

# Лекции по математическому анализу для 1 курса ФН2, 3

Власова Елена Александровна

2024-2025 год.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
1.1	Элементы теории множеств . . . . .	4
1.2	Кванторные операции . . . . .	4
1.3	Метод математической индукции . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Множество действительных чисел</b>	<b>4</b>
2.1	Аксиоматика действительных чисел . . . . .	4
2.2	Геометрическая интерпретация $\mathbb{R}$ . . . . .	5
2.3	Числовые промежутки . . . . .	5
2.4	Бесконечные числовые промежутки . . . . .	5
2.5	Окрестности точки . . . . .	5
2.6	Принцип вложенных отрезков (Коши-Кантора) . . . . .	5
2.7	Ограниченные и неограниченные числовые множества . . . . .	6
2.8	Точные грани числового множества . . . . .	6
2.9	Принцип Архимеда . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Функции или отображения</b>	<b>6</b>
3.1	Понятие функции . . . . .	6
3.2	Ограниченные и неограниченные числовые множества . . . . .	6
3.3	Обратные функции . . . . .	6
3.4	Чётные и нечётные функции . . . . .	6
3.5	Периодические функции . . . . .	6
3.6	Сложная функция (композиция) . . . . .	6
3.7	Основные элементарные функции . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Числовые последовательности и их пределы</b>	<b>6</b>
4.1	Ограниченные и неограниченные числовые последовательности . . . . .	6
4.2	Предел числовой последовательности . . . . .	7
4.3	Бесконечные пределы . . . . .	7
4.4	Свойства сходящихся последовательностей . . . . .	7
4.5	Монотонные числовые последовательности . . . . .	9
4.6	Число $e$ . . . . .	10
4.7	Гиперболические функции . . . . .	10
4.8	Предельные точки числового множества . . . . .	10
4.9	Предельные точки числовых последовательностей . . . . .	13
4.10	Фундаментальные последовательности . . . . .	16

<b>5</b>	<b>Пределы функций</b>	<b>18</b>
5.1	Определение предела по Коши . . . . .	18
5.2	Бесконечно малые функции . . . . .	23
5.3	Свойства бесконечно малых функций . . . . .	24
5.4	Арифметические операции с функциями, имеющими пре- делы . . . . .	25

# Элементарные функции и их пределы

## 1 Введение

### 1.1 Элементы теории множеств

### 1.2 Кванторные операции

### 1.3 Метод математической индукции

## 2 Множество действительных чисел

### 2.1 Аксиоматика действительных чисел

**Определение 2.1.1.** Множество  $\mathbb{R}$  называется множеством действительных чисел, если элементы этого множества удовлетворяют следующему комплексу условий:

1. На  $\mathbb{R}$  определена операция сложения “+”, то есть задано отображение, которое каждой упорядоченной паре  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ставит в соответствие элемент из  $\mathbb{R}$ , называемый суммой  $x + y$  и удовлетворяющий следующим аксиомам:

- (a)  $\exists 0 \in \mathbb{R}$ , такой, что  $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$ ;
- (b)  $\forall x \exists$  противоположный элемент  $-x$ , такой, что  $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ;
- (c) Ассоциативность.  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$ ;
- (d) Коммутативность.  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$ .

2. На  $\mathbb{R}$  определена операция умножения “.”, то есть  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  ставится в соответствие элемент  $(x \cdot y) \in \mathbb{R}$ .

- (a)  $\exists$  нейтральный элемент  $1 \in \mathbb{R}$ , такой, что  $\forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ ;
- (b)  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists$  обратный элемент “ $x^{-1}$ ”, такой, что  $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ ;
- (c) Ассоциативность.  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ ;
- (d) Коммутативность.  $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \cdot y = y \cdot x$ .

Операция умножения дистрибутивна по отношению к сложению.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y)z = xz + yz$$

3. Отношения порядка. Для  $\mathbb{R}$  определено отношение " $\leq$ ".

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{R} : x \leq x;$$

$$(b) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y \wedge y \leq x) \implies x = y;$$

...

## 2.2 Геометрическая интерпретация $\mathbb{R}$

## 2.3 Числовые промежутки

## 2.4 Бесконечные числовые промежутки

## 2.5 Окрестности точки

**Определение 2.5.1.** Окрестностью точки  $a \in \mathbb{R}$  называется любой интервал, содержащий точку  $a$  и обозначается  $U(a)$ .

Пусть  $\varepsilon$  — некоторое положительное число.

**Определение 2.5.2.**  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $a \in \mathbb{R}$  называется интервал  $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$  и обозначается  $U_\varepsilon(a)$ .

$$c \in U_\varepsilon(a) \iff |a - c| < \varepsilon.$$

**Определение 2.5.3.** Проколотой  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $a \in \mathbb{R}$  называется множество  $(a - \varepsilon; a) \cup (a; a + \varepsilon) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$  и обозначается  $\mathring{U}_\varepsilon(a)$ .

**Определение 2.5.4.** Окрестностью бесконечности называют любое множество вида  $(-\infty; a) \cup (b; +\infty)$ .

**Определение 2.5.5.**  $\varepsilon$ -окрестностью бесконечности называют множество  $(-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty)$ .

Примечание:  $U_\varepsilon(\infty) = \mathring{U}_\varepsilon(\infty)$ .

## 2.6 Принцип вложенных отрезков (Коши-Кантора)

**Определение 2.6.1.** Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность некоторых множеств. Если  $\forall n \in \mathbb{N} : X_n \supset X_{n+1}$ , то эта последовательность называется последовательностью вложенных отрезков.

2.7 Ограниченные и неограниченные числовые множества

2.8 Точные грани числового множества

2.9 Принцип Архимеда

### 3 Функции или отображения

3.1 Понятие функции

3.2 Ограниченные и неограниченные числовые множества

3.3 Обратные функции

3.4 Чётные и нечётные функции

3.5 Периодические функции

3.6 Сложная функция (композиция)

3.7 Основные элементарные функции

### 4 Числовые последовательности и их пределы

**Определение 4.0.1.**  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  — числовая последовательность, т.е.  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $x_n \in \mathbb{R}$ .

#### 4.1 Ограниченные и неограниченные числовые последовательности

**Определение 4.1.1.** Числовая последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется

1. ограниченной сверху, если  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M$ ;
2. ограниченной снизу, если  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq M$ ;
3. ограниченной, если  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M$ ;
4. неограниченной, если  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| > M$ ;

## 4.2 Предел числовой последовательности

**Определение 4.2.1.** Число  $a \in \mathbb{R}$  называется пределом числовой последовательности, если  $\forall \varepsilon > 0$  существует такой номер  $n$ , зависящий от  $\varepsilon$ , что  $\forall$  натурального числа  $N > n$  верно неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Пример:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \implies n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Возьмем  $N(\varepsilon) = [\frac{1}{\varepsilon}]$ . Тогда  $\forall n > [\frac{1}{\varepsilon}] : \frac{1}{n} < \varepsilon$ .

**Определение 4.2.2.** Если  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  имеет конечный предел  $a$ , то эта последовательность называется сходящейся, в противном случае — расходящейся.

**Определение 4.2.3.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , то последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется бесконечно малой (б.м.).

## 4.3 Бесконечные пределы

## 4.4 Свойства сходящихся последовательностей

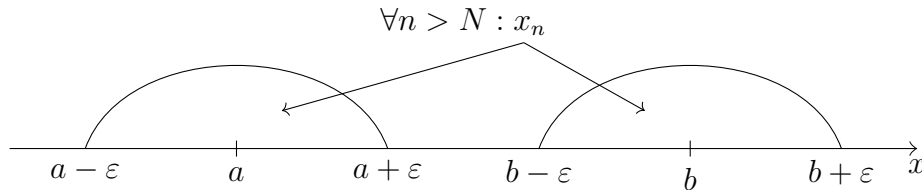
**Теорема 4.4.1** (о единственности предела). Любая сходящаяся последовательность имеет только один предел.

*Доказательство.* “От противного”. Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — сходящаяся последовательность. Предположим, что  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ , причем  $a \neq b$ . Пусть для определенности  $a < b$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 : |x_n - b| < \varepsilon.$$

$$N = \max\{N_1, N_2\} \implies \forall n > N : \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon, \\ |x_n - b| < \varepsilon. \end{cases}$$



Выберем  $\varepsilon = \frac{b-a}{4} > 0$ . Найдем  $N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N = \max\{N_1, N_2\}$ , тогда

$$\forall n > N \quad |x_n - a| < \frac{b-a}{4}, \quad |x_n - b| < \frac{b-a}{4}.$$

Следовательно,

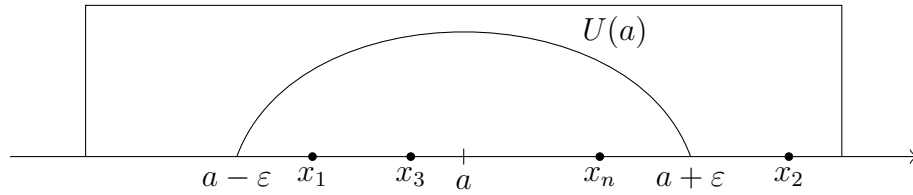
$$0 < b - a = |b - a| = |b - x_n + x_n - a| \leq |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{b-a}{2},$$

то есть

$$0 < b - a < \frac{b-a}{2}.$$

Мы пришли к противоречию, следовательно,  $a = b \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  имеет единственный предел.  $\square$

**Теорема 4.4.2** (об ограниченности сходящейся последовательности).  
Любая сходящаяся последовательность является ограниченной.



*Доказательство.* Если  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится, то

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} = a \in \mathbb{R} \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$$

Пусть  $\varepsilon = 1 \implies \exists N = N(1) \quad \forall n > N : |x_n - a| < 1$ . Следовательно,

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Пусть  $M_0 = 1 + |a| \implies \forall n > N : x_n < M_0$ .

Пусть  $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, M_0\}$ , тогда  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  является ограниченной.  $\square$

*Замечание.* Ограниченность является необходимым условием сходимости числовой последовательности. В то же время условие ограниченности не является достаточным для сходимости числовой последовательности. Например,  $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$  — ограниченная, но не сходящаяся числовая последовательность.



## 4.5 Монотонные числовые последовательности

**Определение 4.5.1.** Числовая последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется

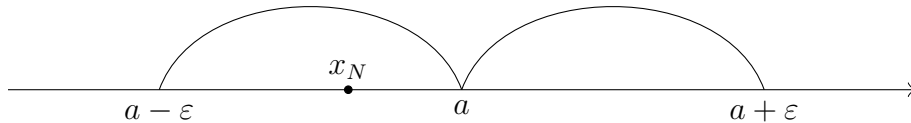
1. возрастающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}$ ;
2. убывающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1}$ ;
3. неубывающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}$ ;
4. невозрастающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n+1}$ .

Для монотонных числовых последовательностей ограниченность является достаточным условием для сходимости.

**Теорема 4.5.1** (Вейерштрасса о сходимости монотонных числовых последовательностей). Если последовательность не убывает и ограничена сверху, то она является сходящейся. Если последовательность не возрастает и ограничена снизу, то она является сходящейся. В общем, любая монотонная последовательность сходится.

*Доказательство.* Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  не убывает и ограничена сверху  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  множество значений этой последовательности  
 $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = A$  является ограниченным  
сверху числовым множеством  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \exists \sup A \in \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = a$ , то есть

1.  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq a$ ;
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : x_N > a - \varepsilon$ .



$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — неубывающая последовательность, то есть

$$\begin{aligned}
 \forall n > N = N(\varepsilon) : x_n &\geq x_N \Rightarrow \\
 \Rightarrow a - \varepsilon < x_N \leq x_n &\leq a < a + \varepsilon \Rightarrow \\
 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon &\Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \\
 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon &\Rightarrow \\
 \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R} \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} &\text{сходится.}
 \end{aligned}$$

Если  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — невозрастающая и ограниченная снизу последовательность, то

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf A, A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

Доказательство аналогично.  $\square$

## 4.6 Число $e$

## 4.7 Гиперболические функции

## 4.8 Предельные точки числового множества

**Определение 4.8.1.** Точка  $a \in \mathbb{R}$  называется предельной точкой множества  $X \subset \mathbb{R} \iff$  любая окрестность  $U(a)$  содержит бесконечно много элементов множества  $X$ .

*Замечание.* Множество  $A$  называется бесконечным или содержащим бесконечно много элементов, если при вычитании из  $A$  любого его конечного подмножества получается непустое множество.

Множество всех предельных точек множества  $X$  называется производным множеством для  $X$  и обозначается  $X'$ .

**Утверждение 4.8.1.** Точка  $a \in \mathbb{R}$  является предельной для  $X \subset \mathbb{R} \iff$  в любой проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $a$  содержится хотя бы один элемент множества  $X$ , т.е.

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \cap \mathring{U}(a).$$

*Доказательство.* ( $\implies$ ) Необходимость.

$a$  — предельная для  $X \subset \mathbb{R} \implies$

$\implies$  любая  $U(a)$  содержит бесконечно много элементов из  $X \implies$

$\implies \mathring{U}(a)$  тоже содержит бесконечно много элементов из  $X \implies$

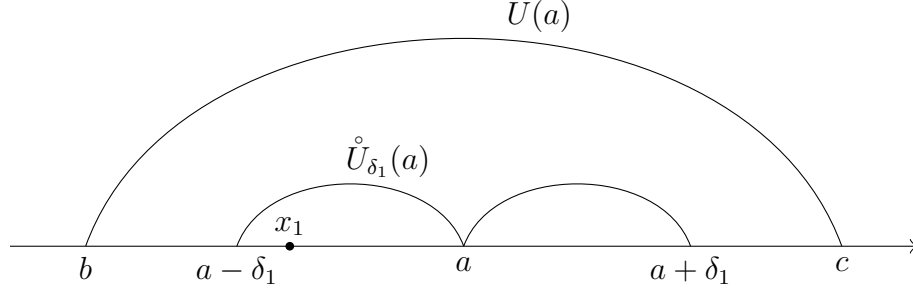
$\implies$  любая  $\mathring{U}$  содержит хотя бы один элемент  $x \in X$ .

( $\impliedby$ ) Достаточность.

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \cap \mathring{U}(a).$$

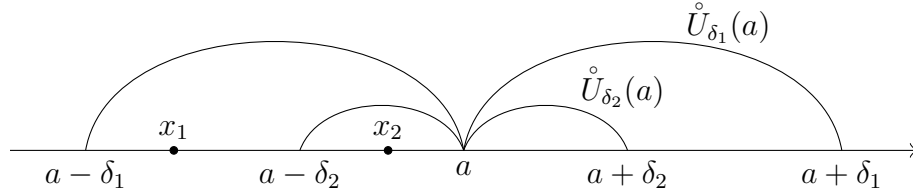
Выберем любую  $U(a)$ . Тогда

$$\exists \delta_1 > 0 : \mathring{U}(a) \subset U(a) \implies \exists x_1 \in X : x_1 \in \mathring{U}_{\delta_1}(a).$$



Пусть  $\delta_2 = \frac{|x_1 - a|}{2} > 0$ . Тогда

$$\exists x_2 \in \mathring{U}_{\delta_2}(a) : x_2 \neq x_1.$$



Пусть  $\delta_3 = \frac{|x_2 - a|}{2} > 0$ . Тогда

$$\exists x_3 \in \mathring{U}_{\delta_3}(a) : x_3 \neq x_2$$

и т.д. На шаге  $n$ :

$$\delta_n = \frac{|x_{n-1} - a|}{2} > 0 \implies \exists x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(a) : x_n \neq x_k, k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Таким образом,

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in U(a) : x_n \in X, x_n \neq x_k, n \neq k,$$

а значит, любая окрестность  $U(a)$  содержит бесконечно много элементов из  $X \implies a$  — предельная точка.  $\square$

**Утверждение 4.8.2.** Если точка  $a \in \mathbb{R}$  является предельной точкой для множества  $X \subset \mathbb{R}$ , то

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

*Доказательство.*  $a$  — предельная точка для  $X \subset \mathbb{R} \iff \forall \delta > 0 \quad \mathring{U}_{\delta}(a)$  содержит хотя бы одну точку множества  $X$  (по утверждению 1).

Выберем  $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}, \delta_n = \frac{1}{n} > 0$ , тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in X : x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(a),$$

то есть

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}.$$

Т.к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

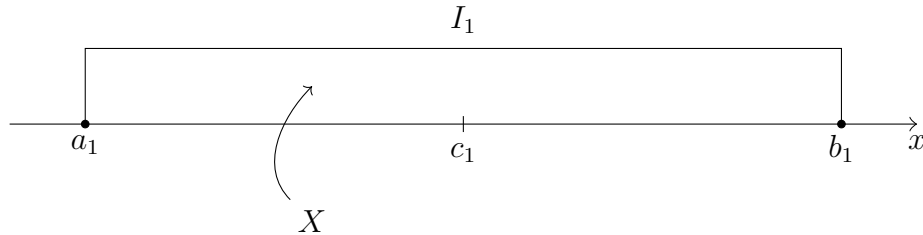
а значит,

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

□

**Теорема 4.8.1** (принцип Больцано-Вейерштрасса). *Любое ограниченное бесконечное числовое множество имеет хотя бы одну предельную точку.*

*Доказательство.* Пусть  $X$  — бесконечное ограниченное множество, то есть  $\exists I_1 = [a_1, b_1] : X \subset [a_1, b_1]$ . Пусть  $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ , т.е. середина отрезка  $I_1$ .



Так как множество  $X$  бесконечное, то либо отрезок  $[a_1, c_1]$ , либо отрезок  $[c_1, b_1]$  содержит бесконечно много элементов множества  $X$ . Обозначим ту половину отрезка  $I_1$ , которая содержит бесконечно много элементов множества  $X$  через  $I_2 = [a_2, b_2]$ ,  $I_2 \subset I_1$ . Выразим длину отрезка  $I_2$ :

$$|I_2| = b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{|I_1|}{2}.$$

На отрезке  $I_2$  содержится бесконечно много элементов множества  $X$ . Пусть  $c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$  — середина  $I_2$ , тогда либо  $[a_2, c_2]$ , либо  $[c_2, b_2]$  содержит бесконечно много элементов множества  $X$ . Обозначим ту половину  $I_2$ , где бесконечно много элементов множества  $X$  через  $I_3 = [a_3, b_3]$ . Тогда

$$|I_3| = \frac{|I_1|}{2^2}$$

и т.д. На шаге  $n$ :  $I_n = [a_n, b_n]$ ,  $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$  — середина  $I_n$ ,  $I_n$  содержит бесконечно много элементов из  $X$ , тогда либо  $[a_n, c_n]$ , либо  $[c_n, b_n]$  содержит

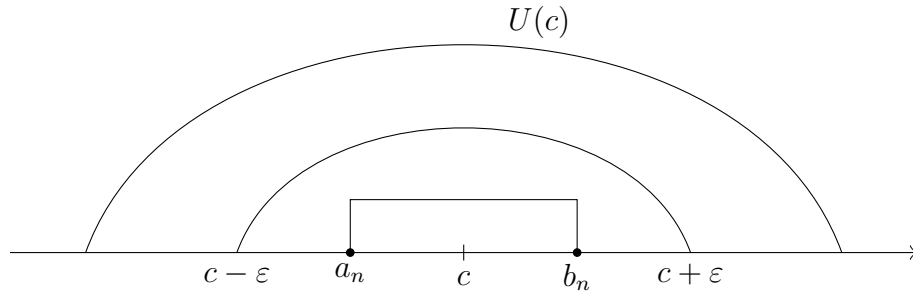
бесконечно много элементов из  $X \implies I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset I_n$  и содержит бесконечно много элементов из  $X$ . Таким образом, мы получили последовательность вложенных отрезков  $\{I_n\}_{n=1}^\infty : I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$

$$\begin{aligned} |I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}} &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|I_1|}{2^{n-1}} = 0 \implies \\ &\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |I_n| < \varepsilon. \end{aligned}$$

По принципу Коши-Кантора  $\exists!$  общая точка  $c$ , т.е.  $\forall n \in \mathbb{N} : c \in I_n$ .

$$\forall U(c) \quad \exists \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(c) \subset U(c) \implies \exists n \in \mathbb{N} : I_n = [a_n, b_n] \subset U_\varepsilon(c)$$

(например,  $|I_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ ).



Отрезок  $I_n$  содержит бесконечно много элементов множества  $X$  по построению последовательности  $\{I_n\}_{n=1}^\infty \implies$  окрестность  $U(c)$  содержит бесконечно много элементов из  $X \implies c$  — предельная.  $\square$

## 4.9 Предельные точки числовых последовательностей

**Определение 4.9.1.** Точка  $a \in \mathbb{R}$  называется предельной точкой числовой последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \iff$  любая окрестность  $U(a)$  содержит бесконечно много элементов последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ .

*Замечание.* Если  $a$  — предельная точка  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , то любая  $U(a)$  содержит какую-либо подпоследовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ .

Пример:  $\{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n = (-1)^n$ .



**Теорема 4.9.1.** Точка  $a \in \mathbb{R}$  является предельной для  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \iff \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ .

*Доказательство.* Докажем необходимость. Пусть  $a$  — предельная точка последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ . Выберем  $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty, \varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0$ .

Для  $n = 1$   $U_{\varepsilon_1=1}(a)$  содержит  $\infty$  много элементов  $\implies \exists x_{n_1} \in U_{\varepsilon_1}(a)$ , т.е.  $|x_{n_1} - a| < 1$ .

Для  $n = 2$   $U_{\varepsilon_2=\frac{1}{2}}(a)$  содержит  $\infty$  много элементов  $\implies \exists n_2 > n_1 : x_{n_2} \in U_{\varepsilon_2}(a)$ , т.е.  $|x_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$ .

Для  $n = 3$   $U_{\varepsilon_3=\frac{1}{3}}(a)$  содержит  $\infty$  много элементов  $\implies \exists n_3 > n_2 : x_{n_3} \in U_{\varepsilon_3}(a)$ , т.е.  $|x_{n_3} - a| < \frac{1}{3}$  и т.д.

Для  $n = k$   $U_{\varepsilon_k=\frac{1}{k}}(a)$  содержит  $\infty$  много элементов  $\implies \exists n_k > n_{k-1} : x_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}(a)$ , т.е.  $|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \implies \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  является подпоследовательностью последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \implies \forall k \in \mathbb{N} : |x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0 &\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall k > N : \frac{1}{k} < \varepsilon \implies \\ &\implies \forall k > N \quad |x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} < \varepsilon \implies \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a. \end{aligned}$$

Докажем достаточность.

Пусть  $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ . Выберем любую  $U(a)$  и найдем такое  $\varepsilon > 0$ , что  $U_\varepsilon(a) \subset U(a)$ :

$$\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall k > N : |x_{n_k} - a| < \varepsilon \implies x_{n_k} \in U_\varepsilon(a) \subset U(a).$$

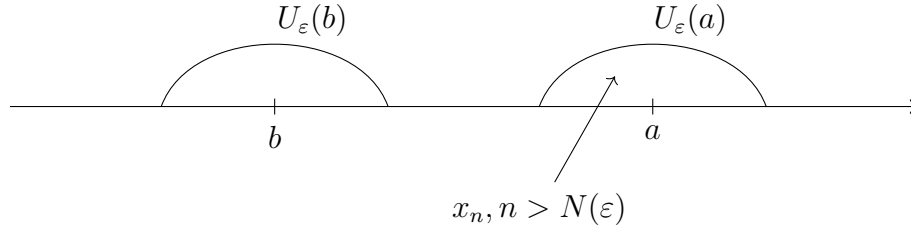
Следовательно,  $U(a)$  содержит бесконечно много элементов  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , а значит,  $a$  — предельная.  $\square$

**Теорема 4.9.2.** Если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то  $a$  является предельной точкой для  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , причем единственной.

*Доказательство.*  $a$  — предельная, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  (по теореме 1).

Докажем единственность предельной точки для  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  “от противного”. Пусть  $\exists b \neq a$ ,  $b$  — предельная точка  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , тогда  $|b - a| \geq \delta > 0$ . Т.к.  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , любая  $\varepsilon$ -окрестность точки содержит бесконечно много элементов  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , а именно все, начиная с номера  $N(\varepsilon) + 1$ , т.е.  $\forall n > n(\varepsilon)$ . Вне  $U_\varepsilon(a)$  может содержаться не более конечного числа элементов  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  (возможно  $x_n$  с номерами  $1, 2, \dots, N(\varepsilon)$ ).

Выберем  $\varepsilon = \frac{\delta}{4} > 0$ . Тогда  $\forall n > N(\varepsilon) : x_n \in U_\varepsilon(a)$ .



Но  $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ , что противоречит тому, что  $b$  — предельная точка для  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , т.е.  $U_\varepsilon(b)$  должна содержать бесконечно много элементов  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , а туда может попасть не более конечного. Следовательно,  $a = b$ .  $\square$

**Теорема 4.9.3.** *Любая ограниченная числовая последовательность имеет хотя бы одну предельную точку.*

*Доказательство.*  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — ограниченная,  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset \mathbb{R}$ ,  $X$  — множество значений числовой последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ . Т.к.  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — ограниченная числовая последовательность,  $X$  — ограниченное числовое множество. Рассмотрим два случая.

Первый:  $X$  — бесконечное числовое множество. Тогда  $X$  по принципу Больцано-Вейерштрасса имеет хотя бы одну предельную точку  $a$ , т.е. в любую  $U(a)$  попадает бесконечно много элементов множества  $X$ , а значит, и бесконечно много элементов  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ . Следовательно,  $a$  — предельная точка последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ .

Второй:  $X$  — конечное числовое множество. Тогда хотя бы один элемент последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  повторяется бесконечно много раз, т.е.  $\exists$  подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  (постоянная  $\forall k \in \mathbb{N}$ ),  $x_{n_k} = a \in X \implies a$  — предельная точка  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ .  $\square$

**Теорема 4.9.4.** *Для того, чтобы точка  $a \in \mathbb{R}$  была пределом  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  была ограниченной и имела единственную предельную точку.*

*Доказательство.* Докажем необходимость.  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R} \implies \{x_n\}_{n=1}^\infty$  ограничена (по свойству сходящейся последовательности), а значит,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  имеет единственную предельную точку (по теореме 2).

Докажем достаточность. Пусть  $a$  — единственная предельная точка ограниченной последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ . Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

Т.к.  $a$  — .  $\square$

## 4.10 Фундаментальные последовательности

**Определение 4.10.1.** Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  называется фундаментальной  $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N, \forall m > N : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

**Теорема 4.10.1.** Если числовая последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальна, то она ограничена.

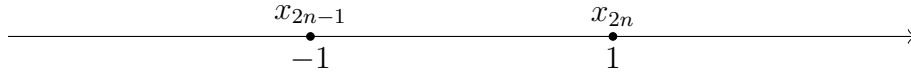
*Доказательство.*  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальная  $\implies$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N, \forall m > N : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Пусть  $\varepsilon = 1$ , тогда

$$\begin{aligned} \exists N = N(1) &\implies \forall n > N, m = N + 1 : |x_n - x_{N+1}| < 1 \implies \\ &\implies \forall n > N : |x_n| = |x_n - x_{N+1} + x_{N+1}| \leq \\ &\leq |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| < 1 + |x_{N+1}| = M_0 \implies \\ &\implies \forall n > N : |x_n| < M_0. \end{aligned}$$

Пусть  $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, M_0\}$ , тогда  $\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ограничена.  $\square$



**Теорема 4.10.2** (Критерий Коши сходимости числовой последовательности). Числовая последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

*Доказательство.* Докажем необходимость.

По условию  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится  $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$ , тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N, \forall m > N : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}; |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим  $|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$$\forall n > N, \forall m > N \quad (N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) : |x_n - x_m| < \varepsilon \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

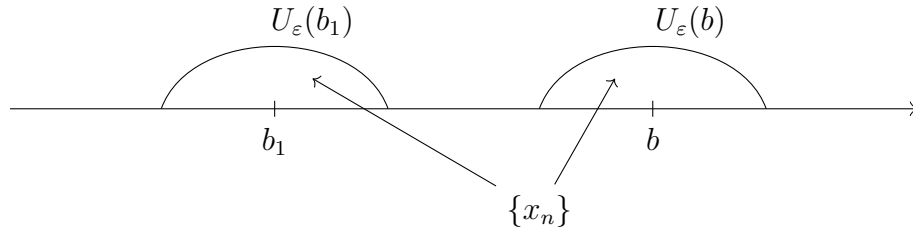
Следовательно,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальна.

Докажем достаточность.



По условию  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальна  $\implies$  ограничена  $\implies \exists$  хотя бы одна предельная точка. Докажем, что эта предельная точка единственна “от противного”. Предположим, что  $\exists$  две предельные точки последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : b$  и  $b_1, b \neq b_1$ . По определению предельной точки  $\forall \varepsilon > 0$   $U_{\varepsilon}(b)$  и  $U_{\varepsilon}(b_1)$  содержит бесконечно много членов последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальна  $\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N : |x_n - x_m| < \varepsilon$ .



Т.к.  $b_1 \neq b \implies \varepsilon = \frac{|b_1 - b|}{6} > 0$ . Для выбранного  $\varepsilon$  найдем соответствующий номер  $N = N(\varepsilon)$

$$\forall n, m > N : |x_n - x_m| < \frac{|b_1 - b|}{6}.$$

Т.к. в  $U_{\varepsilon}(b)$  и  $U_{\varepsilon}(b_1)$  попадает бесконечно много элементов  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , то

$$\exists n_1 > N, x_{n_1} \in U_{\varepsilon}(b) \text{ и } \exists m_1 > N : x_{m_1} \in U_{\varepsilon}(b_1).$$

$$\begin{aligned} 0 < |b - b_1| &= |b - x_{n_1} + x_{n_1} - x_{m_1} + x_{m_1} - b_1| \leq \\ &\leq |x_{n_1} - b| + |x_{n_1} - x_{m_1}| + |x_{m_1} - b_1| < 3\varepsilon = \\ &= \frac{3|b - b_1|}{6} = \frac{|b - b_1|}{2}. \end{aligned}$$

$$0 < |b - b_1| < \frac{|b - b_1|}{2}.$$

Противоречие, следовательно,  $b = b_1$ , а значит,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  имеет единственную предельную точку  $\implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится (по теореме 4 о предельной точке последовательности).  $\square$

Пример:  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ . Существует ли  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$ ?  
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad m = 2n > n$

$$|x_n - x_{2n}| = |x_{2n} - x_n| = \left| 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \right| =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  не является фундаментальной.

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N \exists m = 2n > N : |x_n - x_{2n}| > \frac{1}{2}.$$

Значит, не существует конечный  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , т.е. последовательность не является сходящейся.

**Определение 4.10.2.** Число  $b$  или  $+\infty(-\infty)$  называют *частичным пределом* числовой последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \iff$

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = b(+\infty)(-\infty).$$

Если частичный предел есть конечное число, то это число является предельной точкой  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

$(-1)^n$  -  $+$  -  $1$  - частичные пределы. Наибольший частичный предел (может быть  $+\infty$ ) называют *верхним пределом* числовой последовательности и обозначают  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$ . Наименьший частичный предел (может быть  $-\infty$ ) называют *нижним пределом* числовой последовательности и обозначают  $\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$ .

$$\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}.$$

Пример:  $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = x_n$ .  $\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = -\infty$ .  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = +\infty$ .

**Теорема 4.10.3.** Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится  $\iff$

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}.$$

и является конечным числом.

## 5 Пределы функций

### 5.1 Определение предела по Коши

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$*$  :  $a$ ;  $a + 0$ ;  $a - 0$ ;  $\infty$ ;  $+\infty$ ;  $-\infty$

$**$  :  $b$ ;  $\infty$ ;  $+\infty$ ;  $-\infty$

Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой проколотой окрестности  $*$ .

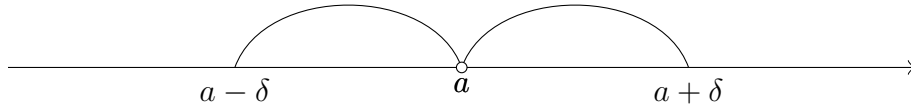
**Определение 5.1.1** (предела по Коши).  $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = ** \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies f(x) \in U_\varepsilon(**).$$

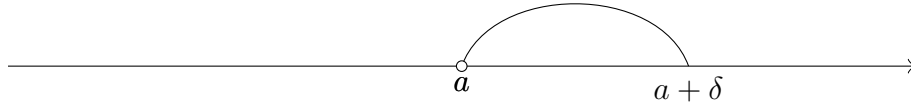
$*$	$x \in \mathring{U}_\delta(*)$
$a$	$x \in \mathbb{R} : 0 <  x - a  < \delta$
$a + 0$	$x \in \mathbb{R} : a < x < a + \delta$
$a - 0$	$x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a$
$\infty$	$x \in \mathbb{R} :  x  > \delta$
$+\infty$	$x \in \mathbb{R} : x > \delta$
$-\infty$	$x \in \mathbb{R} : x < -\delta$

$**$	$f(x) \in U_\varepsilon(**)$
$b$	$ f(x) - b  < \varepsilon$
$\infty$	$ f(x)  > \varepsilon$
$+\infty$	$f(x) > \varepsilon$
$-\infty$	$f(x) < -\varepsilon$

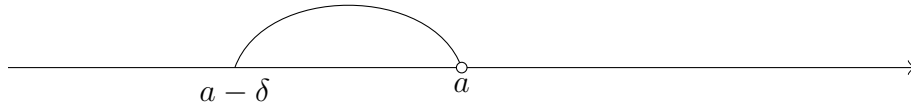
$$x \in \mathring{U}_\delta(a)$$



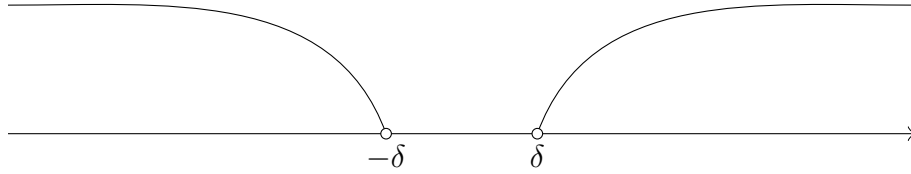
$$x \in \mathring{U}_\delta(a + 0)$$



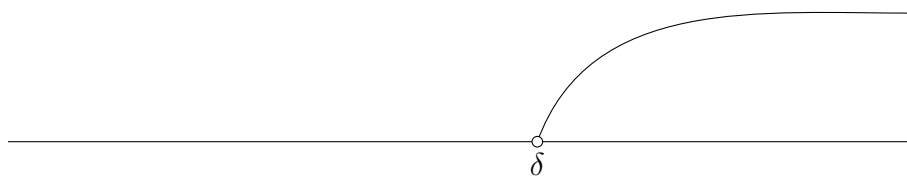
$$x \in \mathring{U}_\delta(a - 0)$$



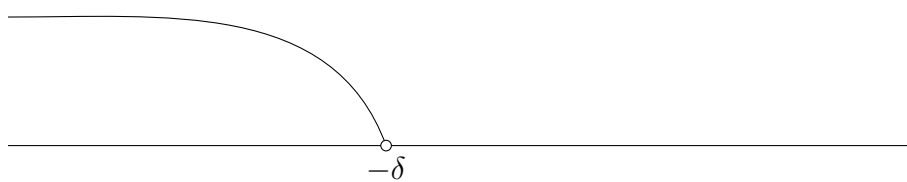
$$x \in \mathring{U}_\delta(\infty)$$



$$x \in \mathring{U}_\delta(+\infty)$$

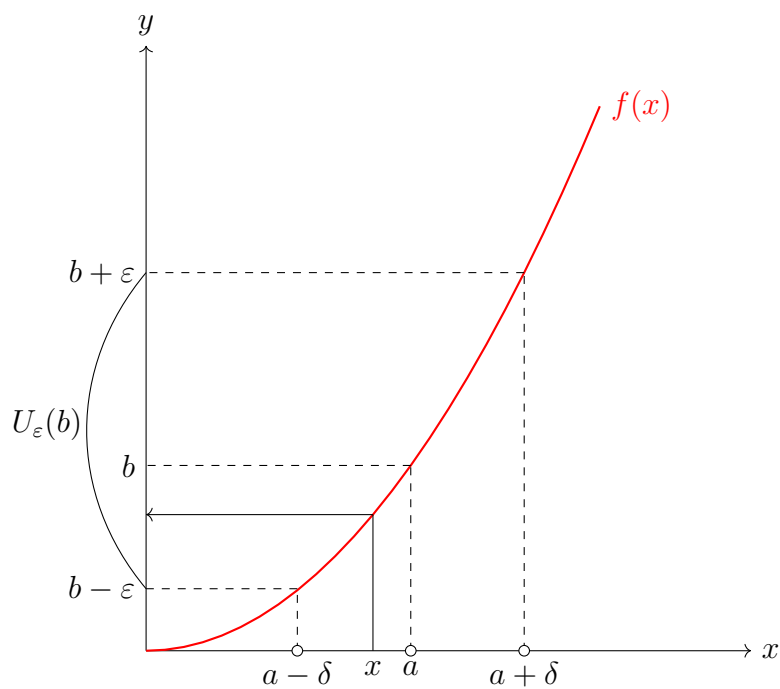


$$x \in \mathring{U}_\delta(-\infty)$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$



$x \approx a$  с точностью  $< \delta = \delta(\varepsilon) \implies f(x) \approx b$  с точностью  $< \varepsilon$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b &\iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : x > \delta \implies \\ &\implies |f(x) - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Пример:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b &\iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : x < -\delta \implies \\ &\implies |f(x) - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Пример:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$ .

Если  $* = a$ ;  $\infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow *} f(x)$  называется двусторонним пределом. Если  $* = a+0$ ;  $a-0$ ;  $+\infty$ ;  $-\infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow *} f(x)$  называется односторонним пределом. Если  $** = b$  (конечное число), то  $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = b$  называют конечным пределом. Если  $** = \infty$ ;  $+\infty$ ;  $-\infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow *} f(x)$  называют бесконечным.

**Теорема 5.1.1** (о связи двустороннего предела с односторонними).

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b \text{ и } \exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b.$$

*Доказательство.* Докажем необходимость. Распишем определение двустороннего предела по Коши.

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b &\implies \\ &\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta \implies \\ &\implies |f(x) - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Рассмотрим неравенство  $0 < |x - a| < \delta$ .

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta &\iff x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \implies \\ &\implies \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} : a < x < a + \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon, \\ \forall x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a \implies |f(x) - b| < \varepsilon. \end{cases} \implies \\ &\implies \begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b, \\ \exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b. \end{cases} \end{aligned}$$

Докажем достаточность. Распишем определения односторонних пределов по Коши.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b &\iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : a < x < a + \delta_1 \implies \\ &\implies |f(x) - b| < \varepsilon.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b &\iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : a - \delta_2 < x < a \implies \\ &\implies |f(x) - b| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Пусть  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ . Тогда  $\mathring{U}_\delta(a) \subset (\mathring{U}_{\delta_1}(a) \cap \mathring{U}_{\delta_2}(a)) \implies$   
 $\implies (\forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon) \implies \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$

□

*Замечание (1).*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \iff \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty.$$

*Замечание (2).*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b(\infty), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b(\infty).$$

**Определение 5.1.2** (Определение предела по Гейне). Пусть  $f(x)$  определена в некоторой  $\mathring{U}(*)$ .

$$\lim_{x \rightarrow *} f(x) = ** \iff \forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathring{U}(*) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = * \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = **,$$

где  $x_n \neq * \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 5.1.2** (об эквивалентности определений предела по Коши и Гейне). Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.

Пример:  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  не определен.

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{1}{\pi n} & \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= 0 & \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi n = 0. \\ y_n &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} & \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= 0 & \lim_{n \rightarrow \infty} \sin y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{2} + 2\pi n = 1.\end{aligned}$$

$0 \neq 1 \implies$  не существует  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

**Теорема 5.1.3** (о единственности предела функции). Если  $\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b \in \mathbb{R}$ , то этот предел единственный (при  $x \rightarrow *$ ).

*Доказательство.* Воспользуемся определением предела по Гейне.

$$\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b \in \mathbb{R} \implies \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \neq *, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = * \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b.$$

Числовая последовательность  $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится, следовательно, имеет единственный предел  $b$  (по теореме о единственности предела последовательности).  $\square$

**Определение 5.1.3.** Функция  $f(x)$  называется локально ограниченной при  $x \rightarrow *$  (в точке  $*$  или в окрестности  $*$ )  $\iff \exists \mathring{U}(*), \exists M > 0$ , что  $f(x)$  определена в  $\mathring{U}(*)$  и  $\forall$

**Теорема 5.1.4** (о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел). Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b \in \mathbb{R}$ . Тогда  $f(x)$  локально ограничена при  $x \rightarrow *$ .

*Доказательство.*

$$\lim_{x \rightarrow *} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta}(*) \implies |f(x) - b| < \varepsilon \implies .$$

$$\implies \forall x \in \mathring{U}_{\delta}(*) : |f(x)| = |f(x) - b + b| \leq |f(x) - b| + |b| < \varepsilon + |b| = M.$$

Выберем любой  $\varepsilon > 0$ , например,  $\varepsilon = 1$ . Найдем соответствующую  $\delta > 0 \implies \forall x \in \mathring{U}_{\delta}(*) : |f(x)| < 1 + |b| = M \implies f(x)$  локально ограничена при  $x \rightarrow *$ .  $\square$

## 5.2 Бесконечно малые функции

**Определение 5.2.1.** Функцию  $\alpha(x)$  называют бесконечно малой (б.м.) при  $x \rightarrow *$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \rightarrow *} \alpha(x) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta}(*) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Пример:  $y = 2^{\frac{1}{x}}$

$$x \rightarrow 0+0 \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = [2^{+\infty}] = +\infty.$$

$$x \rightarrow 0-0 \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = [2^{-\infty}] = 0 \implies f(x) \text{ бесконечно малая при } x \rightarrow 0-0.$$

**Теорема 5.2.1** (о связи функции, ее предела и бесконечно малой).

$$\lim_{x \rightarrow *} f(x) = b \iff f(x) = b + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{бесконечно малая при } x \rightarrow *.$$

*Доказательство.* Докажем необходимость. По условию

Докажем достаточность. Пусть  $f(x) = b + \alpha(x)$ ,  $\alpha(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow *$   $\implies$ .

$$\implies \alpha(x) = f(x) - b \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow *.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

□

### 5.3 Свойства бесконечно малых функций

**Теорема 5.3.1.** Пусть  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  — бесконечно малые при  $x \rightarrow *$ . Тогда  $\alpha(x) + \beta(x)$  — бесконечно малые при  $x \rightarrow *$ .

*Доказательство.*  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  бесконечно малые при  $x \rightarrow *$

$$\lim_{x \rightarrow *} \alpha(x) \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_1}(*) \implies |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow *} \beta(x) \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(*) \implies |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , если  $*$  :  $a; a + 0; a - 0$  и  $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ , если  $*$  :  $\infty; +\infty, -\infty$ .

$$\implies \mathring{U}_\delta(*) = \mathring{U}_{\delta_1}(*) \cap \mathring{U}_{\delta_2}(*) \implies .$$

$$\implies \forall.$$

□

**Следствие 5.3.1.1.** Сумма конечного числа бесконечно малой при  $x \rightarrow *$  есть бесконечно малая при  $x \rightarrow *$ .

**Теорема 5.3.2** (произведение бесконечно малой на ограниченную). Пусть  $\alpha$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow *$ ,  $f(x)$  локально ограничена при  $x \rightarrow *$ . Тогда  $\alpha(x) \cdot f(x)$  есть бесконечно малая при  $x \rightarrow *$ .

*Доказательство.*  $f(x)$  — локально ограничена при  $x \rightarrow * \implies \exists \mathring{U}_{\delta_1}(*) \quad \exists M > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_1}(*) : |f(x)| < M$ ;  $\alpha(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow * \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(*) \implies |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \implies \implies \mathring{U}_\delta = \mathring{U}_{\delta_1}(*) \cap \mathring{U}_{\delta_2}(*)$

□



$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = .$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \arctan \frac{1}{x^{100}} = 0.$$

**Теорема 5.3.3** (о произведении двух бесконечно малых). Пусть  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  — бесконечно малые при  $x \rightarrow *$ . Тогда  $\alpha(x)\beta(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow *$

*Доказательство.*  $\beta(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow *$   $\implies \lim_{x \rightarrow *} \beta(x) = 0 \implies$  по теореме о локальной ограниченной функции, имеющей конечный предел  $\implies \beta(x)$  локально ограничена при  $x \rightarrow *$   $\implies \alpha(x) \cdot \beta(x)$  — произведение бесконечно малой на локально ограниченную при  $x \rightarrow *$   $\implies$  по теореме 2  $\alpha \cdot \beta$  — бесконечно малые при.  $\square$

**Следствие 5.3.3.1.** Произведение конечного числа бесконечно малых при  $x \rightarrow *$  есть бесконечно малая при  $x \rightarrow *$ .

## 5.4 Арифметические операции с функциями, имеющими пределы

**Теорема 5.4.1.** Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = A \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow *} g(x) = B \in \mathbb{R}$  Тогда

1.  $\exists \lim_{x \rightarrow *} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2.  $\exists \lim_{x \rightarrow *} (f(x)g(x)) = AB$
3.  $B \neq 0 \implies \exists \lim_{x \rightarrow *} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

*Доказательство.*  $\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = A; \exists \lim_{x \rightarrow *} g(x) = B \implies$  по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой  $\implies f(x) = A + \alpha(x), g(x) = B + \beta(x)$ , где  $\alpha(x), \beta(x)$  — бесконечно малые при  $x \rightarrow *$ .

1.  $f(x) \pm g(x) = (A + \alpha(x)) \pm (B + \beta(x)) = A \pm B + \alpha(x) \pm \beta(x) = A \pm B + \gamma(x)$ , где  $\gamma(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow *$   $\implies$
2.  $f(x) \cdot g(x) = (A + \alpha(x))(B + \beta(x)) = AB + B\alpha(x) + A\beta(x) + \alpha(x)\beta(x) = AB + \gamma(x) \implies$  по теореме о связи предела функции, ее предела и бесконечно малой  $\implies \lim_{x \rightarrow *} f(x)g(x) = AB$

$$3. \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} = \frac{A}{B} + \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - AB$$

$$\gamma(x) = \frac{AB + B\alpha(x) - AB - A\beta(x)}{B(B + \beta(x))} = \frac{B\alpha(x) - A\beta(x)}{B} \cdot \frac{1}{B + \beta(x)}.$$

$\frac{B\alpha(x)-A\beta(x)}{B}$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow *$  по свойствам бесконечно малых.

Докажем, что  $\phi(x) = \frac{1}{B+\beta(x)}$  локально ограничена при  $x \rightarrow *$ .  
 $\beta(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow *$   $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies |\beta(x)| < \varepsilon$ . Выберем  $\varepsilon = \frac{|B|}{2} > 0$ , найдем соответствующее  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \implies \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |\beta(x)| < \frac{|B|}{2}$

$$\implies |B + \beta(x)| \geq |B| - |\beta(x)| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2} \implies .$$

$$\implies \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |B + \beta(x)| > \frac{|B|}{2} > 0 \implies .$$

$$\frac{1}{B + \beta(x) < \frac{2}{|B|}} \implies .$$

$\implies \phi(x) = \frac{1}{B+\beta(x)}$  локально ограничена при  $x \rightarrow *$   $\gamma(x)$  — произведение бесконечно малой на локально ограниченную при  $x \rightarrow *$   $\implies$  по свойству бесконечно малой является бесконечно малой при  $x \rightarrow *$ .

□

**Теорема 5.4.2** (о знакопостоянстве функции, имеющей ненулевой предел). Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b \neq 0$ . Тогда  $\exists \mathring{U}_\delta(*) \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |f(x)| > \frac{|b|}{2}$ . Кроме того, если  $b > 0$ , то  $\forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : f(x) > \frac{b}{2} \implies f(x) > 0$ , т.е. имеет тот же знак, что и предел; если  $b < 0$ , то  $\forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : f(x) < \frac{b}{2} \implies f(x) < 0$ , т.е. имеет тот же знак, что и предел.

*Доказательство.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Или  $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ . Выберем  $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$ , найдем соответствующий  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \implies$

$$\forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |f(x)| = |b + f(x) - b| \geq |b| - |f(x) - b| > |b| - \frac{|b|}{2}.$$

$$\implies |f(x)| > \frac{|b|}{2}.$$

Пусть  $b > 0$ , тогда  $\varepsilon = \frac{|b|}{2} = \frac{b}{2} > 0 \implies \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(*) \quad f(x) > b - \varepsilon = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} > 0 \quad \square$