt{n^2(\mathbf{q}, z) - |\mathbf{p}|^2} = -p_z \quad (2.8)$$

屏幕汉密尔顿 H 的物理含义是 z 方向上的动量 p 的负值。具有汉密尔顿等式, 光线轨迹可以由诸如商业软件 MATLAB® 中的“ODE45” 数值方法求解, 该方法运用显式龙格—库塔法(Runge-Kutta formula)计算。图 2.2 为 GRIN 透镜 (其折射率定义为 $n(x) = \sqrt{2 - x^2}$) 的光线追迹效果图。

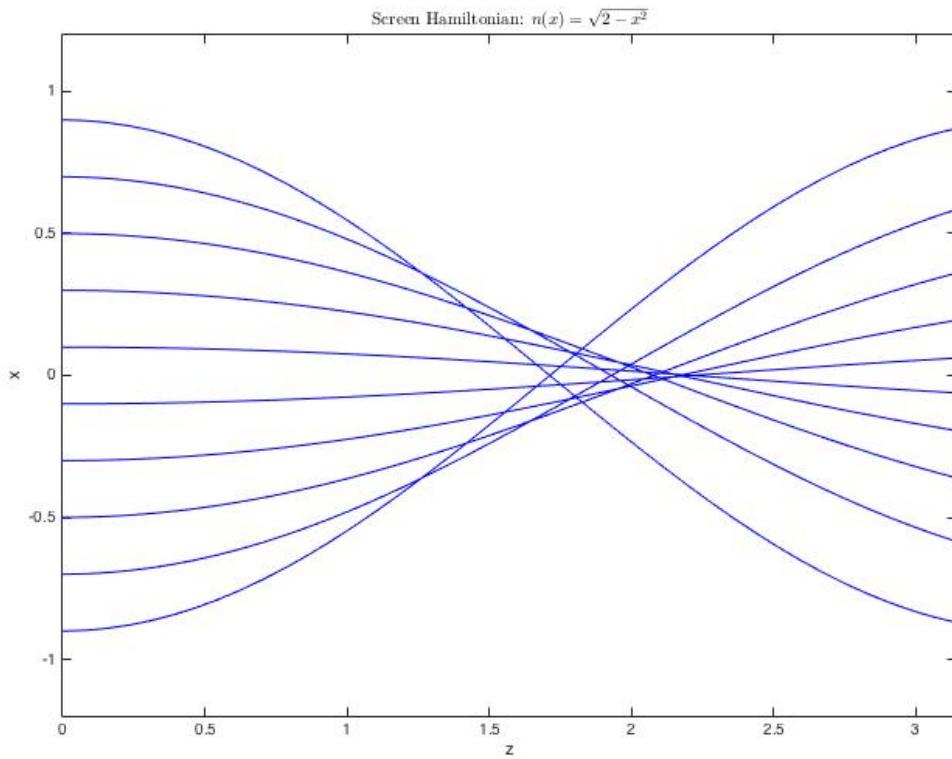


图 2.2 GRIN 透镜的屏幕汉密尔顿光线追迹效果图。 $n(x) = \sqrt{2 - x^2}$

但是，一个潜在的缺陷使得该方法具有一定局限性。ODE45 默认计算沿 $+z$ 方向行进。若光线轨迹出现旋转或返回沿着 $-z$ 方向传播，则该方法将失败。

这一问题可以通过使用三维汉密尔顿 (three dimensional Hamiltonian) 光线追迹等式避免。3D 汉密尔顿运用参量 s 来将光线轨迹参数化，即

$$\mathbf{q}(s) = (q_x(s), q_y(s), q_z(s)); \quad \mathbf{p}(s) = (p_x(s), p_y(s), p_z(s)) \quad (2.9)$$

因此在这里光学拉格朗日变为

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, s) = n(\mathbf{q}) |\dot{\mathbf{q}}| \quad (2.10)$$

其中 $\dot{\mathbf{q}}(s) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right)$ 及 $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ 。

通过沿袭与之前相似的推导，三维汉密尔顿等式为

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.11)$$

其中

$$H = |\mathbf{p}| - n(\mathbf{q}) \quad (2.12)$$

如图 2.3 所示为这一方法应用于“黑洞型”折射率 ($n(r) \sim \frac{1}{r}$) 的结果。正如

预计，光线在传播过程中旋转并接近“中心”。这一方法解决了屏幕汉密尔顿的局

限。其中原因在于在这一方法中，光线总是沿着+s 方向传播。

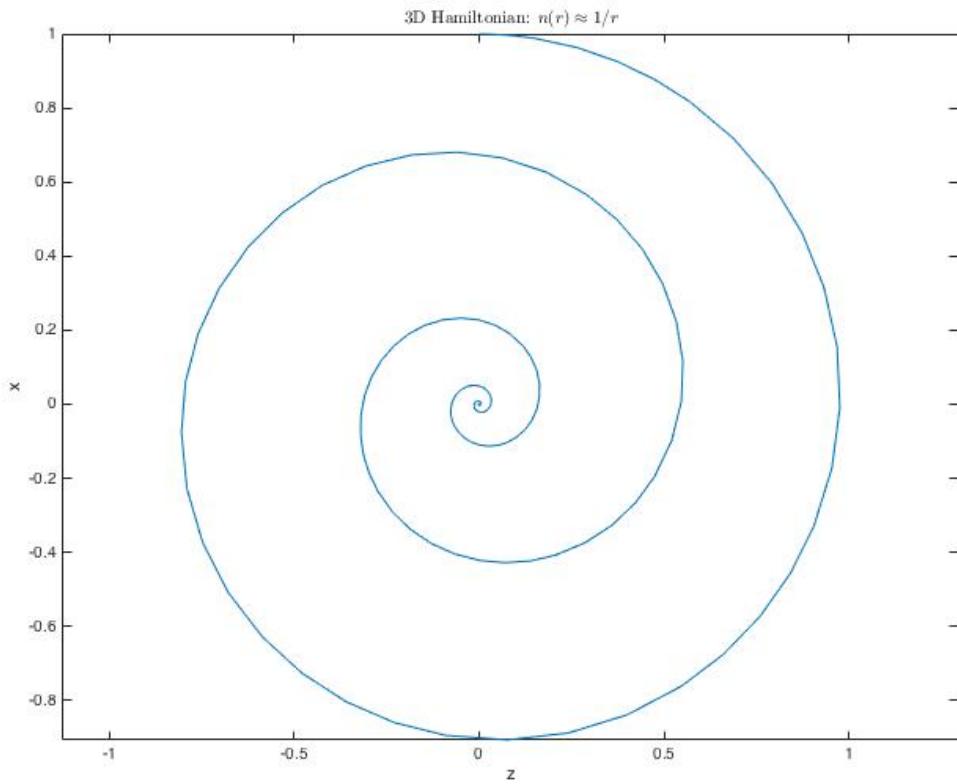


图 2.3 运用三维汉密尔顿光线追迹方法计算的光线追迹效果。这里的折射率分布为

$$n(r) \sim \frac{1}{r}$$

2.3 三维光程汉密尔顿光线追迹

在本节中，为了推动波前的生成并提供更多物理含义，将三维汉密尔顿光线追迹扩展为三维光程汉密尔顿光线追迹。如前所述，三维汉密尔顿光线追迹运用 s 来将实际光路参量化。然而，光学中运用光程（OPL）来更为直观地表示光路。由于使用光程，波前可以由光线追迹结果简单的产生。其方程推导如下，

不运用 s ，而运用 $s' = n(\mathbf{q})s$ 来将光线路径参量化。光程（OPL）因此而成为

$$\mathcal{L} = \int_{s'_1}^{s'_2} n \sqrt{\left(\frac{dx}{ds'}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds'}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds'}\right)^2} ds' \quad (2.13)$$

光学拉格朗日变为

$$L = n|\dot{\mathbf{q}}| \quad (2.14)$$

其中

$$\dot{\mathbf{q}} = \left(\frac{dx}{ds'}, \frac{dy}{ds'}, \frac{dz}{ds'} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) \quad (2.15)$$

因此

$$|\dot{\mathbf{q}}| = \frac{1}{n}, \quad L = 1 \quad (2.16)$$

动量可以被表示为

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = n \frac{\dot{\mathbf{q}}}{|\dot{\mathbf{q}}|} \quad (2.17)$$

由此

$$|\mathbf{p}| = n \quad (2.18)$$

因此

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{p} \cdot |\dot{\mathbf{q}}|}{n} = \frac{\mathbf{p}}{n|\mathbf{p}|} \quad (2.19)$$

在 OPL 下的三维汉密尔顿通过勒让德变换定义为

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L = \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{p}}{n|\mathbf{p}|} - 1 = \frac{|\mathbf{p}|}{n} - 1 \quad (2.20)$$

于是，汉密尔顿等式为

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds'} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{n} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}; \quad (2.21)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds'} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.22)$$

3D OPL 汉密尔顿光线追迹与原始的 3D 汉密尔顿光线追迹只区别在标量因子 $1/n$ 。

这里以伦勃透镜 (Luneburg lens) 为例。假设透镜半径为 1 并且具有折射率分布 $n = \sqrt{2 - r^2}$ 。周边材料折射率 $n_0 = 1$ 。伦勃透镜可以将一束平面波汇聚到透镜对面的理想几何点^[31]。由 MATLAB® 的 ODE45 计算而得的光线追迹结果及波前显示式在图 2.4 中。由图可以观察到一束平面波汇聚在透镜的右侧边界上并且所有汇聚在焦点处的光线都具有相同的光程 (OPL)。这正是伦勃透镜的性质。

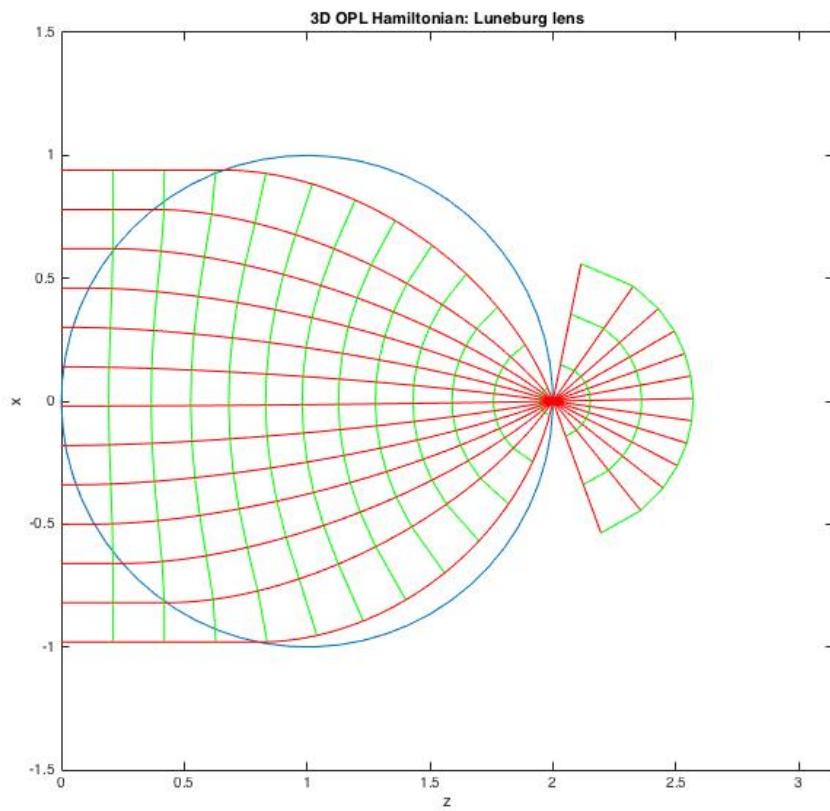


图 2.4 运用 3D OPL 汉密尔顿光线追迹方法计算的光线及波前。从左侧入射平面波。

3 魏格纳分布方程在光学的应用

在 1932 年魏格纳 (Wigner) 将一种分布方程引入力学^[32], 从而实现了在相位空间中描述力学现象的功能。魏格纳分布方程在 1968 年由沃尔特 (Walther) 引入光学领域, 以期将部分相干与辐射学联系在一起。几年后, 魏格纳分布方程再一次被引入到光学领域 (尤其是傅立叶光学), 从那时起, 涌现出很多魏格纳分布方程的应用。本章将对光学领域中的魏格纳分布方程及其应用进行回顾。

光学系统理论在傅立叶光学方面得到了良好的发展。另外一方面, 几何光学也提供了一套良好的光学系统理论。而如何将两种理论有机地结合起来, 则是现代光学理论中较为新兴的课题, 魏格纳分布方程的作用则是将两者直接联系起来。对光学信号与系统的描述, 我们首先通过引入信号的魏格纳分布方程。然后再进一步分析其与几何光学中光线的概念的相似之处。魏格纳分布方程并不受限于确定信号, 也同样适用于部分相干光信号。在后者的情况下, 魏格纳分布方程与由沃尔特 (Walther) 引入的广义辐射学相类似^[33]。在处理光学系统时, 我们可以按照其魏格纳分布方程建立起输入信号与输出信号之间的关系。在这种关系下, 系统由两个魏格纳分布方程表示。

3.1 魏格纳分布方程作为一种局部频谱

有时描述一个空间信号 $\varphi(x)$, 在频率域内通过频率谱表示比在空间域内表示更为方便。例如常见的傅立叶变换

$$\bar{\varphi}(u) = \int \varphi(x) \exp[-iux] dx \quad (3.1)$$

其中符号上面标示横线表示我们在频率域内处理这一方称。傅立叶变换的频谱显示了信号能量的全局分布。然而, 我们通常更对局部能量分布感兴趣。例如, 几何光学通常以光线的形式表示信号, 并通过光线在某一点的方向 (空间频率) 给出对于信号的描述。因此, 我们试图寻找一种被称作局部频谱的信号表示方法。本节我们介绍一种很合适的方法, 魏格纳分布方程, 并考虑其与其他信号表示方法之间的关系。

3.1.1 魏格纳分布方程的定义

信号 $\varphi(x)$ 的魏格纳分布方程^[32, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41]定义如下，

$$F(x, u) = \int \varphi(x + \frac{1}{2}x')\varphi^*(x - \frac{1}{2}x') \exp[-iux']dx' \quad (3.2)$$

其中星号表示函数的复数共轭。式(3.2)的定义首先由 E. Wigner 引入力学研究^[32]并在相位空间中提供了对力学现象的描述。

魏格纳分布方程可被视为一种能够表示信号局部频谱的方程；的确，将 x 作为参数，定义中的积分代表了对乘积 $\varphi(x + \frac{1}{2}x')\varphi^*(x - \frac{1}{2}x')$ 的傅立叶变换（频率变量为 u ）。除了空间域上的定义，还有在频率域上等价的定义，

$$F(x, u) = \frac{1}{2\pi} \int \bar{\varphi}(u + \frac{1}{2}u')\bar{\varphi}^*(u - \frac{1}{2}u') \exp[-iu'x]du' \quad (3.3)$$

魏格纳分布方程 $F(x, u)$ 同时在空间和频率上表示信号。于是形成了介于纯空间表示 $\varphi(x)$ 与纯频率表示 $\bar{\varphi}(u)$ 之间的一种信号表示。而且，这一同时表示空间—频率的描述与几何光学中的光线概念极为相似，其中一束光线的位置和方向也被同时给出。在某种意义上， $F(x, u)$ 是光线的强度，通过点 x 并具有频率（也即，方向） u 。

关于魏格纳分布方程，具有以下性质。它是一个实方程，并且几乎是对信号的完整描述。确实，从与定义(3.2)及(3.3)相对应的逆向关系，

$$\varphi(x_1)\varphi^*(x_2) = \frac{1}{2\pi} \int F[\frac{1}{2}(x_1 + x_2), u] \exp[iu(x_1 - x_2)]du \quad (3.4)$$

及

$$\bar{\varphi}(u_1)\bar{\varphi}^*(u_2) = \int F[x, \frac{1}{2}(u_1 + u_2)] \exp[-i(u_1 - u_2)x]dx \quad (3.5)$$

可以得出结论，信号可以由其魏格纳分布方程重建并带有一个恒定相位因子；然而，这一相位因子通常并不重要。

局部频率谱，如魏格纳分布方程，同时在空间 x 及频率 u 上描述信号。然而它是由一个变量导出为两个变量的方程。因此必须满足某些限制。及并非所有具有双变量的方程都是局部频率谱。局部频率谱必须满足的限制与力学中的海森堡不确定原理相对应，其中阐述了同时过于精确的决定粒子的位置和动量信息是不可能的。

导出某一双变量方程必须满足的充分必要条件以成为魏格纳分布方程并不困

难。某一实方程 $F(x, u)$ 只有满足以下条件^[42]才能成为魏格纳分布方程对于任意 a 和 b

$$\begin{aligned} F(a + \frac{1}{2}x, b + \frac{1}{2}u)F(a - \frac{1}{2}x, b - \frac{1}{2}u) = \\ \frac{1}{2\pi} \iint F(a + \frac{1}{2}x_0, b + \frac{1}{2}u_0)F(a - \frac{1}{2}x_0, b - \frac{1}{2}u_0) \exp[-i(ux_0 - u_0x)]dx_0 du_0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.1.2 魏格纳分布方程的相关方程

魏格纳分布方程是一类非常广泛的空间—频率方程的代表^[40,43]，他们相互之间通过线性变换相联系。一些熟知的空间—频率表示，如伍德沃德的模棱方程（Woodward's ambiguity function）^[41,44,45,46]，Rihaczek 的复能量密度方程（Rihaczek's complex energy density function），以及马克物理谱（Mark's physical spectrum）^[18]，都属于这一类。伍德沃德的模棱方程 $A(x', u')$ 定义如下

$$A(x', u') = \int \varphi(x + \frac{1}{2}x')\varphi^*(x - \frac{1}{2}x') \exp[-iu'x]dx \quad (3.7)$$

通过一个双傅立叶变换与魏格纳分布方程相关联：

$$A(x, u) = \frac{1}{2\pi} \iint \exp[i(u_0x - ux_0)]F(x_0, u_0)dx_0 du_0 \quad (3.8)$$

Rihaczek 的复能量密度谱 $C(x, u)$ ，定义为

$$C(x, u) = \varphi(x)\bar{\varphi}^*(u)\exp[-iux] \quad (3.9)$$

通过卷积与魏格纳分布方程相关联：

$$C(x, u) = \frac{1}{2\pi} \iint 2\exp[-2i(u - u_0)(x - x_0)]F(x_0, u_0)dx_0 du_0 \quad (3.10)$$

复能量密度方程的实部 $R(x, u)$ 通过卷积与魏格纳方程相关联

$$R(x, u) = \frac{1}{2\pi} \iint 2\cos[2(u - u_0)(x - x_0)]F(x_0, u_0)dx_0 du_0 \quad (3.11)$$

其中魏格纳分布方程的实数性被应用。Mark 的物理谱，被定义为信号 $\varphi(x)$ 与窗函数 $w(x)$ 的交叉模棱方程（cross-ambiguity）平方模 $S_w(x, u)$ ，

$$S_w(x, u) = \int \varphi(y)w^*(y - x)\exp[-iuy]dy \quad (3.12)$$

通过以下关系与魏格纳分布方程相关联

$$|S_w(x, u)|^2 = \frac{1}{2\pi} \iint F_w(x_0 - x, u_0 - u)F(x_0, u_0)dx_0 du_0 \quad (3.13)$$

其中 $F_w(x, u)$ 代表了窗函数 $w(x)$ 的魏格纳分布方程；注意方程 $S_w(x, u)$ 与语音处理中的短时傅立叶变换相似^[47]。

如上所列的空间—频率方程属于一种广泛的空间频率方程类别，被称为科恩

类 (Cohen class) [43]。这一类中的任何方程都可以由普通方程所表示

$$\frac{1}{2\pi} \iiint \varphi(y + \frac{1}{2}x') \varphi^*(y - \frac{1}{2}x') k(x, u, x', u') \exp[-i(ux' - u'x + u'y)] dy dx' du' \quad (3.14)$$

其内核 $k(x, u, x', u')$ 由科恩类中选择一个特殊的方程。例如，魏格纳分布方程可由 $k(x, u, x', u') = 1$ 得到，而 $k(x, u, x', u') = 2\pi\delta(x - x')\delta(u - u')$ 可以得到模棱方程。本章将着重分析魏格纳分布方程而不考虑空间一频率方程中的其他成员。

3.1.3 扩展至随机信号

魏格纳分布方程依赖于信号的二次方。这意味着信号的线性组合将导致所有种交叉 WDF 并且得到的 WDF 并不仅是各自信号 WDF 的线性组合。尽管在某些情况下这会成为一种劣势，但二次依赖关系也可以成为优势。WDF 的二次以来行为是我们可以将这一理论扩展到随机信号而非确知信号，而且并不会增加方程的维度。

假设我们处理一个随机信号 $\varphi(x)$ ，其可以由乘积 $\varphi(x_1)\varphi^*(x_2)$ 的总体均值描述，被称为相关函数 $\Gamma(x_1, x_2)$ [46]：

$$\Gamma(x_1, x_2) = E\{\varphi(x_1)\varphi^*(x_2)\} \quad (3.15)$$

这一随机信号的魏格纳分布方程可以被定义为^[36, 37]

$$F(x, u) = \int \Gamma\left(x + \frac{1}{2}x', x - \frac{1}{2}x'\right) \exp[-iux'] dx' \quad (3.16)$$

这一定义与原始的对确知信号的定义 (3.2) 等价，但乘积 $\varphi(x + \frac{1}{2}x')\varphi^*(x - \frac{1}{2}x')$ 替换为相关函数 $\Gamma(x + \frac{1}{2}x', x - \frac{1}{2}x')$ 。后一项定义 (3.16) 与沃尔特的普通辐射 (Walther's generalized radiance) [33] 相似。该理论的这一扩展使得我们可以通过 WDF 对部分相干光进行描述^[36]。

3.2 魏格纳分布方程举例

我们通过傅立叶光学的几个例子阐述 WDF 概念。此时，我们将信号形式限制在时间一和谐光学信号 $\tilde{\varphi}(x, t) = \varphi(x)\exp[-i\omega t]$ 。其中的时间独立性为先验条件，复振幅 $\varphi(x)$ 已经提供对信号的充分描述，因此在方程中将时间独立性省略。为方便起见，我们限制在一维空间函数 $\varphi(x)$ 表示复振幅；对于多维的扩展较为直接。

3.2.1 点光源

位于位置 x_0 的点源可以由脉冲函数 $\varphi(x) = \delta(x - x_0)$ 所表示。其 WDF 的形式为 $F(x, u) = \delta(x - x_0)$ 。在一点 $x = x_0$ 所有频率都存在，但在其他点则并无贡献。这正是我们对于点源局部频谱所期待的。其示意图如图 3.1 所示。

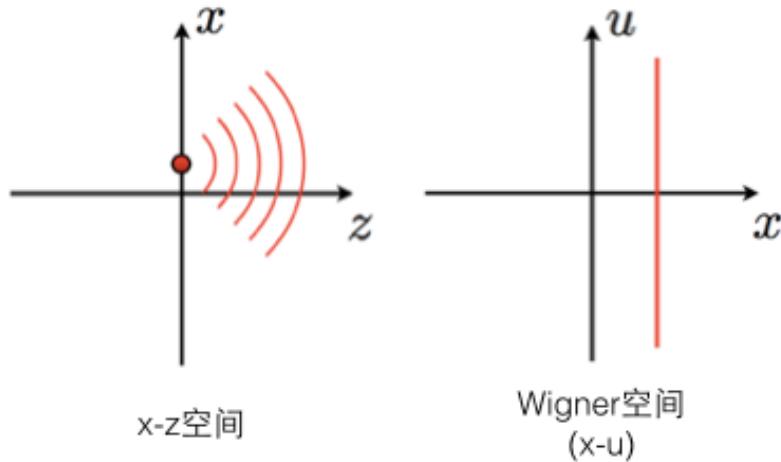


图 3.1 点光源的 Wigner 变换示意图。

3.2.2 平面波

第二个例子我们考虑一束平面波，在频率域由频率脉冲 $\bar{\varphi}(u) = 2\pi\delta(u - u_0)$ 表示，或者等价地在空间域通过谐信号 $\varphi(x) = \exp[iu_0x]$ 表示。平面波与点源彼此呼应，也即一个方程的傅立叶变换与另一个方程具有同样的形式。根据这一二元性，一束平面波的 WDF 将与点光源相同，但在空间—频率域旋转 90 度。的确，平面波的 WDF 的形式为 $F(x, u) = 2\pi\delta(u - u_0)$ 。在所有点上，只有一个频率 $u = u_0$ 出现，这正是我们对平面波的局部频谱所预期的。如图 3.2 所示，为运用 MATLAB 软件实现的平面波仿真。

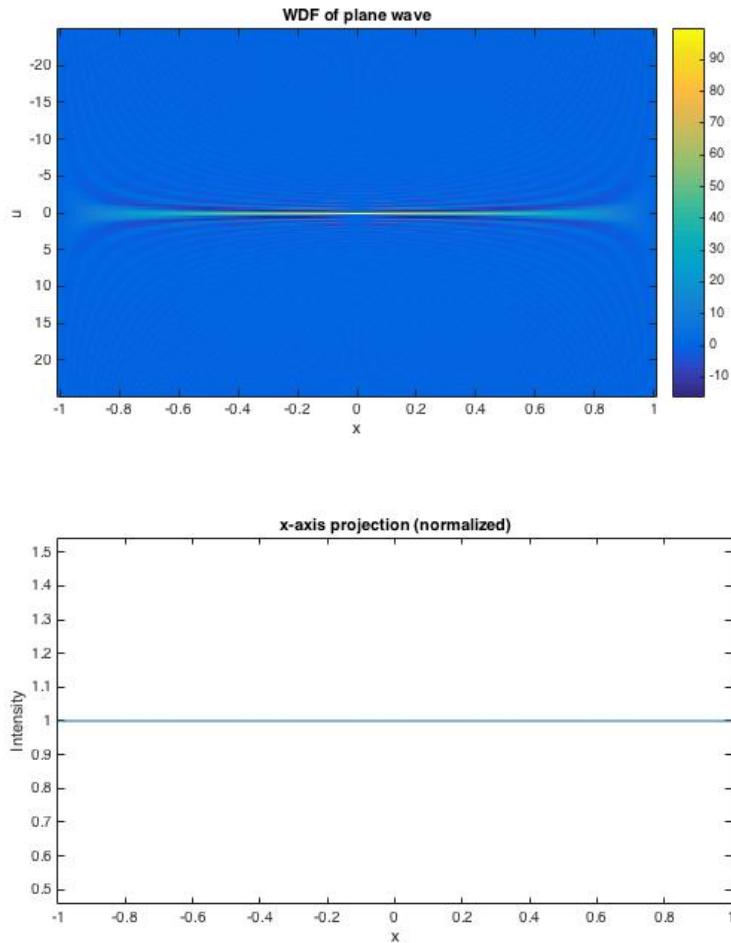


图 3.2 平面波的魏格纳分布方程示意。上图为平面波的魏格纳分布图。由于受到仿真过程离散采样的影响，图像中出现涟漪状条纹。下图为 WDF 沿 x 方向投影，(u 方向的积分)。可以看到在 x 轴的分布与入射强度分布一致。

3.2.3 二次方相位信号

二次方相位信号 $\varphi(x) = \exp[i\frac{1}{2}\alpha x^2]$ 代表了，至少对于较小的 x ，也即旁轴近似，一束球形波其曲率等于 α 。这一信号的 WDF 为 $F(x, u) = 2\pi\delta(u - \alpha x)$ ，并且我们总结在任意一点 x 只有一种频率 $u = \alpha x$ 显示。这与球面波的光线图像完全一致。

3.2.4 高斯信号

我们考虑高斯信号

$$\varphi(x) = \left(\frac{2}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{\pi}{\rho^2} (x - x_0)^2 + i u_0 x \right] \quad (3.17)$$

其中 ρ 为正值。这一高斯信号的魏格纳分布方程为

$$F(x, u) = 2 \exp \left[-\left(\frac{2\pi}{\rho^2} (x - x_0)^2 + \frac{\rho^2}{2\pi} (u - u_0)^2 \right) \right] \quad (3.18)$$

注意这一方程在 x 和 u 中都为高斯方程，以空间一频率点 (x_0, u_0) 为中心。其在 x -方向和 u -方向的有效宽度根据各自方向的归一化的二阶中央矩 $\frac{1}{2}(\rho^2/2\pi)$ 和 $\frac{1}{2}(2\pi/\rho^2)$ 而得。

当我们考虑高斯光束时，我们需要处理高斯信号与二次方相位信号相乘的情况，即，

$$\varphi(x) = \left(\frac{2}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{\pi}{\rho^2} x^2 + i \frac{1}{2} \alpha x^2 \right] \quad (3.19)$$

这一信号的魏格纳分布方程的形式为

$$F(x, u) = 2 \exp \left[-\left(\frac{2\pi}{\rho^2} x^2 + \frac{\rho^2}{2\pi} (u - \alpha x)^2 \right) \right] \quad (3.20)$$

将高斯光束考虑成一个二次方相位信号带有复数曲率 $\alpha + i(2\pi/\rho^2)$ 较为方便；这一复数曲率有时的行为类似于普通曲率带有二次方相位的信号。如图 3.3 (a) 所示为高斯光源的魏格纳分布方程。图 3.3 (b) 所示为通过汉密尔顿等式解出的沿传播方向的高斯强度分布^[55]。

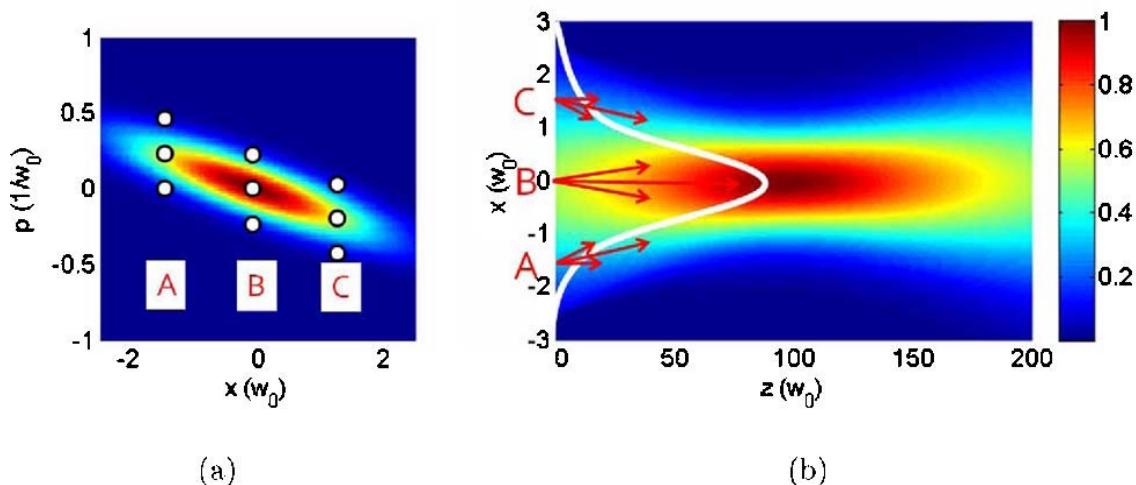


图 3.3 (a) 一维情况下的高斯光束的魏格纳分布方程；(b) 初始条件由 WDF 给出的高斯光束。其中 x 为位置， p 为向量。数值根据束腰 w_0 进行了调整。波长为 $\lambda = w_0/20$ 。WDF 平面上的九个点（图 a 中的白点）对应着九条光线（图 b 中的红色箭头）。每个位置显示了三个不同的光线方向。箭头的长度正比于 WDF 的强度。

3.3 魏格纳分布方程的性质

本节列举魏格纳分布方程（Wigner distribution function）的一些性质。

1) 逆方程

与 WDF 定义相对应的反向关系已在 (3.4) 及 (3.5) 中体现。实际上，这两个反向关系是在定义某一双变量方程可以成为 WDF 所必须满足的条件：一个关于 x 和 u 的方程只有当在关系 (3.4) 或 (3.5) 中右侧积分可以如左侧形式那样可分离，才是一个 WDF。从关系(3.4)及(3.5)我们得出结论信号 $\varphi(x)$ 及其频率谱 $\bar{\varphi}(u)$ 可以由 WDF 与一个常量相位因子重建。

2) 实数性

由魏格纳分布方程的定义可以直接得出其为一实数方程。但是，WDF 并不一定是非负的，这使得对这一方程不能直接解释为一个能量密度方程。

3) 空间及频率限制

由定义可以看出，如果信号 $\varphi(x)$ 受限于某一特定的空间间隔，其 WDF 则受限于相同的间隔。类似的，如果频率谱 $\bar{\varphi}(u)$ 受限于某一频率间隔，其 WDF 也受限于相同的间隔。

4) 空间及频率移位

由定义直接可得对信号 $\varphi(x)$ 的空间位移将导致在 WDF 相同的位移。类似的，在频率谱 $\bar{\varphi}(u)$ 的频移，对应于对信号 $\varphi(x)$ 的调制，也对应在 WDF 相同的频移。这一空间及频率的位移性质已在 3.3.4 中考虑过。

5) 一些等式与不等式

几个对于 WDF 的积分具有明确的物理意义。例如，在频率变量 u 的积分，

$$\frac{1}{2\pi} \int F(x, u) du = |\varphi(x)|^2 \quad (3.21)$$

代表了信号的强度，而在空间变量 x 的积分，

$$\int F(x, u) dx = |\bar{\varphi}(u)|^2 \quad (3.22)$$

等于频谱的强度。这些积分均为非负值。对于整个空间—频率域的积分也是如此，

$$\frac{1}{2\pi} \iint F(x, u) dx du = \int |\varphi(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int |\bar{\varphi}(u)|^2 du \quad (3.23)$$

代表了信号的所有能量。在式 (3.23) 中不难认出帕萨瓦尔定律 (Parseval's

theorem)。

3.4 光学系统的扩展函数

推导魏格纳分布方程如何传播通过一个线性系统并不困难。某一线性系统将一个输入平面上的信号 φ_i 变换到输出平面上的信号 φ_o , 根据我们在空间域或频率域内描述输入和输出信号, 可以用四种不同的方式描述。因此, 我们有四种等价的输入输出关系,

$$\varphi_o(x_o) = \int h_{xx}(x_o, x_i) \varphi_i(x_i) dx_i \quad (3.24)$$

$$\bar{\varphi}_o(u_o) = \int h_{ux}(u_o, x_i) \varphi_i(x_i) dx_i \quad (3.25)$$

$$\varphi_o(x_o) = \frac{1}{2\pi} \int h_{xu}(x_o, u_i) \bar{\varphi}_i(u_i) du_i \quad (3.26)$$

$$\bar{\varphi}_o(u_o) = \frac{1}{2\pi} \int h_{uu}(u_o, u_i) \bar{\varphi}_i(u_i) du_i \quad (3.27)$$

其中四个系统函数 h_{xx} , h_{ux} , h_{xu} , h_{uu} 完全由系统决定。关系 (3.24) 是在空间域中常用的系统表示, 通过脉冲响应 $h_{xx}(x_o, x_i)$, 在傅立叶光学中也被称为点扩展函数; 函数 $h_{xx}(x, x_i)$ 是系统在点 x 处在空间域对输入脉冲信号 $\varphi_i(x) = \delta(x - x_i)$ 响应。关系 (3.27) 是在频率域内的一个相似的系统表示; 函数 $h_{uu}(u, u_i)$ 是系统在频率 u 处在频域对输入脉冲信号 $\bar{\varphi}_i(u) = 2\pi\delta(u - u_i)$ 响应, 这是简谐输入信号 $\varphi_i(x) = \exp[iu_i x]$ 的傅立叶变换。在傅立叶光学中, 这样一个简谐信号是一个统一的, 斜入射时谐平面波空间独立表示; 在这种情况下, 我们可以称 $h_{uu}(u_o, u_i)$ 为系统的波扩展函数。关系 (3.25)、(3.26) 是混合的系统表示, 输入与输出信号在不同域内表示。

四个系统函数 h_{xx} , h_{ux} , h_{xu} , h_{uu} 具有相似之处, 并且四个汉密尔顿特性^[15]可以用来表示几何光学系统。的确, 在几何光学系统中点特性不如点扩展函数的相位重要^[37]; 相似的关系也在角特性与波扩展函数间存在, 同时也存在于混合特性及混合系统表示之间。

不同于四系统表达 (3.24) ~ (3.27), 当运用魏格纳分布方程描述输入及输出信号时只有一种系统表示。结合系统表述 (3.24) ~ (3.27) 及 WDF 的定义 (3.2) (3.3) 可以得到如下关系

$$F_o(x_o, u_o) = \frac{1}{2\pi} \iint K(x_o, u_o, x_i, u_i) F_i(x_i, u_i) dx_i du_i \quad (3.28)$$

其中输入及输出信号的魏格纳分布方程通过一个重合积分相联系。

在输入—输出关系 (3.28) 中函数 $K(x_o, u_o, x_i, u_i)$ 完全由系统决定并可以由四个系统函数 h_{xx} , h_{ux} , h_{xu} , h_{uu} 表示。

$$K(x_o, u_o, x_i, u_i) =$$

$$\begin{aligned} & \iint h_{xx}(x_o + \frac{1}{2}x'_o, x_i + \frac{1}{2}x'_i) h_{xx}^*(x_o - \frac{1}{2}x'_o, x_i - \frac{1}{2}x'_i) \exp[-iu_o x'_o + iu_i x'_i] dx'_o dx'_i = \frac{1}{2\pi} \iint h_{ux}(u_o + \\ & \frac{1}{2}u'_o, x_i + \frac{1}{2}x'_i) h_{ux}^*(u_o - \frac{1}{2}u'_o, x_i - \frac{1}{2}x'_i) \exp[iu'_o x_o + iu'_i x'_i] du'_o dx'_i = \frac{1}{2\pi} \iint h_{xu}(x_o + \frac{1}{2}x'_o, u_i + \\ & \frac{1}{2}u'_i) h_{xu}^*(x_o - \frac{1}{2}x'_o, u_i - \frac{1}{2}u'_i) \exp[-iu_o x'_o - iu'_i x_i] dx'_o du'_i = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint h_{uu}(u_o + \frac{1}{2}u'_o, u_i + \\ & \frac{1}{2}u'_i) h_{uu}^*(u_o - \frac{1}{2}u'_o, u_i - \frac{1}{2}u'_i) \exp[iu'_o x_o - iu'_i x_i] du'_o du'_i \end{aligned} \quad (3.29)$$

关系式 (3.29) 可以被认为是双 WDF 的定义；因此，函数 $K(x_o, u_o, x_i, u_i)$ 具有 WDF 的所有特性，例如实数性。系统中的物理限制可以被这一双 WDF 表达。例如，系统的无损性^[38]，即我们认为输入信号与输出信号的总能量相等，因此可以被表示为

$$\frac{1}{2\pi} \iint K(x_o, u_o, x_i, u_i) dx_o du_o = 1 \quad (3.30)$$

形式上，函数 $K(x, u, x_i, u_i)$ 是系统在空间—频率点 (x, u) 由 $F_i(x, u) = 2\pi\delta(x - x_i)\delta(u - u_i)$ 的空间—频率域的响应。我们这里强调只是在形式上，因为并不存在一个实际信号其魏格纳分布方程具有形式 $2\pi\delta(x - x_i)\delta(u - u_i)$ 。然而，在光学方面考虑，这样一个输入信号可以被认为代表了一条单一光线，在点 x_i 及频率（方向） u_i 进入系统。因此，我们可以称函数 $K(x_o, u_o, x_i, u_i)$ 为系统的光线传播函数。

根据各自的光线扩展函数 $K_1(x_o, u_o, x_i, u_i)$ 及 $K_2(x_o, u_o, x_i, u_i)$ 表示由两个系统叠加的光线扩展函数并不困难。整个系统的光线扩展函数具有形式

$$K(x_o, u_o, x_i, u_i) = \frac{1}{2\pi} \iint K_2(x_o, u_o, x, u) K_1(x, u, x_i, u_i) dx du \quad (3.31)$$

下面的一些基本傅立叶光学系统的光线扩展函数将会阐述光线扩展函数的概念。

3.4.1 薄透镜；非扩展系统

具有焦距 f 的薄透镜可以由点扩展函数描述

$$h_{xx}(x_o, x_i) = \exp\left[-i\frac{k}{2f}x_o^2\right] \delta(x_o - x_i) \quad (3.32)$$

其输入输出关系因此为 $\varphi_o(x) = \exp[-i(k/2f)x^2]\varphi_i(x)$ 。相对应的光线扩展函数形式为

$$K(x_o, u_o, x_i, u_i) = 2\pi\delta(x_i - x_o)\delta(u_i - u_o - \frac{k}{f}x_o) \quad (3.33)$$

并且对于薄透镜的输入输出关系 (3.28) 变为

$$F_o(x, u) = F_i(x, u + \frac{k}{f}x) \quad (3.34)$$

关系式 (3.33) 准确地表示了薄透镜的几何光学行为：若某一光线入射到薄透镜上，其将在同一位置离开透镜但方向将改变为依位置而定的函数。

薄透镜是一种特殊的非扩展系统，通常可以由输入输出关系描述 $\varphi_o(x) = m(x)\varphi_i(x)$ 。在这一普通的例子中输入一输出关系 (3.28) 变为

$$F_o(x, u) = \frac{1}{2\pi} \int F_m(x, u - u_i) F_i(x, u_i) du_i \quad (3.35)$$

并且具有将输入魏格纳分布方程 $F_i(x, u)$ 及调制方程 $m(x)$ 的魏格纳分布方程 $F_m(x, u)$ 仅在 x 方向相乘， u 方向卷积的形式。

3.4.2 菲涅尔近似的自由空间；移不变系统

在菲涅尔近似中，具有长度 z 的自由空间的点扩展函数具有这样的形式

$$h_{xx}(x_o, x_i) = \sqrt{\frac{k}{2\pi iz}} \exp\left[i\frac{k}{2z}(x_o - x_i)^2\right] \quad (3.36)$$

相应的波扩展函数为

$$h_{uu}(u_o, u_i) = \exp\left[-i\frac{z}{2k}u_o^2\right] 2\pi\delta(u_i - u_o) \quad (3.37)$$

其输入输出关系因此为 $\bar{\varphi}_o(u) = \exp[-i(z/2k)u^2]\bar{\varphi}_i(u)$ 。部分自由空间的波扩展函数与透镜的点扩展函数的相似性，说明这两个系统互为对应。这在光线扩展函数中也较为明显，对自由空间，其形式为

$$K(x_o, u_o, x_i, u_i) = 2\pi\delta(x_i - x_o + \frac{z}{k}u_o)\delta(u_i - u_o) \quad (3.38)$$

我们得出结论，一个系统的频率行为与另一系统的空间行为相似。部分自由空间的输入输出关系 (3.28) 变为

$$F_o(x, u) = F_i(x - \frac{z}{k}u, u) \quad (3.39)$$

关系式 (3.38) 再一次准确的表示了部分自由空间的几何光学行为：若一条光线穿过自由空间，其方向保持一致但位置根据实际方向改变。

菲涅尔近似中的自由空间是一种特殊的移不变系统，通常可以由输入输出关系描述 $\varphi_o(x) = \int m(x - x_i)\varphi_i(x_i)dx_i$ ，或等价地，由 $\bar{\varphi}_o(u) = \bar{m}(u)\bar{\varphi}_i(u)$ 描述。

在这个普通的例子中输入输出关系 (3.28) 变为

$$F_o(x, u) = \int F_m(x - x_i, u) F_i(x_i, u) dx_i \quad (3.40)$$

并且具有将输入魏格纳分布方程 $F_i(x, u)$ 与调制函数 $\bar{m}(u)$ 的魏格纳分布方程 $F_m(x, u)$ 仅在 u 方向上相乘, x 方向上卷积的形式。

3.4.3 傅立叶变换器

光学傅立叶变换可以在透镜的两个焦平面间简单的获得。对一个傅立叶变换器, 点扩展函数为

$$h_{xx}(x_o, x_i) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi i}} \exp[-i\beta x_o x_i] \quad (3.41)$$

并且其输入输出关系可以由混合形式 $\varphi_o(x) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi i}} \bar{\varphi}_i(\beta x)$ 表达, 光线扩展函数的形式为

$$K(x_o, u_o, x_i, u_i) = 2\pi \delta(x_i + \frac{u_o}{\beta}) \delta(u_i - \beta x_o) \quad (3.42)$$

并且输入输出关系 (3.28) 变为

$$F_o(x, u) = F_i(-\frac{u}{\beta}, \beta x) \quad (3.43)$$

我们得出结论, 对于傅立叶变换器, 空间及频率域彼此交换。

3.5 魏格纳分布方程的传输等式

在之前研究的部分, 例子 3.5.2 中, 我们通过考虑将部分自由空间作为一个光学系统研究了 WDF 传播穿过自由空间。然而, 直接通过微分方程找到 WDF 穿过自由空间的解也是可以的。为展示这一点, 我们引入空间变量 z , 并将信号表示为 $\varphi(x; z)$ 及其 WDF 为 $F(x, u; z)$; 为方便起见, 回忆 WDF 的定义

$$F(x, u; z) = \int \varphi(x + \frac{1}{2}x'; z) \varphi^*(x - \frac{1}{2}x'; z) \exp[-iux'] dx' \quad (3.44)$$

在自由空间的菲涅尔近似中, 信号 $\varphi(x; z)$ 满足一个具有抛物线形式的扩散微分方程^[48]:

$$-i \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \left(k + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi \quad (3.45)$$

WDF 的传播由传输方程描述^[49, 50], 在这个例子中形式为

$$\frac{u}{k} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (3.46)$$

其解为

$$F(x, u; z) = F\left(x - \frac{z}{k}u, u; 0\right) \quad (3.47)$$

微分方程 (3.45) 是一个特殊例子, 更普通的方程为

$$-i \frac{\partial \varphi}{\partial z} = L\left(x, -i \frac{\partial}{\partial x}; z\right) \varphi \quad (3.48)$$

其中 L 为空间变量 x 与 z , 及操作子 $\partial/\partial x$ 的显式函数。对应于这一微分方程的传输函数为

$$-\frac{\partial F}{\partial z} = 2\text{Im}\left\{L\left(x + \frac{1}{2}i \frac{\partial}{\partial u}, u - \frac{1}{2}i \frac{\partial}{\partial x}; z\right)\right\} F \quad (3.49)$$

接下来考虑几个例子。

1) 菲涅尔近似中的自由空间

在菲涅尔近似的自由空间中信号由 (3.45) 表示, 函数 $L(x, u; z)$ 表示为 $L(x, u; z) = k - u^2/2k$ 。相应的传输方程 (3.46) 及其解 (3.47) 已经在介绍中提及。

2) 自由空间

在自由空间 (但并不必须在菲涅尔近似) 中信号 $\varphi(x; z)$ 必须满足亥姆赫兹等式 (Helmholtz equation), 形式为

$$-i \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \sqrt{k^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \varphi \quad (3.50)$$

函数 $L(x, u; z)$ 为

$$L(x, u; z) = \sqrt{k^2 - u^2} \quad (3.51)$$

并且线性化传输方程为

$$\frac{u}{k} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\sqrt{k^2 - u^2}}{k} \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (3.52)$$

该线性化传输方程可以也可以被显式解出; 其解为

$$F(x, u; z) = F\left(x - \frac{u}{\sqrt{k^2 - u^2}} z, u; 0\right) \quad (3.53)$$

3) 较弱的不均一介质

在弱不均一介质中, 信号需要满足的形式及函数 $L(x, u; z)$ 分别由 (3.50) 和 (3.51) 所表示, 但此时 $k = k(x, z)$ 。线性化的传输方程现在为

$$\frac{u}{k} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\sqrt{k^2 - u^2}}{k} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \quad (3.54)$$

这一式子无法显式解出。由特征方法可以得出结论, 即沿着路径

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{k}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{\sqrt{k^2 - u^2}}{k}, \quad \frac{du}{ds} = \frac{\partial k}{\partial x} \quad (3.55)$$

WDF 具有常数值。当从式 (3.55) 中消除频率变量 u 后，便可得到

$$\frac{d}{ds} \left(k \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial k}{\partial x}, \quad \frac{d}{ds} \left(k \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial k}{\partial z} \quad (3.56)$$

这是几何光学中一条光线的等式。

4 纳米结构伦勃透镜的光线追迹

伦勃透镜最初由 R. K. Lüneburg^[31]提出。伦勃透镜是一种具有成像特性的球对称透镜，其特点为可以将入射平面波聚焦到几何尺寸完美的焦点。焦点位于透镜位于光线对面的边界。根据这一特性，其在诸如天线阵列^[51]，反射器^[52]，光学遮罩^[53]等具有较多应用。伦勃透镜具有不同质但各向同性的折射率分布，其折射率可以被表示为

$$n(r) = n_0 \sqrt{2 - (r/R)^2} \quad (4.1)$$

其中， n_0 是透镜外的折射率， R 是透镜半径， r 是距透镜中心的距离。本章主要引述一种非周期纳米孔洞阵列制作而成的伦勃透镜。对比实验及 FDTD 仿真结果进行光线追迹仿真。

4.1 纳米结构伦勃透镜

在硅光子学中，波导通常通过使用相同结构厚度的小孔或者小杆阵列来实现，其能带隙根据所需波长设计。然而，折射率波导的概念并没有被广泛应用于光子元件的设计。因此，Hsieh 等人提出一种包含恒定周期但不同直径纳米杆或纳米洞的纳米结构伦勃透镜，通过控制直径的变化来控制每个网格点上达到所需的有效折射率^[8]。首先，通过计算对应波长的色散关系来生成一个有效折射率库，对于每一种直径的小杆及小洞。再根据伦勃透镜折射率公式 (4.1) 将所需的折射率对应到相应的位置。这一想法消除了对于先进科技如阴影沉积，聚焦离子束及电子束灰阶印刷的需求，也因此更好的兼容当下集成光系统的制造科技。如图 4.1 所示，科研人员运用纳米洞阵列的概念实现了光学伦勃透镜。

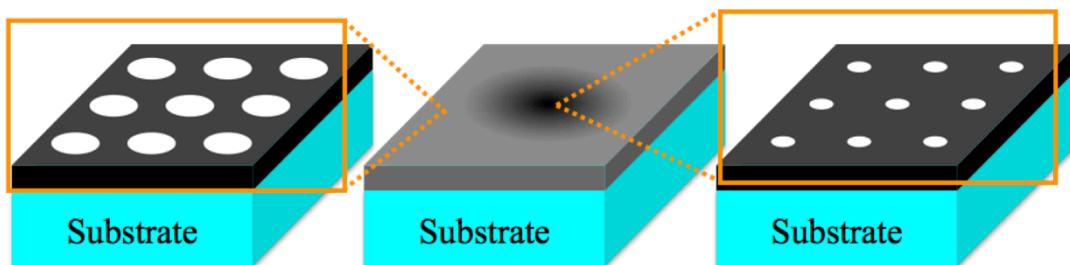


图 4.1 通过控制次波长小孔的直径来实现伦勃透镜结构。

纳米结构的伦勃透镜基于全分析计算有效折射率方法设计^[54]。在这种方法中，用一个特定的有效电容率 ϵ_{eff}^{2D} 代替纳米小孔。利用二阶有效介质理论由无限高孔洞

的二维网格计算 ε_{eff}^{2D} , 然后再将 ε_{eff}^{2D} 作为具有有限厚度的平板的电容率带回, 夹在上方的半无限空气空间和下方的 S_iO_2 之中。有效折射率通过解在弱波导近似的波导色散关系得到。在这种纳米孔阵列设计中, 晶格常数 a 选为入射光波长 (1550nm) 的 1/6, 即 258.3nm, 设备层的厚度设置为 320nm。基于这一几何结构, 图 4.2 显示了横向电场 (TE) 及横向磁场 (TM) 偏振的有效折射率计算结果。这说明只有 TM 偏振 (电场方向垂直于平板) 可以保持设计所需的足够的折射率变化。透镜的有效折射率的上限受到制造能力所允许的最小特征尺寸的限制。根据最小孔洞直径为 90nm, 对应选择有效折射率为 2.4。根据伦勃透镜的结构 (式 4.1), 透镜的背景折射率选择为 1.7。因此, 纳米结构的伦勃透镜的折射率变化在 1.7 至 2.4 之间, 如图 4.2 所示。

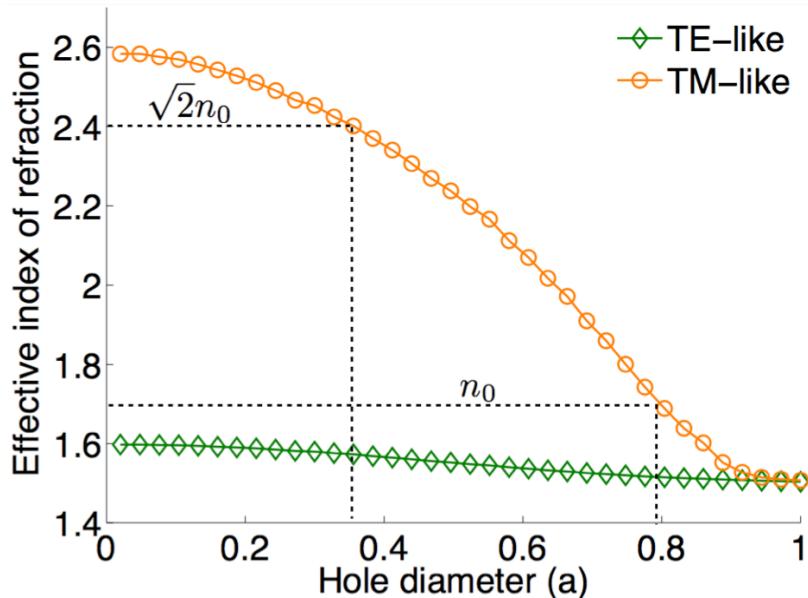


图 4.2 有效折射率与孔径直径的对应关系。图中绿色点表示 TE 偏振, 橙色点表示 TM 偏振。

纳米结构伦勃透镜被嵌入一个波导之中。波导的宽度设计为 $10.6 \mu m$ 。如图 4.3 所示。

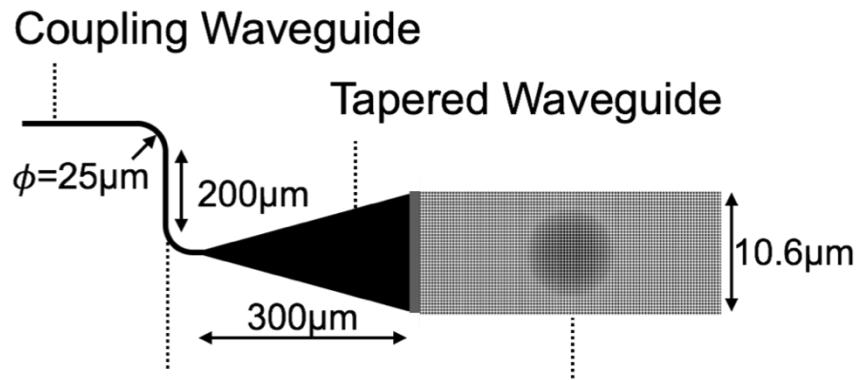


图 4.3 纳米结构伦勃透镜的完整原理图。

纳米结构伦勃透镜的特征由近场扫描光学显微镜 (near-field scanning optical microscopy, NSOM) 观察。使用 1550nm 的激光束 (FPL-1009S, Thorlab Inc.) 与芯片的尾部耦合，并通过一个工作在距离波导面 $14 \mu m$ 工作距离的透镜光纤连接。图 4.4 (a) 显示了由 NSOM 收集到的光强分布信息。这里使用 FDTD 仿真结果对实验结果进行解释。首先使用 MIT Photonic Band solver 来解决具有同样几何结构与材料特性的纳米板波导的基模电场分布。这一基模随后被用做 FDTD 仿真纳米孔穴阵列的新光源。运用这种方法观察到距离结构高 20nm 处的近场透镜行为，如图 4.4 (b) 所示。

比较图 4.4a 及 b 可以看到两处较为突出的不同。首先，在 NSOM 观察较为明显的干涉图样周期大约等于仿真结果中波的周期的一半。这是由于实验结果中由于不可避免的反射造成了驻波干涉，然而在仿真过程中反射通过使用完美匹配层 (perfectly matching layer) 而削弱。其次，仿真结果在透镜区域内显示出了相对于实验结果更暗的图样。这是由于仿真中计算的是单一平面的强度分布；而实际测量是垂直方向上整个体积的积分。因为透镜中心的有效折射率更高，该区域内的垂直集成强度也更高，这也解释了这一区域更高的 NSOM 测量数据。

作为另外一种比较，我们比较了透镜焦点处的横向尺寸与衍射受限成像透镜的第一点扩展函数瓣宽度。后者为 $\sim \lambda f / nD$ ，其中 λ 为光学波长， f 为透镜的焦距， n 为周围折射率， D 为透镜孔径。对于这种情况，这一表达式导致预计的点尺寸为 456nm 。由 NSOM 观测数据及 FDTD 仿真数据得到的点尺寸分别为 301nm 及 463nm 半高全宽 (full width at half maximum, FWHM)。实验数据中较大的不同可能与透镜中心较暗的外貌有相似的原因。名义上，在透镜中心垂直方向上较强的散射（由于那里具有较强的有效折射率）类似于一种切趾器使得点扩展函数更细。这一解

释也与旁瓣值较高的现象一致。

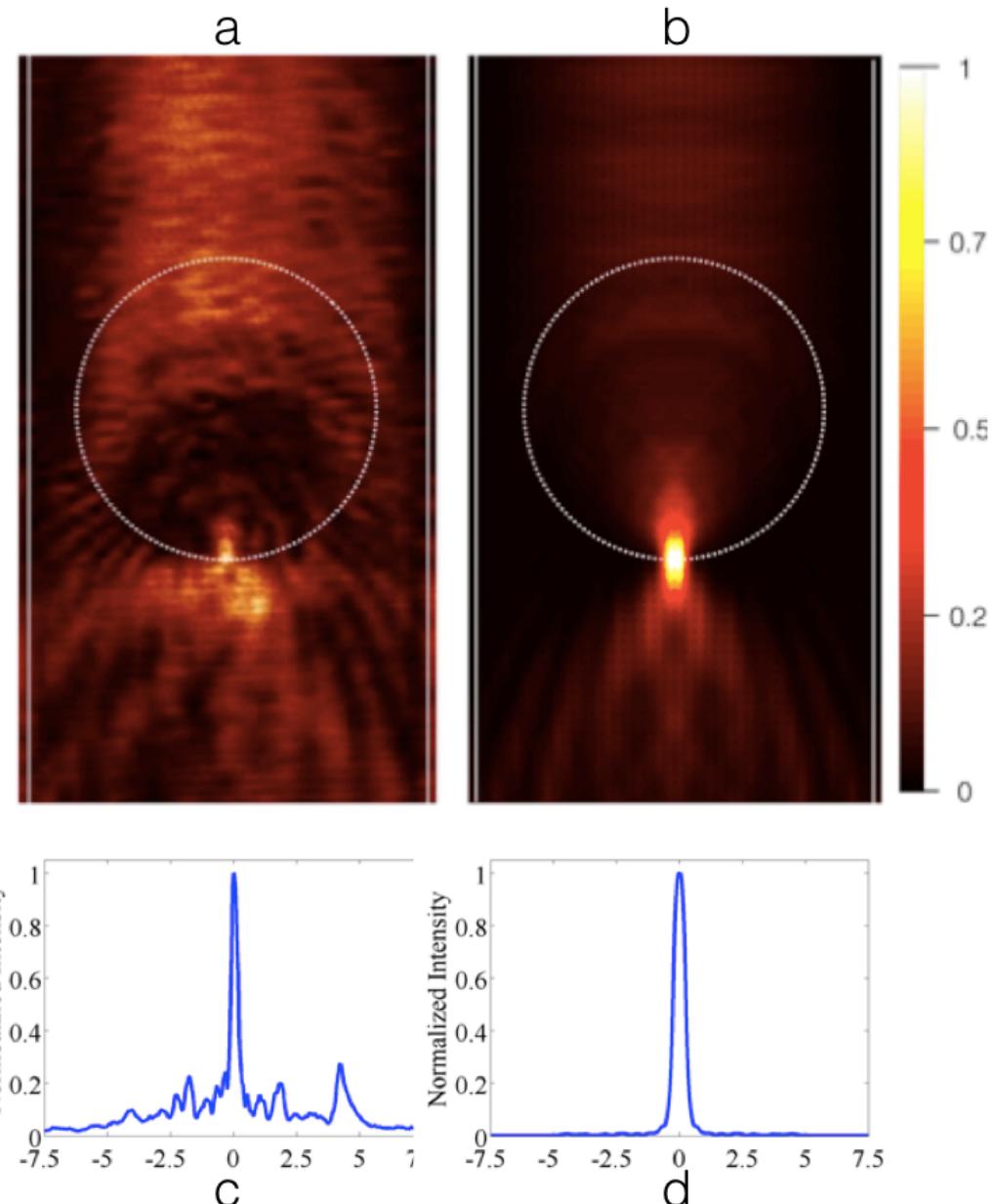


图 4.4 基模照明下的伦勃透镜的光波行为。(a) NSOM 图像; (b) 由 FDTD 基模计算得到的结果。在距离器件上方 20nm 方向观察, 强度已归一化。点线与实线分别标明透镜区域及波导边界; (c) NSOM 数据中焦平面上的强度分布; (d) FDTD 仿真结果中焦平面的强度分布。

4.2 伦勃透镜的光线追迹

由于伦勃透镜特殊的折射率分布, 这给几何光学上的光线追迹方法带来了挑战。本文通过汉密尔顿理论, 可以很好的模拟出光线的传播轨迹。如图 4.5 所示, 为运用屏幕汉密尔顿 (Screen Hamiltonian) 光线追迹方法。图 a 中为 100 条光线组

成的平面波，即入射方向均为沿 z 轴正方向传播。图 b 为在每一步 z 平面上计算的强度分布。

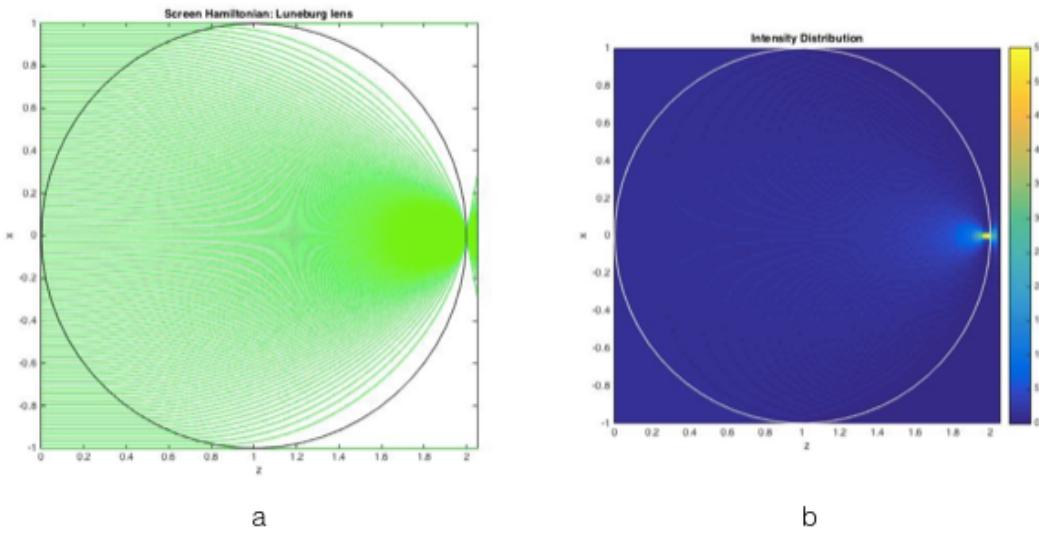


图 4.5 伦勃透镜的屏幕汉密尔顿光线追迹。(a) 100 条光线沿 $+z$ 轴方向传播的几何效果图；(b) 在每一步 z 平面上计算得到的强度分布。

图 4.5 中对于平面波的仿真并未考虑强度和相位的变化。因此由汉密尔顿单独计算只能观察光线行进的轨迹。为了更加真实的反应光波传播的效果，我们引入魏格纳分布方程将入射平面波进行变换。如图 3.2 所示，魏格纳分布方程可以实现将入射平面波的强度重新变换到对应于不同位置，不同空间频率的“普通强度”值。经过变换后的强度信息并不具有真实物理意义，因此可以看到图 3.2 中上图的 WDF 值会出现负值。但是这种普通化的强度值在 u 轴上积分可以得到对应于每个位置点的强度。与此同时，对应于图 4.6 所示。

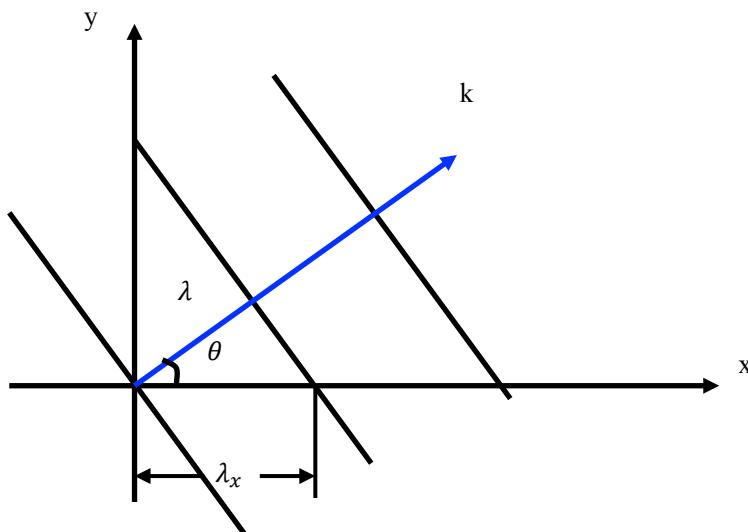


图 4.6 在 xOy 平面中的波矢传播示意图

由空间频率公式

$$u_x = \frac{1}{\lambda_x} = \frac{\cos\theta}{\lambda} \quad (4.2)$$

其中 u 为空间频率， λ 为单色波波长， θ 为波矢与 x 轴的夹角。可知魏格纳分布方程中的空间频率 u 也即代表光线的传播方向。因此 WDF 中的两个变量 x （位置）与 u （空间频率，方向）可以与 Hamiltonian 中的 q （位置）及 p （方向）相对应。也即允许我们发挥 WDF 与 Hamiltonian 各自独特的性质，并将其结合。

在这里我们首先获得入射光波的 WDF，将 WDF 函数上每个位置每个方向上的点分别带入 Hamiltonian 函数进行传播，借助 Hamiltonian 的计算方法得到下一时刻（ z 屏幕）上的位置和方向信息，并根据坐标重新调整 WDF 的值与之对应。整个流程如图 4.7 所示。图 4.8 为利用该流程进行的光线追迹过程。由图可以看出，正如所预期的那样，分布于 $[-1, 1]$ 的平面波函数在从 $z=0$ 处传播到 $z=2$ 后基本汇聚于一点。

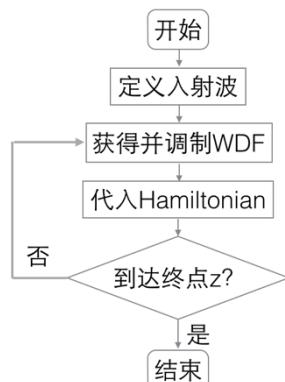


图 4.7 光线传播计算方法流程图。

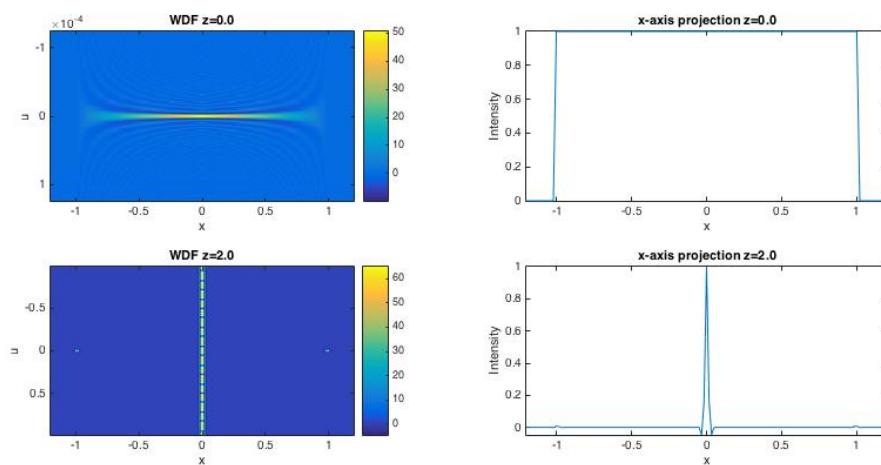


图 4.8 结合 WDF 与 Hamiltonian 计算后的光线追迹。

在实现将汉密尔顿与魏格纳分布方程相结合之后，我们可以在传播过程中取

出当时的 WDF，加入相应的强度及动量的调制。来验证我们对于其他复杂物理过程的猜想。结合前面对于实验结果与 FDTD 仿真结果的比较分析。我们猜想在纳米级伦勃透镜中，由于本身结构原因，导致光波在透镜范围内进行散射。越靠近透镜中心，则散射效应越为明显。这种现象类似于中间部分被遮挡的小孔衍射图样，如图 4.9 所示。即在中间部分的强度值受到削弱，其衍射图样相对于原来的衍射图样零级宽度变窄，而旁瓣得到加强。

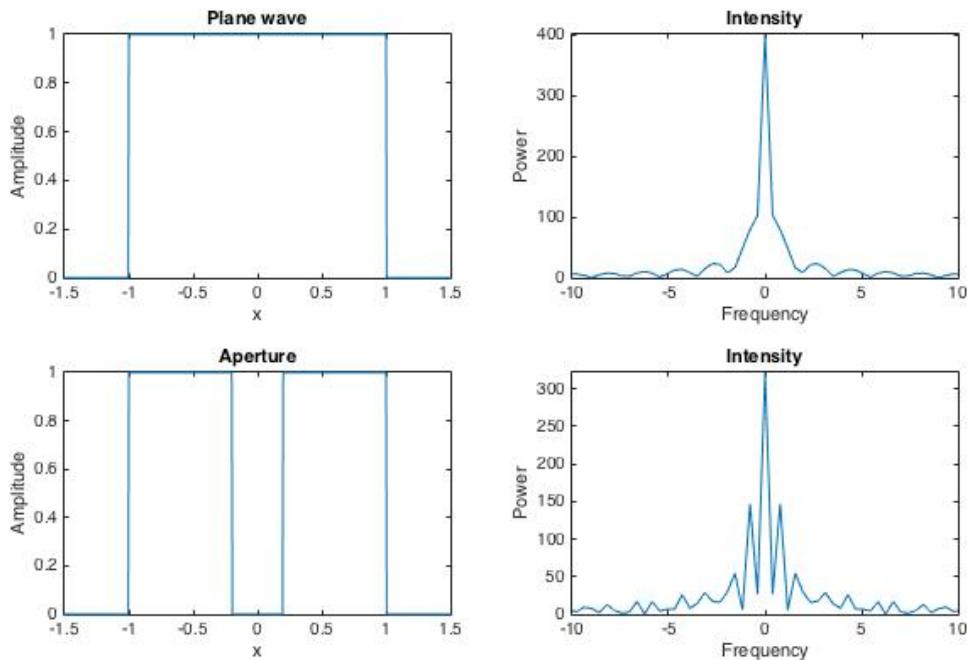


图 4.9 平面波中间受遮挡时的的衍射图样比较示意图。

受到该图样的启发，我们试图在伦勃透镜传播过程中加入光强及动量（方向）调制。如图 4.10 所示，我们引入正态分布函数作为强度调制因子。即在运用汉密尔顿运算每一步 z 步长后取出关于位置及方向的魏格纳分布方程，并在此基础上与相应位置的“散射因子”（图 4.10）相乘，得到对光强的调制。再将调整后的魏格纳分布方程再次带回汉密尔顿进行追迹运算，如此往复一直运算到最终 $z=2$ 的平面。但这里需要注意的是，我们虽然对对应于每一个位置 x 与方向 u 的点进行强度上的调整，但并未改变其几何属性，也即并未对汉密尔顿轨迹进行干扰。而在汉密尔顿的精确计算下，每一个位置与方向对应的点，大部分都将仍旧按照原来的传播轨迹传播。最终得到的效果仍旧为完美聚焦于某一点的图像。这是因为尽管没一点对应的强度有正负、大小的差别，但最终都会聚焦到同一点上，因此不会显示出分布上的差别。

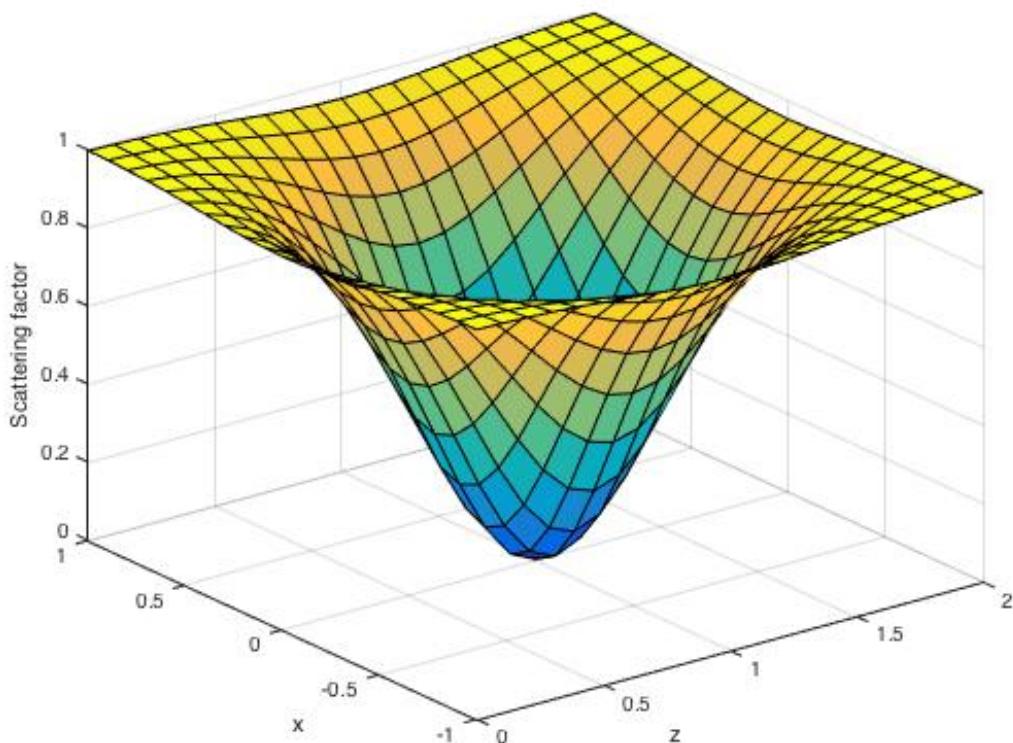


图 4.10 伦勃透镜传播的散射因子。可以该分布在透镜中心达到最小值，模拟光线在靠近中间部分受到遮挡。

因此，我们对传播过程中的光线方向进行了类似的调制。我们的尝试为在每一步 z 步长获取到魏格纳分布方程后除了在位置强度上进行如上调制，我们还将获得的方向进行了一定的放大，放大的值为类似于图 4.10 所示的正态分布方程在伦勃透镜范围内的分布。通过这样的调制，我们希望实现在传播光线越靠近透镜中心时，其受到的“散射干扰”越大，方向的改变也越大；同理，越远离透镜中心的光线，受到的“散射干扰”越小，方向的改变也越小。

如图 4.11 所示，在最终生成的平面上，本应该聚焦于一点的光线得到了一定程度上的展宽。在中间平面 $z=1$ 处调制后的光强在两边的强度得到了加强，由于归一化的原因，这也意味着我们对于中间位置光强度削弱的尝试得以实现。

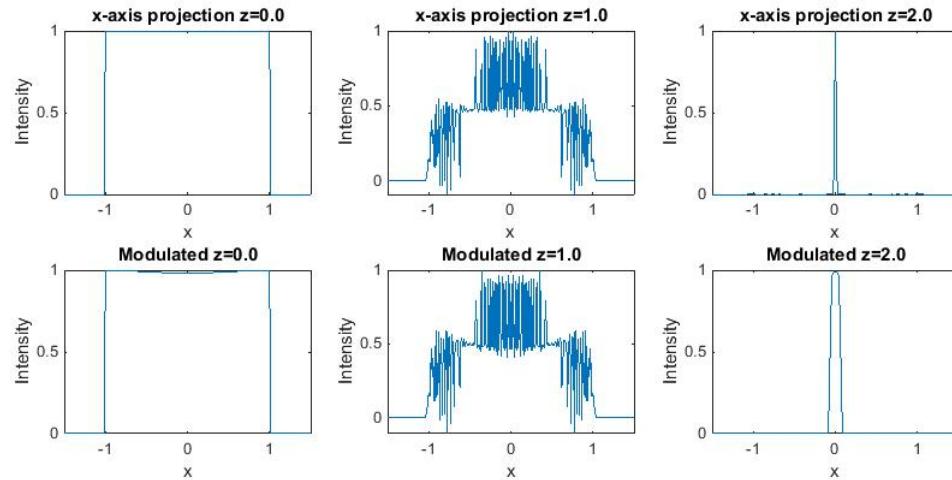


图 4.11 加入光强及动量调制后的伦勃透镜传播效果图。

综上所述，在传播过程中加入的强度调节及动量调节因子的确可以实现将人为假设的散射模型。但这一散射因素本身具有较多未确定参量。由现象直接推断的散射模型是光线在折射率较高的中间区域强度得到减弱，而周围区域由于光线的反射而使强度得到加强。但这一假设所构成的衍射图样仍旧需要更多的理论支持。在魏格纳分布方程中进行调制仍旧存在无法真是再现衍射图样的局限。

5 结论

几何光学中，通过定义每条光线的位置和方向来追溯光线的传播过程。传统的光线追迹方法解决折射率固定的透镜结构，而对于渐变折射率结构的解决方法欠佳。引入力学中的汉密尔顿方程式解决渐变折射率透镜的光线追迹问题具有简单快速的特点，具有很大的应用价值。本文对汉密尔顿光线追迹原理进行探讨，分别实现了屏幕汉密尔顿、三维汉密尔顿及三维光程汉密尔顿，实现了对渐变折射率透镜如麦克斯韦鱼眼镜、伊顿透镜及伦勃透镜的仿真。

但是在几何光学中缺乏对于相位，幅值等波的传播特性，因此并无法准确的表示传播过程中的强度信息。通过引入魏格纳分布方程实现在空间—频率域内的局部频谱变换，即同时表达出位置与方向所对应的光波强度。这一特点可以将几何光学与物理光学各自的优点相结合，从而实现更加准确的光线追迹过程。

通过在汉密尔顿传播过程中重新获得魏格纳分布并对光强度进行调制，我们进行了对伦勃透镜的仿真，并试图解释纳米结构伦勃透镜旁瓣加强的现象，将假设的散射影响进行了一定的验证。结论证明，对于光强度靠近伦勃透镜中间部分强度削弱，周围增强，从而形成类似于中间被遮挡的衍射图样的假设，仍旧需要更多理论探索，以帮助更真实的仿真伦勃透镜的成像特性。

参考文献

- [1] Hsieh C M, Chyan J Y, Hsu W C, et al. Fabrication of wafer-level antireflective structures in optoelectronic applications[C]//Optical MEMS and Nanophotonics, 2007 IEEE/LEOS International Conference on. IEEE, 2007: 185-186.
- [2] Gunderson L C, Holmes G T. Microwave Luneburg lens[J]. Applied optics, 1968, 7(5): 801-804.
- [3] Ma H F, Cui T J. Three-dimensional broadband and broad-angle transformation-optics lens[J]. Nature communications, 2010, 1: 124.
- [4] Pfeiffer C, Grbic A. A printed, broadband Luneburg lens antenna[J]. Antennas and Propagation, IEEE Transactions on, 2010, 58(9): 3055-3059.
- [5] Yao S K, Anderson D B, August R R, et al. Guided-wave optical thin-film Luneburg lenses: fabrication technique and properties[J]. Applied optics, 1979, 18(24): 4067-4079.
- [6] Zentgraf T, Liu Y, Mikkelsen M H, et al. Plasmonic luneburg and eaton lenses[J]. Nature nanotechnology, 2011, 6(3): 151-155.
- [7] De Leon I, Berini P. Amplification of long-range surface plasmons by a dipolar gain medium[J]. Nature Photonics, 2010, 4(6): 382-387.
- [8] Takahashi S, Chang C, Yang S Y, et al. Design and fabrication of dielectric nanostructured Luneburg lens in optical frequencies[C]//Optical MEMS and Nanophotonics (OPT MEMS), 2010 International Conference on. IEEE, 2010: 179-180.
- [9] Georges T, Jones R, Riley J. Simulating ocean acoustic tomography measurements with Hamiltonian ray tracing[J]. Oceanic Engineering, IEEE Journal of, 1986, 11(1): 58-71.
- [10] Um J, Thurber C. A fast algorithm for two-point seismic ray tracing[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1987, 77(3): 972-986.
- [11] Chaudhury B, Chaturvedi S. Comparison of wave propagation studies in plasmas using three-dimensional finite-difference time-domain and ray-tracing methods[J]. Physics of Plasmas (1994-present), 2006, 13(12): 123302.
- [12] McKown J W, Hamilton Jr R L. Ray tracing as a design tool for radio networks[J]. Network, IEEE, 1991, 5(6): 27-30.
- [13] Spencer G H, Murty M. General ray-tracing procedure[J]. JOSA, 1962, 52(6): 672-676.
- [14] Moore D T. Gradient-index optics: a review[J]. Applied Optics, 1980, 19(7): 1035-1038.

- [15] Born M, Wolf E. Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light[M]. Cambridge university press, 1999.
- [16] Sharma A, Kumar D V, Ghatak A K. Tracing rays through graded-index media: a new method[J]. Applied Optics, 1982, 21(6): 984-987.
- [17] Rawson E G, Herriott D R, McKenna J. Analysis of refractive index distributions in cylindrical, graded-index glass rods (GRIN rods) used as image relays[J]. Applied optics, 1970, 9(3): 753-759.
- [18] Marchand E W. Ray tracing in gradient-index media[J]. JOSA, 1970, 60(1): 1-2.
- [19] Marchand E W. Ray tracing in cylindrical gradient-index media[J]. Applied optics, 1972, 11(5): 1104-1106.
- [20] Moore D T. Ray tracing in gradient-index media[J]. JOSA, 1975, 65(4): 451-455.
- [21] Buchdahl H A. An introduction to Hamiltonian optics[M]. Courier Corporation, 1993.
- [22] Wolf K B. Geometric optics on phase space[M]. Springer Science & Business Media, 2004.
- [23] Hecht E, Zajac A. Optics, chapter 9[J]. 2002.
- [24] Notomi M. Theory of light propagation in strongly modulated photonic crystals: Refractionlike behavior in the vicinity of the photonic band gap[J]. Physical Review B, 2000, 62(16): 10696.
- [25] Agranovich V M, Shen Y R, Baughman R H, et al. Linear and nonlinear wave propagation in negative refraction metamaterials[J]. Physical Review B, 2004, 69(16): 165112.
- [26] Wang M Y, Xu J, Wu J, et al. FDTD study on wave propagation in layered structures with biaxial anisotropic metamaterials[J]. Progress In Electromagnetics Research, 2008, 81: 253-265.
- [27] Jiao Y, Fan S, Miller D A B. Designing for beam propagation in periodic and nonperiodic photonic nanostructures: Extended Hamiltonian method[J]. Physical Review E, 2004, 70(3): 036612.
- [28] Russel P S J, Birks T A. Hamiltonian optics of nonuniform photonic crystals[J]. Lightwave Technology, Journal of, 1999, 17(11): 1982-1988.
- [29] Li J, Pendry J B. Hiding under the carpet: a new strategy for cloaking[J]. Physical Review Letters, 2008, 101(20): 203901.
- [30] Rivera A L, Chumakov S M, Wolf K B. Hamiltonian foundation of geometrical anisotropic optics[J]. JOSA A, 1995, 12(6): 1380-1389.
- [31] Luneburg R K. Mathematical theory of optics[M]. Univ of California Press, 1966.
- [32] Wigner E. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium[J]. Physical

- Review, 1932, 40(5): 749.
- [33] Walther A. Radiometry and coherence[J]. JOSA, 1968, 58(9): 1256-1259.
- [34] Mori H, Oppenheim I, Ross J. Some Topics in Quantum Statistics. The Wigner Function and Transport Theory in: Studies in Statistical Mechanics[J]. 1962.
- [35] De Bruijn N G. A theory of generalized functions, with applications to Wigner distribution and Weyl correspondence[J]. Nieuw Archief voor Wiskunde, 1973, 3(21): 205-280.
- [36] Bastiaans M J. The Wigner distribution function applied to optical signals and systems[J]. Optics communications, 1978, 25(1): 26-30.
- [37] Bastiaans M J. The Wigner distribution function and its applications to optics[C]//Optics in Four Dimensions-1980. AIP Publishing, 1980, 65(1): 292-312.
- [38] Butterweck H J. IV Principles of Optical Data-Processing[J]. Progress in Optics, 1981, 19: 211-280.
- [39] Friberg A T. Phase-space methods for partially coherent wavefields[C]//Optics in Four Dimensions-1980. AIP Publishing, 1980, 65(1): 313-331.
- [40] Claasen T, Mecklenbrauker W F G. The Wigner distribution—A tool for time-frequency signal analysis. Part I: Continuous-time signals[J]. Philips J. Res, 1980, 35(3): 217-250.
- [41] Szu H H, Blodgett J A. Wigner distribution and ambiguity function[C]//Optics in Four Dimensions-1980. AIP Publishing, 1980, 65(1): 355-381.
- [42] De Groot S R, Suttorp L G. Foundations of electrodynamics[M]. Amsterdam: North-Holland, 1972.
- [43] Cohen L. Generalized phase-space distribution functions[J]. Journal of Mathematical Physics, 1966, 7(5): 781-786.
- [44] Woodward PM. Probability and Information Theor2, with Applications to Radar[J]. 1953.
- [45] Papoulis A. Ambiguity function in Fourier optics[J]. JOSA, 1974, 64(6): 779-788.
- [46] Papoulis A. Signal analysis[M]. McGraw-Hill, 1977.
- [47] Rabiner L R, Schafer R W. Digital processing of speech signals[M]. Englewood Cliffs: Prentice-hall, 1978.
- [48] Papoulis A. Systems and transforms with applications in optics[J]. McGraw-Hill Series in System Science, Malabar: Krieger, 1968, 1968, 1.
- [49] Bremmer H. The Wigner distribution and transport equations in radiation problems[J]. J. Appl. Science Eng. A, 1979, 3: 251-260.
- [50] Besieris I M, Tappert F D. Stochastic wave-kinetic theory in the Liouville approximation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1976, 17(5): 734-743.

- [51] Mosallaei H, Rahmat-Samii Y. Nonuniform Luneburg and two-shell lens antennas: radiation characteristics and design optimization[J]. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 2001, 49(1): 60-69.
- [52] Liang C S, Streater D A, Jin J M, et al. A quantitative study of Luneberg-Lens Reflectors[J]. *Antennas and Propagation Magazine, IEEE*, 2005, 47(2): 30-42.
- [53] Mortensen N A, Sigmund O, Breinbjerg O. Prospects for poor-man's cloaking with low-contrast all-dielectric optical elements[J]. *Journal of the European Optical Society-Rapid publications*, 2009, 4.
- [54] Gao H, Zhang B, Johnson S G, et al. Design of thin-film photonic metamaterial Lüneburg lens using analytical approach[J]. *Optics express*, 2012, 20(2): 1617-1628.
- [55] Gao H, Tian L, Zhang B, et al. Iterative nonlinear beam propagation using Hamiltonian ray tracing and Wigner distribution function[J]. *Optics letters*, 2010, 35(24): 4148-4150.

致 谢

在本科生涯的最后一年，我十分荣幸的来到美国麻省理工学院完成自己的毕业设计任务。首先我要感谢麻省理工学院教授 Prof. George Barbastathis 给了我这个难得的机会，跟他学习自己之前没有接触过的光学知识。感谢老师抽出宝贵的时间对我进行指导，耐心的解答在研究过程中提出的问题。每次与老师的交谈讨论都让我受益匪浅。自己在本科阶段的最后填补了在几何光学课程上所没有接触过的知识，这对我来说是一种独特的挑战。

与此同时，我要感谢 MIT 3D Optical Systems Lab 中的师兄师姐。感谢李帅学长在我整个研究过程中与我进行讨论，给了我很多启发。感谢刘毅师姐在我刚来到波士顿时给予我学术和生活上的帮助。感谢已经毕业的谢志鸿学长与我进行邮件往来，解答他研究中的细节。感谢 Justin Lee 学长热心及真诚地与我交流研究过程中的问题。感谢组会上深入的讨论。

我同样要感谢启动这个交流项目的唐晓武老师，在 MIT 进行访问的匡翠方老师，在我的申请过程中全力支持我的导师罗明教授。罗老师在我本科阶段的科研生活中起到了领路人的作用，至今我仍记得大一的时候第一次和罗老师坐下来聊天的场面，选择罗老师作为自己本科阶段的导师是我认为最正确最自豪的选择。

我珍惜在本科阶段结下的美好的友谊。感谢在我申请过程中陪我度过这段煎熬时光，给我排忧解难的同学，伙伴们。

最后，我要将自己最基本的感谢送给自己的父母。没有他们无微不至的关心呵护，时常的加油打气，我不会坚持到现在并且有如今的成绩。尽管时间一点点在他们的脸上留下痕迹，但在我心里母亲永远是年轻美丽的模样，父亲还是那个挺拔的榜样。

本科生毕业论文（设计）任务书

一、题目：基于汉密尔顿及魏格纳分布方程的伦勃透镜仿真

二、指导教师对毕业论文（设计）的进度安排及任务要求：

阶段名称：前期准备

研究时间：2014-12-04 至 2015-01-04

工作内容：充分阅读文献资料，补充毕设所需知识，完成外文翻译，根据研究内容和目标，确定毕业设计研究方案和技术路线等，完成文献综述和开题报告。

阶段名称：开题

研究时间：2015-01-05 至 2015-02-05

工作内容：上交所需要的报告，准备并完成开题报告答辩。

阶段名称：寒假

研究时间：2015-02-06 至 2015-03-06

工作内容：进一步反思进度计划。

阶段名称：实验设计

研究时间：2015-03-07 至 2015-04-07

工作内容：根据前期准备，搭建实验环境，设计实验流程。

阶段名称：实验实施

研究时间：2015-04-08 至 2015-05-08

工作内容：毕业设计具体实施实验阶段。

阶段名称：项目结题总结

研究时间：2015-05-09 至 2015-06-08

工作内容：完成毕业设计论文撰写并准备好结题答辩。

改课题作为实验室内另外一个课题的延续，实验室在制造纳米结构伦勃透镜方面获得突破。该课题探讨运用更便于调制的方法进行光线追迹方针，以期验证实验与理论的误差来源猜想

起讫日期 2014 年 12 月 4 日至 2015 年 5 月 30 日

指导教师（签名）

职称 副教授

三、系或研究所审核意见：

同意

负责人（签名）

年 月 日

毕 业 论 文 (设计) 考 核

一、指导教师对毕业论文（设计）的评语：

(1) 论文公式与参考文献需要进一步规范； (2) 摘要的中英文
板本还需要进一步润色一下，格式上也要注意。

指导教师(签名)

2015 年 6 月 17 日

二、答辩小组对毕业论文（设计）的答辩评语及总评成绩：

引述一种非周期纳米结构的渐变折射率（伦勃）透镜。运用汉密尔顿光线追迹方法，分析实验成像与仿真计算之间的误差，从而验证对于实验误差的猜想，理论性很强，书写规范，工作量饱满

总评成绩：文献综述：8.5，开题报告：17，外文翻译：9。

毕业答辩成绩：51

答辩小组负责人（签名）

2015年6月16日

浙江大学本科生毕业论文（设计）专家评阅意见

毕业论文（设计）题目		基于汉密尔顿及魏格纳分布方程的伦勃透镜仿真				
学生姓名	王子豪		学 号	3110100930		年级
所在学院				专业		
指导教师姓名	匡翠芳	职 称	3	所在单位	光电显示	

本科生毕业论文（设计）评阅意见：（对论文选题、文献综述、外文翻译、研究内容与方法、创新点、论文质量与理论水平、论文写作规范与文风和修改建议等方面加以评阅）

论文研究基于光子晶体的伦勃透镜，引入魏格纳分布方程实现空间-频率域的局部频谱变换，同时表达位置与方向对应的光波强度，从而将几何光学和物理光学的优点相结合，实现更准确高效的光线追迹。对光子晶体伦勃透镜进行了模拟，得到了一些结果。论文理论性很强，书写规范，工作量饱满。达到了毕业设计要求。

同意答辩		同意修改后答辩		未达到答辩要求	
评阅人签名		评阅人职称		评阅人单位	

注：请评阅专家经综合评价后，在相应栏内打“√”。

浙江大学本科生毕业论文（设计）专家评阅意见

毕业论文（设计）题目		基于汉密尔顿及魏格纳分布方程的伦勃透镜仿真					
学生姓名	王子豪		学 号	3110100930		年级	
所在学院				专业			
指导教师姓名	匡翠芳	职 称	3	所在单位	光电显示		
本科生毕业论文（设计）评阅意见：（对论文选题、文献综述、外文翻译、研究内容与方法、创新点、论文质量与理论水平、论文写作规范与文风和修改建议等方面加以评阅）							
<p>渐变折射率超材料的制造已经在最近的研究中得到突破。 本论文引述一种非周期纳米结构的渐变折射率(伦勃)透镜。运用汉密尔顿光线追迹方法，分析实验成像与仿真计算之间的误差，从而验证对于实验误差的猜想。本论文逻辑清晰，内容详实，同意答辩。</p>							
同意答辩		同意修改后答辩		未达到答辩要求			
评阅人签名		评阅人职称		评阅人单位			

注：请评阅专家经综合评价后，在相应栏内打“√”。

浙江大学本科生毕业论文（设计）现场答辩记录表

学院：光电学院

毕业届别：2015

学生姓名	王子豪	学号	3110100930	专业	信息工程（光电）
毕业论文（设计）题目		基于汉密尔顿及魏格纳分布方程的伦勃透镜仿真			
指导教师姓名	匡翠方	职称	副教授	所在单位	光电学院
答辩时间	2015年6月11日			答辩地点	教3-326
答辩组成员（签名）					

本科生毕业论文（设计）答辩记录：（要求在答辩陈述和回答问题等方面具体加以记录与评价）

介绍

1. 漸变折射率超材料
2. 汉密尔顿光线追迹方法
3. 魏格纳分布方程简介
4. 纳米结构伦勃透镜的光线追迹

结论

引入力学中的汉密尔顿方程式解决漸变折射率透镜的光线追迹问题具有简单快速的特点，具有很大的应用价值；分别实现了屏幕汉密尔顿、三维汉密尔顿、三维光程汉密尔顿对漸变折射率透镜进行仿真，包括麦克斯韦鱼眼镜、伊顿透镜及伦勃透镜

引入魏格纳分布方程实现在空间一频率域内的局部频谱变换；实现了空间域信号的 Wigner 变换。同时将 Wigner 与 Hamiltonian 相结合。

通过在汉密尔顿传播过程中重新获得魏格纳分布并对光强度进行调制，我们进行了对伦勃透镜的仿真，并试图解释纳米结构伦勃透镜旁瓣加强的现象，将假设的散射影响进行了一定的验证。

问题

问：折射率是多少？

答：我仿真的折射率从 1 变化到 1.4

建议：1.35 以下的折射率意义不大，最好结合实际。

记录人（签名）：王轶凡

2015 年 6 月 11 日

答辩小组负责人（签名）：

_____年_____月_____日