Лекции по математическому анализу для 1 курса ФН2, 3

Власова Елена Александровна

2024-2025 год.

Содержание

Элементарные функции и их пределы

1 Введение

1.1 Элементы теории множеств

1.2 Кванторные операции

1.3 Метод математической индукции

2 Множество действительных чисел

2.1 Аксиоматика действительных чисел

Определение 2.1.1. *Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных чисел, если элементы этого множества удовлетворяют следующему комплексу условий:*

1. *На множестве $\mathbb{R}$ определена операция сложения "+", то есть задано отображение, которое каждой упорядоченной паре $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ставит в соответствие элемент из $\mathbb{R}$, называемый суммой $x + y$ и удовлетворяющий следующим аксиомам:*
   - (a) *$\exists 0 \in \mathbb{R}$, такой, что $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$;*
   - (b) *$\forall x$ $\exists$ противоположный элемент "$-x$", такой, что $x+(-x) = (-x) + x = 0$;*
   - (c) *Ассоциативность. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$;*
   - (d) *Коммутативность. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$.*

2. *На $\mathbb{R}$ определена операция умножения "$\cdot$", то есть $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ставится в соответствие элемент $(x \cdot y) \in \mathbb{R}$.*
   - (a) *$\exists$ нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R}$, такой, что $\forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$;*
   - (b) *$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\exists$ обратный элемент "x^{-1}", такой, что $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$;*
   - (c) *Ассоциативность. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;*
   - (d) *Коммутативность. $\forall x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : x \cdot y = y \cdot x$.*

Операция умножения дистрибутивна по отношению к сложению.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y)z = xz + yz$$

3. *Отношения порядка. Для $\mathbb{R}$ определено отношение "$\leq$ ".*

   (a) $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x;$

   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y \wedge y \leq x) \implies x = y;$

   $\ldots$

2.2 Геометрическая интерпретация $\mathbb{R}$

2.3 Числовые промежутки

2.4 Бесконечные числовые промежутки

2.5 Окрестности точки

2.6 Принцип вложенных отрезков (Коши-Кантора)

Определение 2.6.1. *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность некоторых множеств. Если $\forall n \in \mathbb{N} : X_n \supset X_{n+1}$, то эта последовательность называется последовательностью вложенных отрезков.*

2.7 Ограниченные и неограниченные числовые множества

2.8 Точные грани числового множества

2.9 Принцип Архимеда

3 Функции или отображения

3.1 Понятие функции

3.2 Ограниченные и неограниченные числовые множества

3.3 Обратные функции

3.4 Чётные и нечётные функции

3.5 Периодические функции

3.6 Сложная функция (композиция)

3.7 Основные элементарные функции

4 Числовые последовательности и их пределы

Определение 4.0.1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — *числовая последовательность, т.е.* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \mathbb{R}$.

4.1 Ограниченные и неограниченные числовые последовательности

Определение 4.1.1. *Числовая последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется*

1. *ограниченной сверху, если* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \ x_n \leq M;$
2. *ограниченной снизу, если* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \ x_n \geq M;$
3. *ограниченной, если* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M;$
4. *неограниченной, если* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| > M;$

4.2 Предел числовой последовательности

Определение 4.2.1. *Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности, если $\forall \varepsilon > 0$ существует такой номер n, зависящий от ε, что $\forall$ натурального числа $N > n$ верно неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

4.3 Бесконечные пределы

4.4 Свойства сходящихся последовательностей

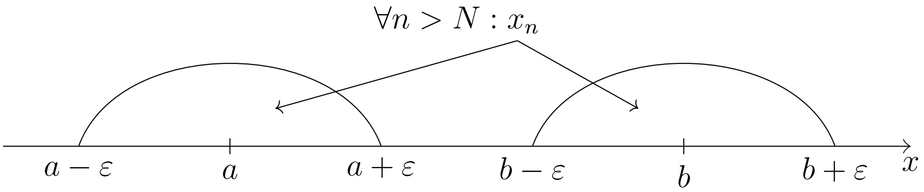
Теорема 4.4.1 (о единственности предела)**.** *Любая сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Доказательство. "От противного". Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — сходящаяся последовательность. Предположим, что $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = b$, причем $a \neq b$. Пусть для определенности $a < b$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 : |x_n - b| < \varepsilon.$$

$$N = \max\{N_1, n_2\} \implies \forall n > N : \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon, \\ |x_n - b| < \varepsilon. \end{cases}$$



Выберем $\varepsilon = \frac{b-a}{4} > 0$. Найдем $N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда

$$\forall n > N \quad |x_n - a| < \frac{b-a}{4}, \quad |x_n - b| < \frac{b-a}{4}.$$

Следовательно,

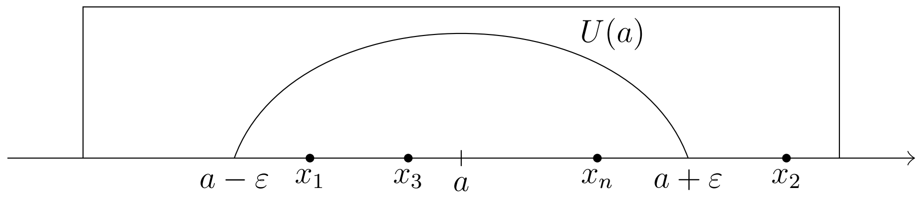
$$0 < b - a = |b - a| = |b - x_n + x_n - a| \leq |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{b-a}{2},$$

то есть

$$0 < b - a < \frac{b-a}{2}.$$

Мы пришли к противоречию, следовательно, $a = b \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет единственный предел. □

Теорема 4.4.2 (об ограниченности сходящейся последовательности). *Любая сходящаяся последовательность является ограниченной.*



Доказательство. Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то

$$\exists \lim_{n\to\infty} = a \in \mathbb{R} \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = 1 \implies \exists N = N(1) \quad \forall n > N : |x_n - a| < 1$. Следовательно,

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Пусть $M_0 = 1 + |a| \implies \forall n > N : x_n < M_0$.
Пусть $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|, M_0\}$, тогда $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной. □

Замечание. Ограниченность является необходимым условием сходимости числовой последовательности. В то же время условие ограниченности не является достаточным для сходимости числовой последовательности. Например, $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная, но не сходящаяся числовая последовательность.

4.5 Монотонные числовые последовательности

Определение 4.5.1. *Числовая последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется*

1. *возрастающей, если* $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}$;
2. *убывающей, если* $\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1}$;
3. *неубывающей, если* $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}$;
4. *невозрастающей, если* $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n+1}$

Для монотонных числовых последовательностей ограниченность является достаточным условием для сходимости.

Теорема 4.5.1 (Вейерштрасса о сходимости монотонных числовых последовательностей)**.** *Если последовательность не убывает и ограничена сверху, то она является сходящейся. Если последовательность не возрастает и ограничена снизу, то она является сходящейся. В общем, любая монотонная последовательность сходится.*

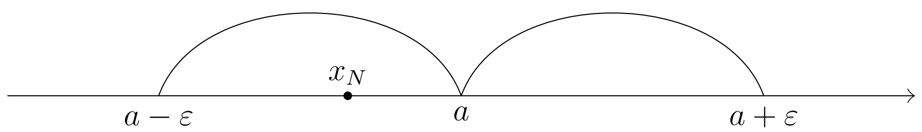
Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает и ограничена сверху $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \text{множество значений этой последовательности } \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = A \text{ является ограниченным сверху числовым множеством} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \exists \sup A \in \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = a, \text{ то есть}$$

1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq a$;

2. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : x_N > a - \varepsilon$.



$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность, то есть

$$\forall n > N = N(\varepsilon) : x_n \geq x_N \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow a - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq a < a + \varepsilon \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \exists \lim_{n \to \infty} x_n = a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ сходится.}$$

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — невозрастающая и ограниченная снизу последовательность, то

$$\exists \lim_{n \to \infty} x_n = \inf A, A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

Доказательство аналогично. □

4.6 Число e

4.7 Гиперболические функции

4.8 Предельные точки числового множества

Определение 4.8.1. *Точка $a \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R} \iff$ любая окрестность $U(a)$ содержит бесконечно* *много элементов множества X.*

Замечание. Множество A называется бесконечным или содержащим бесконечно много элементов, если при вычитании из A любого его конечного подмножества получается непустое множество.

Множество всех предельных точек множества X называется производным множеством для X и обозначается X'.

Утверждение 4.8.1. *Точка $a \in \mathbb{R}$ является предельной для $X \subset \mathbb{R} \iff$ в любой проколотой δ-окрестности точки a содержится хотя бы один элемент множества X, т.е.*

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \cap \mathring{U}(a).$$

Доказательство. ($\Longrightarrow$) Необходимость.

a — предельная для $X \subset \mathbb{R} \implies$

$\implies$ любая $U(a)$ содержит бесконечно много элементов из $X \implies$

$\implies$ $\mathring{U}(a)$ тоже содержит бесконечно много элементов из $X \implies$

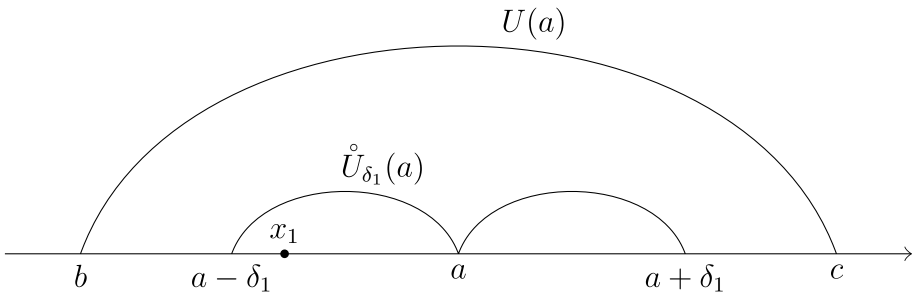
$\implies$ любая $\mathring{U}$ содержит хотя бы один элемент $x \in X$.

($\Longleftarrow$) Достаточность.

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \cap \mathring{U}(a).$$

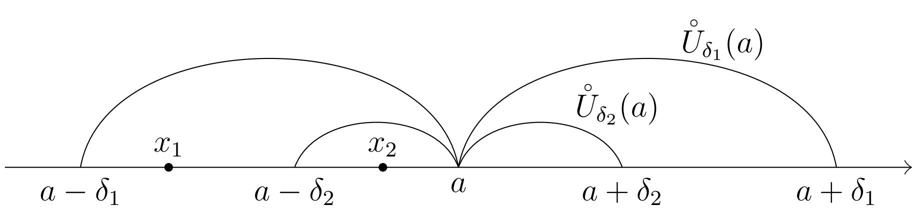
Выберем любую $U(a)$. Тогда

$$\exists \delta_1 > 0 : \mathring{U}(a) \subset U(a) \implies \exists x_1 \in X : x_1 \in \mathring{U}_{\delta_1}(a).$$



Пусть $\delta_2 = \frac{|x_1 - a|}{2} > 0$. Тогда

$$\exists x_2 \in \mathring{U}_{\delta_2}(a) : x_2 \neq x_1.$$



Пусть $\delta_3 = \frac{|x_2 - a|}{2} > 0$. Тогда

$$\exists x_3 \in \mathring{U}_{\delta_3}(a) : x_3 \neq x_2$$

и т.д. На шаге n:

$$\delta_n = \frac{|x_{n-1} - a|}{2} > 0 \implies \exists x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(a) : x_n \neq x_k, k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Таким образом,

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in U(a) : x_n \in X, x_n \neq x_k, n \neq k,$$

а значит, любая окрестность $U(a)$ содержит бесконечно много элементов из $X \implies a$ — предельная точка. □

Утверждение 4.8.2. *Если точка $a \in \mathbb{R}$ является предельной точкой для множества $X \subset \mathbb{R}$, то*

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X : \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Доказательство. a — предельная точка для $X \subset \mathbb{R} \iff \forall \delta > 0 \quad \mathring{U}_\delta(a)$ содержит хотя бы одну точку множества X (по утверждению 1).
Выберем $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}, \delta_n = \frac{1}{n} > 0$, тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in X : x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(a),$$

то есть

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}.$$

Т.к. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

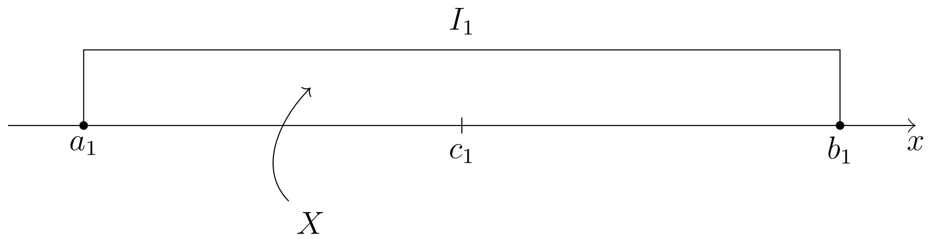
а значит,

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

□

Теорема 4.8.1 (принцип Больцано-Вейерштрасса). *Любое ограниченное бесконечное числовое множество имеет хотя бы одну предельную точку.*

Доказательство. Пусть X — бесконечное ограниченное множество, то есть $\exists I_1 = [a_1, b_1] : X \subset [a_1, b_1]$. Пусть $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, т.е. середина отрезка I_1.



Так как множество X бесконечное, то либо отрезок $[a_1, c_1]$, либо отрезок $[c_1, b_1]$ содержит бесконечно много элементов множества X. Обозначим ту половину отрезка I_1, которая содержит бесконечно много элементов множества X через $I_2 = [a_2, b_2], I_2 \subset I_1$. Выразим длину отрезка I_2:

$$|I_2| = b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{|I_1|}{2}.$$

На отрезке I_2 содержится бесконечно много элементов множества X. Пусть $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$ — середина I_2, тогда либо $[a_2, c_2]$, либо $[c_2, b_2]$ содержит бесконечно много элементов множества X. Обозначим ту половину I_2, где бесконечно много элементов множества X через $I_3 = [a_3, b_3]$. Тогда

$$|I_3| = \frac{|I_1|}{2^2}$$

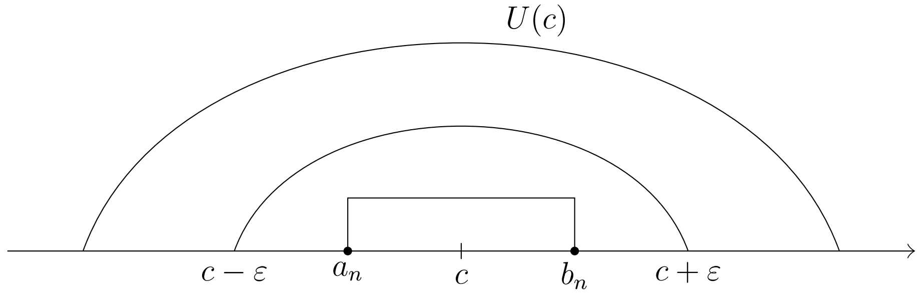
и т.д. На шаге n: $I_n = [a_n, b_n], c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ — середина I_n, I_n содержит бесконечно много элементов из X, тогда либо $[a_n, c_n]$, либо $[c_n, b_n]$ содержит бесконечно много элементов из $X \implies I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset I_n$ и содержит бесконечно много элементов из X. Таким образом, мы получили последовательность вложенных отрезков $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} : I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \ldots$

$$|I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{|I_1|}{2^{n-1}} = 0 \implies$$
$$\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |I_n| < \varepsilon.$$

По принципу Коши-Кантора $\exists!$ общая точка c, т.е. $\forall n \in \mathbb{N} : c \in I_n$.

$$\forall U(c) \quad \exists \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(c) \subset U(c) \implies \exists n \in \mathbb{N} : I_n = [a_n, b_n] \subset U_\varepsilon(c)$$

(например, $|I_n| < \frac{\varepsilon}{2}$).



Отрезок I_n содержит бесконечно много элементов множества X по построению последовательности $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} \implies$ окрестность $U(c)$ содержит бесконечно много элементов из $X \implies c$ — предельная. $\square$

4.9 Предельные точки числовых последовательностей

Определение 4.9.1. *Точка $a \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой числовой последовательно $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \iff$ любая окрестность $U(a)$ содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Замечание. Если a — предельная точка $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то любая $U(a)$ содержит какую-либо подпоследовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пример: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n = (-1)^n$.

Теорема 4.9.1. *Точка $a \in \mathbb{R}$ является предельной для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \iff \exists\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть a — предельная точка последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Выберем $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}, \varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0$.

Для $n = 1$ $U_{\varepsilon_1=1}(a)$ содержит ∞ много элементов $\implies \exists x_{n_1} \in U_{\varepsilon_1}(a)$, т.е. $|x_{n_1} - a| < 1$.

Для $n = 2$ $U_{\varepsilon_2=\frac{1}{2}}(a)$ содержит ∞ много элементов $\implies \exists n_2 > n_1 :$ $x_{n_2} \in U_{\varepsilon_2}(a)$, т.е. $|x_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$.

Для $n = 3$ $U_{\varepsilon_3=\frac{1}{3}}(a)$ содержит ∞ много элементов $\implies \exists n_3 > n_2 :$ $x_{n_3} \in U_{\varepsilon_3}(a)$, т.е. $|x_{n_3} - a| < \frac{1}{3}$ и т.д.

Для $n = k$ $U_{\varepsilon_k=\frac{1}{k}}(a)$ содержит ∞ много элементов $\implies \exists n_k > n_{k-1} :$ $x_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}(a)$, т.е. $|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \implies \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \implies \forall k \in \mathbb{N} : |x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall k > N : \frac{1}{k} < \varepsilon \implies$$
$$\implies \forall k > N \quad |x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} < \varepsilon \implies \exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

Докажем достаточность.

Пусть $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Выберем любую $U(a)$ и найдем такое $\varepsilon > 0$, что $U_\varepsilon(a) \subset U(a)$:

$$\exists N = N_(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall k > N : |x_{n_k} - a| < \varepsilon \implies x_{n_k} \in U_\varepsilon(a) \subset U(a).$$

Следовательно, $U(a)$ содержит бесконечно много элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, а значит a — предельная. □

Теорема 4.9.2. *Если $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a$, то a является предельной точкой для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, причем единственной.*

Доказательство. a — предельная, если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ (по теореме 1).

Докажем единственность предельной точки для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ "от противного". Пусть $\exists b \neq a$, b — предельная точка $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда $|b - a| \geq \delta > 0$. Т.к. $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, любая ε-окрестность точки содержит бесконечно много элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, а именно все, начиная с номера $N(\varepsilon) + 1$, т.е. $\forall n > n(\varepsilon)$. Вне $U_\varepsilon(a)$ может содержаться не более конечного числа элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (возможно x_n с номерами $1, 2, \ldots, N(\varepsilon)$).

Выберем $\varepsilon = \frac{\delta}{4} > 0$. □