# Лекции по математическому анализу для 1 курса ФН2, 3

Власова Елена Александровна

2024-2025 год.

# Содержание

# Элементарные функции и их пределы

## 1 Введение

### 1.1 Элементы теории множеств

### 1.2 Кванторные операции

### 1.3 Метод математической индукции

## 2 Множество действительных чисел

### 2.1 Аксиоматика действительных чисел

**Определение 1.** *Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных чисел, если элементы этого множества удовлетворяют следующему комплексу условий:*

1. *На множестве $\mathbb{R}$ определена операция сложения "+", то есть задано отображение, которое каждой упорядоченной паре $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ставит в соответствие элемент из $\mathbb{R}$, называемый суммой $x+y$ и удовлетворяющий следующим аксиомам:*
   - (a) $\exists 0 \in \mathbb{R}$, *такой, что* $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$
   - (b) $\forall x$ $\exists$ *противоположный элемент* "$-x$", *такой, что* $x+(-x) = (-x) + x = 0$
   - (c) *Ассоциативность.* $\forall x,y,z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$.
   - (d) *Коммутативность.* $\forall x,y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$.
2. *На $\mathbb{R}$ определена операция умножения "$\cdot$", то есть $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ставится в соответствие элемент $(x \cdot y) \in \mathbb{R}$.*
   - (a) $\exists$ *нейтральный элемент* $1 \in \mathbb{R}$, *такой, что* $\forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.
   - (b) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\exists$ *обратный элемент* "$x^{-1}$", *такой, что* $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.
   - (c) *Ассоциативность.* $\forall x,y,z \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
   - (d) *Коммутативность.* $\forall x,y \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : x \cdot y = y \cdot x$.

*Операция умножения дистрибутивна по отношению к сложению.*

$$\forall x,y,z \in \mathbb{R} : (x+y)z = xz + yz$$

3. *Отношения порядка. Для $\mathbb{R}$ определено отношение "$\leq$ ", т.е. $x \leq y$.*

   (a) $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$.

   (b) $\forall x,y \in \mathbb{R} : (x \leq y \wedge y \leq x) \implies x = y$.

   ...

## 2.2 Геометрическая интерпретация $\mathbb{R}$

## 2.3 Числовые промежутки

## 2.4 Бесконечные числовые промежутки

## 2.5 Окрестности точки

## 2.6 Принцип вложенных отрезков (Коши-Кантора)

**Определение 2.** *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность некоторых множеств. Если $\forall n \in \mathbb{N} : X_n \supset X_{n+1}$, то эта последовательность называется последовательностью вложенных отрезков.*

### 2.7 Ограниченные и неограниченные числовые множества

### 2.8 Точные грани числового множества

### 2.9 Принцип Архимеда

## 3 Функции или отображения

### 3.1 Понятие функции

### 3.2 Ограниченные и неограниченные числовые множества

### 3.3 Обратные функции

### 3.4 Чётные и нечётные функции

### 3.5 Периодические функции

### 3.6 Сложная функция (композиция)

### 3.7 Основные элементарные функции

## 4 Числовые последовательности и их пределы

**Определение 3.** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ - *числовая последовательность, т.е.* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \mathbb{R}$.

### 4.1 Ограниченные и неограниченные числовые последовательности

**Определение 4.** *Числовая последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется*
*1) ограниченной сверху, если* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \ x_n \leq M$*;*
*2) ограниченной снизу, если* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \ x_n \geq M$*;*
*3) ограниченной, если* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M$*;*
*4) неограниченной, если* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| > M$*;*

## 4.2 Предел числовой последовательности

**Определение 5.** *Число* $a \in \mathbb{R}$ *называется пределом числовой последовательности, если* $\forall \varepsilon > 0$ *существует такой номер* $n$*, зависящий от* $\varepsilon$*, что* $\forall$ *натурального числа* $N > n$ *верно неравенство* $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

## 4.3 Бесконечные пределы

## 4.4 Свойства сходящихся последовательностей

## 4.5 Монотонные числовые последовательности

## 4.6 Число $e$

## 4.7 Гиперболические функции

## 4.8 Предельные точки числового множества

## 4.9 Предельные точки числовых последовательностей