数字图像处理与分析

Homework 5

吴骏东 PB20111699

2022.4.16

1. 设一幅图像的模糊是由物体在x和y方向上任意的匀速运动产生的，求转移函数H(u，v)。

答：不妨设物体在x方向上的运动为$x = x_0(t)$，在y方向上的运动为$y = y_0(t)$。于是可得

$$g(x,y) = \int_0^T f\left[x - x_0(t), y - y_0(t)\right] dt$$

对上式进行傅里叶变换

$$\begin{aligned}
G(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\exp\left(-j2\pi(ux+vy)\right)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^T f\left[x - x_0(t), y - y_0(t)\right] dt\right\}\exp\left(-j2\pi(ux+vy)\right)dxdy \\
&= F(u,v)\int_0^T \exp\left[-j2\pi\left(ux_0(t) + vy_0(t)\right)\right] dt
\end{aligned} \tag{1}$$

由此可见，转移函数H(u,v)为

$$H(u,v) = \int_0^T \exp\left[-j2\pi\left(ux_0(t) + vy_0(t)\right)\right] dt$$

设0到T时间内物体在x方向上运动距离为X，y方向上运动距离为Y。则$x_0(t) = \frac{X}{T}t, \quad y_0(t) = \frac{Y}{T}t$。于是有

$$\begin{aligned}
H(u,v) &= \int_0^T \exp\left[-j2\pi\left(\frac{X}{T}ut + \frac{Y}{T}vt\right)\right] dt \\
&= \frac{T}{\pi(Xu+Yv)}\sin\left[\pi(Xu+Yv)\right]\exp\left[-j\pi(Xu+Yv)\right]
\end{aligned} \tag{2}$$

2. 设一幅图像的模糊是由物体在x方向的匀加速运动产生的，当t＝0时，物体静止，在t＝0到t＝T间物体运动方程为$x_0(t) = \frac{1}{2}at^2$，求转移函数H(u，v)，并讨论匀速运动和匀加速运动所造成的模糊的不同特点。

答：由上题可知，转移函数H(u,v)为

$$H(u,v) = \int_0^T \exp\left[-j2\pi\left(ux_0(t) + vy_0(t)\right)\right] dt$$

代入$x_0(t)=\frac{1}{2}at^2$，$y_0(t)=0$有

$$H(u,v)=\int_0^T \exp\left[-j2\pi\left(\frac{1}{2}aut^2\right)\right]dt$$

上面的积分结果不是初等函数，因此我们无法继续进行，但是令$k=\pi au$，代入上式可得

$$\begin{aligned} H(u,v) &= \int_0^T \exp(-jkt^2)dt \\ &= \int_0^T \left[\cos(kt^2)-j\sin(kt^2)\right]dt \end{aligned} \tag{3}$$

设$\varphi_1(t)$是$\cos(kt^2)$的原函数，$\varphi_2(t)$是$\sin(kt^2)dt$的原函数，上式化为

$$H(u,v)=\varphi_1(T)-\varphi_1(0)-j(\varphi_2(T)-\varphi_2(0))$$

易知 $\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$均为奇函数，且当$t>0$时，$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$均恒正。所以有

$$\begin{aligned} |H(u,v)| &= \sqrt{\varphi_1(T)^2+\varphi_2(T)^2} \\ &> 0 \end{aligned} \tag{4}$$

所以H(u,v)没有零点。而匀速运动的H(u,v)在$Xu+Yv=int$时为零点。由此可见，匀加速运动所造成的模糊逆滤波时对噪声不敏感，而匀速运动所造成的模糊对噪声敏感。

3. 成像时由于长时间曝光受到大气干扰而产生的图像模糊可以用转移函数H(u，v)＝$\exp\left(-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}\right)$**表示。设噪声可忽略，求恢复这类模糊的维纳滤波的方程。**

答：由于噪声忽略，此时维纳滤波退化成逆滤波。所以$H_w(u,v)=\frac{1}{H(u,v)}=\exp\left(\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}\right)$