

Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный университет геодезии и картографии»

Огородова Л.В., Половнев О.В.

Учебно-методическое пособие
по курсу

**ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ
И ОСНОВЫ КООРДИНАТНО-ВРЕМЕННЫХ СИСТЕМ**

Теоретическая часть курса «Высшая геодезия и основы координатно-временных систем» и методические указания по выполнению контрольной работы № 2 для студентов заочного отделения факультета дистанционных форм обучения специальности «Прикладная геодезия» - 21.05.01.

Москва-2016

Рецензент: кандидат технических наук, профессор Федосеев Ю.А.
(МИИГАиК)

Огородова Л.В., Половнев О.В.

Учебно-методическое пособие по курсу Высшая геодезия и основы координатно-временных систем. – М.: Издательство МИИГАиК, 2016. 67 с.
ISBN 975-5-91188-000-0

Рассмотрены преобразования систем координат, используемые в повседневной практике инженером-геодезистом. Раскрыты основные принципы определения высот в гравитационном поле. Теоретический материал сопровождается алгоритмом обработки информации, получаемой при геодезических определениях. Завершается пособие подборкой вариантов задач для самостоятельного выполнения контрольной работы 2.

Для студентов заочного отделения факультета дистанционных форм обучения специальностей: прикладная геодезия, землеустройство и кадастры.

Оглавление

1. Предисловие	4
2. Разделы программы курса «Высшая геодезия и основы координатно-временных систем»	4
3. Государственная геодезическая сеть. Национальные, региональные, и локальные координатные основы.....	9
3.1. Основные сведения о Государственной геодезической сети (ГГС) РФ	9
3.2. Преобразование геоцентрических координат X, Y, Z в плоские прямоугольные координаты.....	11
3.3. Определение параметров преобразования плоских прямоугольных координат	15
3.4. Оценивание точности.....	21
4. Высота в гравитационном поле.....	23
4.1. Принципы определения высоты в гравитационном поле	23
4.2. Системы высот.....	25
4.3. Спутниковое нивелирование.....	30
4.4. Оценивание точности нивелирования.....	33
5. Методические указания к контрольной работе 2.1. - Приведение наземных и спутниковых координат в единую систему.....	35
6. Методические указания к контрольной работе 2.2. - Вычисление нормальных и динамических высот	47
Приложения	56
Литература:	67

1. Предисловие

Настоящее учебно-методическое пособие является продолжением методических указаний [1], где помещена программа курса высшей геодезии. Для удобства студентов в настоящих методических указаниях повторно приведены те разделы программы, содержание которых необходимо изучить для решения практических задач. Методические указания к этим разделам программы являются одновременно методическими указаниями для выполнения контрольной работы № 2.

2. Разделы программы курса «Высшая геодезия и основы координатно-временных систем»

Введение

Предмет и задачи высшей геодезии. Место высшей геодезии в ряду наук о Земле. Методы высшей геодезии в их историческом развитии. Современные задачи и методы. Опорные геодезические сети.

Основные сведения о поверхности и поле силы тяжести Земли: Физическая поверхность Земли. Понятие о силе тяжести и ее потенциале. Силовые линии и уровенные поверхности поля силы тяжести. Геоид. Принцип определения высоты в поле силы тяжести. Геопотенциальное число. Изменения поверхности и гравитационного поля во времени.

Раздел 1. Земной эллипсоид и геодезические системы координат

Составные части земной координатной структуры: система координат, фундаментальные постоянные Земли, отсчетная основа (геодезическая сеть). Натуральная система координат. Геодезические прямоугольные координаты. Общеземные и референцные координаты. Преобразование прямоугольных координат. Криволинейные геоцентрические и полярные координаты. Геодезические криволинейные координаты. Земной эллипсоид. Основные параметры эллипсоида. Уравнения поверхности эллипсоида в

геоцентрических системах координат. Радиус-вектор эллипсоида. Радиусы кривизны поверхности эллипсоида. Связь геодезических прямоугольных и криволинейных координат. Система координат с приведенной широтой. Связь геодезической, геоцентрической и приведенной широты. Топоцентрические системы координат. Связь геодезической криволинейной и натуральной систем координат. Уклонения отвесной линии. Дифференциальные зависимости координат различных систем. Эллипсоид как поверхность относимости. Кривизна поверхности эллипсоида. Главные нормальные сечения. Прямое и обратное нормальные сечения. Геодезическая линия. Сравнение длины дуг окружности, нормального сечения и геодезической линии. Угол между геодезической линией и нормальным сечением. Средний радиус эллипсоида. Проекция Гаусса-Крюгера. Вычисление координат проекции Гаусса-Крюгера по геодезическим координатам и обратное преобразование. Система UTM. Локальные системы координат. Местные (ведомственные) системы координат и проблема их связи.

Раздел 2. Теория высот в гравитационном поле

Специфика высокоточных измерений горизонтальных и вертикальных углов. Требования, предъявляемые к высокоточным угломерным приборам, и их классификация. Основные источники ошибок высокоточных угловых измерений. Краткие сведения о физике приземного слоя атмосферы. Горизонтальная и вертикальная рефракция и ее влияние на результаты угловых измерений. Выгоднейшее время измерения горизонтальных и вертикальных углов. Понятие о способах тригонометрического нивелирования. Оценка точности угловых измерений. Угловые измерения в сетях специального назначения. Высокоточные линейные измерения на поверхности Земли. Глобальные навигационные спутниковые системы (ГНСС). Абсолютные и относительные спутниковые определения. Геометрический аспект определения разностей геодезических координат из

спутниковых относительных определений. Рекогносцировка, выбор и закрепление центров геодезических измерений на местности. Приведение результатов измерений к центрам. Предварительная обработка результатов измерений. Уравнивание результатов угловых и линейных измерений.

Понятие о нормальной Земле. Уровенный эллипсоид. Кривизна силовых линий и уровенных поверхностей нормального поля. Система координат в нормальном поле и ее связь с геодезической криволинейной системой координат.

Геодезическая высота и методы ее определения (тригонометрическое нивелирование, геометрическое нивелирование, спутниковые определения). Геопотенциальное число и динамическая высота. Ортометрическая высота и высота геоида. Нормальная высота и аномалия высоты. Методы определения разности нормальных высот и аномалии высоты. Астрономическое, астрономо-гравиметрическое, спутниковое нивелирование.

Высокоточное геометрическое нивелирование. Высокоточные нивелиры и инварные рейки, их устройство и исследования. Цифровые нивелиры. Источники ошибок при высокоточном нивелировании и методы ослабления их влияния. Методика нивелирования I и II классов в России. Опыт зарубежных стран. Методика нивелирования в специальных сетях. Обработка полевых результатов высокоточного нивелирования. Оценка точности результатов. Закрепление нивелирных линий на местности. Требования к закладке нивелирных центров. Типы нивелирных центров. Современные тенденции в развитии высокоточного геометрического нивелирования.

Раздел 3. Методы создания опорных геодезических сетей

Опорные геодезические сети, их назначение. Методы построения опорной геодезической сети. Концепция создания опорной геодезической сети на основании спутниковых технологий. Необходимая точность построения и требуемая плотность пунктов в государственной и

специальных сетях. Государственная геодезическая сеть. Редуцирование измерений на поверхность эллипсоида. Редукция длины и азимута хорды эллипсоида к длине и азимуту геодезической линии. Определение длины и азимута геодезической линии по разностям геодезических криволинейных координат (обратная геодезическая задача). Схема построения государственной нивелирной сети. Этапы создания государственной геодезической сети России и перспективы ее развития. Современная концепция создания опорных геодезических сетей. Основные требования, предъявляемые к геодезическим проекциям.

Основные сведения по организации геодезических работ при создании опорных геодезических сетей, экономике и технике безопасности. Нормативно-правовая основа высшей геодезии. Проектирование геодезических работ и отчет о выполненных работах

Раздел 4. Фундаментальные геодезические постоянные и мировые опорные сети

Национальные, региональные и локальные координатные основы. Фундаментальные геодезические постоянные и принципы их определения. Современные системы постоянных (ГРС-80, WGS-84, ПЗ-90). Глобальные модели Земли (EGM-96, EGM-2008, ПЗ-90, ПЗ-90-02, ГАО-2000, SRTM). Концепция создания глобальной и региональной многомерных систем координат. Международные системы координат (WGS-84, IGS, ETRS) и их реализации (сети GPS, ГЛОНАСС). Отсчетная основа (геодезическая сеть) земных координатных систем. Международные координатные основы ITRF. Международные геоцентрические геодезические сети (координатные основы) (WGS-84, IGS). Национальные и региональные сети (координатные основы). Инерциальные системы.

Раздел 5. Введение в геодинамику

Классификация геодинамических явлений. Глобальная, региональная и локальная геодинамика. Особенности проявления геодинамики и принципы получения геодинамической информации геодезическими методами. Мониторинг деформаций земной поверхности. Методы интерпретаций и прогнозирования геодинамических явлений.

При изучении курса рекомендована учебная литература - основная - 2, 3, 4 и дополнительная - 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

3. Государственная геодезическая сеть. Национальные, региональные, и локальные координатные основы

3.1. Основные сведения о Государственной геодезической сети (ГГС) РФ

В настоящее время в РФ в практике геодезических работ одновременно используются несколько систем координат.

Классическая астрономо-геодезическая сеть России и СССР создана в течение длительного периода времени - от начала полевых работ (1816 г.) до окончательного уравнивания (1991 г.) прошло 175 лет.

По мере развития сети и уравнивания ее отдельных фрагментов определяли координаты пунктов государственной геодезической сети (ГГС), служивших основой геодезических и картографических работ. Так появились плановые системы координат (СК) 32-го, 42-го, 95 года - СК-32, СК-42 и ее вариант СК-63 и СК-95, используемые до настоящего времени. Наряду с этими СК в отдельных административных образованиях и ведомствах используют различные местные системы координат (МСК).

Современные навигационные спутниковые системы позволяют определить пространственные координаты любой точки поверхности Земли в той системе координат, которую реализует данная система. Так, в РФ глобальная навигационная спутниковая система (ГЛОНАСС) задает системы ПЗ-90, ПЗ-90.02, ПЗ-90.11. Система ПЗ-90 реализована пунктами фундаментальной астрономо-геодезической сети (ФАГС), высокоточной геодезической сети (ВГС), спутниковой геодезической сети 1 класса (СГС-1). Работы по созданию этих сетей ведутся с конца XX века. К 2003 г. созданы сети ФАГС и ВГС, состоящие из 19 постоянно действующих и 15 периодически повторяемых пунктов ФАГС и 178 пунктов ВГС. К настоящему времени число пунктов ВГС возросло до 300, определено около 4000 пунктов СГС-1. Обобщенные сведения о ГГС РФ приведены в таблице 3.1.

Внедрение спутниковых технологий в практику геодезических работ вызывает необходимость совместного использования плановых координат x, y , заданных в системах СК-32, СК-42, СК-95, с пространственными координатами X, Y, Z , получаемыми в системах ПЗ-90, ПЗ-90.02, ПЗ-90.11. Связь астрономо-геодезической системы СК-95 и спутниковой системы ПЗ-90 установлена в результате их совместного уравнивания. Однако глобальные параметры преобразования, определенные для всей сети в целом, из-за неизбежных ошибок могут в локальной области неправильно отражать отличия «наземных» и «спутниковых» координат.

Таблица 3.1.

Обобщенные сведения о ГГС РФ

Сеть	АГС	ФАГС	ВГС	СГС-1
Период создания	1816-1991	1998 - ...	1999 -...	2000- ...
Число пунктов	164 306	50-70(план)	500-700 (план)	4000
Расстояние между пунктами, км	Для пунктов ГГС 2-го класса - в среднем 12,5 км	650-1000 км	150-300 км	25-35 км;* 40-50 км**
Система координат	СК-42, СК-95	ПЗ-90, ПЗ-90.02, ПЗ-90.11	ПЗ-90, ПЗ-90.02, ПЗ-90.11	ПЗ-90, ПЗ-90.02, ПЗ-90.11
Координаты	B, L , элл. Красовского; x, y , проек. Гаусса-Крюгера	$X, Y, Z \rightarrow B, L, H$	$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z \rightarrow B, L, H$	$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z \rightarrow B, L, H$
Точность	$\approx 4 \times 10^{-6}$	$\approx 2 \times 10^{-8}$	$3\text{мм} + 5 \times 10^{-8} D$	$5\text{мм} + 2 \times 10^{-7} D$

*- в экономически развитых районах, ** - в необжитых районах

Для совместной обработки результатов спутниковых и наземных определений необходимо все измерения привести в единую координатную систему. При этом возможны разные варианты:

1. Совместное уравнивание непосредственно измеренных величин. Этому препятствует сложность получения результатов измерений, использованных при выводе координат Гаусса-Крюгера в системах СК-42 и СК-95.

2. Совместное уравнивание координат в спутниковой системе X, Y, Z или B, L, H . Но системы координат СК-42 и СК-95 получены в результате раздельного определения плановых координат и высот; при этом

уравнивание выполнено в координатах B, L , приближенные геодезические высоты использованы только для редуцирования измерений к эллипсоиду. Поэтому пункты этих сетей точных значений высот не имеют и их перевод в пространственные системы без привлечения дополнительных данных невозможен.

3. Совместное уравнивание в системе координат Гаусса-Крюгера. Перевод пространственных координат в плоские прямоугольные координаты в любой из используемых ныне систем не вызывает затруднений, поскольку глобальная взаимная ориентировка этих систем надежно определена. Совместное уравнивание в системе плоских прямоугольных координат позволит устранить возможные локальные отличия.

Рассмотрим последний способ подробнее. Положим, что спутниковым методом получены геоцентрические прямоугольные координаты X, Y, Z пунктов локальной сети, параметры связи которой с ГГС неизвестны. Для установления этих связей необходимо перейти от координат X, Y, Z к плоским прямоугольным координатам x, y в заданной проекции в государственной системе координат и затем найти параметры взаимного преобразования плоских прямоугольных координат в локальной и государственной системах.

3.2. Преобразование геоцентрических координат X, Y, Z в плоские прямоугольные координаты

Рассмотрим последовательность действий при переходе от геоцентрических координат системы ПЗ-90 к плоским прямоугольным координатам системы СК-95. Этот переход выполняется тремя последовательными преобразованиями:

перейти от прямоугольных координат X_{90}, Y_{90}, Z_{90} в системе ПЗ-90 к прямоугольным координатам X_{95}, Y_{95}, Z_{95} в системе СК-95;

получить криволинейные координаты B_{95}, L_{95}, H_{95} ;

по координатам B_{95}, L_{95} вычислить плоские прямоугольные координаты x_{95}, y_{95} .

Первые два этапа выполнены в методических указаниях [1]. Выполним переход от геодезических криволинейных координат к плоским прямоугольным координатам x, y в проекции Гаусса-Крюгера.

Для любого эллипсоида переход от криволинейных координат к плоским прямоугольным можно выполнить по формулам

$$x = X + \frac{1}{4} N l^2 \sin 2B \left\{ 1 - \frac{1}{12} l^2 [1 - \cos^2 B (6 + 9\eta^2 + 4\eta^4)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{360} l^4 (1 - 60 \cos^2 B + 120 \cos^4 B - 330 \eta^2 \cos^2 B + 600 \eta^2 \cos B) \right\}, \quad (3.2.1)$$

$$y = N l \cos B \left\{ 1 - \frac{1}{6} l^2 [1 - (2 + \eta^2) \cos^2 B] + \right. \\ \left. + \frac{1}{120} l^4 [1 - (20 - 24 \cos^2 B + 58 \eta^2 - 72 \eta^2 \cos^2 B) \cos^2 B] \right\}, \quad (3.2.2)$$

где $l = L - L_o$,

L_o – долгота осевого меридиана, X – длина дуги меридиана от экватора до точки с широтой B ,

$$X = a(1 - e^2) \left[\left(1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \frac{11025}{16384} e^8 + \frac{43659}{65536} e^{10} + \dots \right) B - \right. \\ \left. - \frac{3}{8} e^2 \left(1 + \frac{5}{4} e^2 + \frac{175}{128} e^4 + \frac{735}{512} e^6 + \frac{24255}{16384} e^8 \right) \sin 2B + \right. \\ \left. + \frac{15}{256} e^4 \left(1 + \frac{7}{4} e^2 + \frac{147}{64} e^4 + \frac{693}{256} e^6 \right) \sin 4B - \right. \\ \left. - \frac{35}{1024} e^6 \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4} e^2 + \frac{297}{256} e^4 \right) \sin 6B + \frac{315}{131072} e^8 \left(1 + \frac{11}{4} e^2 \right) \sin 8B \right],$$

$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$ – радиус кривизны первого вертикала,

$\eta^2 = e'^2 \cos 2B$, e'^2 – квадрат второго эксцентриситета.

Для определения L_o нужно долготу L выразить в градусах, найти ближайшее кратное 6° и большее L значение долготы и вычесть из него 3°

$$L_o = 6^\circ n - 3^\circ. \quad (3.2.3)$$

Число n определяет номер шестиградусной зоны

$$n = (L_o + 3^\circ) / 6^\circ.$$

В формулах (3.2.1)-(3.2.2) разность l выражена в радианах.

Для эллипсоида Красовского:

$$a = 6378245 \text{ м}, e^2 = 0,006693421623, e'^2 = 0,006738525415,$$

$$X = 6367558.497(B - 0.002518466 \sin 2B + 0.000002643 \sin 4B - 0.000000003 \sin 6B). \quad (3.2.4)$$

Формула (3.2.4) позволяет вычислить X с ошибкой менее десятых долей мм. В первом члене этой формулы широта B выражена в радианах.

Для контроля правильности вычислений можно выполнить обратное преобразование и найти геодезические криволинейные координаты по плоским прямоугольным и вычислить сближение меридианов γ и масштаб m изображения в обеих системах. Для этих вычислений можно использовать формулы

$$\begin{aligned} b &= b' + 0.002518465 \sin 2b' + 0.000003700 \sin 4b' + 0.000000007 \sin 6b', \\ b' &= \frac{x}{6367558.497}, \\ b - B &= \frac{y^2(1 + \eta'^2) \operatorname{tg} b}{2N'^2} \left\{ 1 - \frac{y^2}{12N'^2 \cos^2 b} [3 - 9\eta'^2 + 2 \cos^2 b (1 + 5\eta'^2 - 2\eta'^4)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y^4}{360N'^4 \cos^4 b} [45 - 18\eta'^2 (5 + 4 \cos^2 b) + 16 \cos^4 b (1 + 13\eta'^2)] \right\}, \\ B &= b - (b - B), \\ l &= \frac{y}{N' \cos b} \left\{ 1 - \frac{y^2}{6N'^2 \cos^2 b} (2 - \cos^2 b + \eta'^2 \cos^2 b) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y^4}{120N'^4 \cos^4 b} (24 - 20 \cos^2 b + \cos^4 b + 8\eta'^2 \cos^2 b - 2\eta'^2 \cos^4 b) \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

В этих формулах радиус кривизны N' и параметр η' нужно вычислять по аргументу b

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 b}}, \quad \eta'^2 = e'^2 \cos^2 b.$$

Если известны плоские прямоугольные координаты, сближение меридианов и масштаб изображения в точке определяет формула

$$\gamma = \frac{y}{N'tgb} \left[1 - \left(\frac{y}{N'} \right)^2 \frac{(1 + tg^2 b - \eta'^2 - 2\eta'^4)}{3} + \left(\frac{y}{N'} \right)^4 \frac{(2 + 5tg^2 b + 3tg^4 b)}{15} \right],$$

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R_1^2} + \frac{y^4}{24R_1^4},$$
(3.2.6)

где $R_1 = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 b}$ – средний радиус эллипсоида.

Для вычисления сближения меридианов γ и масштаба m изображения по криволинейным координатам служат формулы

$$tg\gamma = l \sin B \left(1 + \frac{1}{3} l^2 (1 + 3\eta^2 \cos^2 B + 2\eta^4 \cos^2 B) + \frac{2}{15} l^4 \right),$$

$$m = 1 + \frac{1}{2} l^2 \cos^2 B \left\{ 1 + \eta^2 - \frac{1}{3} l^2 \left(1 - \frac{9}{4} \cos^2 B \right) \right\},$$
(3.2.7)

Взаимные преобразования криволинейных геодезических координат B, L и плоских прямоугольных координат x, y можно сделать в соответствии с [6] формулы даны в приложениях 3-4.

3.3. Определение параметров преобразования плоских прямоугольных координат

В математике преобразование одной системы (СК1) плоских декартовых прямоугольных координат x, y в другую (СК2) выполняют по правилу

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{СК2} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \end{bmatrix}_{СК1}, \quad (3.3.1)$$

где φ – поворот осей, x_o, y_o – координаты начала системы СК2 в старой системе координат СК1 (рис. 1). Чтобы определить параметры φ, x_o, y_o преобразования, необходимо располагать координатами, по крайней мере, двух пунктов в обеих системах.

При сравнении координат Гаусса-Крюгера, вычисленных по результатам различных независимых измерений, кроме величин φ, x_o, y_o следует учитывать изменение масштаба изображения. Длина S одной и той же линии может оказаться различной в разных системах координат, и масштаб изображения, т.е. отношение $S_{СК2}/S_{СК1}$, будет отличен от единицы:

$$S_{СК2}/S_{СК1} = 1 + m, \quad (3.3.2)$$

$S_{СК1}$ и $S_{СК2}$ – длина линии в первой и второй системах координат соответственно, m – отличие масштаба отображения от единицы.

В системе Гаусса-Крюгера масштаб изображения не постоянен и меняется при изменении положения точки, причем это изменение может быть различным в двух системах. Поэтому отношение (3.3.2) может оказаться непостоянным. Тем не менее, будем считать величину m постоянной и также рассматривать ее в качестве параметра преобразования.

С учетом изменения масштаба уравнение (3.3.1) записывают в виде

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{CK2} = (1+m) \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \end{bmatrix}_{CK1}. \quad (3.3.3)$$

В отличие от (3.3.1), уравнение (3.3.3) содержит четыре неизвестных параметра – m , φ , x_o , y_o . Для определения первых двух необходимо иметь в обеих системах координаты двух пунктов; смещение начала координат при известных m , φ можно найти по координатам одного пункта.

В локальной области целесообразно разделить определение масштаба и угол разворота от определения смещения начала координат. Например, можно исключить из (3.3.3) координаты x_o , y_o , если сравнивать в двух системах не координаты, а их разности. Напишем уравнение (3.3.3) для любых двух пунктов i и j

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}_{CK2} &= (1+m) \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - x_o \\ y_i - y_o \end{bmatrix}_{CK1}, \\ \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix}_{CK2} &= (1+m) \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j - x_o \\ y_j - y_o \end{bmatrix}_{CK1}. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

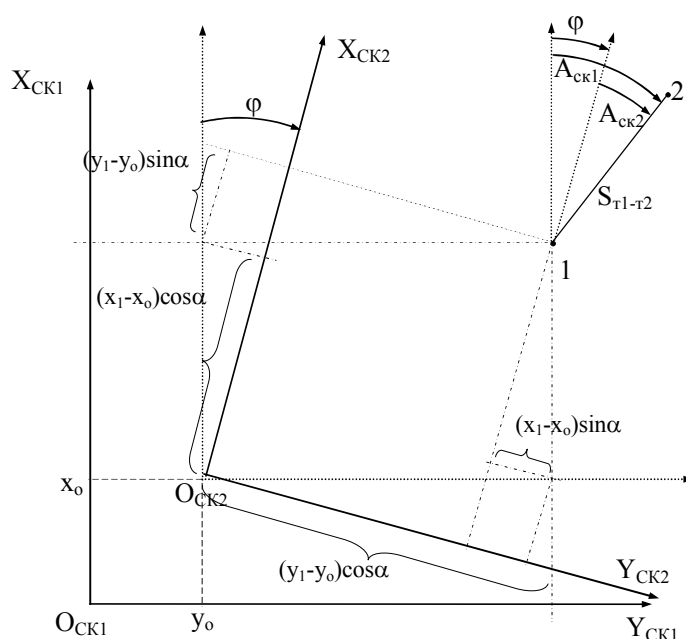


Рис. 1 Параметры преобразования прямоугольной системы координат
индексы у координат относятся к номеру точки в первой СК, индексы у
азимута – номер СК для линии 1-2, индексы у расстояния – к точкам в
разных системах координат

и образуем разность этих уравнений

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}_{CK2} = (1 + m) \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}_{CK1}, \quad (3.3.5)$$

$\Delta x = x_i - x_j$, $\Delta y = y_i - y_j$ - разности координат пунктов i и j в обеих системах.

В уравнении (3.3.5) удобнее использовать не разности координат, а длины S и углы A между осями X и линиями S (см. рис. 1). Это позволит определять отдельно масштаб и угол разворота.

Внесем в (3.3.5) выражение (3.3.2) и равенства $\Delta x = S \cos A$, $\Delta y = S \sin A$. Тогда длины S исключатся, и для определения угла φ получим выражение

$$\begin{bmatrix} \cos A \\ \sin A \end{bmatrix}_{CK2} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos A \\ \sin A \end{bmatrix}_{CK1} \quad (3.3.6)$$

или

$$\begin{aligned} \cos A_{CK2} &= \cos \varphi \cos A_{CK1} + \sin \varphi \sin A_{CK1} = \cos(A_{CK1} - \varphi), \\ \sin A_{CK2} &= -\sin \varphi \cos A_{CK1} + \cos \varphi \sin A_{CK1} = \sin(A_{CK1} - \varphi), \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} A_{CK2} &= A_{CK1} - \varphi, \\ \varphi &= A_{CK1} - A_{CK2}. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Таким образом, параметр m определяется по формуле (3.3.2) только по длинам линий, а угол φ по формуле (3.3.7) только по углам A . После введения S и A уравнение (3.3.3) получит вид

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}_{CK2} = \frac{S_{CK2}}{S_{CK1}} \begin{bmatrix} \cos(A_{CK1} - A_{CK2}) & \sin(A_{CK1} - A_{CK2}) \\ -\sin(A_{CK1} - A_{CK2}) & \cos(A_{CK1} - A_{CK2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - x_o \\ y_i - y_o \end{bmatrix}_{CK1}.$$

Для определения длин S_{CK1} , S_{CK2} линий, соединяющих два пункта, и углов A_{CK1} , A_{CK2} , образованных этими линиями с осями $O_{CK1}X_{CK1}$ и $O_{CK2}X_{CK2}$, по

разностям Δx_{CK1} , Δy_{CK1} и Δx_{CK2} , Δy_{CK2} координат этих пунктов в обеих системах служат формулы

$$S_{CK1} = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)_{CK1}}, \quad S_{CK2} = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)_{CK2}}, \quad (3.3.8)$$

$$A_{CK1} = \left(\arctg \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{CK1} + k\pi, \quad A_{CK2} = \left(\arctg \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{CK2} + k\pi, \quad (3.3.9)$$

$$k = 0, \text{ если } \Delta x_{1-2} > 0, \text{ и } \Delta y_{1-2} \geq 0,$$

$$k = 1, \text{ если } \Delta x_{1-2} < 0,$$

$$k = 2, \text{ если } \Delta x_{1-2} > 0, \text{ и } \Delta y_{1-2} < 0.$$

Получим из (3.3.3) уравнение для определения координат x_o , y_o начала преобразованной системы. Разделим обе части этого уравнения на $(1+m)$ и умножим на матрицу ортогонального преобразования:

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

В результате получим

$$\begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{CK1} - \frac{1}{(1+m)} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{CK2}$$

или

$$\begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{CK1} - \frac{1}{(1+m)} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{CK2} \quad (3.3.10)$$

или

$$\begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{CK1} - \frac{S_{CK1}}{S_{CK2}} \begin{bmatrix} \cos(A_{CK2} - A_{CK1}) & -\sin(A_{CK2} - A_{CK1}) \\ \sin(A_{CK2} - A_{CK1}) & \cos(A_{CK2} - A_{CK1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{CK2}.$$

Если параметры m , φ , x_o , y_o малы, выражение (3.3.3) можно упростить. Полагая $\cos \varphi = 1$, $\sin \varphi = \varphi$ и не учитывая квадраты и произведения параметров m , φ , x_o , y_o , получим

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{CK2} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{CK1} + \begin{bmatrix} m & \varphi \\ -\varphi & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{CK1} - \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix}, \quad (3.3.11)$$

Так как в системе Гаусса – Крюгера координаты не превышают 10^7 м, при $\varphi = 5''$ ошибка преобразования не превысит $x\varphi^2/2 = 3$ мм. Поэтому преобразование (3.3.11) можно использовать, если угол поворота φ составляет несколько секунд.

Образуем разности $x_{CK2} - x_{CK1}$, $y_{CK2} - y_{CK1}$ координат пунктов в двух системах.

Представим их в виде

$$\begin{bmatrix} lx_i \\ ly_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & \varphi \\ -\varphi & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}_{CK1} - \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \quad (3.3.12)$$

$lx_i = (x_{CK2} - x_{CK1})_i$, $ly_i = (y_{CK2} - y_{CK1})_i$ - известные разности координат (свободные члены), i – порядковый номер пункта, координаты которого известны в обеих системах, n – число таких пунктов, $i = 1, 2, \dots, n$, v_x , v_y - ошибки разностей координат. Рассматривая (3.3.12) как условные уравнения, можно найти параметры m , φ , x_o , y_o по способу наименьших квадратов.

Наземная система x , y , может иметь значительные ошибки в абсолютных значениях координат, но взаимное положение пунктов этой системы в локальной области характеризуется высокой точностью и сопоставимо с точностью спутниковых определений. По результатам уравнивания 1991 года ошибка взаимного положения смежных пунктов триангуляции 1-2 классов составляет в среднем 5 см, а во многих частях сети – 2-4 см. Средняя квадратическая ошибка передачи координат от Пулково до Берингова пролива составляет по широте 1,02 м, по долготе 1,10 м. Точность наземных измерений сторон АГС в целом равна 1:250 000 [14, с.139]. При средней длине стороны 5 км ошибка взаимного положения составляет 2 см.

Ошибку взаимного положения пунктов в спутниковых измерениях оценивают по формуле $[(5 \div 10) \text{ мм} + (1 \div 2) \text{ мм} S_{\text{км}}]$, что для расстояния S , равного 5 км, составляет 1-2 см. Поэтому приращенные координаты, полученные по наземным и по спутниковым наблюдениям, сопоставимы по точности. В

связи с этим можно в качестве исходных величин использовать «двойные» разности, вычитая из всех уравнений (3.3.12) какое-либо одно. Вычтем из всех уравнений (3.3.12) уравнение для первого пункта, $i=1$, в результате координаты x_o, y_o исключаются:

$$\begin{bmatrix} lx_i - lx_1 \\ ly_i - ly_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & \varphi \\ -\varphi & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - x_1 \\ y_i - y_1 \end{bmatrix}_{CK1} - \begin{bmatrix} dv_x \\ dv_y \end{bmatrix},$$

и условные уравнения примут вид

$$\begin{bmatrix} dv_x \\ dv_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & \varphi \\ -\varphi & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix}_{CK1} - \begin{bmatrix} dl_{xi} \\ dl_{yi} \end{bmatrix}, \quad (3.3.13)$$

dv_x, dv_y – ошибки разностей dl_{xi}, dl_{yi} ,

$$dl_{xi} = l_{xi} - l_{x1}, dl_{yi} = l_{yi} - l_{y1}, \Delta x_i = x_i - x_1, \Delta y_i = y_i - y_1.$$

Решая (3.3.13) под условием $\sum (dv_x^2 + dv_y^2) = \min$, получаем значения m и

φ

$$\begin{bmatrix} m \\ \varphi \end{bmatrix} = [\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2 + \dots + \Delta x_n^2 + \Delta y_n^2]^{-1} \begin{bmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 & \Delta x_2 & \Delta y_2 & \dots & \Delta x_n & \Delta y_n \\ \Delta y_1 & -\Delta x_1 & \Delta y_2 & -\Delta x_2 & \dots & \Delta y_n & -\Delta x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dl_{x1} \\ dl_{y1} \\ dl_{x2} \\ dl_{y2} \\ \dots \\ dl_{xn} \\ dl_{yn} \end{bmatrix} \quad (3.3.14)$$

Теперь в уравнении (3.3.12) неизвестными остаются $x_o + v_x, y_o + v_y$. Для их определения перепишем это уравнение в виде

$$\begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} m & \varphi \\ -\varphi & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}_{CK1} - \begin{bmatrix} lx_i \\ ly_i \end{bmatrix}_{CK2-CK1i}. \quad (3.3.15)$$

В качестве параметров x_o, y_o можно использовать средние арифметические значения разностей $\begin{bmatrix} m & \varphi \\ -\varphi & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}_{СК1} - \begin{bmatrix} lx \\ ly \end{bmatrix}_i$, полученных для всех использованных пунктов

$$\begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix}_{cp} = \frac{1}{n} \sum_1^n \cdot \begin{bmatrix} m & \varphi \\ -\varphi & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}_{СК1} - \begin{bmatrix} lx_i \\ ly_i \end{bmatrix}_{СК2-СК1}, \quad (3.3.16)$$

После нахождения параметров преобразования координаты любого пункта из одной системы в другую можно перевести по формуле (3.3.11).

Уравнение (3.3.11) аналогично уравнению (3.3.3), а уравнение (3.3.15) – уравнению (3.3.10). Как видно, при малых величинах m, φ, x_o, y_o формулы для определения параметров значительно проще, поскольку в этом случае фактически выполнена линеаризация выражений (3.3.3)-(3.3.5), (3.3.10). Формулы (3.3.11) и (3.3.15) можно использовать при сравнении разных реализаций систем координат СК-42 и СК-95. Если же сравнивать местные системы координат (МСК) с СК-42 и СК-95, то применяют формулу (3.3.3), поскольку в этом случае угол φ и координаты x_o, y_o могут иметь любые значения. Удобнее в этом случае сравнивать длины и азимуты линий, вычисленных в обеих системах согласно (3.3.2), (3.3.7).

3.4. Оценивание точности

После уравнивания ошибки dv_x, dv_y двойных разностей dlx_i, dly_i можно найти из уравнения (3.3.13). Ошибки m_{lx}, m_{ly} одинарных разностей lx_i, ly_i связаны с ошибками двойных разностей соотношениями $m_{lx} = dv_x / \sqrt{2}, m_{ly} = dv_y / \sqrt{2}$. Считая ошибку разностей обеих координат одинаковой, $m_{lx} = m_{ly}$, находим

$$m_{lx,ly} = \sqrt{\frac{\sum dv_x^2 + dv_y^2}{2(n-1)}} \quad (3.4.1)$$

Ошибки v_x, v_y разностей свободных членов lx, ly можно также оценить, используя формулу (3.3.15). Левая часть этой формулы дает точное значение координат центра новой системы,

$$\begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}_i$$

Если это значение известно, можно найти поправки v_x, v_y

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix}_i. \quad (3.4.2)$$

и получить средние квадратические ошибки m_{lx}, m_{ly} разностей координат

$$m_{lx,ly} = \sqrt{\frac{\sum v_x^2 + v_y^2}{n-1}} \quad (3.4.3)$$

Сравните результаты, полученные по формулам (3.4.1) и (3.4.3).

При равноточных измерениях в обеих системах ошибки координат составят

$$M_{x,y} = \sqrt{\frac{m_{lx}^2 + m_{ly}^2}{2}} = \sqrt{\frac{\sum (v_x^2 + v_y^2)}{2(n-1)}} \quad (3.4.4)$$

В формулах (3.4.1) – (3.4.4) n – число использованных пунктов.

Если ошибки координат, полученных из спутниковых определений, известны, можно оценить точность наземных определений

4. Высота в гравитационном поле

При изучении этого раздела рекомендуется прочитать главы 7-8 и 10 учебника [2], введение и главу 1 учебного пособия [4].

4.1. Принципы определения высоты в гравитационном поле

В гравитационном поле под высотой h понимают расстояние между уровнями поверхностями, т.е. отрезок 1-2 силовой линии (рис. 2). Расстояние между уровнями поверхностями $W=W_1$ и $W=W_2$, проходящими через точки 1 и 2, прямо пропорционально разности потенциалов W_2-W_1 и обратно пропорционально среднему значению g_m силы тяжести вдоль силовой линии 1-2

$$h = -\frac{W_2 - W_1}{g_m}. \quad (4.1.1)$$

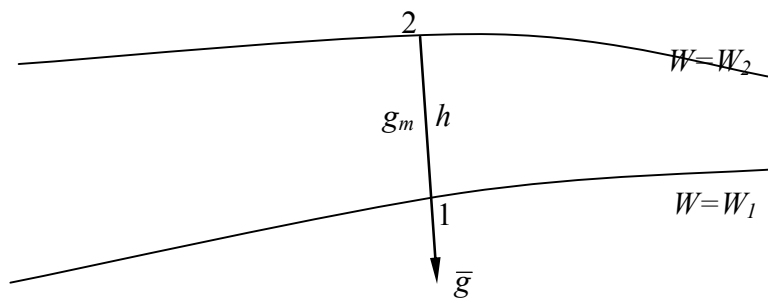


Рис. 2 Расстояние между уровнями поверхностями

Знак «минус» в формуле (4.1.1) означает, что направление счета высот противоположно направлению силы тяжести. Сила тяжести является градиентом потенциала и направлена в сторону его возрастания, следовательно, в точке 1 потенциал больше, чем в точке 2, и разность W_2-W_1 отрицательна. А высота точки 2 над точкой 1 на рис. 2 положительна.

Сила тяжести на уровне поверхности изменяется, поэтому уровневые поверхности не параллельны, и расстояние h при перемещении

точек 1-2 вдоль уровенных поверхностей неодинаково. Так, при геометрическом нивелировании расстояния h_1 и h_2 между уровенными поверхностями, проходящими через точки 1' и 2'' стояния реек, различны (рис. 3).

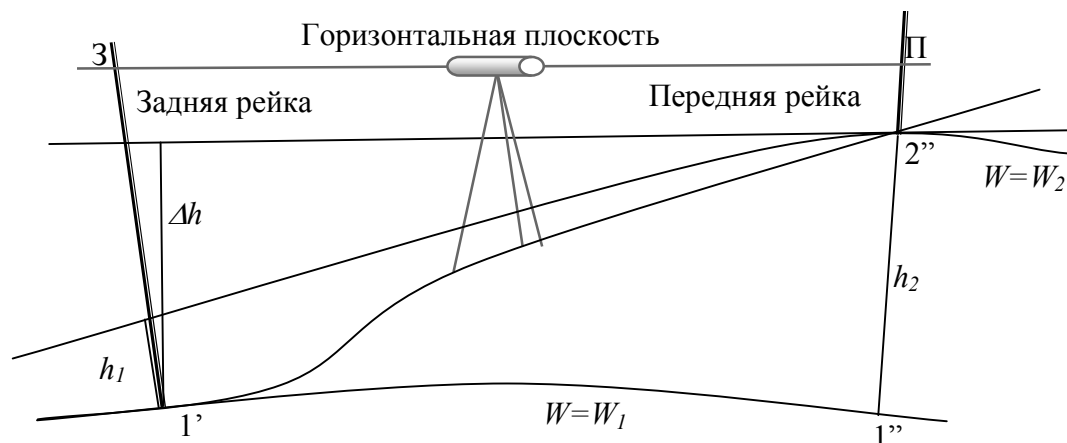


Рис. 3 Геометрическое нивелирование в гравитационном поле

Поскольку расстояние между рейками невелико и, как правило, не превышает 100-150 м, кривизной уровенных поверхностей пренебрегают и считают их плоскостями, параллельными горизонтальной плоскости 3-П, проходящей через ось нивелира. В этом случае выстой, точки 2'' над точкой 1', будет отрезок Δh , который называют нивелирным превышением. Другими словами, вычисление нивелирного превышения выполняют в однородном гравитационном поле, в котором сила постоянна по величине и направлению, а уровенными поверхностями являются горизонтальные плоскости. При перемещении по поверхности Земли положение горизонтальной плоскости 3-П изменяется, и превышения Δh зависят от пути нивелирования. Поэтому сумма нивелирных превышений будет зависеть от положения нивелирной линии, и в замкнутом полигоне не равна нулю. Теоретическую сумму превышений оценивает формула (7.45) учебника [2]. Заменив в (7.45) дифференциал dh суммой превышений Δh по секциям, образующим полигон, для теоретической суммы f превышений в замкнутом нивелирном полигоне получим

$$f = \sum \Delta h = -\frac{1}{g_0} \sum (g_m - g_0) \Delta h. \quad (4.1.2)$$

g_m – среднее по секции значение силы тяжести, g_o – произвольное число.

В каждой нивелирной сети измерение превышений начинают от исходного пункта О, через который проходит уровенная поверхность

$$W = W_o,$$

близкая к среднему уровню моря. Потенциал на уровне моря не постоянен и в нивелирных сетях, опирающихся на разные футштоки, значение W_o различно. Разность $W_o - W_p$ потенциалов в исходном пункте О счета высот и любой точке Р называют геопотенциальным числом. Из курса геодезической гравиметрии известно, что эту величину получают из совместных измерений превышений dh и силы тяжести g по линии нивелирования

$$W_o - W_p = \int_0^p g dh \quad (4.1.3)$$

Если силу тяжести выразить в килогалах ($1\text{кГал} = 10 \text{ м/с}^2$), а превышение в метрах, геопотенциальное число по величине будет близко к высоте в метрах. Например, для горы Монблан (Альпы) геопотенциальное число равно 4710 кГал.м, а высота над уровнем моря – 4810 м. Для меньших высот отличие геопотенциального числа от высоты будет еще меньше.

При перемещении по уровенной поверхности $W = W_p$ геопотенциальное число постоянно, а работа по перемещению равно нулю. Нам легче идти от точки с меньшим потенциалом к большему, т.е. от точки с большим геопотенциальным числом к меньшему. Вода в реках всегда течет в направлении уменьшения геопотенциального числа, а уровень воды в водоемах совпадает с поверхностью равных геопотенциальных чисел.

4.2. Системы высот

Геопотенциальное число можно рассматривать как координату точки, определяющую вместе с широтой и долготой ее положение в пространстве. Его можно выразить в линейных единицах, разделив на постоянное значение C силы тяжести

$$H^d = \frac{W_0 - W_p}{C}, \quad (4.2.1)$$

т.е. предполагая поле силы тяжести однородным. Отношение H^d называют *динамической высотой*. В качестве постоянной C используют разные значения, принимая ее равной 1 кГал, значению γ_o (45) нормальной силы тяжести на эллипсоиде на широте 45° , среднее значение g_{cp} силы тяжести в отдельной области. Однако, несмотря на формальное выражение динамической высоты в метрах, эта высота геометрического смысла не имеет и по-прежнему выражает работу, которую нужно выполнить в гравитационном поле при перемещении от исходной уровенной поверхности $W=W_0$ до данной точки. Эти высоты используют в океанографических исследованиях, при решении энергетических задач – гидростатическом нивелировании, проектировании водохранилищ, продуктопроводов и т.п.

Согласно формуле (4.1.1) для вычисления высоты над исходной уровенной поверхностью $W=W_0$ геопотенциальное число нужно разделить на среднее значение g_m силы тяжести вдоль отрезка 1-2 силовой линии (рис. 4)

$$H^g = \frac{W_0 - W_p}{g_m} = \frac{1}{g_m} \int g dh. \quad (4.2.2)$$

Высота H^g называется высотой над уровнем моря или *ортометрической* высотой.

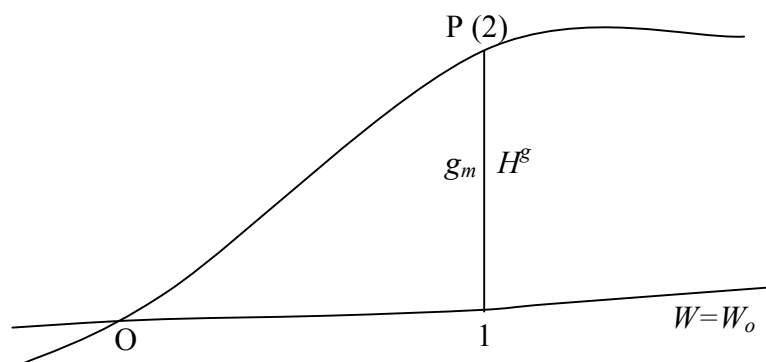


Рис. 4 Ортометрическая высота

Чтобы вычислить значение g_m , нужно знать плотность пород вдоль силовой линии или измерять силу тяжести внутри Земли. Поэтому ортометрическую высоту нельзя найти по измерениям только на поверхности Земли.

Для получения высоты по результатам измерений только на поверхности Земли и во внешнем пространстве геопотенциальное число рассматривают в нормальном поле, и находят в нормальном поле высоту такой точки 2^y , для которой разность $U_0 - U_2^y$ нормальных потенциалов относительно отсчетного эллипсоида $U = U_0$ равна геопотенциальному числу

$$U_0 - U_2^y = W_0 - W_2 = W_0 - W_P \quad (4.2.3)$$

(тождество Молоденского).

Используя это условие и формулу (4.1.3), для *нормальной высоты Молоденского* H_M^y находим

$$H_M^y = \frac{U_0 - U_2^y}{\gamma_m} = \frac{W_0 - W_P}{\gamma_m} = \frac{1}{\gamma_m} \int g dh. \quad (4.2.4)$$

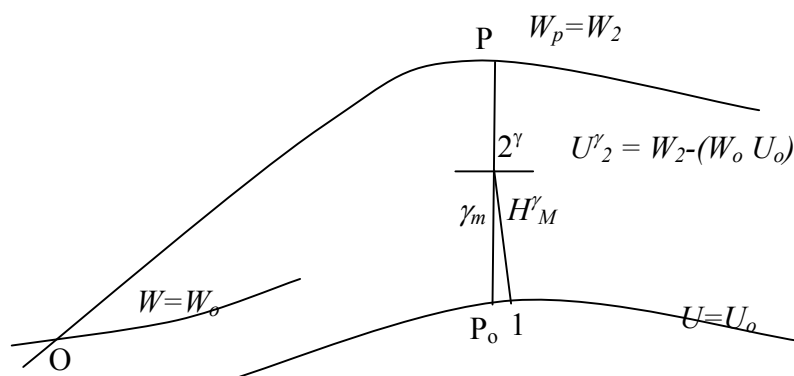


Рис. 5 Нормальная высота Молоденского

Нормальная высота является отрезком 1-2^γ силовой линии нормального поля, но поскольку кривизна силовой линии мала, длину ее отрезка считают равной длине отрезка P₀2^γ нормали к эллипсоиду; P₀ – проекция точки P на эллипсоид. Влияние кривизны силовой линии и оценивание расстояния между точками P₀ и 1 пересечения поверхности эллипсоида нормалью к нему и силовой линией нормального поля рассмотрены в [Ошибка! Залка не определена., стр.94-95].

При использовании спутниковых измерений нормальная высота получает несколько иной смысл. В этом случае значение W_0 потенциала полагают равным нормальному потенциалу на поверхности отсчетного эллипсоида и в тождестве (4.2.3) Молоденского считают

$$W_0 = U_0, \quad (4.2.5)$$

откуда следует

$$U_{3^γ} = W_P,$$

т.е. находят такую точку 3^γ, в которой нормальный потенциал $U(B, H'_c)$ равен потенциалу в измерительной точке

$$U(B, H'_c) \equiv W_P,$$

H'_c - высота этой точки над эллипсоидом – *нормальная спутниковая* высота.

Геопотенциальное число при условии (4.2.5) равно $U_o - W_p$ и для нормальной спутниковой высоты получаем

$$H_c^\gamma = \frac{U_o - W_p}{\gamma_m}.$$

Представим потенциал W_p суммой нормального U и аномального T потенциалов

$$W_p = U_p + T_p,$$

тогда

$$H_c^\gamma = \frac{U_o - U_p - T_p}{\gamma_m} = \frac{U_o - U_p}{\gamma_m} - \frac{T_p}{\gamma_m}.$$

Если не учитывать кривизну нормальной силовой линии, первый член правой части этого равенства равен геодезической высоте H , а второй определяет аномалию высоты ζ при условии (4.2.5). Таким образом, при условии (4.2.5) нормальная высота равна (рис. 5)

$$H_c^\gamma = H - \zeta. \quad (4.2.6)$$

В этом случае измеренными величинами являются геодезическая высота, которую в настоящее время определяют с применением спутниковых технологий, и аномалия высоты относительно общего земного (отсчетного) эллипсоида, для нахождения которой используют как спутниковые, так и наземные измерения.

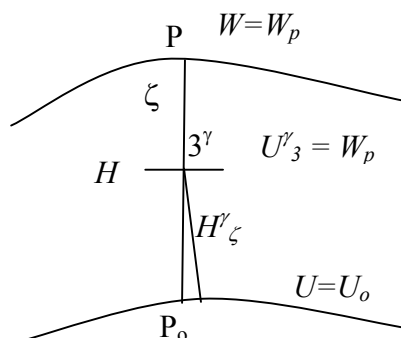


Рис. 6 Нормальная высота, получаемая по спутниковым измерениям

Главная трудность нахождения нормальной высоты по формуле (4.2.6) связана с определением аномалии высоты ζ . Методы ее определения рассматривают в курсе геодезической гравиметрии и теории фигуры Земли.

Таким образом, в зависимости от используемой модели поля возможны такие виды высот:

1. Однородное поле $H^d = \frac{W_0 - W_p}{C}$ - динамическая высота
2. Реальное поле $H^g = \frac{W_0 - W_p}{g_m}$ - ортометрическая высота
3. Нормальное поле $H_M^\gamma = \frac{W_0 - W_p}{\gamma_m}$ - нормальная высота Молоденского
4. Нормальное поле $H_C^\gamma = \frac{U_0 - W_p}{\gamma_m}$ - нормальная «спутниковая» высота

В первых трех случаях используется одно и то же геопотенциальное число, получаемое по результатам нивелирования и измерений силы тяжести

$$W_0 - W_p = \int_0^p g \Delta h$$

В последнем случае нужно найти не разность потенциалов $W_0 - W_p$, а потенциал W_p в точке поверхности Земли. В общем виде его можно представить рядом

$$W_p = \sum_0^N W_n(\rho, \vartheta, \lambda)$$

W_n – шаровая функция степени n , ρ, ϑ, λ - геоцентрические координаты.

4.3. Спутниковое нивелирование

Спутниковым нивелированием называют определение нормальной высоты на основании спутниковых технологий. Согласно (4.2.6) спутниковую нормальную высоту H'_c можно получить как разность найденной с помощью ГНСС геодезической высоты H и аномалии высоты ζ , причем аномалия высоты должна относиться к общему земному эллипсоиду. Обычно в качестве ζ используют гравиметрическую аномалию высоты ζ^{GP} , вычисленную по модели гравитационного поля. Тогда формула (4.2.6) получает вид

$$H'_c = H - \zeta^{GP}. \quad (4.3.1)$$

Такой путь определения нормальной высоты является абсолютным. И геодезическая высота, и аномалия высоты определяются независимо друг от друга в любой точке, где можно организовать наблюдения со спутниковым приемником. Если же по спутниковым определениям найдены не геодезические высоты H , а их разности, $H_2 - H_1$, то можно вычислить разность нормальных спутниковых высот

$$(H'_c)_2 - (H'_c)_1 = (H_2 - H_1) - [\zeta_2^{GP} - \zeta_1^{GP}].$$

Основная сложность в обоих случаях связана с определением аномалии высоты.

Геодезическая высота и нормальная высота Молоденского в настоящее время определяются с ошибками 2-3 см; главным источником ошибок спутниковой нормальной высоты является ошибка вычисления гравиметрической аномалии высоты, которая может составить несколько дециметров.

Аномалия высоты медленно изменяется на поверхности Земли. На расстоянии 1 км и среднем уклонении отвеса $2''$ разность аномалий высоты равна 1 см. Так как гравиметрическую аномалию высоты вычисляют в лучшем случае с точностью нескольких сантиметров, для близких точек

можно ее считать одинаковой и полагать разность нормальных спутниковых высот равной разности геодезических

$$(H_C^\gamma)_2 - (H_C^\gamma)_1 \approx (H_2 - H_1).$$

Если необходимо найти разность нормальных высот между удаленными точками, аномалию высоты вычисляют в каждой точке, или каким-либо образом интерполируют.

Спутниковая нормальная высота не совпадает с нормальной высотой Молоденского из-за отличия начала счета геопотенциальных чисел и ошибок измерений. Разность

$$H_M^\gamma - H_C^\gamma = \frac{W_0 - W_P}{\gamma_m} - \frac{U_0 - W_P}{\gamma_m} = \frac{W_0 - U_0}{\gamma_m}$$

может достигать 1-2 м, но эта разность медленно меняется при перемещении по поверхности Земли и ее можно уверенно интерполировать.

Разности $H_M^\gamma - H_C^\gamma$ можно вычислить на нивелирных реперах, на которых выполнены спутниковые определения. При линейном интерполировании считают, что эти разности меняются между опорными реперами пропорционально расстоянию, тогда интерполированную разность $(H_M^\gamma - H_C^\gamma)_{инт}$ в любой промежуточной точке можно найти по формуле

$$(H_M^\gamma - H_C^\gamma)_{инт} = (H_M^\gamma - H_C^\gamma)_1 + k\Delta L \quad (4.3.2)$$

где $k = [(H_M^\gamma - H_C^\gamma)_2 - (H_M^\gamma - H_C^\gamma)_1] / L$, - коэффициент пропорциональности;

$(H_M^\gamma - H_C^\gamma)_1$ и $(H_M^\gamma - H_C^\gamma)_2$ - разности высоты Молоденского и спутниковой

нормальной высоты на реперах 1 и 2;

L – расстояние между реперами;

ΔL – расстояние до текущей точки, в которой определяется $(H_M^\gamma - H_C^\gamma)_{инт}$, от репера 1.

Интерполированная высота Молоденского находится по формуле

$$H_{Минт}^\gamma = H_C^\gamma + (H_M^\gamma - H_C^\gamma)_{инт} . \quad (4.3.3)$$

По этой формуле можно найти нормальную высоту точек, не выполняя геометрического нивелирования.

4.4.Оценивание точности нивелирования

Ошибку m передачи высоты методом геометрического нивелирования выполняют по формуле

$$m^2 = \eta^2 L + \sigma^2 L^2 ,$$

η случайная, σ – систематическая ошибка на 1 км хода, L – длина хода.

Систематическую ошибку можно выявить только из обработки всей сети в целом. Случайную ошибку можно приближенно оценить по невязке f_h полигона, используя формулу

$$\eta = f_h / \sqrt{L} , \quad (4.4.1)$$

f_h - разность суммы измеренных превышений и теоретической суммы (4.1.2) превышений, L – периметр полигона.

Точность спутникового нивелирования можно оценить, вычисляя по формуле (4.3.3) интерполированную нормальную высоту на реперах, не используемых при определении коэффициента k . Ошибка $m_{Нс}$ спутниковой нормальной высоты равна среднему квадратическому значению разности $H_{Минт}^\gamma - H_M^\gamma$ интерполированной и измеренной высоты

$$m_{H_c} = \sqrt{\frac{(H_{M_{\text{инт}}}^{\gamma} - H_M^{\gamma})^2}{n}}, \quad (4.4.2)$$

n – число разностей $(H_{M_{\text{инт}}}^{\gamma} - H_M^{\gamma})$. Случайную ошибку η_c спутникового нивелирования на 1 км хода можно оценить по формуле, аналогичной (4.4.1)

$$\eta_c = m_{H_c} / \sqrt{L}, \quad (4.4.3)$$

L – длина линии интерполирования.

Сравните ошибки η и η_c геометрического и спутникового нивелирования.

5. Методические указания к контрольной работе 2.1. - Приведение наземных и спутниковых координат в единую систему

Работа состоит из пяти заданий:

Задание 1. Вычисление плоских прямоугольных координат в проекции Гаусса-Крюгера по геодезическим криволинейным координатам.

Задание 2. Вычисление геодезических криволинейных координат по плоским прямоугольным координатам в проекции Гаусса-Крюгера.

Задание 3. Преобразование местной системы координат в систему СК-95.

Задание 4. Определение элементов взаимного трансформирования спутниковых и наземных координат методом наименьших квадратов.

Задание 5. Оценивание точности.

Пояснения к выполнению работы

В контрольной работе № 2.1 выполняется приведение координат, полученных по наземным и по спутниковым измерениям, в единую систему. Исходными («измеренными») считаются для спутниковых измерений геоцентрические координаты X_{90}, Y_{90}, Z_{90} в системе ПЗ-90, для наземных – координаты Гаусса-Крюгера в местной системе координат. И спутниковые, и наземные координаты нужно трансформировать в координаты Гаусса-Крюгера в системе СК95.

Для преобразования спутниковых данных нужно от исходных координат X_{90}, Y_{90}, Z_{90} перейти к криволинейным координатам B_{95}, L_{95}, H_{95} в системе СК95 и затем преобразовать координаты B_{95}, L_{95} в плоские прямоугольные координаты x_c'', y_c'' . Алгоритм преобразования:

$$X_{90}, Y_{90}, Z_{90} \rightarrow X_{95}, Y_{95}, Z_{95} \rightarrow B_{95}, L_{95}, H_{95} \rightarrow x_c'', y_c''$$

x_c'', y_c'' – «измеренные» спутниковые координаты в системе Гаусса-Крюгера. Параметры преобразования координат системы ПЗ90 в систему СК95 считаются известными.

Преобразования пространственных координат уже были выполнены в контрольной работе № 1. В настоящей работе нужно преобразовать широту B_{95} и долготу L_{95} в прямоугольные координаты x_c'', y_c'' . Это преобразование выполняется в заданиях 1-2.

Для трансформации координат из местной системы МСК в систему СК95 нужно определить параметры преобразования (ключи) m, φ, x_0, y_0 . Для нахождения ключей использованы спутниковые координаты x_c'', y_c'' . Алгоритм преобразования:

$$x_c'', y_c''; x_{МСК}, y_{МСК} \rightarrow m, \varphi, x_0, y_0 \rightarrow x_n'', y_n'',$$

x_n'', y_n'' – «измеренные» наземные координаты Гаусса-Крюгера в системе СК95.

Координаты x_n'', y_n'' определяются в задании 3.

В задании 4 по измеренным координатам $x_c'', y_c'', x_n'', y_n''$ найдены параметры взаимного преобразования наземных и спутниковых координат.

Выбор исходных данных.

Исходными данными для выполнения контрольной работы № 2.1 являются плоские прямоугольные координаты *трех* пунктов в системе СК-95, вычисленные по определенным спутниковым методом пространственным координатам в системе ПЗ-90, и плоские координаты *четырёх* пунктов в местной системе. Плоские прямоугольные координаты четвертого пункта «спутниковой системы» нужно вычислить по полученным в задании 1 контрольной работы №1 криволинейным геодезическим координатам B, L в системе СК-95 [1, таблица 6].

Координаты в местной системе выбирать из приложения 2 согласно шифру

Последние цифры шифра:

00-24 - местная система №1

25-49 - местная система №2

50-74 - местная система №3

75-99 – местная система № 4

Задание 1. Вычисление плоских прямоугольных координат в проекции Гаусса - Крюгера по геодезическим координатам B, L

В контрольной работе 1.2. «Определение разности геодезических координат» получены геодезические прямоугольные и криволинейные координаты одного пункта ([1] таблицы 5 и 6). Для этого пункта в настоящей контрольной работе нужно преобразовать криволинейные координаты B_{95}, L_{95} в плоские прямоугольные координаты x_c'', y_c'' ; для остальных пунктов «спутниковые» координаты в системе СК-95 выписать из исходных данных.

Плоские прямоугольные координаты, сближение меридианов и масштаб изображения можно вычислить по формулам (3.2.1)-(3.2.4) и (3.2.7). Пример вычисления приведен в таблице 5.1.

Задание 2. Вычисление геодезических координат по плоским прямоугольным координатам в проекции Гаусса – Крюгера

Эти вычисления можно выполнить по формулам (3.2.5), (3.2.6). Пример вычисления также приведен в таблице 5.1.

Сравнить полученные координаты с приведенными в исходных данных.

Пример выполнения задания.

Найдем координаты МГУ в проекции Гаусса - Крюгера. Геодезические координаты этого пункта в системе СК-95 получены в контрольной работе №1.2 ([1], таблицы 5-6), из которых выбираем криволинейные координаты:

$$B_{95} = 55^{\circ}43'45,748'', \quad L_{95} = 37^{\circ}34'22,016'',$$

По формуле (3.2.3) определяем долготу L_j осевого меридиана и разность долгот l .

Точка с долготой 37° находится в седьмой зоне с осевым меридианом 39° , поэтому

$$l = L - L_0 = L_{95} - 39^{\circ} = 1^{\circ}25'37,984''.$$

Результаты вычисления представлены в таблице 5.1. Контролем правильности вычисления служит совпадение вычисленных по координатам x, y значений широты и долготы с исходными и значения сближения меридианов и масштаба, вычисленных по геодезическим и по плоским прямоугольным координатам.

Таблица 5.1.

Пример выполнения заданий 1-2

Вычисление плоских прямоугольных координат по геодезическим		Вычисление геодезических координат по плоским прямоугольным	
B	$55^{\circ}43'45,748''$	$x, \text{ м}$	$6\,179\,462,967$
L	$37^{\circ}34'22,016''$	$y, \text{ м}$	$-89\,667,4284$
L_0	39°	B	$55^{\circ}43'45,7482$
l	$-1^{\circ}25'37,984''$	l	$-1^{\circ}25'37,9843''$
$N, \text{ м}$	$6\,392\,872,781$	L_0	39°
$X, \text{ м}$	$6\,178\,539,987$	L	$37^{\circ}34'22,0157''$
$dx, \text{ м}$	$922,9808$		
$x, \text{ м}$	$6\,179\,462,967$		
$y, \text{ м}$	$-89\,667,4284$		
$n+y+500000, \text{ м}$	$7\,410\,332,5716$		
γ	$-1^{\circ}10'46,244''$	γ	$-1^{\circ}10'46,260''$
m	$1,000\,099$	m	$1,000098$

Дайте ответы на вопросы:

1. Где находится начало системы плоских прямоугольных координат в проекции Гаусса - Крюгера?

2. Чему равен масштаб изображения экватора и осевого меридиана в проекции Гаусса - Крюгера?
3. Чему равна длина участка экватора между меридианами ограничивающими шестиградусную зону для эллипсоида Красовского?
4. Длина линии ГАИШ-МГУ равна 3043 м. Рассчитайте масштаб карты, для которого влияние искажения линии при переходе с эллипсоида на плоскость будет пренебрегаемо мало.

После вычисления плоских прямоугольных координат заполнить таблицу 5.2 исходных данных

Таблица 5.2.

Исходные данные

Пункт	Координаты в СК-95		Координаты в МСК	
	x_c^u , м	y_c^u , м	x , м	y , м
Липицы	6080097,648	7403335,115	6066571,57	3186456,14
Зайцево	6076341,186	7406813,516	6062521,23	3189605,08
Малахово	6070878,836	7401697,578	6057508,71	3184026,33
Крюково	6075566,997	7402774,261	6062096,53	3185505,57

Задание 3. Преобразование местной системы координат в систему СК-95

Задание 3.1. Определение масштаба и угла разворота

В качестве местных систем координат, как правило, используют системы, созданные на основе СК-42 или СК-95, с помощью произвольно заданных параметров m, φ, x_0, y_0 отдельно для каждого из заданных регионов.

Если МСК не опирается на специально выполненные для ее создания измерения, а получена трансформированием с заданными параметрами m, φ, x_0, y_0 из ГГС, параметры не связаны с ошибками измерений. В этом случае в пределах одного региона параметры трансформирования определимы по двум пунктам с известными координатами в двух системах отсчета координат.

При определении параметров преобразования МСК и спутниковой геоцентрической системы нужно учитывать ошибки координат обеих систем. В этом случае должны быть известны координаты нескольких пунктов в обеих системах.

Установим связь МСК с системой СК-95, созданной по спутниковым измерениям.

Параметры преобразования находим согласно методике, описанной в разделе 3.3. Угол поворота осей систем и смещение начала координат в общем случае нельзя считать малыми величинами и для связи СК следует использовать формулы (3.3.3)-(3.3.9). Для этого в обеих системах вычисляем расстояния между пунктами и углы по всем сторонам замкнутого полигона, образованного заданными в исходных данных пунктами. Пример вычисления приведен в таблице 5.3.

Таблица 5.3.

Определение параметров m и φ

линия	Липицы- Зайцево	Зайцево- Малахово	Малахово- Крюково	Крюково- Липицы	среднее
$\Delta x_{\text{МСК}}$	-4050,34	-5012,52	4587,82	4475,04	0
$\Delta y_{\text{МСК}}$	3148,94	-5578,75	-1479,24	950,57	0
$S_{\text{МСК}}$	5130,40712	7499,85389	4820,39867	4574,8843	5506,38599
$A_{\text{МСК}}$	2,480753261	3,980401925	0,225745435	0,209305	1,74559093
$\Delta x_{\text{СК95}}$	-3756,462	-5462,35	4688,161	4530,651	0
$\Delta y_{\text{СК95}}$	3478,401	-5115,938	1076,683	560,854	0
$S_{\text{СК95}}$	5119,597667	7483,988852	4810,20788	4565,233367	5494,756941
$A_{\text{СК95}}$	2,394609068	3,894255062	0,311903536	0,123164458	1,659443506
$S_{\text{СК95}}/S_{\text{МСК}}$	0,997893058	0,997806223	0,997885898	0,997890449	0,997888507
$A_{\text{МСК}}-A_{\text{СК95}}$	0,086144192	0,086146863	0,086158101	0,086140543	0,086147425

За параметры связи МСК и СК-95 принято:

$$S_{95}/S_{\text{МСК}} = 1+m = 0,997888507,$$

$$\varphi = A_{\text{М}} - A_{95} = 0,0861474 = 4,936^{\circ}.$$

Задание 3.2. Определение начала местной системы координат в СК-95

Координаты x_0, y_0 начала МСК в СК-95 находим по формуле (3.3.10), записав ее в виде

$$\begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{МСК} - \frac{1}{(1+m)} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{СК95} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{МСК} - R_\varphi \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{СК95} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{МСК} - \begin{bmatrix} 0,998399665 & -0,086222916 \\ 0,086222916 & 0,998399665 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{СК95}, \quad (5.3.1)$$

R_φ – матрица преобразования.

В системах СК-95, для устранения отрицательных значений y , начало координат смещено к западу на 500 км, в МСК смещение произвольное. Ширина зоны может принимать значения 3° или 6° , а также произвольно заданные значения. Первая цифра в значении y означает номер зоны, в которой находится данная точка. Поэтому при определении x_0, y_0 в системе СК-95 используем для y_{95} значение $y-7500000$ м, а в МСК $y-3250000$.

Пример вычисления координат x_0, y_0 с использованием всех пунктов приведен в таблице 5.4.

Таблица 5.4.

Вычисление координат x_0, y_0 начала МСК в СК-95

пункт	Липицы	Зайцево	Малахово	Крюково
x_{95} , м	6080097,648	6076341,186	6070878,836	6075566,997
$y_{95}-7500000$, м	-96664,885	-93186,484	-98302,422	-97225,739
$X_{МСК}$, м	6066571,57	6062521,23	6057508,71	6062096,53
$Y_{МСК}$, м	3186456,14	3189605,08	3184026,33	3185505,57
$Y_{МСК}-3250000$, м	-63543,86	-60394,92	-65973,67	-64494,43
$R_\varphi \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{СК95}$	6078702,183	6074651,8150	6069639,3180	6074227,1411
	427733,5596	430882,5016	425303,7707	426782,9576
x_o , м	-12130,6132	-12130,5849	-12130,6076	-12130,6112
y_o , м	-491277,4196	-491277,4213	-491277,4407	-491277,3880
Среднее x_o	-12130,6042			
Среднее y_o	-491277,4174			
$v_x = x_o - x_{оср}$	-0,0090	0,0193	-0,0034	-0,0070
$v_y = y_o - y_{оср}$	-0,0022	-0,0039	-0,0233	0,0294
Сумма $v_x^2 + v_y^2$	0,001968			

С полученными параметрами $1+m = 0,997888507$, $\varphi = 4,936^\circ$, $x_o = -12130,6042$ м, $y_o = -491277,4174$ м вычислим «измеренные» наземные координаты x_n^u , y_n^u в системе СК-95 по исходным координатам в МСК. Для вычисления используем формулу (3.3.10), которую запишем в виде

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{СК95} = (1+m) \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{МСК} - \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} \right) = \\ = \begin{bmatrix} 0,994187944 & 0,085859209 \\ -0,085859209 & 0,994187944 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{МСК} - \begin{bmatrix} -12130,6042 \\ -491277,4174 \end{bmatrix} \right).$$

Результат вычисления по этим формулам приведен в таблице 5.5. В этой же таблице помещены координаты в «спутниковой» системе СК-95.

Таблица 5.5.

Сравнение координаты в системе СК-95, преобразованных из МСК и полученных по спутниковым измерениям

Пункт	пункты в СК95, преобразованные из МСК		пункты в СК95 по спутниковым измерениям		разности	
					$x_n^u - x_c^u$	$y_n^u - y_c^u$
	x_n^u	y_n^u	x_c^u	y_c^u	l_x , м	l_y , м
Липицы	6080097,284	-96665,017	6080097,648	-96664,885	-0,364	-0,132
Зайцево	6076340,850	-93186,620	6076341,186	-93186,484	-0,336	-0,136
Малахово	6070878,476	-98302,575	6070878,836	-98302,422	-0,360	-0,153
Крюково	6075566,638	-97225,839	6075566,997	-97225,739	-0,359	-0,100

Расхождения координат составляют около 40 см, что может быть вызвано как ошибками измерений, так и ошибками в определении параметров преобразования.

Разности l_x , и l_y , можно использовать для определения параметров связи «наземной» и «спутниковой» систем.

Вопросы к заданию 3:

1. Где находится начало пространственной системы координат ПЗ-90?

2. Где находится начало плоской прямоугольной системы координат СК-95?

3. Сколько неизвестных содержат формулы преобразования плоских прямоугольных систем координат? Перечислите эти неизвестные.

Задание 4. Определение параметров связи «наземной» и «спутниковой» систем СК-95.

Для установления связи двух реализаций системы СК-95 – наземной и спутниковой - можно использовать формулы (3.3.13)-(3.3.15), в которые входят двойные разности координат. Для нахождения двойных разностей вычтем из всех значений $l_x = x_n^u - x_c^u$, $l_y = y_n^u - y_c^u$ (таблица 5.5.) значения для пункта Липицы. Двойные разности и разности координат помещены в таблицу 5.6.

Таблица 5.6

Разности координат и свободных членов

	Липицы	Зайцево	Малахово	Крюково
$l_x - l_{x, \text{Липицы}}, \text{ м}$	0,0000	0,0283	0,0043	0,0050
$l_y - l_{y, \text{Липицы}}, \text{ м}$	0,0000	-0,0038	-0,0208	0,0322
$x - x_{\text{Липицы}}, \text{ м}$	0,0000	-3756	-9219	-4531
$y - y_{\text{Липицы}}, \text{ м}$	0,0000	3478	-1638	-561

Используя данные таблицы 5.6, по формуле (3.3.14) получим

$$1.347197 \cdot 10^8 \begin{bmatrix} m \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3756 & 3478 & -9219 & -1637 & -4531 & -561 \\ 3478 & 3756 & -1637 & 9219 & -561 & 4531 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +0.0283 \\ -0.0038 \\ +0.0043 \\ -0.0208 \\ +0.0050 \\ +0.0322 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,2297 \\ +0,2086 \end{bmatrix} 10^{-6} \quad \varphi = 0.048''.$$

С найденными параметрами формула (3.3.15) для определения координат получает вид.

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,2297 & 0,2086 \\ -0,2086 & -1,2297 \end{bmatrix} 10^{-6} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \end{bmatrix} = R_\varphi \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \end{bmatrix}.$$

При вычислении по этой формуле можно использовать значения координат x, y в любой системе СК95, как спутниковой, так и наземной. Результат помещен в таблицу 5.7.

Таблица 5.7. Определение смещения начала системы координат

	Липицы	Зайцево	Малахово	Крюково	
$R_\varphi \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	-7,4967	-7,4913	-7,4857	-7,4912	
	-1,1494	-1,1529	-1,1455	-1,1478	
l_x	-0,364	-0,336	-0,360	-0,359	
l_y	-0,132	-0,136	-0,153	-0,100	среднее
x_o	-7,132	-7,155	-7,126	-7,132	-7,1362
y_o	-1,017	-1,017	-0,993	-1,048	-1,0187
$v_x = x_o - x_{ocp}$	0,0039	-0,0190	0,01066	0,0044	$\Sigma(v_x^2 + v_y^2)$
$v_y = y_o - y_{ocp}$	0,0014	0,0017	0,0261	-0,0292	0,002030
dv_x	-	-0,0230	0,0067	0,0005	$\Sigma(dv_x^2 + dv_y^2)$
dv_y	-	0,0003	0,0248	-0,0305	0,002117

Формулы взаимного преобразования наземных и спутниковых координат в системе СК95 получают вид:

Преобразование наземных координат в спутниковые

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_c = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_n - 10^{-6} \begin{bmatrix} -1,2297 & 0,2086 \\ -0,2086 & -1,2297 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7,1362 \\ -1,0187 \end{bmatrix}$$

Преобразование спутниковых координат в наземные

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_c + 10^{-6} \begin{bmatrix} -1,2297 & 0,2086 \\ -0,2086 & -1,2297 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7,1362 \\ -1,0187 \end{bmatrix}$$

С полученными значениями параметров связи вычислим значения x_c, y_c спутниковых координат по наземным координатам x_n^u, y_n^u (таблица 5.8).

Таблица 5.8

Наземные координаты, приведенные в спутниковую систему СК-95

	Липицы	Зайцево	Малахово	Крюково
$x_n^u - x_o$	6080090,148	6076333,714	6070871,340	6075559,502
$y_n^u - y_o$	-96663,8333	-93185,4319	-98301,3706	-97224,6873

	Липицы	Зайцево	Малахово	Крюково
$R_{\varphi} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	-7,49676	-7,4913	-7,48577	-7,4912
	-1,1494	-1,1529	-1,1455	-1,1478
x_c трансформированные из МСК	6080097,645	6076341,205	6070878,826	6075566,993
y_c трансформированные из МСК	-96664,886	-93186,486	-98302,449	-97225,710
x_c^u «измеренные» спутниковые в СК-95	6080097,648	6076341,186	6070878,836	6075566,997
y_c^u «измеренные» спутниковые в СК-95	-96664,885	-93186,484	-98302,422	-97225,739
$x_c - x_c^u$, м	-0,003	-0,019	-0,010	-0,004
$y_c - y_c^u$, м	-0,001	-0,002	-0,027	0,029
$\Sigma(x_c - x_c^u)^2 + (y_c - y_c^u)^2$	0,002061			

Разности полученных по уравненным параметрам преобразования координат наземной и спутниковой систем менее 3 см.

Вопросы к заданию 4:

1. Определите начало координат спутниковой системы в наземной системе координат.
2. Напишите формулы вычисления спутниковых координат по координатам в наземной системе.

Задание 5. Оценивание точности.

Оценивание точности нужно выполнить согласно разделу 3.4. Ошибки разностей координат наземной и спутниковой систем СК-95 находим по формулам (3.4.1)-(3.4.4). Суммы квадратов одинарных и двойных разностей вычислены в таблицах 5.4 и 5.7 – 5.8. Результат вычисления ошибки разностей координат:

- 1) По разностям $v_x = x_0 - x_{0cp}$, $v_y = y_0 - y_{0cp}$ (таблица 5.4)

$$m_{lx,ly} = \sqrt{\frac{\sum v_x^2 + v_y^2}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{0,001968}{6}} = 0,0181 \text{ м}$$

2) По разностям трансформированных и измеренных координат (таблица 5.8)

$$m_{lxy} = \sqrt{\frac{\sum (x - x^u)^2 + (y - y_u^u)^2}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{0,002061}{6}} = 0,0185 м$$

3) По двойным разностям (таблица 5.7)

$$m_{lx,ly} = \sqrt{\frac{\sum dv_x^2 + dv_y^2}{4(n-1)}} = \sqrt{\frac{0,002117}{8}} = 0,0163 м$$

Результаты вычисления совпадают. Полученные значения ошибок соответствуют предварительной оценке точности координат.

6. Методические указания к контрольной работе 2.2. - Вычисление нормальных и динамических высот

Работа состоит из шести заданий:

1. Вычисление геопотенциального числа
2. Вычисление нормальной и динамической высоты
3. Вычисление теоретической суммы превышений
4. Вычисление разности нормальных высот
5. Спутниковое нивелирование
6. Оценка точности нивелирования

Все задания нужно выполнить для одного полигона нивелирования.

Схема нивелирной сети и номера полигонов приведена на рис.7.

Для выполнения задания нужно определить согласно шифру номер полигона.

Две последние цифры шифра:

- 00 полигон № 25;
- 01 – 25 номер полигона равен шифру;
- 26 -50 номер полигона равен шифру минус 25;
- 51 – 75 номер полигона равен шифру минус 50;
- 76 – 99 номер полигона равен шифру минус 75.

Исходные данные для выбранного полигона даны в приложениях 2-3.

Задание 1. Вычисление геопотенциального числа

Геопотенциальное число определено формулой (4.1.3). Обычно определяют не геопотенциальное число, а разность геопотенциальных чисел между реперами 1-2, т.е. разность потенциалов $W_1 - W_2$. Ее можно найти с помощью выражения (4.1.1), из которого следует

$$W_1 - W_2 = g_m h .$$

В качестве g_m можно использовать среднее значение силы тяжести из ее значений на реперах.

Пример выполнения задания. Полигон А. Исходные данные

репер	Широта, B	Превышение, h , м	Сила тяжести? g , мГал	Аномалия силы тяжести, $g-\gamma$, мГал	Геодезическая высота, H , м	Аномалия высоты, ζ^{TP} , м	Длина секции, ΔL , км
298	49 59		981081	24	25,387	49,01	
		3,171					127,88
299	50 42		981138,8	19	28,563	48,03	
		-9,540					26
300	50 40		981146,8	27	19,024	48,47	
		113,830					107,07
301	50 17		981084,6	34	132,864	49,57	
		59,190					49,02
290	49 54		981003,2	5	192,063	50,5	
		-108,093					55,99
294	49 30		981003,8	8	83,969	50,3	
		-56,201					109,89
296	49 51		981062,4	18	27,735	49,2	
		-2,347					2
298	сумма	0,010					477,85

Уравненное геопотенциальное число исходного репера

$$(W_1 - W_2)_{298} = 24,905881 \text{ кГал} \cdot \text{м}$$

Вычисление геопотенциального числа

	превышение	Сила тяжести	Разность потенциалов		Геопотенциальное число
репер	h	g	$W_1 - W_2$	$W_1 - W_2$ уравнен	$W_0 - W$
	м	мГал	кГал м	кГал м	кГал м
298		981081			24,905881
	3,171		3,111100	3,107933	
299		981138,8			28,013814
	-9,54		-9,360103	-9,363269	
300		981146,8			18,650546
	113,83		111,680401	111,677235	
301		981084,6			130,327781
	59,19		58,067987	58,064821	
290		981003,2			188,392602
	-108,093		-106,039607	-106,042773	
294		981003,8			82,349829
	-56,201		-55,135040	-55,138206	
296		981062,4			27,211622
	-2,347		-2,302575	-2,305741	
298		981081			24,905881
сумма	0,01		0,0221632	0	

Вопросы к заданию 1. -

Как называют разность $W_0 - W$? В каких единицах ее выражают?

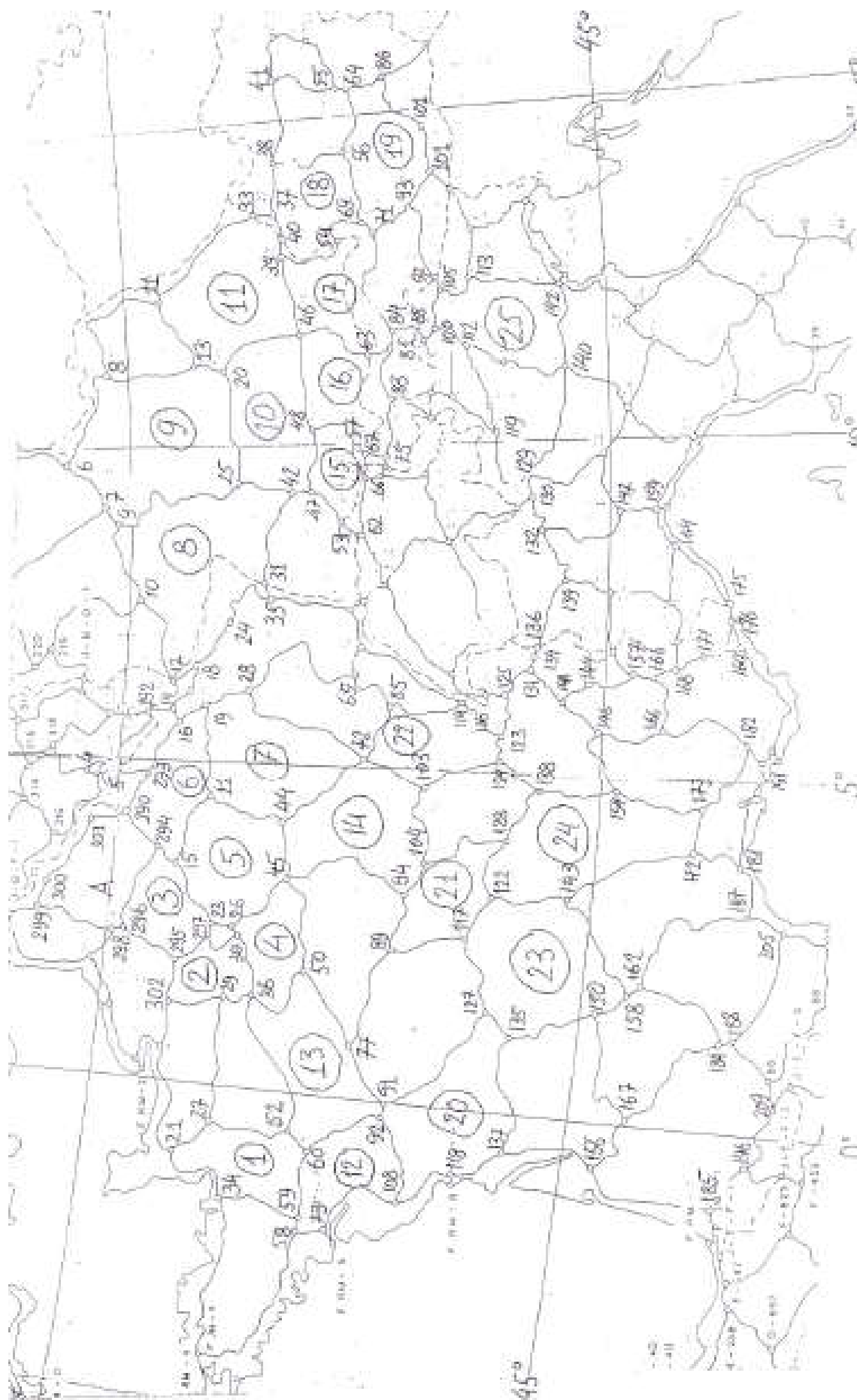


Рис.7. Схема нивелирной сети и номера полигонов

Задание 2. Вычисление нормальной и динамической высоты

2.1. Выпишите из [1, стр.107-10], [6, стр. 12, 50-52] или любого другого доступного Вам учебника определение нормальной высоты.

2.2. Сделайте чертеж, поясняющий это определение.

2.3. Выпишите формулы (7.15) и (7.19) из учебника [1] или формулы (3.8), (3.38) - (3.39) из учебного пособия [4]. Поясните все обозначения в этих формулах.

2.4. Какие измерения необходимо выполнить для вычисления нормальной высоты по формулам (7.19) и (3.39)? При каком условии эти формулы верны?

2.5. Какие измерения нужно выполнить для вычисления нормальной высоты по формулам (7.15) или (3.8)?

2.6. Вычислите нормальную высоту для нескольких точек по формуле (4.2.4):

$$H_M^\gamma = \frac{W_0 - W_p}{\gamma_m}, \gamma_m = \gamma_0(B) - 0,15443H^\gamma,$$

$\gamma_0(B)$ -нормальная сила тяжести на эллипсоиде на широте B . Для ее вычисления можно использовать формулу Гельмерта 1901-1909 гг.

$$\gamma_0(B) = 978030(1 + 0,0053025 \sin^2 B - 0,000007 \sin^2 2B)$$

или формулу

$$\gamma_o(B) = 978032,8(1 + 0,0053025 \sin^2 B - 0,0000058 \sin^2 2B),$$

соответствующую системе ПЗ-90.

2.7. Вычислить динамическую высоту

Для вычисления динамической высоты используйте любую из следующих формул

$$H^d = \frac{W_0 - W}{\gamma_0^{45}}, H^d = \frac{W_0 - W}{g_{cp}}.$$

Найдите разности нормальной и динамической высоты.

Пример выполнения задания 2

Для вычисления нормальной силы тяжести должны быть известны геодезическая широта B и нормальная высота H' . Широта задана в исходных данных. Нормальную высоту в первом приближении можно принять равной

$$(W_o - W)/0,98.$$

Таблица 6.2 Вычисление нормальной и динамической высоты

	широта	Уравненное геопотенциал ное число	Нормаль ная сила тяжести	Нормальная высота		Динамиче ская высота м	разность
				1-ое приблж	2-ое приблж		
	B	$W_o - W$, кГал м	γ_o , кГал	H' , м	H' , м	H^d , м	$H^d - H'$, мм
298	49° 59'	24,905881	0,981065	25,38668	25,38668	25,3982	11,521
299	50 42	28,013814	0,981129	28,55277	28,55277	28,56757	14,801
300	50 40	18,650546	0,981126	19,00939	19,00939	19,01922	9,825
301	50 17	130,327781	0,981092	132,8423	132,8423	132,904	61,664
290	49 54	188,392602	0,981057	192,036	192,0359	192,1166	80,659
294	49 30	82,349829	0,981022	83,94403	83,94403	83,97766	33,626
296	49 51	27,211622	0,981053	27,73728	27,73728	27,74952	

Как видно из результатов вычислений, для вычисления нормальной высоты достаточно двух приближений.

Задание 2.8. Для наибольшей нормальной высоты оцените разность длин отрезков силовой линии и нормали к эллипсоиду.

Задание 3. Вычисление теоретической суммы превышений

Для вычисления теоретической суммы превышений используйте формулу (4.1.2) из раздела 4.1 настоящих методических указаний. В качестве постоянной g_o используйте любое значение силы тяжести.

Пример выполнения задания приведен в таблице 6.3.

$$g_o = 981003,5 \text{ мГал}$$

Таблица 6.3. Вычисление теоретической суммы превышений и невязки полигона

№ре- пера	g 980000+ мГал	g_m мГал	$g_m - g_o$ мГал	h м	$(g_m - g_o)h/g_o$ м	Уравненное превышение h , м
298	81,0					
		981109,9	106,4761	3,171	0,00034	3,1678
299	138,8					
		981142,8	139,3765	-9,540	-0,00136	-9,5432
300	146,8					
		981115,7	112,2547	113,830	0,013028	113,8268
301	84,6					
		981043,9	40,41775	59,190	0,002439	59,1868
290	3,2					
		981003,5	0	-108,093	0	-108,0962
294	3,8					
		981033,1	29,62394	-56,201	-0,0017	-56,2042
296	62,4					
		981071,7	68,2547	-2,347	-0,00016	-2,3502
298	81,0					
			сумма	0,010	0,0126	-0,0126

Теоретическая сумма превышений $(\sum h)_{\text{теор}} = -0,0126 \text{ м}$

Невязка $f_h = \sum h - (\sum h)_{\text{теор}} = 0,0226 \text{ м}$.

Вопрос для самопроверки: Почему при безошибочных измерениях сумма превышений в замкнутом нивелирном ходе не равна нулю?

Задание 4. Вычисление разности нормальных высот

Прочитайте §45 учебника [2] и найдите формулу для вычисления разности нормальных высот.

Задание 4.1. Напишите формулу для разности нормальных высот

$$H'_2 - H'_1 = ?$$

Пример вычисления по этой формуле приведен в таблице 6.3. Через δh обозначена сумма поправок в нивелирное превышение.

Таблица 6.4. Вычисление разности нормальных высот

	Уравненное превышение, h , м,	Аномалия силы тяжести, $g-\gamma$, мГал	Средняя аномалия, $(g-\gamma)_m$, мГал	$\gamma_o^1 - \gamma_o^2$, мГал	Поправка в превышение, δh , м	Разность нормальных высот, $H'_2 - H'_1$, м	H' , м
298		24					25,3867
	3,1678		21,5	-63,8	-0,00168	3,1661	
299		19					28,5528
	-9,5432		23	3,0	-0,00015	-9,5434	
300		27					19,0094
	113,8268		30,5	34,1	0,00618	113,8330	
301		34					132,8423
	59,1868		19,5	34,2	0,00684	59,1936	
290		5					192,0360
	-108,0962		6,5	35,7	0,00431	-108,0919	
294		8					83,9440
	-56,2042		13	-31,3	-0,00252	-56,2068	
296		18					27,7373
	-2,3502		21	-11,9	-0,00037	-2,3506	
298		24					25,3867
Сумма	-0,0126				0,01259	0	

Задание 4.2. Напишите формулу для поправки δh

$$\delta h = ?$$

Задание 4.3. Сравните сумму поправок δh с теоретической суммой превышений. Напишите соотношение между этими величинами

Задание 5. Спутниковое нивелирование

Спутниковое нивелирование нужно выполнить согласно разделу 4.3.

Нормальную спутниковую высоту определяет формула (4.3.1)

$$H'_c = H - \zeta^{TP}.$$

Интерполированная высота Молоденского находится по формулам

$$\begin{aligned}(H'_m - H'_c)_{инт} &= (H'_m - H'_c)_1 + k \Delta L, \\ k &= [(H'_m - H'_c)_2 - (H'_m - H'_c)_1] / L \\ H'_{инт} &= H'_c + (H'_m - H'_c)_{инт}\end{aligned}$$

Спутниковое нивелирование нужно выполнить для прямолинейного участка полигона, содержащего по крайней мере три репера. Рекомендуемые для интерполирования участки выделены в исходных данных жирным шрифтом.

Пример выполнения задания

репер	H	ζ^{TP}	H'_c	$H'_m - H'_c$	L	$H'_m - H'_c$ интерпол	H' интерп	ΔH
299	76,0284	48,03	27,9984	0,5545	0	0,5545	28,5529	0
300	66,9655	48,47	18,4955	0,5137	26	0,5460	19,0415	-0,0322
301	182,626	49,89	132,736	0,1039	133,07	0,5109	133,2469	-0,4071
290	242,0359	50,5	191,5359	0,4949	182,09	0,4949	192,0308	0

$$k = (0,494904 - 0,554483) / 182,09 = -0,000330 \text{ м/ км}$$

В последнем столбце приведены разности $\Delta H = H'_m - H'_{инт}$ полученных из геометрического нивелирования и интерполированных нормальных высот Молоденского.

Задание 6. Оценивание точности

Оценивание точности выполняем согласно разделу 4.4.

Невязка полигона получена в задании 6.1: $f_h = \sum h - (\sum h)_{теор} = 0,0226 \text{ м}$.

Случайную ошибку геометрического нивелирования находим по формуле (4.4.1)

$$\eta = f_h / \sqrt{L} = 0,0226 / \sqrt{477,85} = 0,00103 \text{ м} / \sqrt{\text{км}} = 1,03 \text{ мм} / \sqrt{\text{км}}.$$

Это значение соответствует точности используемой в заданиях Европейской нивелирной сети, в разных частях которой случайная ошибка нивелирования составляет $0,81 - 2,0 \text{ мм} / \sqrt{\text{км}}$.

Для оценивания точности спутникового нивелирования используем разности ΔH нивелирной и интерполированной нормальной высоты в определяемых пунктах

$$m_{H_c} = \sqrt{\frac{\sum \Delta H^2}{n}}, \text{ } n - \text{число разностей высот. В рассмотренном примере } n = 2,$$

$$m_{H_c} = \sqrt{\frac{0,1668}{2}} = 0,2888 \text{ м}.$$

Случайная ошибка спутникового нивелирования

$$\eta_c = m_{H_c} / \sqrt{L} = 0,2888 / \sqrt{182} = 0,021 \text{ м} / \sqrt{\text{км}} = 2,1 \text{ см} / \sqrt{\text{км}}$$

Спутниковое нивелирование по точности соответствует геометрическому нивелированию III-IV классов.

Приложения

1. «Спутниковые» координаты в системе СК-95

Пункт	x_{95} , м	y_{95} , м	$y_{95}+500000$
Останкино	6186019,322	-86906,081	7413093,919
ГАИШ	6182506,894	-89638,234	7410361,766
Нескучный Сад	6179424,811	-88164,733	7411835,267
Люблино	6178321,194	-82899,713	7417100,287

2. Координаты в местных системах

Пункт	Местная система 1		Местная система 2	
	x , м	y , м	x , м	y , м
Останкино	6171482,48	3205332,97	6153563,81	4428096,58
ГАИШ	6168211,27	3202302,31	6149569,86	4425733,14
Нескучный сад	6165007,06	3203507,71	6146575,56	4427663,89
Люблино	6163451,23	3208669,13	6146127,87	4433256,27

Пункт	Местная 3			Местная 4		
	x , м	y , м	y , м	x , м	y , м	y , м
Останкино	6026541	4396545	-103455	6187596,19	6714228,21	214228,21
ГАИШ	6023113	4393896	-106104	6184335,34	6711312,46	211312,46
Нескучн. сад	6020117	4395340	-104660	6181213,17	6712549,23	212549,23
Люблино	6019059	4400469,1	-99530,9	6179775,94	6717638,35	217638,35

3. Вычисление плоских прямоугольных координат в системе Гаусса-Крюгера по криволинейным координатам

$$x' = X + a_2 l^2 + a_4 l^4 + a_6 l^6 + a_8 l^8; \quad x = x' + x_0; \quad (4.4.1)$$

$$y' = b_1 l + b_3 l^3 + b_5 l^5 + b_7 l^7; \quad y = y' + y_0 + n l 0^6; \quad (4.4.2)$$

где

$$m_0 = a(1 - e^2); \quad m_2 = \frac{3}{2} e^2 m_0; \quad m_4 = \frac{5}{4} e^2 m_2; \quad m_6 = \frac{7}{6} e^2 m_4; \quad m_8 = \frac{9}{8} e^2 m_6;$$

$$q_0 = m_0 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{3}{8} m_4 + \frac{5}{16} m_6 + \frac{35}{128} m_8; \quad q_2 = \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_4 + \frac{15}{32} m_6 + \frac{7}{16} m_8;$$

$$q_4 = \frac{1}{8} m_4 + \frac{3}{16} m_6 + \frac{7}{32} m_8; \quad q_6 = \frac{1}{32} m_6 + \frac{1}{16} m_8;$$

$$X = q_0 B - \sin B \cos B \left[(q_2 - q_4 + q_6) + \left(2q_4 - \frac{16}{3} q_6 \right) \sin^2 B + \frac{16}{3} q_6 \sin^4 B \right];$$

широта B в первом члене этой формулы выражена в радианах;

$$\eta^2 = \cos^2 B \frac{e^2}{1 - e^2}; \quad t = \operatorname{tg} B;$$

$$a_2 = \frac{1}{2} N \sin B \cos B; \quad a_4 = \frac{1}{24} N \sin B \cos^3 B (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4);$$

$$a_6 = \frac{1}{720} N \sin B \cos^5 B (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330\eta^2 t^2);$$

$$a_8 = \frac{1}{40320} N \sin B \cos^7 B (1385 - 3111t^2 + 543t^4 - t^6);$$

$$b_1 = N \cos B; \quad b_3 = \frac{1}{6} N \cos^3 B (1 - t^2 + \eta^2); \quad b_5 = \frac{1}{120} N \cos^5 B (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2);$$

$$b_7 = \frac{1}{5040} N \cos^7 B (61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6);$$

$$l = L - L_0;$$

l – разность долготы точки и осевого меридиана в радианах; X – длина меридиана от экватора до точки с широтой B ; n – номер зоны, $L_0 = 6^\circ * n - 3^\circ$ – долгота осевого меридиана шестиградусной зоны;

4. Вычисление криволинейных координат по плоским прямоугольным

$$y' = y - y_0 - n10^6; B = B_x + A_2 y'^2 + A_4 y'^4 + A_6 y'^6 + A_8 y'^8; \quad (4.4.3)$$

$$l = B_1 y' + B_3 y'^3 + B_5 y'^5 + B_7 y'^7; L = l + L_0; \quad (4.4.4)$$

где

$$x' = x - x_0; \beta_0 = \frac{x'}{q_0}; \beta_2 = -\frac{1}{2} \frac{q_2}{q_0}; \beta_4 = \frac{1}{4} \frac{q_4}{q_0}; \beta_6 = -\frac{1}{6} \frac{q_6}{q_0};$$

$$d_2 = \beta_2 \left(\frac{1}{2} \beta_2^2 - \beta_4 - 1 \right); d_4 = \beta_2^2 - \beta_4; d_6 = 3\beta_2 \beta_4 - \frac{3}{2} \beta_2^3 - \beta_6;$$

$$B_x = \beta_0 + d_2 \sin(2\beta_0) + d_4 \sin(4\beta_0) + d_6 \sin(6\beta_0);$$

$$\eta_x^2 = \cos^2 B_x \frac{e^2}{1 - e^2}; t_x = \operatorname{tg} B_x; N_x = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 B_x)^{1/2}};$$

$$A_2 = -\frac{1}{(2N_x^2)} (1 + \eta_x^2) t_x; A_4 = -\frac{A_2}{(12N_x^2)} (5 + 3t_x^2 + \eta_x^2 - 9\eta_x^2 t_x^2 - 4\eta_x^4)$$

$$A_6 = \frac{A_2}{(360N_x^4)} (61 + 90t_x^2 + 45t_x^4 + 46\eta_x^2 - 252\eta_x^2 t_x^2 - 90\eta_x^2 t_x^4);$$

$$A_8 = -\frac{A_2}{(20160N_x^6)} (1385 + 3633t_x^2 + 4095t_x^4 + 1575t_x^6);$$

$$B_1 = \frac{1}{(N_x \cos B_x)}; B_3 = -\frac{B_1}{(6N_x^2)} (1 + 2t_x^2 + \eta_x^2); B_5 = \frac{B_1}{(120N_x^4)} (5 + 28t_x^2 + 24t_x^4 + 6\eta_x^2 + 8\eta_x^2 t_x^2);$$

$$B_7 = -\frac{B_1}{(5040N_x^6)} (61 + 662t_x^2 + 1320t_x^4 + 720t_x^6);$$

С помощью формул (4.4.1)-(4.4.4) можно перевычислять координаты в проекции Гаусса-Крюгера для любого отсчетного эллипсоида.

5. Варианты исходных данных для контрольной работы № 2.2

Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км	Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км	Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км
Вариант 1			Вариант 2			Вариант 3		
21			29			295		
	184,2120	68,97		-94,3463	85,03		-30,0484	95,97
27			302			296		
	-113,4040	117,1		47,4009	53,02		56,2003	109,89
52			295			294		
	-51,0840	39		-24,0567	59,03		-28,2244	36
60			297			15		
	-24,5991	92,08		13,3310	72,05		-6,3207	95,06
59			30			23		
	11,9918	112,11		100,5567	81,03		-15,6928	9
34			36			297		
	-7,0967	119,9		-42,9095	44,01		24,0567	59,03
21			29			295		

[illegible]

Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км	Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км	Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км
Вариант 7			Вариант 8			Вариант 9		
19			9					
	4,8146	60,98		156,0351	249,28	6		
28			25				3,1971	144,54
	78,0492	197,63		382,5488	98,29	8		
72			42				107,2412	131,30
	-165,6454	142,05		-526,0392	100,91	13		
44			31				175,9238	44,22
	14,7396	107,99		-1,1788	11,1	20		
22			35				-270,6020	162,26
	68,0300	129,87		61,8699	121,07	25		
19			24				-156,0350	249,28
				6,6988	55,01	9		
			18				-23,9707	27,65
				114,2420	44,4	7		
			12				164,2658	89,12
				-135,2364	104,72	6		
			10					
				-58,9097	135,43			
			9					

Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км	Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км	Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км
Вариант 10			Вариант 11			Вариант 12		
20			11			58		
	-10,8425	163,81		-56,2852	179,1		1,7049	13
46			33			59		
	57,6482	122,86		8,0803	7,53		24,5991	92,08
48			37			60		
	-18,1335	99,42		22,7656	81,33		53,3066	117,92
47			40			92		
	83,2019	35,25		18,0379	11,68		-13,2424	117,1
42			39			108		
	-382,5488	98,29		174,9949	115,44		-55,8967	116,01
25			46			73		
	270,6022	162,26		10,8425	163,81		-10,4991	40,98
20			20			58		
				-175,9240	44,22			
			13					
				-2,4471	105,52			
			11					

Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км	Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км	Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км
Вариант 13			Вариант 14			Вариант 15		
36			44			47		
	-34,0116	121,07		165,6455	142,05		18,1335	99,42
50			72			48		
	-62,8539	105,93		-58,3812	80		-35,0281	90,05
77			103			57		
	26,6212	86,96		-13,9277	116,01		-142,6720	29,22
91			104			67		
	9,6872	16		-3,8766	49,02		-5,6911	38,04
92			94			66		
	-53,3066	117,92		-128,3803	185,87		15,5649	107,82
60			45			62		
	51,0840	39		38,8533	68,97		-2,3384	15
52			44			53		
	62,7868	185,87					152,0228	96,07
36						47		

Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км	Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км	Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км
Вариант 16			Вариант 17			Вариант 18		
48			39			54		
	-57,6482	52,14		106,4905	78,7		-106,4905	64,81
46			54			39		
	405,5140	101,45		75,6028	175,69		-18,0379	13,4
63			69			40		
	-321,7550	30,5		90,1855	27,86		-22,7657	93,33
81			71			37		
	162,9669	68,87		-67,9144	182,5		-65,4670	83,91
83			84			38		
	-332,2190	88		54,4354	12,01		396,6829	115,87
75			81			56		
	-34,5647	44,5		321,7547	42,68		-108,3300	100
67			63			69		
	142,6722	28,8		-405,5141	123,19		-75,6028	121,74
57			46			54		
	35,0281	78,5		-174,9949	115,44			
48			39					

Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км	Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км	Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км
Вариант 19			Вариант 20			Вариант 21		
56			92			89		
	-178,8416	104,29		-9,6964	16		73,7525	80
64			91			94		
	-121,9270	63,48		318,9562	187,27		3,8766	49,02
86			127			104		
	103,1420	128,07		-163,3974	40,98		78,0963	127,88
102			135			128		
	42,0594	71,57		-223,8153	179,86		58,0760	92,94
101			137			122		
	54,4008	49,66		-5,5224	84,03		-130,4721	68,03
93			118			117		
	83,0068	71,57		70,2360	102,04		-83,2857	101,01
71			108			89		
	18,1435	119,16		13,2424	117,1			
56			92					

Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км	Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км	Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км
Вариант 22			Вариант 23			Вариант 24		
72			117			122		
	10,1408	100		130,4721	68,03		-58,0760	25,9
85			122			128		
	524,1174	116,01		88,3932	100		-110,5253	80
114			143			138		
	-111,6410	2		-211,9261	171,23		-49,5811	112,11
116			158			154		
	-216,5630	70,03		-95,3862	62,03		-84,5750	105,93
123			150			173		
	-238,9390	37,01		114,6141	121,95		98,6479	60,98
124			135			172		
	-25,5672	95,06		163,3974	40,98		292,4626	196,08
103			127			143		
	58,3820	80		-189,5228	121,95		-88,3932	100
72			117			122		

Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км	Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км	Ре пер	Превышение h м	Длина секции ΔL , км
Вариант 25			Вариант А			Вариант		
112			298					
	472,5478	48,8		3,1710	127,88			
100			299					
	480,8286	58,34		-9,5404	26			
105			300					
	-384,5639	62,48		113,8276	107,07			
113			301					
	-831,3940	128,67		59,1872	49,02			
142			290					
	57,3914	122,76		-108,0888	55,99			
140			294					
	205,0927	156,02		-56,2003	109,89			
112			296					
				-2,3471	2			
			298					

6.Каталог реперов

№№ реперов	Широта, °	Уравненное геопотенциальное число Wo-W, кГал. м	Сила Тяжести, Г, мГал	Аномалия силы тяжести, г-γ, мГал	Гравиметрич. аномалия высоты, гр, мГал	Геодезическая высота, Н, м
4	50 20	91,049343	981072,4	5	48,3	140,5995
5	50 10	98,075398	981055,4	5	48,7	148,6572
6	50 40	264,109751	981068,6	26	48,2	316,8015
7	50 18	102,951876	981086,7	26	48,25	152,6915
8	50 11	267,229861	981033,6	35	48,8	320,7044
9	50 10	126,467776	981062,4	21	49	177,4305
10	49 54	184,258664	981016,5	17	48,7	236,0351
11	49 39	370,004483	980931,7	13	49,9	426,5614
12	49 34	316,932364	980942,9	15	49,15	371,7714
13	49 28	372,413774	980905,5	4	49,85	428,9074
15	49 23	54,692757	980994	0	48,7	103,8285
16	49 22	213,894913	980960,5	18	51,25	269,589
18	49 16	204,871305	980947,3	11	51,02	259,5946
19	49 10	186,909898	980949	16	51,03	241,0621
20	49 10	544,970325	980834,4	14	51,01	606,062
21	49 03	13,754259	980992	15	50,46	63,9652
22	49 00	120,149147	980941,1	2	50,61	172,5625
23	48 57	48,487109	980940,1	-17	50,4	99,2834
24	48 55	198,300371	980917	10	50,67	252,2869
25	48 52	279,52853	980895	18	50,25	334,7207
26	48 44	34,227916	980927,2	-15	50,65	84,9296
27	48 44	194,451136	980899,8	8	48,81	246,5074
28	48 43	191,64249	980901,2	10	49,7	244,5913
29	48 42	102,687914	980931,7	14	49,89	154,0549
30	48 40	46,181613	980960,4	28	50,33	96,8441
31	48 38	138,768871	980914,3	14	50,78	191,6967
33	48 37	314,776121	980858,4	15	51,43	371,8446
34	48 30	20,709894	980943,5	18	51,02	71,4953
35	48 30	137,612138	980895,7	7	51,11	190,8844
36	48 27	144,792941	980887,9	6	51,2	198,3174
37	48 21	322,700944	980842	25	51,07	379,5618
38	48 20	258,485953	980861,7	26	51,08	314,0592
39	48 20	362,71418	980826,9	24	51,17	420,5504
40	48 19	345,023127	980833	26	51,28	402,5536
41	48 18	267,147727	980851	21	51,33	323,1683
42	48 18	654,723222	980726	18	51,35	718,3463
44	48 13	105,694478	980879,3	6	51	158,2589
45	48 11	67,568712	980877,3	-5	51,21	119,5942
46	48 10	534,347318	980736,9	3	51,65	595,9856
47	48 08	573,121202	980726,7	8	51,5	635,0392
48	48 05	590,896186	980688,6	-20	51,97	653,8643
50	47 56	111,43103	980866,9	21	52,32	165,4537
52	47 54	83,208039	980851,8		51,5	135,7951

53	47 50	424,026762	980730,6	-8	51,34	483,0058
54	47 48	467,149354	980683	-39	51,49	527,2497
55	47 42	493,499016	980709,7	5	51,27	554,4399
56	47 37	647,518024	980621,7	-27	50,99	710,6023
57	47 57	556,546564	980644,8	-37	51,23	618,3393
58	47 41	7,287952	980866,2	10	51,37	58,2378
59	47 40	8,960216	980863,1	9	51,34	59,8745
60	47 40	33,609395	980864,5	18	52,61	85,8617
62	47 37	426,320037	980712,3	-6	52,001	486,0619
63	47 37	932,015395	980581,2	22	51,53	1001,3238
64	47 34	472,124214	980716,4	17	64,52	545,349
66	47 32	411,055444	980642,6	-73	50,28	468,8838
67	47 31	416,636752	980639,3	-73	53,01	477,3409
69	47 30	541,281147	980694,6	23	53,01	604,3692
71	47 24	629,719077	980669,8	35	50,93	692,5063
72	47 27	268,198198	980748	-5	50,82	323,6824
73	47 22	17,585815	980833,4	9	50,77	68,1472
75	47 22	450,53427	980589,1	-99	51	509,9551
77	47 20	49,78489	980816,2	5	50,18	100,4063
81	47 17	616,506636	980587,4	-41	40,97	669,0362
83	47 16	776,307046	980485,6	-91	50,12	841,1674
84	47 12	563,126104	980598,7	-39	40,75	614,3843
85	47 11	278,162498	980742,8	17	52,46	335,5277
86	47 10	352,548289	980714,9	14	48,32	407,2377
88	47 00	1342,7998	980346,2	-28	49,72	1418,5411
89	47 00	121,1494	980756,7	-2	51,12	174,0952
91	46 58	75,889124	980792,9	23	49,75	126,5837
92	46 58	85,390227	980781,9	15	49,74	136,2396
93	46 58	548,30242	980625,3	4	51,19	609,7328
94	46 57	193,479253	980738,4	7	51,35	248,0157
100	46 48	721,890157	980581,6	30	49,93	785,5175
101	46 48	494,943529	980649	26	48,75	552,8845
102	46 48	453,698035	980664	28	48,45	510,5409
103	46 45	210,949173	980697,8	-10	51,43	265,8396
104	46 44	197,277872	980714,6	4	51,29	251,9057
105	46 44	1193,355282	980430,2	33	49,5	1265,8955
108	46 40	72,409009	980770,9	27	48,82	122,1066
112	46 30	258,48151	980707,3	37	49,75	312,7172
113	46 28	816,308548	980531,7	40	49,25	881,1267
114	46 28	792,157778	980529,3	30	51,12	858,5732
116	46 19	682,690271	980538,2	18	51,13	746,7507
117	46 18	202,82309	980672,8	3	51,3	257,3591
118	46 10	3,530995	980719,4	-1	49,35	52,395
122	46 04	330,772603	980626,3	18	51,49	388,2286
123	46 02	470,346313	980565,4	4	51,14	530,046
124	46 02	236,039812	980612,1	-23	51,25	291,0731
127	45 58	388,678074	980617,1	36	51,18	446,9753
128	45 54	273,842695	980628,2	17	51,33	330,0175
135	45 40	228,448622	980625,4	21	51,12	283,5209

137	45 36	8,95097	980668,4	1	49,81	58,2837
138	45 34	165,464914	980589,1	-26	51,17	219,3401
140	45 26	57,335808	980622,1	-15	49,79	107,5176
142	45 24	1,050785	980638,8	-13	49,01	49,5059
143	45 16	417,429868	980537,7	29	51,59	476,8318
150	44 52	116,066149	980575,3	8	51,71	170,386
154	44 47	116,858751	980552,5	-7	50,81	169,8936
158	44 31	209,6085	980522,2	16	50,68	264,0567
172	44 0	130,647452	980499,3	15	50,74	183,4552
173	43 56	33,91921	980512,7	4	50,58	84,6692
290	49 54	188,419378	980530,4	5	50,5	242,0359
291	49 42	270,733661	980966,4	12	50,5	325,8735
292	49 39	257,218558	980966,2	12	50,5	312,1212
293	49 40	145,875676	980524,5	5	50,2	198,3952
294	49 30	82,374504	981039,5	8	50,3	133,8175
295	49 18	56,697378	981043,7	25	49,7	106,9007
296	49 51	27,209295	981031,1	18	49,2	76,3286
297	49 00	33,094652	981005,4	12	50,5	83,6509
298	49 59	24,905881	978047,3	24	49,01	73,8541
299	50 42	28,024319	980987,1	19	48,03	76,0284
300	50 40	18,664723	981086	27	48,47	66,9655
301	50 17	130,349361	981121,7	34	49,89	182,1062
302	50 20	10,201579	981130,5	8	49,03	58,8842

Литература:

-
- 1 Огородова Л.В. Методические указания к выполнению контрольной работы №1 по курсу Высшая геодезия и основы координатно-временных систем. М.: Издательство МИИГАиК, 2016.
 - 2 Огородова Л.В. Высшая геодезия. Часть III. Теоретическая геодезия: Учебник для вузов. – М.: Геодезкартиздат, 2006. 384 с.
 - 3 Огородова Л.В. Основы теории потенциала. Гравитационное поле Земли, Луны и планет. Учебное пособие. М.: Изд-во МИИГАиК. 2013. 108 с.
 - 4 Огородова Л.В. Нормальное поле. Определение нормального потенциала (текст лекций по геодезической гравиметрии). Учебное пособие. М.: МИИГАиК. 2010. 105 с.
 - 5 Бойко Е.Г. Высшая геодезия. Часть II. Сфероидическая геодезия. Учебник для вузов. – М.: Картгеоцентр - Геодезиздат, 2003. 144 с.
 - 6 Морозов В.П. Курс Сфероидической геодезии. Учебник. –М.: Недра. 1979 - 289 с.
 - 7 Гофман-Валленгоф Б. Моритц Г. Физическая геодезия. М.: МИИГАиК. 2007.
 - 8 Яковлев Н.В. и др. Практикум по высшей геодезии. Изд. 2-е, стереотипное. ООО ИД «Альянс». 2007. 368 с.
 - 9 ГКИНП (ГНТА) – 01 – 006 – 03 Основные положения о государственной геодезической сети Российской Федерации.
 - 10 ГКИНП (ГНТА)-03-010-02 Инструкция по нивелированию I, II, III и IV классов.
 - 11 Инструкция о построении ГГС. - М.: Недра, 1966.
 - 12 Яковлев Н.В. Высшая геодезия. – М.: Недра - Геодезиздат, 1989. 445 с.
 - 13 Огородова Л.В., Шилкин П.А. Определение геодезических координат из пространственной линейной засечки. Методические указания к выполнению

лабораторной работы по курсу высшей геодезии. М.. Изд. МИИГАиК, 2015, 20 с.

14 Кашин Л.А. Построение классической астрономо-геодезической сети России и СССР. М.: - Картгеоцентр-Геодезиздат, 1999. -192 с.