

第4章 图像变换

变换方法:

- 4.1. 傅立叶变换Fourier Transform
- 4. 2. 离散余弦变换Discrete Cosine Transform
- 4. 3. 沃尔希-哈德玛变换Walsh-Hadamard Transform
- 4. 4.哈尔变换Haar Transform
- 4. 5.斜变换Slant Transform
- 4. 6. 离散K-L变换Discrete Karhunen-Leave Transform
- 4. 7. 奇异值分解SVD变换Singular-Value Decomposition
- 4. 8. 离散小波变换Discrete Wavelet Transform

4.3 Walsh-Hadamard变换

➤ Walsh变换

1. 1D情况下:

$$\text{核函数 } g(x, u) = \frac{1}{N} \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)} \quad N=2^n$$

$b_i(x)$ 是 x 的二进制的第 i 位

Walsh正变换:

$$W(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)}$$

Walsh反变换:

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} W(u) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)}$$

例： 若 $N = 4$ ， 则 $n = 2$, $f(0) = 8, f(1) = 6, f(2) = 3, f(3) = 5$, $f(x)$ 的 Walsh Transform:

$$W(0) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 [f(x) \prod_{i=0}^1 (-1)^{b_i(x)b_{1-i}(0)}]$$

$$= \frac{1}{4} [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)] = 5.5$$

$u \backslash x$	0	1	2	3
0	+	+	+	+
1	+	+	-	-
2	+	-	+	-
3	+	-	-	+

$$W(1) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 [f(x) \prod_{i=0}^1 (-1)^{b_i(x)b_{1-i}(1)}]$$

$$= \frac{1}{4} [f(0) + f(1) - f(2) - f(3)] = 1.5$$

$$W(2) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 [f(x) \prod_{i=0}^1 (-1)^{b_i(x)b_{1-i}(2)}]$$

$$= \frac{1}{4} [f(0) - f(1) + f(2) - f(3)] = 0$$

$$W(3) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 [f(x) \prod_{i=0}^1 (-1)^{b_i(x)b_{1-i}(3)}] = \frac{1}{4} [f(0) - f(1) - f(2) + f(3)] = 1$$

2. 2D情况下:

Walsh正变换:

$$W(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u) + b_i(y)b_{n-1-i}(v)]}$$

Walsh反变换:

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} W(u, v) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u) + b_i(y)b_{n-1-i}(v)]}$$

N=4时:

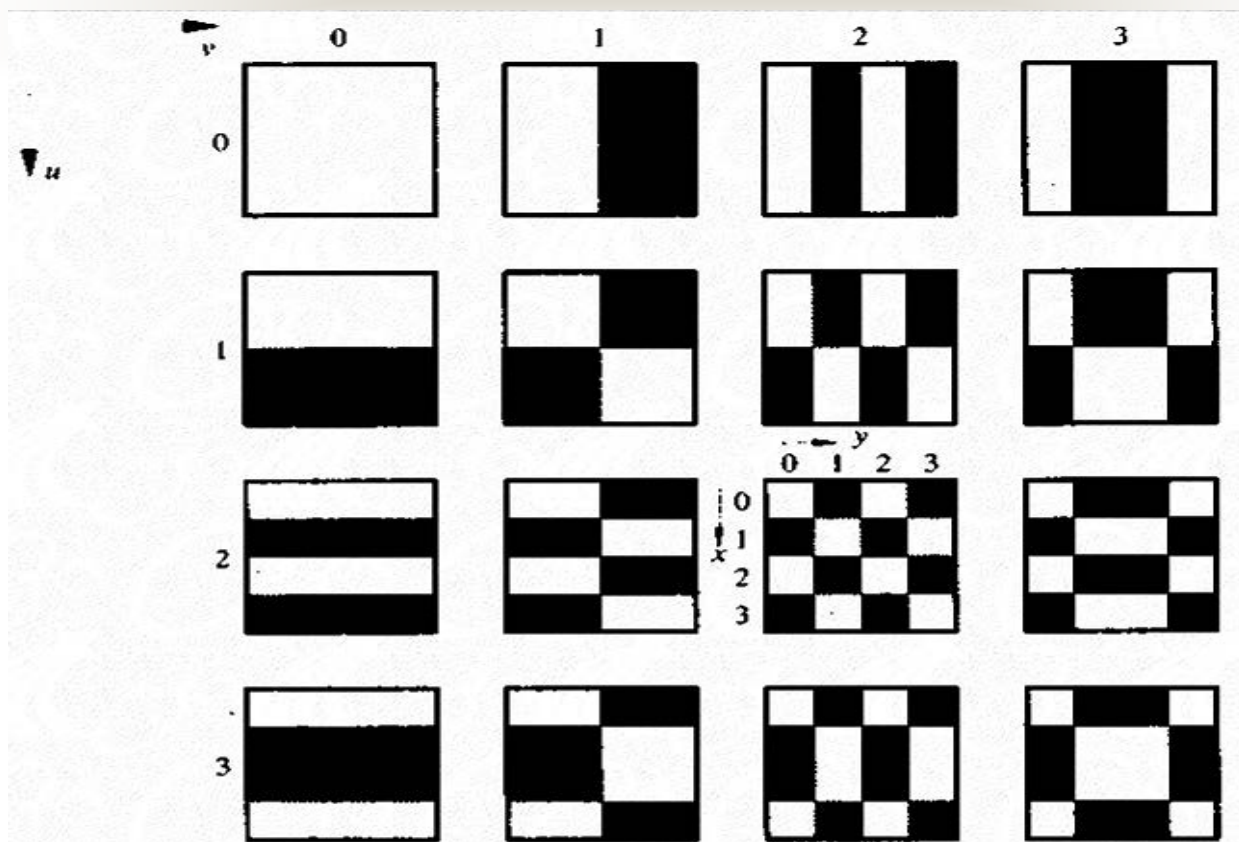


图 3.4.1 $N=4$ 时沃尔什变换基本函数的图示

说明: WT及其逆WT都可用一维WT连续得到。
FFT的运算过程完全适用于WT, 且WT更简单些, 因为WT项不是指数而是1。

➤ Hadamard变换

1. 1D情况下:

正向变换核: $g(x, u) = \frac{1}{N} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) b_i(u)}$

Hadamard正变换:

$$H(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) b_i(u)}$$

Hadamard反变换:

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} H(u) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) b_i(u)}$$

1D情况下举例:

$$H_8 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

沿Hadamard矩阵的列方向符号变换的次数通常叫做**列率/序率**。—> 递增

1D下排序后变换核:

$$g(x, u) = \frac{1}{N} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) p_i(u)}$$

$$\left. \begin{aligned} p_0(u) &= b_{n-1}(u) \\ p_1(u) &= b_{n-1}(u) + b_{n-2}(u) \\ &\vdots \\ p_{n-1}(u) &= b_1(u) + b_0(u) \end{aligned} \right\}$$

例： 当 $N = 8$ ，下表的整序的Hadamand核值

$u \backslash x$	0	1	2	3	4	5	6	7	次序
0	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0
1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	2
3	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	3
4	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	4
5	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	5
6	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	6
7	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	7

2. 2D情况下:

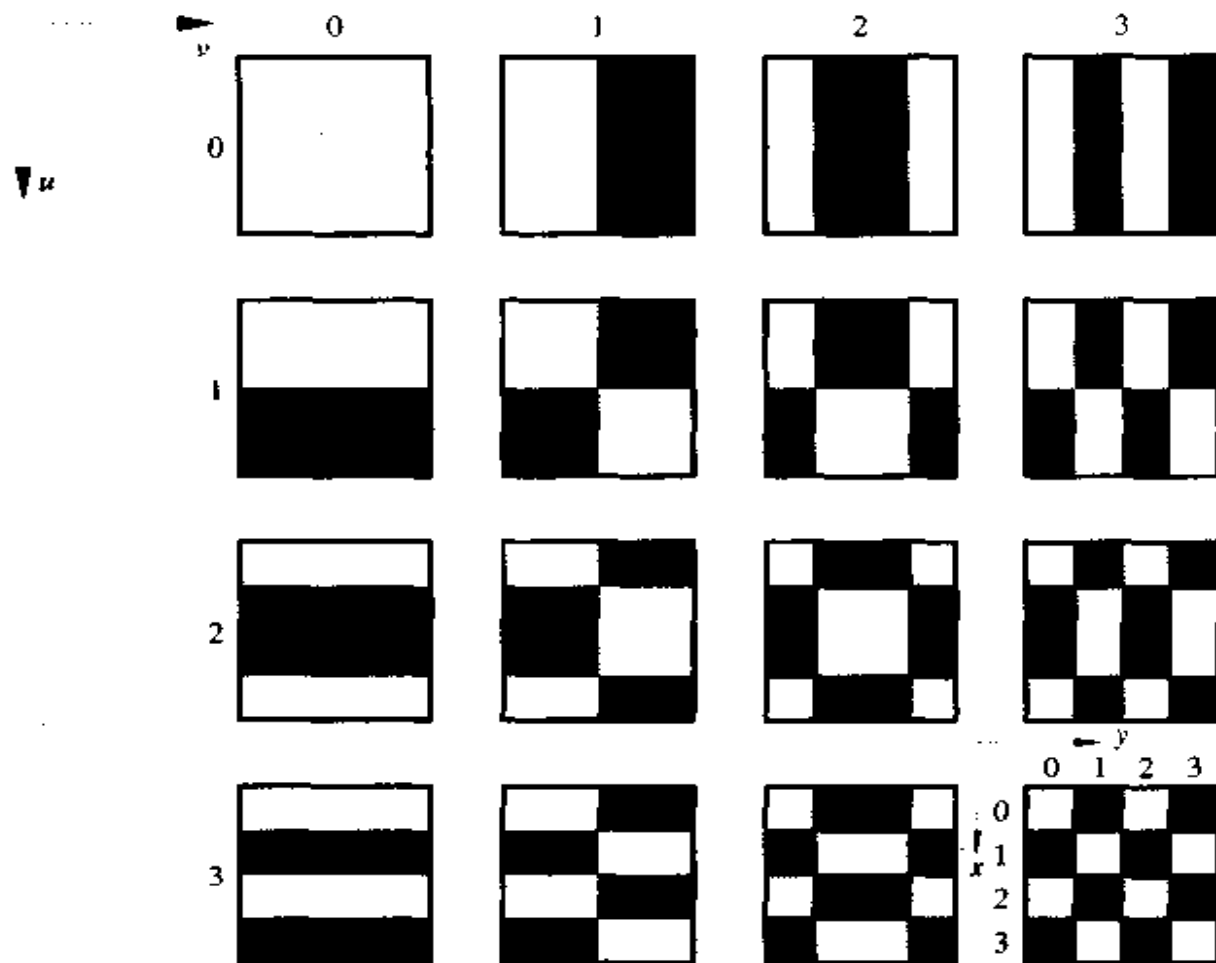
Hadamard正变换:

$$H(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x) b_i(u) + b_i(y) b_i(v)]}$$

Hadamard反变换:

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} H(u, v) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x) b_i(u) + b_i(y) b_i(v)]}$$

2D情况下举例:



$N=4$ 时经过排序的哈达玛变换基本函数的图示

3. Walsh变换与Hadamard变换的比较:

(1)相同点: 当 $N=2^n$ 时, 它们的变换性质完全一样

(2)不同点: 次序不同; 从数学上证明Walsh变换对任意的 N ($N \neq 2^n$)都成立, 而Hadamard变换只有 $N < 200$ 时才成立。

4. Hadamard变换的矩阵形式:

$$1D : N=2 \text{ 时 } H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$N=4 \text{ 时 } H_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix}$$

$$H_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix}$$

$$T=AFA \quad A = \frac{1}{\sqrt{N}} H_N$$

说明:

(1) 整序后的矩阵仍保留正交性质，但是失去了递推的性质，因此，整序应在扩展之后进行。

(2) 递推性质是有实际意义的，它可以扩展变换核矩阵。如，只要计算机存储一个 $N=2$ 的小矩阵，可以用递推式行列 $N=4, \dots$ 变换矩阵。

(3) $H(0,0) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$ 是平均灰度，是Hadamard变换的最大数

(4) 由空域到H域，能量保持守恒。

Hadamard变换矩阵是正交的，所以有：

$$H \cdot H^T = H^T \cdot H = I$$

Hadamard变换核也是可分离及对称的，因此可将二维HT通过运行一维HT来计算。



Walsh 与Hadamard变换核是相同的，但是行列顺序不同。

Walsh 与Hadamard图像变换的特点是做加减法，不必做乘除，这就避免了复杂的乘除运算，使运算的复杂性降低。其缺点是缺乏物理意义和直观解释。

➤ Walsh-Hadamard

令 $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $H_{2n} = \begin{bmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{bmatrix}$, 则, $\frac{1}{\sqrt{2n}} H_{2n}$ 是正交矩阵。

称 $F = \frac{1}{2n} H_{2n} f H_{2n}$ 为 Walsh - Hadamard 变换

$$H_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \end{matrix}$$

4.4 Haar变换

1. 基函数: $h_k(z)$: 其中 $k=0\dots N-1$ $z=0/N, \dots, N-1/N$
 $N=2^n$, k 可以唯一地分解成 $k=2^p+q-1$

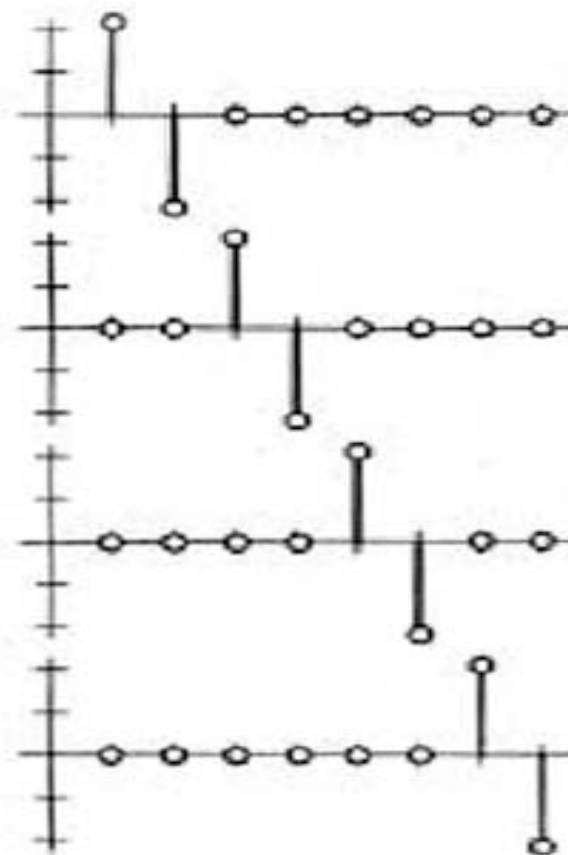
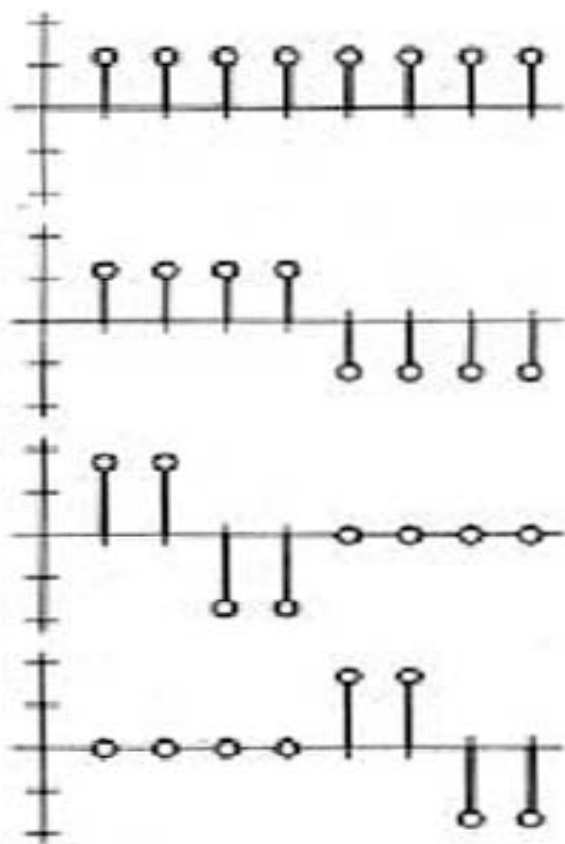
其中: $0 \leq p \leq n-1$,

且 $p=0$ 时, $q=0$ 或 $q=1$; $p \neq 0$ 时, $1 \leq q \leq 2^p$

哈尔函数为:

$$h_0(z) = h_{00}(z) = 1/\sqrt{N} \quad \text{当 } z \in [0, 1]$$
$$h_k(z) = h_{pq}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{p/2} & \frac{q-1}{2^p} \leq z < \frac{q-1/2}{2^p} \\ -2^{p/2} & \frac{q-1/2}{2^p} \leq z < \frac{q}{2^p} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

2. 举例



Haar变换基函数, $N=8$

哈尔基函数的特性：

- (1) 除 $k=0$ 是常数 $\frac{1}{\sqrt{N}}$ 以外，每个基函数都是一个矩形脉冲“对”。
- (2) 尺度位置均变化。
- (3) 阶数 p 决定脉冲宽度与幅值，在区间内具有相同的过零点。
- (4) 次数 q 表示在 p 阶哈尔函数集中，该次数哈尔函数的位移。 $(q-1)$ 表示位移周期数。

离散哈尔变换 (DHT)

与前面讨论的正交变换相似，将哈尔基函数作为变换核，并表示为：

$$\text{har}(k,x)=h_k(x)$$

离散序列 $f(x)$ ， $x=0,1,\dots,N-1$ 的DHT定义为：

$$H(k)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\text{har}(k,x)$$

反变换:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \text{har}^T(k, x)$$

其中: $k=2^p+q-1$

用矩阵表示:

$$\mathbf{H}(k) = [\text{Har}]_N \mathbf{f}(x)$$

$$\mathbf{f}(x) = [\text{Har}]_N^{-1} \mathbf{H}(k) = [\text{Har}]_N^T \mathbf{H}(k)$$

其中: $[\text{har}]_N^{-1} = [\text{har}]_N^T$

$$\mathbf{f}(x) = [f(0), f(1), \dots, f(N-1)]^T$$

$$\mathbf{H}(k) = [H(0), H(1), \dots, H(N-1)]^T$$

当N=8时:

$$[Har]_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

二维DHT:

离散图像 $f(x,y)$, $x,y=0,1,\dots,N-1$, 则二维DHT正反变换为:

$$H(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\text{har}(u,x)\text{har}(v,y)$$

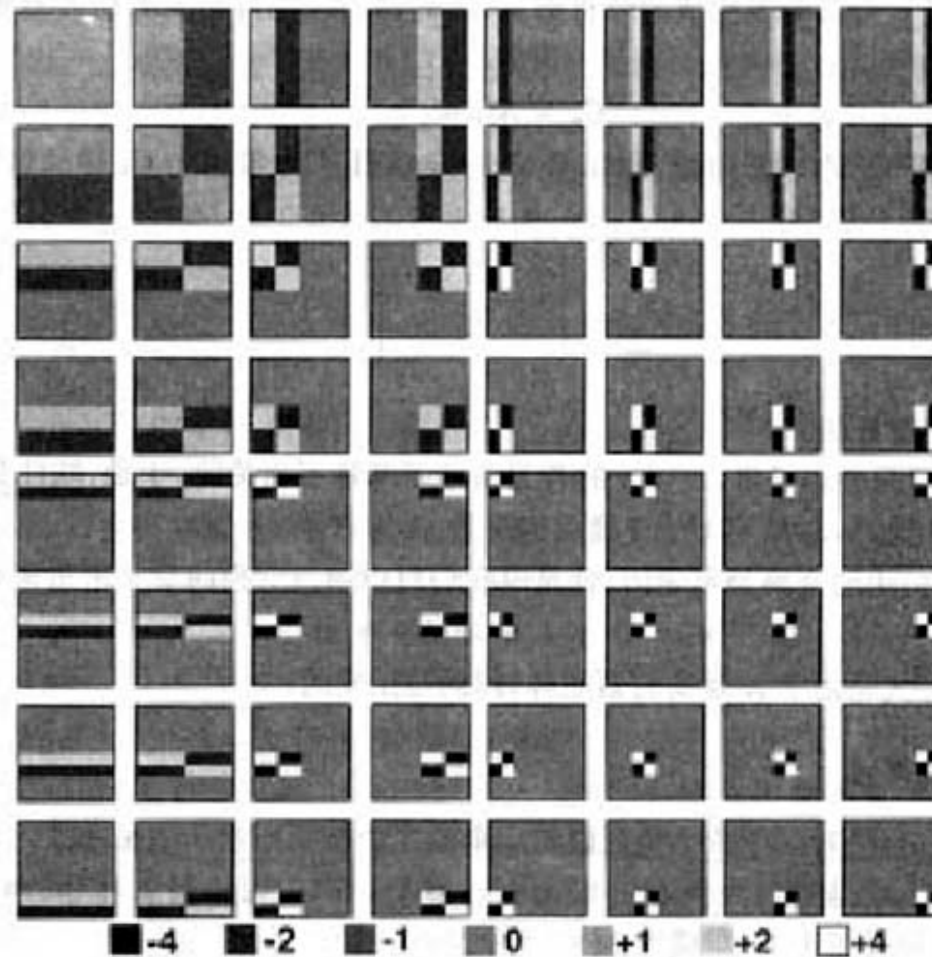
$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}H(u,v)\text{har}^T(u,x)\text{har}^T(v,y)$$

矩阵形式:

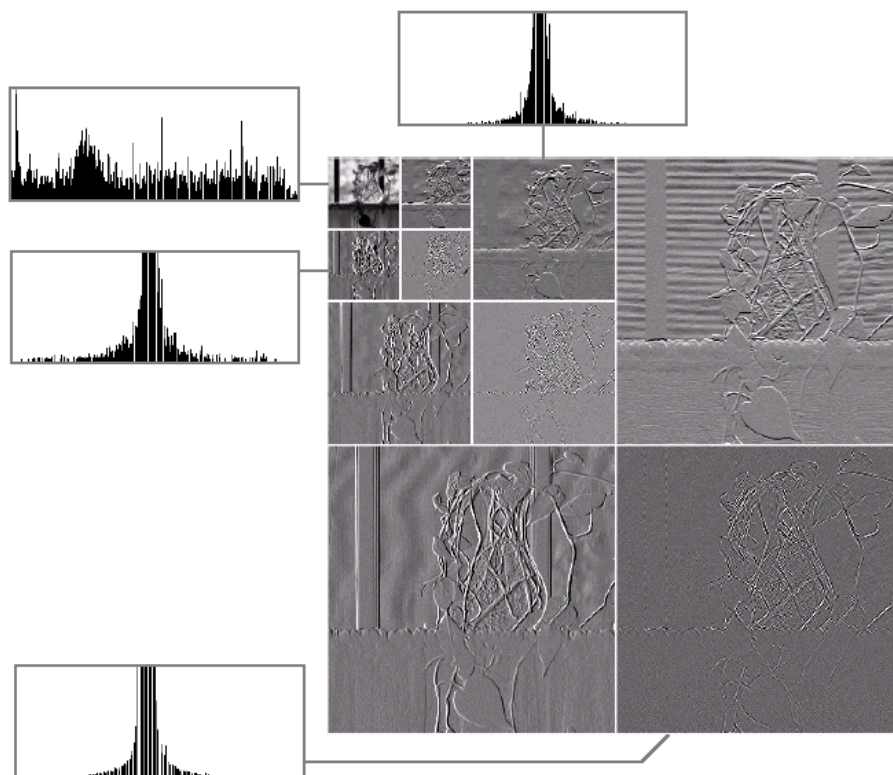
$$[H(u,v)]=[Har]_N[f][Har]_N$$

$$[f]=[Har]_N^T[H(u,v)][Har]_N^T$$

可见DHT正反变换核或矩阵不同!



Haar变换基图像, $N=8$



a
b c d

图a为用Haar小波基对图像进行离散小波变换后的结果及局部灰度直方图。图b-d为从图a得到的三个近似结果（ 64×64 ， 128×128 ， 256×256 ）。原图像为（ 512×512 ）



4.5 Slant变换

斜变换的概念是由Enomoto 与Shibata 首先引入，其基本思路是根据图像信号常表现出某行亮度基本不变或线性渐变这个现象，使变换矩阵也含有反映递增或递减特性的行向量。Pratt等人于1972年给出了一般定义与算法，能方便写出任意N阶（ $N=2^p$ ）的斜矩阵，从而使斜变换能成功地应用在图像编码上。

斜变换是对整序后的Hadamard变换矩阵进行修改得到:

$$H_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a+3b & a+2b & a+b & a \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ A & B & C & D \end{bmatrix}$$

根据归一化正交条件得到:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{3}{\sqrt{5}}, & b &= \frac{2}{\sqrt{5}} \\ A &= -D = \frac{1}{\sqrt{5}}, & B &= -C = -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$S_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

N为偶数时:

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & & \vdots & 1 & 0 & \vdots & \\ & a_N & b_N & \vdots & \mathbf{0} & & -a_N & b_N & \vdots & \mathbf{0} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \mathbf{0} & & \vdots & \mathbf{I}_{(N/2)-2} & \vdots & \mathbf{0} & & \vdots & \mathbf{I}_{(N/2)-2} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 1 & 0 & \vdots & & \vdots & 0 & -1 & \vdots & \\ & -b_N & a_N & \vdots & \mathbf{0} & & b_N & a_N & \vdots & \mathbf{0} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \mathbf{0} & & \vdots & \mathbf{I}_{(N/2)-2} & \vdots & \mathbf{0} & & \vdots & -\mathbf{I}_{(N/2)-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{N/2} & \mathbf{0} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{0} & S_{N/2} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$a_N = \left[\frac{3N^2}{4(N^2 - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$b_N = \left[\frac{N^2 - 4}{4(N^2 - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

I为单位矩阵

4.6 K-L变换

特征矢量作为基函数

1. K-L正变换: M个随机矢量($\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k, \dots, \mathbf{x}^M$), 其中

$$\mathbf{x}^k = [x_1^k, x_2^k, \dots, x_N^k]^T$$

均值矢量: $\mathbf{m}_x = E\{\mathbf{x}\}$

协方差矩阵: $\mathbf{C}_x = E\{(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T\}$

数字特征的计算:

$$m_x \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i$$

$$C_x \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (X_i - m_x)(X_i - m_x)^T \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i X_i^T - m_x m_x^T$$

协方差矩阵 C_x 是实对称矩阵

图像协方差矩阵:

M幅图像, 每幅图像 X_i

定义:

$$X_i = [f_i(0,0) \ f_i(0,1) \ \cdots \ f_i(0,N-1) \ f_i(1,0) \ \cdots \ f_i(1,N-1) \ \cdots \ f_i(N-1,0) \ \cdots \ f_i(N-1,N-1)]^T$$

f_i 表示所研究图像的一个样本, 由此可以计算图像的协方差矩阵。

$$C_X \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (X_i - m_X)(X_i - m_X)^T \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i X_i^T - m_X m_X^T$$

设: e_i 和 λ_i 是协方差矩阵 C_X 对应的特征向量和特征值,

$$C_X e_i = \lambda_i e_i$$

其中特征值按降序排列: $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$

那么, K-L变换核矩阵A的行用 C_X 的特征向量构成:

$$A = \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_N^T \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1N} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{N1} & e_{N2} & \cdots & e_{NN} \end{bmatrix} \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N \end{bmatrix}$$
$$C_X A^T = A^T \lambda$$

得K-L正变换式:

$$Y = A(X - m_X) \quad A \text{ 是正交矩阵}$$

2. K-L变换的特性:

(1) 均值矢量:

$$m_Y = E\{Y\} = E\{A(X - m_X)\} = A \cdot E\{X\} - Am_X = 0$$

(2) Y的协方差矩阵为:

$$\begin{aligned} C_Y &= E\{[Y - m_Y][Y - m_Y]^T\} = E\{YY^T\} \\ &= E\{[AX - Am_X][AX - Am_X]^T\} \\ &= AE\{[X - m_X][X - m_X]^T\}A^T \\ &= AC_XA^T = AA^T\lambda = I\lambda = \lambda \end{aligned}$$

$$C_Y = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N \end{bmatrix}$$

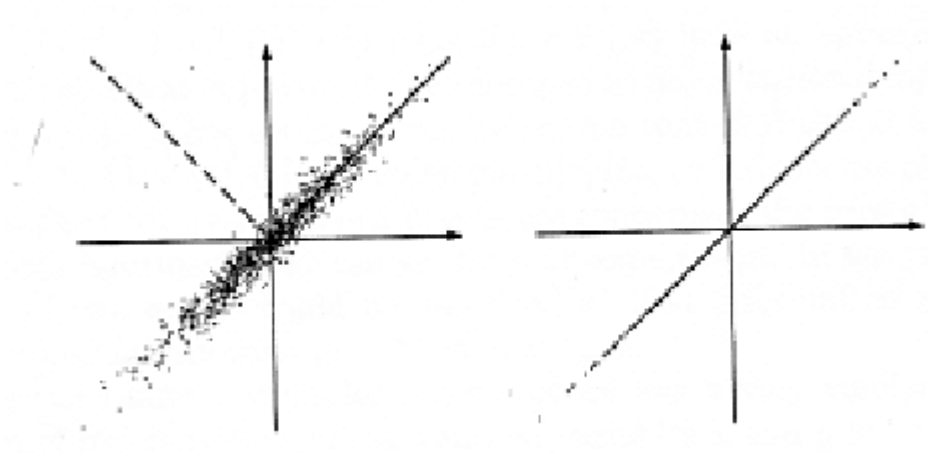
(3) 由Lawley和Maxwell证明:

表明K-L变换具有极好的去相关性。只用特征值就可以表示一幅图像。

K-L变换的计算步骤:

1. 求协方差矩阵 C_x ;
2. 求协方差矩阵的特征值 λ_i ;
3. 求相应的特征向量 e_i
4. 用特征向量 e_i 构成变换矩阵 A , 求 $Y = A(X - m_x)$ 。

3. 举例:



4. K-L反变换:

由:

$$Y = A(X - m_X)$$

得:

$$X = A^T Y + m_X$$

离散K-L变换具有理论意义，实用上的困难是协方差矩阵 C_X 求特征值和特征向量方程的计算量。

对于一阶马尔可夫过程而言，DCT变换的性能十分接近K-L变换，这是经常采用DCT变换的原因。

4.7 奇异值分解(SVD)

任何 $M \times N$ 矩阵 $A (M > N)$ 可以分解成: $A = UDV^T$

U 和 V 是酉矩阵, D 为 $N \times N$ 对角矩阵, 其对角元素称为矩阵 A 的奇异值。

U 的各列是 AA^T 的特征向量, V 的各列是 A^TA 的特征向量

$$\text{则 } D = U^T A V$$

D 至多有 N 个非零元素, D 的对角元素的奇异值出现零或较小的奇异值时, 可忽略, 且引起的误差较小, 可获得较高的压缩比。

若矩阵 A 是 $N \times N$ 矩阵, 则 U 和 V 是正交矩阵; 若矩阵 A 是对称的, 则 $U = V$

举例:

一个对称的5×5图像矩阵A进行SVD变换

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad AA^T = \begin{bmatrix} 6 & 14 & 18 & 14 & 6 \\ 14 & 36 & 48 & 36 & 14 \\ 18 & 48 & 65 & 48 & 18 \\ 14 & 36 & 48 & 36 & 14 \\ 6 & 14 & 18 & 14 & 6 \end{bmatrix} \quad \lambda = \begin{bmatrix} 147.07 \\ 1.872 \\ 0.058 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.186 & 0.638 & 0.241 & -0.695 & -0.695 \\ 0.476 & 0.058 & -0.52 & -0.133 & -0.128 \\ 0.691 & -0.422 & 0.587 & 0 & 0 \\ 0.476 & 0.058 & -0.52 & -0.133 & -0.128 \\ 0.186 & 0.638 & 0.241 & -0.695 & -0.695 \end{bmatrix}$$

$$D = U^T A U = \begin{bmatrix} 12.585 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.142 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.557 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = U D U^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

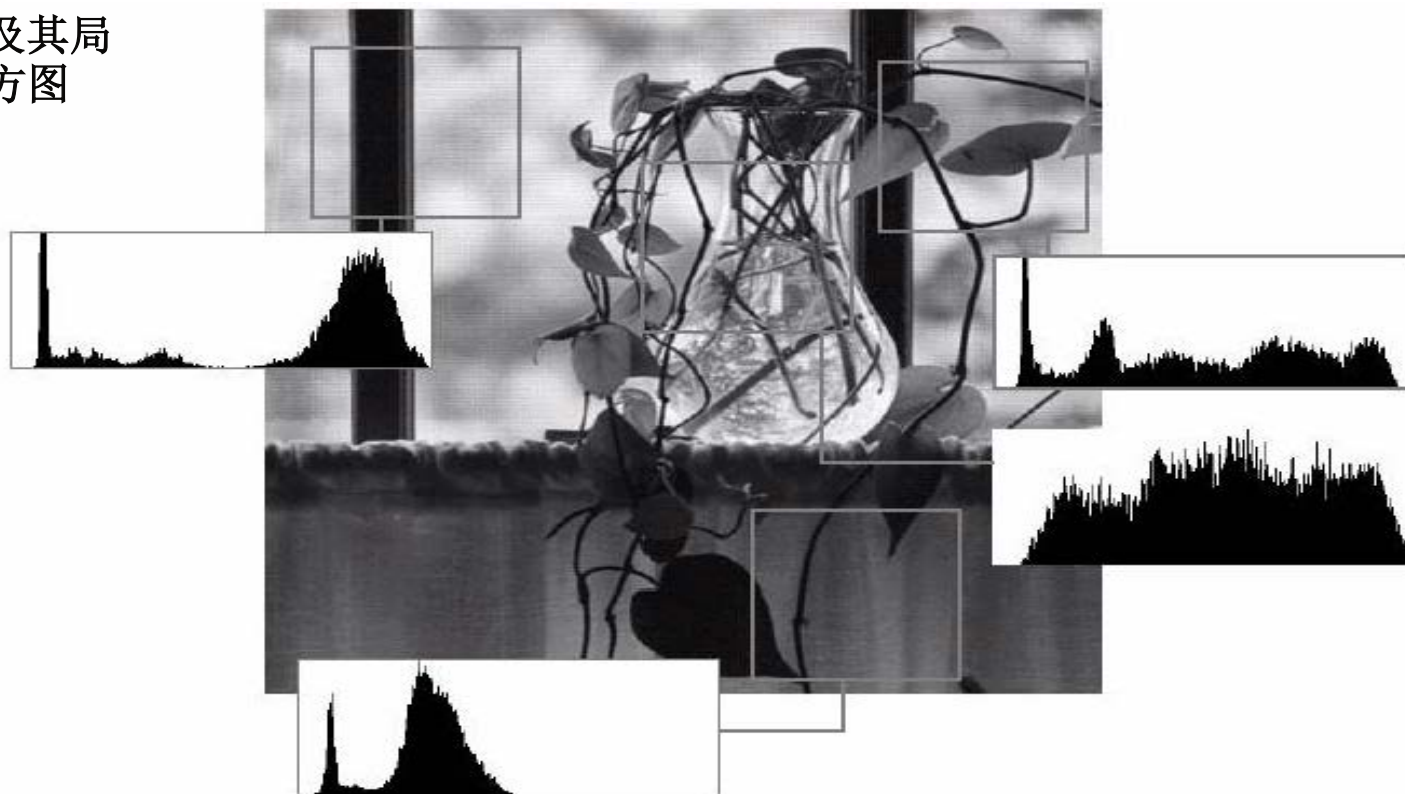
4.8 离散小波变换

小波变换(Wavelet Transform)

小波作为一个新兴的数学分支，起始于I. Daubechies在1978年发表的关于紧支小波基的文章

而后BeylkinR. Coifman 和V. Rokhlin在文章中引入了快速小波变换，使得小波变换得以广泛的应用。I. Daubechies 构造的紧支小波基则成了应用最多的小波基

花瓶图像及其局部灰度直方图



FT不能表达出位置信息

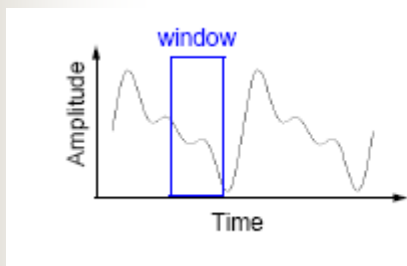
FT不能做局部分析，只适用于平稳信号分析

STFT- Short Time FT

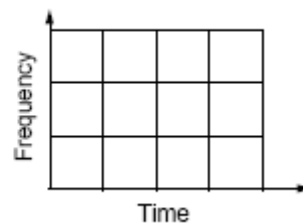
傅立叶变换:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

加窗傅立叶变换:



Short
Time
Fourier
Transform



又称:窗口FT或者Gabor变换

对f(t)加窗口

$$G(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{f(t)g(t-\tau)} e^{-j\omega t} dt$$

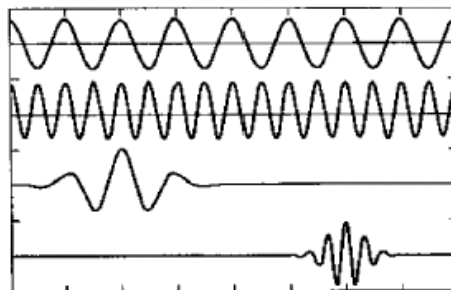
STFT的缺点:

- 窗口大小固定
 - 高频(细节)-需要小窗口
 - 低频(总体)-需要大窗口
- 不适于处理频率成分随时间变化的瞬变信号

小波定义

- 小波可以自动调整窗口大小

小波 (wavelet) 的定义:



小波是一种函数：在有限时间范围内变化，并且平均值为0。

小波的性质：

- (1) 具有有限的持续时间和突变的频率和振幅。
- (2) 在有限时间范围内平均值为0。

小波变换 (wavelet transform, WT)

$$C(\text{scale}, \text{position}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(\text{scale}, \text{position}, t) dt$$

一维连续小波变换

1. 基本小波:

考虑函数空间 $L^2(\mathbf{R})$ ，它是定义在整个实数轴 \mathbf{R} 上的满足要求

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

的可测函数 $f(x)$ 的全体组成的集合。即能量有限的全体信号的空间。直观地说，就是在远离原点的地方衰减得比较快的那些函数或者信号构成的空间。

小波是函数空间 $L^2(\mathbf{R})$ 中满足下述条件的一个函数或者信号 $\psi(x)$

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(S)|^2}{|S|} dS < \infty \quad \text{———小波的容许性条件}$$

$\psi(x)$ 称为一个基本小波（母函数）

2. 连续小波基函数:

$$\Psi_{(a,b)}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

为由小波母函数 $\Psi(x)$ 生成的依赖于参数 (a, b) 的连续小波函数，简称为小波。
其中 a, b 为实数且 $a > 0$ ， a 为尺度（伸缩因子）， b 为沿 x 轴的平移位置（平移因子）

👉 $\Psi(x)$ 均值为0:

由容许性条件保证 $\Psi(0)=0$ ，即 $\int_R \Psi(x)dx = 0$

说明函数 $\Psi(x)$ 有振荡性和迅速衰减性的特点

👉 $\Psi(x)$ 所有的伸缩和平移的均值为0

对于任意的参数对 (a, b) ，显然， $\int_R \Psi_{(a,b)}(x)dx = 0$

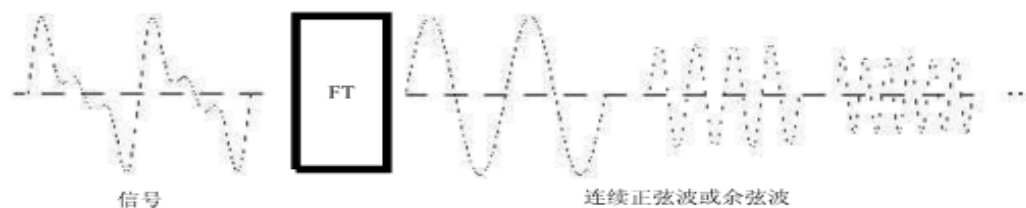
3. 连续小波变换

对于任意的函数或者信号 $f(x)$ ，其小波变换定义为

$$W_f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{(a,b)}(x) dx$$

小波逆变换:

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty W_f(a, b) \psi_{(a,b)}(x) \frac{da db}{a^2}$$

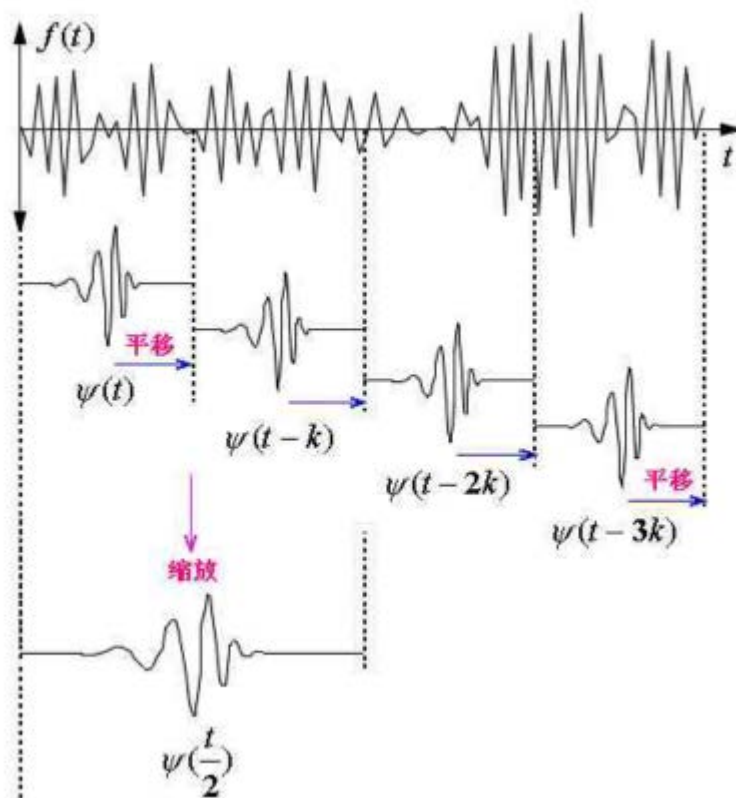


傅立叶分解过程



小波分解过程

- 小波变换将任何信号映射到一个由基本小波伸缩、平移而成的一组小波函数上去，实现信号在不同时刻、不同频带的合理分离，而不丢失任何原始信息。
- 小波变换是多分辨分析也称为多尺度分析



二维离散小波变换

尺度函数可分离： $\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$

$\phi(x)$ 是一维的尺度函数， $\Psi(x)$ 是相应的小波，

三个可分离的方向敏感小波函数： $\psi^H(x, y)$ $\psi^V(x, y)$ $\psi^D(x, y)$

$$\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$$

$$\psi^H(x, y) = \psi(x)\phi(y)$$

$$\psi^V(x, y) = \phi(x)\psi(y)$$

$$\psi^D(x, y) = \psi(x)\psi(y)$$

沿着不同的方向小波函数会有变化， ψ^H 度量沿着列变化（如水平边缘）， ψ^V 度量沿着行变化（如垂直边缘）， ψ^D 则对应于对角线方向。每个小波上的 H 表示水平方向， V 表示垂直方向， D 表示对角线方向。

由尺度和小波函数，定义一个伸缩和平移的基函数：

$$\phi_{j,m,n}(x, y) = 2^{j/2} \phi(2^j x - m, 2^j y - n) = \phi_{j,m}(x) \phi_{j,n}(y)$$

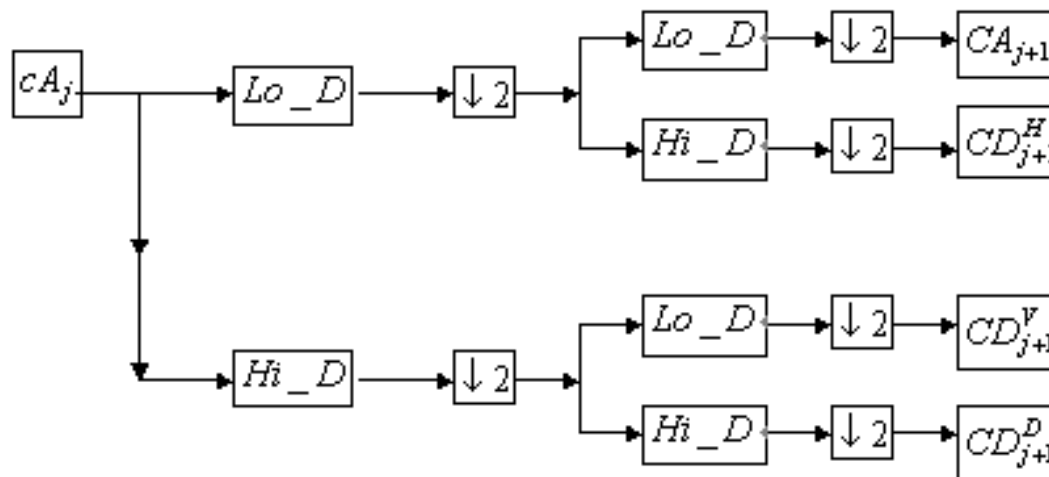
$$\psi^H_{j,m,n}(x, y) = 2^{j/2} \psi^H(2^j x - m, 2^j y - n) = \psi_{j,m}(x) \phi_{j,n}(y)$$

$$\psi^V_{j,m,n}(x, y) = 2^{j/2} \psi^V(2^j x - m, 2^j y - n) = \phi_{j,m}(x) \psi_{j,n}(y)$$

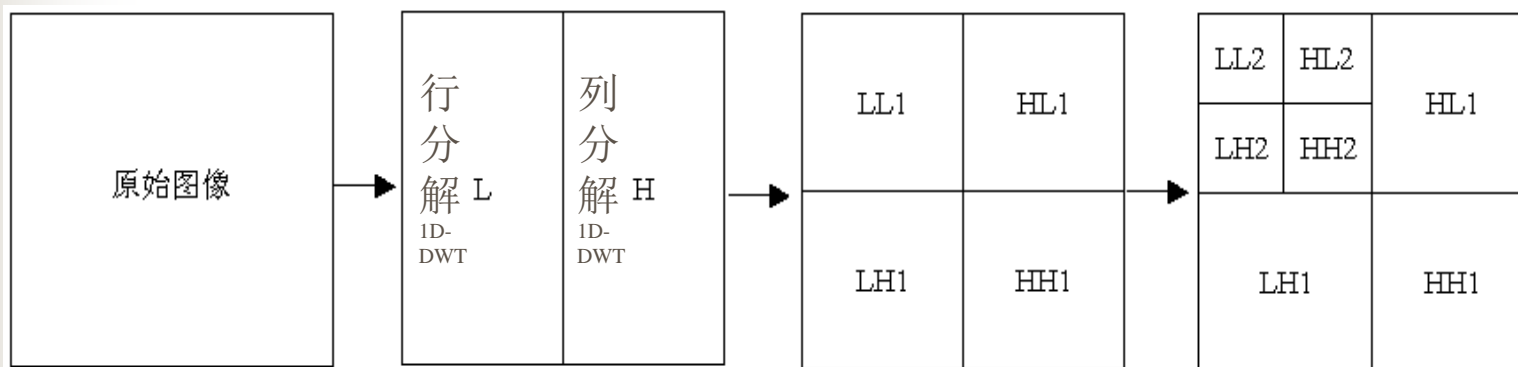
$$\psi^D_{j,m,n}(x, y) = 2^{j/2} \psi^D(2^j x - m, 2^j y - n) = \psi_{j,m}(x) \psi_{j,n}(y)$$

图像的小波分解

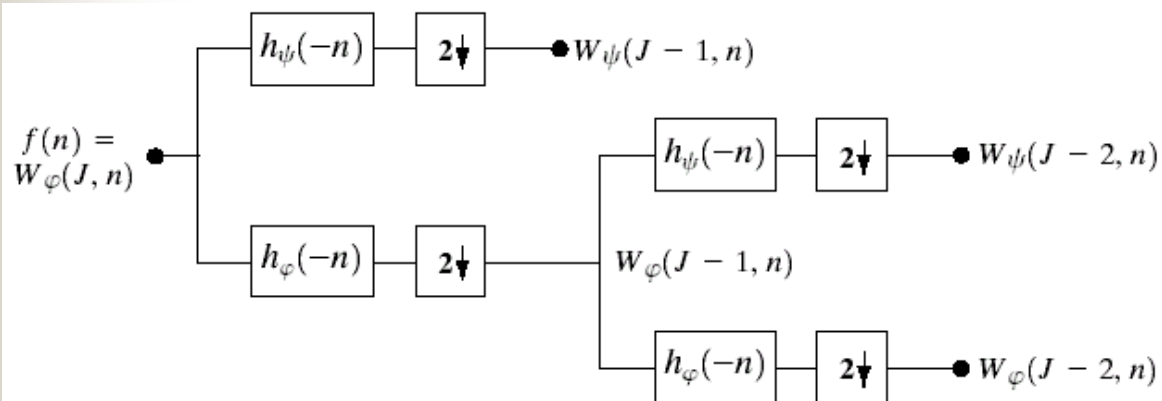
令分解序列为 Lo_D 和 Hi_D



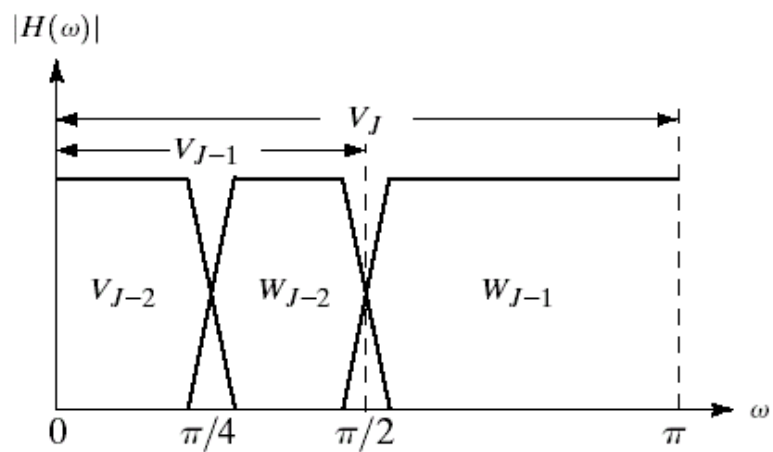
数字图像小波分解数据流示意图



数字图像小波分解流程图



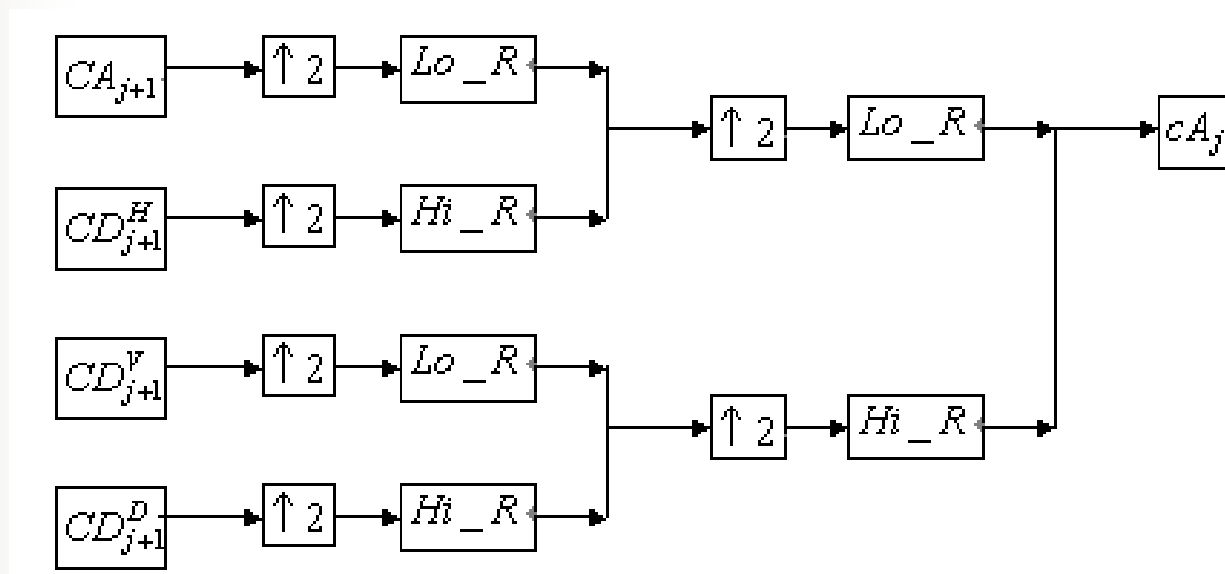
a
b



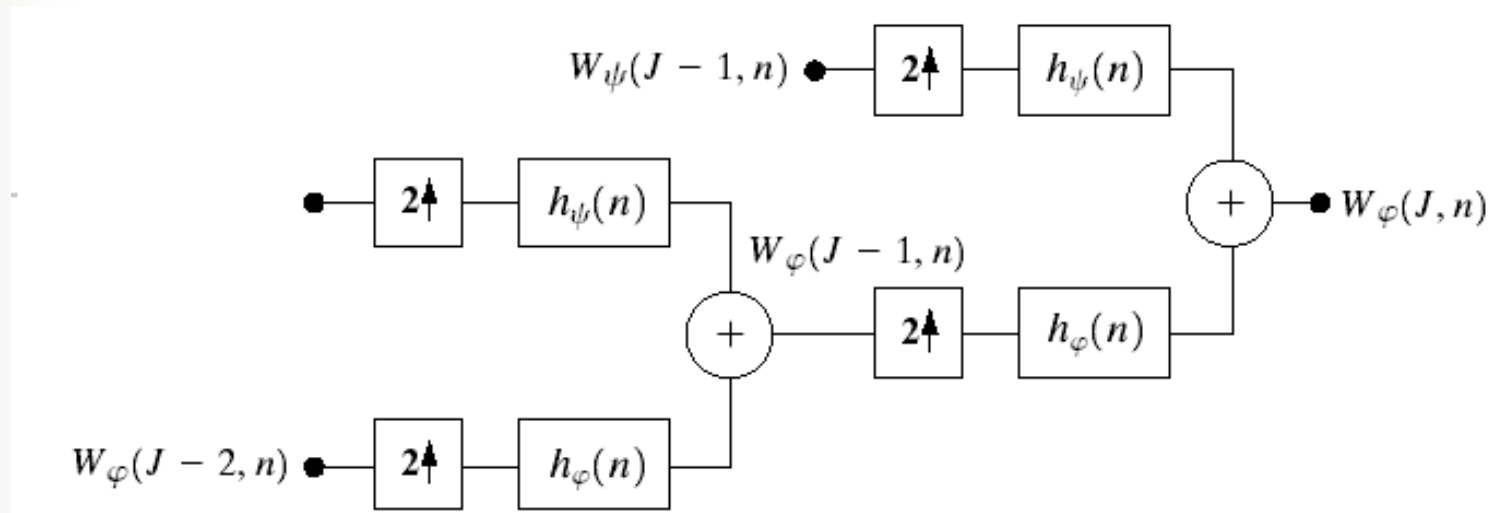
快速小波变换 (FWT)
分解过程及
频率分裂演
示图

图像的小波重构

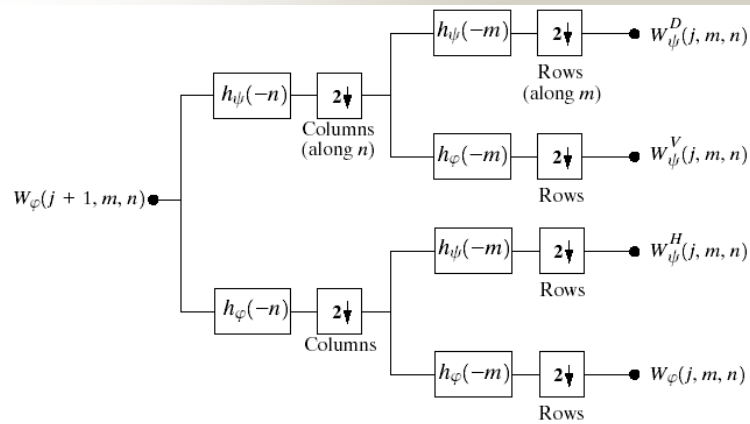
同样，则重构算法：



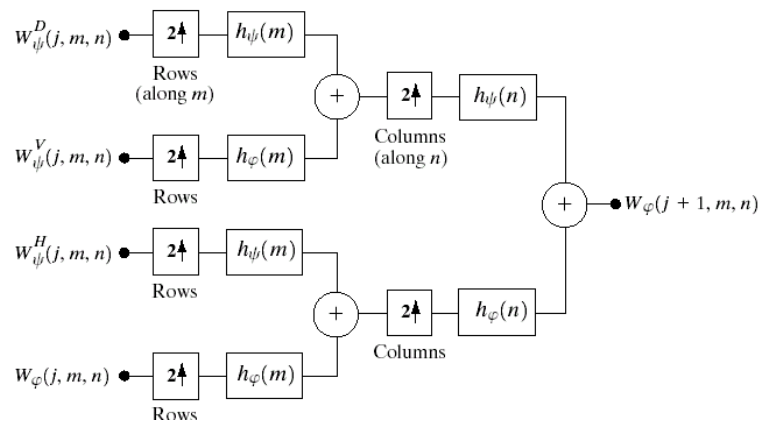
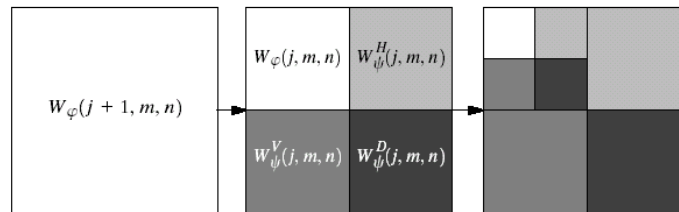
数字图像小波重构数据流示意图



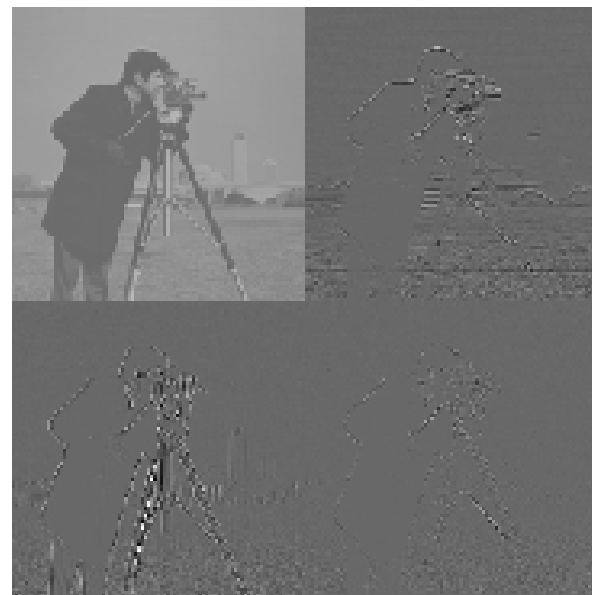
FWT⁻¹重组过程



图像的小
波分解及
重组过程

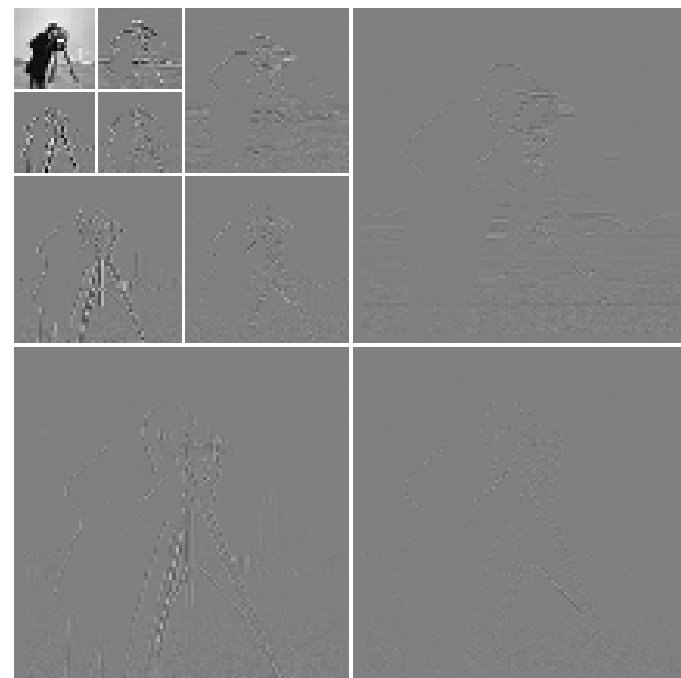
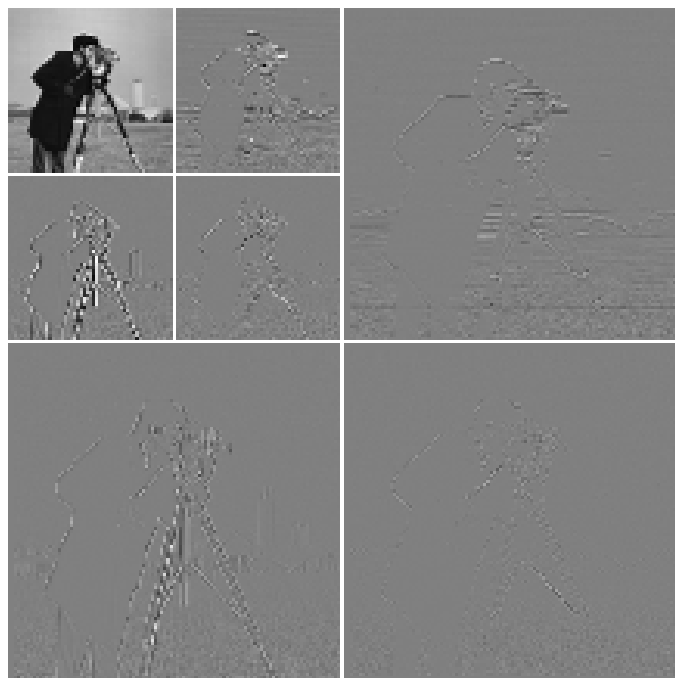


例

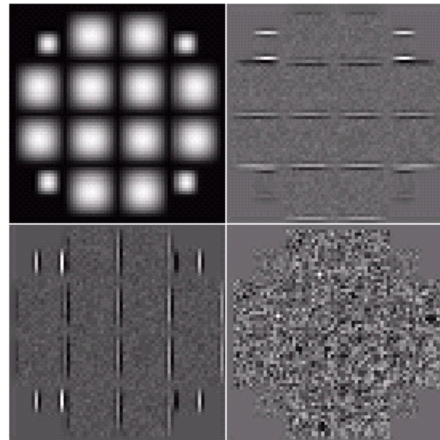
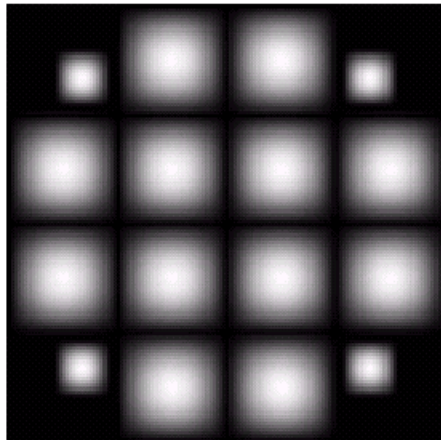


二维小波一层分解图

例

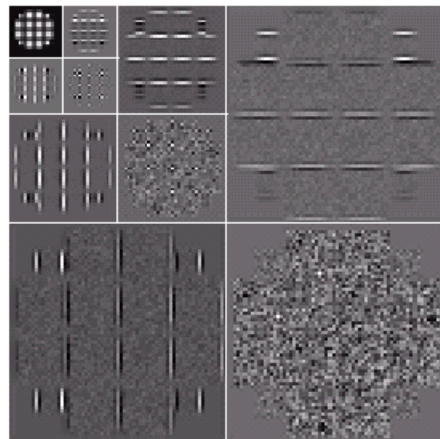
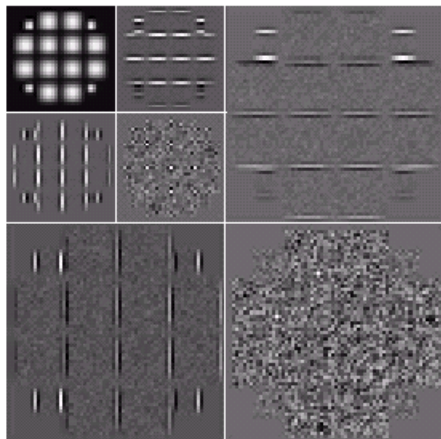


多级二维小波变换结果



a	b
c	d

3尺度FWT





小波基的选择

不同于傅里叶变换，小波基不是唯一，显然选择最优的小波基非常困难，一般情况下需考虑以下几个因素：

- 小波基的正则性和消失矩；
- 小波基的线性相位；
- 要处理图像与小波基的相似性；
- 小波函数的能量集中性；
- 综合考虑处理效率和计算复杂度。

小波变换域小波系数分析

1. 小波变换的能量紧致性分析

图像的能量定义为：

$$energy = \sum_j \sum_i |f(i, j)|^2$$

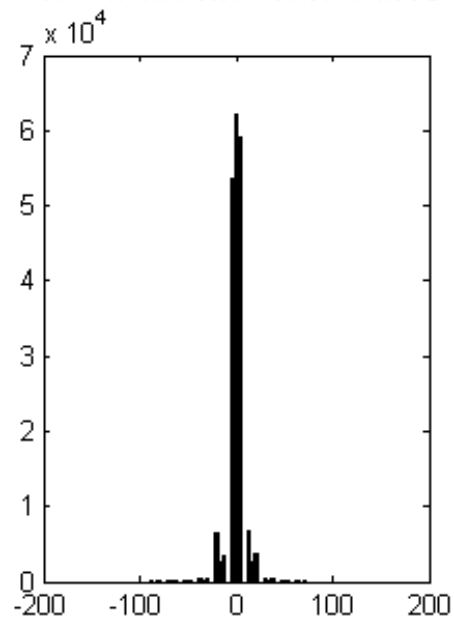
正交小波变换是能量守恒的变换，
且能量集中在低频

2. 小波变换系数分析

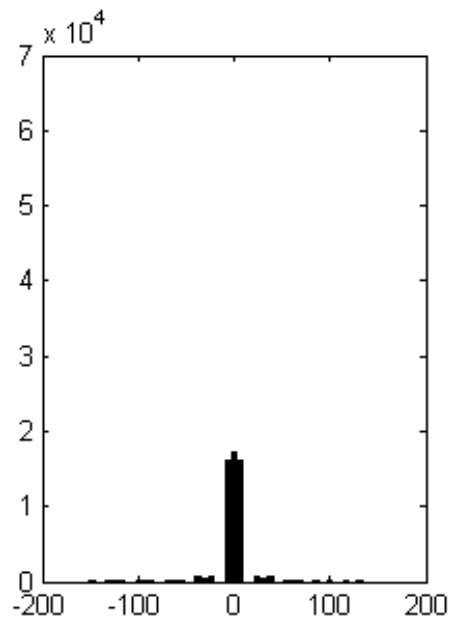
Lena图小波系数统计分析表

图号	最大值	最小值	均值	方差	能量比	层能量合计
LL4	213.4	0.86	96.927	2141.8	86.31	92.01
HL4	109.0	-113.94	-0.142	281.3	2.10	
LH4	129.9	-114.13	-0.085	374.9	2.81	
HH4	83.6	-67.59	0.074	105.8	0.79	
HL3	167.3	-131.52	-0.191	260.1	1.95	4.36
LH3	102.2	-148.53	-0.095	248.5	1.86	
HH3	69.0	-88.40	0.0514	74.03	0.55	
HL2	139.2	-117.46	0.097	151.9	1.14	
LH2	136.7	-170.36	-0.024	138.3	1.04	2.56
HH2	77.3	-113.20	-0.001	51.3	0.38	
HL1	75.7	-92.01	0.037	57.8	0.43	1.07
LH1	67.2	-92.61	-0.061	58.3	0.43	
HH1	58.3	-59.27	-0.011	27.9	0.21	

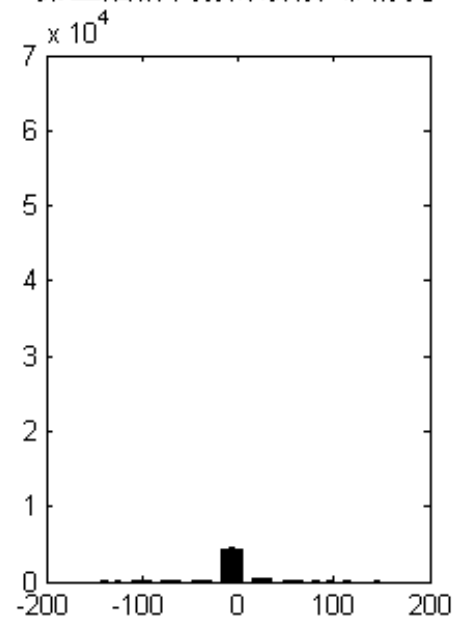
第一层的高频系数分布情况



第二层的高频系数分布情况



第三层的高频系数分布情况



各层小波系数分布图



小波系数规律:

(1) 随着分层数的增加, 小波系数的范围越来越大, 说明越往后层次的小波系数越重要。

(2) 除LL4外, 其他子带方差和能量明显减少, 充分说明低频系数的重要性。

(3) 对同一方向子带, 按从高层到低层 (从低频到高频) 子带, 有:

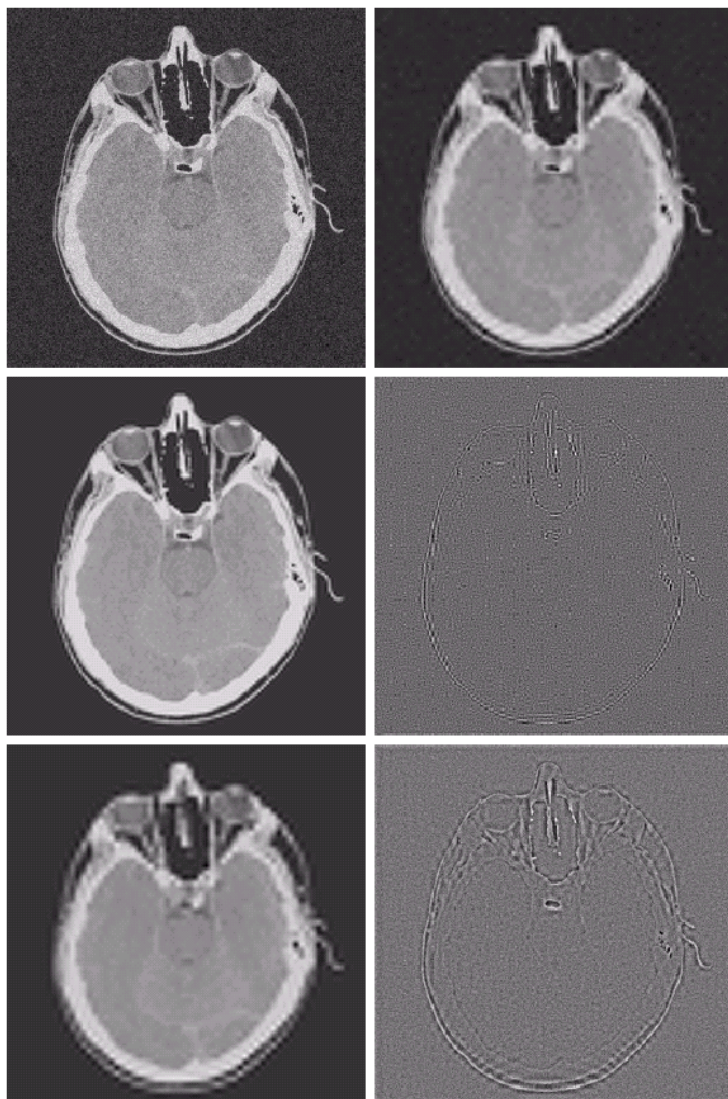
HL4→HL3→HL2→HL1, LH4→LH3→LH2→LH1,
HH4→HH3→HH2→HH1, 大部分情况下其方差从大到小, 有一定的变换规则。

(4) 第一层中有**90%**的系数绝对值集中在**0**零附近。

以上规律对图像压缩编码算法有很重要的指导意义

小波的应用:

(1) 用于图像增强:



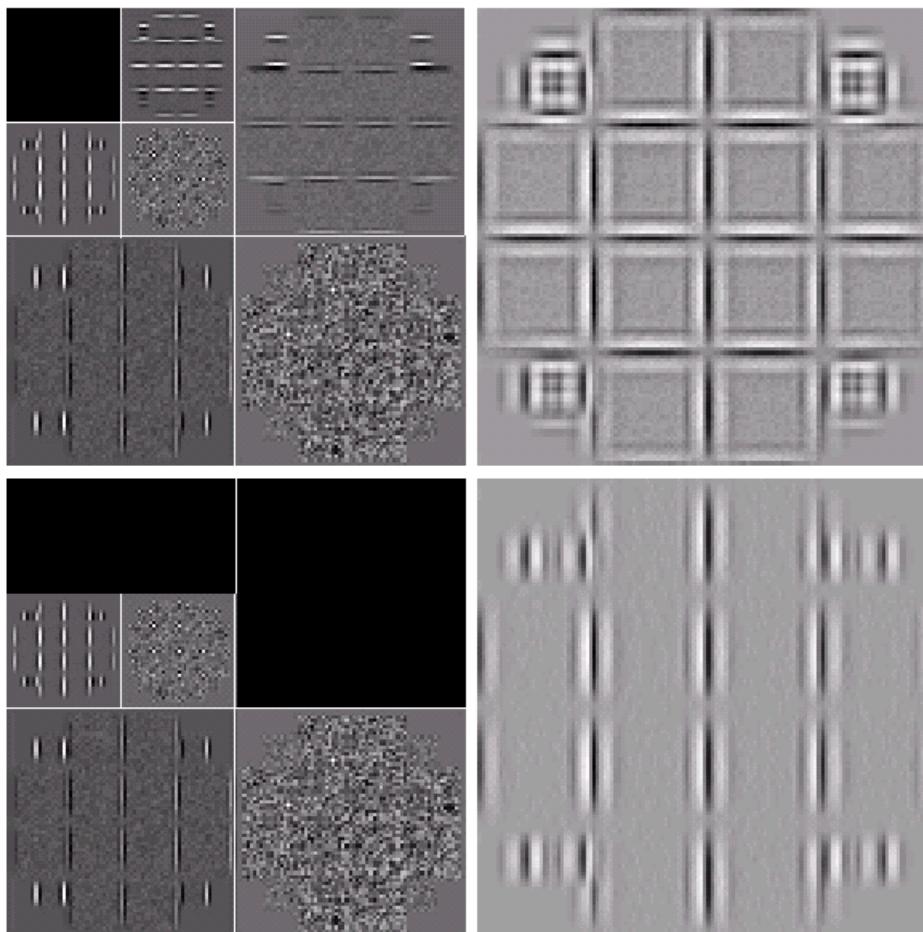
a b
c d
e f

图a为有噪声的原图。图b, c, e是经过不同的阈值重建得到的去噪图像。图d, f为分别为图c和e重建后丢失的信息

(2) 用于边缘提取:

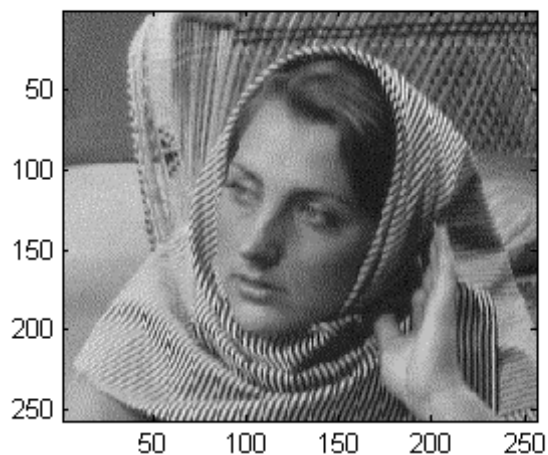
a b
c d

Modifying a DWT for edge detection: (a) and (c) two-scale decompositions with selected coefficients deleted; (b) and (d) the corresponding reconstructions.

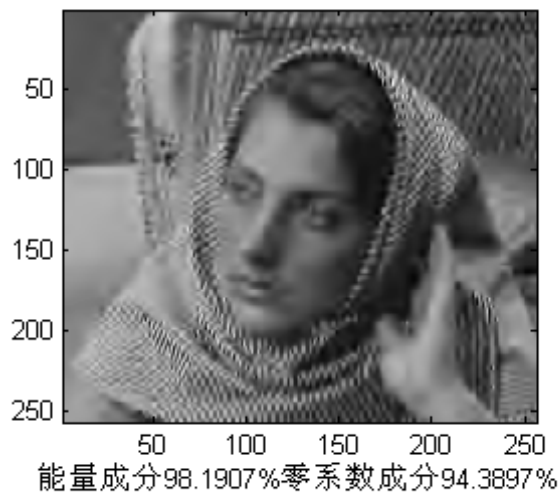


(3) 用于图像压缩

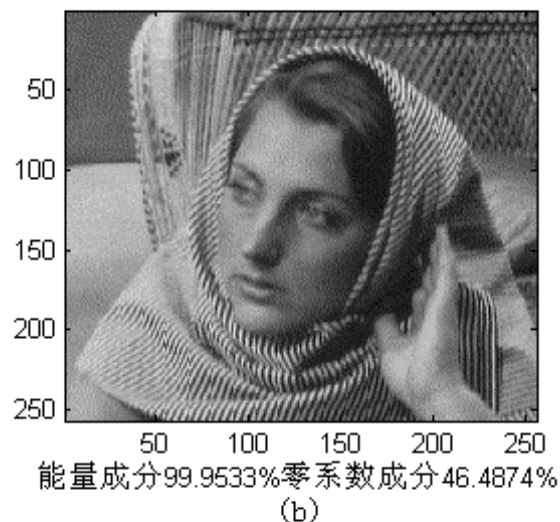
原始图像



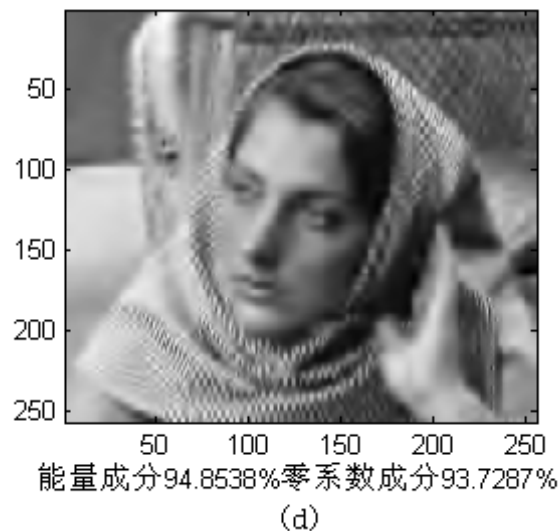
全局化阈值压缩图像, 阈值=100



全局化阈值压缩图像, 阈值=9.5



分层阈值化压缩图像




小结

傅立叶变换 (FT) 具有快速算法，数字图像处理中最常用。需要复数运算。可把整幅图像的信息很好地用若干个系数来表达。

余弦变换 (DCT) 有快速算法，只要求实数运算。在相关性图像的处理中，最接近最佳的K-L变换，在实现编码和维纳滤波时有用。同DFT一样，可实现很好的信息压缩。

正弦变换 (DST) 只需实数运算，可导出快速的变换算法。在实现编码和滤波时有用。具有很好的信息压缩效果好。

沃尔什-哈达玛变换 (WHT) 在数字图像处理的硬件实现时有用。容易模拟但很难分析。在图像数据压缩、滤波、编码中有应用。



K-L变换(KLT) 在许多意义下是最佳的。无快速算法。在进行性能评估和寻找最佳性能时有用。对小规模的向量有用，如彩色多谱或其他特征向量。对一组图像集而言，具有均方差意义下最佳的信息压缩效果。

奇异值分解(SVD) 对任何一幅给定的图像而言，具有最佳的信息压缩效果。无快速算法。设计有限冲激响应(FIR)滤波器时，寻找线性方程的最小范数解时有用。潜在的应用是图像恢复，能量估计和数据压缩。

小波变换(WT) 是空间（时间）和频率的局部变换，因而能有效地从信号中提取信息。通过伸缩和平移等运算功能可对函数或信号进行多尺度的细化分析。是多尺度、多分辨分析的一种新技术。