

Лекции по математическому анализу для 1 курса ФН2, 3

Власова Елена Александровна

2024-2025 год.

Содержание

1	Введение	3
1.1	Элементы теории множеств	3
1.2	Кванторные операции	3
1.3	Метод математической индукции	3
2	Множество действительных чисел	3
2.1	Аксиоматика действительных чисел	3
2.2	Геометрическая интерпретация \mathbb{R}	4
2.3	Числовые промежутки	4
2.4	Бесконечные числовые промежутки	4
2.5	Окрестности точки	4
2.6	Принцип вложенных отрезков (Коши-Кантора)	4
2.7	Ограниченные и неограниченные числовые множества	4
2.8	Точные грани числового множества	4
2.9	Принцип Архимеда	4
3	Функции или отображения	4
3.1	Понятие функции	4
3.2	Ограниченные и неограниченные числовые множества	4
3.3	Обратные функции	4
3.4	Чётные и нечётные функции	4
3.5	Периодические функции	4
3.6	Сложная функция (композиция)	4
3.7	Основные элементарные функции	4
4	Числовые последовательности и их пределы	4
4.1	Ограниченные и неограниченные числовые последовательности	5
4.2	Предел числовой последовательности	5
4.3	Бесконечные пределы	5
4.4	Свойства сходящихся последовательностей	5
4.5	Монотонные числовые последовательности	5
4.6	Число e	5
4.7	Гиперболические функции	5
4.8	Предельные точки числового множества	5
4.9	Предельные точки числовых последовательностей	5

Элементарные функции и их пределы

1 Введение

1.1 Элементы теории множеств

1.2 Кванторные операции

1.3 Метод математической индукции

2 Множество действительных чисел

2.1 Аксиоматика действительных чисел

Определение 1. Множество \mathbb{R} называется множеством действительных чисел, если элементы этого множества удовлетворяют следующему комплексу условий:

1. На множестве \mathbb{R} определена операция сложения “+”, то есть задано отображение, которое каждой упорядоченной паре $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ставит в соответствие элемент из \mathbb{R} , называемый суммой $x + y$ и удовлетворяющий следующим аксиомам:

(a) $\exists 0 \in \mathbb{R}$, такой, что $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$

(b) $\forall x \exists$ противоположный элемент “ $-x$ ”, такой, что $x + (-x) = (-x) + x = 0$

(c) Ассоциативность

(d) Коммутативность

2. На \mathbb{R} определена операция умножения “ \cdot ”, то есть $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ставится в соответствие элемент $(x \cdot y) \in \mathbb{R}$.

(a) \exists нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R}$, такой, что $\forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

- 2.2 Геометрическая интерпретация \mathbb{R}
- 2.3 Числовые промежутки
- 2.4 Бесконечные числовые промежутки
- 2.5 Окрестности точки
- 2.6 Принцип вложенных отрезков (Коши-Кантора)
- 2.7 Ограниченные и неограниченные числовые множества
- 2.8 Точные грани числового множества
- 2.9 Принцип Архимеда
- 3 Функции или отображения
 - 3.1 Понятие функции
 - 3.2 Ограниченные и неограниченные числовые множества
 - 3.3 Обратные функции
 - 3.4 Чётные и нечётные функции
 - 3.5 Периодические функции
 - 3.6 Сложная функция (композиция)
 - 3.7 Основные элементарные функции
- 4 Числовые последовательности и их пределы

Определение 2. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ - числовая последовательность, т.е. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \mathbb{R}$.

4.1 Ограниченные и неограниченные числовые последовательности

Определение 3. Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется

- 1) ограниченной сверху, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M$;
- 2) ограниченной снизу, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq M$;
- 3) ограниченной, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M$;
- 4) неограниченной, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| > M$;

4.2 Предел числовой последовательности

Определение 4. Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности, если $\forall \varepsilon > 0$ существует такой номер n , зависящий от ε , что \forall натурального числа $N > n$ верно неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

4.3 Бесконечные пределы

4.4 Свойства сходящихся последовательностей

4.5 Монотонные числовые последовательности

4.6 Число e

4.7 Гиперболические функции

4.8 Предельные точки числового множества

4.9 Предельные точки числовых последовательностей