E5 - Statement

A 小懒獭与平面夹角

题目描述

小懒獭马上就要进行高代的期中考试了！

在复习的过程中，小懒獭复习到了如何根据法向量求两个平面的夹角：

$$\theta = arccos(\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}})$$

现在，小懒獭想实现一个程序自动去根据法向量计算两个平面的夹角，你能帮帮小懒獭吗？

输入格式

不定组数据输入，保证数据组数不超过 1000。

每组数据输入一行，包含六个整数 $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$，表示法向量 $\overrightarrow{n_1}$ 和 $\overrightarrow{n_2}$ 的分量；保证绝对值均不超过 10^4。

数据保证当两向量长度均非0时，两直线不平行。

输出格式

对于每组数据，输出一行。

如果有某一法向量长度为 0，输出 `Careless little lazy otter!`；否则，输出一个浮点数，保留到小数点后三位，表示夹角的值（弧度制）。

样例输入

```
1 2 3 4 5 6
1 0 1 1 0 -1
```

样例输出

```
0.226
1.571
```

Hint

建议使用 `math.h` 库中以下几个函数：

- `acos(x)` 返回以弧度表示的 x 的反余弦
- `sqrt(x)` 返回 x 的完全平方根
- `abs(x)` 返回整数 x 的绝对值

Author：Moca

B ddz 学 RSA

题目描述

ddz 在学习了 RSA 加密算法后想自己动手实践一下，但他发现他确定好了公钥 a 之后不知道如何利用公式 $ax \equiv 1(mod\ p)$ 来计算私钥 x ，他的好朋友给了他一个函数来帮助 ddz 解决这个问题：

```
long long inv(long long a, long long p) {
    long long ans = 1, b = p - 2;
    a = (a % p + p) % p;
    for (; b; b >>= 1) {
        if (b & 1) ans = (a * ans) % p;
        a = (a * a) % p;
    }
    return ans;
}
```

这个函数的返回值即私钥 x ，现在让你来利用这个函数帮 ddz 计算私钥。

输入

第一行一个整数为数据组数 $n\ (1 \leq n \leq 10^5)$

接下来 n 行，每行两个整数 $a, p\ (1 \leq a \leq 10^{18},\ 2 \leq p \leq 10^9 + 7,\ gcd(a, p) = 1 \text{ 且 } p \text{ 为质数})$

输出

对于每组数据，输出一行一个整数 x ，为私钥 x 。

输入样例

```
2
3 2
2 998244353
```

输出样例

```
1
499122177
```

Hint

1. 注意这个函数只能在 p 为质数的情况下使用。
2. 事实上满足 $ax \equiv 1(mod\ p)$ 的 x 称为 a 在模 p 意义下的逆元。等式两边同时除以 a 可以得到 $\frac{1}{a} \equiv x(mod\ p)$ ，也就是说分数也是可以取模的，对于一个分数 $\frac{1}{a}$ 来说，模 p 的结果即分母 a 在模 p 意义下的逆元 x 。

Author: ddz

C 汉明距离 2024

题目描述

对于两个 `unsigned int` 类型（32 位无符号整数）范围内的自然数 a 和 b，设它们的 32 位二进制表示分别为 $a_{31}a_{30}\cdots a_0$ 和 $b_{31}b_{30}\cdots b_0$，a 和 b 的汉明距离 $d(a,b)$ 定义为它们的 32 位二进制表示中有多少位不相同，即满足 $a_i \neq b_i$ 的 i 的数量。

现在给出五个 `unsigned int` 范围内的自然数 x_1、$\cdots$、x_5，求出下列表达式的值：

$$\max\{d(x_1,x_2),d(x_1,x_3)\}+\max\{d(x_2,x_4),d(x_3,x_4)\}+\max\{d(x_3,x_5),d(x_4,x_5)\}$$

输入格式

不定组数据输入，保证数据组数不超过 1000。

每组数据输入一行，包含五个 `unsigned int` 范围内的自然数 x_1、x_2、x_3、x_4 和 x_5。

输出格式

对于每组数据，输出一行一个正整数，表示所求表达式的值。

样例输入

```
3 5 7 9 11
1 2 3 4 5
0 255 128 31 15
```

样例输出

```
7
7
19
```

Author：Moca

D 小亮的圆周率 2024

题目背景

小亮正在学习《工科数学分析》(1)，当他学到了到数列极限时发现 π 可以通过多种数列求和求得，于是他想要查看一下通过不同的数列求得的 π 实数有何差异。但由于手算太麻烦，于是他决定利用自己刚刚学习的 C 语言来算并满足自己的好奇心。

小亮使用了下面两个不同的数列求得 π 的公式，它们分别是：

公式 1:

$$\frac{\pi}{4}=\arctan 1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

公式 2:

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

题目描述

请编写程序，通过式子 1 和公式 2 的前 n 项部分和计算出的 π 的差值的绝对值。

输入格式

输入共 2 行:

- 第一行一个正整数 T，保证 $1 \leq T \leq 1000$。
- 第二行 T 个正整数 $n_1, n_2, ..., n_T$，表示式 1 和公式 2 的部分和的项数。

保证 $1 \leq n \leq 10^4$。

输出格式

共 T 行：第 i 行表示通过式子 1 和公式 2 的前 n_i 项部分和计算出的 π 的差值的绝对值。

结果保留 6 位小数。

输入样例

```
2
2 3
```

输出样例

```
0.314757
0.432052
```

样例解释

当 $n = 2$ 时，通过公式 1 可求得 $\pi_1 = 4 \times (1 - \frac{1}{3}) \approx 2.66666667$

通过公式 2 可求得 $\pi_2 = \sqrt{8 \times (1 + \frac{1}{3^2})} \approx 2.98142397$

公式 1 和公式 2 的前 2 项部分和的差值绝对值 $|\pi_1 - \pi_2| \approx 0.314757$

E 卡皮巴拉小团队1

题目描述

卡皮巴拉学院的卡皮巴拉们在这学期有许多课程需要团队合作。**大佬巴拉**选择了若干只卡皮巴拉组成了卡皮巴拉小团队，其中有 p 只**打工巴拉**和 q 只**摆烂巴拉**。

卡皮巴拉小团队现在面临着 t 项任务需要完成，每项任务需要 n 只卡皮巴拉，只有这 n 只卡皮巴拉中的**打工巴拉**数量**大于等于** m 时，任务才能够完成。对于每项任务，大佬巴拉需要选择若干只卡皮巴拉去完成，请你计算出，**有多少种选择方案**能够完成任务。

输入

第一行，3 个整数 p, q, t，分别表示**打工巴拉**数量、**摆烂巴拉**数量和任务个数，满足 $0 \leq p + q \leq 21, 1 \leq t \leq 5$。

接下来 t 行，每行 2 个整数 n, m，分别表示这项任务需要的卡皮巴拉数量和任务完成需要的**打工巴拉**数量，满足 $0 \leq m \leq n \leq 21$。

输出

对于每项任务，输出能够完成任务的方案数。

输入样例1

```
3 2 2
3 2
5 4
```

输出样例1

```
7
0
```

输入样例2

```
6 5 2
5 3
7 0
```

输出样例2

```
281
330
```

HINT

可以参考课件 **P5-函数** 中的递归求组合数。
递归求组合数需要用到帕斯卡法则 $C(m,n)=C(m-1,n)+C(m-1,n-1)$ 。

F 斐波那契数列 (hard version)

题目描述

如果每对大兔子每月能生殖一对小兔子，每对小兔子需要花一个月长成大兔子，那么在第一个月有 0 对大兔子，1 对小兔子的情况下，兔子每个月的数量情况会形成下面这个数列：

$$1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots$$

这个数列被称为斐波那契数列，又称兔子数列。

现在，改变第一个月的大兔子数量和小兔子数量，请你判断第 n 个月时总共有多少对兔子?

由于这个数很大，请你输出兔子总数对 998244353 取模的结果。

输入

第一行两个非负整数 a,b，表示在第一个月里，有 a 对大兔子，b 对小兔子，$0\le a\le 10^9,0\le b\le 10^9$。

第二行一个正整数 t，表示数据组数，$1\le t\le 10^4$。

接下来 t 行，每行一个正整数 n，表示询问第 n 个月时，兔子总数有多少对，$1\le n\le 10^6$。

输出

对于每组数据，输出一行一个正整数，表示第 n 个月时的兔子总数（对）模 998244353 的结果。

输入样例 1

```
1 0
3
1
4
2
```

输出样例 1

```
1
5
2
```

输入样例 2

```
114514 1919810
3
1
2
10
```

输出样例 2

```
2034324
2148838
115781296
```

样例解释

对于第二组样例，第一个月大小兔子数量分别为 $114514, 1919810$，总数 2034324。第二个月大小兔子数量分别为 $2034324, 114514$，总数 2148838。

Author: Gino

G 回到十七岁那年

描述

如果 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的排列且 $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(a_k \times 10^{n-k}\right)$ 是 17 的倍数，那么 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 有多少种取值。

输入

不小于 4 且不大于 9 的正整数 n 。

输出

第一行，满足题意的 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的取值的数量。

第二行，$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 满足题意时 $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(a_k \times 10^{n-k}\right)$ 的最小值。

第三行，$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 满足题意时 $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(a_k \times 10^{n-k}\right)$ 的最大值。

样例输入

```
4
```

样例输出

```
1
2431
2431
```

说明

2431 是 17 的倍数。

H 小懒獭与 Hardmard 矩阵

问题描述

小懒獭在学习 `Coding Theory` 的过程中，遇到了一种非常美丽的矩阵，叫 `Hardmard` 矩阵，可以用来构造纠错码。

现有 $2^n \times 2^n (n \leq 10)$ 大小的 `Hardmard` 矩阵，它的构造方法如下：

- 初始时，矩阵内的所有元素都为 1
- 将原矩阵均分为 4 个更小的正方形矩阵，每个更小的矩阵的边长是原矩阵的一半，然后将右下角那一个矩阵的所有数字取相反数，即

$$H_n = \begin{bmatrix} H_{n-1} & H_{n-1} \\ H_{n-1} & -H_{n-1} \end{bmatrix}$$

- 每一个矩阵继续分为 4 个更小的矩阵，然后通过同样的方式进行处理，直到矩阵无法再继续分下去（边长为 1），结束这个过程

小懒獭感觉求解 `Hardmard` 矩阵的过程和自己在上一次程设课上学到的函数递归的过程很像，于是她想让你帮她实现一个程序，能够帮她求出 2^n 阶 `Hardmard` 矩阵。

输入格式

一个整数 n ($0 \leq n \leq 10$)

输出格式

$2^n \times 2^n$ 的 01 矩阵，数字之间有一个空格。

样例输入

```
2
```

样例输出

```
1 1 1 1
1 -1 1 -1
1 1 -1 -1
1 -1 -1 1
```

Author：Moca，Saisyc

I 欢乐！欢乐！

题目描述

自从小 P 成为了助教后，便非常愿意为同学们答疑。小 P 每花 x 分钟为一名同学答疑，就能获得 x 点愉悦度，而小 P 当天的欢乐度是从每名同学处获得的愉悦度之积。由于每名同学问的问题都不同，小 P 答疑所需要的时间也有所不同，但小 P 总以分钟做最低单位，即 x 总为正整数。

由于小 P 每天最多可以帮同学们答疑 n 分钟，即花费时间 x 之和不能超过 n。请问小 P 每天获得的最大欢乐度为多少？

####由于结果可能很大，请将结果对 10^9+7 取模。

注：若小 P 当天未帮其他同学答疑，则欢乐度为 0；若只帮一名同学答疑，则欢乐度为从该名同学处获得的愉悦度。

输入

第一行给出整数 T，代表数据组数。其中，$0 < T \leq 2*10^5$。

接下来每组数据中，将给出一个整数 n，$0 \leq n \leq 10^9$。

具体含义见题目描述。

输出

输出一行整数，代表小P获得的最大欢乐度。

输入样例

```
2
4
7
```

输出样例

```
4
12
```

样例解释

对于第一组数据，当一名同学来答疑且花费时间 x 为 4 时，小 P 的欢乐度达到最大。其他情况如两名同学来答疑且花费时间 x 分别为 $2, 2$，三名同学来答疑且花费时间 x 分别为 $1, 1, 2$，小 P 的欢乐度分别为 $4, 2$，均小于等于 4 。

对于第二组数据，当三名同学来答疑且花费时间 x 分别为 $2, 2, 3$ 时，可证明小 P 的欢乐度达到最大。

HINT

如果你通过了第一个测试点，以下HINT或许可以帮助到你：

$level1$:

对于 $a^b, a^c(b < c)$ ，当计算完 a^b 后，可用以下公式计算 a^c：

$$a^c = a^{c-b+b} = a^{c-b} \times a^b$$

$level2$:

若 b 为奇数，有：

$$a^b = a^{b-1} \times a = (a^2)^{\frac{b-1}{2}} \times a$$

若 b 为偶数，有：

$$a^b = (a^2)^{\frac{b}{2}}$$

Adaptation author：小P

J ddz 与 01 序列

注意

本题相较于前面的编程题而言难度较高，请为了复习程设练手的同学忽略该题。

题目描述

ddz 最喜欢的两个数字是 0 和 1 ，他想把一个只有一个数 n 的序列变成只有 0 和 1 的一个序列，考虑如下操作：

- 将序列中的一个大于 1 的数 x 移除，并按顺序将三个数 $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$， $x\ mod\ 2$ ， $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ 放入原来 x 在序列中的位置。

ddz 一直执行上述操作直到序列中只剩下 0 和 1 。 ddz 想知道最终的序列从第 l 项开始到第 r 项中有多少个 1 。

输入

输入一行三个整数 $n,\ l,\ r\ (0 \le n \le 10^{15},\ 1 \le l \le r)$ ，含义如题所示。保证 r 不大于最终序列的长度

输出

对于每组数据，输出一行一个整数 num ，表示最终的序列从第 l 项开始到第 r 项中有 num 个 1 。

输入样例

```
10 2 9
```

输出样例

```
5
```

样例解释

序列演变过程 $[10] \rightarrow [5,0,5] \rightarrow [2,1,2,0,5] \rightarrow [2,1,2,0,2,1,2] \rightarrow [1,0,1,1,2,0,2,1,2] \rightarrow [1,0,1,1,1,0,1,0,2,1,2] \rightarrow [1,0,1,1,1,0,1,0,1,0,1,1,2] \rightarrow [1,0,1,1,1,0,1,0,1,0,1,1,1,0,1]$ 其中第 2 项到第 9 项为 $[0,1,1,1,0,1,0,1]$ 其中有 5 个 1

Author: ddz