

# 数理逻辑习题课二 思考题

2021/5/16

1. K4中的约束条件有什么意义？举例说明如果没有约束条件会有什么问题。

反例：  $\forall x \exists y R_1^2(x, y) \rightarrow \exists y R_1^2(y, y)$ ，取解释域使得  $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ ， $R_1^2$  为大于

2. K5中的约束条件有什么意义？举例说明如果没有约束条件会有什么问题。

反例：  $\forall x (R_1^2(x, c_1) \rightarrow R_1^2(x, c_2)) \rightarrow (R_1^2(x, c_1) \rightarrow \forall x R_1^2(x, c_2))$

取解释域使得  $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ ， $R_1^2$  为大于， $c_1$  为0， $c_2$  为1

补充：  $\exists 1$  中的约束条件有什么意义？举例说明如果没有约束条件会有什么问题。

反例：  $\forall y R_1^2(y, y) \rightarrow \exists x \forall y R_1^2(x, y)$  取解释域使得  $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ ， $R_1^2$  为等于

### 3. “真”在一阶逻辑中有哪些层次？

三层  $\left\{ \begin{array}{l} M \text{ 可满足: 在一个 } M \text{ 中, 在一种项解释 } \varphi \text{ 下, } p \text{ 是真的} \\ M \text{ 有效: 在一个 } M \text{ 中, 在任一项解释 } \varphi \text{ 下, } p \text{ 是真的} \\ (\text{模型类有效: } \Gamma \models p \text{ 在任一使 } \Gamma \text{ 中公式为真的 } M \text{ 中, 在任一项解释 } \varphi \text{ 下, } p \text{ 是真的}) \\ M \text{ 逻辑有效: 在任何 } M \text{ 中, 在任一项解释 } \varphi \text{ 下, } p \text{ 是真的} \end{array} \right.$

$M$  可满足: 设  $I = \{M, V, v\}$  是  $K(Y)$  的一阶解释,  $p \in K(Y)$ , 若  $I(p) = t$ , 则称  $p$  在  $I$  下为真, 又称  $p$  在  $M$  下可满足

$M$  有效: 设  $M$  为任一阶结构,  $p \in K(Y)$ , 若对一切  $V$ ,  $p$  在  $I\{M, V, v\}$  下为真, 则称  $p$  在  $M$  中有效 ( $p$  是  $M$  有效的,  $M$  是  $p$  的一个模型, 记为  $M \models p$ )

逻辑有效: 设  $p \in K(Y)$ , 若对一切一阶结构  $M$ , 若  $M \models p$ , 则称  $p$  为逻辑有效的, 记为  $\models p$

4. 下面的说法是否成立？若  $\Gamma \models p$ , 则若对一解释  $I$ , 如果  $\Gamma$  中所有公式  $q$  均有  $I(q) = t$ , 则  $I(p) = t$

不成立。回顾语义推出的定义：所有  $\Gamma$  的模型均是  $p$  的模型。

“ $\Gamma$  的模型”要求对任意解释都有  $\Gamma$  中的公式为  $t$ , 而题目结论中的条件只保证其中一个解释下为  $t$ 。

令  $\Gamma = \{q(x)\}$ ,  $p = \forall x q(x)$  那么有  $\Gamma \models p$ . 但是可以找到一个解释域  $M$  使得  $M$  不是  $\Gamma$  的模型。在  $M$  里面, 若有赋值  $I$  使得  $I(q) = 1$ , 则也必存在  $I$  的  $x$  变通  $I'$  使得  $I'(q) = 0$ , 即  $I(p) = 0$ .