



## HS直接证明

$$(1)(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \quad (L1)$$

$$(2)(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \quad (L2)$$

$$(3)((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))) \quad (L1)$$

$$(4)(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))) \quad MP(2)(3)$$

$$(5)((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))) \rightarrow (((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))) \quad (L2)$$

$$(6)((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))) \quad MP(4)(5)$$

$$(7)(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \quad MP(1)(6)$$

$$(8)((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))) \rightarrow (((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))) \quad (L2)$$

$$(9)((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) \quad MP(7)(8)$$

$$(10)((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q))) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) \quad (L1)$$

$$(11)(p \rightarrow q) \rightarrow (((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))) \quad MP(9)(10)$$

$$(12)((p \rightarrow q) \rightarrow (((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)))) \rightarrow (((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q))) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)))) \quad (L2)$$

$$(13)((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q))) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))) \quad MP(11)(12)$$

$$(14)(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) \quad (L1)$$

$$(15)(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) \quad MP(13)(14)$$

## 双否律的直接证明

$$(1) \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow \neg \neg p) \quad (L1)$$

$$(2) (\neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow \neg \neg p)) \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg p)) \quad (L2)$$

$$(3) (\neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \quad MP(1)(2)$$

$$(4) \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \quad (L1)$$

$$(5) \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p \quad MP(3)(4)$$

$$(6) \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \quad (L1)$$

$$(7) (\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \quad (L3)$$

$$(8) ((\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p))) \quad (L1)$$

$$(9) \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \quad MP(7)(8)$$

$$(10) (\neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p))) \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p))) \quad (L2)$$

$$(11) (\neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \quad MP(9)(10)$$

$$(12) \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \quad (L1)$$

$$(13) \neg \neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \quad MP(11)(12)$$

$$(14) (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p) \quad (L3)$$

$$(15) ((\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p))) \quad (L1)$$

$$(16) \neg \neg p \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p)) \quad MP(14)(15)$$

$$(17) (\neg \neg p \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p))) \quad (L2)$$

$$(18) (\neg \neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p)) \quad MP(16)(17)$$

$$(19) \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p) \quad MP(13)(18)$$

$$(20) (\neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p)) \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p)) \quad (L2)$$

$$(21) (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p) \quad MP(19)(20)$$

$$(22) \neg \neg p \rightarrow p \quad MP(5)(21)$$

## 第二双否律的直接证明

- (1)  $\neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow \neg \neg \neg p)$  (L1)
- (2)  $(\neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow ((\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)$  (L2)
- (3)  $(\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)$  MP(1)(2)
- (4)  $\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)$  (L1)
- (5)  $\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p$  MP(3)(4)
- (6)  $\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)$  (L1)
- (7)  $(\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p)$  (L3)
- (8)  $((\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p)))$  (L1)
- (9)  $\neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p))$  MP(7)(8)
- (10)  $(\neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p))) \rightarrow ((\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p)))$  (L2)
- (11)  $(\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p))$  MP(9)(10)
- (12)  $\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)$  (L1)
- (13)  $\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p)$  MP(11)(12)
- (14)  $(\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p)$  (L3)
- (15)  $((\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p)))$  (L1)
- (16)  $\neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p))$  MP(14)(15)
- (17)  $(\neg \neg \neg p \rightarrow ((\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p))) \rightarrow ((\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p)))$  (L2)
- (18)  $(\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p)) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p))$  MP(16)(17)
- (19)  $\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p)$  MP(13)(18)
- (20)  $(\neg \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p))$  (L2)
- (21)  $(\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p)$  MP(19)(20)
- (22)  $\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p$  MP(5)(21)
- (23)  $(\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg \neg p)$  (L3)
- (24)  $p \rightarrow \neg \neg p$  MP(22)(23)

