

# 第五章：假设检验

主讲：金百锁

---

## 第五章：假设检验

5.2	一样本和两样本总体参数检验 . . . . .	1
5.2.1	一样本正态总体参数检验 . . . . .	1
5.2.2	两样本正态总体的情形 . . . . .	13
5.2.3	成对数据 . . . . .	18
5.2.4	0-1 分布中未知参数 $p$ 的假设检验 . .	19
5.2.5	置信区间和假设检验之间的关系 . . . .	21

---

## 5.2 一样本和两样本总体参数检验

本节介绍最基本的假设检验问题：一样本和两样本正态总体的有关均值和方差的检验，简单的大样本检验 (0-1 分布参数的假设检验)。

### 5.2.1 一样本正态总体参数检验

一般地, 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $-\infty < \mu < \infty$ ,  $\sigma^2 > 0$ ;  $X_1, \dots, X_n$  是取自总体  $X$  的一个样本. 取显著性水平为  $\alpha$ . 则可能考虑的参数有均值  $\mu$  和方差  $\sigma^2$ :

#### (1) 方差已知时均值的检验

先考虑双侧假设, 即要检验

$$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

---

由于  $\mu$  的极大似然估计为  $\bar{X}$ , 取“标准化”后的**检验统计量**

$$Z = Z(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}$$

注意到当  $H_0$  成立时,  $U \sim N(0, 1)$ ,  $|Z|$  应该较小, 反之当  $|U|$  的观测值  $z(x_1, \dots, x_n)$  较大时, 不利于零假设  $H_0$  应该拒绝之. 所以选拒绝域形如

$$\{|Z| > \tau\}.$$

要求显著性水平为  $\alpha$ , 即

$$P_{H_0}(|Z| > \tau) = \alpha,$$

解得  $\tau = z_{\alpha/2}$ . 于是检验的拒绝域为

$$\{|Z| > u_{\alpha/2}\}.$$

即当观测值  $(x_1, \dots, x_n)$  满足不等式

$$\sqrt{n} \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} > u_{\alpha/2}$$

---

时拒绝  $H_0$ .

类似地, 检验右侧假设

$$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0 \quad \text{或者} \quad H_0 : \mu \leq \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$$

仍然用统计量  $Z$ , 由于  $Z$  大时不利于  $H_0$ , 取拒绝域为

$$\{Z > u_\alpha\}.$$

而检验另一个左侧假设

$$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu < \mu_0 \quad \text{或者} \quad H_0 : \mu \geq \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu < \mu_0$$

的拒绝域为

$$\{Z < -u_\alpha\}.$$

虽然我们取的临界值只考虑使检验在  $\mu = \mu_0$  处的犯 I 类错误的概率为  $\alpha$ , 从检验的拒绝域的形状上可直接看出来在零假设下  $\mu \leq \mu_0$  (或  $\mu \geq \mu_0$ ) 时犯第 I 类错误的概率恒小于或等于  $\alpha$ .

---

以上三个检验统称为 **Z 检验**.

随机地从一批铁钉中抽取 16 枚, 测得它们的长度 (单位: 厘米)  
如下:

[↑Example](#)

2.942371	2.988662	3.106234	3.109316	3.118427	3.132254
3.140042	3.170188	2.902562	3.128003	3.146441	2.978240
3.103600	3.003394	3.044384	2.849916		

已知铁钉长度服从标准差为 0.1 的正态分布, 在显著性水平  $\alpha = 0.01$  下, 能否认为这批铁钉的平均长度为 3 厘米? 如显著性水平为  $\alpha = 0.05$  呢?

[↓Example](#)

---

解：这是方差已知时关于均值  $\mu$  的假设检验问题，

$$H_0 : \mu = 3 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq 3.$$

取检验统计量为  $Z = \sqrt{n}(\bar{X} - 3)/0.1$ ，检验的拒绝域为  $|Z| > u_{\alpha/2}$ 。由样本算得检验统计量的值为  $z \approx 2.16$ ，如显著性水平为 0.01，则临界值为  $u_{0.005} \approx 2.58$ ，跟检验统计量的值比较发现不能拒绝零假设，即不能推翻铁钉平均长度为 3 厘米的假设；而如果显著性水平为 0.05 时，临界值为  $u_{0.025} = 1.96$ ，此时可以拒绝零假设，认为铁钉平均长度不等于 3 厘米。这个例子说明结论可能跟显著性水平的选择有关：**显著性水平越小，零假设被保护得越好从而更不容易被拒绝。**

对正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  (其中  $\sigma^2$  已知) 下的假设检验问题  $H_0 : \mu \geq \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu < \mu_0$ ，如果我们还要求“犯第二类错误的概率要小于指定的  $\beta > 0$ ”该怎么办？

[↑Example](#)

[↓Example](#)

---

解：根据功效函数和两类错误的定义，知道等价的要求

$$\beta_\phi(\mu) \geq 1 - \beta, \quad \mu < \mu_0 \quad (5.1)$$

但是，当  $\mu < \mu_0$  但  $\mu$  接近  $\mu_0$  时， $\beta_\phi(\mu) \approx \alpha$ ，而因为  $\alpha, \beta$  一般都很小，因此一般有  $\alpha < 1 - \beta$ ，这就看出要求 (5.1) 无法达到。我们只能放松一些，要求对某个指定的  $\mu_1 < \mu_0$ ，有

$$\beta_\phi(\mu) \geq 1 - \beta, \quad \mu < \mu_1 \quad (5.2)$$

因为  $\beta_\phi(\mu)$  为  $\mu$  的减函数，因此等价于要求

$$\beta_\phi(\mu_1) \geq 1 - \beta$$

此即

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu)}{\sigma} - u_\alpha\right) \geq 1 - \beta$$

等价的得到

$$n \geq \sigma^2(u_\alpha + u_\beta)^2 / (\mu_0 - \mu)^2$$

也即要满足题目中的要求，样本大小至少要达到上式右边那么大。□



---

## (2) 方差未知时均值的检验

考虑检验

$$H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow \mu \neq \mu_0,$$

由于方差未知, 可以在将  $\bar{X}$  标准化的过程中用样本方差  $S^2$  代替总体方差  $\sigma^2$ , 得检验统计量

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}.$$

由于在  $H_0$  下,  $T \sim t_{n-1}$ , 于是拒绝域取成

$$\{|T| > t_{n-1}(\alpha/2)\}.$$

此检验称为 **t 检验**.

类似地可以得到另外两个单侧假设的检验拒绝域, 见表 7.2.1 中.

---

(例5.2.1续) 设方差未知, 则在水平 0.01 和 0.05 下能否认为铁钉平均长度为 3 厘米?

↑Example

↓Example

解: 这是方差未知时关于均值  $\mu$  的假设检验问题,

$$H_0 : \mu = 3 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq 3$$

取检验统计量为  $T = \sqrt{n}(\bar{X} - 3)/S$ , 检验的拒绝域为  $|T| > t_{n-1}(\alpha/2)$ . 由样本算得检验统计量的值约为 2.21, 与显著性水平 0.01 对应临界值  $t_{15}(0.005) \approx 2.95$  比较, 不能拒绝零假设, 而与显著性水平 0.05 对应临界值  $t_{15}(0.025) \approx 2.13$  比较, 可以拒绝零假设, 即在显著性水平 0.01 下不能拒绝铁钉平均长度为 3 厘米的假定, 但在显著性水平 0.05 下可以认为铁钉平均长度不等于 3 厘米, 此结论与方差已知情形一致.

### (3) 方差的检验

考虑假设检验问题

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

对均值已知的情形, 由  $\sigma^2$  的极大似然估计

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

可以构造检验统计量

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}.$$

在  $H_0$  下,  $\chi^2 \sim \chi_n^2$ ,  $\chi^2$  的平均值为  $n$ , 而在  $H_1$  下,  $\chi^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$  的均值为  $\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} n \neq n$ , 因此当  $\chi^2$  的值过于偏离  $n$  时应该拒绝  $H_0$ , 于是拒绝域取成

$$\{\chi^2 < \chi_n^2(1 - \alpha/2) \text{ 或者 } \chi^2 > \chi_n^2(\alpha/2)\}.$$

---

对均值未知的情形, 构造检验统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2},$$

其中  $S^2$  为样本方差. 在  $H_0$  下,  $\chi^2 \sim \chi_{n-1}^2$ , 拒绝域取成

$$\{\chi^2 < \chi_{n-1}^2(1 - \alpha/2) \text{ 或者 } \chi^2 > \chi_{n-1}^2(\alpha/2)\}.$$

对于单侧假设, 可以类似得到检验的拒绝域, 参看下表 7.2.1.  
上述检验称为  $\chi^2$  检验.

表 7.2.1: 一样本正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ .

检验对象	检验统计量	分布	拒绝域 <sup>†</sup>
$\mu$ ( $\sigma^2$ 已知)	$Z = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma$	$N(0, 1)$	$\begin{cases}  Z  > u_{\alpha/2} \\ Z > u_{\alpha} \\ Z < -u_{\alpha} \end{cases}$
$\mu$ ( $\sigma^2$ 未知)	$T = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/S$	$t_{n-1}$	$\begin{cases}  T  > t_{n-1}(\alpha/2) \\ T > t_{n-1}(\alpha) \\ T < -t_{n-1}(\alpha) \end{cases}$
$\sigma^2$ ( $\mu$ 已知)	$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$	$\chi_n^2$	$\begin{cases} \chi^2 > \chi_n^2(\alpha/2) \text{ 或者 } \chi^2 < \chi_n^2(1 - \alpha/2) \\ \chi^2 > \chi_n^2(\alpha) \\ \chi^2 < \chi_n^2(1 - \alpha) \end{cases}$
$\sigma^2$ ( $\mu$ 未知)	$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$	$\chi_{n-1}^2$	$\begin{cases} \chi^2 > \chi_{n-1}^2(\alpha/2) \text{ 或者 } \chi^2 < \chi_{n-1}^2(1 - \alpha/2) \\ \chi^2 > \chi_{n-1}^2(\alpha) \\ \chi^2 < \chi_{n-1}^2(1 - \alpha) \end{cases}$

†有关均值的检验: 对立假设分别为 $\mu \neq \mu_0$ ,  $\mu > \mu_0$  和 $\mu < \mu_0$ . 有关方差的检验: 对立假设分别为 $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ ,  $\sigma^2 > \sigma_0^2$  和 $\sigma^2 < \sigma_0^2$ .

---

(例5.2.1续) 在水平 0.1 下能否认为铁钉的标准差大于 0.1 厘米?

↑Example

↓Example

解: 这是均值未知时关于方差  $\sigma^2$  的假设检验问题,

$$H_0 : \sigma^2 \leq 0.1^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2 > 0.1^2.$$

取检验统计量为  $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{0.1^2}$ , 检验的拒绝域为  $\{\chi^2 > \chi_{n-1}^2(\alpha)\}$ . 由样本算得检验统计量的值  $\chi^2 \approx 14.32$ , 与显著性水平 0.2 对应临界值  $\chi_{15}^2(0.1) \approx 22.31$  比较, 不能拒绝零假设, 即在显著性水平 0.1 下可以认为铁钉的标准差小于 0.1.

## 5.2.2 两样本正态总体的情形

设总体  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $-\infty < \mu_1, \mu_2 < \infty$ ,  $\sigma_1^2, \sigma_2^2 > 0$ ;  $X_1, \dots, X_n$  是从总体  $X$  中抽取的一个样本,  $Y_1, \dots, Y_n$  是从总体  $Y$  中抽取的一个样本. 设来自不同总体的样本相互独立. 下面设考虑有关均值差  $\mu_1 - \mu_2$  和方差比  $\sigma_1^2/\sigma_2^2$  的检验. 取显著性水平为  $\alpha$ .

甲乙两个农业试验区种植玉米, 除了甲区施磷肥外, 其他试验条件都相同, 把两个试验区分别均分成 10 个和 9 个小区统计产量 (单位: 千克), 得数据如下

甲区 62 57 65 60 63 58 57 60 60 58

乙区 50 59 56 57 58 57 56 55 57

假定甲乙两区中每小块的玉米产量分别服从  $N(\mu_1, \sigma^2)$ ,  $N(\mu_2, \sigma^2)$ , 其中  $\mu_1, \mu_2, \sigma^2$  未知. 试问在显著性水平  $\alpha = 0.1$  下磷肥对玉米的产量是否有效?

↑Example

↓Example

---

**解：**磷肥对玉米产量有效果等价于  $\mu_1 > \mu_2$ , 故将其设为对立假设, 假设检验问题是

$$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2 = 0 \leftrightarrow H_1 : \mu_1 > \mu_2.$$

构造基于  $\mu_1 - \mu_2$  的极大似然估计  $\bar{X} - \bar{Y}$  的检验统计量

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}.$$

当  $H_0$  成立时,  $T \sim t_{m+n-2}$ , 于是拒绝域为

$$\{T > t_{m+n-2}(\alpha)\}.$$

由所得数据算得检验统计量  $T$  的观测值为

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} = 3.23.$$



由  $\alpha = 0.1$  得临界值为  $t_{m+n-2}(\alpha/2) = t_{17}(0.1) \approx 1.33 < 3.23$ , 因此拒绝  $H_0$ , 即可以在显著性水平 0.1 下认为磷肥对玉米的产量有显著性影响.

在例5.2.2中假定了两个正态总体的方差是相等的, 即  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ . 现在我们根据样本来检验这个方差齐性的假设, 即要检验

↑Example

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \leftrightarrow H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1.$$

↓Example

解: 因为  $\sigma_1^2$  和  $\sigma_2^2$  的极大似然估计分别是

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2, \hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2.$$

---

在  $\theta = \sigma_1^2/\sigma_2^2$  的极大似然估计  $\hat{\theta} = \hat{\sigma}_1^2/\hat{\sigma}_2^2$  的基础上可以构造检验统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{(m-1)\hat{\sigma}_1^2/m}{(n-1)\hat{\sigma}_2^2/n}.$$

注意到  $F$  中的分子和分母分别是  $X$  和  $Y$  的样本方差. 当零假设成立时,  $F \sim F_{m-1, n-1}$ . 于是拒绝域为

$$\{F < F_{m-1, n-1}(\alpha/2) \quad \text{或} \quad F > F_{m-1, n-1}(1 - \alpha/2)\}.$$

由数据算得检验统计量  $F$  的观测值  $f = 1.19$ , 如果取显著性水平  $\alpha = 0.2$ , 那么临界值为  $F_{9,8}(0.1) = 2.44$ ,  $F_{9,8}(0.9) = 1/F_{8,9}(0.1) = 0.41$  (如果  $X \sim F_{m,n}$ , 则  $1/X \sim F_{n,m}$ ). 易见  $0.41 < 1.19 < 2.44$ , 因此不能拒绝  $H_0$ , 即在显著性水平 0.2 下可以认为上例中所作的方差齐性假定是合理的.

表 7.2.2: 两样本正态总体的假设检验

检验对象	检验统计量	分布	拒绝域 <sup>†</sup>
均值(方差已知)	$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}}$	$N(0, 1)$	$\begin{cases}  Z  > u(\alpha/2) \\ Z > u(\alpha) \\ Z < -u(\alpha) \end{cases}$
均值(方差未知) <sup>‡</sup>	$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$	$t_{m+n-2}$	$\begin{cases}  T  > t_{m+n-2}(\alpha/2) \\ T > t_{m+n-2}(\alpha) \\ T < -t_{m+n-2}(\alpha) \end{cases}$
方差(均值已知)	$F = \frac{\sum_{i=1}^m (X_i - \mu_1)^2 / m}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_2)^2 / n}$	$F_{m,n}$	$\begin{cases} F > F_{m,n}(\alpha/2) \text{ 或 } F < \frac{1}{F_{n,m}(\alpha/2)} \\ F > F_{m,n}(\alpha) \\ F < \frac{1}{F_{n,m}(\alpha)} \end{cases}$
方差(均值未知)	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F_{m-1,n-1}$	$\begin{cases} F > F_{m-1,n-1}(\alpha/2) \text{ 或 } F < \frac{1}{F_{n-1,m-1}(\alpha/2)} \\ F > F_{m-1,n-1}(\alpha) \\ F < \frac{1}{F_{n-1,m-1}(\alpha)} \end{cases}$

<sup>†</sup>有关均值的检验: 对立假设分别为 $\mu_1 \neq \mu_2$ ,  $\mu_1 > \mu_2$  和  $\mu_1 < \mu_2$ . 有关方差的检验: 对立假设分别为 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ,  $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$  和  $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ .

<sup>‡</sup>假定方差相等

---

### 5.2.3 成对数据

在上述两样本正态总体的假设检验中, 要求两个样本是独立的, 但是没有要求样本量相等. 有一类数据叫做**成对数据**

$$\{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$$

- 数据对之间通常可以认为是独立的
- 数据对内两个观测通常不独立

比如一个病人在用药前后测得的指标分别为  $X$  和  $Y$

当数据是**连续数据**时候, 通常对数据对内取差, 构造一个新的总体  $Z = Y - X$  及样本  $Z_1 = X_1 - Y_1, \dots, Z_n = X_n - Y_n$ , 通常假设  $Z$  服从正态, 则相应的假设检验转为一样本正态检验问题!

---

### 5.2.4 0-1 分布中未知参数 $p$ 的假设检验

产品验收时, 需要检验不合格率是否小于某给定的一个数.

设  $(X_1, \dots, X_n)$  是取自总体  $X$  的一个样本, 该总体服从 0-1 分布, 取 1 的概率为  $p$ . 常见的假设有三种:

(1)  $H_0 : p = p_0 \leftrightarrow H_1 : p \neq p_0$ ;

(2)  $H_0 : p = p_0 \leftrightarrow H_1 : p > p_0$  或  $H_0 : p \leq p_0 \leftrightarrow H_1 : p > p_0$ ;

(3)  $H_0 : p = p_0 \leftrightarrow H_1 : p < p_0$  或  $H_0 : p \geq p_0 \leftrightarrow H_1 : p < p_0$ .

假定样本量  $n$  较大, 取显著性水平为  $\alpha$ . 由于  $p$  的极大似然估计为  $\bar{X}$ , 取“标准化”过的检验统计量

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}},$$

其中  $p_0$  和  $p_0(1 - p_0)/n$  分别为  $\bar{X}$  在零假设  $p = p_0$  下的期望和方差, 从而当  $H_0$  成立时, 由中心极限定理近似地有  $T \sim N(0, 1)$ . 于是上述三种检验的拒绝域分别为

$$\{|T| > u_{\alpha/2}, \quad \{T > u_{\alpha}\} \quad \text{和} \quad \{T < -u_{\alpha}\}$$

↑Example

某厂产品不合格率通常为 0.5. 厂方希望知道原料产地的改变是否对产品的质量发生显著的影响. 现在随机地从原料产地改变后的产品中抽取了 80 个样品进行检验, 发现有 5 个是不合格品. 试问, 在显著性水平 0.1 下, 厂方由此可以得出什么结论?

↓Example

解: 总体  $X \sim B(1, p)$ , 其中  $p$  未知. 在显著性水平  $\alpha = 0.1$  下, 产品质量无变化等价于  $p = 0.05$ , 故我们要检验

$$H_0 : p = 0.05 \leftrightarrow H_1 : p \neq 0.05.$$

由于  $\bar{x} = 5/80 = 0.0625$ , 因此检验统计量  $T$  的观测值

$$t = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} = 0.513.$$

由  $\alpha = 0.10$  得临界值  $u_{0.05} = 1.645$ . 易见,  $|t| < 1.645$ , 因此不能拒

---

绝  $H_0$ , 即在近似显著性水平 0.10 下可以认为原料产地的改变对该厂产品的质量没有发生显著的影响.

### 5.2.5 置信区间和假设检验之间的关系

置信区间和假设检验之间有着明显的联系。我们首先考虑置信区间和双边检验之间的关系。设  $X_1, \dots, X_n$  为从总体  $F(x; \theta)$  中抽取的样本, 参数  $\theta$  的  $1 - \alpha$  置信区间为  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ , 即

$$P(\underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}) \geq 1 - \alpha$$

而对假设  $H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \neq \theta_0$ , 在原假设之下, 有

$$P(\underline{\theta} \leq \theta_0 \leq \bar{\theta}) \geq 1 - \alpha$$

等价于

$$P(\theta_0 > \bar{\theta}) + P(\theta_0 < \underline{\theta}) \leq \alpha$$

---

按显著性检验的定义，即得其检验为

$\phi$  : 当  $\underline{\theta} \leq \theta_0 \leq \bar{\theta}$  时，接受  $H_0$ , 不然就拒绝

反过来讲，如果假设  $H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \neq \theta_0$  检验的接受域有形式

$$\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n) \leq \theta_0 \leq \bar{\theta}(x_1, \dots, x_n)$$

即有

$$P(\underline{\theta} \leq \theta_0 \leq \bar{\theta}) \geq 1 - \alpha$$

由  $\theta_0$  的任意性，知对任意的  $\theta$ ，有

$$P(\underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}) \geq 1 - \alpha$$

即：为求出参数  $\theta$  的  $1 - \alpha$  置信区间，我们可以先找出  $\theta$  的双边检验  $H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \neq \theta_0$  的检验函数，则其接受域就是参数  $\theta$  的  $1 - \alpha$  置信区间。反过来，为求假设  $H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \neq \theta_0$  的检



---

验，我们可以先求出参数  $\theta$  的  $1 - \alpha$  置信区间，则就是该假设的接受域。

类似地，置信水平为  $1 - \alpha$  的单侧置信区间  $(\underline{\theta}, \infty)$  (或者  $(-\infty, \bar{\theta})$ ) 与显著性水平为  $\alpha$  的右 (或者左) 边检验问题  $H_0 : \theta \leq \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta > \theta_0$  (或者  $H_0 : \theta \geq \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta < \theta_0$ )，也有类似的对应关系。