



# 第6章 图像恢复和重建

## 6.1 引言

相关概念:

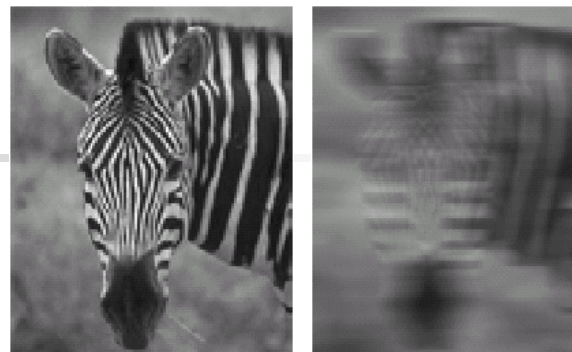
**图像增强:** 旨在改善图像质量, 增强视觉效果, 比较主观的过程。

**图像恢复:** 力求保持图像的本来面目, 找出图像降质的原因, 描述其物理过程, 提出**数学模型**, 恢复图像。大部分是一个客观的过程。如: 图像去模糊。

**基本思路:** 利用某种先验知识对退化过程建模, 并在某个质量准则下, 应用其逆过程来得到原图像的最优化估计。

**图像重建:** 根据投影数据重建图像中物体内部结构。

## ❖ 什么是图像退化



景物成像过程中可能出现畸变、模糊、失真或混入噪声，使得所成图像降质，称之为图像“退化”。

## ❖ 图像退化的原因

无论是由光学、光电或电子方法获得的图像都会有不同程度的退化；

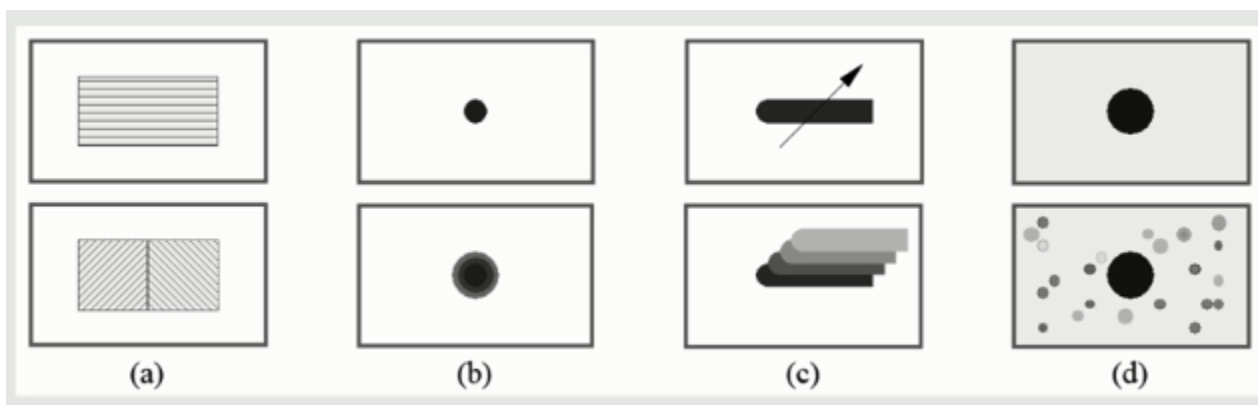
退化的形式多种多样：如传感器噪声、摄像机未聚焦、物体与摄像设备之间的相对移动、随机噪声的叠加、随机大气湍流、光学系统的相差、成像光源或射线的散射等；

如果对退化的类型、机制和过程都十分清楚，就可以利用其反过程来复原图像。

## ❖ 图像退化原因

- 成象模糊（尺寸变大，边缘不清晰）  
镜头象差/色差（成象形状扭曲，变色）  
失焦（聚焦不准，限制了图象锐度）  
噪声（随机性退化，对目标背景均有影响）  
抖动（机械不稳定、电子干扰）

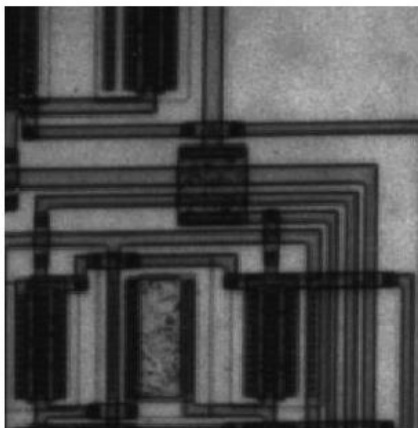
## ❖ 退化模型示例



(a) 非线性退化      (b) 模糊退化      (c) 运动退化      (d) 随机噪声退化

# 退化例子

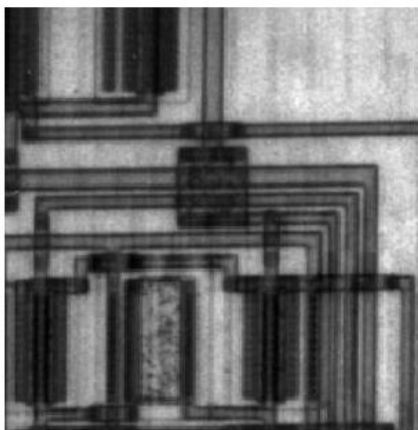
Original



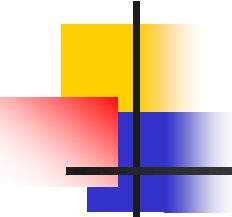
Blurred



Deblurred



物体运动产生模糊



❖ **典型的图像恢复方法：** 根据图像退化的先验知识建立一个退化模型，以此模型为基础，采用滤波等手段进行处理，使得复原后的图像符合一定的准则，达到改善图像质量的目的。

广义上讲，图像恢复（复原）是一个求逆问题，逆问题经常存在非唯一解，甚至无解。为了得到逆问题的有用解，需要有先验知识以及对解的附加约束条件。

❖ **图像恢复分类：**

从技术上：有约束、无约束恢复

从策略上：自动处理、交互处理

从方法上：空间域、代数域、频域

图像恢复技术

有约束恢复

无约束恢复

图像恢复方法

空间域法

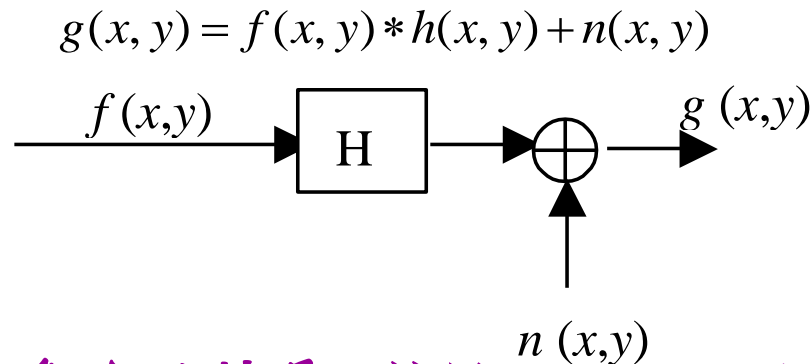
频域法

代数域

## 6.2 退化模型和对角化

### ❖ 退化模型:

线性移不变的图像退化模型表示为:



线性移不变系统的性质 (这里假设 $n(x, y)=0$ )

(1) 线性性:

$$H[k_1 f_1(x, y) + k_2 f_2(x, y)] = k_1 H[f_1(x, y)] + k_2 H[f_2(x, y)]$$

(2) 叠加性:  $k_1 = k_2$  时,

$$H[f_1(x, y) + f_2(x, y)] = H[f_1(x, y)] + H[f_2(x, y)]$$

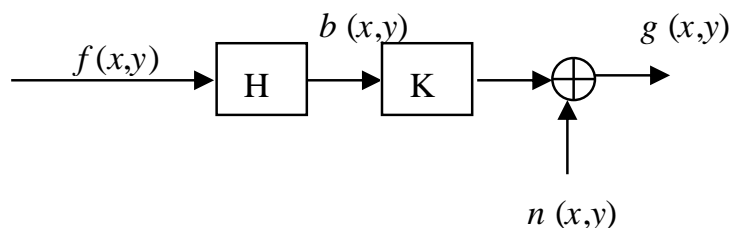
(3) 一致性: 若  $f_2(x, y) = 0$ , 则

$$H[k_1 f_1(x, y)] = k_1 H[f_1(x, y)]$$

(4) 移不变性:  $H[f(x-a, y-b)] = g(x-a, y-b)$

(空间不变性)

非线性图像退化模型（简单、特殊的一种模型）表示为：



H: 单独线性部分

K: 纯非线性部分

$$g(x, y) = K\{H[f(x, y)]\} + n(x, y) = K[b(x, y)] + n(x, y)$$

## ❖ 离散图像退化模型:

### (1) 1D 离散情况:

函数:  $f(x): x=0 \cdots A-1$

$h(x): x=0 \cdots B-1$

扩展后:  $f_e(x): x=0 \cdots M-1$

$h_e(x): x=0 \cdots M-1$

$$g_e(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f_e(m) h_e(x-m) + n(x) \quad x=0 \cdots M-1$$

用矩阵形式表示:  $g=Hf+n$

H为循环矩阵

$$H = \begin{bmatrix} h_e(0) & h_e(M-1) & \cdots & h_e(1) \\ h_e(1) & h_e(0) & \cdots & h_e(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_e(M-1) & h_e(M-2) & \cdots & h_e(0) \end{bmatrix}$$



## (2) 2D离散情况:

扩展后:  $f_e(x, y) : 0 \leq x \leq M-1, 0 \leq y \leq N-1$

$h_e(x, y) : 0 \leq x \leq M-1, 0 \leq y \leq N-1$

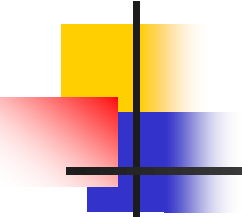
$$f_e(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A-1, 0 \leq y \leq B-1 \\ 0 & A \leq x \leq M-1, B \leq y \leq N-1 \end{cases}$$

$$h_e(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & 0 \leq x \leq C-1, 0 \leq y \leq D-1 \\ 0 & C \leq x \leq M-1, D \leq y \leq N-1 \end{cases}$$

$$g_e(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m, n) h_e(x-m, y-n) + n_e(x, y)$$

写成矩阵形式:  $g=Hf+n$

$g$ 、 $f$ 和 $n$ 分别表示 $MN \times 1$ 的矩阵,  $g(i, j)$ 、 $f(i, j)$ 和 $n(i, j)$ 的各行或各列前后相连而成的矢量。 $H$ 是 $MN \times MN$ 矩阵



$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(0) & \mathbf{H}(M-1) & \cdots & \mathbf{H}(1) \\ \mathbf{H}(1) & \mathbf{H}(0) & \cdots & \mathbf{H}(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}(M-1) & \mathbf{H}(M-2) & \cdots & \mathbf{H}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_e(0) \\ f_e(1) \\ \vdots \\ f_e(MN-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_e(0) \\ n_e(1) \\ \vdots \\ n_e(MN-1) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{H}$ 是一个分块循环矩阵:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(0) & \mathbf{H}(M-1) & \cdots & \mathbf{H}(1) \\ \mathbf{H}(1) & \mathbf{H}(0) & \cdots & \mathbf{H}(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}(M-1) & \mathbf{H}(M-2) & \cdots & \mathbf{H}(0) \end{bmatrix}$$

每一个子矩阵 $\mathbf{H}(i)$ 自身也是循环矩阵:

$$\mathbf{H}(i) = \begin{bmatrix} h(i,0) & h(i,N-1) & \cdots & h(i,1) \\ h(i,1) & h(i,0) & \cdots & h(i,2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(i,N-1) & h(i,N-2) & \cdots & h(i,0) \end{bmatrix}$$

# ❖ 循环矩阵的对角化:

## 1. 循环矩阵的对角化

循环矩阵H的本征矢量 (特征向量) :

$$\mathbf{w}(k) = [1 \quad \exp(j2\pi k/M) \quad \cdots \quad \exp(j2\pi(M-1)k/M)]^T \quad k=0 \dots M-1$$

H的本征值 (特征值) :

$$\lambda(k) = h_e(0) + h_e(M-1) \exp(j2\pi k/M) + \cdots + h_e(1) \exp(j2\pi(M-1)k/M)$$

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}(0) \quad \mathbf{w}(1) \quad \cdots \quad \mathbf{w}(M-1)]$$

$$\text{其中 } \mathbf{w}(k, l) = \exp(j2\pi kl/M) \quad \mathbf{w}^{-1}(k, l) = \exp(-j2\pi kl/M) / M$$

$$\mathbf{H}\mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{D} \quad \text{所以 } \mathbf{H} = \mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{W}^{-1}$$

$$\text{其中 } D(k, k) = \lambda(k)$$

## 2. 块循环矩阵的对角化

$$\mathbf{w}(i, m) = \exp(j2\pi im/M) \mathbf{W}_N \quad \mathbf{w}^{-1}(i, m) = \exp(-j2\pi im/M) \mathbf{W}_N^{-1} / M$$

$$\mathbf{w}_N(k, n) = \exp(j2\pi kn/N) \quad \mathbf{w}_N^{-1}(k, n) = \exp(-j2\pi kn/N) / N$$

$$\mathbf{H}\mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{D} \quad \text{所以 } \mathbf{H} = \mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{W}^{-1}$$

## ❖ 退化模型对角化的效果:

### (1) 1D情况:

$$g = Hf$$

$$W^{-1}g = W^{-1}WDW^{-1}f$$

$$W^{-1}g = DW^{-1}f$$

$W^{-1}f$ 的第 $k$ 个元素 $F(k)$ :

$$F(k) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} f_e(i) \exp(-j \frac{2\pi ki}{M})$$

$W^{-1}g$ 的第 $k$ 个元素 $G(k)$ :

$$G(k) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} g_e(i) \exp(-j \frac{2\pi ki}{M})$$

$$D(k, k) = \lambda(k) = \sum_{i=0}^{M-1} h_e(i) \exp(-j \frac{2\pi ki}{M}) = MH(k)$$

$$G(k) = MH(k) F(k) \quad \text{即矩阵相乘转换为傅氏变换求取}$$

## (2)2D情况:

$$g=Hf+n$$

$$W^{-1}g=DW^{-1}f+W^{-1}n$$

$$G(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} g_e(x,y) \exp[-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})]$$

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f_e(x,y) \exp[-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})]$$

$$N(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} n_e(x,y) \exp[-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})]$$

$$H(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} h_e(x,y) \exp[-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})]$$

$$G(u,v) = H(u,v) F(u,v) + N(u,v)$$

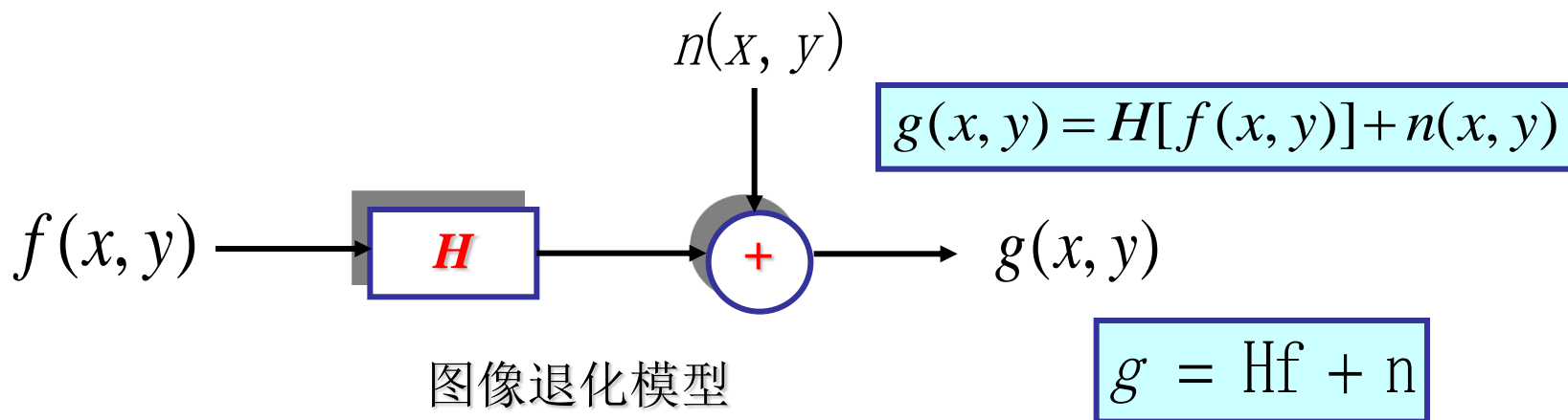
即矩阵相乘转换为傅氏变换求取

图像复原的方法 {  
    代数恢复法  
    频域恢复法  
    去卷积恢复法

## 6.3 代数恢复法

给定退化图像  $g(x,y)$   
对  $H$  和  $n(x,y)$  的某种了解或假设

} 估计出原始图像  $f(x,y)$



代数恢复的思想：寻找一个估计，使它对事先确定的优度准则（一般用最小二乘准则）为最小。

分为 { 无约束恢复  
有约束恢复

# 1.无约束恢复

不考虑噪声：  $\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$

对估值 $\hat{\mathbf{f}}$ 的响应：  $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}$

求最佳估计值 $\hat{\mathbf{f}}$ ，使得 $\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}$ 误差最小

最小均方误差函数为误差的范数形式：

求误差最小，即求 $\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}$ 的范数最小

$$L(\hat{\mathbf{f}}) = \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}\|^2 = (\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}})^T (\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}})$$

$$\partial L(\hat{\mathbf{f}}) / \partial \hat{\mathbf{f}} = 0$$

$$\frac{\partial J(\hat{\mathbf{f}})}{\partial \hat{\mathbf{f}}} = -2\mathbf{H}^T (\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}) = 0$$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}^T \mathbf{g}$$

$$\hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{g}$$

当 $M=N$ 时， $\mathbf{H}$ 为一方阵，且假设 $\mathbf{H}^{-1}$ 存在

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{g} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}$$

## 2. 有约束恢复

用向量 $f, g, n$ 来表示 $f(x, y), g(x, y), n(x, y)$ ,  $Q$ 为对 $f$ 的线性算子, 在约束条件

$$\|g - H\hat{f}\| - \|n\|$$

最小下求 $Qf$ 的最小化而得到 $f$ 的最佳估计。

用拉格朗日乘数法求

$$\min J(\hat{f}) = \|Q\hat{f}\|^2 + \alpha \left[ \|g - H\hat{f}\|^2 - \|n\|^2 \right]$$

微分,

$$\frac{\partial J(\hat{f})}{\partial \hat{f}} = 2Q^T Q \hat{f} - 2\alpha H^T (g - H\hat{f}) = 0$$

$$\therefore \hat{f} = (H^T H + \gamma Q^T Q)^{-1} H^T g$$

$$\text{其中 } \gamma = \frac{1}{\alpha}$$

$\gamma$ 可以用来调节以满足约束条件。





## 小结:

无约束恢复:  $\hat{f} = H^{-1}g$

已知退化图像  $g$  与  $H$ , 并且  $H^{-1}$  存在时可确定复原图像  $\hat{f}$

有约束恢复: 引入  $Q$  为  $f$  的线性算子。当  $[H^TH + Q^TQ/\alpha]^{-1}$  存在时, 可按  $\hat{f} = [H^TH + Q^TQ/\alpha]^{-1}H^Tg$  解出  $\hat{f}$ , 其中 Lagrange 系数  $\alpha$  通过实验选取。

以上方法都要计算  $MN \times MN$  的  $H$  矩阵的逆矩阵问题。解一个十分庞大的线性联立方程组。由于  $H$  矩阵——点扩展函数矩阵具有分块循环性质, 可简化计算。

## 6.4 无约束恢复

### ❖ 逆滤波:

#### 1. 从频域的角度分析:

对于图像退化模型

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) + n(x, y)$$

两边取傅立叶变换

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v) + N(u, v)$$

$H(u, v)$  又称为系统的**转移函数**(或滤波函数), 它使图像退化。

在无噪声情况下, 上式可以简化为:

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v)$$

$$\therefore F(u, v) = G(u, v) / H(u, v)$$

❖  $1/H(u, v)$  的形式称为**逆滤波**。再进行傅立叶逆变换可以得到  $f(x, y)$ 。

## 2.从代数恢复的角度分析:

$$\hat{f} = H^{-1}g = (WDW^{-1})^{-1}g = WD^{-1}W^{-1}g$$

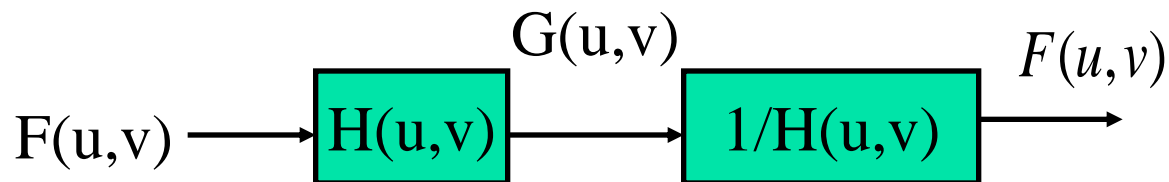
$$W^{-1}\hat{f} = D^{-1}W^{-1}g$$

$$\hat{F}(u, v) = G(u, v) / H(u, v)$$

$$\hat{f}(x, y) = F^{-1}[G(u, v) / H(u, v)] \text{-----去卷积}$$

考虑噪声时:

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$



逆滤波模型



实际情况中，噪声是不可避免的，因而只能求 $F(u,v)$ 的估计值：

$$\hat{F}(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)} + \frac{N(u,v)}{H(u,v)}$$

☹ 如果 $H(u,v)$ 有许多零点，必然使得复原的结果受到极大影响。

☹ 如果 $H(u,v)$ 不为零但是有非常小的值，也即病态条件，也会使复原效果受到影响。

解决这个问题的方法是避开 $H(u,v)$ 的零点。

☺ 一般的 $H(u,v)$ 在低频附近的有限区域内不为零。

一般情况下， $H(u,v)$ 的幅度随者离 $u, v$  平面原点的距离的增加而迅速下降，而噪声项 $N(u,v)$  变化平缓。在远离 $u, v$  平面原点时， $N(u,v) / H(u,v)$ 的值会变得很大，而 $F(u,v)$ 却变小，这时噪声反而占优势，自然无法满意地复原。这说明在原点邻域内采用 $1 / H(u,v)$  方能凑效。

❖ 因此逆滤波可以在原点附近进行，相当于在频域乘上一低通窗口函数  $M(u,v)$ 。

$$M(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{H(u,v)} & \text{若 } u^2 + v^2 \leq w_0 \\ 1 & \text{若 } u^2 + v^2 > w_0 \end{cases}$$

产生振铃效应

在理想无噪声的理想情况下，等效于在空域  $f(x,y)$  和  $M(x,y)$  的卷积。

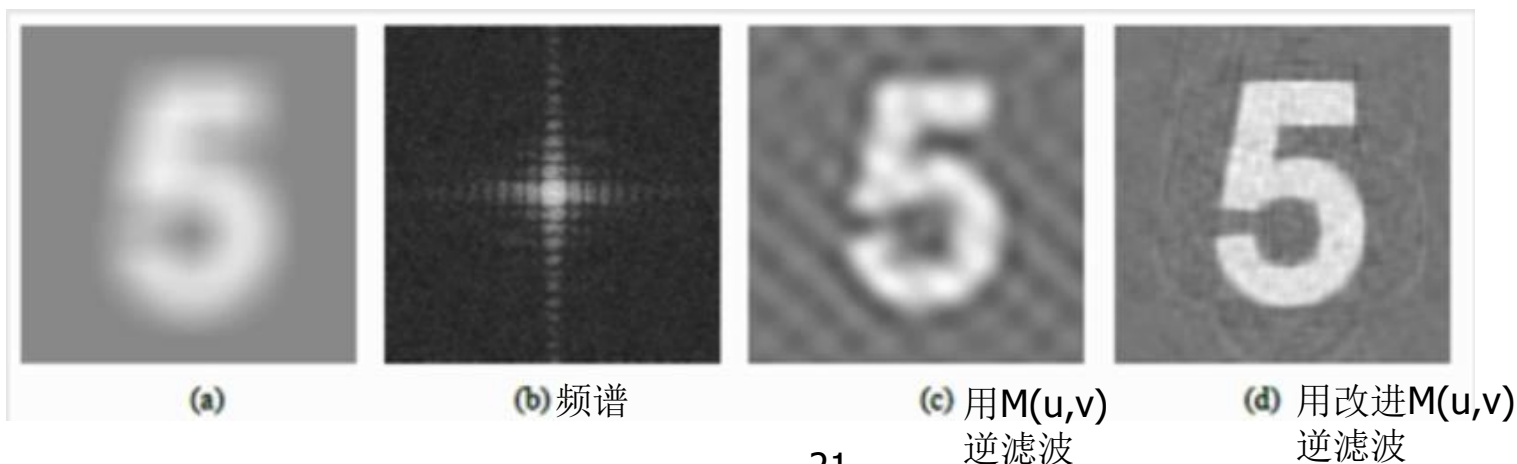
改进:

$$M(u,v) = \begin{cases} k & H(u,v) \leq d \\ 1/H(u,v) & H(u,v) > d \end{cases}$$

产生振铃效应较小

其中  $k$  和  $d$  均为小于1的常数

逆滤波会使原图像变模糊。





逆滤波的应用条件：退化图像 $g(x,y)$ 是信噪比较高的图像。

逆滤波只引入少量模糊，方法简单，因而受重视。

实验证明，当退化图像的噪声较小，即轻度降质时，采用逆滤波复原的方法可以获得较好的结果。

## 总结：

(1) 变质图像  $g(x, y) \Rightarrow G(u, v)$

(2)  $h(x, y) \Rightarrow H(u, v)$

(3) 利用  $\hat{F}(u, v) = G(u, v) / H(u, v)$  求估计值

(4)  $\hat{f}(x, y) = F^{-1}[\hat{F}(u, v)]$

## ❖ 逆滤波应用:

### 1. 解决大气扰动所造成的模糊



大气扰动造成的模糊图像



逆滤波结果

## 2. 逆滤波消除匀速直线运动模糊:

若物体不运动时:

成像:  $g(x,y) = \int_0^T f(x,y) dt$  其中曝光时间为  $T$

当成像传感器与被摄景物之间存在足够快的相对运动时, 所摄取的图像就会出现“运动模糊”, 运动模糊是场景能量在传感器拍摄瞬间 ( $T$ ) 内在像平面上的非正常积累。

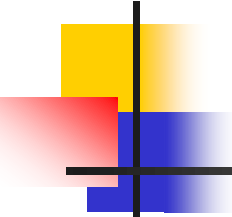
物体作匀速直线运动时:  $x_0(t)$ 、 $y_0(t)$  分别是景物在  $x$ 、 $y$  方向的运动量

模糊图像:  $g(x,y) = \int_0^T f[x-x_0(t), y-y_0(t)] dt$

上式进行傅立叶变换得到:

$$\begin{aligned} G(u,v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) \exp(-j2\pi(ux + vy)) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^T f[x-x_0(t), y-y_0(t)] dt \right\} \exp(-j2\pi(ux + vy)) dx dy \\ &= F(u,v) \int_0^T \exp[-j2\pi(ux_0(t) + vy_0(t))] dt \end{aligned}$$





定义: 
$$H(u,v) = \int_0^T \exp\{-j2\pi[ux_0(t) + vy_0(t)]\} dt$$

则有 
$$G(u,v) = H(u,v) \cdot F(u,v)$$

$H(u,v)$ 为运动模糊的传递函数。

如果考虑噪声则有 
$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v) + N(u,v)$$

变化到空间域为 
$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y) + n(x,y)$$

其中 $h(x,y)$ 为运动模糊的点扩展函数, 在 $x_0(t)$ 、 $y_0(t)$ 已知时, 便可求得 $H(u,v)$ 和 $h(x,y)$ 。

例: 假定景物只沿 $x$ 方向做匀速直线运动,  $x_0(t) = at/T$  为运动方程, 当

$t=T$  时图象移动距离为 $a$ ,  $y_0(t)=0$  则有 
$$H(u,v) = \int_0^T \exp[-j2\pi ux_0(t)] dt$$

$$= \frac{T}{\pi ua} \sin(\pi ua) \exp(-j\pi ua)$$

在只有x方向作匀速直线运动时，直接由 $g(x, y)$ 完全恢复 $f(x, y)$ ：

$$x_0(t) = ct/T \text{ 为运动方程} \quad y_0(t) = 0$$

变质图像：

$$g(x) = \int_0^T f[x - x_0(t)] dt \quad \text{则：} \quad g(x) = \int_{x-c}^x f(\tau) d\tau$$

$$\text{对 } x \text{ 求导：} \quad g'(x) = f(x) - f(x - c) \quad \text{则：} \quad f(x) = g'(x) + f(x - c)$$

令 $x = z + mc$ ，得迭代公式：

$$f(z + mc) = g'(z + mc) + f(z + (m - 1)c)$$

$$\text{令 } p(z) = f(z - c) \text{ 得：} \quad f(z + mc) = \sum_{k=0}^m g'(z + kc) + p(z)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^m g'(x - kc) + p(x - mc)$$

$$p(x - mc) = A - \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^m g'(x + (k - m)c - jc)$$

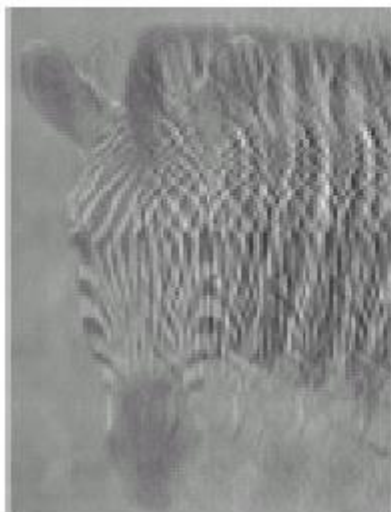
A为图像均值



模糊图像



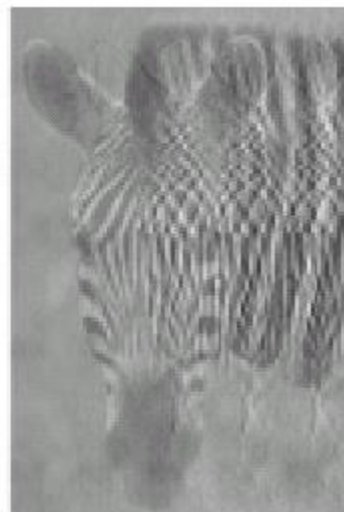
恢复后图像



按位移25个像素复原



按位移26个像素复原



按位移27个像素复原

## 6.5 有约束恢复

### 1. 维纳滤波器

维纳滤波器

有约束最小平方恢复

#### ☯ 基本原理

逆滤波方法对噪声极为敏感，要求信噪比较高，通常不满足该条件。

因此希望找到一种方法，在有噪声条件下，从退化图像 $g(x,y)$ 复原出 $f(x,y)$ 的估计值，该估计值符合一定的准则。

用向量 $f, g, n$ 来表示 $f(x,y), g(x,y), n(x,y)$ ， $Q$ 为对 $f$ 的线性算子，在约束条件

$$\|g - H\hat{f}\| - \|n\|$$

最小下求 $Q\hat{f}$ 的最小化而得到 $\hat{f}$ 的最佳估计。

$$\therefore \hat{f} = (H^T H + \gamma Q^T Q)^{-1} H^T g$$

$$\text{其中 } \gamma = \frac{1}{\alpha}$$



设 $R_f$ 和 $R_n$ 为 $f$ 和 $n$ 的相关矩阵:

$$R_f = E\{ff^T\}$$

$$R_n = E\{nn^T\}$$

它们是对称矩阵。对于大多数图像而言，相邻像素之间相关性很强，在20个像素之外，趋于零。在此条件下， $R_f$ 和 $R_n$ 可以近似为分块循环矩阵：

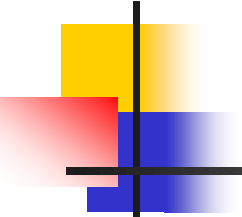
$$R_f = WAW^{-1}$$

$$R_n = WBW^{-1}$$

其中 $A$ 和 $B$ 为对角阵， $W$ 为酉阵。

若 $Q^TQ$ 用 $R_f^{-1}R_n$ 来代替

$$\hat{f} = (H^T H + \gamma R_f^{-1} R_n)^{-1} H^T g$$



当 $D$ 为对角阵，分块循环矩阵

$$\mathbf{H} = \mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{W}^{-1}$$

$$\mathbf{H}^T = \mathbf{W}\mathbf{D}^*\mathbf{W}^{-1}$$

因此：

$$\mathbf{W}^{-1}\hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{D}\mathbf{D}^* + \gamma\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{W}^{-1}\mathbf{g}$$

写成频域形式为：

$$\hat{F}(u,v) = \left[ \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + \gamma[p_n(u,v)/p_f(u,v)]} \right] G(u,v)$$

其中 $p_f(u,v)$ ,  $p_n(u,v)$ 分别是 $f(x,y)$ 和 $n(x,y)$ 的功率谱。

$\gamma = 1$ 时， $\hat{F}(u,v)$ 称为维纳滤波器

$\gamma \neq 1$ 时，称为参数维纳滤波器

当没有噪声时， $p_n(u,v)=0$ ，为逆滤波

## 维纳滤波器的传递函数

$$H_w(u, v) = \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S \frac{P_n(u, v)}{P_f(u, v)}}$$

特点:

➤ 自动抑制噪声  $H(u, v) = 0$  不会被0除

$$P_n(u, v) \gg P_f(u, v) \quad H_w(u, v) \rightarrow 0$$

➤ 逆滤波是维纳滤波的特例  $P_f(u, v) \gg P_n(u, v)$

传递函数中原图像与噪声的功率谱未知

$$K \longrightarrow P_n(u, v) / P_f(u, v)$$

$$\hat{F}(u, v) = \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} G(u, v)$$

**K** 的确定:

$$n_A = \frac{1}{MN} \sum_u \sum_v P_n(u, v) \quad \text{平均噪声功率谱}$$

$$f_A = \frac{1}{MN} \sum_u \sum_v P_f(u, v) \quad \text{平均图像功率谱}$$

$$R = \frac{n_A}{f_A} \longrightarrow K$$





大气扰动造成的模糊图像



逆滤波结果



维纳滤波结果



a	b	c
d	e	f
g	h	i

(a) Image corrupted by motion blur and additive noise. (b) Result of inverse filtering. (c) Result of Wiener filtering. (d)–(f) Same sequence, but with noise variance one order of magnitude less. (g)–(i) Same sequence, but noise variance reduced by five orders of magnitude from (a). Note in (h) how the deblurred image is quite visible through a “curtain” of noise.



## ☯ 维纳滤波器的优、缺点：

- 当复原的目的是供人观察时，均方误差准则并不是一个特别好的优化准则；
- 经典的维纳滤波不能处理具有空间可变点扩散函数的情形；
- 维纳滤波不能处理具有非平稳信号和噪声的情形。

## ☯ 对维纳滤波器进行改进：

{ 功率谱均衡滤波器  
几何均值滤波器



## 功率谱均衡滤波器:

$$\hat{F}(u,v) = \left[ \frac{S_f(u,v)}{|H(u,v)|^2 S_f(u,v) + S_n(u,v)} \right]^{1/2} G(u,v)$$

无噪声时, 简化为逆滤波;

**H(u,v)**为**0**处, 并不截止到**0**-----与维纳滤波的不同处

## 几何均值滤波器:

$$\hat{F}(u,v) = \left[ \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2} \right]^a \left[ \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + \gamma [S_n(u,v)/S_f(u,v)]} \right]^{1-a} G(u,v) \quad a, \gamma > 0$$

当**a=1**时, 简化为逆滤波;

当**a=1/2**, **γ=1**时, 为功率谱均衡滤波器;

当**a=1/2**时, 为逆滤波和维纳滤波的几何平均;

当**a=0**时, 为参数化维纳滤波;

## 2. 有约束最小平方恢复

平滑测度准则:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4f(x, y) - [f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1)]$$

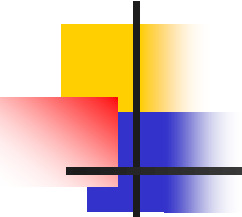
写成一个矩阵  $p = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

平滑测度可用  $f(x, y) * p(x, y)$  得到。  $f(x, y)$ ,  $p(x, y)$  进行周期扩展为  $f_e(x, y)$  和  $p_e(x, y)$

平滑测度的矩阵形式:

$$C = \begin{bmatrix} c(0) & c(M-1) & \cdots & c(1) \\ c(1) & c(0) & \cdots & c(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c(M-1) & c(M-2) & \cdots & c(0) \end{bmatrix}$$

**C** 是一个分块循环矩阵



每一个子矩阵 $\mathbf{c}(i)$ 自身也是循环矩阵:

$$\mathbf{c}(i) = \begin{bmatrix} p_e(i,0) & p_e(i,N-1) & \cdots & p_e(i,1) \\ p_e(i,1) & p_e(i,0) & \cdots & p_e(i,2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_e(i,N-1) & p_e(i,N-2) & \cdots & p_e(i,0) \end{bmatrix}$$

循环矩阵对角化:

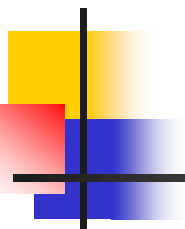
$$\mathbf{C} = \mathbf{W} \mathbf{E} \mathbf{W}^{-1}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{W}^{-1}$$

$$\mathbf{H}^T = \mathbf{W} \mathbf{D}^* \mathbf{W}^{-1}$$

若 $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$ 用 $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$ 来代替

$$\hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \gamma \mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{g}$$



因此：

$$W^{-1} \hat{f} = (DD^* + \gamma E^* E)^{-1} D^* W^{-1} g$$

写成频域形式为：

$$\hat{F}(u,v) = \left[ \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + \gamma [P(u,v)]^2} \right] G(u,v)$$

———有约束最小平方滤波



例:

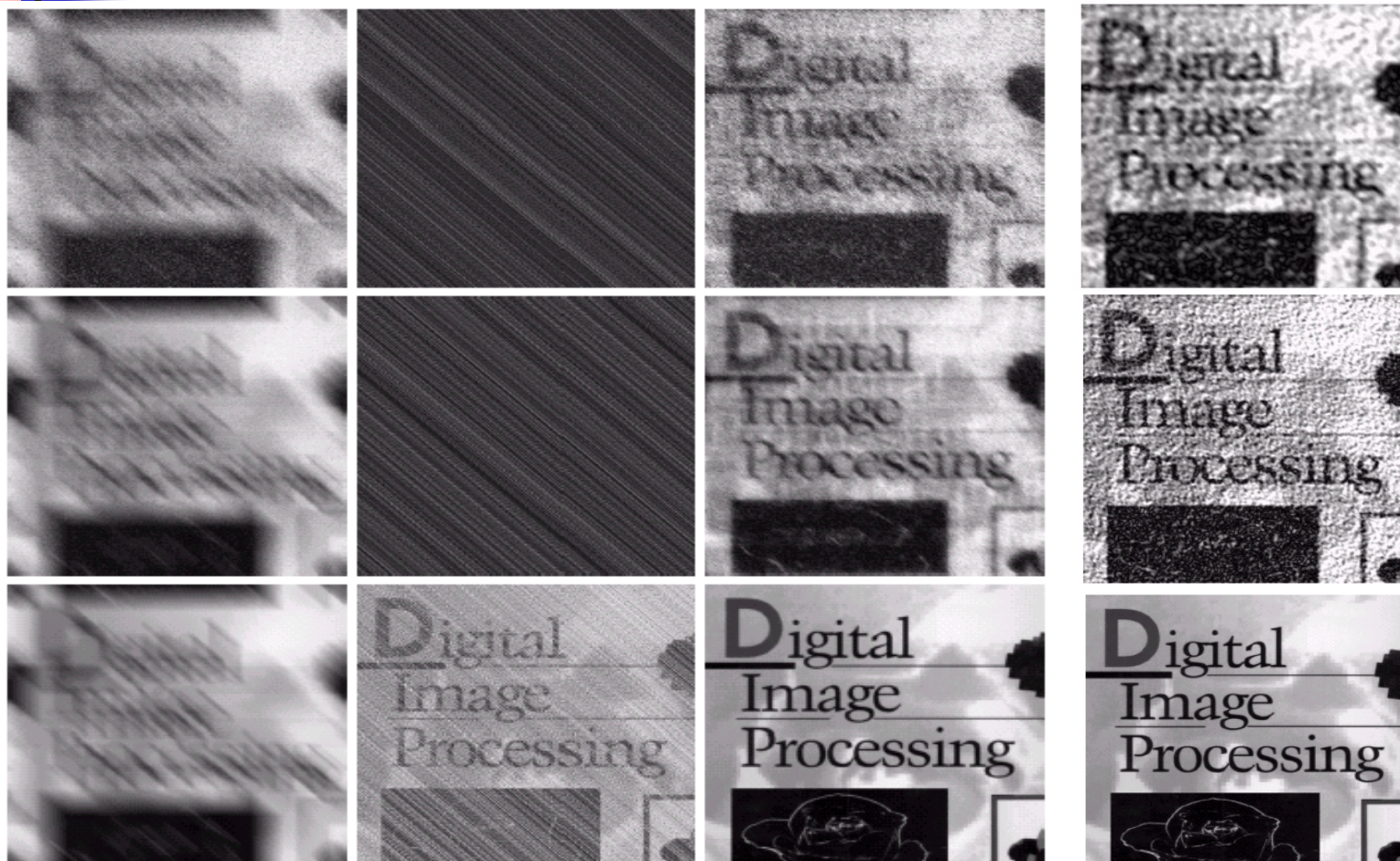
a b

(a) Iteratively determined constrained least squares restoration of Fig. 5.16(b), using correct noise parameters.  
(b) Result obtained with wrong noise parameters.

---







a	b	c
d	e	f
g	h	i

a) Image corrupted by motion blur and additive noise. (b) Result of inverse filtering. (c) Result of Wiener filtering. (d)–(f) Same sequence, but with noise variance one order of magnitude less. (g)–(i) Same sequence, but noise variance reduced by five orders of magnitude from (a). Note in (h) how the deblurred image is quite visible through a “curtain” of noise.

有约束最小平方滤波结果

## 6.6 图像修补与超分辨率复原

**图像缺损：**图像中部分区域发生缺损或缺失，像素灰度急剧改变，使图像不完整的情况：

- ① 在采集有遮挡的场景图像或扫描有破损的老图片时产生部分内容缺失
- ② 在图像加工中去除特定区域（无关景物）后留下的空白
- ③ 图像上覆盖文字或受到干扰（照片撕裂或有划痕）导致的变化
- ④ 对图像进行有损压缩时而造成的部分信息丢失
- ⑤ 在（网络上）传输数据时由于网络故障所导致的像素丢失



图像缺损是图像退化的一种特殊情况

## 1. 图像修补概念

基于不完整的图像和对原始图像的先验知识，通过采用相应的方法纠正或校正区域缺损问题，以达到恢复图像原貌的目的

## 2. 图像修补模型

原始图像  $f(x, y)$ ，其分布的空间区域用  $F$  表示  
待修补图像  $g(x, y)$ ，其分布的空间区域也是  $F$   
待修补部分为  $d(x, y)$ ，其空间区域用  $D$  表示

靶区域  $D$ ，源区域  $F-D$

图像修补模型：



$$[g(x, y)]_{F-D} = \{H[f(x, y)] + n(x, y)\}_{F-D}$$

用  $F-D$  的模型来估计和恢复  $D$



### 3. 图像修补方法

#### ✧ 修复（插补）

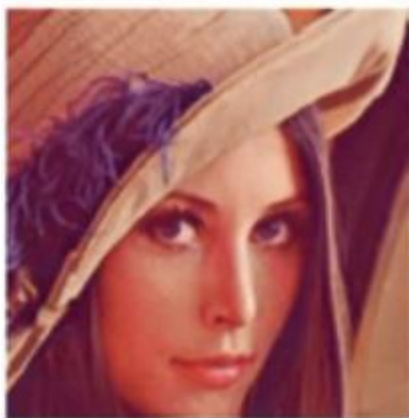
修补尺度较小的区域，多利用局部结构信息：区域周围信息向区域内部扩散的方法

#### ✧ 补全（填充）

修补尺度较大的区域，还考虑整图纹理信息：样本填充的方法

（插补与填充相互之间在尺度上并没有严格的界限）

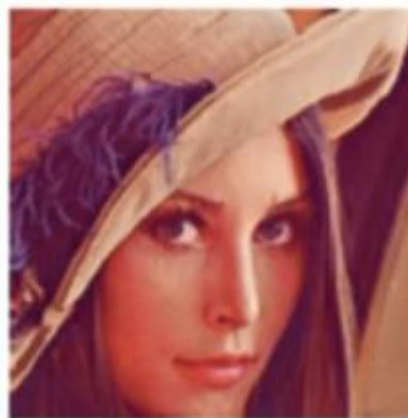
去除叠加 / 覆盖文字的图像修补：（对曲线状靶区域的修补）



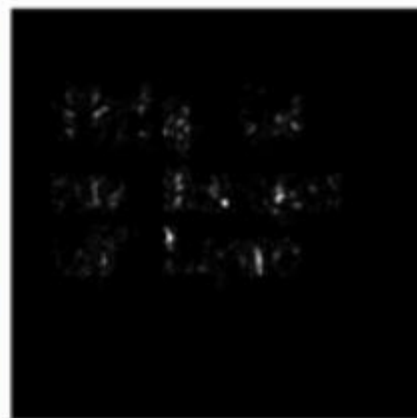
原始图象



需修补图象



修补结果图象



差图象

去除部分景物的图像修补  
(对面状靶区域的修补)



原始图像

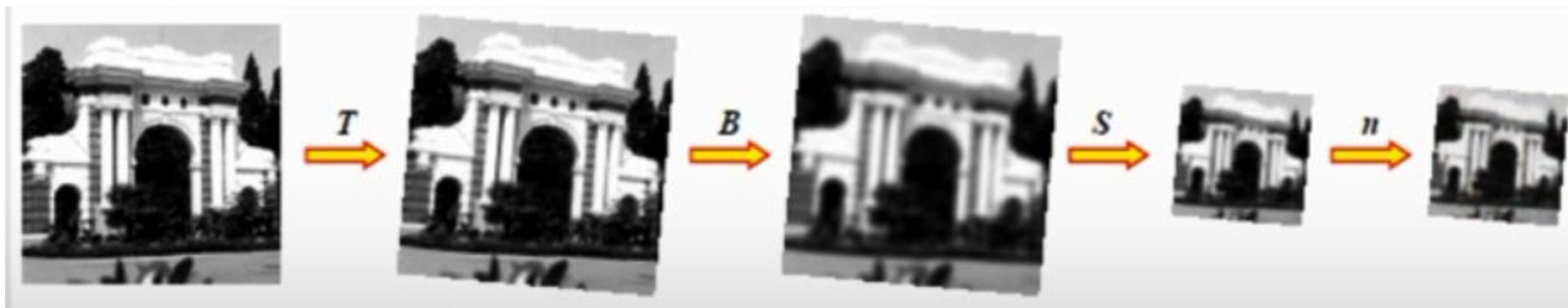


需修补图像 (标记)



修补结果图像

### 3. 图像超分辨率复原



高分辨率图像向低分辨率图像退化过程

图像超分辨率复原模型：

$$g = SBTf + n$$

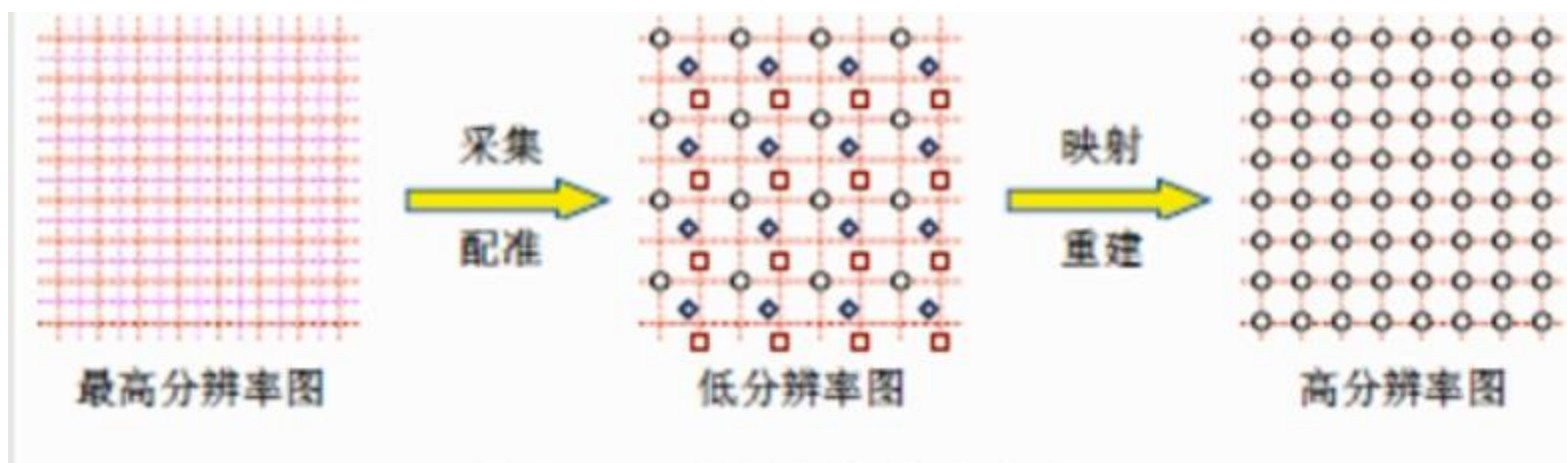
低分辨率图像  $g$ ，高分辨率理想图像  $f$ ， $n$ 为加性噪声

**S**: 亚采样矩阵

**B**: 模糊矩阵

**T**: 形变矩阵

- 单幅图像超分辨率复原：放大、插值、滤波
- 多幅图像超分辨率复原：对同一场景获取多幅图像：  
（不同位置拍摄、或场景相对运动拍摄）  
进行非均匀插值、图像恢复（去除噪声）



非均匀插值流程



# 6.7 投影重建

## 1. 图像重建的基本概念

### ➤ 图像重建

由物体截面投影数据，重建该截面的图像

### ➤ 计算机断层扫描

CT(Computerized Tomography)技术是一种根据人体截面的投影数据，经过计算机处理来重建该器官截面的图像的技术

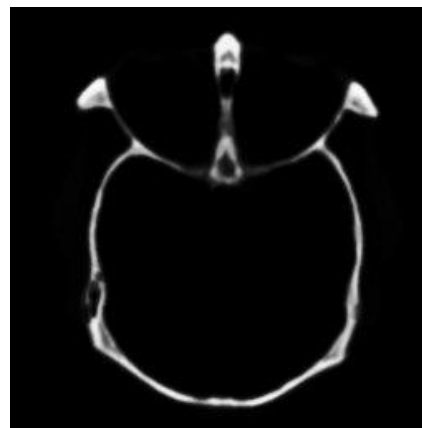
### ➤ 图像重建的历史

英国科学家Housfield在六十年代发明了断层扫描重建图像技术。

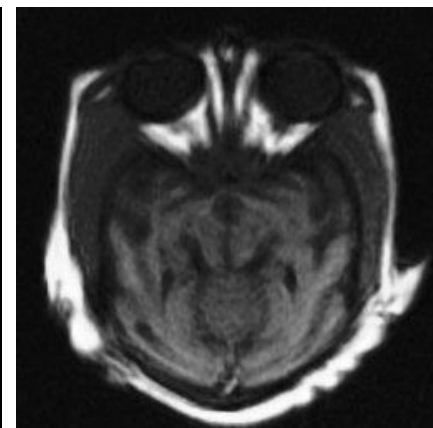


## 2. 投影重建典型应用:

- 透射CT
- 发射CT
- 反射断层成像
- 核磁共振MRI
- B超等



CT



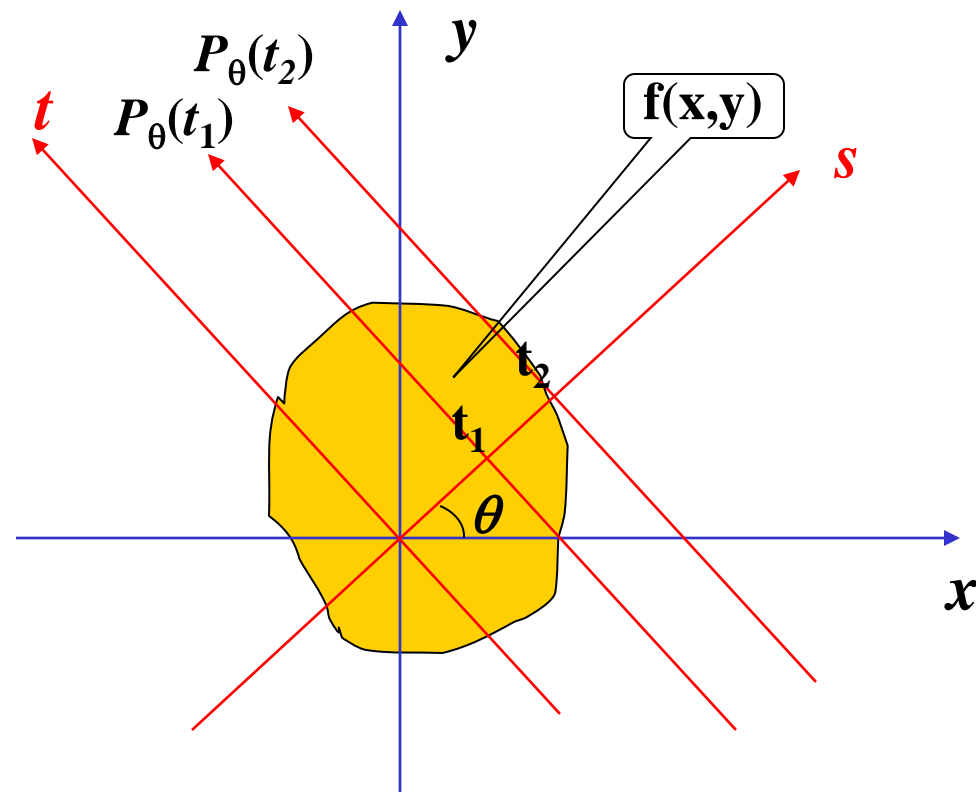
MRI

## 3. 投影重建图像的模型

原始图像 $f(x, y)$ 在 $\theta$ 方向上的投影数据为 $g(s, \theta)$

$$g(s, \theta) = \int f(x, y) dt = \int f(s \cos \theta - t \sin \theta, s \sin \theta + t \cos \theta) dt$$

## ► 图像投影重建基本原理



$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

设 $f(x,y)$ 是“截面图像”函数， $xOy$ 是建立在物体上的直角坐标系， $tOs$ 是建立在扫描装置上的直角坐标系，它们的原点重合， $s$ 轴与 $x$ 轴的夹角为 $\theta$ 。两者的坐标变换关系见左边公式。

在 $(t,s)$ 坐标系中， $t$ 方向称为射线方向，沿射线方向将图像 $f(x,y)$ 进行积分

$$g(s, \theta) = \int f(x, y) dt$$

换句话说， $g(s, \theta)$ 为 $f(x, y)$ 在 $\theta$ 角位置的平行投影。上式也称为雷顿变换(Radon, 1917年)

## ✓硬件实现方法

为了获得 $g(s, \theta)$ 平行线投影数据，设投影射线为 $x$ 射线，当 $x$ 射线穿过物体时，由于物体内部组织的吸收、散射、反射等作用，会使射线强度衰减，射线的衰减规律可表达为

$$N_{out} = N_{in} \exp(-\int_t u(x, y) dt) \quad (1)$$

$t$ 为射线方向， $u(x, y)$ 为射线穿过物体时的衰减系数，它正好反映了物体内部的组织性质，这样， $u(x, y)$ 表征了物体断面的图像 $f(x, y)$ 的组织信息， $N_{in}$ 是射线入射剂量， $N_{out}$ 是穿过物体后射线的剂量，他们都可以通过物理测量而得到。式(1)可变换为

$$g(s, \theta) = \int_t f(x, y) dt = \int_t u(x, y) dt = \log(N_{in} / N_{out}) \quad (2)$$



投影重建问题就转化成了如下两个简单问题:

1) 如何取 $N_{in}, N_{out}$

2) 如何解方程

$$g(s, \theta) = \int_t f(x, y) dt = \log(N_{in} / N_{out})$$

## 4. 图像重建方法

- 傅立叶反变换法
- 卷积反投影法
- 级数展开法

# ❖ 傅立叶反变换法

## 基本原理:

$\theta$ 离散化: 在 $\theta$ 上分成 $N$ 个角度,  $\Delta\theta = \pi/N$

$S$ 离散化: 在 $S$ 上采样 $M$ 个

连续情况下 $g(s, \theta)$ 的1D傅氏变换:

$$G(R, \theta) = \int g(s, \theta) \exp[-j2\pi RS] dS$$

**投影切片定理:**  $G(R, \theta) = F(R\cos\theta, R\sin\theta)$

所以由 $F(R\cos\theta, R\sin\theta)$ 内插求出 $F(X, Y)$ , 再对其求FFT  
逆变换就恢复出 $f(x, y)$

## 具体实现:

$$G_{\Sigma}(R, \theta_n) = \Delta S \sum_{m=M^-}^{M^+} g(m\Delta S, \theta_n) \exp[-j2\pi R(m\Delta S)]$$



## 傅立叶反变换法存在的问题:

若内插精度不高, 则图像细节不清晰或内插产生虚假条纹

### ❖ 卷积反投影法

(1) 在极坐标中求 $f(x,y)$ 的反变换:

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(R, \theta) \exp[j2\pi R(x\cos\theta + y\sin\theta)] |R| dR d\theta$$

若定义  $h(s) = \int_{-1/2\Delta s}^{1/2\Delta s} |R| w(R) \exp[j2\pi RS] dR$

则  $f_w(x,y) = \int_0^{\pi} \int_{-1}^{1/2\Delta s} g(S, \theta) h(x\cos\theta + y\sin\theta - S) dS d\theta$



(2)实际应用：分成两步

$$\textcircled{1} \text{先计算 } g'(S', \theta) = \int_{-1}^1 g(S, \theta) h(S' - S) dS$$

$$\textcircled{2} f_w(x, y) = \int_0^\pi g'(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

(3)对以上两步进行离散化：

离散化：

$$\textcircled{1} g'(m' \Delta S, \theta_n) = \Delta S \sum_{m=M^-}^{M^+} g(m \Delta S, \theta_n) h[(m' - m) \Delta S]$$

$$\textcircled{2} f_w(k \Delta x, l \Delta y) = \Delta \theta \sum_{n=1}^N g'(k \Delta x \cos \theta_n + l \Delta y \sin \theta_n, \theta_n)$$



#### (4)傅氏变换法与卷积反投影法比较

**傅氏变换法：**要内插，实现不容易且重建的图像质量差  
但运算速度快

**卷积反投影法：**无内插，精度高，图像质量好，很实用。





## ❖ 级数展开法

$$y_i = \sum_{j=1}^N x_j a_{ij} \quad i=1 \dots M$$

**N**: 图像像素数, **M**: 射线总数,  $x_j$ : 第j个像素的射线吸收系数,  $a_{ij}$ : 第i条射线与第j个像素相交长度

写成矩阵形式:  $y = Ax$ , 用投影迭代法求x

应用: 比较灵活, 计算量大, 图像质量、精度都不高