E5 - Solution

A 小懒獭与平面夹角

难度	考点
1	库函数

题目分析

根据给定的公式和 Hint, 直接计算结果即可。需要注意的是首先, 发现得到的最大值都是 int 范围内的, 而且上面取绝对值内部的计算不涉及浮点数, 所以用 abs 即可。

其次就是,题目保证了所给的两条线不会平行,为什么要给出这样的限制呢,如果平行了会发生什么? 实际上,比如下面的代码:

```
#include<stdio.h>
     #include<math.h>
     double dis(int x,int y,int z);
     ☆∨
     int main(){
         int a1,b1,c1,a2,b2,c2;
         double ans;
         while(scanf("%d%d%d%d%d%d%d",&a1,&b1,&c1,&a2,&b2,&c2)!=EOF){
             if(dis(a1,b1,c1)==0||dis(a2,b2,c2)==0){}
                 printf("Careless little lazy otter!\n");
             else{
                 ans=(abs(a1*a2+b1*b2+c1*c2)/(dis(a1,b1,c1)*dis(a2,b2,c2)));
13
                 printf("%.20lf %.3lf %d\n",ans,acos(ans),isnan(acos(ans)));
         return 0;
     $ ∨
     double dis(int x,int y,int z)
问题
     输出
           调试控制台
                    终端
                          端口
(base) PS C:\Users\czm70> cd "c:\Users\czm70\Desktop\程设\对拍\"; if ($?) { gcc stud
1 1 1 2 2 2
```

可以看到, ans 的结果由于浮点误差,稍稍大于了 1.0;但是很显然没有任何弧度的 cos 值能大于 1,所以 acos 只能返回 NaN (Not a Number),出现错误。

```
#include<math.h>
int a1,a2,b1,b2,c1,c2;
int main(){
    while (~scanf("%d%d%d%d%d",&a1,&b1,&c1,&a2,&b2,&c2) ){
        int fm=abs(a1*a2+b1*b2+c1*c2);
        double fz=sqrt(a1*a1+b1*b1+c1*c1)*sqrt(a2*a2+b2*b2+c2*c2);
        if (a1*a1+b1*b1+c1*c1 == 0 || a2*a2+b2*b2+c2*c2 == 0)
            printf("Careless little lazy otter!\n");
        else
            printf("%.31f\n",acos(fm/fz));
    }
    return 0;
}
```

B ddz 学 RSA

难度	考点
2	函数

题目分析

把题目所给函数复制下来,输入数据并调用它,输出结果即可。

```
#include <stdio.h>
long long inv(long long a, long long p) {
    long long ans = 1, b = p - 2;
    a = (a \% p + p) \% p;
    for (; b; b >>= 1) {
        if (b \& 1) ans = (a * ans) % p;
        a = (a * a) \% p;
    return ans;
}
int main() {
    long long n, a, p;
    scanf("%11d", &n);
    while (n--) {
        scanf("%11d %11d", &a, &p);
        printf("%11d\n", inv(a, p));
    return 0;
}
```

C 汉明距离 2024

难度	考点
2	函数、位运算

题目分析

可以把 max 和求汉明距离的 d 封装为函数, 然后直接代题目中给出的公式即可。

max 除了用 if-else 结构实现之外,也可以用我们之前学过的三目表达式实现,更加简洁:

```
// 命名最好不要与库函数冲突
int myMax(int a, int b) {
   return a > b ? a : b;
}
```

求汉明距离,实际上就是看有多少位不一样,可以用如下代码:

```
int popcount(unsigned t) {
    int ret = 0;
    for(int i = 31; i >= 0 ;i--) {
        if((t >> i) & 1)
            ret++;
    }
    return ret;
}

int d(unsigned a, unsigned b) {
    // __builtin_popcount 不是 C 标准库函数, 只是 gcc 支持, 我们的 OJ 上也能用, 在这里我们使用自己实现的函数了
    // __builtin_popcount 相关的一族函数感兴趣的同学可以查阅
    return popcount(a ^ b);
}
```

```
#include <stdio.h>

int myMax(int a, int b) {
    return a > b ? a : b;
}

int popcount(unsigned t) {
    int ret = 0;
    for(int i = 31; i >= 0 ;i--) {
        if((t >> i) & 1)
            ret++;
    }
    return ret;
}
```

D 小亮的圆周率 2024

难度	考点
3	函数、循环语句、浮点数

题目分析

本题可以先将两种求pi的方法进行封装,将结果作差取绝对值,主要考察循环和浮点数的计算。

 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 公式中数列符号与 n 的奇偶性有关。我们可以采取使用条件语句进行奇偶性判断。我们也可以采用示例代码中的方法,定义变量 sign,初始值为 1,每一次循环结束时,sign 变量自乘 -1。这样即可作为第 n 项的符号。

在整数除以整数时,如果**想要得到浮点数,一定要在表达式中乘以** 1.0 **,或者使用强制类型转换** ,使表达式的计算范围扩展到浮点数范围。

```
#include<stdio.h>
#include <math.h>

double pi1(int n) {
    double col1 = 0;
    int sign = 1;
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        col1 += (1.0 * sign / (2 * i + 1));
        sign *= -1;
    }
    return col1 * 4;
}

double pi2(int n) {</pre>
```

```
double col2 = 0;
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
       col2 += (1.0 / ((2 * i + 1) * (2 * i + 1)));
   return sqrt(8 * col2);
}
int main() {
   int t:
   int n;
   scanf("%d", &t);
   //循环 t 次
   while (t--) {
       scanf("%d", &n);
       printf("%.61f\n", fabs(pi1(n) - pi2(n)));//输出,保留6位小数。注意浮点数绝对值
使用fabs函数
   }
}
```

E 卡皮巴拉小团队1

难度	考点
3	数据类型,组合数,函数

题目分析

题目大意:

在给定数量的打工巴拉和摆烂巴拉中,选择符合条件的卡皮巴拉组合来完成任务。任务成功的条件是选择的组合中打工巴拉的数量满足任务要求。

解题思路:

可以遍历符合条件的打工巴拉数,设 k 为选择的打工巴拉数量(满足 $m \le k \le p$ 且 $k \le n$),剩余的 n-k 个卡皮巴拉则从摆烂巴拉中选择。对于每个 k 的值,计算出符合条件的方案数,并累加得到最终结果。

接下来的关键在于组合的数量计算。组合数求解有两种方法,一种是递归函数(函数自己调用自己),另一种是非递归函数。

对于 PPT 中的非递归做法,在求阶层的连乘过程中可能会溢出,导致即使 long long 也无法存下(同学们可以算算题目数据范围求阶层极限情况的数据大小)。所以需要进行运算步骤的调整,一边乘一边除,如下示例代码。

对于递归做法,需要用到帕斯卡法则,这种方法不会溢出。

```
#include <stdio.h>
// 组合数计算函数,非递归函数
long long comb(int m, int n) {
   if (n == 0 || m == n)
       return 1;
    if (m < n)
       return 0;
   if (n == 1)
       return m;
    long long result = 1;
    for (int i = 1; i \le n; i++) {
        result = result * (m - i + 1) / i;
    return result;
}
// 组合数计算函数,递归函数
int comb_num(int m, int n) {
   if (n == 0 || m == n)
       return 1;
    if (m < n)
       return 0;
    if (n == 1)
       return m;
    return comb_num(m - 1, n) + comb_num(m - 1, n - 1);
int MIN(int a, int b) {
    return a < b? a : b;
int main() {
    int p, q, t;
    scanf("%d%d%d", &p, &q, &t);
    while (t--) {
       int n, m;
       scanf("%d%d", &n, &m);
       int sum = 0;
       // 枚举可以选择的打工巴拉数量
       for (int i = m; i \le MIN(n, p); i++) {
           // p 个打工巴拉中选取 i 个, q 个摆烂巴拉中选择 n-i 个
           // sum += comb(p, i) * comb(q, n - i);
           sum += comb_num(p, i) * comb_num(q, n - i);
       printf("%d\n", sum);
   }
    return 0;
}
```

F 斐波那契数列 (hard version)

难度	考点
3	递推,数组

题目分析

这题与 easy version 相比,区别仅在于数据范围的显著增大。我们知道,递归解法的时间复杂度是指数级的,显然无法解决这么大数据范围的计算。

注意到,我们使用递归解法时,总是要重新计算 f(n-1) 和 f(n-2),而重新计算 f(n-1) 的时候又需要重新计算 f(n-2) 和 f(n-3),效率十分低下。因此,我们可以直接拿数组将计算过的 f[n-1] 和 f[n-2] 存储起来,计算 f[n] 的时候只需要使得 f[n] = f[n-1] + f[n-2] 进行一次运算即可。由于少了大量重复运算,单次计算的时间复杂度也从 $O(1.618^n)$ 降低到 O(n)。

然而,如果仅仅是这样的话,那么仍然无法通过测试,因为我们有 10^4 组数据,最终的时间复杂度是 O(tn)。因此,我们还需要进一步的去除重复计算。

对此,解决方法是,我们提前计算 f[1000000] ,而在这个过程中, f[0] 到 f[1000000] 之间的所有结果都已经算出,我们只需把它们都存储起来,然后在之后的询问中直接查询答案即可。这样,我们 O(n) 预处理了所有答案,然后对于之后的每次询问只需 O(1) 查询。

注意, 有些写法可能没有将 f[1] 或 f[2] 对 998244353 取模, 导致 WA, 注意边界情况的处理。

```
#include <stdio.h>
#define mod 998244353
int ans[1000005];
int main(void)
    int a, b;
    scanf("%d%d", &a, &b);
    ans[0] = a \% mod;
    ans[1] = (a + b) \% mod;
    for (int i = 2; i \le 1000000; i++)
        ans[i] = ans[i - 1] + ans[i - 2];
        if (ans[i] >= mod)
            ans[i] -= mod;
    }
    int t;
    scanf("%d", &t);
    while (t--)
        int n;
        scanf("%d", &n);
        printf("%d\n", ans[n]);
    }
    return 0;
}
```

G 回到十七岁那年

难度	考点
4	递归,全排列

题目分析

我们可以生成 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的每个排列然后进行研究。

设 f(x) 表示在 (a_1, a_2, \dots, a_x) 已经被确定的情况下生成排列然后进行研究。

如果 x=n, 说明 (a_1,a_2,\cdots,a_n) 已经被确定,可以直接进行研究。

如果 x < n,说明 (a_1, a_2, \cdots, a_n) 尚未被确定,由于此时 (a_1, a_2, \cdots, a_x) 已经被确定,我们可以确定 a_{x+1} 后通过 f(x+1) 进行生成和研究;也就是说,对于 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中的每一个数 v,如果 v 在 $\{a_1, a_2, \cdots, a_x\}$ 中出现了 0 次,那么就可以将 a_{x+1} 确定为 v 后调用 f(x+1) 。

```
# include <stdio.h>
int n;
int a[10], b[10];
int m = 0, l = 987654321, r = 0;
void f(int x) {
    if (x == n) {
        int s = 0;
        for (int k = n, t = 1; k >= 1; k --, t *= 10) {
            s += a[k] * t;
        }
        if (s % 17 == 0) {
            m += 1;
            if (s < 1) {
                1 = s;
            if (s > r) {
                r = s;
            }
        }
    } else {
        for (int v = 1; v \le n; v++) {
            if (b[v] == 0) {
                a[x + 1] = v;
                b[v] += 1;
                f(x + 1);
                a[x + 1] = 0;
                b[v] = 1;
            }
        }
    }
}
```

```
int main() {
    scanf("%d", &n);
    f(0);
    printf("%d\n%d\n%d", m, 1, r);
    return 0;
}
```

H 小懒獭与 Hardmard 矩阵

难度	考点
5	递归、循环

题目分析

思路一: 递归输出每个位置

定义一个函数 f(k,i,j) ,表示输出 k 阶图案第 i 行第 j 个位置(从第0行第0列开始记)。

- 若 k = 0,则输出 1;
- 如果 (i,j) 在 k 阶图案的左上、右上或者右下角,输出 f(k-1,i',j') ,其中 $i'=i \bmod 2^{k-1}$, $j'=j \bmod 2^{k-1}$ 。
- 否则 (即在右下角) ,输出 -f(k-1,i',j') ,其中 $i'=i \bmod 2^{k-1}$, $j'=j \bmod 2^{k-1}$ 。

具体实现参照示例代码。

思路二: 递归+二维数组(暂时没学,下节课才会学,仅供参考)

由于二维数组还未学到,本思路仅作为参考。

跟思路 1 差不多,只不过一开始把整个数组元素都初始化为 1,随着递归的进行修改数组元素,最后再统一输出。

具体实现参照示例代码。

思路三:循环+二维数组(暂时没学)

由于二维数组还未学到,本思路仅作为参考。

由 k 阶图案生成 k+1 阶图案可由下列两步操作实现:

- 1. 将 k 阶图案复制 4 份,拼在一起形成一个大正方形(即向右、向下、向右下复制平移);
- 2. 把右下角的所有元素取相反数。

依次思路,k 阶图案仅需要从原始图案重复执行上列操作k 遍即可得到。

具体实现参照示例代码及注释。

```
#include <stdio.h>
int f(int i, int j, int n) {
    if(n == 0)
        return 1;
    else if(i >= (1 << n - 1) & j >= (1 << n - 1))
        return -f(i \% (1 << n - 1), j \% (1 << n - 1), n - 1);
    else
        return f(i \% (1 << n - 1), j \% (1 << n - 1), n - 1);
}
int main() {
    int k;
    scanf("%d", &k);
    for (int i = 0; i < (1 << k); i++) {
        for (int j = 0; j < (1 << k); j++)
            printf("%d ", f(i, j, k));
        printf("\n");
    }
    return 0;
```

```
#include <stdio.h>
// 用 int 会 MLE, 可以用 short、char 或者压位数组
char a[1030][1030];
void dfs(int i, int j, int n) {
    if(n == 0)
        return ;
    int tem = 1 << (n - 1);
    int tem2 = 1 \ll n;
    for(int k = i + tem; k < i + tem2; k++)
        for(int l = j + tem ; l < j + tem2 ; l++)
            a[k][1] *= -1;
    dfs(i, j, n - 1);
                                   // 左上
    dfs(i + tem, j, n - 1);
                                  // 右上
    dfs(i, j + tem, n - 1);
                                   // 左下
    dfs(i + tem, j + tem, n - 1); // 右下
}
int main() {
    int n;
    scanf("%d", &n);
    int tem = 1 \ll n;
    for(int i = 1; i \leftarrow tem ; i++)
        for(int j = 1; j \leftarrow tem ; j++)
            a[i][j] = 1;
```

```
dfs(1, 1, n);

for(int i = 1; i <= tem ;i++) {
    for(int j = 1; j <= tem ;j++)
        printf("%d ", a[i][j]);
    printf("\n");
}

return 0;
}</pre>
```

```
#include <stdio.h>
short a[1024][1024] = {{1}}; //初始为一个1
int main()
   int K;
   scanf("%d", &K);
   for(int k = 1; k \le K; ++k) //K 遍操作
    {
       for(int i = 0; i < (1 << (k - 1)); ++i)
           for(int j = 0; j < (1 << (k - 1)); ++j)
               a[i + (1 << (k - 1))][j + (1 << (k - 1))] = a[i + (1 << (k - 1))]
[j] = a[i][j + (1 << (k - 1))] = a[i][j]; //向右、下、右下复制平移
       for(int i = 0; i < (1 << (k - 1)); ++i)
           for(int j = 0; j < (1 << (k - 1)); ++j)
               a[i + (1 << (k - 1))][j + (1 << (k - 1))] *= -1; // 右下角取反
   for(int i = 0; i < (1 << K); ++i)
       for(int j = 0; j < (1 << K); ++j)
           printf("%d ", a[i][j]);
       printf("\n"); //每行之间要换行
   }
    return 0;
}
```

I 欢乐! 欢乐!

难度	考点
5	贪心、快速幂(可能)

题目分析

可将题目改变为:选取任意多个正整数(可能为 0 个),使这些数之和为 n,求这些数乘积的最大值。 设取出 m 个正整数,分别为 a_1,a_2,\ldots,a_m 。根据贪心原理,当 n>1 时,可以得到下面三条原则:

```
1. a_i \geq 2;
2. a_i \leq 3;
3. 对于 a_1, a_2, \ldots, a_m,至多有两个 2 。
```

对于第一条,若 $a_i = 1$,则其不会给最后的乘积带来任何贡献,但会使其他数之和-1。

对于第二条,若 $a_i>3$,可将 a_i 改为 $a_i-2,2$ 这两个数。由于两者有相同的加和,但 $a_i\le 2*(a_i-2)$,故改后的乘积永远不小于改前,即不选大于 3 的数所得结果总优于选大于 3 的数。

对于第三条,当选出的正整数中有 3 个 2 时,由于 2+2+2=3+3,但 2*2*2<3*3。所以将 3 个 2 替换为 2 个 3 后这些数的乘积永远大于替换前,即不选超过 2 个 2 所得结果总优于选超过 2 个 2 。

因此可以发现,对于每个 n ,若满足以上三条原则,则均只有唯一的选取方案,依照此方案计算答案即可。

在求解的过程中,需要求3的x次方模 10^9+7 的结果。而这里的x最大可以达到 $3*10^8$ 左右,直接一位一位相乘将会TLE,且数组也记录不了这么多个的数。

下面介绍一种快速求幂的板子,它可以在 p 不是特别大(int 范围内的正整数均可以)时快速求出 a 的 b 次方模 p 的结果:

```
/*快速求 a 的 b 次方模 p 的结果. 时间复杂度为 O(logN), 称为 快速幂 。板子来自于助教组*/
long long qpow(long long a, unsigned long long b, long long p) {
    long long ans = 1;
    a = a % p;
    while(b) {
        if(b & 1)
            ans = (ans * a) % p;
        b >>= 1;
        a = a * a % p;
}
return ans;
}
```

其实解决这个的方法还有很多,也有比快速幂时间负责度更优的写法。设变量 $x\geq 1$,时间复杂度最低可以为 $O(n^{1/x}+T*x)$ 。当 x 满足 $n^{1/x}=T*x$ 时,达到最优时间复杂度。但在实际情况中,x 只能为正整数,故在本题的 T,n 限制下,x=2 时时间复杂度最优,为 $O(n^{1/2}+T)$ 。

具体代码见下(快速幂解法):

示例代码

std:

```
#include<stdio.h>
long long mod=1000000007;
long long quick(long long x,long long n)
{
    long long sum=1;
    while(n>0)
    {
        if(n%2==1)
```

```
sum=sum*x%mod;
         }
        x=x*x\mbox{\mbox{$^*$}}x=0;
        n/=2;
    }
    return sum;
}
signed main()
    long long t,x,a,b,sum; //a \wedge b
    scanf("%11d",&t);
    while(t--)
    {
        scanf("%11d",&x);
        if(x==0)
        {
             printf("0\n");
        }
        else if(x==1)
             printf("1\n");
        }
        else if(x\%3==0)
             a=3;
             b=x/3;
             sum=quick(3,b);
             printf("%11d\n", sum);
        }
        else if(x\%3==1)
             a=3;
             b=x/3-1;
             sum=quick(3,b);
             printf("%11d\n",sum*4%mod);
        }
        else if(x\%3==2)
         {
             a=3;
             b=x/3;
             sum=quick(3,b);
             printf("%11d\n", sum*2%mod);
        }
    }
    return 0;
}
```

J ddz 与 01 序列

难度	考点
7	函数、递归

题目分析

首先有几点观察:

- 1. 操作后所有数字和不变。显然有 $x=\lfloor \frac{x}{2}\rfloor+(x \bmod 2)+\lfloor \frac{x}{2}\rfloor$,所以对任意一个数字一直操作下去,最终得到的序列中 1 的个数等于原来的数。
- 2. 一个序列中对不同两个数的操作互不影响。
- 3. 对一个数字 n 一直操作到最后得到的序列长度为 $2^{\lfloor log_2n\rfloor+1}-1$ 。记 f(n) 为前述长度,那么有 $f(n)=f(\lfloor \frac{n}{2}\rfloor) \times 2+1$,此式可以用递归实现,或者记 t 为 n 的二进制表示的位数,得到 $f(t)=f(t-1) \times 2+1$,运用数列的知识可以解出最终序列长度。

后续题解中 f(n) 表示对一个数字 n 一直操作到最后得到的序列长度

考虑用递归函数解决此题,为了简化递归函数,我们可以利用前缀和的思想计算前 r 项中 1 的个数和前 l-1 项中 1 的个数,他们相减即为答案。令函数 cal(n,num) 为求将 n 展开为 01 串之后前 num 项中 1 的个数,我们现在来完成这个 cal 函数:

```
当 n=0 or 1 ,直接返回 n==1 ? 1 : 0 ,其余情况都需要将 n 先操作一次变成 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor ,(n \bmod 2) ,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor 。
```

- 1. 当 $num \leq f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ 时,我们只需计算 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 展开后的前 num 项中 1 的个数,即返回 $cal(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, num)$ 。
- 2. 当 $num=f(\lfloor \frac{n}{2}\rfloor)+1$ 时,结果是 $\lfloor \frac{n}{2}\rfloor$ 展开后的所有 1 的个数加上 n mod 2 是否是 1 ,也就是 $\lfloor \frac{n}{2}\rfloor+n$ mod 2 ==1 ? 1 : 0 。
- 3. 当 $num > f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1$ 时,用 2. 的结果加上 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 展开后的前 $num (f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1)$ 项的 1 的个数,即 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + n \ mod \ 2 == 1 \ ? \ 1 \ : \ 0 + cal(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, num (f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1))$ 。

完成 cal 函数之后,输出 cal(n, r) - cal(n, l-1) 即可。

```
#include <stdio.h>
#define ll long long

ll f(ll n) {
    ll res = 1;
    while (n) res <<= 1, n >>= 1;
    return res - 1;
}

ll cal(ll n, ll num) {
    if (num == 0) return 0;
    if (n <= 1) return n & 1;
    ll len = f(n / 2);
    if (num <= len) return cal(n / 2, num);
    if (num == len + 1) return n / 2 + (n & 1);
    return n / 2 + (n & 1) + cal(n / 2, num - len - 1);</pre>
```

当然,也可以将这个递归函数展开成一个循环:

```
#include <stdio.h>
#define 11 long long
11 f(11 n) {
    11 \text{ res} = 1;
    while (n) res \ll 1, n \gg 1;
    return res - 1;
}
11 cal(11 n, 11 num) {
    11 \text{ res} = 0;
    while (n > 1) {
        if (num == 0) {
            return res;
        }
        11 len = f(n / 2);
        if (num <= len) {</pre>
            n /= 2;
        } else if (num == len + 1) {
            return res + n / 2 + (n & 1);
        } else {
            res += n / 2 + (n \& 1);
            n /= 2;
            num -= len + 1;
    }
    return res + (n & 1);
}
int main() {
    11 n, 1, r;
    scanf("%11d %11d %11d", &n, &1, &r);
    printf("%lld", cal(n, r) - cal(n, l - 1));
    return 0;
}
```