Лекции по математическому анализу для 1 курса ФН2, 3

Власова Е. А.

2024-2025 год.

Содержание

Модуль 1

1 Введение

1.1 Элементы теории множеств

"Множество есть многое, мыслимое как единое."

(Г. Кантор)

Множество — то же, что и класс, семейство, совокупность, набор; может состоять из любых различимых объектов; однозначно определяется набором составляющих его объектов.

Важные обозначения:

- A, B, C — множества;
- $a \in A$ — элемент a принадлежит множеству A;
- $a \notin A$ — элемент a не принадлежит множеству A;
- $A \subset B$ — A является подмножеством множества B, т.е. любой элемент множества A будет являться элементом множества B;
- $\varnothing$ — пустое множество или множество, не содержащее элементов;
- Если x — объект, P — свойство, $P(x)$ — обозначение того, что x обладает свойством P, то через $\{x : P(x)\}$ или $\{x \mid P(x)\}$ обозначают все множество объектов, обладающих свойством P.

Пять основных операций над множествами:

1. $A \cup B = C \iff C = \{c \in C : c \in A$ или $c \in B\}$;
2. $A \cap B = C \iff C = \{c \in C : c \in A$ и $c \in B\}$;
3. $A \backslash B = C \iff C = \{c \in C : c \in A$ и $c \notin B\}$;
4. $\overline{A} = X \backslash A$. Говорят, что $\overline{A}$ — дополнение A до X;
5. Декартово произведение множеств.

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\},$$

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_k \in X_k, k \in 1, \ldots, n\}.$$

1.2 Кванторные операции

Высказывание, содержащее переменную, называется предикатом и обозначается $P(x)$. Отрицание $P(x)$ обозначается $\overline{P}(x)$.

- $\forall$ — квантор общности. $\forall x \in X : P(x)$ — "для любого элемента x из множества X выполняется высказывание $P(x)$".
- $\exists$ — квантор существования. $\exists x \in X : P(x)$ — "существует элемент x из множества X, для которого выполняется высказывание $P(x)$.
- $\exists!$ — квантор существования и единственности. $\exists x \in X : P(x)$ — "существует единственный элемент x из множества X, для которого выполняется высказывание $P(x)$. Например, $\exists! x \in \mathbb{R} : \log_2 x = 1$.

Следующая выкладка иллюстрирует правило построения отрицаний высказываний, содержащих кванторы.

$$Q = \forall x \in X : P(x), \quad \overline{Q} = \exists x \in X : \overline{P}(x),$$
$$R = \exists x \in X : P(x), \quad \overline{R} = \forall x \in X : \overline{P}(x),$$

1.3 Метод математической индукции

Пусть $A(n)$ — некоторое высказывание. Докажем, что $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$.

1. Проверяем истинность $A(n)$ при $n = 1$ (или $n = n_1$, где n_1 — число, с которого целесообразно начать).
2. Полагаем, что $A(n)$ верно для некоторого $n \in \mathbb{N}$.
3. Доказываем, что $A(n+1)$ верно, используя 2). $A(1) \implies A(2) \implies \ldots \implies A(n) \implies A(n+1)$

Пример 1.1. Докажем по индукции неравенство Бернулли:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx, x > 0.$$

1. Проверим верность для $n = 1$. Неравенство $1 + x \geq 1 + x$ верно.
2. Пусть $(1+x)^n \geq 1 + nx$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.
3. Используя верность для n, докажем верность для $n+1$:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) =$$
$$= 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + nx + 1 \implies (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x.$$

2 Множество действительных чисел

2.1 Аксиоматика действительных чисел

Определение 2.1. *Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных чисел, если элементы этого множества удовлетворяют следующему комплексу условий:*

(I) Аксиомы сложения

На $\mathbb{R}$ определена операция сложения "+", то есть задано отображение, которое каждой упорядоченной паре $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ставит в соответствие элемент из $\mathbb{R}$, называемый суммой $x + y$ и удовлетворяющий следующим аксиомам:

1. $\exists 0 \in \mathbb{R}$, *такой, что* $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$;
2. $\forall x$ $\exists$ *противоположный элемент* $-x$, *такой, что* $x+(-x) = (-x)+x = 0$;
3. *Ассоциативность.* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$;
4. *Коммутативность.* $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$.

(II) Аксиомы умножения

На $\mathbb{R}$ определена операция умножения "$\cdot$", то есть $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ставится в соответствие элемент $(x \cdot y) \in \mathbb{R}$.

1. $\exists$ *нейтральный элемент* $1 \in \mathbb{R}$, *такой, что* $\forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$;
2. $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ $\exists$ *обратный элемент* "x^{-1}", *такой, что* $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$;
3. *Ассоциативность.* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \backslash \{0\} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
4. *Коммутативность.* $\forall x, y \in \mathbb{R} \backslash \{0\} : x \cdot y = y \cdot x$.

(I, II) Связь операций сложения и умножения

Операция умножения дистрибутивна по отношению к операции сложения.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y)z = xz + yz$$

(III) Аксиомы порядка

Для $\mathbb{R}$ *определено отношение “*$\leq$*”.*

1. $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x;$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y \wedge y \leq x) \implies x = y;$

3. *Транзитивность. Если* $x \leq y$ *и* $y \leq z$*, то* $x \leq z;$

4. $\forall x, y \in \mathbb{R}(x \leq y)$ *и* $(y \leq x)$.

(I, III) Связь сложения с неравенством

Если $x \leq y$*, то* $\forall z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z$.

(II, III) Связь умножения с неравенством

Если $0 \leq x$ *и* $0 \leq y$*, то* $0 \leq x \cdot y$.

(IV) Аксиома полноты $\mathbb{R}$

Для любых ненулевых подмножеств X *и* Y *множества* $\mathbb{R}$*, таких, что* $\forall x \in X$, $\forall y \in Y : x \leq y$*, существует* $c \in \mathbb{R}$*, такое, что* $(\forall x \in \mathbb{R}$ *и* $\forall y \in \mathbb{R}) : x \leq c \leq y$.

2.2 Интерпретации $\mathbb{R}$

Геометрическая

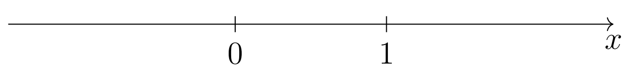
Между прямой и $\mathbb{R}$ существует взаимно-однозначное соответствие, т.е. отображение из $\mathbb{R}$ на прямую биективно. Для задания этого отображения определяется

1. начальное положение, которому соответствует $0 \in \mathbb{R}$,

2. положительное направление,

3. масштаб, то есть положение $1 \in \mathbb{R}$.

Ox — числовая прямая. Каждое действительное число можно найти на числовой оси и для каждой точки числовой оси существует действительное число.



Десятичная форма записи чисел из $\mathbb{R}$

$$a \in \mathbb{R} \iff a = a_0, a_1, \ldots, a_n : a_0 \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Если $a \in \mathbb{Q}$, то в десятичной форме записи $a = a_0, a_1, \ldots, a_n$ представляется конечной или бесконечной периодической дробью.

2.3 Числовые промежутки

Возьмем числа $a, b \in \mathbb{R}$, такие, что $a < b$.

- $(a; b) = \{c \in \mathbb{R} : a < c < b\}$ — интервал;
- $[a; b] = \{c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b\}$ — отрезок;
- $(a; b] = \{c \in \mathbb{R} : a < c \leq b\}$ — полуинтервал;
- $[a; b) = \{c \in \mathbb{R} : a \leq c < b\}$ — полуинтервал.

2.4 Бесконечные числовые промежутки (лучи)

Возьмем $a \in \mathbb{R}$.

- $(a; +\infty) = \{c \in \mathbb{R} : c > a\}$ — открытый луч;
- $[a; +\infty) = \{c \in \mathbb{R} : c \geq a\}$ — замкнутый луч;
- $(-\infty; a) = \{c \in \mathbb{R} : c < a\}$ — открытый луч;
- $(-\infty; a] = \{c \in \mathbb{R}; c \leq a\}$ — замкнутый луч.

2.5 Окрестности точки

Пусть ε — некоторое положительное число.

Определение 2.2. *Окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется любой интервал, содержащий точку a и обозначается $U(a)$.*

Определение 2.3. *ε-окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется интервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ и обозначается $U_\varepsilon(a)$.*

$$c \in U_\varepsilon(a) \iff |a - c| < \varepsilon.$$

Определение 2.4. *Проколотой ε-окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество $(a - \varepsilon; a) \cup (a; a + \varepsilon) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ и обозначается $\mathring{U}_\varepsilon(a)$.*

Определение 2.5. *Окрестностью бесконечности называют любое множество вида* $(-\infty; a) \cup (b; +\infty)$.

Определение 2.6. ε*-окрестностью бесконечности называют множество* $(-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty)$.

Замечание. $U_\varepsilon(\infty) = \mathring{U}_\varepsilon(\infty)$.

2.6 Принцип вложенных отрезков (Коши-Кантора)

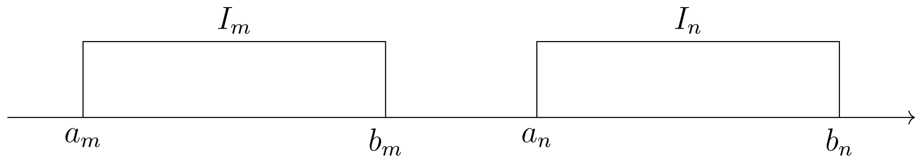
Определение 2.7. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *последовательность некоторых множеств. Если* $\forall n \in \mathbb{N} : X_n \supset X_{n+1}$, *то эта последовательность называется последовательностью вложенных отрезков.*

Теорема 2.1 (принцип Коши-Кантора)**.** *Во всякой последовательности* $\{I_n\}_{n=1}^{\infty},\ I_n = [a_n, b_n]$ *вложенных отрезков найдется точка* $c \in \mathbb{R}$, *принадлежащая всем этим отрезкам. Или, что то же,*

$$\forall \{I_n\}_{n=1}^{\infty},\ I_n = [a_n, b_n] \quad \exists c \in \mathbb{R} : (\forall n \in \mathbb{N} : c \in I_n).$$

Если, кроме того, известно, что для любого $\varepsilon > 0$ *в последовательности можно найти отрезок* I_k, *длина которого* $|I_k| < \varepsilon$, *то* c — *единственная общая точка всех отрезков.*

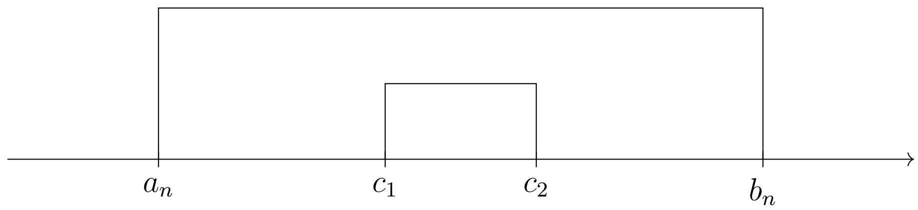
Доказательство. Заметим сначала, что для любых двух отрезков $I_m = [a_m; b_m]$, $I_n = [a_n, b_n]$ нашей последовательности имеет место $a_n \leq b_m$, т.е. $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$. Докажем "от противного". Предположим, что $\exists n, m \in \mathbb{N} : a_n > b_m$



$a_m < b_m < a_n < b_n \implies I_n \cap I_m = \varnothing$, что противоречит условию $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$.

Пусть $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_m, m \in \mathbb{N}\}$, $A, B \neq \varnothing, A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$. По аксиоме полноты IV $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$ существует $c \in \mathbb{R} : \forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq c \leq b_m$. Следовательно, $c \in [a_n; b_n] = I_n$, т.е. c — общая точка всех отрезков.

Пусть $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : |I_n| = b_n - a_n < \varepsilon$. Докажем "от противного". Предположим, что общая точка не является единственной, то есть существуют $c_1, c_2, c_1 \neq c_2$, такие, что $c_1 \in I_n$ и $c_2 \in I_n$. Пусть для определенности $c_1 < c_2$.



Выберем $\varepsilon = \frac{c_2-c_1}{2}$. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \le c_1 < c_2 \le b_n$, следовательно, $b_n - a_n \ge c_2 - c_1$. По условию $\exists n \in \mathbb{N} : |I_n| = b_n - a_n < \varepsilon = \frac{c_2-c_1}{2}$, но $c_2 - c_1 \le b_n - a_n < \frac{c_2-c_1}{2}$ — противоречие, следовательно, $c_1 = c_2$. Единственность доказана. □

2.7 Ограниченные и неограниченные числовые множества

Определение 2.8. *Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если существует такое число $M \in R$, что $\forall x \in X : x \le M$. В этом случае M называют верхней гранью множества X.*

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если существует такое число $m \in R$, что $\forall x \in X : x \ge m$. В этом случае m называют нижней гранью множества X.

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если X ограничено сверху и снизу, т.е. существуют такие числа $M, m \in \mathbb{R}$, что $\forall x \in X : m \le x \le M$. Или, что то же, существует такое число $M > 0$, что $\forall x \in X : |x| \le M$.

Определение 2.9. *Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется неограниченным, если для любого числа $M > 0$ найдется такой $x \in X$, что $|x| > M$.*

Определение 2.10. *Число $M \in \mathbb{R}$ называется максимальным элементом множества $X \subset \mathbb{R}$, если $M \in X$ и $\forall x \in X : x \le M$.*

Число $m \in \mathbb{R}$ называется минимальным элементом множества $X \subset \mathbb{R}$, если $m \in X$ и $\forall x \in X : x \ge M$.

Теорема 2.2. *Если числовое множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет максимальный (минимальный) элемент, то он единственный.*

Доказательство. Пусть существует максимальный элемент для $X \subset \mathbb{R}$, т.е. существует такое число $a \in X$, что $\forall x \in X : x \le a$.

Будем доказывать “от противного”. Предположим, что существует такое $b \in X$, что $\forall x \in X : x \le b$, причем $a \ne b$. $a = \max X$, $b \in X$, следовательно, $b \le a$. С другой стороны, $b = \max X$, $a \in X$, следовательно, $a \le b$. Таким образом, $a = b$, что противоречит предположению, а значит, максимальный элемент единственен. □

Доказательство единственности минимального элемента мы оставляем в качестве упражнения для читателя.

2.8 Точные грани числового множества

Определение 2.11. *Пусть множество* $X \subset \mathbb{R}$ *ограничено сверху, тогда минимальный элемент множества всех верхних граней множества* X *называется точной верхней гранью множества* X *и обозначается* $\sup X$. *Или, что то же,*

$$\sup X = \min\{M \in \mathbb{R} : \forall x \in X : x \leq M\}.$$

Пусть теперь множество $X \subset \mathbb{R}$ *ограничено снизу, тогда максимальный элемент множества всех нижних граней множества* X *называется точной нижней гранью множества* X *и обозначается* $\inf X$. *Или, что то же,*

$$\inf X = \max\{m \in \mathbb{R} : \forall x \in X : x \geq m\}.$$

Пример 2.1. Рассмотрим множество $X = [0; 1)$.

$$\min X = 0,$$
$$\max X = \varnothing,$$
$$\sup X = 1,$$
$$\inf X = 0.$$

Теорема 2.3 (о существовании точных граней числового множества)**.** *Если* X *— непустое числовое множества, ограниченное сверху (снизу), то для* X *существует точная верхняя (нижняя) грань, причем единственная.*

Доказательство. $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$. Пусть X ограничено сверху. Пусть $Y = \{y \in \mathbb{R} : \forall x \in X : x \leq y\}$. Очевидно, $Y \neq \varnothing$.

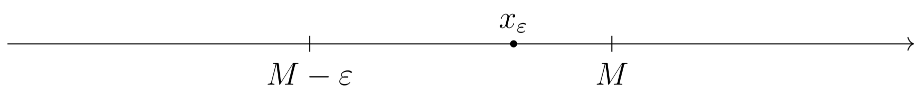
$\forall x \in X$, $\forall y \in Y : x \leq y$, тогда по аксиоме полноты найдется такое число M, что $x \leq M \leq y$. $\forall x \in X : x \leq M$, следовательно, M — верхняя грань множества X, т.е. $M \in Y$; в то же время $\forall y \in Y : M \leq y$, следовательно, $M = \min Y$. Таким образом, $M = \sup X$.

Поскольку минимальный элемент множества единственен, M — единственный минимальный элемент Y, т.е. точная верхняя грань множества единственна. □

Теорема 2.4. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — непустое числовое множество. Тогда $M = \sup X$ тогда и только тогда, когда*

1. $\forall x \in X : x \le M;$

2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon > M - \varepsilon.$



Доказательство. Докажем необходимость.

$$
\begin{aligned}
M = \sup X \implies&\\
&\implies M \text{ — минимальный элемент множества}\\
&\quad\text{всех верхних граней множества } X \implies\\
&\implies M \text{ — верхняя грань множества } X \implies \forall x \in X : x \le M.
\end{aligned}
$$

Первый пункт доказан. Докажем второй “от противного”. Предположим, что $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X : x \le M - \varepsilon$. Тогда $M - \varepsilon$ — верхняя грань множества X. Но $M - \varepsilon < M$, что противоречит тому, что M — минимальный элемент множества всех верхних граней множества X. Второй пункт доказан.

Докажем достаточность. Пусть выполняются следующие условия:

1. $\forall x \in X : x \le M;$

2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon > M - \varepsilon.$

Из первого условия следует, что M — верхняя грань множества X, и X ограничено сверху. Утверждение, что $M = \sup X$ будем доказывать “от противного”. Предположим, что $M_1 = \sup X$, причем $M_1 < M$. Из второго условия следует, что для $\varepsilon = \frac{M - M_1}{2}$ найдется такой x_ε, что

$$
x_\varepsilon > M - \varepsilon = M - \frac{M - M_1}{2} = \frac{M + M_1}{2} > \frac{M_1 + M_1}{2} = M_1.
$$

Таким образом, $\exists x_\varepsilon > M_1$, что противоречит тому, что $M_1 = \sup X$. А значит, нет верхней грани множества X, которая меньше M. Следовательно, $M = \sup X$. □

Теорема 2.5. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — непустое числовое множество. Тогда $m = \inf X$ тогда и только тогда, когда*

1. $\forall x \in X : x \ge m;$

2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon < m + \varepsilon.$

Доказательство оставлено читателю в качестве упражнения.

2.9 Принцип Архимеда

Теорема 2.6. *В любом непустом ограниченном сверху подмножестве* $\mathbb{N}$ *имеется максимальный элемент.*

Доказательство. Пусть $X \subset \mathbb{N}$ ограничено сверху и непусто. Тогда существует и единственно число $M = \sup X$, т.е. выполняются два условия:

1. $\forall x \in X : x \leq M$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon > M - \varepsilon$.

Положим $\varepsilon = 1$, тогда найдется такое $n_1 \in X$, что $\forall x \in X : n_1 > M-1$. $\forall x \in X : x \leq M \implies n_1 \leq M$. Докажем "от противного", что n_1 — максимальный элемент множества X. Пусть $\exists n > n_1$. Тогда

$$n > n_1 \implies n \geq n_1 + 1 > M - 1 + 1 = M.$$

Таким образом, $n > M = \sup X$, следовательно, n не может быть максимальным элементом множества X. А значит, $n = \max X$. □

Теорема 2.7. *В любом непустом ограниченном сверху (снизу) подмножестве* $\mathbb{Z}$ *имеется максимальный (минимальный) элемент.*

Теорема 2.8. *Множество* $\mathbb{Z}$ *не ограничено ни сверху, ни снизу.*

Теорема 2.9 (принцип Архимеда)**.** *Если фиксировать произвольное число* $h > 0$, *то для любого* $x \in \mathbb{R}$ *найдется и притом единственное* $k \in \mathbb{Z}$, *такое, что* $(k-1)h \leq x < kh$.

Доказательство. $\forall h > 0$ и $\forall x \in \mathbb{R}$ множество $Y = \{n \in \mathbb{Z} : \frac{x}{h} < n\}$ непусто, т.к. $\mathbb{Z}$ не ограничено сверху. Y ограничено снизу: $\frac{x}{h}$ — нижняя грань. Значит, существует $\min Y = k \in \mathbb{Z} : \frac{x}{h} < k$. Тогда $(k-1) \notin Y$, следовательно, $(k-1) \leq \frac{x}{h}$. Воспользовавшись тем, что $h > 0$, получим

$$(k-1) \leq \frac{x}{h} < k \implies (k-1)h \leq x < kh.$$

□

Следствие 2.9.1. *Для любого положительного числа* ε *существует натуральное число* n *такое, что* $\frac{1}{n} < \varepsilon$. *Или, что то же,*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Следствие 2.9.2. *Пусть* $x \geq 0$. *Если* $\forall n \in \mathbb{N} : x < \frac{1}{n}$, *то* $x = 0$.

Следствие 2.9.3. *Для любых чисел* $a, b \in \mathbb{R}$ *таких, что* $a < b$, *найдется рациональное число* $r \in \mathbb{Q}$ *такое, что* $a < r < b$. *Или, что то же,*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \quad \exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b.$$

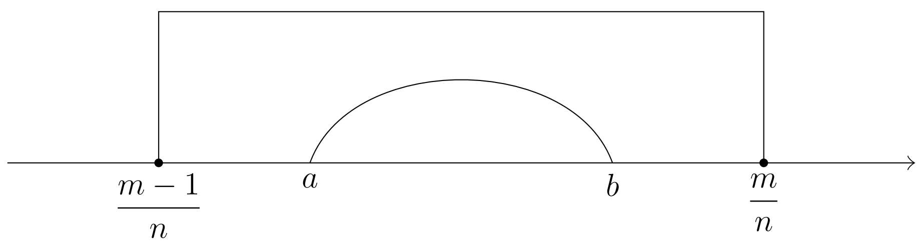
Доказательство. $a < b$, следовательно, $b - a > 0$. Учитывая следствие 1, подберем $n \in \mathbb{N}$ так, что $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < b - a$. По принципу Архимеда найдем такое число $m \in \mathbb{Z}$, что

$$(m-1)\frac{1}{n} \leq a < m\frac{1}{n}.$$

Докажем, что $\frac{m}{n} \in (a; b)$ "от противного". Предположим, что $b \leq \frac{m}{n}$. Тогда

$$\frac{m-1}{n} \leq a < b \leq \frac{m}{n},$$

т.е. $(a; b) \subset \left[\frac{m-1}{n}; \frac{m}{n}\right]$,



следовательно, $b - a \leq \frac{1}{n}$, что противоречит выбору n. Таким образом, $\frac{m}{n} \in (a; b)$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

□

Следствие 2.9.4. *Для любого числа* $x \in \mathbb{R}$ *существует и притом единственное число* $k \in \mathbb{Z}$, *такое, что* $k \leq x < k + 1$. *Или, что то же,*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! k \in \mathbb{Z} : k \leq x < k + 1.$$

Указанное число k *обозначается* $[x]$ *и называется целой частью числа* x.

3 Функции или отображения

3.1 Понятие функции

3.2 Ограниченные и неограниченные числовые функции

3.3 Обратные функции

3.4 Четные и нечетные функции

3.5 Периодические функции

3.6 Сложная функция (композиция)

3.7 Основные элементарные функции

4 Числовые последовательности и их пределы

Определение 4.1. *Функция $f : \mathbb{N} \to X$, областью определения которой является множество натуральных чисел, называется последовательностью элементов из множества X и обозначается $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Или, что то же,*

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = x_n \quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X.$$

Если $X \subset \mathbb{R}$, то $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — числовая последовательность, т.е. $x_n \in \mathbb{R}$.

Пример 4.1.

$$\left\{\frac{n+1}{n^2+3}\right\}_{n=1}^{\infty}, \ f(n) = \frac{n+1}{n^2+3}.$$

$$x_1 = 0{,}3;$$

$$x_2 = 0{,}33;$$

$$x_n = 0.\underbrace{33\ldots3}_{n}.$$

Пример 4.2.

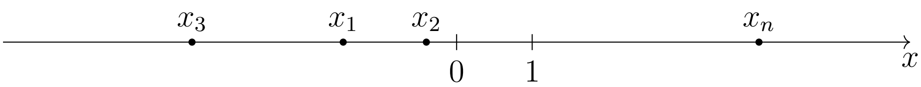
$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \ x_n = a + bn.$$

$$a_1 = a + b,$$

$$a_2 = a + 2b,$$

$$a_n = a + bn.$$

Геометрическая интерпретация числовой последовательности



4.1 Арифметические операции с числовыми последовательностями

1.
$$\forall k \in \mathbb{R}, \ \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \ : \ k \cdot \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{k \cdot x_n\}_{n=1}^{\infty},$$

2.
$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \ \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \ : \ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \pm \{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n \pm y_n\}_{n=1}^{\infty},$$

3.
$$\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ \{y_n\}_{n=1}^{\infty}\ :\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\cdot\{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\{x_n\cdot y_n\}_{n=1}^{\infty},$$

4.
$$\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ \{y_n\}_{n=1}^{\infty},\ \forall n\in\mathbb{N}:y_n\neq 0\ :\ \frac{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}{\{y_n\}_{n=1}^{\infty}}=\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

4.2 Ограниченные и неограниченные числовые последовательности

Определение 4.2. *Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется*

1. *ограниченной сверху, если* $\exists M\in\mathbb{R}:\forall n\in\mathbb{N}:\ x_n\leq M$;
2. *ограниченной снизу, если* $\exists M\in\mathbb{R}:\forall n\in\mathbb{N}:\ x_n\geq M$;
3. *ограниченной, если* $\exists M\in\mathbb{R}:\forall n\in\mathbb{N}:|x_n|\leq M$;
4. *неограниченной, если* $\exists M\in\mathbb{R}:\forall n\in\mathbb{N}:|x_n|>M$;

4.3 Предел числовой последовательности

Определение 4.3. *Число $a\in\mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности, если $\forall\varepsilon>0$ существует такой номер n, зависящий от ε, что $\forall$ натурального числа $N>n$ верно неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$.*

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

Пример:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\iff\forall\varepsilon>0\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\quad\forall n>N:\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

$\frac{1}{n}<\varepsilon\implies n>\frac{1}{\varepsilon}$. Возьмем $N(\varepsilon)=[\frac{1}{\varepsilon}]$. Тогда $\forall n>[\frac{1}{\varepsilon}]:\frac{1}{n}<\varepsilon$.

Определение 4.4. *Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел a, то эта последовательность называется сходящейся, в противном случае — расходящейся.*

Определение 4.5. *Если $\lim_{n\to\infty}x_n=0$, то последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесконечно малой (б.м.).*

4.4 Бесконечные пределы

4.5 Свойства сходящихся последовательностей

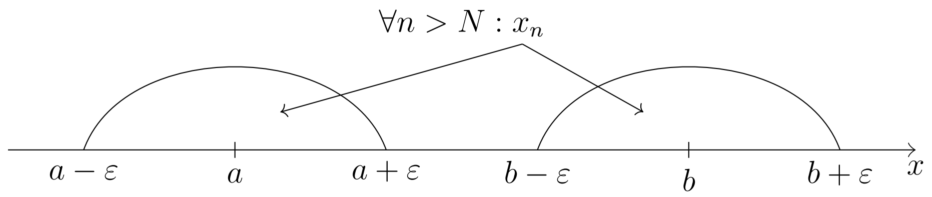
Теорема 4.1 (о единственности предела)**.** *Любая сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Доказательство. "От противного". Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — сходящаяся последовательность. Предположим, что $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = b$, причем $a \neq b$. Пусть для определенности $a < b$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 : |x_n - b| < \varepsilon.$$

$$N = \max\{N_1, n_2\} \implies \forall n > N : \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon, \\ |x_n - b| < \varepsilon. \end{cases}$$



Выберем $\varepsilon = \frac{b-a}{4} > 0$. Найдем $N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда

$$\forall n > N \quad |x_n - a| < \frac{b-a}{4}, \quad |x_n - b| < \frac{b-a}{4}.$$

Следовательно,

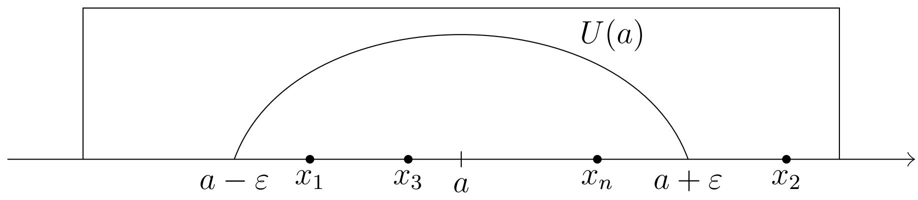
$$0 < b - a = |b-a| = |b - x_n + x_n - a| \leq |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{b-a}{2},$$

то есть

$$0 < b - a < \frac{b-a}{2}.$$

Мы пришли к противоречию, следовательно, $a = b \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет единственный предел. □

Теорема 4.2 (об ограниченности сходящейся последовательности)**.** *Любая сходящаяся последовательность является ограниченной.*



Доказательство. Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то

$$\exists \lim_{n\to\infty} = a \in \mathbb{R} \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = 1 \implies \exists N = N(1) \quad \forall n > N : |x_n - a| < 1$. Следовательно,

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Пусть $M_0 = 1 + |a| \implies \forall n > N : x_n < M_0$.
Пусть $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|, M_0\}$, тогда $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной. □

Замечание. Ограниченность является необходимым условием сходимости числовой последовательности. В то же время условие ограниченности не является достаточным для сходимости числовой последовательности. Например, $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная, но не сходящаяся числовая последовательность.

Теорема 4.3 (об арифметических операциях со сходящимися последовательностями)**.** *Пусть* $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}, \exists \lim_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\exists \lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b;$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = ab;$$

если $y_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}, b \neq 0$, *то*

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

4.6 Монотонные числовые последовательности

Определение 4.6. *Числовая последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется*

1. *возрастающей, если* $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}$;

2. *убывающей, если* $\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1}$;

3. *неубывающей, если* $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \le x_{n+1}$;

4. *невозрастающей, если* $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \ge x_{n+1}$

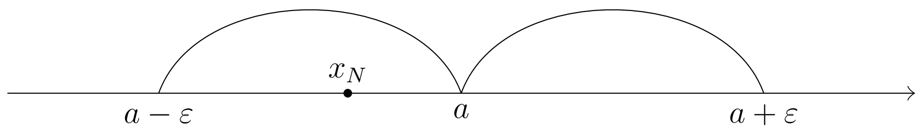
Для монотонных числовых последовательностей ограниченность является достаточным условием для сходимости.

Теорема 4.4 (Вейерштрасса о сходимости монотонных числовых последовательностей)**.** *Если последовательность не убывает и ограничена сверху, то она является сходящейся. Если последовательность не возрастает и ограничена снизу, то она является сходящейся. В общем, любая монотонная последовательность сходится.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает и ограничена сверху $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \le M \Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ множество значений этой последовательности $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = A$ является ограниченным сверху числовым множеством $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \exists \sup A \in \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = a$, то есть

1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \le a$;

2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : x_N > a - \varepsilon$.



$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность, то есть

$$\forall n > N = N(\varepsilon) : x_n \ge x_N \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow a - \varepsilon < x_N \le x_n \le a < a + \varepsilon \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ сходится.}$$

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — невозрастающая и ограниченная снизу последовательность, то

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \inf A, A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

Доказательство аналогично. □

4.7 Число e

Теорема 4.5. *Числовая последовательность* $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ *является сходящейся, т.е.* $\exists \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

Доказательство. $x_n = (1+\frac{1}{n})^n, n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Докажем, что $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу. Т.к. $\forall n \in \mathbb{N} : (1+\frac{1}{n})^{n+1} > 0 \implies \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу. Теперь докажем, что $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывает.

$$\forall n \geq 2 \quad \frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n-1})}{(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})} = \left(\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} =$$
$$= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}.$$

Воспользуемся неравенством $\forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1+nx, x \geq 0$, известным как неравенство Бернулли.

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \geq \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{n}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n+1} =$$
$$= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1.$$

Таким образом, $\forall n \geq 2 \quad \frac{y_{n-1}}{y_n} > 1 \implies y_{n-1} > y_n \implies \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывает. $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывает и ограничена снизу $\implies$ по теореме Вейерштрасса $\exists \lim_{n\to\infty} y_n = e \in \mathbb{R}$. Вернемся к x_n:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{y_n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)},$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{e}{1+0} = e \implies$$
$$\implies \exists \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

□

Замечание. $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ — возрастающая последовательность и ограничена сверху: $2 < x_n < 3$; e — иррациональное число, т.е. $e \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$; $e \approx 2{,}718281828459045$.

4.8 Гиперболические функции

4.9 Предельные точки числового множества

Определение 4.7. *Точка $a \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R} \iff$ любая окрестность $U(a)$ содержит бесконечно много элементов множества X.*

Замечание. Множество A называется бесконечным или содержащим бесконечно много элементов, если при вычитании из A любого его конечного подмножества получается непустое множество.

Множество всех предельных точек множества X называется производным множеством для X и обозначается X'.

Утверждение 4.1. *Точка $a \in \mathbb{R}$ является предельной для $X \subset \mathbb{R} \iff$ в любой проколотой δ-окрестности точки a содержится хотя бы один элемент множества X, т.е.*

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \cap \mathring{U}(a).$$

Доказательство. ($\Longrightarrow$) Необходимость.

a — предельная для $X \subset \mathbb{R} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ любая $U(a)$ содержит бесконечно много элементов из $X \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $\mathring{U}(a)$ тоже содержит бесконечно много элементов из $X \Longrightarrow$

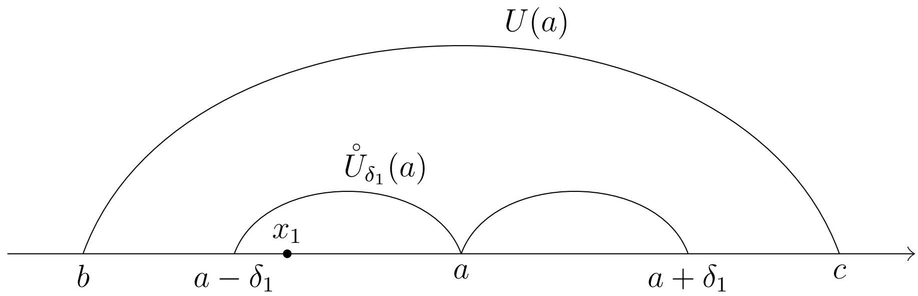
$\Longrightarrow$ любая $\mathring{U}$ содержит хотя бы один элемент $x \in X$.

($\Longleftarrow$) Достаточность.

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \cap \mathring{U}(a).$$

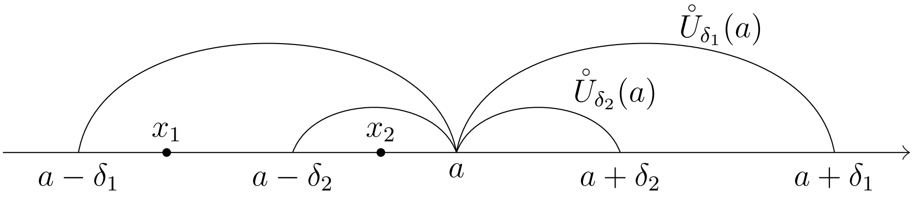
Выберем любую $U(a)$. Тогда

$$\exists \delta_1 > 0 : \mathring{U}(a) \subset U(a) \Longrightarrow \exists x_1 \in X : x_1 \in \mathring{U}_{\delta_1}(a).$$



Пусть $\delta_2 = \frac{|x_1 - a|}{2} > 0$. Тогда

$$\exists x_2 \in \mathring{U}_{\delta_2}(a) : x_2 \neq x_1.$$



Пусть $\delta_3 = \frac{|x_2 - a|}{2} > 0$. Тогда

$$\exists x_3 \in \mathring{U}_{\delta_3}(a) : x_3 \neq x_2$$

и т.д. На шаге n:

$$\delta_n = \frac{|x_{n-1} - a|}{2} > 0 \implies \exists x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(a) : x_n \neq x_k, k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Таким образом,

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in U(a) : x_n \in X, x_n \neq x_k, n \neq k,$$

а значит, любая окрестность $U(a)$ содержит бесконечно много элементов из $X \implies a$ — предельная точка. □

Утверждение 4.2. *Если точка $a \in \mathbb{R}$ является предельной точкой для множества $X \subset \mathbb{R}$, то*

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X : \lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Доказательство. a — предельная точка для $X \subset \mathbb{R} \iff \forall \delta > 0 \quad \mathring{U}_{\delta}(a)$ содержит хотя бы одну точку множества X (по утверждению 1). Выберем $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}, \delta_n = \frac{1}{n} > 0$, тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in X : x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(a),$$

то есть

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}.$$

Т.к. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

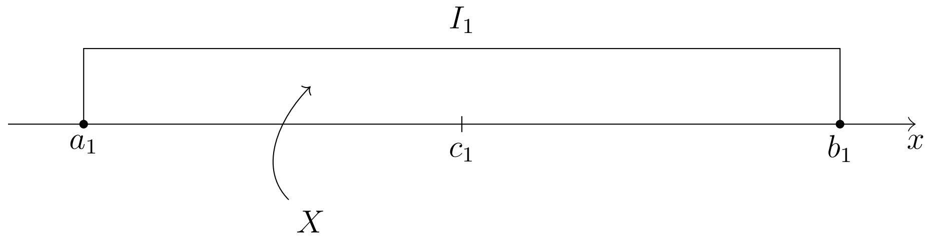
а значит,

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon \implies \lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

□

Теорема 4.6 (принцип Больцано-Вейерштрасса)**.** *Любое ограниченное бесконечное числовое множество имеет хотя бы одну предельную точку.*

Доказательство. Пусть X — бесконечное ограниченное множество, то есть $\exists I_1 = [a_1, b_1] : X \subset [a_1, b_1]$. Пусть $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, т.е. середина отрезка I_1.



Так как множество X бесконечное, то либо отрезок $[a_1, c_1]$, либо отрезок $[c_1, b_1]$ содержит бесконечно много элементов множества X. Обозначим ту половину отрезка I_1, которая содержит бесконечно много элементов множества X через $I_2 = [a_2, b_2], I_2 \subset I_1$. Выразим длину отрезка I_2:

$$|I_2| = b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{|I_1|}{2}.$$

На отрезке I_2 содержится бесконечно много элементов множества X. Пусть $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$ — середина I_2, тогда либо $[a_2, c_2]$, либо $[c_2, b_2]$ содержит бесконечно много элементов множества X. Обозначим ту половину I_2, где бесконечно много элементов множества X через $I_3 = [a_3, b_3]$. Тогда

$$|I_3| = \frac{|I_1|}{2^2}$$

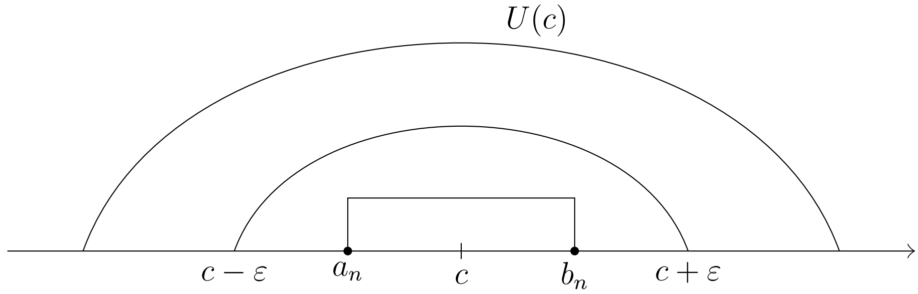
и т.д. На шаге n: $I_n = [a_n, b_n], c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ — середина I_n, I_n содержит бесконечно много элементов из X, тогда либо $[a_n, c_n]$, либо $[c_n, b_n]$ содержит бесконечно много элементов из $X \implies I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset I_n$ и содержит бесконечно много элементов из X. Таким образом, мы получили последовательность вложенных отрезков $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} : I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \ldots$

$$|I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{|I_1|}{2^{n-1}} = 0 \implies \\ \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |I_n| < \varepsilon.$$

По принципу Коши-Кантора $\exists!$ общая точка c, т.е. $\forall n \in \mathbb{N} : c \in I_n$.

$$\forall U(c) \quad \exists \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(c) \subset U(c) \implies \exists n \in \mathbb{N} : I_n = [a_n, b_n] \subset U_\varepsilon(c)$$

(например, $|I_n| < \frac{\varepsilon}{2}$).



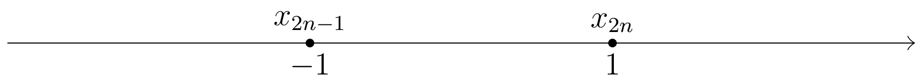
Отрезок I_n содержит бесконечно много элементов множества X по построению последовательности $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} \implies$ окрестность $U(c)$ содержит бесконечно много элементов из $X \implies c$ — предельная. $\square$

4.10 Предельные точки числовых последовательностей

Определение 4.8. *Точка $a \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой числовой последовательно $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \iff$ любая окрестность $U(a)$ содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Замечание. Если a — предельная точка $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то любая $U(a)$ содержит какую-либо подпоследовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пример: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n = (-1)^n$.



Теорема 4.7. *Точка $a \in \mathbb{R}$ является предельной для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть a — предельная точка последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Выберем $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}, \varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0$.

Для $n = 1$ $U_{\varepsilon_1=1}(a)$ содержит ∞ много элементов $\implies \exists x_{n_1} \in U_{\varepsilon_1}(a)$, т.е. $|x_{n_1} - a| < 1$.

Для $n = 2$ $U_{\varepsilon_2=\frac{1}{2}}(a)$ содержит ∞ много элементов $\implies \exists n_2 > n_1 : x_{n_2} \in U_{\varepsilon_2}(a)$, т.е. $|x_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$.

Для $n = 3$ $U_{\varepsilon_3=\frac{1}{3}}(a)$ содержит ∞ много элементов $\implies \exists n_3 > n_2 : x_{n_3} \in U_{\varepsilon_3}(a)$, т.е. $|x_{n_3} - a| < \frac{1}{3}$ и т.д.

Для $n = k$ $U_{\varepsilon_k=\frac{1}{k}}(a)$ содержит ∞ много элементов $\implies \exists n_k > n_{k-1}$: $x_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}(a)$, т.е. $|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \implies \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \implies \forall k \in \mathbb{N} : |x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall k > N : \frac{1}{k} < \varepsilon \implies$$
$$\implies \forall k > N \quad |x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} < \varepsilon \implies \exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

Докажем достаточность.

Пусть $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Выберем любую $U(a)$ и найдем такое $\varepsilon > 0$, что $U_\varepsilon(a) \subset U(a)$:

$$\exists N = N_(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall k > N : |x_{n_k} - a| < \varepsilon \implies x_{n_k} \in U_\varepsilon(a) \subset U(a).$$

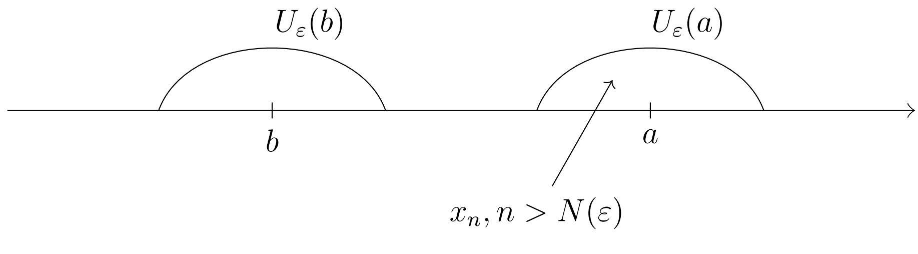
Следовательно, $U(a)$ содержит бесконечно много элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, а значит, a — предельная. $\square$

Теорема 4.8. *Если $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a$, то a является предельной точкой для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, причем единственной.*

Доказательство. a — предельная, если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ (по теореме 1).

Докажем единственность предельной точки для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ “от противного”. Пусть $\exists b \neq a$, b — предельная точка $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда $|b - a| \geq \delta > 0$. Т.к. $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, любая ε-окрестность точки содержит бесконечно много элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, а именно все, начиная с номера $N(\varepsilon) + 1$, т.е. $\forall n > n(\varepsilon)$. Вне $U_\varepsilon(a)$ может содержаться не более конечного числа элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (возможно x_n с номерами $1, 2, \ldots, N(\varepsilon)$).

Выберем $\varepsilon = \frac{\delta}{4} > 0$. Тогда $\forall n > N(\varepsilon) : x_n \in U_\varepsilon(a)$.



Но $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$, что противоречит тому, что b — предельная точка для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. $U_\varepsilon(b)$ должна содержать бесконечно много элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, а туда может попасть не более конечного. Следовательно, $a = b$. $\square$

Теорема 4.9. *Любая ограниченная числовая последовательность имеет хотя бы одну предельную точку.*

Доказательство. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset \mathbb{R}$, X — множество значений числовой последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Т.к. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная числовая последовательность, X — ограниченное числовое множество. Рассмотрим два случая.

Первый: X — бесконечное числовое множество. Тогда X по принципу Больцано-Вейерштрасса имеет хотя бы одну предельную точку a, т.е. в любую $U(a)$ попадает бесконечно много элементов множества X, а значит, и бесконечно много элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Следовательно, a — предельная точка последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Второй: X — конечное числовое множество. Тогда хотя бы один элемент последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ повторяется бесконечно много раз, т.е. $\exists$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (постоянная $\forall k \in \mathbb{N}$), $x_{n_k} = a \in X \implies$ a — предельная точка $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. $\square$

Теорема 4.10 (критерий сходимости числовой последовательности)**.** *Для того, чтобы точка $a \in \mathbb{R}$ была пределом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, необходимо и достаточно, чтобы $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ была ограниченной и имела единственную предельную точку.*

Доказательство. Докажем необходимость. $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R} \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена (по свойству сходящейся последовательности), а значит, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет единственную предельную точку (по теореме 2).

Докажем достаточность. Пусть a — единственная предельная точка ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Докажем, что $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Будем доказывать "от противного". Предположим, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет предела. Тогда

$$\forall b \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N : |x_n - b| \geq \varepsilon,$$

а значит, вне $U_\varepsilon(a)$ лежит бесконечное множество элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда существует $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : |x_{n_k} - a| \geq \varepsilon$, т.е. $x_{n_k} \notin U_\varepsilon(a)$. Следовательно, $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность, лежащая вне $U_\varepsilon(a)$. У этой последовательности есть предельная точка b (по теореме 3). $U_\varepsilon(a)$ не содержит ни одного элемента $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \implies b \neq a$, что противоречит условию. Тогда $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. $\square$

4.11 Фундаментальные последовательности

Определение 4.9. *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ называется фундаментальной тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N,\ \forall m > N : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Теорема 4.11. *Если числовая последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *фундаментальна, то она ограничена.*

Доказательство. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная, т.е.

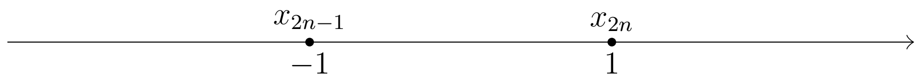
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N,\ \forall m > N : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда

$$\begin{aligned} \exists N = N(1) \implies \forall n > N,\ m = N + 1 : |x_n - x_{N+1}| < 1 \implies \\ \implies \forall n > N : |x_n| = |x_n - x_{N+1} + x_{N+1}| \leq \\ \leq |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| < 1 + |x_{N+1}| = M_0 \implies \\ \implies \forall n > N : |x_n| < M_0. \end{aligned}$$

Пусть $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, M_0\}$, тогда $\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M$, следовательно, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. $\square$

Пример 4.3. В обратную сторону Теорема 4.11 не работает. Например, $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, но не фундаментальна.

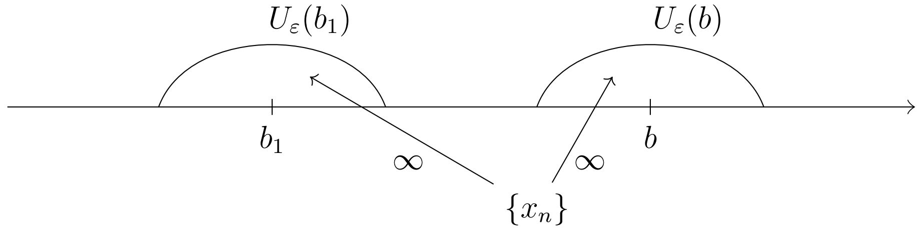


Теорема 4.12 (критерий Коши сходимости числовой последовательности)**.** *Числовая последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. Докажем необходимость. По условию $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится $\implies$ $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$. По числу $\varepsilon > 0$ найдем номер N так, чтобы при $n > N$ иметь $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если теперь $m > N$ и $n > N$, то $|x_m - x_n| < |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ и, таким образом, проверено, что сходящаяся последовательность фундаментальна.

Докажем достаточность. По условию $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, следовательно, ограничена, а значит, у нее есть хотя бы одна предельная точка. Докажем, что эта предельная точка единственна "от противного". Предположим, что существует две предельные точки b и b_1, $b \neq b_1$ последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. По определению предельной точки для любого числа $\varepsilon > 0$ окрестности $U_\varepsilon(b)$ и $U_\varepsilon(b_1)$ содержат бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Выберем удобный для дальнейших рассуждений ε. $b_1 \neq b$, следовательно, $\varepsilon = \frac{|b_1 - b|}{6} > 0$. Для выбранного ε найдем соответствующий номер $N = N(\varepsilon)$. По определению фундаментальной последовательности для этого номера выполняется, что $\forall n, m > N : |x_n - x_m| < \frac{|b_1 - b|}{6}$.



Т.к. в $U_\varepsilon(b)$ и $U_\varepsilon(b_1)$ попадает бесконечно много элементов $\{x_n\}_{n=1}^\infty$,

$$\exists n_1 > N : x_{n_1} \in U_\varepsilon(b) \ \text{ и } \ \exists m_1 > N : x_{m_1} \in U_\varepsilon(b_1).$$

А значит, выполняется следующее неравенство:

$$\begin{aligned} 0 < |b - b_1| = |b - x_{n_1} + x_{n_1} - x_{m_1} + x_{m_1} - b_1| \le \\ \le |x_{n_1} - b| + |x_{n_1} - x_{m_1}| + |x_{m_1} - b_1| < 3\varepsilon = \\ = \frac{3|b-b_1|}{6} = \frac{|b-b_1|}{2} \implies 0 < |b-b_1| < \frac{|b-b_1|}{2} \end{aligned}$$

Получено противоречие $\implies$ $b = b_1$ $\implies$ $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ имеет единственную предельную точку $\implies$ $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ сходится (по теореме 4 о предельной точке последовательности). □

Пример 4.4. $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Существует ли $\lim_{n\to\infty} x_n$? Возьмем $m = 2n > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |x_n - x_{2n}| = |x_{2n} - x_n| = |1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n}| = \\ = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + .. + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \implies \\ \implies \exists \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N, \ \exists m = 2n > N : |x_n - x_{2n}| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Следовательно, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ не является фундаментальной. Значит, конечный $\lim_{n\to\infty} x_n$ не существует, т.е. последовательность не является сходящейся.

Определение 4.10. *Число b или $+\infty(-\infty)$ называют частичным пределом числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ тогда и только тогда, когда*

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = b.$$

Причем, если частичный предел есть конечное число, то это число является предельной точкой $\{x_n\}_{n=1}^\infty$.

Наибольший частичный предел (может быть $\pm\infty$) называют верхним пределом числовой последовательности и обозначают $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.
Наименьший частичный предел (может быть $\pm\infty$) называют нижним пределом числовой последовательности и обозначают $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

Пример 4.5. Для последовательности $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = x_n$ частичными пределами будут $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$ и $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -1$.

Пример 4.6. Для последовательности $\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty} = x_n$ частичными пределами будут $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Теорема 4.13. *Верхний и нижний частичные пределы удовлетворяют неравенству*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n.$$

Теорема 4.14. *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится тогда и только тогда, когда*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n,$$

и является конечным числом.

5 Пределы функций

5.1 Определение предела по Коши

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$* :\quad a;\quad a+0;\quad a-0;\quad \infty;\quad +\infty;\quad -\infty$

$** :\quad b;\quad \infty;\quad +\infty;\quad -\infty$

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $*$.

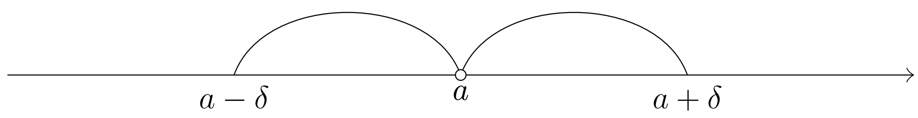
Определение 5.1 (предела функции по Коши)**.** $\lim_{x\to *} f(x) = **$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies f(x) \in U_\varepsilon(**).$$

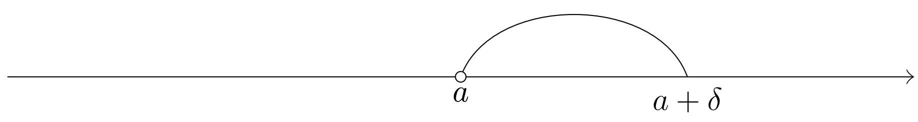
$*$	$x \in \mathring{U}_\delta(*)$
a	$x \in \mathbb{R} : 0 < \lvert x-a\rvert < \delta$
$a+0$	$x \in \mathbb{R} : a < x < a+\delta$
$a-0$	$x \in \mathbb{R} : a-\delta < x < a$
∞	$x \in \mathbb{R} : \lvert x\rvert > \delta$
$+\infty$	$x \in \mathbb{R} : x > \delta$
$-\infty$	$x \in \mathbb{R} : x < -\delta$

$**$	$f(x) \in U_\varepsilon(**)$
b	$\lvert f(x) - b\rvert < \varepsilon$
∞	$\lvert f(x)\rvert > \varepsilon$
$+\infty$	$f(x) > \varepsilon$
$-\infty$	$f(x) < -\varepsilon$

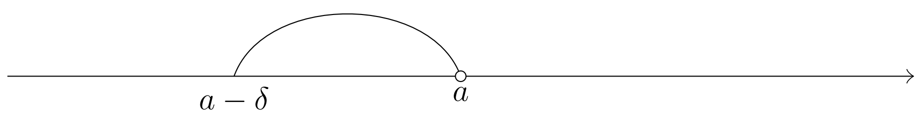
$x \in \mathring{U}_\delta(a)$



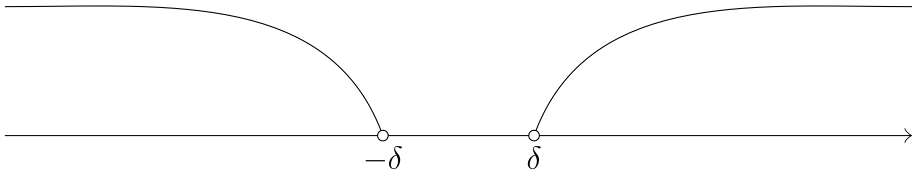
$x \in \mathring{U}_\delta(a+0)$



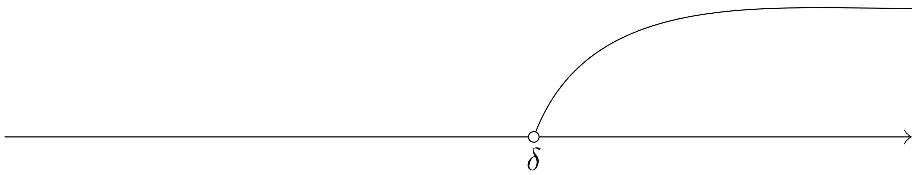
$x \in \mathring{U}_\delta(a-0)$



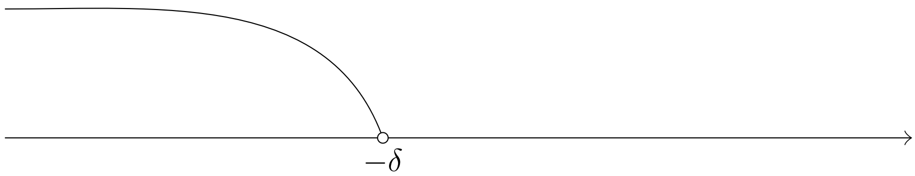
$x \in \mathring{U}_\delta(\infty)$



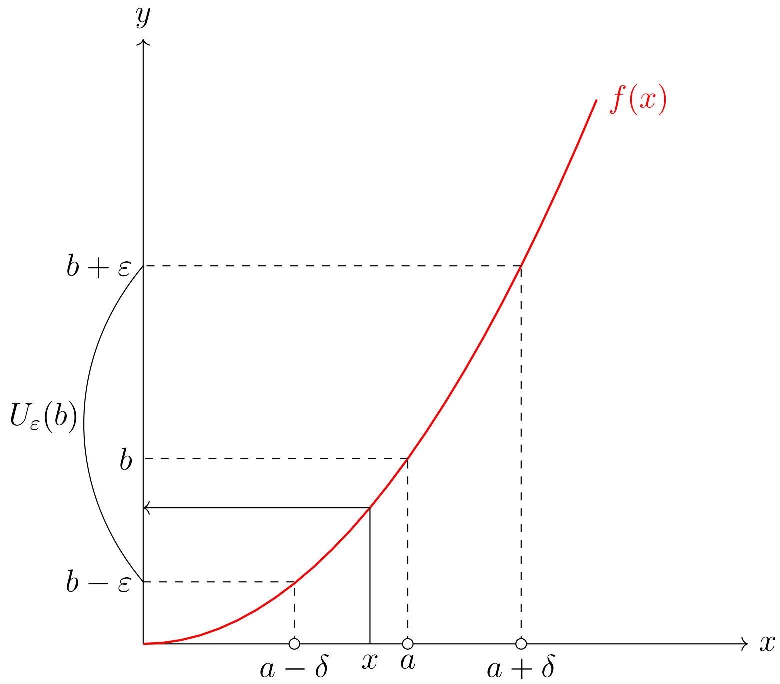
$x \in \mathring{U}_\delta(+\infty)$



$x \in \mathring{U}_\delta(-\infty)$



$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta \implies$$
$$\implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$



$x \approx a$ с точностью $< \delta = \delta(\varepsilon) \implies f(x) \approx b$ с точностью $< \varepsilon$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \iff$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : x > \delta \implies$$
$$\implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Пример 5.1. $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \iff$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : x < -\delta \implies$$
$$\implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Пример 5.2. $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

Если $* = a;\ \infty$, то $\lim_{x\to*} f(x)$ называется двусторонним пределом. Если $* = a{+}0;\ a{-}0;\ +\infty;\ -\infty$, то $\lim_{x\to*} f(x)$ называется односторонним пределом. Если $** = b$ (конечное число), то $\lim_{x\to*} f(x) = b$ называют конечным пределом. Если $** = \infty;\ +\infty;\ -\infty$, то $\lim_{x\to*} f(x)$ называют бесконечным.

Теорема 5.1 (о связи двустороннего предела с односторонними).

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = b \iff \exists \lim_{x\to a+0} f(x) = b \text{ и } \exists \lim_{x\to a-0} f(x) = b.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Распишем определение двустороннего предела по Коши.

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = b \implies$$
$$\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < \delta \implies$$
$$\implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Рассмотрим неравенство $0 < |x-a| < \delta$.

$$0 < |x-a| < \delta \iff x \in (a-\delta, a) \cup (a; a+\delta) \implies$$
$$\implies \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} : a < x < a+\delta \implies |f(x)-b| < \varepsilon, \\ \forall x \in \mathbb{R} : a-\delta < x < a \implies |f(x)-b| < \varepsilon. \end{cases} \implies$$
$$\implies \begin{cases} \exists \lim_{x\to a+0} f(x) = b, \\ \exists \lim_{x\to a-0} f(x) = b. \end{cases}$$

Докажем достаточность. Распишем определения односторонних пределов по Коши.

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b \iff$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : a < x < a+\delta_1 \implies$$
$$\implies |f(x)-b| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b \iff$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : a-\delta_2 < x < a \implies$$
$$\implies |f(x)-b| < \varepsilon.$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Тогда $\mathring{U}_\delta(a) \subset (\mathring{U}_{\delta_1}(a) \cap \mathring{U}_{\delta_2}(a)) \implies$

$$\implies (\forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-b| < \varepsilon) \implies \exists \lim_{x\to a} f(x) = b.$$

□

Замечание (1).

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \iff \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty, \lim_{x\to a-0} f(x) = \infty.$$

Замечание (2).

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \iff \lim_{x\to+\infty} f(x) = b\ (\infty),\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = b\ (\infty).$$

Определение 5.2 (Определение предела по Гейне)**.** *Пусть $f(x)$ определена в некоторой $\mathring{U}(*)$.*

$$\lim_{x\to *} f(x) = ** \iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathring{U}(*) : \lim_{n\to\infty} x_n = * \implies \lim_{n\to\infty} f(x) = **,$$

где $x_n \neq *\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Теорема 5.2 (об эквивалентности определений предела по Коши и Гейне)**.** *Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Пример 5.3. $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ не определен.

Пример 5.4.

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \lim_{n\to\infty} \sin x_n = \lim_{n\to\infty} \sin \pi n = 0.$$

$$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0 \quad \lim_{n\to\infty} \sin y_n = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{2} + 2\pi n = 1.$$

$0 \neq 1 \implies \lim_{x\to 0} f(x)$ не существует.

Теорема 5.3 (о единственности предела функции)**.** *Если существует $\lim_{x\to *} f(x) = b \in \mathbb{R}$, то этот предел единственный (при $x \to *$).*

Доказательство. Воспользуемся определением предела по Гейне.

$$\exists \lim_{x\to *} f(x) = b \in \mathbb{R} \implies \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \neq *, \lim_{n\to\infty} x_n = * \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

Числовая последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, следовательно, имеет единственный предел b (по теореме о единственности предела последовательности). $\square$

Определение 5.3. *Функция $f(x)$ называется локально ограниченной при $x \to *$ (в точке $*$ или в окрестности $*$), если существуют такие $\mathring{U}(*)$ и $M > 0$, что $f(x)$ определена в $\mathring{U}(*)$ и $\forall x \in \mathring{U}(*) : |f(x)| \leq M$.*
Замечание: Если функция f локально ограничена при $x \to *$, то в точке $*$ такая функция может быть как определена, так и не определена.

Теорема 5.4 (о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел)**.** *Пусть $\exists \lim_{x\to *} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Тогда $f(x)$ локально ограничена при $x \to *$.*

Доказательство. По определению предела функции по Коши,

$$\lim_{x\to *} f(x) = b \iff$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies |f(x) - b| < \varepsilon \implies$$
$$\implies \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |f(x)| = |f(x) - b + b| \le |f(x) - b| + |b| < \varepsilon + |b| = M.$$

Выберем любой $\varepsilon > 0$, например, $\varepsilon = 1$. Для соответствующей ему $\delta > 0$ будет верно, что $\forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |f(x)| < 1+|b| = M$, а значит, $f(x)$ локально ограниченна при $x \to *$. $\square$

5.2 Бесконечно малые функции

Определение 5.4. *Функцию $\alpha(x)$ называют бесконечно малой (б.м.) при $x \to *$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{x\to *} \alpha(x) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Пример: Рассмотрим функцию $y = 2^{\frac{1}{x}}$. Если $x \to 0 + 0$, то

$$\lim_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = [2^{+\infty}] = +\infty.$$

Если же $x \to 0 - 0$, то

$$\lim_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = [2^{-\infty}] = 0 \implies f(x) \text{ бесконечно малая при } x \to 0 - 0.$$

Теорема 5.5 (о связи функции, ее предела и бесконечно малой)**.**

$$\lim_{x\to *} f(x) = b \iff$$
$$\iff f(x) = b + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \text{ — бесконечная малая при } x \to *.$$

Доказательство. Докажем необходимость.

$$\exists \lim_{x\to *} f(x) = b \iff$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Положим $\alpha(x) = f(x) - b$, тогда $\forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |\alpha(x)| < \varepsilon \implies$
$\implies \lim_{x\to *} \alpha(x) = 0 \implies \alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to * \implies$
$\implies f(x) = b + \alpha(x)$ при $x \to *$.

Докажем достаточность. Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to * \implies$, тогда $\alpha(x) = f(x) - b \to 0$ при $x \to *$. По определению бесконечно малой,

$$\lim_{x\to *}\alpha(x) = 0 \iff$$
$$\iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(*) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon \implies$$
$$\implies \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(*) \implies |f(x) - b| < \varepsilon \implies$$
$$\implies \exists\lim_{x\to *} f(x) = b.$$

□

5.3 Свойства бесконечно малых функций

Теорема 5.6. *Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to *$. Тогда $\alpha(x) + \beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to *$.*

Доказательство. Распишем определение по Коши.

$$\lim_{x\to *}\alpha(x) = 0 \implies \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(*) \implies |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\lim_{x\to *}\beta(x) = 0 \implies \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(*) \implies |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, если $* : a; a + 0; a - 0$ и $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$, если $* : \infty; , +\infty, -\infty$.

$$\implies \overset{\circ}{U}_\delta(*) = \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(*) \cap \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(*) \implies .$$
$$\implies \forall.$$

□

Следствие 5.6.1. *Сумма конечного числа бесконечно малой при $x \to *$ есть бесконечно малая при $x \to *$.*

Теорема 5.7 (произведение бесконечно малой на ограниченнную)**.** *Пусть α - бесконечно малая при $x \to *$, $f(x)$ локально ограниченна при $x \to *$. Тогда $\alpha(x) \cdot f(x)$ есть бесконечно малая при $x \to *$.*

Доказательство. $f(x)$ — локально ограниченна при $x \to * \implies \exists\overset{\circ}{U}_{\delta_1}(*) \quad \exists M > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(*) : |f(x)| < M$; $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to * \implies \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(*) \implies |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \implies \implies \overset{\circ}{U}_\delta = \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(*) \cap \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(*)$

□

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = .$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \arctan \frac{1}{x^{100}} = 0.$$

Теорема 5.8 (о произведении двух бесконечно малых)**.** *Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to *$. Тогда $\alpha(x)\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to *$*

Доказательство. $\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to * \implies \lim_{x\to *} \beta(x) = 0 \implies$ по теореме о локальной ограниченной функции, имеющей конечный предел $\implies \beta(x)$ локально ограниченна при $x \to * \implies \alpha(x)\cdot\beta(x)$ — произведение бесконечно малой на локально ограниченную при $x \to * \implies$ по теореме 2 $\alpha \cdot \beta$ — бесконечно малые при. □

Следствие 5.8.1. *Произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to *$ есть бесконечно малая при $x \to *$.*

5.4 Арифметические операции с функциями, имеющими пределы

Теорема 5.9 (об арифметических операциях с функциями, имеющими пределы)**.** *Пусть существуют $\lim\limits_{x\to *} f(x) = A \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to *} g(x) = B \in \mathbb{R}$. Тогда*

1. *$\exists \lim\limits_{x\to *}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;*
2. *$\exists \lim\limits_{x\to *}(f(x)g(x)) = AB$;*
3. *Если $B \neq 0$, то $\exists \lim\limits_{x\to *} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.*

Доказательство. Существуют $\lim\limits_{x\to *} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to *} g(x) = B$, следовательно, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to *$.

Докажем первый пункт. $f(x) \pm g(x) = (A + \alpha(x)) \pm (B + \beta(x)) = A \pm B + \alpha(x) \pm \beta(x) = A \pm B + \gamma(x)$, где $\gamma(x)$ — бесконечно малая при $x \to *$. Следовательно, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, $\lim\limits_{x\to *}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$.

Докажем второй пункт. $f(x) \cdot g(x) = (A + \alpha(x))(B + \beta(x)) = AB + B\alpha(x) + A\beta(x) + \alpha(x)\beta(x) = AB + \gamma(x)$, где $\gamma(x)$ — бесконечно малая при $x \to *$. Тогда по теореме о связи предела функции, ее предела и бесконечно малой $\lim\limits_{x\to *}(f(x) \cdot g(x)) = AB$

Докажем третий пункт.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} = \frac{A}{B} + \frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} - \frac{A}{B}.$$

Пусть $\gamma(x) = \dfrac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} - \dfrac{A}{B}$. Тогда

$$\gamma(x) = \frac{AB + B\alpha(x) - AB - A\beta(x)}{B(B + \beta(x)} = \frac{B\alpha(x) - A\beta(x)}{B} \cdot \frac{1}{B + \beta(x)}.$$

$\dfrac{B\alpha(x) - A\beta(x)}{B}$ — бесконечно малая при $x \to *$ по свойствам бесконечно малых.

Докажем, что $\phi(x) = \dfrac{1}{B + \beta(x)}$ локально ограничена при $x \to *$. $\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to *$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется дельта, зависящая от ε, такая, что $\forall x \in \mathring{U}_\delta(*)$ выполняется неравенство $|\beta(x)| < \varepsilon$. Выберем $\varepsilon = \dfrac{|B|}{2} > 0$, найдем соответствующую $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. Получается, $\forall x \in \mathring{U}_\delta(*)$ верно, что $|\beta(x)| < \dfrac{|B|}{2}$. Воспользуемся обратным неравенством треугольника $|a + b| \geq |a| - |b|$.

$$|B + \beta(x)| \geq |B| - |\beta(x)| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2} \implies$$
$$\implies \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |B + \beta(x)| > \frac{|B|}{2} > 0 \implies$$
$$\implies \frac{1}{B + \beta(x)} < \frac{2}{|B|} \implies$$
$$\implies \phi(x) = \frac{1}{B + \beta(x)} \text{ локально ограничена при } x \to *.$$

$\gamma(x)$ — произведение бесконечно малой на локально ограниченную при $x \to *$, т.е. бесконечно малая при $x \to *$ по свойству бесконечно малой. $\square$

Теорема 5.10 (о знакопостоянстве функции, имеющей ненулевой предел)**.** *Пусть* $\exists \lim_{x\to *} f(x) = b \neq 0$*. Тогда* $\exists \mathring{U}_\delta(*) \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |f(x)| > \frac{|b|}{2}$

Кроме того, если $b > 0$, то $\forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : f(x) > \frac{b}{2} \implies f(x) > 0$, т.е. имеет тот же знак, что и предел; если $b < 0$, то $\forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : f(x) < \frac{b}{2} \implies f(x) < 0$, т.е. имеет тот же знак, что и предел.

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Или $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Выберем $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$, найдем соответствующий $\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \implies$

$$\forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |f(x)| = |b + f(x) - b| \geq |b| - |f(x) - b| > |b| - \frac{|b|}{2}.$$

$$\implies |f(x)| > \frac{|b|}{2}.$$

Пусть $b > 0$, тогда $\varepsilon = \frac{|b|}{2} = \frac{b}{2} > 0 \implies \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \quad f(x) > b - \varepsilon = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} > 0$ □

Теорема 5.11 (о предельном переходе в неравенстве)**.** *Если существуют два предела $\lim_{x\to*} f(x) = b_1$, $\lim_{x\to*} g(x) = b_2$ и проколотая окрестность $\mathring{U}(*)$, такая, что для любого x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$, то $b_1 \leq b_2$.*

Доказательство. Пусть существуют $\lim_{x\to*} f(x) = b_1$ и $\lim_{x\to*} g(x) = b_2$. Т.к. пределы конечны, по теореме об арифметических операциях с функциями, имеющими пределы, для разности $\phi(x) = g(x) - f(x)$ существует предел $\lim_{x\to*} \phi(x) = b_2 - b_1$.

Будем доказывать “от противного”. Предположим, что $b_1 > b_2$. Из этого следует, что $b_2 - b_1 < 0$, тогда по теореме о знакопостоянстве функции, имеющей ненулевой предел, существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}_1(*)$, что $\forall x \in \mathring{U}_1(*) : \phi(x) = g(x) - f(x) < \frac{b_2 - b_1}{2} < 0$. Таким образом, $g(x) < f(x)$, а тогда $\forall x \in \mathring{U}(*) \cap \mathring{U}_1(*)$ выполняются сразу два неравенства: $f(x) \leq g(x)$ и $g(x) < f(x)$, что является противоречием. Значит, $b_1 \leq b_2$. □

Замечание. Если существует $\mathring{U}(*)$, такая, что $\forall x \in \mathring{U}(*)$ верно неравенство $f(x) < g(x)$, то для пределов $\lim_{x\to*} f(x) = b_1$ и $\lim_{x\to*} g(x) = b_2$ выполняется $b_1 \leq b_2$.

Теорема 5.12 (о пределе промежуточной функции или лемма о двух милиционерах)**.** *Если слева и справа от правонарушителя находится* *по милиционеру, каждый из которых держит его и идет в отделение милиции, то правонарушитель тоже придет в отделение милиции. Или, говоря простым языком, если существует* $\lim_{x\to *} f(x) = b$, $\lim_{x\to *} g(x) = b$ *и* $\mathring{U}(*)$, *такая, что* $\forall x \in \mathring{U}(*)$ *выполняется неравенство* $f(x) \le \phi(x) \le g(x)$, *то существует* $\lim_{x\to *} \phi(x) = b$.

Доказательство. Пусть существуют $\lim_{x\to *} f(x) = b$ и $\lim_{x\to *} g(x) = b$. Распишем эти пределы по определению Коши:

$$\exists \lim_{x\to *} f(x) = b \iff$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_1}(*) \implies b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon,$$

$$\exists \lim_{x\to *} g(x) = b \iff$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(*) \implies b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon.$$

Пусть $\delta > 0$ таково, что $\mathring{U}_\delta(*) \subset \mathring{U}(*) \cap \mathring{U}_{\delta_1}(*) \cap \mathring{U}_{\delta_2}(*)$. Тогда $\forall x \in \mathring{U}_\delta(*)$ выполняются неравенства $f(x) \le \phi(x) \le g(x)$, $b - \varepsilon < f(x)$ и $g(x) < b + \varepsilon$. Записав их вместе, получим, что

$$b - \varepsilon < f(x) \le \phi(x) \le g(x) < b + \varepsilon \implies \exists \lim_{x\to *} \phi(x) = b.$$

□

Теорема 5.13 (о пределе сложной функции)**.** *Если существуют пределы* $\lim_{x\to *} f(x) = A$ *и* $\lim_{y\to A} g(y) = B$, *в некоторой окрестности* $\mathring{U}(*)$ $f(x) \ne A$, *и в этой окрестности определена сложная функция* $g(f(x))$, *то существует* $\lim_{x\to *} g(f(x)) = B$.

Обратим внимание на то, как осуществляется замена:

$$(y = f(x), x \to *, y \to A) \implies \lim_{y\to A} g(y) = B.$$

Доказательство. По определению предела по Гейне

$$\exists \lim_{x\to *} f(x) = A \implies$$
$$\implies \forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathring{U}(*) : (\lim_{n\to\infty} x_n = * \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A), \qquad (\Delta)$$

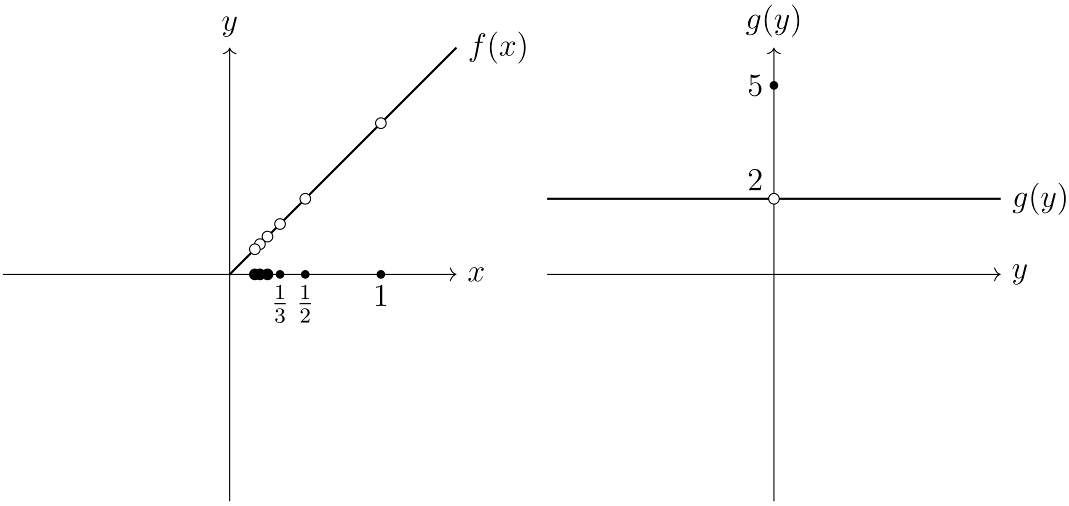
$$\exists \lim_{y\to A} g(y) = B \implies$$
$$\implies \forall \{y_n\}_{n=1}^\infty, y_n \ne A : (\lim_{n\to\infty} y_n = A \implies \lim_{n\to\infty} g(y_n) = B). \qquad (\Delta\Delta)$$

Выберем любую $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathring{U}(*)$, тогда по (Δ) из того, что $\lim_{n\to\infty} x_n = *$, следует, что $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Обозначим $y_n = f(x_n)$, по условию теоремы $y_n \neq A$, причем $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Тогда по $(\Delta\Delta)$ существует $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = B$. Следовательно, по определению предела по Гейне, существует $\lim_{x\to *} g(f(x)) = B$. $\square$

Замечание. Условие $f(x) \neq A$ в окрестности $\mathring{U}(*)$ является существенным. Если это условие отсутствует, то теорема может не выполниться.

Пример 5.5.

$$f(x) = \begin{cases} x, x \neq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, \\ 0, x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad g(y) = \begin{cases} 2, y \neq 0, \\ 5, y = 0. \end{cases}$$



$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. $x = 0$ в любой точке $x = \frac{1}{n}$, следовательно, в любой $\mathring{U}(0)$ есть точки, где $f(x) = 0$.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

Заметим, что $f(x_n) = 0 \ \forall n$. Тогда можно записать так:

$$\lim_{n\to 0} g(f(x_n)) = \lim_{n\to 0} g(0) = 5.$$

Рассмотрим последовательность $\{\tilde{x_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{e^{-n}\}$.

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{x_n} = 0, \ e \notin \mathbb{N} \implies \lim_{n\to\infty} g(f(\tilde{x_n})) = \lim_{n\to\infty} g(e^{-n}) = 2.$$

Подведем итог:

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{x_n}, \\ \lim_{n\to 0} g(f(x_n)) \neq \lim_{n\to\infty} g(f(\tilde{x_n})). \end{cases} \implies \nexists \lim_{x\to 0} g(f(x)).$$

5.5 Бесконечно большие функции

Определение 5.5. *Функция $f(x)$ называется бесконечно большой (б.б.) при $x \to *$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ определена в некоторой $\mathring{U}(*)$ и ее предел при $x \to *$ равен бесконечности, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}(*) : |f(x)| > \varepsilon.$$

Пример 5.6. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$. $\lim_{x \to 0} y = \infty$, следовательно, y — бесконечно большая при $x \to 0$.

Теорема 5.14 (о связи бесконечно большой с бесконечно малой)**.**

1. *Если $f(x)$ — бесконечно большая при $x \to *$, то $\frac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \to *$.*

2. *Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to *$ и существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(*)$, что $\forall x \in \mathring{U}(*) : \alpha(x) \neq 0$, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to *$.*

Доказательство.

1. $f(x)$ — бесконечно большая при $x \to *$, тогда для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такая, что для любого x из $\mathring{U}_\delta(*)$ выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon_1$. Выберем любой $\varepsilon > 0$, найдем $\varepsilon_1 = \frac{1}{\varepsilon}$ и $\delta = \delta(\varepsilon_1) = \delta(\frac{1}{\varepsilon})$. Тогда для любого x из $\mathring{U}_\delta(*)$ выполняется неравенство $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$, или, что то же, $\frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon$. Положим $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$, тогда для любого x из $\mathring{U}_\delta(*)$ верно, что $|\alpha(x)| < \varepsilon$, из чего следует, что предел $\alpha(x)$ при $x \to *$ равен нулю. Таким образом, $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to *$.

2. Пусть $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to *$ и для любого x из $\mathring{U}(*)$ верно, что $\alpha(x) \neq 0$. Предел $\alpha(x)$ при $x \to *$ равен нулю, т.е. для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется $\delta > 0$, зависящая от ε, такая, что для любого x из $\mathring{U}_\delta(*) \subset \mathring{U}(*)$ выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon_1$. Выберем любой $\varepsilon > 0$, найдем $\varepsilon_1 = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ и соответствующую $\delta = \delta(\varepsilon_1) = \delta(\frac{1}{\varepsilon}) > 0$.

□

Замечание. Рассмотрим функцию $y = x \sin \frac{1}{x}$ при $x \to 0$. $\sin \frac{1}{x}$ — ограниченная, x — бесконечная малая, следовательно, $y = \alpha(x)$ — бесконечно малая.

Теперь рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x \sin x}$. В любой $\mathring{U}(0)$ есть хотя бы один x, следовательно, $\alpha(x)$ равна нулю, а значит, $f(x)$ не существует.

5.6 Первый замечательный предел

Теорема 5.15.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Утверждение 5.1. *Если $f(x)$ — элементарная функция, $a \in D_{(f)}$ — область определения f, то существует предел $f(x)$, равный $f(a)$ при $x \to a$.*

Следствие 5.15.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = 1 * 1 = 1.$$

Следствие 5.15.2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} =$$
$$= |\textit{Замена } y = \arcsin x, x = \sin y, x \to 0 \implies y \to 0| =$$
$$= \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^{-1} = 1.$$

Следствие 5.15.3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} =$$
$$= |\textit{Замена } y = \operatorname{arctg} x, x = \operatorname{tg} y, x \to 0 \implies y \to 0| =$$
$$= \lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y} = \left(\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg} y}{y}\right)^{-1} = 1.$$

Следствие 5.15.4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2/2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}\right)^2 = 1.$$

5.7 Второй замечательный предел

Теорема 5.16.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^x = [1^\infty] = e.$$

Доказательство. Докажем, что предел функции $(1+\frac{1}{x})^x$ при $x \to +\infty$ равен e. ...

Теперь докажем, что предел функции $(1+\frac{1}{x})^x$ при $x \to -\infty$ равен e. ...

По теореме о связи двустороннего предела с односторонним существует предел функции $(1+\frac{1}{x})^x$ при $x \to \infty$, равный e. □

Следствие 5.16.1.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] = \\ = \left|\textit{Замена } x = \frac{1}{y},\ x \to 0 \implies y \to \infty\right| = \\ = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Следствие 5.16.2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \\ = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x) = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \\ = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Следствие 5.16.3 (Частный случай следствия 2)**.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Следствие 5.16.4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \\ = \left|\textit{Замена } y = a^x - 1,\ x = \log_a(y+1),\ x \to 0 \implies y \to 0\right| = \\ = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(y+1)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(y+1)}{y}} = \\ = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

Следствие 5.16.5 (Частный случай следствия 4)**.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Следствие 5.16.6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\right)\cdot\left(\frac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha x}\right)=$$
$$=1.$$

Замечание.
$$\lim_{x\to *}(U(x))^{V(x)}=[1^\infty].$$

$$\lim_{x\to *}(U(x))^{V(x)}=\lim_{x\to *}e^{\ln(U(x))^{V(x)}}=\lim_{x\to *}e^{V(x)\ln(U(x))}=$$
$$=\lim_{x\to *}e^{V(x)\ln(1+U(x)-1)}=\lim_{x\to *}e^{\frac{V(x)\ln(1+U(x)-1}{U(x)-1}\cdot(U(x)-1)}=$$
$$=\begin{cases}e^{\lim_{x\to *}V(x)(U(x)-1)},\text{ если }\lim_{x\to *}V(x)(U(x)-1)=A\in\mathbb{R},\\ +\infty,\text{ если }\lim_{x\to *}V(x)(U(x)-1)=+\infty,\\ 0,\text{ если }\lim_{x\to *}V(x)(U(x)-1)=-\infty.\end{cases}$$

Пример 5.7.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)^{x^2}=[1^\infty]=e^{\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}-1\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x^2+3}=e^{-2}}.$$

5.8 Сравнение бесконечно малых

Определение 5.6. *Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x\to *$.*

1.

2.

3. $\alpha(x)$ — бесконечно малая более высокого порядка малости по сравнению с $\beta(x)$ при $x\to *$ тогда и только тогда, когда предел $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ при $x\to *$ равен 0. Обозначается $\alpha(x)=\overline{o}(\beta(x)),\ x\to *$.

5.9 Таблица эквивалентных бесконечно малых

1. $\sin x\sim x$

2. $\operatorname{tg} x\sim x$

3. $\arcsin \sim x$

4. $\operatorname{arctg} \sim x$

5. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

6. $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$

7. $\ln(1+x) \sim x$

8. $a^x - 1 \sim \ln a$

9. $e^x - 1 \sim x$

10. $(1+x)^\alpha \sim \alpha x$

5.10 Свойства эквивалентных бесконечно малых

Теорема 5.17. *Пусть* $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ *— бесконечно малые при* $x \to *$*, причем* $\forall k = 1, \ldots n : \alpha_k(x) = \overline{o}(\alpha_0(x))$*, т.е.* $\alpha_0(x)$ *— бесконечно малая самого низкого порядка малости по сравнению с* $\alpha_k(x)$*,* $k = 1, \ldots, n$*. Тогда* $\alpha_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) \sim \alpha_0(x)$ *при* $x \to *$*.*

Доказательство. □

5.11 O-символика

Правила работы с $\overline{o}$

5.12 Сравнение бесконечно больших

5.13 Свойства эквивалентных бесконечно больших

6 Непрерывность

6.1 Непрерывность функции в точке

Определение 6.1. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Функцию $f(x)$ называют непрерывной в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует предел $f(x)$ при $x \to x_0$, равный $f(x_0)$.*

Приведем формально-логическую запись этого определения в формулировке по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall x \in \mathbb{R} : (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

и в формулировке по Гейне:

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) : (\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)).$$

6.2 Приращение аргумента в точке и приращение функции

Определение 6.2. *Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, т.е. в некотором интервале $(a; b)$, содержащем x_0. Выберем любую $\Delta x \in \mathbb{R} : x_0 + \Delta x \in (a; b)$. Таким образом, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — функция, зависящая от Δx.*

Δx — приращение аргумента в точке x_0. Δy — приращение функции $f(x)$ в точке x_0, отвечающее приращению аргумента Δx.

Теорема 6.1. *Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда* $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$.

Доказательство.

$$\begin{gathered} f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \\ \iff \lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0, \\ |\text{Замена } \Delta x = x - x_0,\ x = x_0 + \Delta x,\ x \to x_0,\ \Delta x \to 0| \iff \\ \iff \lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0 \iff \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \end{gathered}$$

□

6.3 Точки разрыва

Определение 6.3. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a и в точке a $f(x)$ не является непрерывной. Тогда точку a называют точкой разрыва. В самой точке функция $f(x)$ может быть как определена, так и не определена.*

6.4 Классификация точек разрыва

Определение 6.4. *a — точка устранимого разрыва тогда и только тогда, когда существует предел $f(x)$, равный b при $x \to a$, а $f(x)$ либо не определена в точке a, либо $f(a) \neq b$.*

Пример 6.1.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \ x \neq 0, \\ 2, \ x = 0. \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) = 2.$$

Определение 6.5. *a — точка неустранимого разрыва I рода тогда и только тогда, когда существует предел $f(x)$, равный $A \in \mathbb{R}$ при $x \to a - 0$, и существует предел $f(x)$, равный $B \in \mathbb{R}$ при $x \to a + 0$, причем $A \neq B$.*

$h : B - A$ — скачок функции в точке a, $h \neq 0$ — неустранимый разрыв I рода. Точку устранимого разрыва иногда называют точкой разрыва I рода с нулевым скачком.

Пример 6.2.

$$y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}, \ a = 0$$

$$\lim_{x \to a-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \ \lim_{x \to a+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, a — точка неустранимого разрыва I рода.

Определение 6.6. *a — точка неустранимого разрыва II рода тогда и только тогда, когда хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ равен бесконечности, либо предел функции $f(x)$ при $x \to a$ не существует.*

Пример 6.3.

$$y = 2^{\frac{1}{x}}, \ a = 0,$$

$$\lim_{x \to a+0} = 2^{\frac{1}{x}} = +\infty, \ \lim_{x \to a-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Следовательно, a — точка неустранимого разрыва II рода.

Пример 6.4.

$$y = \sin\frac{1}{x},\ a = 0.\ \lim_{x\to a}\sin\frac{1}{x} \text{ не существует.}$$

6.5 Односторонняя непрерывность

Не будем забывать, что если функция определена в окрестности точки, то она определена и в самой точке тоже.

Определение 6.7. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(a+0)$. Если предел $f(x)$ при $x \to a+0$ равен $f(a)$, то говорят, что $f(x)$ непрерывна в точке a справа. Функция $f(x)$ непрерывна в точке a справа тогда и только тогда, когда $f(a) = f(a+0)$.*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0).$$

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(a-0)$. Если предел $f(x)$ при $x \to a-0$ равен $f(a)$, то говорят, что $f(x)$ непрерывна в точке a слева. Функция $f(x)$ непрерывна в точке a слева тогда и только тогда, когда $f(a) = f(a-0)$.

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a).$$

Пример 6.5. $y = [x]$, $x = 0$ — левосторонний разрыв I рода.

6.6 Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 6.2. *Функция $f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда $f(x)$ непрерывна в точке a и слева, и справа.*

Доказательство. $f(x)$ непрерывна в точке $a \iff$ предел $f(x)$ при $x \to a$ равен $f(a) \iff$ по теореме о связи двустороннего предела с односторонними существуют $\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$ и $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$ $\iff f$ непрерывна в a и слева, и справа. □

Теорема 6.3 (о знакопостоянстве непрерывной функции)**.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$). Тогда существует такая окрестность точки a, что для любого x из этой окрестности $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).*

Доказательство. $f(x)$ непрерывна в точке a, следовательно, предел $f(x)$ при $x \to a$ равен $f(a)$. Тогда по теореме о знакопостоянстве функции, имеющей ненулевой предел, найдется такая окрестность точки a, что для любого x из этой окрестности $f(x) > 0$. □

Теорема 6.4 (локальная ограниченность)**.** *Если $f(x)$ непрерывна в точке a, то $f(x)$ локально ограничена при $x \to a$.*

Доказательство. $f(x)$ непрерывна в точке a, т.е. существует предел $f(x)$, равный $f(a)$ при $x \to a$. Следовательно, по теореме о локально ограниченной функции, имеющей конечный предел, $f(x)$ локально ограничена при $x \to a$. $\square$

Теорема 6.5 (об арифметических операциях с непрерывными функциями)**.** *Если $f(x)$, $g(x)$ непрерывны в точке a, то $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, а также $\frac{f(x)}{g(x)}$, если $g(a) \neq 0$, являются непрерывными в точке a функциями.*

Доказательство. Пусть существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$. По теореме об арифметических операциях с функциями, имеющими конечные пределы, $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, а также $\frac{f(x)}{g(x)}$, если $g(a) \neq 0$, являются непрерывными в точке a функциями. $\square$

Теорема 6.6 (о пределе под знаком непрерывной функции)**.** *Пусть $\lim\limits_{x\to *} f(x) = a$, функция $g(y)$ непрерывна в точке a и в некоторой $\mathring{U}(*)$ определена сложная функция $g(f(x))$. Тогда существует*

$$\lim_{x\to *} g(f(x)) = g(a) = g(\lim_{x\to *} f(x)).$$

Доказательство. Теорема верна по теореме о пределе сложной функции. Однажды мы изложим здесь более подробное доказательство. $\square$

Теорема 6.7 (о непрерывности композиции непрерывных функций)**.** *Пусть $f(x)$ непрерывна в точке a, а $g(y)$ непрерывна в точке $b = f(a)$, и пусть в некоторой $U(a)$ определена $g(f(x))$. Тогда $g(f(x))$ непрерывна в точке a.*

6.7 Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 6.8 (о нулях непрерывной на отрезке функции или первая теорема Больцано-Коши)**.** *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$ (на концах $[a;b]$ принимает значения разных знаков). Тогда существует хотя бы одна точка $c \in [a;b]$, такая, что $f(c) = 0$.*

Теорема 6.9 (о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции или вторая теорема Больцано-Коши)**.** *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда для любой C, лежащей между A и B, найдется $c_0 \in [a;b]$, такая, что $f(c_0) = C$.*

Теорема 6.10 (об ограниченности непрерывной на отрезке функции или первая теорема Вейерштрасса)**.** *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.*

Теорема 6.11 (о достижении непрерывной на отрезке функцией своих точных граней или вторая теорема Вейерштрасса)**.** *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Тогда существуют такие $x_n, x_N \in [a;b]$, что*

$$f(x_n) = m = \inf(f(x)),\ x \in [a;b] = \min f(x) \text{ на } [a;b],$$

$$f(x_N) = M = \sup(f(x)),\ x \in [a;b] = \max f(x) \text{ на } [a;b].$$

6.8 Непрерывность монотонных функций

Теорема 6.12. *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Тогда $f(x)$ является инъекцией тогда и только тогда, когда $f(x)$ строго монотонна на $[a;b]$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и является инъекцией. Будем доказывать "от противного". Предположим, что $f(x)$ не является строго монотонной, т.е. существуют такие $x_1, x_2, x_3 \in [a;b]$, что $x_1 < x_2 < x_3$, а значение $f(x_2)$ не лежит между $f(x_1)$ и $f(x_3)$. Всего у нас получится четыре случая.

Рассмотрим следующий случай: $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_1) < f(x_3)$, $f(x_2) < f(x_3)$. Тогда на отрезке $[x_2;x_3]$ функция $f(x)$ непрерывна, следовательно, принимает все свои значения из $[f(x_2); f(x_3)]$, но $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$, следовательно, существует $\widetilde{x} \in [x_2;x_3]$, такой, что $f(\widetilde{x}) = f(x_1)$, что противоречит инъективности $f(x)$ на $[a;b]$. Доказательства остальных случаев аналогичны.

Докажем достаточность. Если $f(x)$ строго монотонна (возрастает или убывает) на $[a;b]$, то она инъективна. □

Теорема 6.13 (Вейерштрасса о существовании предела монотонной ограниченной функции)**.** *Пусть $f(x)$ монотонна и ограничена на $[a;+\infty)$. Тогда существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$.*