

Teoría de grafos - introducción

Introducción



La Figura anterior muestra un recorte de un mapa de la provincia de Santa Fe, particularmente, de **Rosario y alrededores**.

Dicho mapa señala algunas **ciudades** del sur de la provincia, junto con algunas de las **rutas** más importantes que las conectan.

Supongamos que, como parte de un proyecto de mejoramiento del estado de los caminos, la provincia de Santa Fe desea recorrerlos para determinar en dónde sería conveniente invertir en luminaria y señalética.

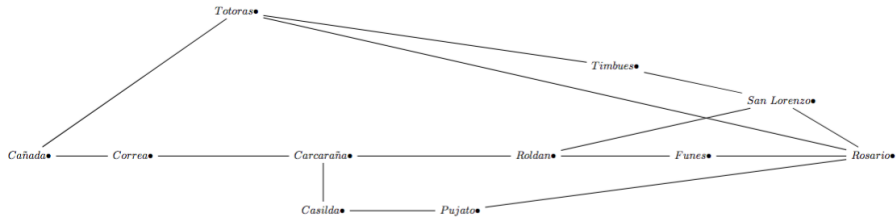
Una cuestión a resolver es cómo armar el recorrido que se hará, de modo que sea lo más económico posible (en tiempo y nafta). Siendo que el recorrido comienza en Rosario (porque el equipo de trabajo vive allí), **lo ideal sería recorrer cada camino exactamente una vez y regresar de nuevo al punto de partida.**

- ¿Es esto posible?

De estas preguntas (y muchas otras!) se encarga una rama de la matemática y las ciencias de la computación llamada **teoría de grafos**.

Este problema puede *modelarse* como un **grafo**. Los grafos son diagramas con dos componentes fundamentales: puntos y líneas (que conectan dichos puntos). Los puntos se llaman *vértices* o *nodos*, mientras que las líneas se llaman *aristas*.

En la Figura siguiente se muestra el mismo mapa representado como un grafo. Los nodos representan a las ciudades, mientras que las aristas indican la existencia de una ruta entre las ciudades que une. Notemos que las rutas que no unían ciudades indicadas no aparecen en el grafo (porque no son pertinentes al problema), y que, tanto Granadero Baigorria como Villa Gobernador Gálvez, se representan en el mismo punto que Rosario.



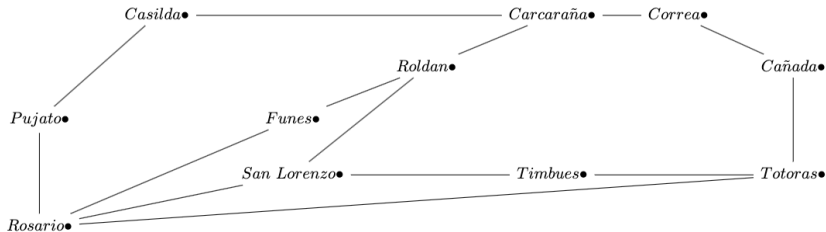
Dibujando grafos...

Cuando se dibuja un grafo, lo importante es cuales vértices se conectan con cuales aristas, no el diseño en sí.

Lo primero que debe notarse es que en un grafo solo se está representando la existencia de ciertos nodos, y las conexiones entre ellos.

Existen otros aspectos del grafo que podríamos observar en la figura anterior. Por ejemplo, la *posición relativa* de los nodos (Roldán está a la izquierda de Funes), o la *longitud de las distintas aristas* (Pujato está más cerca de Casilda que de Rosario). Sin embargo, estos aspectos no aportan información significativa al modelo (¡ni son pertinentes para nuestro problema, por eso un grafo es útil para resolverlo!).

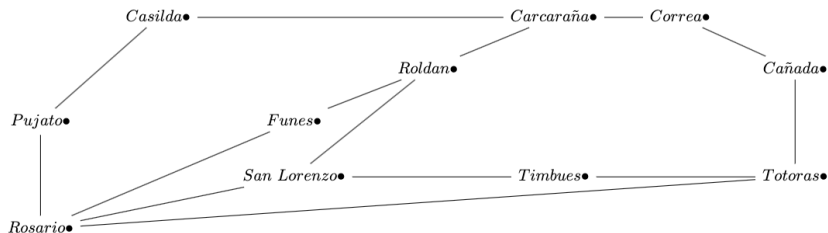
Así, por ejemplo, el grafo de la siguiente Figura es igualmente válido para representar el problema en cuestión (aunque Roldán ya no esté a la izquierda de Funes, o Pujato ya no no esté más cerca de Casilda que de Rosario).



Gracias a la teoría de grafos, es posible demostrar que el recorrido que estamos buscando es imposible de lograr en una situación como la que tenemos. Volveremos a esto más adelante.

Conceptos básicos sobre grafos

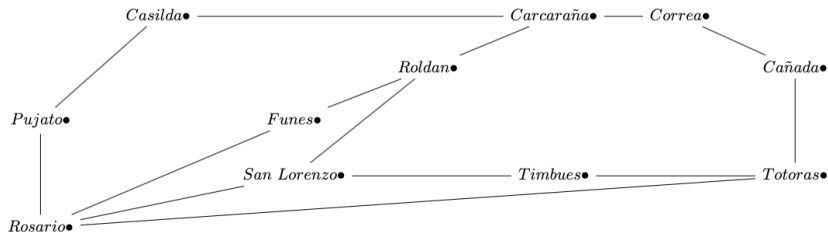
Definición. Un **grafo** (también llamado grafo no dirigido o grafo simple) G consiste en un conjunto de vértices (o nodos) y un conjunto E de aristas (o arcos) tal que cada arista $e \in E$ se asocia con un **par no ordenado** de vértices. Si la arista e está asociada con los vértices v y w , se escribe $e = (v, w)$ o $e = (w, v)$. Es importante notar que ambas son exactamente la misma arista.



El grafo de la Figura es un grafo simple: *Casilda* y *Pujato* son ejemplos de nodos, y el par no ordenado $(Casilda, Pujato)$ es una arista del grafo.

Conceptos básicos sobre grafos

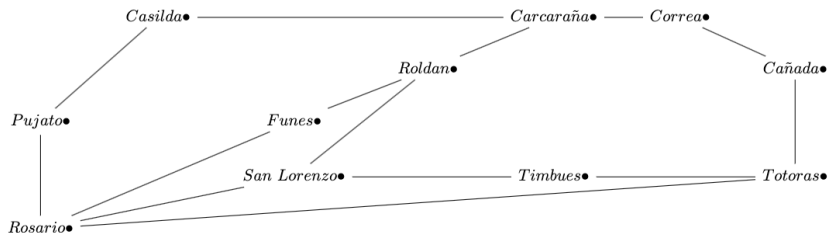
Definición Se dice que una arista $e = (v, w)$ en un grafo es *incidente* sobre v y w . A su vez, se dice que los vértices v y w son incidentes sobre e y que son **adyacentes** (o *vecinos*) entre ellos.



Por ejemplo, *Funes* y *Roldan* son vértices vecinos, mientras que *Pujato* y *Totoras* no lo son.

Conceptos básicos sobre grafos

Si G es un grafo con vértices V y aristas E , se escribe $G = (V, E)$. Usualmente, se pide que los conjuntos E y V sean finitos, y que V sea no vacío.

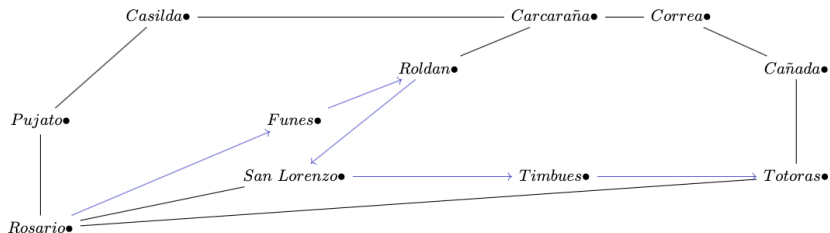


El grafo de la Figura se puede definir como $G = (V, E)$, donde

- $V = \{Casilda, Caracaraña, Correa, Roldan, Cañada, Pujato, Funes, San Lorenzo, Timbues, Totoras, Rosario\}$
- $E = \{(Casilda, Caracaraña), (Caracaraña, Correa), (Casilda, Pujato), (Caracaraña, Roldan), (Correa, Cañada), (Cañada, Totoras), (Roldan, Funes), (Pujato, Rosario), (Funes, Rosario), (Roldan, San Lorenzo), (San Lorenzo, Timbues), (Timbues, Totoras), (Rosario, San Lorenzo), (Rosario, Totoras)\}$

Conceptos básicos sobre grafos

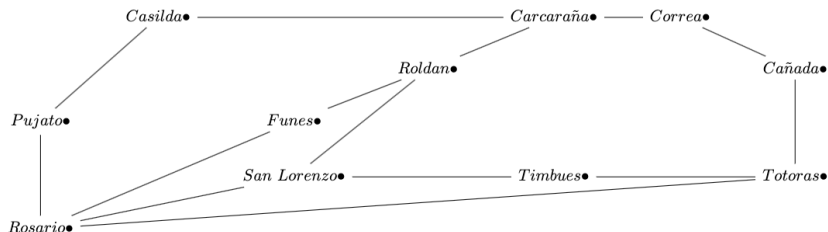
Definición. Sea un grafo $G = (V, E)$, un **camino** en dicho grafo es una sucesión de vértices v_0, v_1, \dots, v_n , y aristas l_0, l_1, \dots, l_{n-1} , tales que $l_i = (v_i, v_{i+1})$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. La **longitud** del camino se determina por la cantidad de aristas que recorre, en este caso, n .



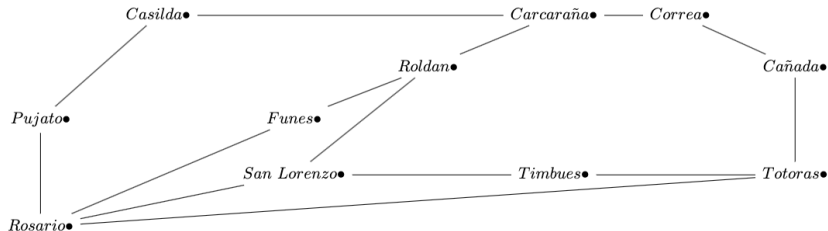
En la Figura se muestra el camino formado por la sucesión de vértices *Rosario*, *Funes*, *Roldan*, *San Lorenzo*, *Timbues*, *Totoras*, y las aristas $(Rosario, Funes)$, $(Funes, Roldan)$, $(Funes, San Lorenzo)$, $(San Lorenzo, Timbues)$, $(Timbues, Totoras)$. La longitud de dicho camino es 5.

Retomando el ejemplo motivador

Ahora que sabemos conceptos básicos sobre teoría de grafos, podemos escribir el problema del ejemplo introductorio formalmente como: ¿Existe un camino desde Rosario hacia Rosario que pase por cada arista exactamente una vez?



Retomando el ejemplo motivador



Es posible demostrar que, para desgracia del encargado el proyecto, no es posible construir un camino tal.

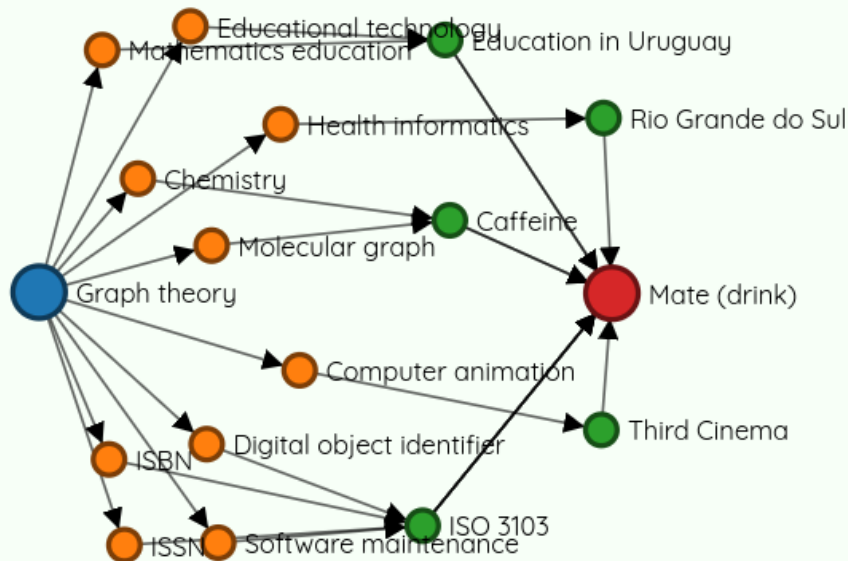
Para convencernos de esto intuitivamente, supongamos que existe tal trayectoria, y consideremos el vértice *Roldan*. Cada vez que se llega a *Roldan* por alguna arista, se debe salir de *Roldan* por una arista diferente. Como tres aristas tocan a *Roldan*, se tiene una contradicción.

El *wiki juego*, también conocido como la carrera de Wikipedia, es un juego en donde los participantes (uno o más) comienzan posicionados en el mismo artículo seleccionado arbitrariamente, y deben navegar hasta otro artículo pre-seleccionado. El objetivo es llegar al artículo destino en la menor cantidad de clicks.

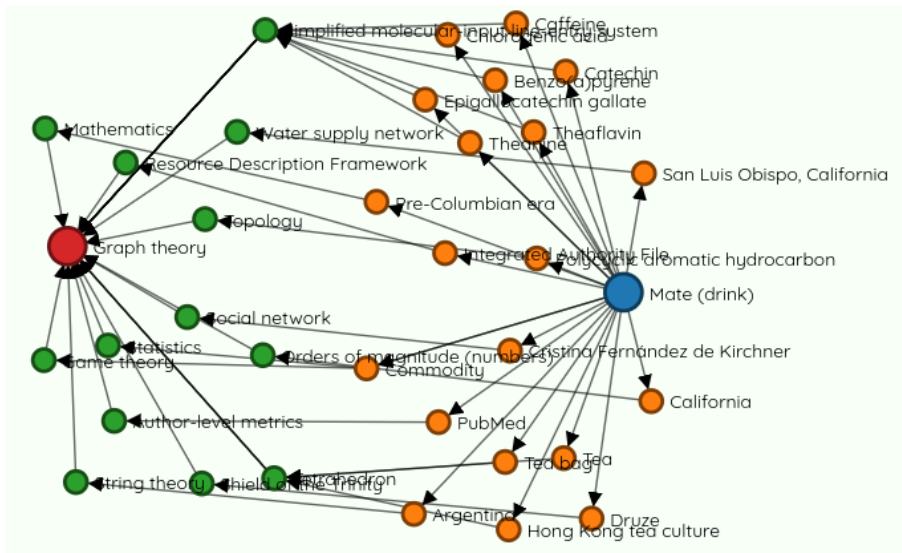
El wiki juego puede modelarse como la búsqueda de un camino de longitud mínima entre dos vértices determinados de un grafo, en donde los vértices representan artículos y, las aristas, un enlace interno entre ellos.

Sin embargo, hay algo novedoso a observar sobre los enlaces internos: son **direccionales**. A diferencia de las rutas de Santa Fe, que son bidireccionales (o doble-mano), los enlaces internos tienen un sentido definido. Así, por ejemplo, que el artículo Mate (infusión) de la Wikipedia en Español, tenga un enlace interno al artículo Estratificación social, no significa que necesariamente también pase a la inversa.

Introducción



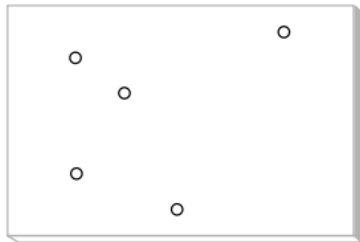
Introducción



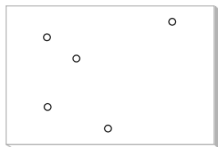
Definición Un **grafo dirigido** G consiste en un conjunto V de vertices y un conjunto E de aristas tal que cada arista $e \in E$ se asocia con un **par ordenado** de vértices. Si la arista e esta asociada con los vertices u y w , se escribe $e = (v, w)$. Es importante considerar que en este contexto que las aristas (v, w) y (w, v) representan cosas distintas. El siguiente ejemplo muestra un grafo dirigido.



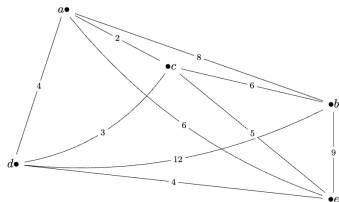
Ejemplo A menudo en la manufactura, es necesario hacer agujeros en hojas de metal. Luego se atornillan las componentes a estas hojas de metal. Los agujeros se perforan utilizando un taladro controlado por computadora. Para ahorrar tiempo y dinero, el taladro debe moverse tan rápido como sea posible. La figura sirve para ilustrar el problema.



Grafos Ponderados



Se modelará la situación como un grafo. Los vértices del grafo corresponden a los agujeros. Cada par de vértices se conecta por una arista. En cada arista se escribe el tiempo para mover el taladro entre los hoyos correspondientes.



Este problema es muy distinto que los dos que vimos hasta ahora. Para empezar, ahora tenemos un costo en las aristas que hay que considerar. Además, no estamos interesados en un camino que recorra todas las aristas, si no en un camino que recorra todos los vértices exactamente una vez, además de hacerlo de la forma óptima.

Grafos Ponderados

La siguiente tabla muestra todas las rutas que visitan los nodos comenzando por *a* y terminando en *e*.

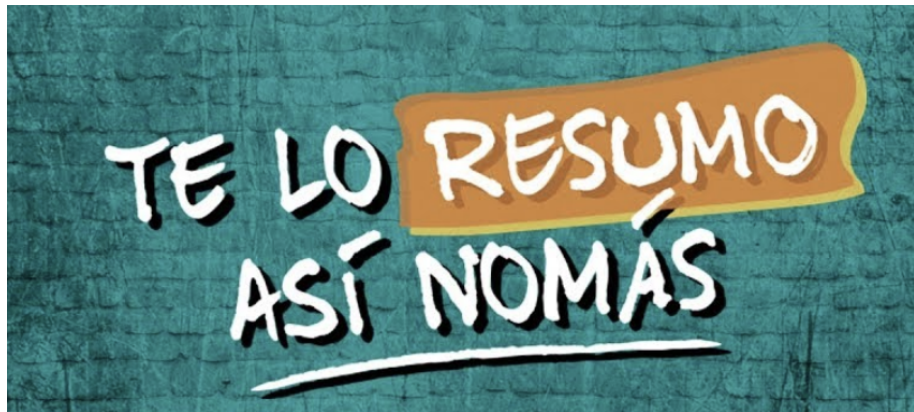
Camino	Costo
a, b, c, d, e	21
a, b, d, c, e	28
a, c, b, d, e	24
a, c, d, b, e	26
a, d, b, c, e	27
a, d, c, b, e	22

Se ve que la ruta que visita los vértices *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, en ese orden, tiene longitud mínima.

Numerar todas las trayectorias posibles es un método muy ineficiente. Por desgracia, nadie conoce un método que sea mucho más práctico para grafos arbitrarias.

Definición Llamamos **grafo ponderado** o **grafo con pesos** a un grafo $G = (V, E)$ con una función $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, un grafo donde a cada arista se le asigna un peso. Notamos $w(i, j)$ al peso de la arista que va de i a j , si esta existe.

Definición En un grafo con pesos, modificamos la definición de **longitud de un camino**. La longitud del camino en un grafo con pesos es la suma de los pesos de las aristas que recorre dicho camino.



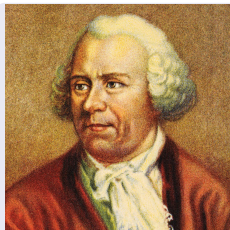
¿Qué son?

- ① un conjunto de vértices (que representan cualquier cosa).
- ② un conjunto de aristas (relaciones entre esos vértices).

Características

- ① Dirigido o no dirigido.
- ② Ponderado o sin ponderar.
- ③ Simple o completo.
- ④ Con bucles o sin bucles.

Cuando decimos “grafo” sin más, nos referimos a un grafo simple, no dirigido, sin pesos y sin bucles. Cualquier otra aclaración será dada.



- ① Redes Sociales (Twitter/X, Facebook, Instagram, etc.)
- ② Secuencias de estados (más sobre esto en Programación III).
- ③ Internet! (Ejemplo de wikipedia).
- ④ El famoso como llego.
- ⑤ y muuuuchas mas...

Grafos como un TAD

Podemos pensar a los grafos como un TAD. Formalmente lo definimos de la siguiente forma:

Un TAD es un conjunto de vértices (o nodos) y un conjunto de aristas (o arcos, o relaciones) entre ellos que admite las siguientes operaciones:

- `--init--()` Que crea un grafo vacío.
- `add_node(x)` Que agrega un nodo al grafo.
- `remove_node(x)` Que remueve un nodo del grafo.
- `add_edge(x,y)` Que agrega la arista entre los nodos x e y al grafo.
- `remove_edge(x, y)` Que remueve la arista entre x e y del grafo.
- `are_adjacent(x, y)` Devuelve `True` si x e y son adyacentes, `False` en caso contrario.
- `is_node(x)` Devuelve `True` si x es un nodo del grafo, `False` si no.
- `get_nodes()` Devuelve una lista de nodos del grafos.
- `get_adjacent(x)` Devuelve una lista de todos los nodos adyacentes al nodo x .

Grafos como un TAD

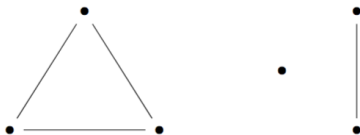
Un Grafo Ponderado es un conjunto de vértices (o nodos) y un conjunto de aristas (o arcos, o relaciones) entre ellos que admite las siguientes operaciones:

- `__init__()` Que crea un grafo ponderado vacío.
- `add_node(x)` Que agrega un nodo al grafo ponderado.
- `remove_node(x)` Que remueve un nodo del grafo ponderado.
- `add_edge(x, y, w)` Que agrega la arista entre los nodos x e y , con peso w , al grafo ponderado.
- `remove_edge(x, y)` Que remueve la arista entre x e y del grafo ponderado.
- `are_adjacent(x, y)` Devuelve el peso de la arista (x, y) si x e y son adyacentes, imprime un error en caso contrario.
- `is_node(x)` Devuelve `True` si x es un nodo del grafo ponderado, `False` si no.
- `get_nodes()` Devuelve una lista de nodos del grafo ponderado.
- `get_adjacent(x)` Devuelve una lista de todos los nodos adyacentes al nodo x .

- **Ciclo** Dado un grafo (dirigido o no dirigido) $G = (V, E)$ llamamos ciclo a un camino de longitud ≥ 2 , que comienza y termina en el mismo vértice.

Más conceptos sobre grafos

Definición Un **grafo conexo** es un grafo donde, dado cualesquiera dos vértices, siempre existe un camino que comienza en uno y termina en el otro. Todos los ejemplos de grafos que hemos visto hasta ahora son conexos. A continuación, se da un ejemplo de un grafo **no conexo**.



Intuitivamente, un grafo conexo es aquel “de una sola pieza”. Mientras que los grafos no conexos parecen, a simple vista, estar formado por varias partes. A cada una de estas “partes” se la llama **componente conexa**. Se nota con $\kappa(G)$ a la cantidad de componentes conexas del grafo. En el ejemplo, $\kappa(G) = 3$.

Definición Sea $G = (V, E)$ un grafo. $G' = (V', E')$ es un subgrafo de G si se cumple:

- 1 $V' \subseteq V$
- 2 $E' \subseteq E$
- 3 Para toda arista $e \in E'$, si e incide en los vértices v y w , entonces $v, w \in V'$

Definición Sea $G = (V, E)$. Si $U \subseteq V$, el **subgrafo de G inducido por U** es el subgrafo cuyo conjunto de vértices es U y que contiene todas las aristas de G de la forma (v, w) donde $v, w \in U$.

Definición Un subgrafo G' de un grafo $G = (V, E)$ es un **subgrafo inducido** si existe un conjunto $U \subseteq V$ tal que G' es el subgrafo de G inducido por U .

Definición Sea v un vértice en un grafo (dirigido o no dirigido) $G = (V, E)$. El subgrafo de G denotado por $G - v$ tiene el conjunto de vértices $V' = V - \{v\}$ y el conjunto de aristas $E' \subset E$, donde E' contiene todas las aristas en E , excepto aquellas que son incidentes en el vértice v .

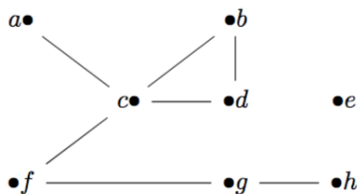
Observación El grafo $G - v$ es el subgrafo inducido por $V - \{v\}$.

Definición De manera similar, si e es un arista en un grafo (dirigido o no dirigido) $G = (V, E)$, el subgrafo $G - e$ es el subgrafo que contiene todas las aristas de G , excepto e , y el mismo conjunto de vértices.

Más conceptos sobre grafos

Definición Sea G un grafo dirigido o no dirigido. Para cada vertice v de G , el **grado** de v , denotado por $\delta(v)$ es el número de aristas incidentes en v .

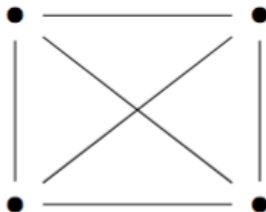
Por ejemplo, en el siguiente grafo, $\delta(a) = 1$, $\delta(b) = 2$, $\delta(c) = 4$, $\delta(d) = 2$, $\delta(e) = 0$, $\delta(f) = 2$, $\delta(g) = 2$ y $\delta(h) = 1$



Si $G = (V, E)$ es un grafo no dirigido, luego $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$.

Grafos importantes: el grafo completo

Definición El grafo completo de n vértices, notado como K_n , es el grafo simple con n vértices y una arista entre cada par de vértices distintos. A modo de ejemplo, se muestra el grafo K_4 .



Ejercicio 1

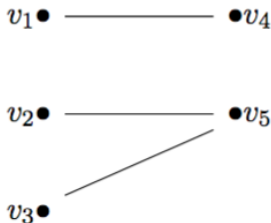
- 1 Dibuje los grafos K_3 y K_5 .
- 2 Encuentre una fórmula para la cantidad de aristas de un grafo completo.

Grafos bipartitos

Definición Un grafo $G = (V, E)$ es un **bipartito** si existen subconjuntos V_1 y V_2 de V tales que:

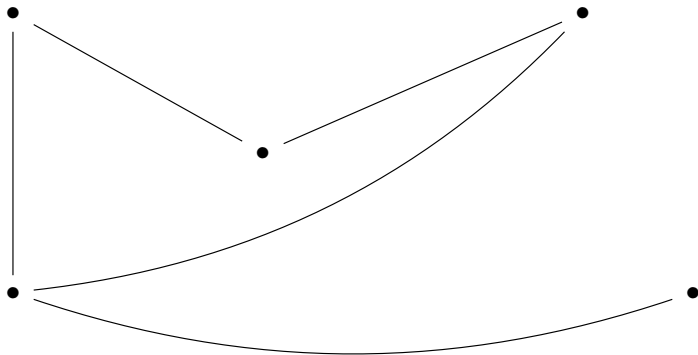
- 1 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- 2 $V_1 \cup V_2 = V$
- 3 Cada arista en E es incidente en un vértice V_1 y un vértice en V_2 .

Por ejemplo, el grafo de la siguiente figura es bipartito con $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $V_2 = \{v_4, v_5\}$.



Ejercicio 2

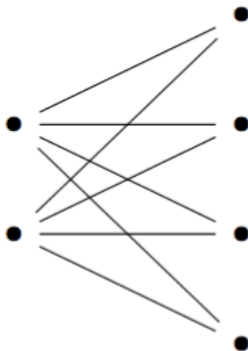
Decida si el siguiente grafo es bipartito. Justifique.



Grafos bipartitos completos

Definición El grafo bipartito completo de m y n , denotado $K_{m,n}$ vértices es el grafo simple donde el conjunto de vértices puede partitionarse en V_1 con m vértices y V_2 con n vértices, y donde el conjunto de aristas consiste en todas las aristas de la forma (v_1, v_2) con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$.

Se muestra como ejemplo el grafo $K_{2,4}$.



Ejercicio 3

- 1 Dibuje los grafos bipartitos completos $K_{1,3}$ y $K_{7,2}$.
- 2 Encuentre una fórmula para la cantidad de aristas del grafo $K_{n,m}$.



Johnsonbaugh

Matemáticas discretas. 6ta Edición.

Capítulos 8.1, 8.2 y 8.4



Grimaldi, R.

Matemáticas Discretas y Combinatoria.

Advertencia La terminología asociada a la teoría de grafos no se ha estandarizado aún. Al leer artículos y libros sobre grafos, es necesario verificar las definiciones que se emplean. Ante cualquier duda, consultar con los docentes de la cátedra.