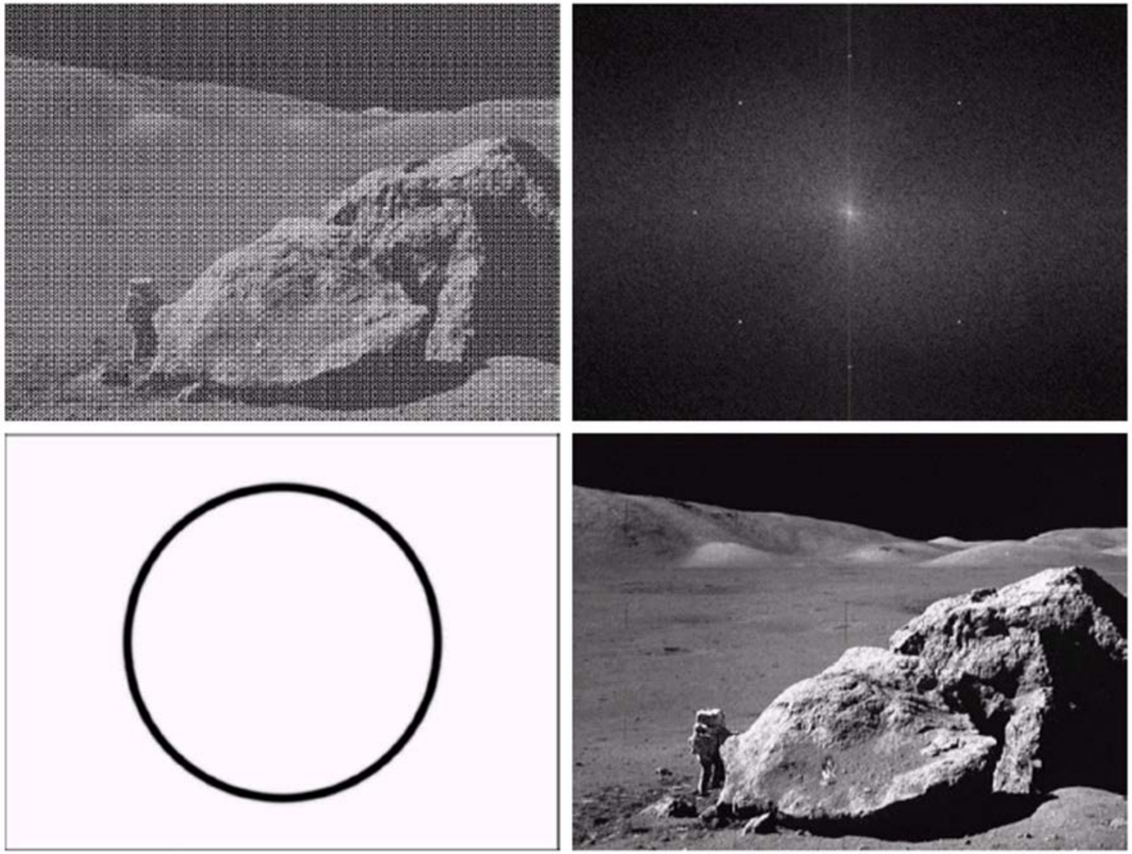
第4章　图像变换

图像变换的目的：

1. 方便处理
2. 便于抽取特性图像
3. 数据压缩



变换方法:

4.1. 傅立叶变换Fourier Transform

4. 2. 离散余弦变换Discrete Cosine Transform

4. 3. 沃尔希-哈德玛变换Walsh-Hadamard Transform

4. 4. 斜变换Slant Transform

4. 5. 哈尔变换Haar Transform

4. 6. 离散K-L变换Discrete Karhunen-Leave Transform

4. 7. 奇异值分解SVD变换Singular-Value Decomposition

4. 8. 离散小波变换Discrete Wavelet Transform

4.1 傅立叶变换

傅立叶变换

傅立叶变换是最早研究与应用的酉变换

60年代出现快速傅立叶变换

傅立叶变换域也称为频域

- 傅立叶积分：

$$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

其中t代表时间，*f*代表频率　　　其中**j²=-1**

一.傅立叶变换的定义

傅立叶变换的定义(一维)：

f(x)为连续可积函数，其傅立叶变换定义为：

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx$$

其反变换为：

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux}du$$

$$F(u)=R(u)+jI(u)$$

幅度谱：$|F(u)|=\left[R^2(u)+I^2(u)\right]^{\frac{1}{2}}$

相位谱：$|\Phi(u)|=\arctan[I(u)/R(u)]$

傅立叶变换的存在性：

如果一个函数的绝对值的积分存在，即：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

并且函数是连续的或者只有有限个不连续点，则对于x的任何值，函数的傅立叶变换都存在。

傅立叶变换是互逆的：

由傅立叶积分定理：

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi st} dt] e^{j2\pi st} ds}$$

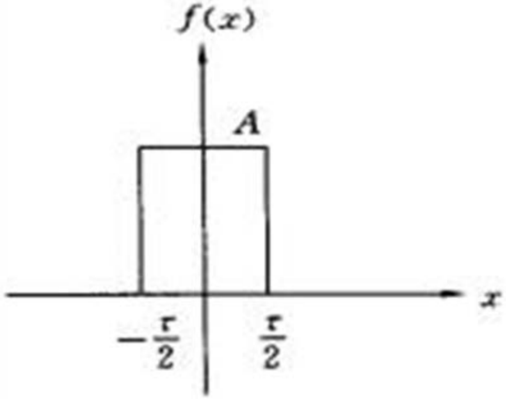
f(t)=F^{-1} {F(s)}

f(t)与F(s)可称作Fourier 变换对,它们是互逆的和唯一决定的

f(t)=F^{-1} {F(s)} $\Longleftrightarrow$ F(s)=F {f(t)}

一维傅立叶变换举例

方波信号：



$$f(x)=\begin{cases} A & -\frac{\tau}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\tau}{2} \\ 0 & x>\frac{\tau}{2} \\ 0 & x<\frac{\tau}{2} \end{cases}$$

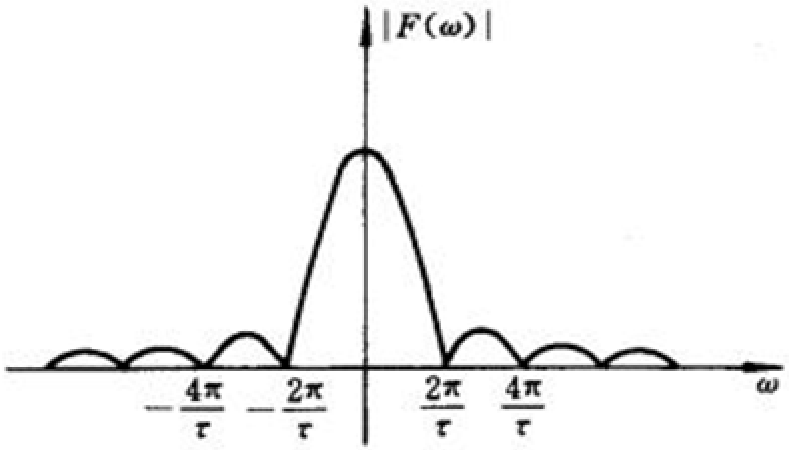
$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx \\ &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ae^{-j\omega x}dx \\ &= \frac{A}{j\omega}\left(e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\right) \\ &= \frac{2A}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2} \end{aligned}$$

$\omega=2\pi u$

欧拉公式(Eular relation):

$e^{-j\omega x}=\cos(\omega x)-j\sin(\omega x)$

$e^{j\omega x}=\cos(\omega x)+j\sin(\omega x)$



一维离散傅立叶变换(DFT)

一维离散傅立叶变换公式为:

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)e^{-j\frac{2\pi ux}{N}} \quad u = 0,1,\cdots,N-1$$

逆变换为:

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u)e^{j\frac{2\pi ux}{N}} \quad x = 0,1,\cdots,N-1$$

二维傅立叶变换

二维傅立叶变换由一维傅立叶变换推广而来：

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\exp[-j2\pi(ux+vy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

逆变换：

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u,v)\exp[j2\pi(ux+vy)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$F(u,v)=|F(u,v)|e^{j\phi(u,v)}$ $\qquad F(u,v)=R(u,v)+jI(u,v)$

幅度谱： $|F(u,v)|=[R^2(u,v)+I^2(u,v)]^{1/2}$

相位谱：$\Phi(u,v)=\arctan[I(u,v)/R(u,v)]$

二维傅立叶变换举例

对于二维方波信号

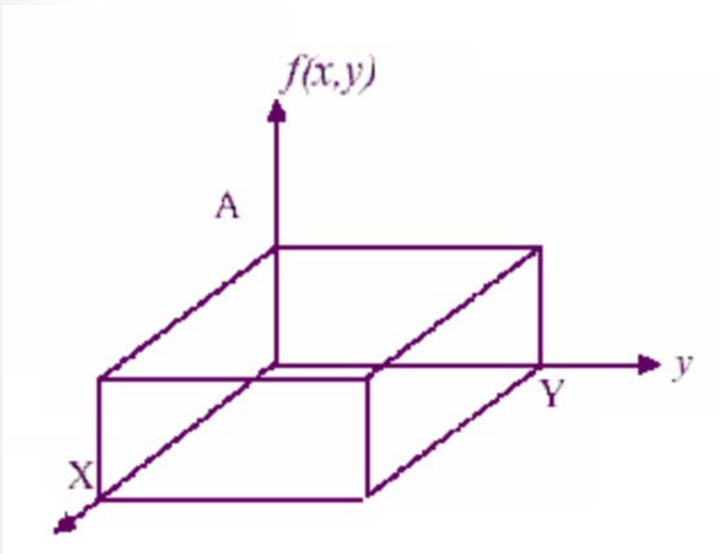
$$f(x,y)=\begin{cases}A & 0\leqslant x\leqslant X, 0\leqslant y\leqslant Y\\ 0 & 其它\end{cases}$$

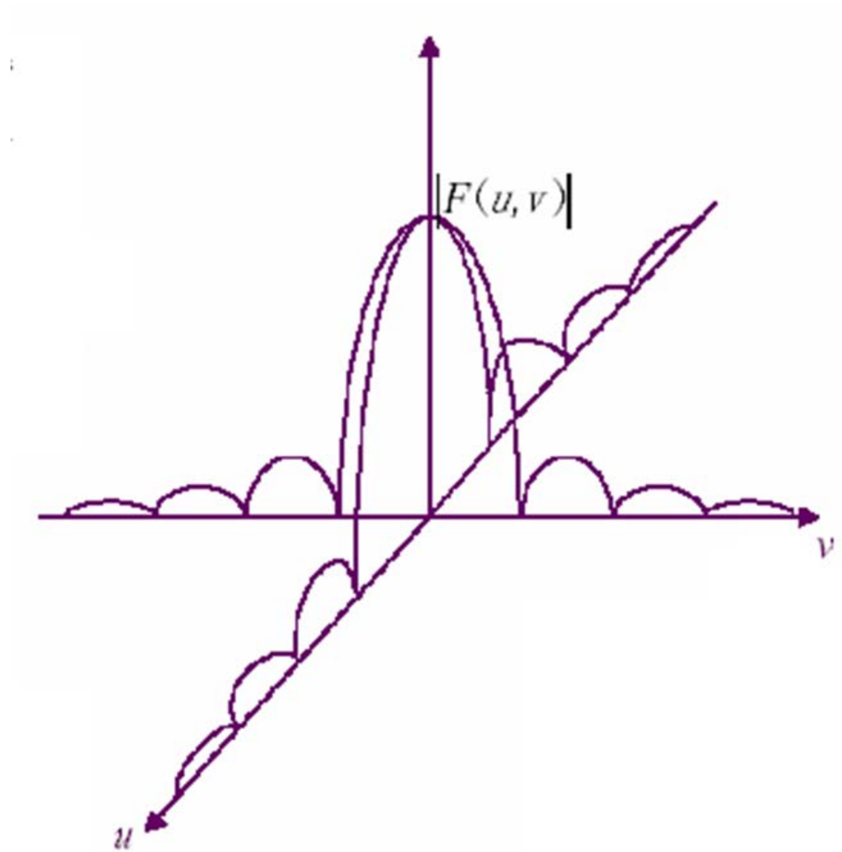
傅立叶变换为：

$$\begin{aligned}F(u,v)&=\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy\\ &=A\int_0^X e^{-j2\pi ux}dx\int_0^Y e^{-j2\pi vy}dy\\ &=A\left.\frac{e^{-j2\pi ux}}{-j2\pi u}\right|_0^X \left.\frac{e^{-j2\pi vy}}{-j2\pi v}\right|_0^Y\\ &=AXY\cdot\frac{\sin \pi uX}{\pi uX}e^{-j\pi uX}\cdot\frac{\sin \pi vY}{\pi vY}e^{-j\pi vY}\end{aligned}$$

幅度：

$$|F(u,v)|=AXY\left|\frac{\sin \pi uX}{\pi uX}\right|\left|\frac{\sin \pi vY}{\pi vY}\right|$$


f(x,y)
A
y
Y
X


|F(u,v)|
v
u

二维离散傅立叶变换

对于N×N图像，二维傅立叶变换的离散形式为：

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{\left[-j2\pi\left(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{N}\right)\right]}$$

逆变换为：

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{\left[j2\pi\left(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{N}\right)\right]}$$

其中x,y=0….N-1　　u,v=0….N-1

幅谱(频谱)、相谱：

$$F(u,v)=|F(u,v)|e^{j\varphi(u,v)}=R(u,v)+jI(u,v)$$

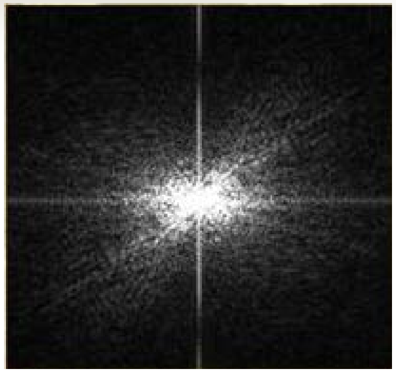
$$|F(u,v)|=\left[R^2(u,v)+I^2(u,v)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi(u,v)=\arctan\frac{I(u,v)}{R(u,v)}$$

(1)一般显示 |F(u,v)|

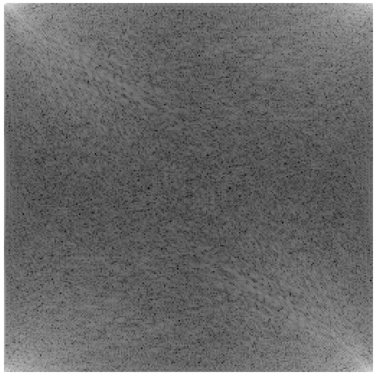
(2)|F(u,v)|变换范围太大

(3)用D=log[|F(u,v)| +1]进行显示

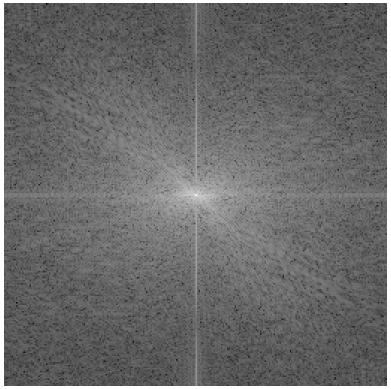


平移后频谱增强

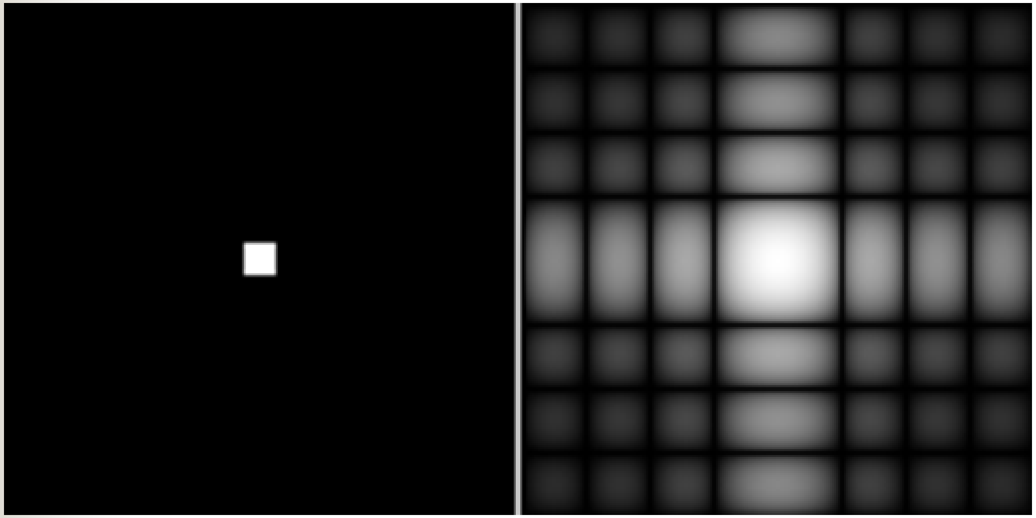
例：

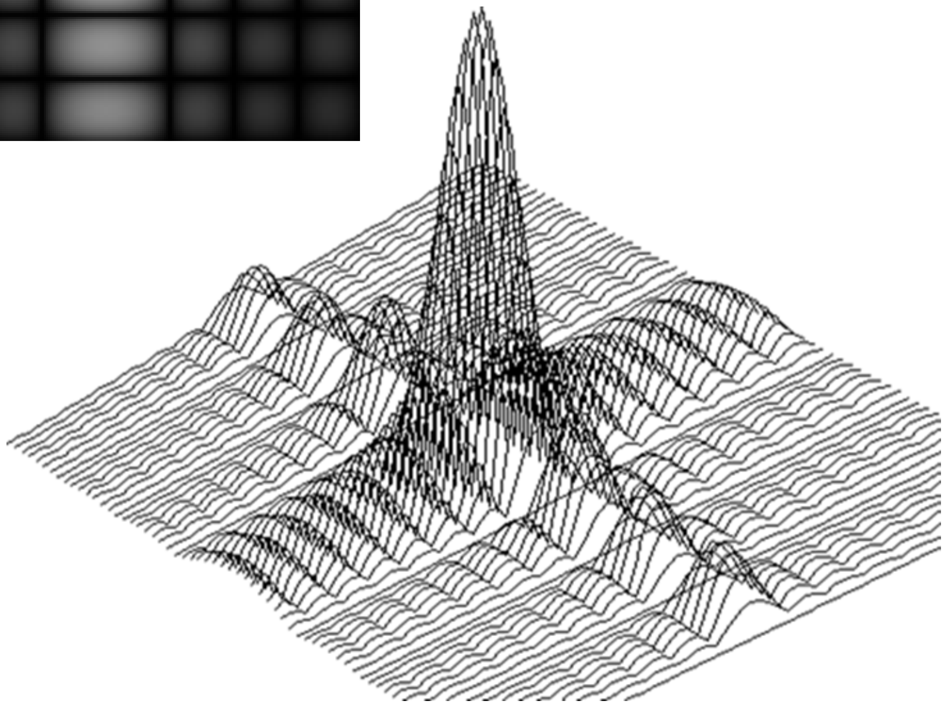


频谱

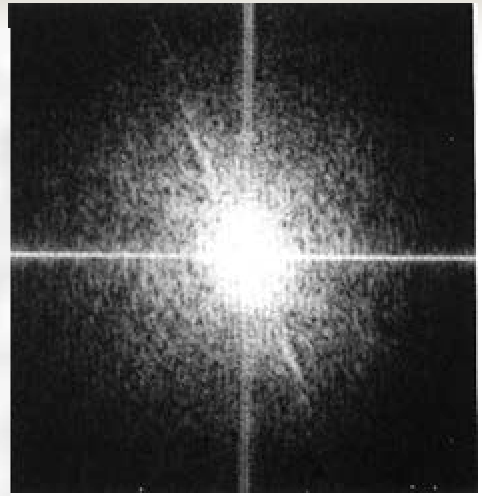


中心平移后的频谱

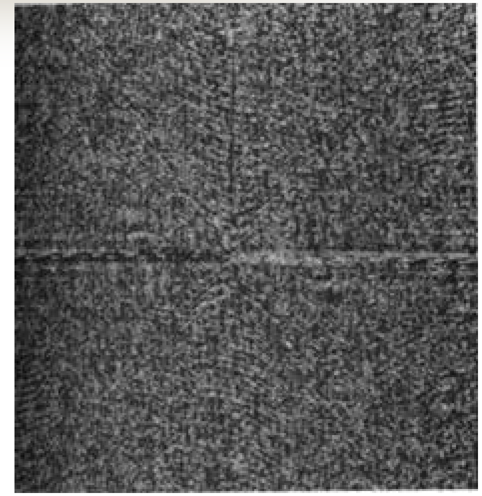




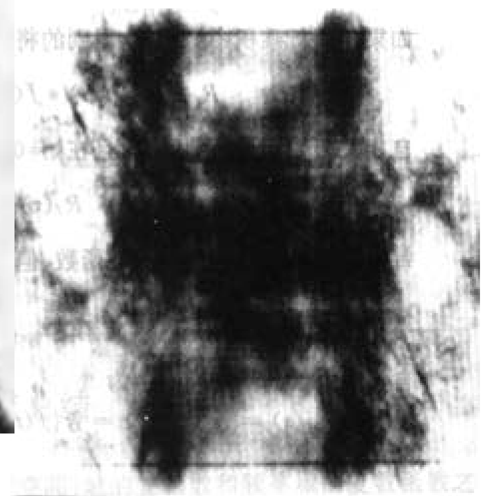
傅立叶变换示例



- 幅值谱



- 相位谱



- 幅值重构图像

- 相位重构图像

傅里叶变换性质

2DDFT的性质

1．分离性：

$$F(x,v)=N\left[\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp[-j2\pi vy/N]\right]$$

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} F(x,v)\exp[-j2\pi ux/N]$$

所以可以对图像先在Y方向作1DDFT，再在X方向作1DDFT，就是对整幅图像作2DDFT。

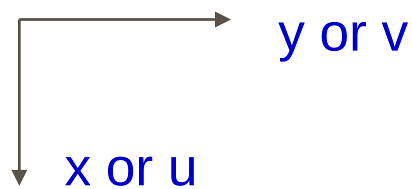
例:

2D DFT F(u,v) 计算步骤:

1. 对图像f(x, y)的每行计算1D DFT F(u, y)
2. 计算F(u, y)每列的1D DFT

(a) f(x,y)　　(b) F(u,y)　　(c) F(u,v)

Convention of coordination:



2．位移定理

原始图像$f(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)$

$$f(x,y)\exp[j2\pi(u_0x+v_0y)/N] \Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$$

$$f(x-x_0,y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)\exp[-j2\pi(ux_0+vy_0)/N]$$

3. 周期性和共轭对称性

(1)周期性：$F(u,v)=F(u+N,v+N)$

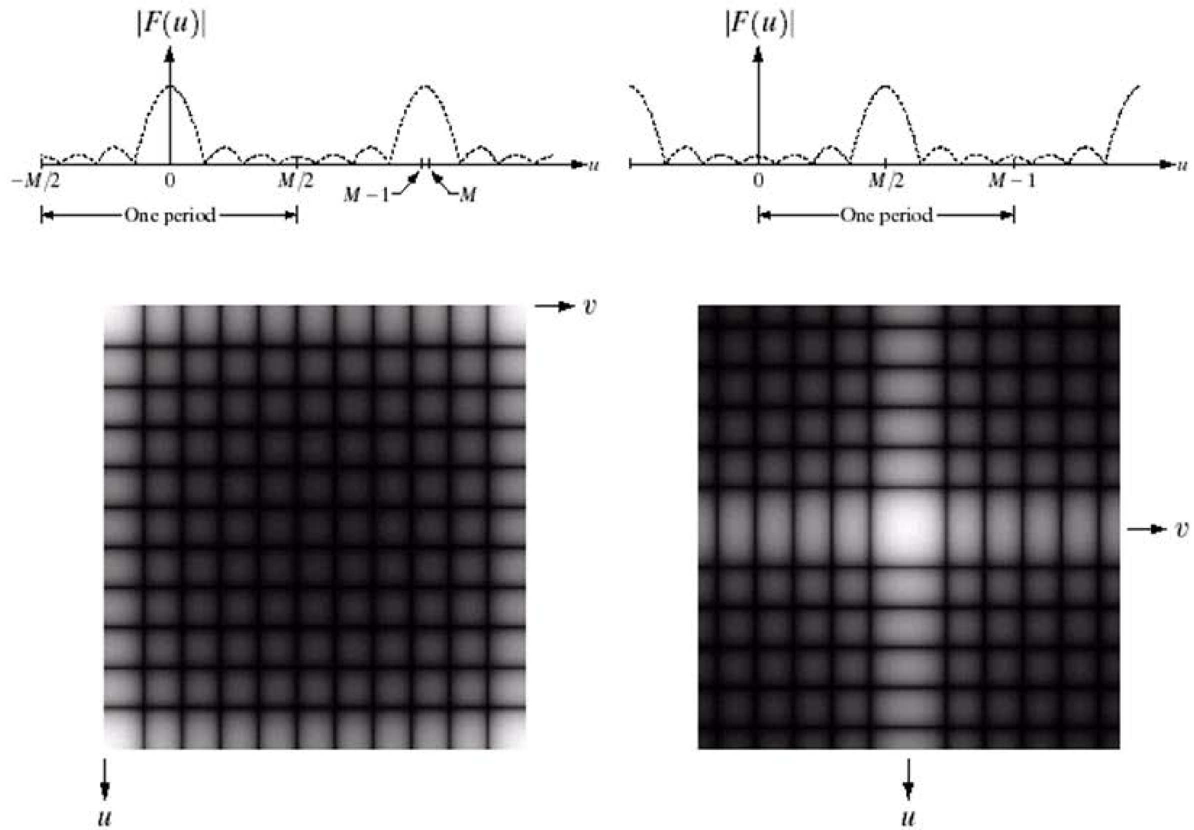


FIGURE 4.34 (a) Fourier spectrum showing back-to-back half periods in the interval $[0, M-1]$. (b) Shifted spectrum showing a full period in the same interval. (c) Fourier spectrum of an image, showing the same back-to-back properties as (a), but in two dimensions. (d) Centered Fourier spectrum.

(2) 共轭对称性： $F(u,v)=F^*(-u,-v)$

$$|F(u,v)|=|F(-u,-v)|$$

奇偶性

函数$f_e(x)$偶函数$\Leftrightarrow$ $f_e(x)=f_e(-x)$

函数$f_o(x)$奇函数$\Leftrightarrow$ $f_o(x)=-f_o(-x)$

函数非奇非偶，则可拆成奇、偶两部分：

$$f(x)=f_e(x)+f_o(x)$$

$$f_e(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$

$$f_o(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi ux)dx - j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi ux)dx$$

$$=F_e(u)-jF_o(u)$$

傅氏变换的对称性列表:

a)偶分量函数在变换中产生偶分量函数;
b)奇分量函数在变换中产生奇分量函数;
c)奇分量函数在变换中引入系数-j;
d)偶分量函数在变换中不引入系数.

虚实分量：

一个复函数可表示为：实部的偶部和奇部，虚部的偶部和奇部，傅氏变换：

a)实偶部产生一个实偶部分；

b)实奇部产生一个虚奇部分；

c)虚偶部产生一个虚偶部分；

d)虚奇部产生一个实奇部分。

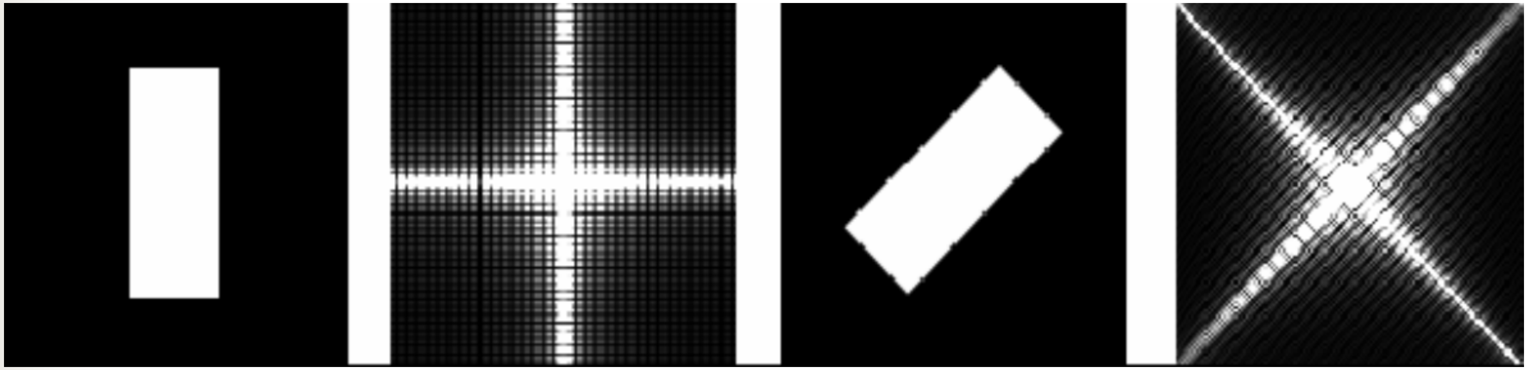
通常，图像是实变量函数，因此其傅氏变换为实偶部和虚奇部。因此，它具有共轭对称性

$F(u)=F^*(-u)$ 其中*表示复共轭

4．旋转性：

$$f(r,\theta) \Leftrightarrow F(\omega,\phi)$$

$$f(r,\theta+\theta_0) \Longleftrightarrow F(\omega,\phi+\theta_0)$$

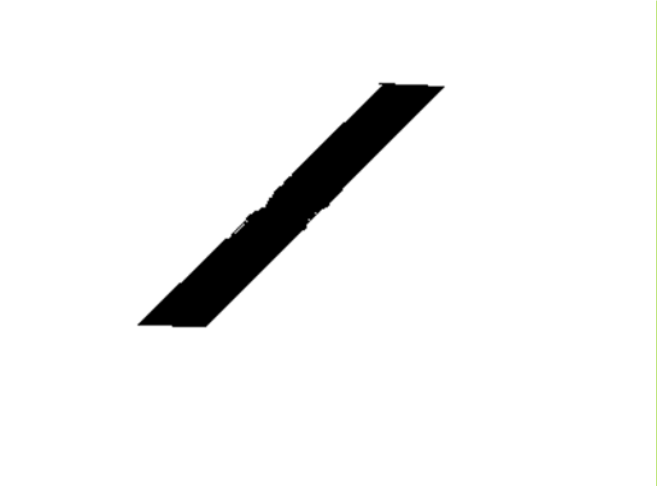


5．加法定理：$F[f_1(x,y)+f_2(x,y)] = F[f_1(x,y)]+F[f_2(x,y)]$

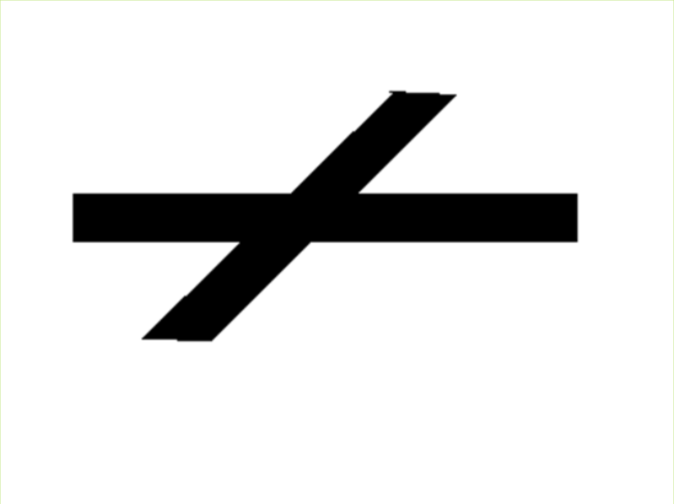
$$af(x,y) \Longleftrightarrow aF(u,v)$$

加法定理举例

f



g

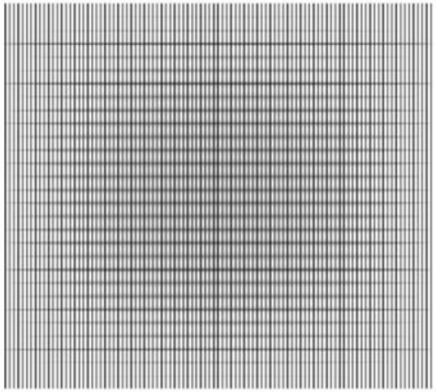


f+g

加法定理举例

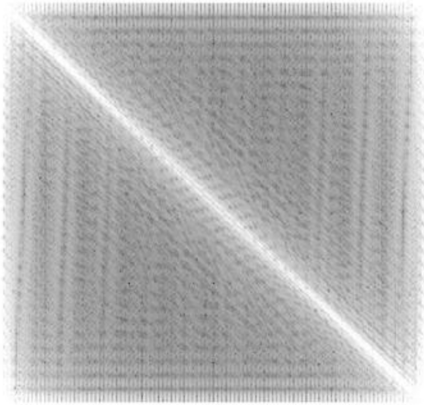
$$\boldsymbol{F}(f(x,y)+g(x,y))=\boldsymbol{F}(f(x,y))+\boldsymbol{F}(g(x,y)$$

F



G

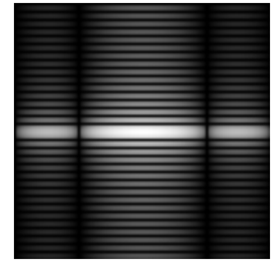
F+G



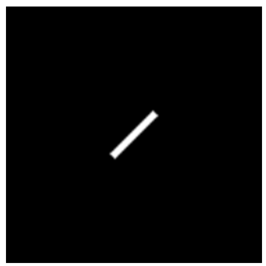
加法定理举例

A

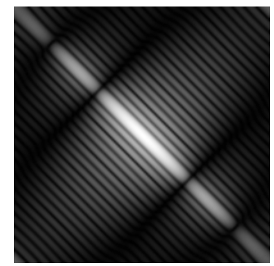
DFT



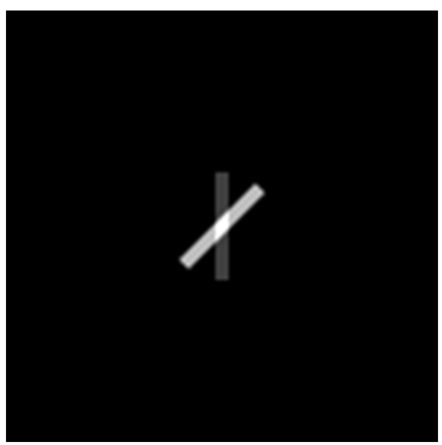
B



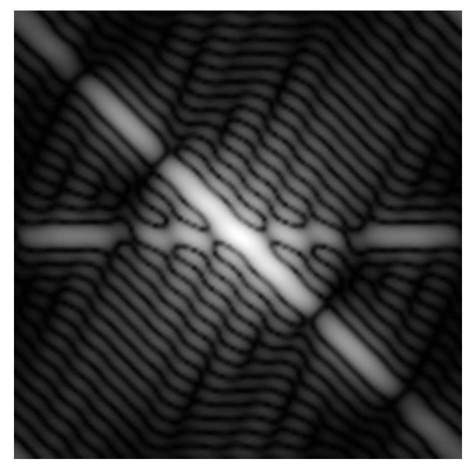
DFT



0.25 * A
+ 0.75 * B

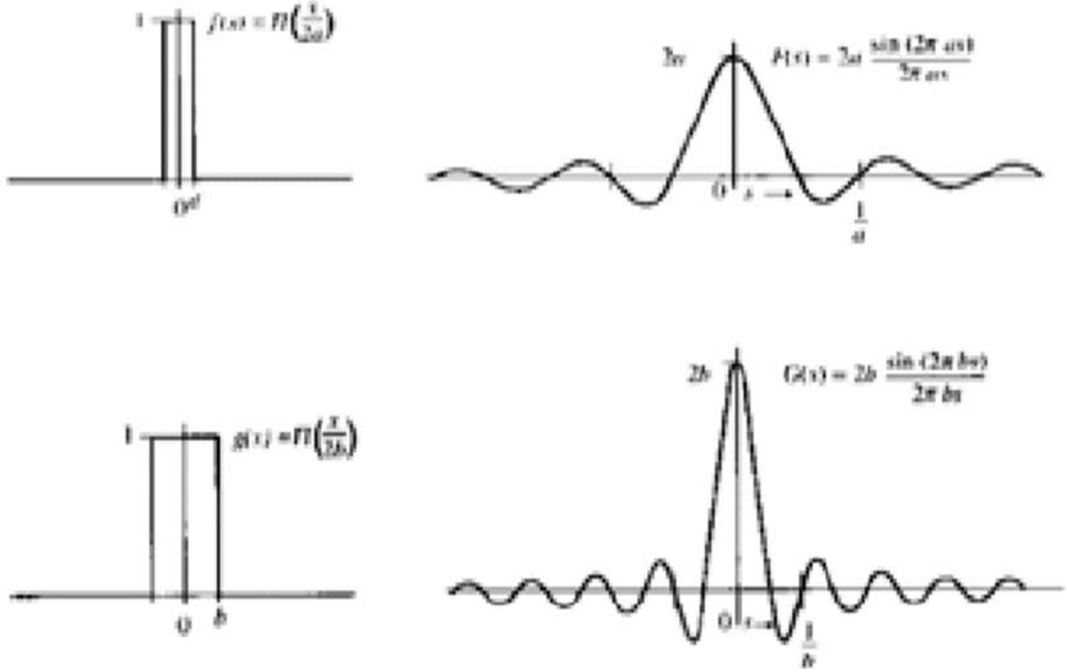


DFT

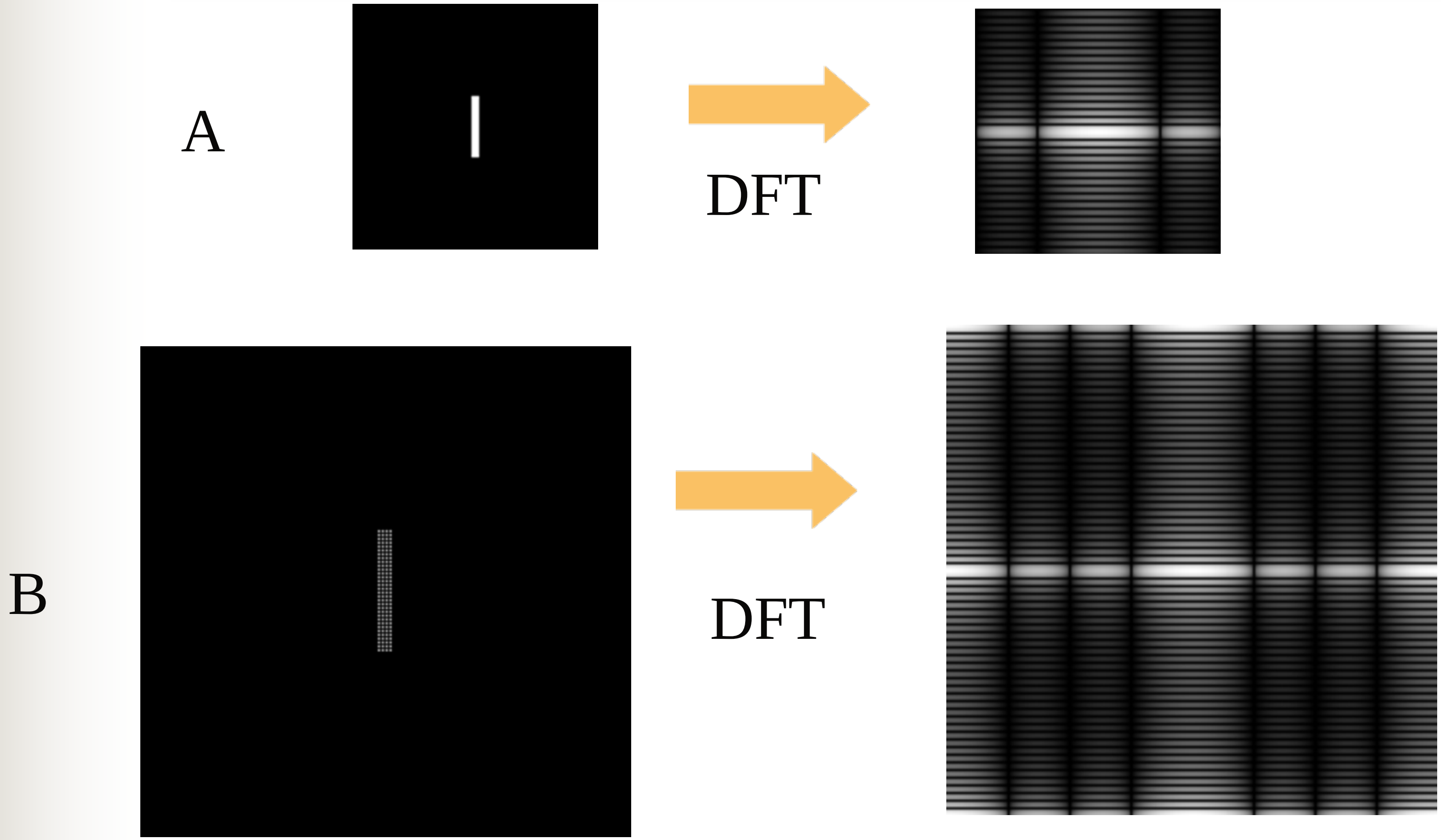


6．尺度变换（相似性定理）：

$$f(ax,by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F(u/a,v/b)$$



例:



Expanding the original image by a factor of n (n=2), filling the empty new values with zeros, results in the same DFT.

7．卷积定理：

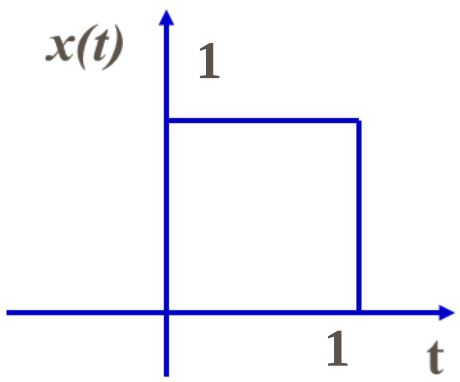
一维卷积：

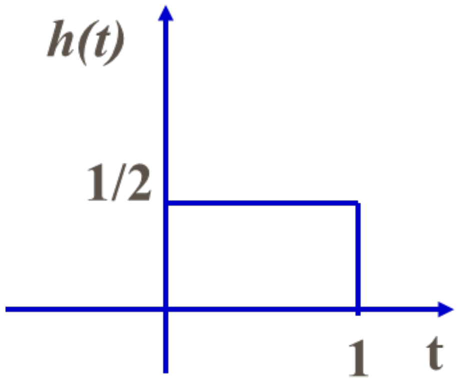
(1). 卷积积分(连续）： 如果函数 $y(t)$ 满足下列关系式

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t)$$

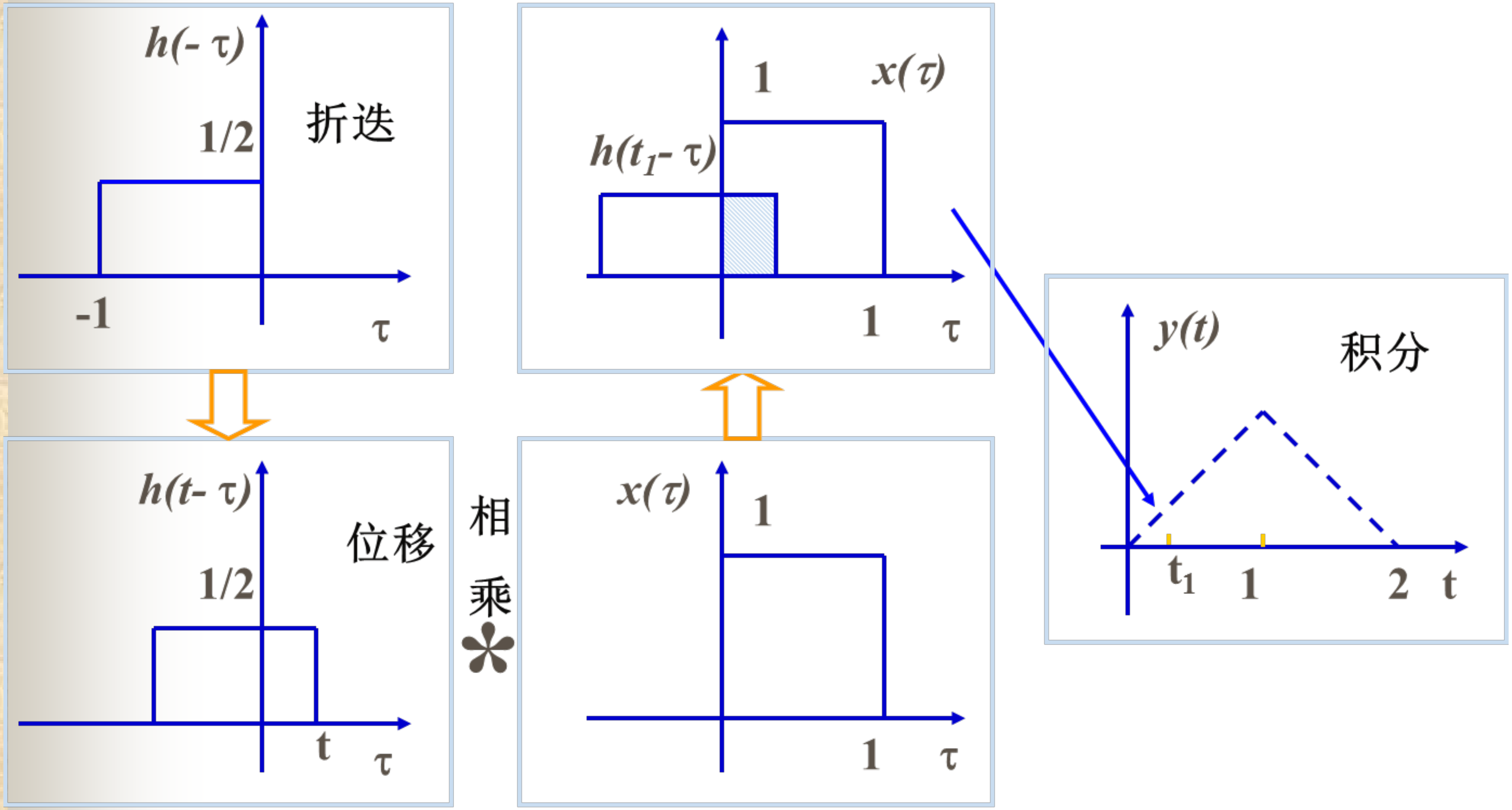
则称函数 $y(t)$ 为函数 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的卷积

- 卷积积分的图解表示：





- 卷积积分的图解表示（续）：



- **卷积积分的步骤：**

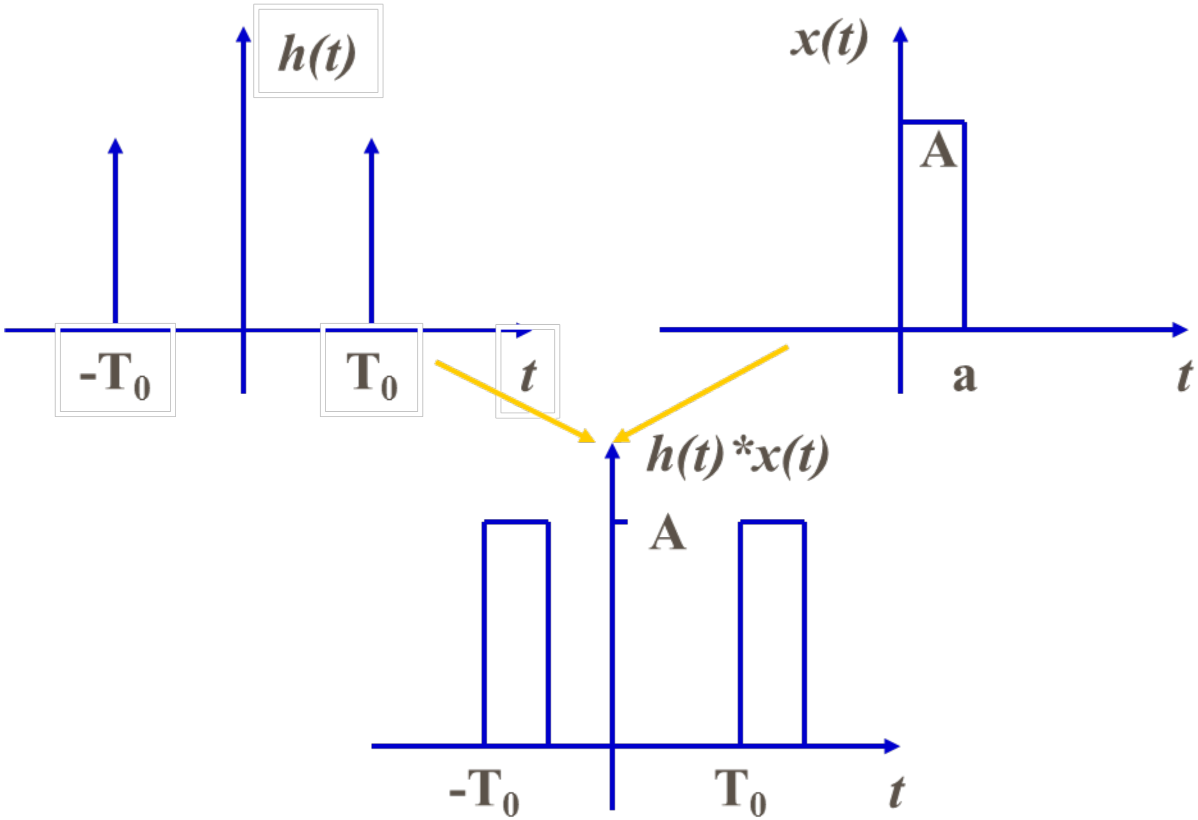
1 反折：把 $h(\tau)$ 相对纵轴作出其镜像

2 平移：把 $h(-\tau)$ 移动一个 t 值

3 相乘：将位移后的函数 $h(t-\tau)$ 乘以 $x(\tau)$

4 积分：$h(t-\tau)$ 和 $x(\tau)$ 乘积曲线下的面积即为 t 时刻的卷积值

- 包含脉冲函数的卷积：即 x(t) 或 h(t) 中有一个为脉冲函数，则它们的卷积是一种最简单的卷积



（2）离散卷积

- 离散卷积的定义 :由下面的求和公式给出

$$y(kT)=\sum_{i=0}^{N-1}x(iT)h[(k-i)T]$$

这里，***x(kT)*** 和 ***h(kT)*** 都是周期为 ***N*** 的周期函数。

- 离散卷积的表示 :和连续函数的卷积一样，离散卷积通常写作:

$$y(kT)=x(kT)*h(kT)$$

- 离散卷积的计算步骤 :和连续函数的卷积的计算步骤类似，离散卷积也可以用下面几步来计算：

1 反折：把 $h(iT)$ 相对纵轴作出其镜像

2 平移：把 $h(-iT)$ 移动一个 kT 值

3 相乘：将位移后的函数 $h(kT-iT)$ 乘以 $x(iT)$

4相加： $h(kT-iT)$ 和 $x(iT)$ 在各个离散点的乘积的和即为 k 时刻的卷积值

- 离散卷积的另一种形式：

$$\boxed{y(kT)=\sum_{i=0}^{N-1}x[(k-i)T]h(iT)}$$

二维卷积:

连续情况:

$$h(t,s)=f*g=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)g(t-x,s-y)dxdy$$

离散情况:

定义：设$f(x,y),g(x,y)$是定义在$\mathbf{N}^2$上的具有有限支撑的离散函数,则

$$f*g(x,y)=\sum_{a=-\infty}^{+\infty}\sum_{b=-\infty}^{+\infty}f(a,b)g(x-a,y-b)$$

称为$f(x,y)$与$g(x,y)$的卷积

7. 卷积定理：

(1)**1D**情况下：$f_e(x)*g_e(x)=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} f_e(m)g_e(x-m)$

(2)**2D**情况下：$f_e(x,y)*g_e(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f_e(m,n)g_e(x-m,y-n)$

$$f(x,y)*g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)\,G(u,v)$$

$$f(x,y)\,g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)*G(u,v)$$

(3)卷积的应用：去除噪声；特征增强

两个不同周期的信号卷积需要周期扩展的原因：如果直接进行傅里叶变换和乘积，会产生折叠误差(卷绕)。

卷积定理

- **卷积定理：** 如果 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的傅里叶变换分别为 $X(f)$ 和 $H(f)$,则$x(t) * h(t)$ 的傅里叶变换为 $X(f)H(f)$。即

$$\boxed{h(t) * x(t)} \Leftrightarrow \boxed{H(f)X(f)}$$

- 卷积定理的简单推导：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi ft}dt} = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau]e^{-j2\pi ft}dt}$$

$$= \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)e^{-j2\pi ft}dt]d\tau}$$

令σ =t-τ

$$= \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)[e^{-j2\pi f\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma)e^{-j2\pi f\sigma}d\sigma]d\tau}$$

$$= \boxed{H(f)X(f)}$$

卷积定理

- **频率卷积定理：** 如果 *x(t)* 和 *h(t)* 的傅立叶变换分别为 *X(f)* 和 *H(f)* ,则 *x(t)h(t)* 的傅立叶变换为 *X(f)*H(f)*。即

$$\boxed{h(t)x(t)} \Leftrightarrow \boxed{H(f) * X(f)}$$

离散卷积：离散卷积定理

- **离散卷积定理：** 类似于连续傅里叶变换，卷积公式的离散傅里叶变换产生了离散卷积定理。定理的表示如下：

$$\boxed{\sum_{i=0}^{N-1} x(iT)h\left[(k-i)T\right]} \Leftrightarrow \boxed{X\left(\frac{n}{NT}\right)H\left(\frac{n}{NT}\right)}$$

也就是说，两个周期为 **N** 的抽样函数，它们的卷积的离散傅里叶变换等于它们的离散傅里叶变换的乘积。

- **离散卷积定理的意义：** 有了离散卷积定理，就可以使用快速傅里叶算法来计算离散卷积。

8. 平均值：

即平均灰度值（平均亮度）f ^(x,y)= $\frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$

=F(0,0)/N

9. 相关定理

$f_e(x,y) \circ g_e(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f_e^*(m,n)g_e(x+m,y+n)$

$f(x,y) \circ g(x,y) \Leftrightarrow F^*(u,v)\,G(u,v)$

$f^*(x,y)\,g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) \circ G(u,v)$

自相关：$f(x,y) \circ f(x,y) \Leftrightarrow |F(u,v)|^2$

- 相关：如果函数 ***z(t)*** 满足下列关系式

$$\boxed{z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau)h(t+\tau)d\tau = x(t) \circ h(t)}$$

则称函数 ***z(t)*** 为函数 ***x(t)*** 和 ***h(t)*** 的相关函数

相关

- 相关积分的计算步骤：

1 位移：把 $h(\tau)$ 移动一个 t 值

2 相乘：将位移后的函数 $h(t+\tau)$ 乘以 $x^*(\tau)$

3 积分：$h(t+\tau)$ 和 $x^*(\tau)$ 乘积曲线下的面积即为 t 时刻的相关值

- **相关定理：** 如果 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的傅里叶变换分别为 $X(f)$ 和 $H(f)$,则$x(t)$ 和 $h(t)$ 的相关的傅里叶变换为 $X^*(f)H(f)$。即

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau)h(t+\tau)d\tau} \Leftrightarrow \boxed{X^*(f)H(f)}$$

其中，$X^*(f)$ 为 $X(f)$ 的复共轭

离散相关

- **离散相关的定义**：离散相关可以用下面的求和公式来表示

$$z(kT) = \sum_{i=0}^{N-1} x^*(iT)h\left[(k+i)T\right]$$

这里，**$x(kT)$**、**$h(kT)$**、 **$z(kT)$** 都是周期函数。和连续的情况一样，离散相关和离散卷积的差别就在于不需要折迭运算。

- **离散相关定理：**

$$\sum_{i=0}^{N-1} x^*(iT)h\left[(k+i)T\right] \qquad X^*\left(\frac{n}{NT}\right)H\left(\frac{n}{NT}\right)$$

- 相关主要应用于模板和原型匹配
- 给定一个未知图像和已知图像集之间求最紧密的匹配。其基本途径是求相关，然后取相关函数最大值。

10. 能量定理(Rayleigh定理):

对有限区间内非零的函数，其能量为:

$$energy = \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right|^2 dt$$

Rayleigh定理: 对有限区间内非零的函数，其变换函数与原函数有相同的能量，即:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| F(s) \right|^2 ds$$

若N×N离散图像，则有:

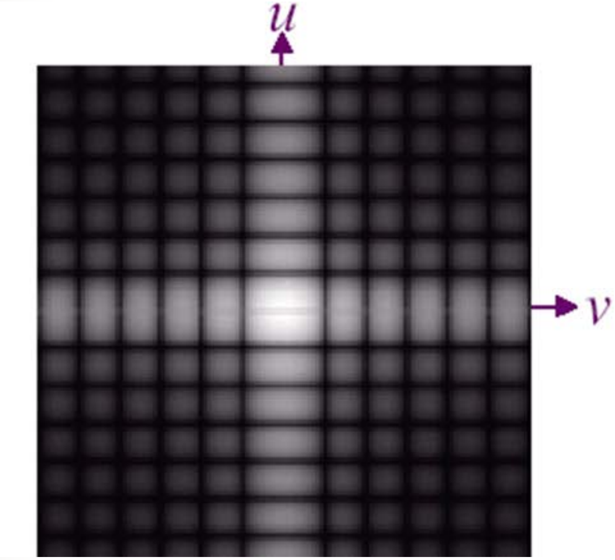
$$\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left| f(x,y) \right|^2 = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \left| F(u,v) \right|^2$$

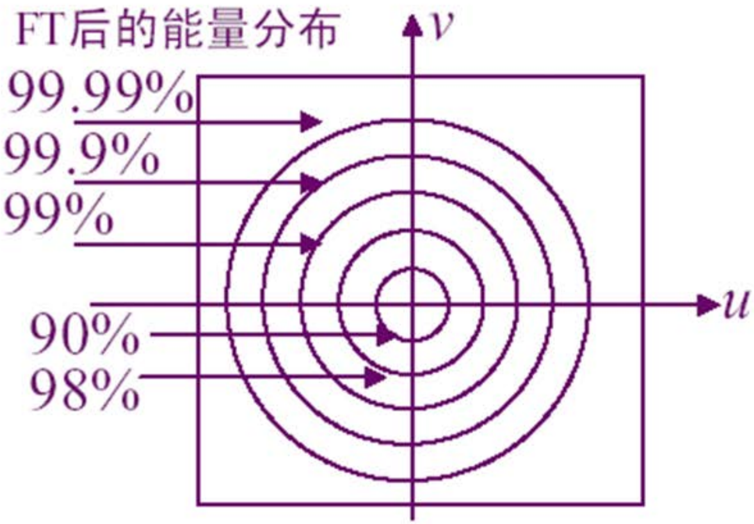
11. 功率谱(能量谱): $P(u,v)=|F(u,v)|^2$

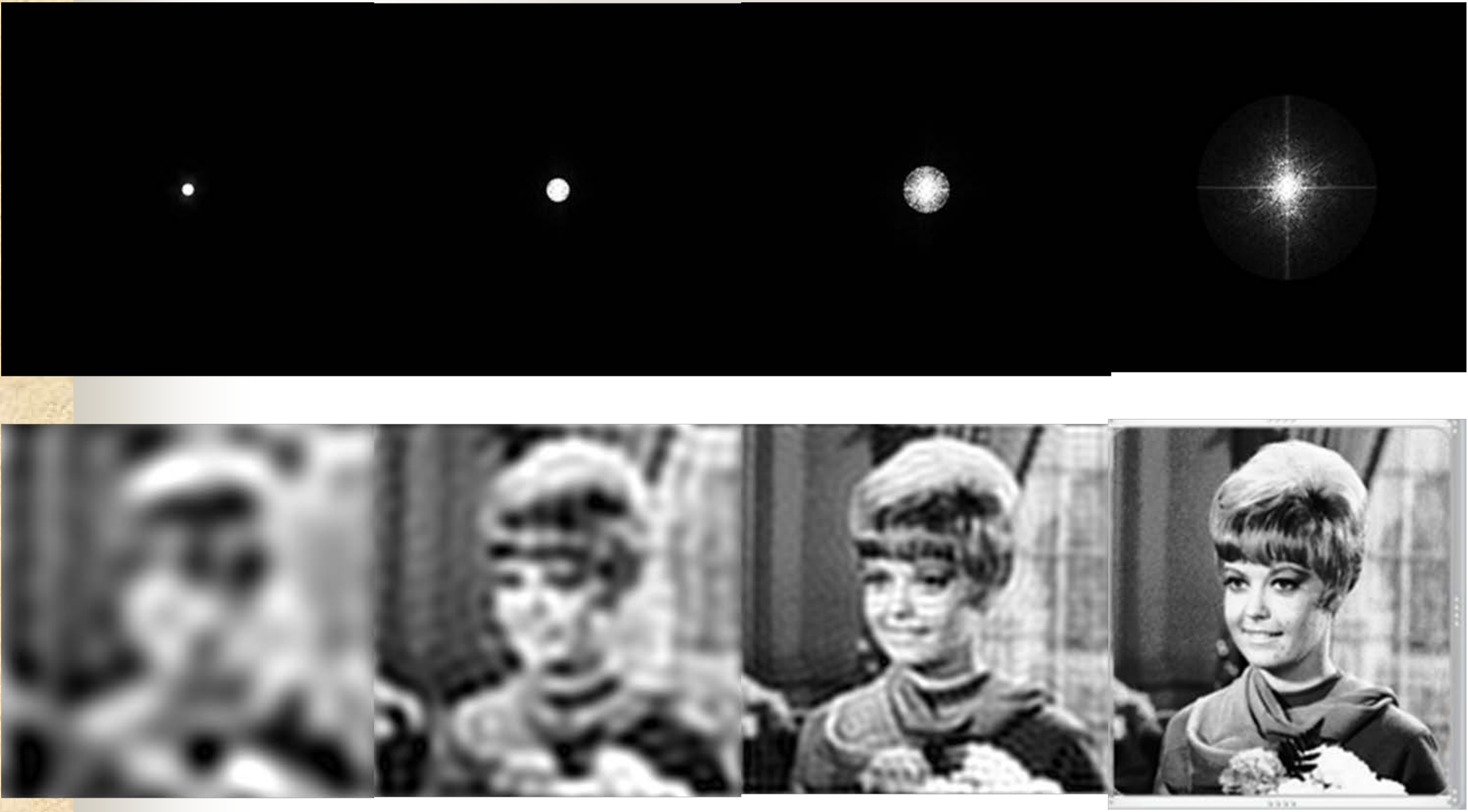
即为自相关函数的傅里叶变换：

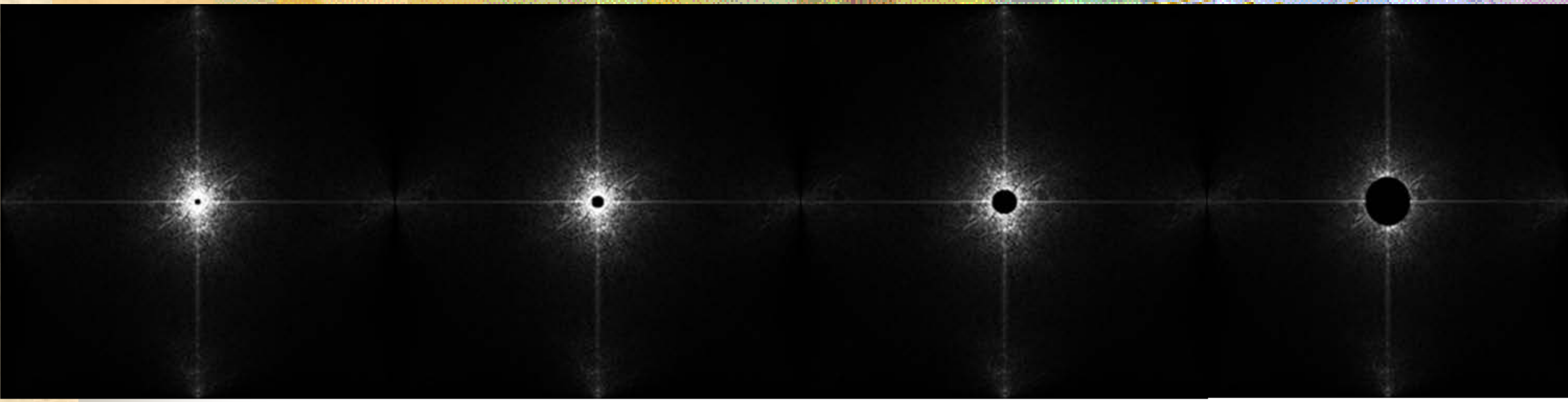
$$R_f(s)=F\{R_f(\tau)\}= F\{f(t)*f(-t)\}=F(s)F(-s)= F(s)F^*(s)=|F(s)|^2$$

一般灰度图像，能量分布在整幅图上，**FT**后能量都集中在原点。另有**F (0 , 0)/N =** $\bar{f}$ **(x , y)**



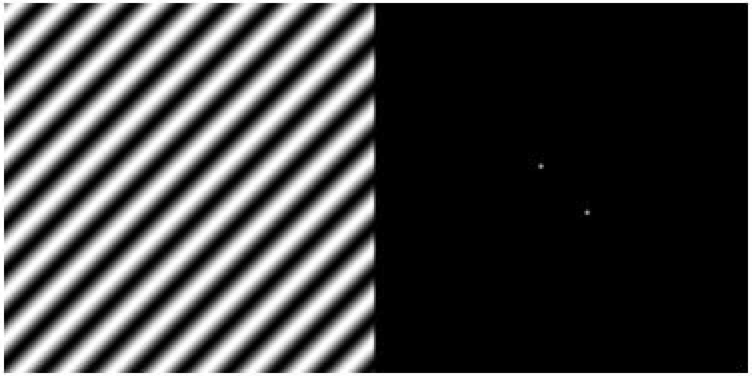






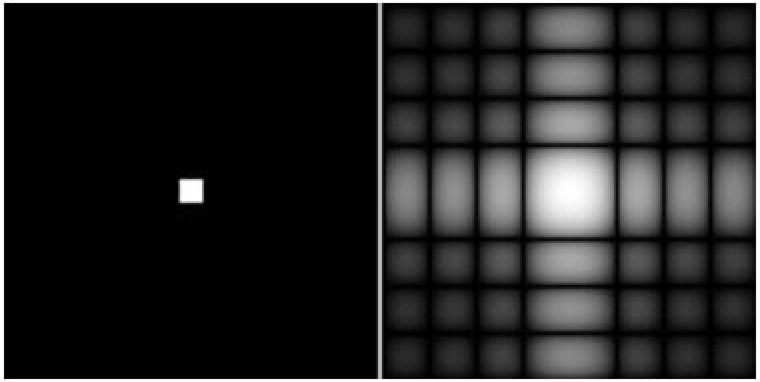
Two-Dimensional DFT with Different Functions

Sine wave



Its DFT

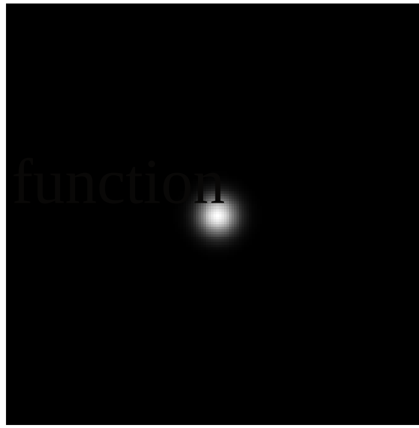
Rectangle

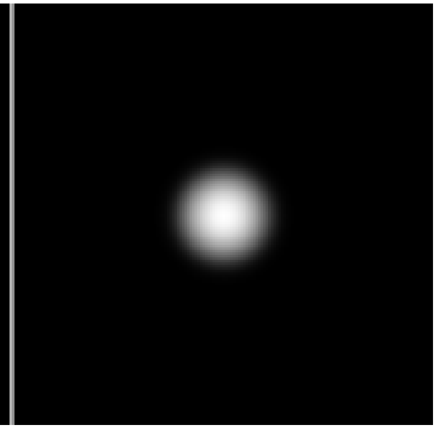


Its DFT

Two-Dimensional DFT with Different Functions

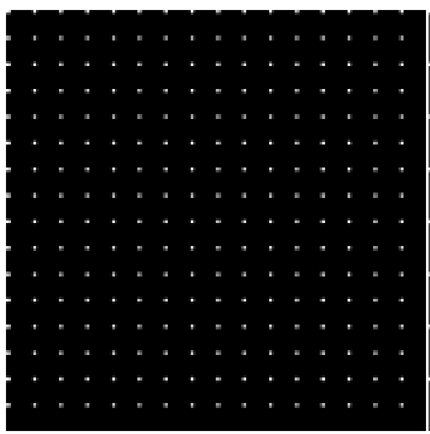
2D Gaussian function

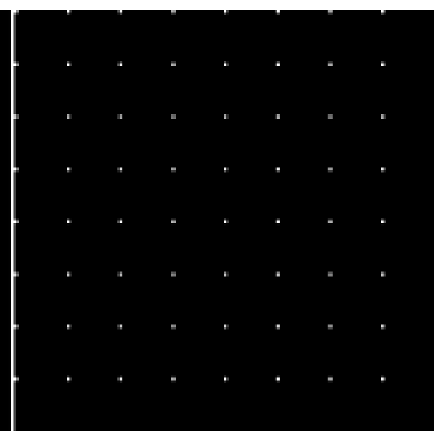




Its DFT

Rectangle





Its DFT

快速Fourier变换（FFT）

一维快速Fourier变换：

一、快速Fourier变换的推导

令：$w_N^{\mu x} = \exp(-j\frac{2\pi\mu x}{N})$

则：$F(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x) w_N^{\mu x}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{N}\sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x) w_N^{2\mu x} + \frac{2}{N}\sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x+1) w_N^{\mu(2x+1)}\right]$$

$$\underline{\underline{M \triangleq \frac{N}{2}}} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(2x) w_M^{\mu x} + \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1) w_M^{\mu x} w_N^{\mu}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[F_e(\mu) + w_N^{\mu} F_o(\mu)]$$ （分成奇数项和偶数项之和）

$0 \le \mu \le M-1$

$$F(\mu+M)=\frac{1}{2}\left[F_e(\mu+M)+w_N^{\mu+M}F_o(\mu+M)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[F_e(\mu)+w_N^{\mu+M}F_o(\mu)\right]$$

$$w_N^{\mu+M}=w_N^{\mu}\cdot w_N^{M}=w_N^{\mu}\cdot\exp(-j\tfrac{2\pi M}{N})$$

$$=w_N^{\mu}\cdot\exp(-j\pi)=-w_N^{\mu}$$

$$\therefore F(\mu+M)=\frac{1}{2}\left[F_e(\mu)-w_N^{\mu}F_o(\mu)\right]$$

二. FFT的设计思想是:

首先，将原函数分为奇数项和偶数项，通过不断的一个奇数一个偶数的相加（减），最终得到需要的结果。

也就是说FFT是将复杂的运算变成两个数相加（减）的简单运算的重复。

快速Fourier变换（FFT）

- 例：设对一个函数进行快速Fourier变换，函数为：

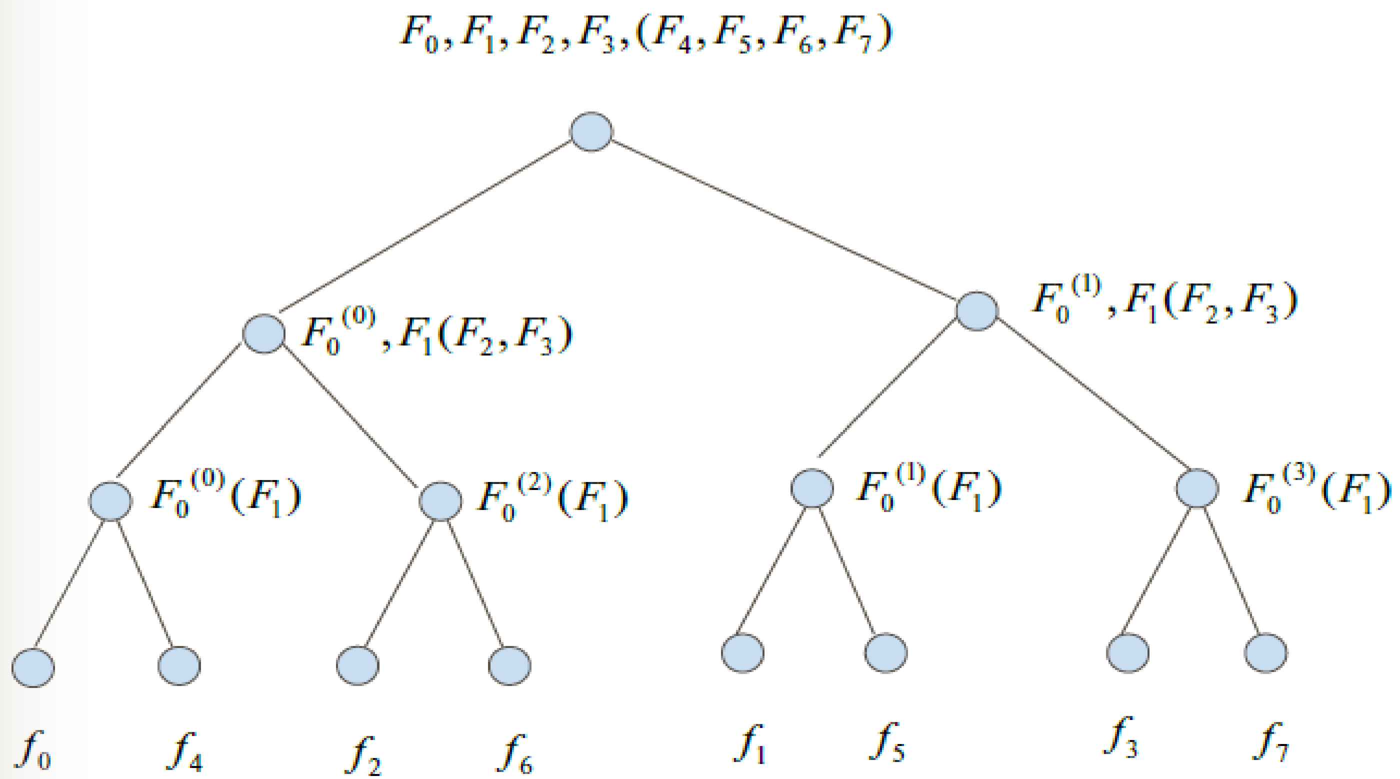
$$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$$

分成偶数、奇数为：

$$f_0, f_2, f_4, f_6 \quad | \quad f_1, f_3, f_5, f_7$$

$$\downarrow$$

$$f_0, f_4 \,|\, f_2, f_6 \quad \rightarrow \quad f_1, f_5 \,|\, f_3, f_7$$


$F_0, F_1, F_2, F_3, (F_4, F_5, F_6, F_7)$
$F_0^{(0)}, F_1(F_2, F_3)$
$F_0^{(1)}, F_1(F_2, F_3)$
$F_0^{(0)}(F_1)$
$F_0^{(2)}(F_1)$
$F_0^{(1)}(F_1)$
$F_0^{(3)}(F_1)$
f_0
f_4
f_2
f_6
f_1
f_5
f_3
f_7

例：

$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$

偶数区

f_0, f_4, f_2, f_6

$$F^{(0)}(0)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[f_0+w_2^0 f_4\right]$$
$$F^{(0)}(1)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[f_0-w_2^0 f_4\right]$$

$$F^{(2)}(0)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[f_2+w_2^0 f_6\right]$$
$$F^{(2)}(1)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[f_2-w_2^0 f_6\right]$$

$$F^{(0)}(0)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(0)+w_4^0 F^{(2)}(0)\right]$$
$$F^{(0)}(1)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(1)+w_4^1 F^{(2)}(1)\right]$$
$$F^{(0)}(2)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(0)-w_4^0 F^{(2)}(0)\right]$$
$$F^{(0)}(3)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(1)-w_4^1 F^{(2)}(1)\right]$$

奇数区

f_1, f_5, f_3, f_7

$$F^{(1)}(0)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[f_1+w_2^0 f_5\right]$$
$$F^{(1)}(1)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[f_1-w_2^0 f_5\right]$$

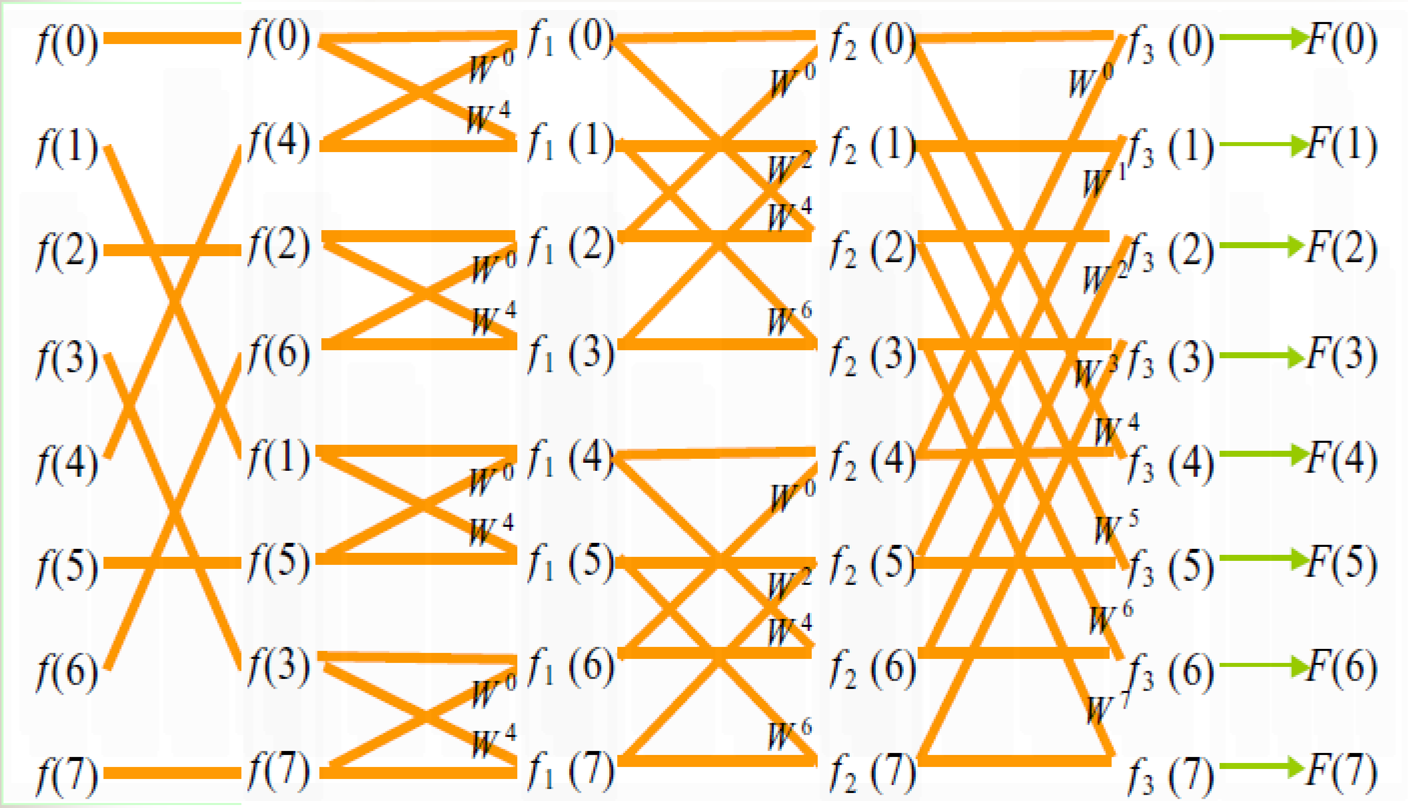
$$F^{(3)}(0)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[f_3+w_2^0 f_7\right]$$
$$F^{(3)}(1)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[f_3-w_2^0 f_7\right]$$

$$F^{(1)}(0)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(1)}(0)+w_4^0 F^{(3)}(0)\right]$$
$$F^{(1)}(1)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(1)}(1)+w_4^1 F^{(3)}(1)\right]$$
$$F^{(1)}(2)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(1)}(0)-w_4^0 F^{(3)}(0)\right]$$
$$F^{(1)}(3)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(1)}(1)-w_4^1 F^{(3)}(1)\right]$$

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$F(0)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(0)+w_8^0F^{(1)}(0)\right]$$
$$F(1)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(1)+w_8^1F^{(1)}(1)\right]$$
$$F(2)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(2)+w_8^2F^{(1)}(2)\right]$$
$$F(3)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(3)+w_8^3F^{(1)}(3)\right]$$
$$F(4)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(0)-w_8^0F^{(1)}(0)\right]$$
$$F(5)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(1)-w_8^1F^{(1)}(1)\right]$$
$$F(6)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(2)-w_8^2F^{(1)}(2)\right]$$
$$F(7)=\tfrac{1}{2}\cdot\left[F^{(0)}(3)-w_8^3F^{(1)}(3)\right]$$

FFT变换蝶形图：



f(0)
f(1)
f(2)
f(3)
f(4)
f(5)
f(6)
f(7)
f(0)
f(4)
f(2)
f(6)
f(1)
f(5)
f(3)
f(7)
W^0
W^4
W^0
W^4
W^0
W^4
W^0
W^4
f_1 (0)
f_1 (1)
f_1 (2)
f_1 (3)
f_1 (4)
f_1 (5)
f_1 (6)
f_1 (7)
W^0
W^2
W^4
W^6
W^0
W^2
W^4
W^6
f_2 (0)
f_2 (1)
f_2 (2)
f_2 (3)
f_2 (4)
f_2 (5)
f_2 (6)
f_2 (7)
W^0
W^1
W^2
W^3
W^4
W^5
W^6
W^7
f_3 (0)
f_3 (1)
f_3 (2)
f_3 (3)
f_3 (4)
f_3 (5)
f_3 (6)
f_3 (7)
F(0)
F(1)
F(2)
F(3)
F(4)
F(5)
F(6)
F(7)

快速傅立叶变换

傅立叶变换：
$$F(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)e^{-j\frac{2\pi ux}{N}}$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)(\cos\frac{2\pi ux}{N}-j\sin\frac{2\pi ux}{N})$$

需要N次复数乘法，N-1次复数加法。

因此总共需要N^2次复数乘法，N(N-1)次复数加法。

1965年，Cooley和Tukey提出快速算法，算法时间复杂度为$N\log_2 N$。

N	N^2(DFT)	$N\log_2 N$(FFT)	$N^2/N\log_2 N$
2	4	2	2.0
4	16	8	2.0
16	256	64	4.0
64	4096	394	10.7
512	262144	4608	56.9
1024	1048576	10240	102.4

快速Fourier变换（FFT）

二维快速Fourier变换：

因为2维DFT可以看成是两次的1维DFT变换，即：

$$F(\mu,\upsilon) = f_{行}\{f_{列}[f(x,y)]\}$$

所以二维快速Fourier变换实际上是对其进行了2次的一维FFT变换。

一些常用函数的Fourier 变换

$f(t)$	F(s)
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi s^2}$
$\Pi(t)$	$\frac{\sin(\pi s)}{\pi s}$
$\Lambda(t)$	$\frac{\sin^2(\pi s)}{(\pi s)^2}$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{2}[\delta(s)-\frac{j}{\pi s}]$
$\cos(2\pi f t)$	$\frac{1}{2}[\delta(s+f)+\delta(s-f)]$
$\sin(2\pi f t)$	$j\frac{1}{2}[\delta(s+f)-\delta(s-f)]$
$e^{j2\pi f t}$	$\delta(s-f)$

一维离散线性变换

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}\mathbf{X}$$

其中**X , Y** 是**N×1**的向量，**T**是一个**N×N**的矩阵，称为变换核矩阵。

$$y_i = \sum_{j=0}^{N-1} t_{i,j} x_j$$

每个元素$\mathbf{y_i}$是输入向量**X** 和**T** 的第**i** 行的内积。

可分离变换：

（1）**DFT正变换：** $T(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)g(x,y,u,v)$

DFT反变换： $f(x,y)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} T(u,v)h(x,y,u,v)$

$\exp[-j2\pi(ux+vy)/N]/N$为变换核函数，**$g(x,y,u,v)$**为正向变换核，**$h(x,y,u,v)$**为反向变换核

（2）核函数可分离的：$g(x,y,u,v)= g_1(x,u)\, g_2(y,v)$

（3）对称性：$g(x,y,u,v)= g_1(x,u)\, g_1(y,v)$

（4）写成矩阵形式：

正变换**T=AFA**，其中**F**为**N×N**原始图像矩阵，**T**为变换后矩阵（**N×N**），**A**为**N×N**的对称变换矩阵。

反变换：当**$B=A^{-1}$**时，**F=BTB**

酉变换:

若A为复数矩阵，正交的条件为：

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{*T}$$

其中A^*为A的复数共轭矩阵，满足这个条件的矩阵为酉矩阵。对于任意向量f的运算称为酉变换：

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f} \qquad g(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(k,n) f(n)$$

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{A}^{*T}\boldsymbol{g} \qquad f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^*(k,n) g(k)$$

二维酉变换

- N×N二维函数可以类似于一维用正交序列展开和恢复

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)a_{u,v}(x,y) \quad 0\le u,v<N$$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)a_{u,v}^{*}(x,y) \quad 0\le x,y<N$$

正变换核

反变换核

变换核的可分离性

$$a_{u,v}(x,y)=a_u(x)b_v(y)\Rightarrow a(u,x)b(v,y)$$

其中$\{a_u(x), u=0,1,\ldots,N\text{-}1\}$, $\{b_v(y), v=0,1,\ldots,N\text{-}1\}$为一维完备正交基向量的集合。用矩阵表示：

$$\boldsymbol{A}=\{a(u,x)\}，\boldsymbol{B}=\{b(v,y)\}$$

通常选择**A=B** 。

二维酉变换

A=B时，二维酉变换正变换表示为

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1}a(u,x)f(x,y)a(v,y)$$

用矩阵表示：

$$\boldsymbol{F=AfA}$$

类似的，对于M×N的二维函数f(x,y)

$$\mathbf{F}=\mathbf{A}_M\mathbf{f}_{MN}\mathbf{A}_N$$

$$\mathbf{f}=\mathbf{A}_M^*\mathbf{F}_{MN}\mathbf{A}_N^*$$

基图像

反变换

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)a_{u,v}^{*}(x,y) \quad 0\le x,y<N$$

$a_{u,v}^{*}(x,y)$ ——看成是基图像

$F(u,v)$ ——权因子

图像f(x,y)可以用N^2个基图像的加权和来表示

DFT正变换通常被看作是一个分解过程：将信号向量分解成它的各个基元分量，变换系数则规定了原信号中各分量所占的量。

DFT反变换通常被看作是一个合成过程：通过将各分量相加来合成原始向量，变换系数则规定了为精确、完全地重构输入向量而加入的各个分量大小。

任一向量都能唯一地分解成具有“合适”幅度的一组基向量，可以通过这些分量进行重构原向量。重要的是：变换系数的个数与向量的元素个数是相同的，即变换前、后自由度的数目是相同的，从而保证了在这个过程中既未引入新的信息，也未破坏任何原有信息。

酉变换的性质

1. 酉矩阵是正交阵

$$AA^{*T}=A^{*T}A=I_{N\times N}$$

2. A为酉阵，则A^{-1}和A^{T}都是酉阵

3. 酉变换是能量保持的变换

对于一维酉变换$F=Af$, 有$\|F\|=\|f\|$

二维情况下，则有：

$$\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}|F(u,v)|^2=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}|f(x,y)|^2$$

4.2 离散余弦变换DCT

- 傅立叶变换中当f(x)或f(x,y)为偶函数时，变换的计算公式只有余弦项。
- 一个任意函数采样从0,1,2,…,N-1，若向负方向折叠形成2N采样的偶函数，就可以进行2N的偶函数傅立叶变换。
- 余弦变换是简化傅立叶变换的一种方法

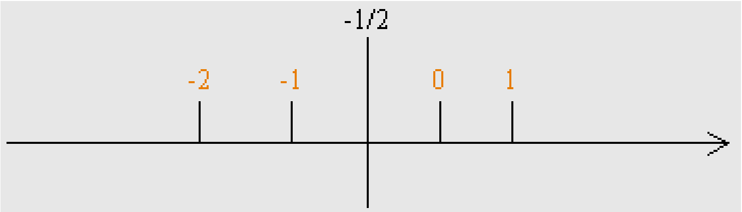
1.一维余弦变换

- 离散序列f(x), x = 0, 1, 2, …, N-1， 以-1/2为折点， 形成-N至-1的序列， 与原序列合并形成2N偶函数序列， 此时的变换核为：

$$e^{\frac{-j2\pi(x+1/2)u}{2N}} = e^{\frac{-j\pi}{2N}(2x+1)u} \qquad x = -N, -N+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, N-1$$

- 离散傅立叶变换的虚部为零，上式剩下余弦项

$$\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2x+1)u\right]$$



- 余弦变换为:

$$F(u)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2x+1)u\right]$$

$$F(0)=\sqrt{\frac{1}{N}}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)$$

- 归一化后:

$$F(u)=c(u)\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2x+1)u\right]$$

$$C(u)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}} & u=0\\ 1 & u=1,2,\cdots,N-1\end{cases}$$

- 矩阵形式:

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{Cf}$$

- 正变换矩阵为：

$$\sqrt{\frac{2}{N}}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\frac{\pi}{2N} & \cos\frac{3\pi}{2N} & \cdots & \cos\frac{(2N-1)\pi}{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos\frac{(N-1)\pi}{2N} & \cos\frac{3(N-1)\pi}{2N} & \cdots & \cos\frac{(2N-1)(N-1)\pi}{2N} \end{bmatrix}$$

- **N=4时**

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.653 & 0.271 & -0.271 & -0.653 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.271 & -0.653 & 0.653 & -0.271 \end{bmatrix}$$

- 一维余弦变换的反变换为：

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{u=0}^{N-1}c(u)F(u)\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2x+1)u\right]$$

$$C(u)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}} & u=0\\ 1 & u=1,2,\cdots,N-1\end{cases}$$

- 矩阵形式：

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{F}$$

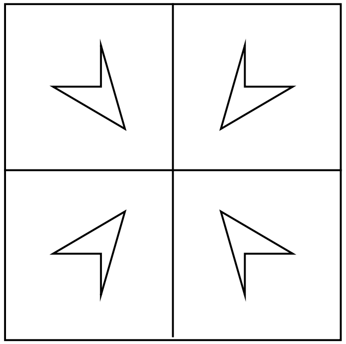
借助傅立叶变换计算余弦变换的步骤：

- 1)把 f(x) 延拓成 $f_e(x)$，长度为2N ；
- 2)求$f_e(x)$ 的2N 点的FFT；
- 3)对u各项乘上对应的因子$\sqrt{2}\exp\left(-j\frac{\pi u}{2N}\right)$；
- 4)取实部，并乘上因子$\sqrt{\frac{1}{N}}$ ；
- 5)取F(u)的前N项，即为f(x)的余弦变换。

2.二维余弦变换

- 偶对称偶函数：

$$f(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & x\ge 0, y\ge 0 \\ f(-1-x,y) & x<0, y\ge 0 \\ f(x,-1-y) & x\ge 0, y<0 \\ f(-1-x,-1-y) & x<0, y<0 \end{cases}$$



- 为关于(-1/2, -1/2)对称的偶函数。

- 根据对称点的傅立叶变换，可得余弦变换为：

$$\boxed{F(u,v)=\frac{2}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\frac{\pi}{2N}(2x+1)u\cos\frac{\pi}{2N}(2y+1)v}$$

- 表示为矩阵形式：

$$\boxed{\mathbf{F}=\mathbf{CfC}}$$

- 反变换为：

$$\boxed{f(x,y)=\frac{2}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\cos\frac{\pi}{2N}(2x+1)u\cos\frac{\pi}{2N}(2y+1)v}$$

- 反变换矩阵形式：

$$\boxed{\mathbf{f}=\mathbf{C\ FC}}$$

- 归一化(使得基向量的模为1):

$$F(u,v)=\frac{2}{N}C(u)C(v)\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\frac{\pi}{2N}(2x+1)u\cos\frac{\pi}{2N}(2y+1)v$$

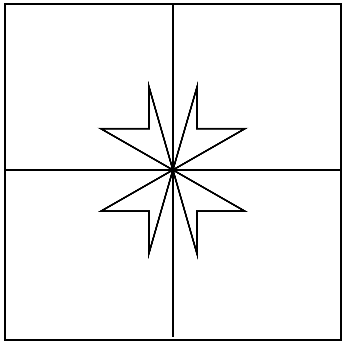
$$f(x,y)=\frac{2}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}C(u)C(v)F(u,v)\cos\frac{\pi}{2N}(2x+1)u\cos\frac{\pi}{2N}(2y+1)v$$

$$C(u)=C(v)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}} & u,v=0\\ 1 & u,v=1,\cdots N-1\end{cases}$$

- 偶对称偶函数的变换核的基函数正交
- 核可分离
- 余弦变换的能量向低频集中

- 奇对称偶函数：

$$f(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & x\ge 0, y\ge 0 \\ f(-x,y) & x<0, y\ge 0 \\ f(x,-y) & x\ge 0, y<0 \\ f(-x,-y) & x<0, y<0 \end{cases}$$



- 折叠镜像序列

- 上述折叠函数的傅立叶变换：

$$F(u,v)=\frac{1}{2N-1}\sum_{x=-(N-1)}^{N-1}\sum_{y=-(N-1)}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi\frac{ux+vy}{2N-1}}$$

$$F(u,v)=\frac{4}{2N-1}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}\hat{f}(x,y)\cos\left[\frac{2\pi}{2N-1}ux\right]\cos\left[\frac{2\pi}{2N-1}vy\right]$$

$$\hat{f}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}f(x,y) & x=0,y=0\\ \frac{1}{2}f(x,y) & x=0,y\neq 0\\ \frac{1}{2}f(x,y) & x\neq 0,y=0\\ f(x,y) & x,y=others\end{cases}$$

- 上式归一化后即为奇对称函数的余弦变换：

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}\hat{f}(x,y),\quad u=0,v=0$$

$$F(u,v)=\frac{2}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}\hat{f}(x,y)\cos\left[\frac{2\pi}{2N-1}ux\right]\cos\left[\frac{2\pi}{2N-1}vy\right],\quad u,v\neq 0$$

- 反变换：

$$\hat{f}(x,y)=\frac{2}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\cos\frac{2\pi}{2N-1}ux\cos\frac{2\pi}{2N-1}vy$$

- 这个变换同样也是正交的和可分离的，可以用两次一维变换来执行

2D余弦变换：

正变换$C(u,v)=a(u)a(v)\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cos[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}]\cos[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}]$

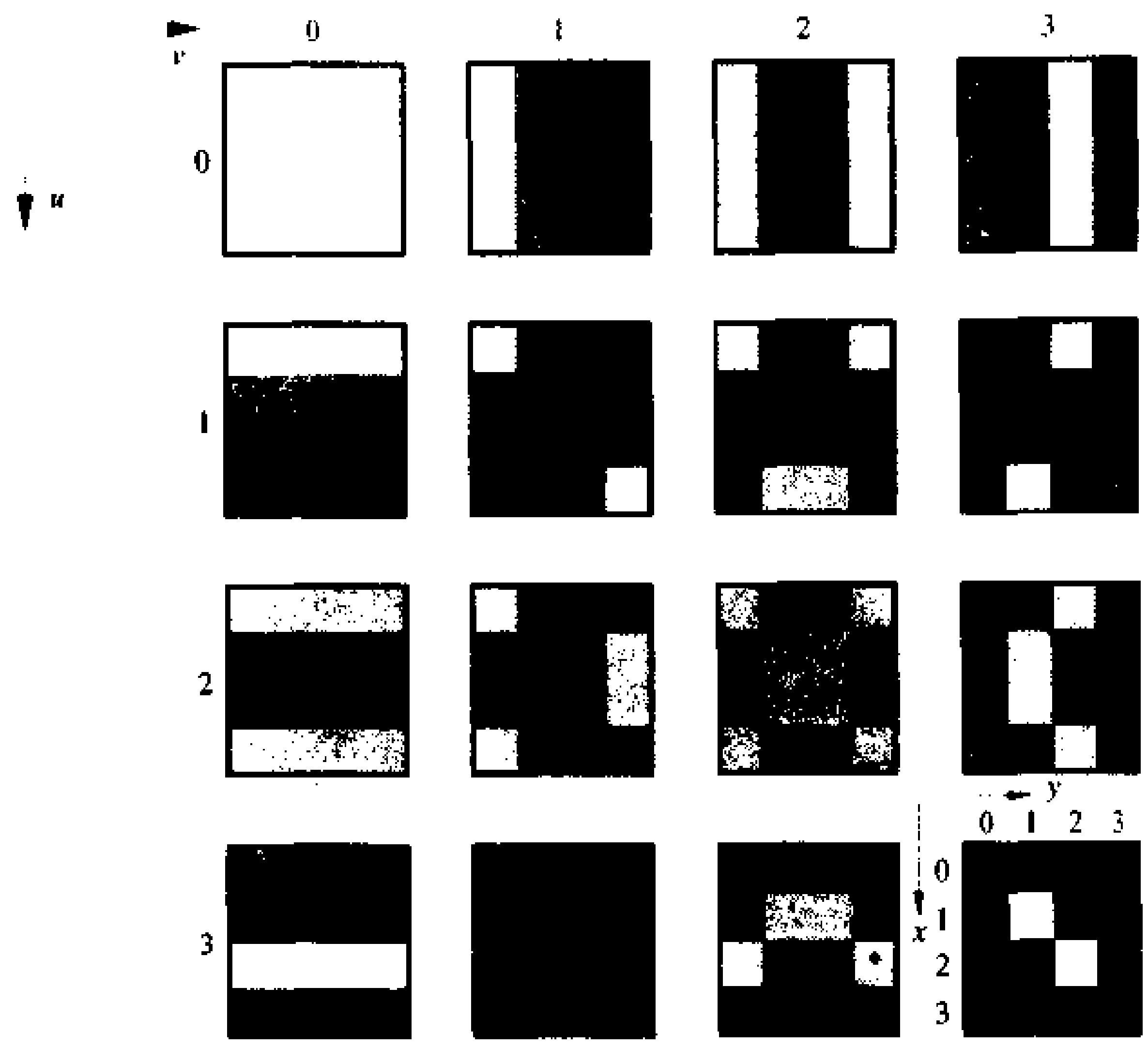
其中$a(u) = \begin{cases} \sqrt{1/N} & 当u=0 \\ \sqrt{2/N} & 当u=1\ldots N-1 \end{cases}$

反变换$f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} a(u)a(v)c(u,v)\cos[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}]\cos[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}]$

举例：

N＝4，

图像为4×4



$N=4$ 时经过排序的 DCT 基本函数的图示

余弦变换的性质

⊙ 余弦变换为实的正交变换 $C=C^*$，$C^{-1}=C^T$。

⊙ 序列的余弦变换是**DFT**的对称扩展形式。

⊙ 余弦变换有快速变换，和傅立叶变换一样，分奇偶组：

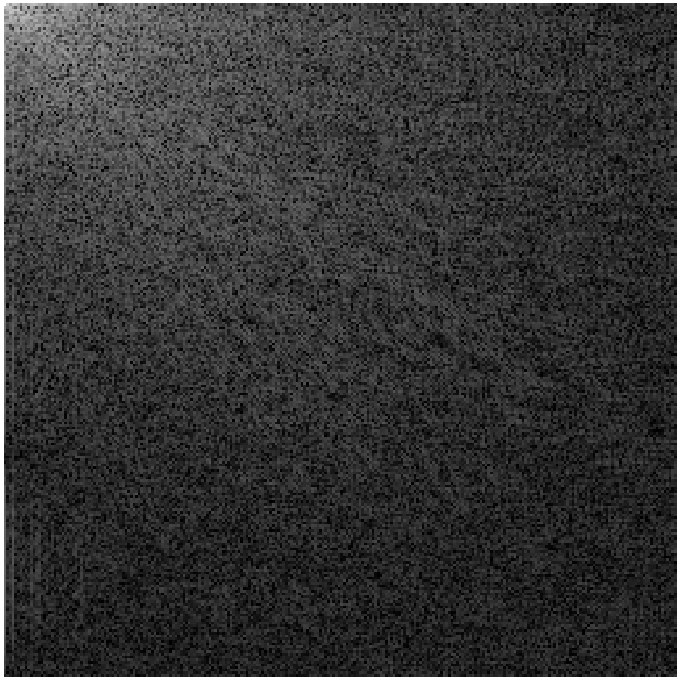
$$\boxed{F(u)=\alpha(u)\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right] \quad 0\le u\le N}$$

此处：

$$\boxed{\alpha(u)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{N}} & u=0\\ \sqrt{\dfrac{2}{N}} & 1\le u\le N-1\end{cases}}$$

$$F(u)=\alpha(u)\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right]$$

$$=\alpha(u)\left\{\sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x)\cos\left[\frac{\pi(4x+1)u}{2N}\right]+\sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x+1)\cos\left[\frac{\pi(4x+3)u}{2N}\right]\right\}$$



余弦变换系数图像
(没平移)

小结：

(1)正弦波变换：

复指数exp[-j2π(ux+vy)/N]/N

cos (DCT 变换)

sin (DST变换)

cos+sin (hartley变换)

(2)非正弦波变换：

用方波作为基函数：Walsh变换、Hadamard变换、Slant变换、Haar变换