Лекции по математическому анализу для 1 курса ФН2, 3

Власова Елена Александровна

2024-2025 год.

Содержание

Элементарные функции и их пределы

1 Введение

1.1 Элементы теории множеств

1.2 Кванторные операции

1.3 Метод математической индукции

2 Множество действительных чисел

2.1 Аксиоматика действительных чисел

Определение 2.1.1. *Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных чисел, если элементы этого множества удовлетворяют следующему комплексу условий:*

1. *На множестве $\mathbb{R}$ определена операция сложения "+", то есть задано отображение, которое каждой упорядоченной паре $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ставит в соответствие элемент из $\mathbb{R}$, называемый суммой $x + y$ и удовлетворяющий следующим аксиомам:*
   - *(a) $\exists 0 \in \mathbb{R}$, такой, что $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$;*
   - *(b) $\forall x$ $\exists$ противоположный элемент "$-x$", такой, что $x+(-x) = (-x) + x = 0$;*
   - *(c) Ассоциативность. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$;*
   - *(d) Коммутативность. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$.*
2. *На $\mathbb{R}$ определена операция умножения "$\cdot$", то есть $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ставится в соответствие элемент $(x \cdot y) \in \mathbb{R}$.*
   - *(a) $\exists$ нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R}$, такой, что $\forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$;*
   - *(b) $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ $\exists$ обратный элемент "x^{-1}", такой, что $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$;*
   - *(c) Ассоциативность. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \backslash \{0\} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;*
   - *(d) Коммутативность. $\forall x, y \in \mathbb{R} \backslash \{0\} : x \cdot y = y \cdot x$.*

Операция умножения дистрибутивна по отношению к сложению.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y)z = xz + yz$$

3. *Отношения порядка. Для $\mathbb{R}$ определено отношение "$\leq$ ".*

   (a) $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$;

   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y \wedge y \leq x) \implies x = y$;

   $\dots$

2.2 Геометрическая интерпретация $\mathbb{R}$

2.3 Числовые промежутки

2.4 Бесконечные числовые промежутки

2.5 Окрестности точки

2.6 Принцип вложенных отрезков (Коши-Кантора)

Определение 2.6.1. *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность некоторых множеств. Если $\forall n \in \mathbb{N} : X_n \supset X_{n+1}$, то эта последовательность называется последовательностью вложенных отрезков.*

2.7 Ограниченные и неограниченные числовые множества

2.8 Точные грани числового множества

2.9 Принцип Архимеда

3 Функции или отображения

3.1 Понятие функции

3.2 Ограниченные и неограниченные числовые множества

3.3 Обратные функции

3.4 Чётные и нечётные функции

3.5 Периодические функции

3.6 Сложная функция (композиция)

3.7 Основные элементарные функции

4 Числовые последовательности и их пределы

Определение 4.0.1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — *числовая последовательность, т.е.* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \mathbb{R}$.

4.1 Ограниченные и неограниченные числовые последовательности

Определение 4.1.1. *Числовая последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется*

1. *ограниченной сверху, если* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \ x_n \leq M;$
2. *ограниченной снизу, если* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \ x_n \geq M;$
3. *ограниченной, если* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M;$
4. *неограниченной, если* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| > M;$

4.2 Предел числовой последовательности

Определение 4.2.1. *Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности, если $\forall \varepsilon > 0$ существует такой номер n, зависящий от ε, что $\forall$ натурального числа $N > n$ верно неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

4.3 Бесконечные пределы

4.4 Свойства сходящихся последовательностей

4.5 Монотонные числовые последовательности

Определение 4.5.1. *Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется*

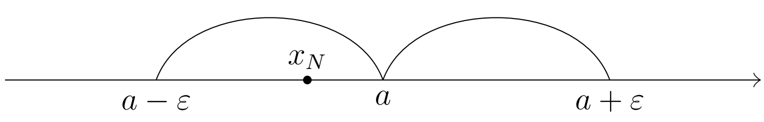
1. *возрастающей, если* $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}$*;*
2. *убывающей, если* $\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1}$*;*
3. *неубывающей, если* $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}$*;*
4. *невозрастающей, если* $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n+1}$

Для монотонных числовых последовательностей ограниченность является достаточным условием для сходимости.

Теорема 4.5.1 (Вейерштрасса о сходимости монотонных числовых последовательностей)**.** *Если последовательность не убывает и ограничена сверху, то она является сходящейся. Если последовательность не возрастает и ограничена снизу, то она является сходящейся. В общем, любая монотонная последовательность сходится.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает и ограничена сверху $\implies$ $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M \implies$ множество значений этой последовательности $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\} = A$ является ограниченным сверху числовым множеством $\implies \exists \sup A \in \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = a$, то есть

1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq a$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : x_N > a - \varepsilon$.



Т.к. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность $\implies$

$$\implies \forall n > N = N(\varepsilon) : x_n \geq x_N \implies$$
$$\implies a - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq a < a + \varepsilon \implies$$
$$\implies a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \implies |x_n - a| < \varepsilon \implies$$
$$\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon \implies$$
$$\implies \exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R} \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ сходится.}$$

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – невозрастающая и ограниченная снизу последовательность, то

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \inf A, A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

Доказательство аналогично. □

4.6 Число e

4.7 Гиперболические функции

4.8 Предельные точки числового множества

Определение 4.8.1. *Точка $a \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R}$, если любая окрестность $U(a)$ содержит бесконечно много элементов множества X.*

Замечание. Множество A называется бесконечным или содержащим бесконечно много элементов, если при вычитании из A любого его конечного подмножества получается непустое множество.

Множество всех предельных точек множества X называется производным множеством для X и обозначается X'.

Утверждение 4.8.1. *Точка $a \in \mathbb{R}$ является предельной для $X \subset \mathbb{R}$ $\iff$ в любой проколотой δ-окрестности точки a содержится хотя бы один элемент множества X, т.е.*

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \cap \mathring{U}(a).$$

Доказательство. ($\implies$) Необходимость.

a — предельная для $X \subset \mathbb{R}$ $\implies$

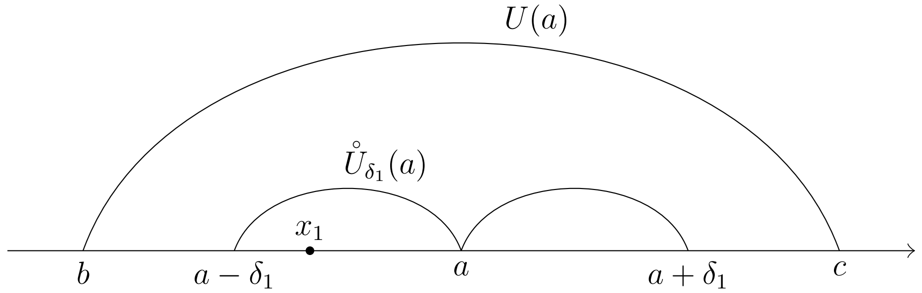
$$\implies \text{любая } U(a) \text{ содержит бесконечно много элементов из } X \implies$$
$$\implies \mathring{U}(a) \text{ тоже содержит бесконечно много элементов из } X \implies$$
$$\implies \text{любая } \mathring{U} \text{ содержит хотя бы один элемент } x \in X.$$

$(\Longleftarrow)$ Достаточность.

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \cap \mathring{U}(a).$$

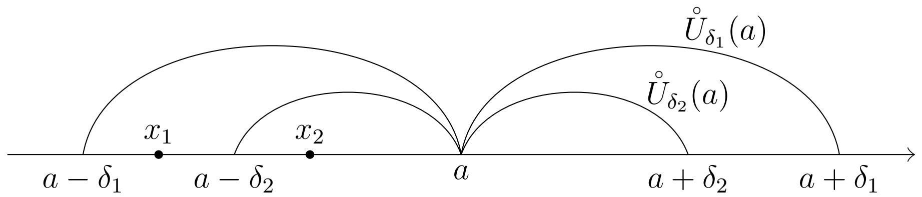
Выберем любую $U(a)$. Тогда

$$\exists \delta_1 > 0 : \mathring{U}(a) \subset U(a) \implies \exists x_1 \in X : x_1 \in \mathring{U}_{\delta_1}(a).$$



Пусть $\delta_2 = \frac{|x_1 - a|}{2} > 0$. Тогда

$$\exists x_2 \in \mathring{U}_{\delta_2}(a) : x_2 \neq x_1.$$



Пусть $\delta_3 = \frac{|x_2 - a|}{2} > 0$. Тогда

$$\exists x_3 \in \mathring{U}_{\delta_3}(a) : x_3 \neq x_2$$

и т.д. На шаге n:

$$\delta_n = \frac{|x_{n-1} - a|}{2} > 0 \implies \exists x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(a) : x_n \neq x_k, k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Таким образом,

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in U(a) : x_n \in X, x_n \neq x_k, n \neq k,$$

а значит, любая окрестность $U(a)$ содержит бесконечно много элементов из $X \implies a$ — предельная точка. $\square$

Утверждение 4.8.2. *Если точка $a \in \mathbb{R}$ является предельной точкой для множества $X \subset \mathbb{R}$, то*

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X : \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Доказательство. $\square$

Теорема 4.8.1 (принцип Больцано-Вейерштрасса)**.**

4.9 Предельные точки числовых последовательностей