

# Лекции по математическому анализу для 1 курса ФН2, 3

Власова Елена Александровна

2024-2025 год.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
1.1	Элементы теории множеств . . . . .	4
1.2	Кванторные операции . . . . .	5
1.3	Метод математической индукции . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Множество действительных чисел</b>	<b>6</b>
2.1	Аксиоматика действительных чисел . . . . .	6
2.2	Интерпретации $\mathbb{R}$ . . . . .	7
2.3	Числовые промежутки . . . . .	8
2.4	Бесконечные числовые промежутки (лучи) . . . . .	8
2.5	Окрестности точки . . . . .	8
2.6	Принцип вложенных отрезков (Коши-Кантора) . . . . .	9
2.7	Ограниченные и неограниченные числовые множества . . . . .	10
2.8	Точные грани числового множества . . . . .	10
2.9	Принцип Архимеда . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Функции или отображения</b>	<b>11</b>
3.1	Понятие функции . . . . .	11
3.2	Ограниченные и неограниченные числовые множества . . . . .	11
3.3	Обратные функции . . . . .	11
3.4	Чётные и нечётные функции . . . . .	11
3.5	Периодические функции . . . . .	11
3.6	Сложная функция (композиция) . . . . .	11
3.7	Основные элементарные функции . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Числовые последовательности и их пределы</b>	<b>12</b>
4.1	Ограниченные и неограниченные числовые последовательности . . . . .	12
4.2	Предел числовой последовательности . . . . .	12
4.3	Бесконечные пределы . . . . .	13
4.4	Свойства сходящихся последовательностей . . . . .	13
4.5	Монотонные числовые последовательности . . . . .	14
4.6	Число $e$ . . . . .	16
4.7	Гиперболические функции . . . . .	17
4.8	Предельные точки числового множества . . . . .	17
4.9	Предельные точки числовых последовательностей . . . . .	20
4.10	Фундаментальные последовательности . . . . .	22

<b>5</b>	<b>Пределы функций</b>	<b>26</b>
5.1	Определение предела по Коши . . . . .	26
5.2	Бесконечно малые функции . . . . .	31
5.3	Свойства бесконечно малых функций . . . . .	32
5.4	Арифметические операции с функциями, имеющими пре- делы . . . . .	33
5.5	Бесконечно большие функции . . . . .	37
5.6	Первый замечательный предел . . . . .	38
5.7	Второй замечательный предел . . . . .	39
5.8	Сравнение бесконечно малых . . . . .	41
5.9	Таблица эквивалентных бесконечно малых . . . . .	41
5.10	Свойства эквивалентных бесконечно малых . . . . .	42
5.11	<i>O</i> -символика . . . . .	42
5.12	Сравнение бесконечно больших . . . . .	42
5.13	Свойства эквивалентных бесконечно больших . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Непрерывность</b>	<b>43</b>
6.1	Непрерывность функции в точке . . . . .	43
6.2	Приращение аргумента в точке и приращение функции . . .	43
6.3	Точки разрыва . . . . .	44
6.4	Классификация точек разрыва . . . . .	44
6.5	Односторонняя непрерывность . . . . .	45
6.6	Свойства функций, непрерывных в точке . . . . .	45

# Элементарные функции и их пределы

## 1 Введение

### 1.1 Элементы теории множеств

“Множество есть многое, мыслимое как единое.”

(Г. Кантор)

Множество — то же, что и класс, семейство, совокупность, набор; может состоять из любых различных объектов; однозначно определяется набором составляющих его объектов.

Важные обозначения:

- $A, B, C$  — множества;
- $a \in A$  — элемент  $a$  принадлежит множеству  $A$ ;
- $a \notin A$  — элемент  $a$  не принадлежит множеству  $A$ ;
- $A \subset B$  —  $A$  является подмножеством множества  $B$ , т.е. любой элемент множества  $A$  будет являться элементом множества  $B$ ;
- $\emptyset$  — пустое множество или множество, не содержащее элементов;
- Если  $x$  — объект,  $P$  — свойство,  $P(x)$  — обозначение того, что  $x$  обладает свойством  $P$ , то через  $\{x : P(x)\}$  или  $\{x \mid P(x)\}$  обозначают все множество объектов, обладающих свойством  $P$ .

Пять основных операций над множествами:

1.  $A \cup B = C \iff C = \{c \in C : c \in A \text{ или } c \in B\}$ ;
2.  $A \cap B = C \iff C = \{c \in C : c \in A \text{ и } c \in B\}$ ;
3.  $A \setminus B = C \iff C = \{c \in C : c \in A \text{ и } c \notin B\}$ ;
4.  $\bar{A} = X \setminus A$ . Говорят, что  $\bar{A}$  — дополнение  $A$  до  $X$ ;
5. Декартово произведение множеств.

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\},$$

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_k \in X_k, k \in 1, \dots, n\}.$$

## 1.2 Кванторные операции

Высказывание, содержащее переменную, называется предикатом и обозначается  $P(x)$ . Отрицание  $P(x)$  обозначается  $\overline{P}(x)$ .

- $\forall$  — квантор общности.  $\forall x \in X : P(x)$  — “для любого элемента  $x$  из множества  $X$  выполняется высказывание  $P(x)$ ”.
- $\exists$  — квантор существования.  $\exists x \in X : P(x)$  — “существует элемент  $x$  из множества  $X$ , для которого выполняется высказывание  $P(x)$ ”.
- $\exists!$  — квантор существования и единственности.  $\exists! x \in X : P(x)$  — “существует единственный элемент  $x$  из множества  $X$ , для которого выполняется высказывание  $P(x)$ ”. Например,  $\exists! x \in \mathbb{R} : \log_2 x = 1$ .

Следующая выкладка иллюстрирует правило построения отрицаний высказываний, содержащих кванторы.

$$Q = \forall x \in X : P(x), \quad \overline{Q} = \exists x \in X : \overline{P}(x),$$

$$R = \exists x \in X : P(x), \quad \overline{R} = \forall x \in X : \overline{P}(x),$$

## 1.3 Метод математической индукции

Пусть  $A(n)$  — некоторое высказывание. Докажем, что  $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ .

1. Проверяем истинность  $A(n)$  при  $n = 1$  (или  $n = n_1$ , где  $n_1$  — число, с которого целесообразно начать).
2. Полагаем, что  $A(n)$  верно для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Доказываем, что  $A(n+1)$  верно, используя 2).  $A(1) \implies A(2) \implies \dots \implies A(n) \implies A(n+1)$

**Пример 1.1.** Докажем по индукции неравенство Бернулли:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1+nx, x > 0.$$

1. Проверим верность для  $n = 1$ . Неравенство  $1+x \geq 1+x$  верно.
2. Пусть  $(1+x)^n \geq 1+nx$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Используя верность для  $n$ , докажем верность для  $n+1$ :

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = \\ &= 1+nx+x+nx^2 \geq 1+nx+1 \implies (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x. \end{aligned}$$

## 2 Множество действительных чисел

### 2.1 Аксиоматика действительных чисел

**Определение 2.1.** Множество  $\mathbb{R}$  называется множеством действительных чисел, если элементы этого множества удовлетворяют следующему комплексу условий:

#### (I) Аксиомы сложения

На  $\mathbb{R}$  определена операция сложения “+”, то есть задано отображение, которое каждой упорядоченной паре  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ставит в соответствие элемент из  $\mathbb{R}$ , называемый суммой  $x + y$  и удовлетворяющий следующим аксиомам:

1.  $\exists 0 \in \mathbb{R}$ , такой, что  $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$ ;
2.  $\forall x \exists$  противоположный элемент  $-x$ , такой, что  $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ;
3. Ассоциативность.  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$ ;
4. Коммутативность.  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$ .

#### (II) Аксиомы умножения

На  $\mathbb{R}$  определена операция умножения “ $\cdot$ ”, то есть  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  ставится в соответствие элемент  $(x \cdot y) \in \mathbb{R}$ .

1.  $\exists$  нейтральный элемент  $1 \in \mathbb{R}$ , такой, что  $\forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ ;
2.  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists$  обратный элемент “ $x^{-1}$ ”, такой, что  $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ ;
3. Ассоциативность.  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ ;
4. Коммутативность.  $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \cdot y = y \cdot x$ .

#### (I, II) Связь операций сложения и умножения

Операция умножения дистрибутивна по отношению к операции сложения.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y)z = xz + yz$$

### (III) Аксиомы порядка

Для  $\mathbb{R}$  определено отношение " $\leq$ ".

1.  $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$ ;
2.  $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y \wedge y \leq x) \implies x = y$ ;
3. Транзитивность. Если  $x \leq y$  и  $y \leq z$ , то  $x \leq z$ ;
4.  $\forall x, y \in \mathbb{R} (x \leq y) \text{ и } (y \leq x)$ .

### (I, III) Связь сложения с неравенством

Если  $x \leq y$ , то  $\forall z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z$ .

### (II, III) Связь умножения с неравенством

Если  $0 \leq x$  и  $0 \leq y$ , то  $0 \leq x \cdot y$ .

### (IV) Аксиома полноты $\mathbb{R}$

Для любых ненулевых подмножеств  $X$  и  $Y$  множества  $\mathbb{R}$ , таких, что  $\forall x \in X, \forall y \in Y : x \leq y$ , существует  $c \in \mathbb{R}$ , такое, что  $(\forall x \in X \text{ и } \forall y \in Y) : x \leq c \leq y$ .

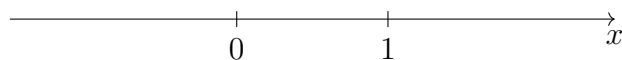
## 2.2 Интерпретации $\mathbb{R}$

### Геометрическая

Между прямой и  $\mathbb{R}$  существует взаимно-однозначное соответствие, т.е. отображение из  $\mathbb{R}$  на прямую биективно. Для задания этого отображения определяется

1. начальное положение, которому соответствует  $0 \in \mathbb{R}$ ,
2. положительное направление,
3. масштаб, то есть положение  $1 \in \mathbb{R}$ .

$Ox$  — числовая прямая. Каждое действительное число можно найти на числовой оси и для каждой точки числовой оси существует действительное число.



## Десятичная форма записи чисел из $\mathbb{R}$

$$a \in \mathbb{R} \iff a = a_0, a_1, \dots, a_n : a_0 \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

Если  $a \in \mathbb{Q}$ , то в десятичной форме записи  $a = a_0, a_1, \dots, a_n$  представляется конечной или бесконечной периодической дробью.

## 2.3 Числовые промежутки

Возьмем числа  $a, b \in \mathbb{R}$ , такие, что  $a < b$ .

- $(a; b) = \{c \in \mathbb{R} : a < c < b\}$  — интервал;
- $[a; b] = \{c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b\}$  — отрезок;
- $(a; b] = \{c \in \mathbb{R} : a < c \leq b\}$  — полуинтервал;
- $[a; b) = \{c \in \mathbb{R} : a \leq c < b\}$  — полуинтервал.

## 2.4 Бесконечные числовые промежутки (лучи)

Возьмем  $a \in \mathbb{R}$ .

- $(a; +\infty) = \{c \in \mathbb{R} : c > a\}$  — открытый луч;
- $[a; +\infty) = \{c \in \mathbb{R} : c \geq a\}$  — замкнутый луч;
- $(-\infty; a) = \{c \in \mathbb{R} : c < a\}$  — открытый луч;
- $(-\infty; a] = \{c \in \mathbb{R} : c \leq a\}$  — замкнутый луч.

## 2.5 Окрестности точки

Пусть  $\varepsilon$  — некоторое положительное число.

**Определение 2.2.** Окрестностью точки  $a \in \mathbb{R}$  называется любой интервал, содержащий точку  $a$  и обозначается  $U(a)$ .

**Определение 2.3.**  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $a \in \mathbb{R}$  называется интервал  $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$  и обозначается  $U_\varepsilon(a)$ .

$$c \in U_\varepsilon(a) \iff |a - c| < \varepsilon.$$

**Определение 2.4.** Проколотой  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $a \in \mathbb{R}$  называется множество  $(a - \varepsilon; a) \cup (a; a + \varepsilon) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$  и обозначается  $\mathring{U}_\varepsilon(a)$ .



**Определение 2.5.** Окрестностью бесконечности называют любое множество вида  $(-\infty; a) \cup (b; +\infty)$ .

**Определение 2.6.**  $\varepsilon$ -окрестностью бесконечности называют множество  $(-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty)$ .

Замечание.  $U_\varepsilon(\infty) = \overset{\circ}{U}_\varepsilon(\infty)$ .

## 2.6 Принцип вложенных отрезков (Коши-Кантора)

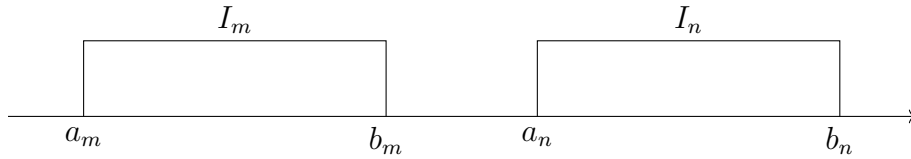
**Определение 2.7.** Пусть  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность некоторых множеств. Если  $\forall n \in \mathbb{N} : X_n \supset X_{n+1}$ , то эта последовательность называется последовательностью вложенных отрезков.

**Теорема 2.1** (принцип Коши-Кантора). Во всякой последовательности  $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $I_n = [a_n, b_n]$  вложенных отрезков найдется точка  $c \in \mathbb{R}$ , принадлежащая всем этим отрезкам. Или, что то же,

$$\forall \{I_n\}_{n=1}^\infty, I_n = [a_n, b_n] \quad \exists c \in \mathbb{R} : (\forall n \in \mathbb{N} : c \in I_n).$$

Если, кроме того, известно, что для любого  $\varepsilon > 0$  в последовательности можно найти отрезок  $I_k$ , длина которого  $|I_k| < \varepsilon$ , то  $c$  — единственная общая точка всех отрезков.

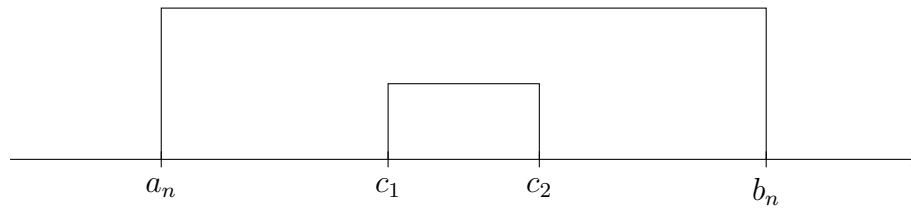
*Доказательство.* Заметим сначала, что для любых двух отрезков  $I_m = [a_m; b_m]$ ,  $I_n = [a_n, b_n]$  нашей последовательности имеет место  $a_n \leq b_m$ , т.е.  $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$ . Докажем “от противного”. Предположим, что  $\exists n, m \in \mathbb{N} : a_n > b_m$



$a_m < b_m < a_n < b_n \implies I_n \cap I_m = \emptyset$ , что противоречит условию  $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$ .

Пусть  $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $B = \{b_m, m \in \mathbb{N}\}$ ,  $A, B \neq \emptyset$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $B \subset \mathbb{R}$ . По аксиоме полноты IV  $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$  существует  $c \in \mathbb{R} : \forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq c \leq b_m$ . Следовательно,  $c \in [a_n; b_n] = I_n$ , т.е.  $c$  — общая точка всех отрезков.

Пусть  $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |I_n| = b_n - a_n < \varepsilon$ . Докажем “от противного”. Предположим, что общая точка не является единственной, то есть существуют  $c_1, c_2, c_1 \neq c_2$ , такие, что  $c_1 \in I_n$  и  $c_2 \in I_n$ . Пусть для определенности  $c_1 < c_2$ .



Выберем  $\varepsilon = \frac{c_2 - c_1}{2}$ .  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n$ , следовательно,  $b_n - a_n \geq c_2 - c_1$ . По условию  $\exists n \in \mathbb{N} : |I_n| = b_n - a_n < \varepsilon = \frac{c_2 - c_1}{2}$ , но  $c_2 - c_1 \leq b_n - a_n < \frac{c_2 - c_1}{2}$  — противоречие, следовательно,  $c_1 = c_2$ . Единственность доказана.  $\square$

## 2.7 Ограниченные и неограниченные числовые множества

## 2.8 Точные грани числового множества

## 2.9 Принцип Архимеда

### 3 Функции или отображения

#### 3.1 Понятие функции

#### 3.2 Ограниченные и неограниченные числовые множества

#### 3.3 Обратные функции

#### 3.4 Чётные и нечётные функции

#### 3.5 Периодические функции

#### 3.6 Сложная функция (композиция)

#### 3.7 Основные элементарные функции

## 4 Числовые последовательности и их пределы

**Определение 4.1.**  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  — числовая последовательность, т.е.  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $x_n \in \mathbb{R}$ .

### 4.1 Ограниченные и неограниченные числовые последовательности

**Определение 4.2.** Числовая последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется

1. ограниченной сверху, если  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M$ ;
2. ограниченной снизу, если  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq M$ ;
3. ограниченной, если  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M$ ;
4. неограниченной, если  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| > M$ ;

### 4.2 Предел числовой последовательности

**Определение 4.3.** Число  $a \in \mathbb{R}$  называется пределом числовой последовательности, если  $\forall \varepsilon > 0$  существует такой номер  $n$ , зависящий от  $\varepsilon$ , что  $\forall$  натурального числа  $N > n$  верно неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Пример:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \implies n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Возьмем  $N(\varepsilon) = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ . Тогда  $\forall n > \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil : \frac{1}{n} < \varepsilon$ .

**Определение 4.4.** Если  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  имеет конечный предел  $a$ , то эта последовательность называется сходящейся, в противном случае — расходящейся.

**Определение 4.5.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , то последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется бесконечно малой (б.м.).

### 4.3 Бесконечные пределы

### 4.4 Свойства сходящихся последовательностей

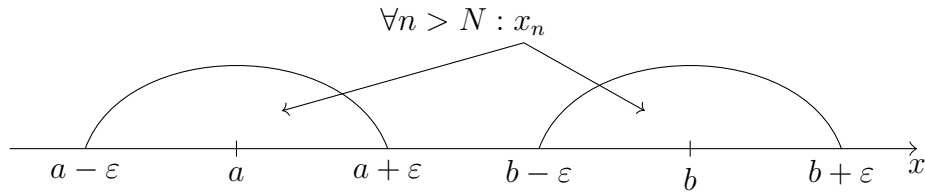
**Теорема 4.1** (о единственности предела). *Любая сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

*Доказательство.* “От противного”. Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — сходящаяся последовательность. Предположим, что  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ , причем  $a \neq b$ . Пусть для определенности  $a < b$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 : |x_n - b| < \varepsilon.$$

$$N = \max\{N_1, N_2\} \implies \forall n > N : \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon, \\ |x_n - b| < \varepsilon. \end{cases}$$



Выберем  $\varepsilon = \frac{b-a}{4} > 0$ . Найдем  $N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N = \max\{N_1, N_2\}$ , тогда

$$\forall n > N \quad |x_n - a| < \frac{b-a}{4}, \quad |x_n - b| < \frac{b-a}{4}.$$

Следовательно,

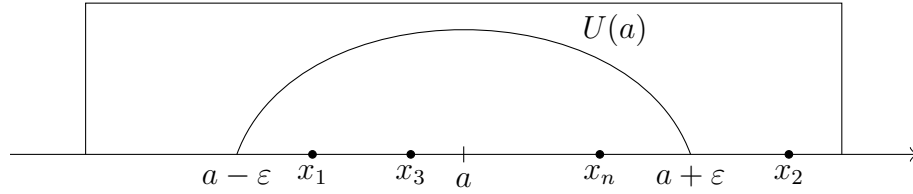
$$0 < b - a = |b - a| = |b - x_n + x_n - a| \leq |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{b-a}{2},$$

то есть

$$0 < b - a < \frac{b-a}{2}.$$

Мы пришли к противоречию, следовательно,  $a = b \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  имеет единственный предел.  $\square$

**Теорема 4.2** (об ограниченности сходящейся последовательности). *Любая сходящаяся последовательность является ограниченной.*



*Доказательство.* Если  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится, то

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} = a \in \mathbb{R} \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$$

Пусть  $\varepsilon = 1 \implies \exists N = N(1) \quad \forall n > N : |x_n - a| < 1$ . Следовательно,

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Пусть  $M_0 = 1 + |a| \implies \forall n > N : x_n < M_0$ .

Пусть  $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, M_0\}$ , тогда  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  является ограниченной.  $\square$

*Замечание.* Ограниченность является необходимым условием сходимости числовой последовательности. В то же время условие ограниченности не является достаточным для сходимости числовой последовательности. Например,  $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$  — ограниченная, но не сходящаяся числовая последовательность.

**Теорема 4.3** (об арифметических операциях со сходящимися последовательностями). Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b;$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = ab;$$

если  $y_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, b \neq 0$ , то

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

## 4.5 Монотонные числовые последовательности

**Определение 4.6.** Числовая последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется

1. возрастающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}$ ;
2. убывающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1}$ ;

3. неубывающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}$ ;

4. невозрастающей, если  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n+1}$

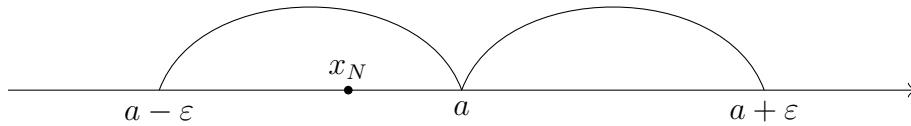
Для монотонных числовых последовательностей ограниченность является достаточным условием для сходимости.

**Теорема 4.4** (Вейерштрасса о сходимости монотонных числовых последовательностей). *Если последовательность не убывает и ограничена сверху, то она является сходящейся. Если последовательность не возрастает и ограничена снизу, то она является сходящейся. В общем, любая монотонная последовательность сходится.*

*Доказательство.* Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  не убывает и ограничена сверху  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  множество значений этой последовательности  
 $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = A$  является ограниченным  
сверху числовым множеством  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \exists \sup A \in \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = a$ , то есть

1.  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq a$ ;

2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : x_N > a - \varepsilon$ .



$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — неубывающая последовательность, то есть

$$\begin{aligned} \forall n > N = N(\varepsilon) : x_n &\geq x_N \Rightarrow \\ \Rightarrow a - \varepsilon < x_N \leq x_n &\leq a < a + \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon &\Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon &\Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R} \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} &\text{сходится.} \end{aligned}$$

Если  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — невозрастающая и ограниченная снизу последовательность, то

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf A, A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

Доказательство аналогично. □

## 4.6 Число $e$

**Теорема 4.5.** Числовая последовательность  $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n=1}^\infty$  является сходящейся, т.е.  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ .

*Доказательство.*  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n, n \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим последовательность  $\{y_n\}_{n=1}^\infty, y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ . Докажем, что  $\{y_n\}_{n=1}^\infty$  ограничена снизу. Т.к.  $\forall n \in \mathbb{N} : (1 + \frac{1}{n})^{n+1} > 0 \implies \{y_n\}_{n=1}^\infty$  ограничена снизу. Теперь докажем, что  $\{y_n\}_{n=1}^\infty$  убывает.

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2 \quad \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{(1 + \frac{1}{n-1})^n}{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{(1 + \frac{1}{n-1})}{(1 + \frac{1}{n})^n (1 + \frac{1}{n})} = \left(\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \\ &= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством  $\forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1+nx, x \geq 0$ , известным как неравенство Бернулли.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} &\geq \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} > \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\forall n \geq 2 \quad \frac{y_{n-1}}{y_n} > 1 \implies y_{n-1} > y_n \implies \{y_n\}_{n=1}^\infty$  убывает.  $\{y_n\}_{n=1}^\infty$  убывает и ограничена снизу  $\implies$  по теореме Вейерштрасса  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e \in \mathbb{R}$ . Вернемся к  $x_n$ :

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})} = \frac{y_n}{(1 + \frac{1}{n})},$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{(1 + \frac{1}{n})} = \frac{e}{1+0} = e \implies \\ &\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \end{aligned}$$

□

*Замечание.*  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  — возрастающая последовательность и ограничена сверху:  $2 < x_n < 3$ ;  $e$  — иррациональное число, т.е.  $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;  $e \approx 2,718281828459045$ .



## 4.7 Гиперболические функции

## 4.8 Пределные точки числового множества

**Определение 4.7.** Точка  $a \in \mathbb{R}$  называется предельной точкой множества  $X \subset \mathbb{R} \iff$  любая окрестность  $U(a)$  содержит бесконечно много элементов множества  $X$ .

*Замечание.* Множество  $A$  называется бесконечным или содержащим бесконечно много элементов, если при вычитании из  $A$  любого его конечного подмножества получается непустое множество.

Множество всех предельных точек множества  $X$  называется производным множеством для  $X$  и обозначается  $X'$ .

**Утверждение 4.1.** Точка  $a \in \mathbb{R}$  является предельной для  $X \subset \mathbb{R} \iff$  в любой проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $a$  содержится хотя бы один элемент множества  $X$ , т.е.

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \cap \mathring{U}(a).$$

*Доказательство.* ( $\implies$ ) Необходимость.

$a$  — предельная для  $X \subset \mathbb{R} \implies$

$\implies$  любая  $U(a)$  содержит бесконечно много элементов из  $X \implies$

$\implies \mathring{U}(a)$  тоже содержит бесконечно много элементов из  $X \implies$

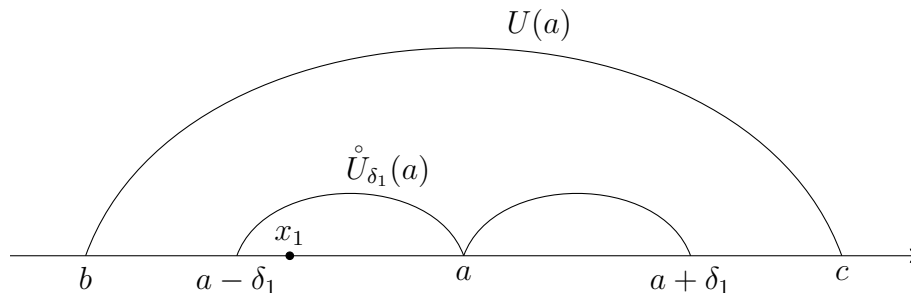
$\implies$  любая  $\mathring{U}$  содержит хотя бы один элемент  $x \in X$ .

( $\impliedby$ ) Достаточность.

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \cap \mathring{U}(a).$$

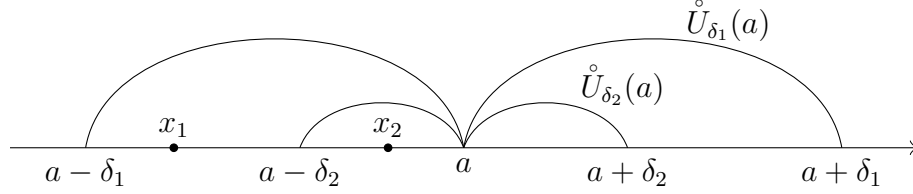
Выберем любую  $U(a)$ . Тогда

$$\exists \delta_1 > 0 : \mathring{U}(a) \subset U(a) \implies \exists x_1 \in X : x_1 \in \mathring{U}_{\delta_1}(a).$$



Пусть  $\delta_2 = \frac{|x_1 - a|}{2} > 0$ . Тогда

$$\exists x_2 \in \mathring{U}_{\delta_2}(a) : x_2 \neq x_1.$$



Пусть  $\delta_3 = \frac{|x_2 - a|}{2} > 0$ . Тогда

$$\exists x_3 \in \mathring{U}_{\delta_3}(a) : x_3 \neq x_2$$

и т.д. На шаге  $n$ :

$$\delta_n = \frac{|x_{n-1} - a|}{2} > 0 \implies \exists x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(a) : x_n \neq x_k, k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Таким образом,

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in U(a) : x_n \in X, x_n \neq x_k, n \neq k,$$

а значит, любая окрестность  $U(a)$  содержит бесконечно много элементов из  $X \implies a$  — предельная точка.  $\square$

**Утверждение 4.2.** Если точка  $a \in \mathbb{R}$  является предельной точкой для множества  $X \subset \mathbb{R}$ , то

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

*Доказательство.*  $a$  — предельная точка для  $X \subset \mathbb{R} \iff \forall \delta > 0 \quad \mathring{U}_{\delta}(a)$  содержит хотя бы одну точку множества  $X$  (по утверждению 1).

Выберем  $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}, \delta_n = \frac{1}{n} > 0$ , тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in X : x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(a),$$

то есть

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}.$$

Т.к.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

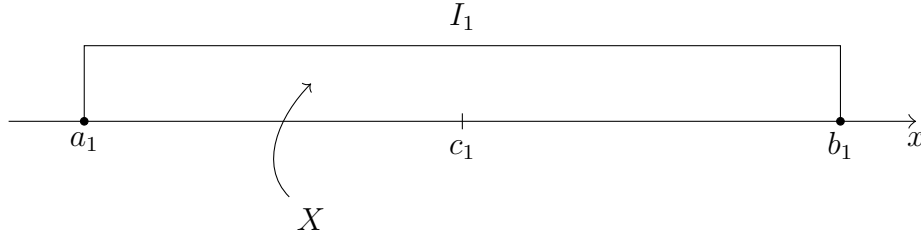
а значит,

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

$\square$

**Теорема 4.6** (принцип Больцано-Вейерштрасса). *Любое ограниченное бесконечное числовое множество имеет хотя бы одну предельную точку.*

*Доказательство.* Пусть  $X$  — бесконечное ограниченное множество, то есть  $\exists I_1 = [a_1, b_1] : X \subset [a_1, b_1]$ . Пусть  $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ , т.е. середина отрезка  $I_1$ .



Так как множество  $X$  бесконечное, то либо отрезок  $[a_1, c_1]$ , либо отрезок  $[c_1, b_1]$  содержит бесконечно много элементов множества  $X$ . Обозначим ту половину отрезка  $I_1$ , которая содержит бесконечно много элементов множества  $X$  через  $I_2 = [a_2, b_2]$ ,  $I_2 \subset I_1$ . Выразим длину отрезка  $I_2$ :

$$|I_2| = b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{|I_1|}{2}.$$

На отрезке  $I_2$  содержится бесконечно много элементов множества  $X$ . Пусть  $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$  — середина  $I_2$ , тогда либо  $[a_2, c_2]$ , либо  $[c_2, b_2]$  содержит бесконечно много элементов множества  $X$ . Обозначим ту половину  $I_2$ , где бесконечно много элементов множества  $X$  через  $I_3 = [a_3, b_3]$ . Тогда

$$|I_3| = \frac{|I_1|}{2^2}$$

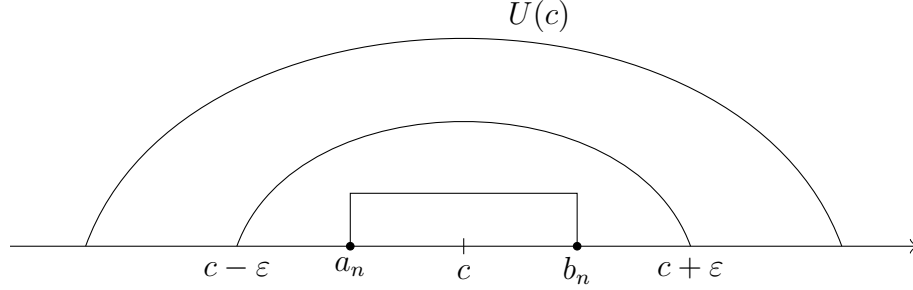
и т.д. На шаге  $n$ :  $I_n = [a_n, b_n]$ ,  $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$  — середина  $I_n$ ,  $I_n$  содержит бесконечно много элементов из  $X$ , тогда либо  $[a_n, c_n]$ , либо  $[c_n, b_n]$  содержит бесконечно много элементов из  $X \implies I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset I_n$  и содержит бесконечно много элементов из  $X$ . Таким образом, мы получили последовательность вложенных отрезков  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} : I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$

$$\begin{aligned} |I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}} &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|I_n|}{2^{n-1}} = 0 \implies \\ &\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |I_n| < \varepsilon. \end{aligned}$$

По принципу Коши-Кантора  $\exists!$  общая точка  $c$ , т.е.  $\forall n \in \mathbb{N} : c \in I_n$ .

$$\forall U(c) \quad \exists \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(c) \subset U(c) \implies \exists n \in \mathbb{N} : I_n = [a_n, b_n] \subset U_\varepsilon(c)$$

(например,  $|I_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ ).



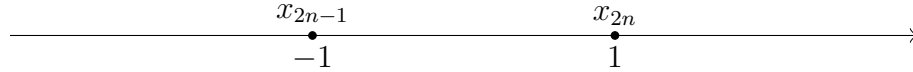
Отрезок  $I_n$  содержит бесконечно много элементов множества  $X$  по построению последовательности  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} \implies$  окрестность  $U(c)$  содержит бесконечно много элементов из  $X \implies c$  — предельная.  $\square$

## 4.9 Предельные точки числовых последовательностей

**Определение 4.8.** Точка  $a \in \mathbb{R}$  называется предельной точкой числовой последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \iff$  любая окрестность  $U(a)$  содержит бесконечно много элементов последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

*Замечание.* Если  $a$  — предельная точка  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , то любая  $U(a)$  содержит какую-либо подпоследовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Пример:  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n = (-1)^n$ .



**Теорема 4.7.** Точка  $a \in \mathbb{R}$  является предельной для  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  тогда и только тогда, когда  $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ .

*Доказательство.* Докажем необходимость. Пусть  $a$  — предельная точка последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Выберем  $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}, \varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0$ .

Для  $n = 1$   $U_{\varepsilon_1=1}(a)$  содержит  $\infty$  много элементов  $\implies \exists x_{n_1} \in U_{\varepsilon_1}(a)$ , т.е.  $|x_{n_1} - a| < 1$ .

Для  $n = 2$   $U_{\varepsilon_2=\frac{1}{2}}(a)$  содержит  $\infty$  много элементов  $\implies \exists n_2 > n_1 : x_{n_2} \in U_{\varepsilon_2}(a)$ , т.е.  $|x_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$ .

Для  $n = 3$   $U_{\varepsilon_3=\frac{1}{3}}(a)$  содержит  $\infty$  много элементов  $\implies \exists n_3 > n_2 : x_{n_3} \in U_{\varepsilon_3}(a)$ , т.е.  $|x_{n_3} - a| < \frac{1}{3}$  и т.д.

Для  $n = k$   $U_{\varepsilon_k=\frac{1}{k}}(a)$  содержит  $\infty$  много элементов  $\implies \exists n_k > n_{k-1} : x_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}(a)$ , т.е.  $|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \implies \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  является подпоследователь-

ностью последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \implies \forall k \in \mathbb{N} : |x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0 &\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall k > N : \frac{1}{k} < \varepsilon \implies \\ &\implies \forall k > N \quad |x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} < \varepsilon \implies \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a. \end{aligned}$$

Докажем достаточность.

Пусть  $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ . Выберем любую  $U(a)$  и найдем такое  $\varepsilon > 0$ , что  $U_{\varepsilon}(a) \subset U(a)$ :

$$\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall k > N : |x_{n_k} - a| < \varepsilon \implies x_{n_k} \in U_{\varepsilon}(a) \subset U(a).$$

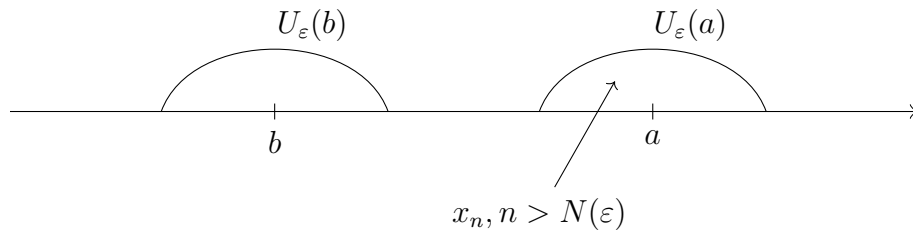
Следовательно,  $U(a)$  содержит бесконечно много элементов  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , а значит,  $a$  — предельная.  $\square$

**Теорема 4.8.** Если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то  $a$  является предельной точкой для  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , причем единственной.

*Доказательство.*  $a$  — предельная, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  (по теореме 1).

Докажем единственность предельной точки для  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  “от противного”. Пусть  $\exists b \neq a$ ,  $b$  — предельная точка  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , тогда  $|b - a| \geq \delta > 0$ . Т.к.  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , любая  $\varepsilon$ -окрестность точки содержит бесконечно много элементов  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , а именно все, начиная с номера  $N(\varepsilon) + 1$ , т.е.  $\forall n > n(\varepsilon)$ . Вне  $U_{\varepsilon}(a)$  может содержаться не более конечного числа элементов  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  (возможно  $x_n$  с номерами  $1, 2, \dots, N(\varepsilon)$ ).

Выберем  $\varepsilon = \frac{\delta}{4} > 0$ . Тогда  $\forall n > N(\varepsilon) : x_n \in U_{\varepsilon}(a)$ .



Но  $U_{\varepsilon}(a) \cap U_{\varepsilon}(b) = \emptyset$ , что противоречит тому, что  $b$  — предельная точка для  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , т.е.  $U_{\varepsilon}(b)$  должна содержать бесконечно много элементов  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , а туда может попасть не более конечного. Следовательно,  $a = b$ .  $\square$

**Теорема 4.9.** Любая ограниченная числовая последовательность имеет хотя бы одну предельную точку.

*Доказательство.*  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — ограниченная,  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset \mathbb{R}$ ,  $X$  — множество значений числовой последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Т.к.  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — ограниченная числовая последовательность,  $X$  — ограниченное числовое множество. Рассмотрим два случая.

Первый:  $X$  — бесконечное числовое множество. Тогда  $X$  по принципу Больцано-Вейерштрасса имеет хотя бы одну предельную точку  $a$ , т.е. в любую  $U(a)$  попадает бесконечно много элементов множества  $X$ , а значит, и бесконечно много элементов  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Следовательно,  $a$  — предельная точка последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Второй:  $X$  — конечное числовое множество. Тогда хотя бы один элемент последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  повторяется бесконечно много раз, т.е.  $\exists$  подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  (постоянная  $\forall k \in \mathbb{N}$ ),  $x_{n_k} = a \in X \implies a$  — предельная точка  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ .  $\square$

**Теорема 4.10** (критерий сходимости числовой последовательности). *Для того, чтобы точка  $a \in \mathbb{R}$  была пределом  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  была ограниченной и имела единственную предельную точку.*

*Доказательство.* Докажем необходимость.  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R} \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ограничена (по свойству сходящейся последовательности), а значит,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  имеет единственную предельную точку (по теореме 2).

Докажем достаточность. Пусть  $a$  — единственная предельная точка ограниченной последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

Будем доказывать “от противного”. Предположим, что  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  не имеет предела. Тогда

$$\forall b \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N : |x_n - b| \geq \varepsilon,$$

а значит, вне  $U_\varepsilon(a)$  лежит бесконечное множество элементов  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Тогда существует  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : |x_{n_k} - a| \geq \varepsilon$ , т.е.  $x_{n_k} \notin U_\varepsilon(a)$ . Следовательно,  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  — ограниченная последовательность, лежащая вне  $U_\varepsilon(a)$ . У этой последовательности есть предельная точка  $b$  (по теореме 3).  $U_\varepsilon(a)$  не содержит ни одного элемента  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \implies b \neq a$ , что противоречит условию. Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .  $\square$

## 4.10 Фундаментальные последовательности

**Определение 4.9.** *Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  называется фундаментальной тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N, \forall m > N : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

**Теорема 4.11.** Если числовая последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальна, то она ограничена.

*Доказательство.*  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — фундаментальная, т.е.

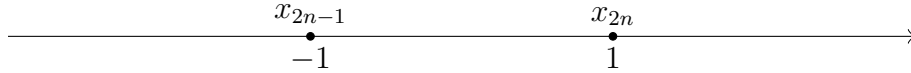
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N, \forall m > N : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Пусть  $\varepsilon = 1$ , тогда

$$\begin{aligned} \exists N = N(1) &\implies \forall n > N, m = N + 1 : |x_n - x_{N+1}| < 1 \implies \\ &\implies \forall n > N : |x_n| = |x_n - x_{N+1} + x_{N+1}| \leq \\ &\leq |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| < 1 + |x_{N+1}| = M_0 \implies \\ &\implies \forall n > N : |x_n| < M_0. \end{aligned}$$

Пусть  $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, M_0\}$ , тогда  $\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M$ , следовательно,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ограничена.  $\square$

**Пример 4.1.** В обратную сторону Теорема 4.11 не работает. Например,  $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$  ограничена, но не фундаментальна.

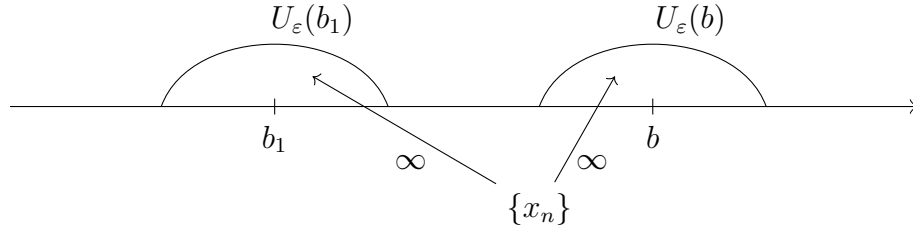


**Теорема 4.12** (критерий Коши сходимости числовой последовательности). Числовая последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

*Доказательство.* Докажем необходимость. По условию  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится  $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$ . По числу  $\varepsilon > 0$  найдем номер  $N$  так, чтобы при  $n > N$  иметь  $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Если теперь  $m > N$  и  $n > N$ , то  $|x_m - x_n| < |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$  и, таким образом, проверено, что сходящаяся последовательность фундаментальна.

Докажем достаточность. По условию  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальна, следовательно, ограничена, а значит, у нее есть хотя бы одна предельная точка. Докажем, что эта предельная точка единственна “от противного”. Предположим, что существует две предельные точки  $b$  и  $b_1$ ,  $b \neq b_1$  последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . По определению предельной точки для любого числа  $\varepsilon > 0$  окрестности  $U_\varepsilon(b)$  и  $U_\varepsilon(b_1)$  содержат бесконечно много членов последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Выберем удобный для дальнейших рассуждений  $\varepsilon$ .  $b_1 \neq b$ , следовательно,  $\varepsilon = \frac{|b_1 - b|}{6} > 0$ . Для выбранного  $\varepsilon$  найдем соответствующий номер  $N = N(\varepsilon)$ . По определению фундаментальной последовательности для этого номера выполняется, что  $\forall n, m > N : |x_n - x_m| < \frac{|b_1 - b|}{6}$ .



Т.к. в  $U_\varepsilon(b)$  и  $U_\varepsilon(b_1)$  попадает бесконечно много элементов  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ,

$$\exists n_1 > N : x_{n_1} \in U_\varepsilon(b) \quad \text{и} \quad \exists m_1 > N : x_{m_1} \in U_\varepsilon(b_1).$$

А значит, выполняется следующее неравенство:

$$\begin{aligned} 0 < |b - b_1| &= |b - x_{n_1} + x_{n_1} - x_{m_1} + x_{m_1} - b_1| \leq \\ &\leq |x_{n_1} - b| + |x_{n_1} - x_{m_1}| + |x_{m_1} - b_1| < 3\varepsilon = \\ &= \frac{3|b - b_1|}{6} = \frac{|b - b_1|}{2} \implies 0 < |b - b_1| < \frac{|b - b_1|}{2} \end{aligned}$$

Получено противоречие  $\implies b = b_1 \implies \{x_n\}_{n=1}^\infty$  имеет единственную предельную точку  $\implies \{x_n\}_{n=1}^\infty$  сходится (по теореме 4 о предельной точке последовательности).  $\square$

**Пример 4.2.**  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ . Существует ли  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ? Возьмем  $m = 2n > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} |x_n - x_{2n}| &= |x_{2n} - x_n| = \left| 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \right| = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \implies \\ &\implies \exists \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N, \exists m = 2n > N : |x_n - x_{2n}| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Следовательно,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  не является фундаментальной. Значит, конечный  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  не существует, т.е. последовательность не является сходящейся.

**Определение 4.10.** Число  $b$  или  $+\infty(-\infty)$  называют частичным пределом числовой последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  тогда и только тогда, когда

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = b.$$

Причем, если частичный предел есть конечное число, то это число является предельной точкой  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ .



Наибольший частичный предел (может быть  $\pm\infty$ ) называют верхним пределом числовой последовательности и обозначают  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Наименьший частичный предел (может быть  $\pm\infty$ ) называют нижним пределом числовой последовательности и обозначают  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Пример 4.3.** Для последовательности  $\{(-1)^n\}_{n=1}^\infty = x_n$  частичными пределами будут  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$  и  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$ .

**Пример 4.4.** Для последовательности  $\{(-1)^n n\}_{n=1}^\infty = x_n$  частичными пределами будут  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  и  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

**Теорема 4.13.** Верхний и нижний частичные пределы удовлетворяют неравенству

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

**Теорема 4.14.** Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  сходится тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

и является конечным числом.

## 5 Пределы функций

### 5.1 Определение предела по Коши

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$*$  :  $a$ ;  $a + 0$ ;  $a - 0$ ;  $\infty$ ;  $+\infty$ ;  $-\infty$

$**$  :  $b$ ;  $\infty$ ;  $+\infty$ ;  $-\infty$

Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой проколотой окрестности  $*$ .

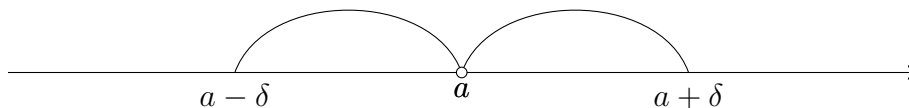
**Определение 5.1** (предела функции по Коши).  $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = **$  тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies f(x) \in U_\varepsilon(**).$$

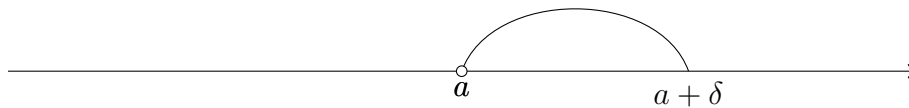
$*$	$x \in \mathring{U}_\delta(*)$
$a$	$x \in \mathbb{R} : 0 <  x - a  < \delta$
$a + 0$	$x \in \mathbb{R} : a < x < a + \delta$
$a - 0$	$x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a$
$\infty$	$x \in \mathbb{R} :  x  > \delta$
$+\infty$	$x \in \mathbb{R} : x > \delta$
$-\infty$	$x \in \mathbb{R} : x < -\delta$

$**$	$f(x) \in U_\varepsilon(**)$
$b$	$ f(x) - b  < \varepsilon$
$\infty$	$ f(x)  > \varepsilon$
$+\infty$	$f(x) > \varepsilon$
$-\infty$	$f(x) < -\varepsilon$

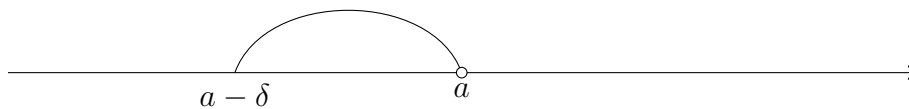
$$x \in \mathring{U}_\delta(a)$$



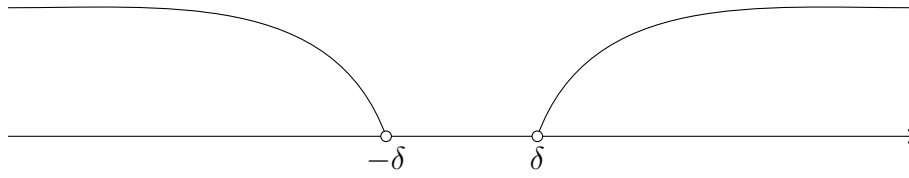
$$x \in \mathring{U}_\delta(a + 0)$$



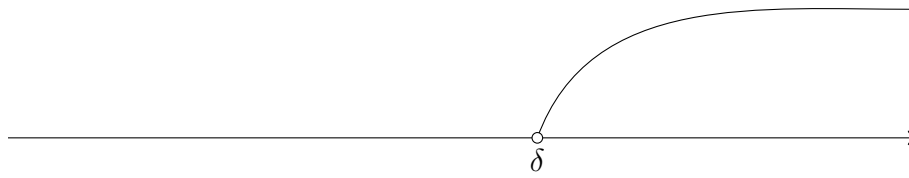
$$x \in \mathring{U}_\delta(a - 0)$$



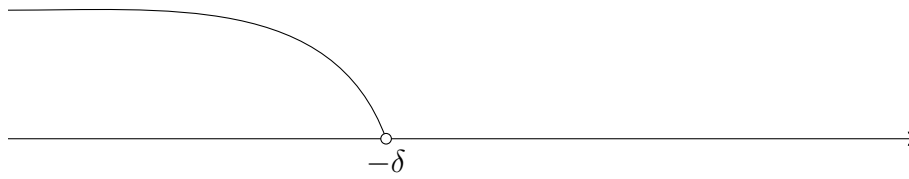
$$x \in \mathring{U}_\delta(\infty)$$



$$x \in \mathring{U}_\delta(+\infty)$$

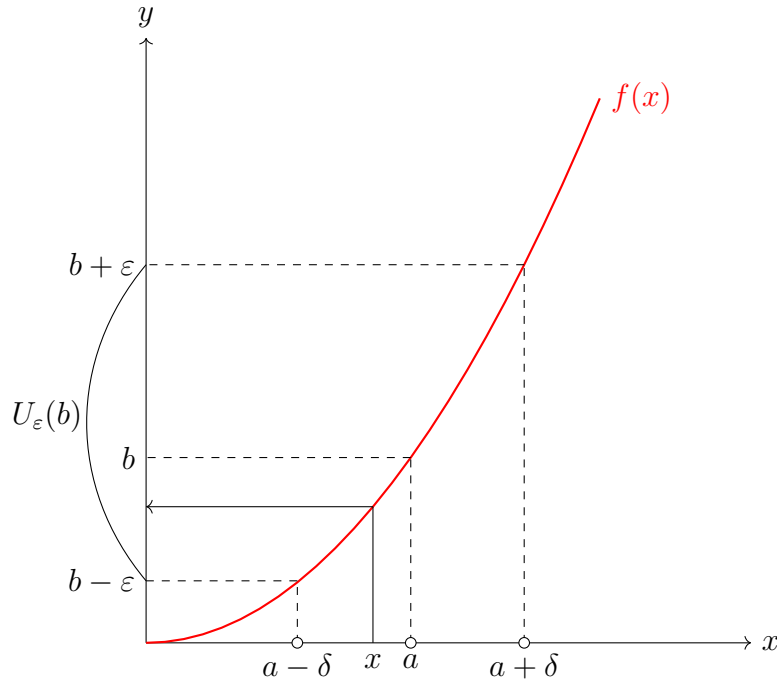


$$x \in \mathring{U}_\delta(-\infty)$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$



$x \approx a$  с точностью  $< \delta = \delta(\varepsilon) \implies f(x) \approx b$  с точностью  $< \varepsilon$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b &\iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : x > \delta \implies \\ &\implies |f(x) - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

**Пример 5.1.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b &\iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : x < -\delta \implies \\ &\implies |f(x) - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

**Пример 5.2.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$ .

Если  $*$  =  $a$ ;  $\infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow *} f(x)$  называется двусторонним пределом. Если  $*$  =  $a+0$ ;  $a-0$ ;  $+\infty$ ;  $-\infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow *} f(x)$  называется односторонним пределом. Если  $**$  =  $b$  (конечное число), то  $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = b$  называют конечным пределом. Если  $**$  =  $\infty$ ;  $+\infty$ ;  $-\infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow *} f(x)$  называют бесконечным.

**Теорема 5.1** (о связи двустороннего предела с односторонними).

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b \text{ и } \exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b.$$

*Доказательство.* Докажем необходимость. Распишем определение двустороннего предела по Коши.

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b &\implies \\ &\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta \implies \\ &\implies |f(x) - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Рассмотрим неравенство  $0 < |x - a| < \delta$ .

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta &\iff x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \implies \\ &\implies \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} : a < x < a + \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon, \\ \forall x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a \implies |f(x) - b| < \varepsilon. \end{cases} \implies \\ &\implies \begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b, \\ \exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b. \end{cases} \end{aligned}$$

Докажем достаточность. Распишем определения односторонних пределов по Коши.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b &\iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : a < x < a + \delta_1 \implies \\ &\implies |f(x) - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b &\iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : a - \delta_2 < x < a \implies \\ &\implies |f(x) - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Пусть  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ . Тогда  $\mathring{U}_\delta(a) \subset (\mathring{U}_{\delta_1}(a) \cap \mathring{U}_{\delta_2}(a)) \implies$

$$\implies (\forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon) \implies \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

□

*Замечание (1).*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \iff \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty.$$

Замечание (2).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b(\infty), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b(\infty).$$

**Определение 5.2** (Определение предела по Гейне). Пусть  $f(x)$  определена в некоторой  $\mathring{U}(*)$ .

$$\lim_{x \rightarrow *} f(x) = ** \iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathring{U}(*) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = * \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = **,$$

где  $x_n \neq * \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 5.2** (об эквивалентности определений предела по Коши и Гейне). Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.

**Пример 5.3.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  не определен.

**Пример 5.4.**

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi n = 0.$$

$$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{2} + 2\pi n = 1.$$

$0 \neq 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  не существует.

**Теорема 5.3** (о единственности предела функции). Если существует  $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = b \in \mathbb{R}$ , то этот предел единственный (при  $x \rightarrow *$ ).

*Доказательство.* Воспользуемся определением предела по Гейне.

$$\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b \in \mathbb{R} \implies \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \neq *, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = * \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b.$$

Числовая последовательность  $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится, следовательно, имеет единственный предел  $b$  (по теореме о единственности предела последовательности).  $\square$

**Определение 5.3.** Функция  $f(x)$  называется локально ограниченной при  $x \rightarrow *$  (в точке  $*$  или в окрестности  $*$ ), если существуют такие  $\mathring{U}(*)$  и  $M > 0$ , что  $f(x)$  определена в  $\mathring{U}(*)$  и  $\forall x \in \mathring{U}(*) : |f(x)| \leq M$ .

Замечание: Если функция  $f$  локально ограничена при  $x \rightarrow *$ , то в точке  $*$  такая функция может быть как определена, так и не определена.

**Теорема 5.4** (о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел). Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b \in \mathbb{R}$ . Тогда  $f(x)$  локально ограничена при  $x \rightarrow *$ .

*Доказательство.* По определению предела функции по Коши,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b &\iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies |f(x) - b| < \varepsilon \implies \\ &\implies \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |f(x)| = |f(x) - b + b| \leq |f(x) - b| + |b| < \varepsilon + |b| = M. \end{aligned}$$

Выберем любой  $\varepsilon > 0$ , например,  $\varepsilon = 1$ . Для соответствующей ему  $\delta > 0$  будет верно, что  $\forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |f(x)| < 1 + |b| = M$ , а значит,  $f(x)$  локально ограничена при  $x \rightarrow *$ .  $\square$

## 5.2 Бесконечно малые функции

**Определение 5.4.** Функцию  $\alpha(x)$  называют бесконечно малой (б.м.) при  $x \rightarrow *$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \rightarrow *} \alpha(x) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Пример: Рассмотрим функцию  $y = 2^{\frac{1}{x}}$ . Если  $x \rightarrow 0 + 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = [2^{+\infty}] = +\infty.$$

Если же  $x \rightarrow 0 - 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = [2^{-\infty}] = 0 \implies f(x) \text{ бесконечно малая при } x \rightarrow 0 - 0.$$

**Теорема 5.5** (о связи функции, ее предела и бесконечно малой).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b &\iff \\ &\iff f(x) = b + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \text{ — бесконечно малая при } x \rightarrow *. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Докажем необходимость.

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b &\iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |f(x) - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Положим  $\alpha(x) = f(x) - b$ , тогда  $\forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |\alpha(x)| < \varepsilon \implies \implies \lim_{x \rightarrow *} \alpha(x) = 0 \implies \alpha(x) \text{ — бесконечно малая при } x \rightarrow * \implies \implies f(x) = b + \alpha(x) \text{ при } x \rightarrow *.$

Докажем достаточность. Пусть  $f(x) = b + \alpha(x)$ ,  $\alpha(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow *$   $\implies$ , тогда  $\alpha(x) = f(x) - b \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow *$ . По определению бесконечно малой,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow *} \alpha(x) = 0 &\iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon \implies \\ &\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies |f(x) - b| < \varepsilon \implies \\ &\implies \exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b. \end{aligned}$$

□

### 5.3 Свойства бесконечно малых функций

**Теорема 5.6.** Пусть  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  — бесконечно малые при  $x \rightarrow *$ . Тогда  $\alpha(x) + \beta(x)$  — бесконечно малые при  $x \rightarrow *$ .

*Доказательство.*  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  бесконечно малые при  $x \rightarrow *$

$$\lim_{x \rightarrow *} \alpha(x) \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_1}(*) \implies |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow *} \beta(x) \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(*) \implies |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , если  $*$  :  $a; a + 0; a - 0$  и  $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ , если  $*$  :  $\infty; +\infty, -\infty$ .

$$\begin{aligned} \implies \mathring{U}_\delta(*) &= \mathring{U}_{\delta_1}(*) \cap \mathring{U}_{\delta_2}(*) \implies . \\ &\implies \forall. \end{aligned}$$

□

**Следствие 5.6.1.** Сумма конечного числа бесконечно малой при  $x \rightarrow *$  есть бесконечно малая при  $x \rightarrow *$ .

**Теорема 5.7** (произведение бесконечно малой на ограниченную). Пусть  $\alpha$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow *$ ,  $f(x)$  локально ограничена при  $x \rightarrow *$ . Тогда  $\alpha(x) \cdot f(x)$  есть бесконечно малая при  $x \rightarrow *$ .

*Доказательство.*  $f(x)$  — локально ограничена при  $x \rightarrow *$   $\implies \exists \mathring{U}_{\delta_1}(*) \quad \exists M > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_1}(*) : |f(x)| < M$ ;  $\alpha(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow *$   $\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(*) \implies |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \implies \implies \mathring{U}_\delta = \mathring{U}_{\delta_1}(*) \cap \mathring{U}_{\delta_2}(*)$

□



$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = .$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \arctan \frac{1}{x^{100}} = 0.$$

**Теорема 5.8** (о произведении двух бесконечно малых). Пусть  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  — бесконечно малые при  $x \rightarrow *$ . Тогда  $\alpha(x)\beta(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow *$

*Доказательство.*  $\beta(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow *$   $\implies \lim_{x \rightarrow *} \beta(x) = 0 \implies$  по теореме о локальной ограниченной функции, имеющей конечный предел  $\implies \beta(x)$  локально ограничена при  $x \rightarrow *$   $\implies \alpha(x) \cdot \beta(x)$  — произведение бесконечно малой на локально ограниченную при  $x \rightarrow *$   $\implies$  по теореме 2  $\alpha \cdot \beta$  — бесконечно малые при.  $\square$

**Следствие 5.8.1.** Произведение конечного числа бесконечно малых при  $x \rightarrow *$  есть бесконечно малая при  $x \rightarrow *$ .

## 5.4 Арифметические операции с функциями, имеющими пределы

**Теорема 5.9.** Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = A \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow *} g(x) = B \in \mathbb{R}$  Тогда

1.  $\exists \lim_{x \rightarrow *} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2.  $\exists \lim_{x \rightarrow *} (f(x)g(x)) = AB$
3.  $B \neq 0 \implies \exists \lim_{x \rightarrow *} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

*Доказательство.*  $\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = A; \exists \lim_{x \rightarrow *} g(x) = B \implies$  по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой  $\implies f(x) = A + \alpha(x), g(x) = B + \beta(x)$ , где  $\alpha(x), \beta(x)$  — бесконечно малые при  $x \rightarrow *$ .

1.  $f(x) \pm g(x) = (A + \alpha(x)) \pm (B + \beta(x)) = A \pm B + \alpha(x) \pm \beta(x) = A \pm B + \gamma(x)$ , где  $\gamma(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow *$   $\implies$
2.  $f(x) \cdot g(x) = (A + \alpha(x))(B + \beta(x)) = AB + B\alpha(x) + A\beta(x) + \alpha(x)\beta(x) = AB + \gamma(x) \implies$  по теореме о связи предела функции, ее предела и бесконечно малой  $\implies \lim_{x \rightarrow *} f(x)g(x) = AB$

$$3. \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} = \frac{A}{B} + \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - AB$$

$$\gamma(x) = \frac{AB + B\alpha(x) - AB - A\beta(x)}{B(B + \beta(x))} = \frac{B\alpha(x) - A\beta(x)}{B} \cdot \frac{1}{B + \beta(x)}.$$

$\frac{B\alpha(x) - A\beta(x)}{B}$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow *$  по свойствам бесконечно малых.

Докажем, что  $\phi(x) = \frac{1}{B+\beta(x)}$  локально ограничена при  $x \rightarrow *$ .  
 $\beta(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow *$   $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies |\beta(x)| < \varepsilon$ . Выберем  $\varepsilon = \frac{|B|}{2} > 0$ , найдем соответствующее  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \implies \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |\beta(x)| < \frac{|B|}{2}$

$$\implies |B + \beta(x)| \geq |B| - |\beta(x)| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2} \implies .$$

$$\implies \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |B + \beta(x)| > \frac{|B|}{2} > 0 \implies .$$

$$\frac{1}{B + \beta(x) < \frac{2}{|B|}} \implies .$$

$\implies \phi(x) = \frac{1}{B+\beta(x)}$  локально ограничена при  $x \rightarrow *$   $\gamma(x)$  — произведение бесконечно малой на локально ограниченную при  $x \rightarrow *$   $\implies$  по свойству бесконечно малой является бесконечно малой при  $x \rightarrow *$ .

□

**Теорема 5.10** (о знаковостоянстве функции, имеющей ненулевой предел). Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b \neq 0$ . Тогда  $\exists \mathring{U}_\delta(*) \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |f(x)| > \frac{|b|}{2}$ . Кроме того, если  $b > 0$ , то  $\forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : f(x) > \frac{b}{2} \implies f(x) > 0$ , т.е. имеет тот же знак, что и предел; если  $b < 0$ , то  $\forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : f(x) < \frac{b}{2} \implies f(x) < 0$ , т.е. имеет тот же знак, что и предел.

*Доказательство.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Или  $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ . Выберем  $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$ , найдем соответствующий  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \implies$

$$\forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |f(x)| = |b + f(x) - b| \geq |b| - |f(x) - b| > |b| - \frac{|b|}{2}.$$

$$\implies |f(x)| > \frac{|b|}{2}.$$

Пусть  $b > 0$ , тогда  $\varepsilon = \frac{|b|}{2} = \frac{b}{2} > 0 \implies \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \quad f(x) > b - \varepsilon = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} > 0$   $\square$

**Теорема 5.11** (о предельном переходе в неравенстве). *Если существуют два предела  $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = b_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow *} g(x) = b_2$  и проколота окрестность  $\mathring{U}(*)$ , такая, что для любого  $x$  из этой окрестности выполняется неравенство  $f(x) \leq g(x)$ , то  $b_1 \leq b_2$ .*

*Доказательство.* Пусть существуют  $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = b_1$  и  $\lim_{x \rightarrow *} g(x) = b_2$ . Т.к. пределы конечны, по теореме об арифметических операциях с функциями, имеющими пределы, для разности  $\phi(x) = g(x) - f(x)$  существует предел  $\lim_{x \rightarrow *} \phi(x) = b_2 - b_1$ .

Будем доказывать “от противного”. Предположим, что  $b_1 > b_2$ . Из этого следует, что  $b_2 - b_1 < 0$ , тогда по теореме о знаковостоянстве функции, имеющей ненулевой предел, существует такая проколота окрестность  $\mathring{U}_1(*)$ , что  $\forall x \in \mathring{U}_1(*) : \phi(x) = g(x) - f(x) < \frac{b_2 - b_1}{2} < 0$ . Таким образом,  $g(x) < f(x)$ , а тогда  $\forall x \in \mathring{U}(*) \cap \mathring{U}_1(*)$  выполняются сразу два неравенства:  $f(x) \leq g(x)$  и  $g(x) < f(x)$ , что является противоречием. Значит,  $b_1 \leq b_2$ .  $\square$

*Замечание.* Если существует  $\mathring{U}(*)$ , такая, что  $\forall x \in \mathring{U}(*)$  верно неравенство  $f(x) < g(x)$ , то для пределов  $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = b_1$  и  $\lim_{x \rightarrow *} g(x) = b_2$  выполняется  $b_1 \leq b_2$ .

**Теорема 5.12** (о пределе промежуточной функции или лемма о двух милиционерах). *Если слева и справа от правонарушителя находится по милиционеру, каждый из которых держит его и идет в отделение милиции, то правонарушитель тоже придет в отделение милиции. Или, говоря простым языком, если существует  $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = b$ ,  $\lim_{x \rightarrow *} g(x) = b$  и  $\mathring{U}(*)$ , такая, что  $\forall x \in \mathring{U}(*)$  выполняется неравенство  $f(x) \leq \phi(x) \leq g(x)$ , то существует  $\lim_{x \rightarrow *} \phi(x) = b$ .*

*Доказательство.* Пусть существуют  $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = b$  и  $\lim_{x \rightarrow *} g(x) = b$ . Распишем эти пределы по определению Коши:

$$\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b \iff$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_1}(*) \implies b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon,$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow *} g(x) = b \iff$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(*) \implies b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon.$$

Пусть  $\delta > 0$  таково, что  $\mathring{U}_\delta(*) \subset \mathring{U}(*) \cap \mathring{U}_{\delta_1}(*) \cap \mathring{U}_{\delta_2}(*)$ . Тогда  $\forall x \in \mathring{U}_\delta(*)$  выполняются неравенства  $f(x) \leq \phi(x) \leq g(x)$ ,  $b - \varepsilon < f(x)$  и  $g(x) < b + \varepsilon$ . Записав их вместе, получим, что

$$b - \varepsilon < f(x) \leq \phi(x) \leq g(x) < b + \varepsilon \implies \exists \lim_{x \rightarrow *} \phi(x) = b.$$

□

**Теорема 5.13** (о пределе сложной функции). *Если существуют пределы  $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = A$  и  $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$ , в некоторой окрестности  $\mathring{U}(*)$   $f(x) \neq A$ , и в этой окрестности определена сложная функция  $g(f(x))$ , то существует  $\lim_{x \rightarrow *} g(f(x)) = B$ .*

Обратим внимание на то, как осуществляется замена:

$$(y = f(x), x \rightarrow *, y \rightarrow A) \implies \lim_{y \rightarrow A} g(y) = B.$$

*Доказательство.* По определению предела по Гейне

$$\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = A \implies$$

$$\implies \forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathring{U}(*) : (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = * \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A), \quad (\Delta)$$

$$\exists \lim_{y \rightarrow A} g(y) = B \implies$$

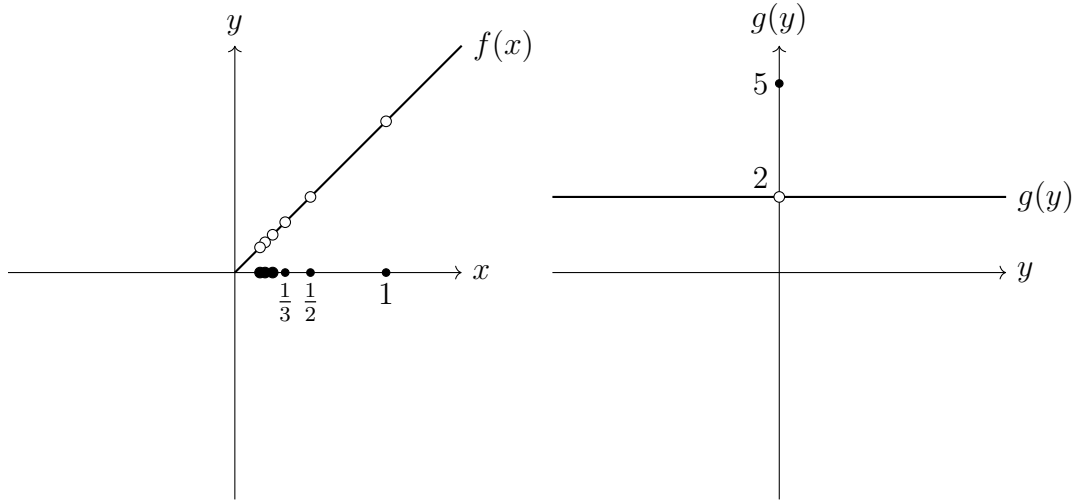
$$\implies \forall \{y_n\}_{n=1}^\infty, y_n \neq A : (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \implies \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = B). \quad (\Delta\Delta)$$

Выберем любую  $\{x_n\}_{n=1}^\infty : x_n \in \mathring{U}(*)$ , тогда по  $(\Delta)$  из того, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = *$ , следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ . Обозначим  $y_n = f(x_n)$ , по условию теоремы  $y_n \neq A$ , причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ . Тогда по  $(\Delta\Delta)$  существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = B$ . Следовательно, по определению предела по Гейне, существует  $\lim_{x \rightarrow *} g(f(x)) = B$ . □

*Замечание.* Условие  $f(x) \neq A$  в окрестности  $\mathring{U}(*)$  является существенным. Если это условие отсутствует, то теорема может не выполняться.

**Пример 5.5.**

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad g(y) = \begin{cases} 2, & y \neq 0, \\ 5, & y = 0. \end{cases}$$



$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .  $x = 0$  в любой точке  $x = \frac{1}{n}$ , следовательно, в любой  $\overset{\circ}{U}(0)$  есть точки, где  $f(x) = 0$ .

Рассмотрим последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow 0} g(0) = 5.$$

Рассмотрим последовательность  $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \{e^{-n}\}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = 0, \quad e \notin \mathbb{N} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(\tilde{x}_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(e^{-n}) = 2.$$

Подведем итог:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n, \\ \lim_{n \rightarrow 0} g(f(x_n)) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(\tilde{x}_n)). \end{cases} \implies \nexists \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)).$$

## 5.5 Бесконечно большие функции

**Определение 5.5.** Функция  $f(x)$  называется бесконечно большой (б.б.) при  $x \rightarrow *$  тогда и только тогда, когда  $f(x)$  определена в некоторой  $\overset{\circ}{U}(*)$  и ее предел при  $x \rightarrow *$  равен бесконечности, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(*) : |f(x)| > \varepsilon.$$

**Пример 5.6.** Рассмотрим функцию  $y = \frac{1}{x}$ .  $\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty$ , следовательно,  $y$  — бесконечно большая при  $x \rightarrow 0$ .

**Теорема 5.14** (о связи бесконечно большой с бесконечно малой).

1. Если  $f(x)$  — бесконечно большая при  $x \rightarrow *$ , то  $\frac{1}{f(x)}$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow *$ .
2. Если  $\alpha(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow *$  и существует такая проколота окрестность  $\mathring{U}(*)$ , что  $\forall x \in \mathring{U}(*) : \alpha(x) \neq 0$ , то  $\frac{1}{\alpha(x)}$  является бесконечно большой при  $x \rightarrow *$ .

*Доказательство.*

1.  $f(x)$  — бесконечно большая при  $x \rightarrow *$ , тогда для любого  $\varepsilon_1 > 0$  найдется  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , такая, что для любого  $x$  из  $\mathring{U}_\delta(*)$  выполняется неравенство  $|f(x)| > \varepsilon_1$ . Выберем любой  $\varepsilon > 0$ , найдем  $\varepsilon_1 = \frac{1}{\varepsilon}$  и  $\delta = \delta(\varepsilon_1) = \delta(\frac{1}{\varepsilon})$ . Тогда для любого  $x$  из  $\mathring{U}_\delta(*)$  выполняется неравенство  $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$ , или, что то же,  $\frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon$ . Положим  $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$ , тогда для любого  $x$  из  $\mathring{U}_\delta(*)$  верно, что  $|\alpha(x)| < \varepsilon$ , из чего следует, что предел  $\alpha(x)$  при  $x \rightarrow *$  равен нулю. Таким образом,  $\alpha(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow *$ .
2. Пусть  $\alpha(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow *$  и для любого  $x$  из  $\mathring{U}(*)$  верно, что  $\alpha(x) \neq 0$ . Предел  $\alpha(x)$  при  $x \rightarrow *$  равен нулю, т.е. для любого  $\varepsilon_1 > 0$  найдется  $\delta > 0$ , зависящая от  $\varepsilon$ , такая, что для любого  $x$  из  $\mathring{U}_\delta(*) \subset \mathring{U}(*)$  выполняется неравенство  $|\alpha(x)| < \varepsilon_1$ . Выберем любой  $\varepsilon > 0$ , найдем  $\varepsilon_1 = \frac{1}{\varepsilon} > 0$  и соответствующую  $\delta = \delta(\varepsilon_1) = \delta(\frac{1}{\varepsilon}) > 0$ .

□

*Замечание.* Рассмотрим функцию  $y = x \sin \frac{1}{x}$  при  $x \rightarrow 0$ .  $\sin \frac{1}{x}$  — ограниченная,  $x$  — бесконечно малая, следовательно,  $y = \alpha(x)$  — бесконечно малая.

Теперь рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{1}{x \sin x}$ . В любой  $\mathring{U}(0)$  есть хотя бы один  $x$ , следовательно,  $\alpha(x)$  равна нулю, а значит,  $f(x)$  не существует.

## 5.6 Первый замечательный предел

**Теорема 5.15.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**Утверждение 5.1.** Если  $f(x)$  — элементарная функция,  $a \in D(f)$  — область определения  $f$ , то существует предел  $f(x)$ , равный  $f(a)$  при  $x \rightarrow a$ .

**Следствие 5.15.1.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1 * 1 = 1.$$

**Следствие 5.15.2.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} &= \\ &= |\text{Замена } y = \arcsin x, x = \sin y, x \rightarrow 0 \implies y \rightarrow 0| = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\sin y}{y} \right)^{-1} = 1. \end{aligned}$$

**Следствие 5.15.3.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} &= \\ &= |\text{Замена } y = \operatorname{arctg} x, x = \operatorname{tg} y, x \rightarrow 0 \implies y \rightarrow 0| = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} y}{y} \right)^{-1} = 1. \end{aligned}$$

**Следствие 5.15.4.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2/2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2/2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{x/2} \right)^2 = 1.$$

## 5.7 Второй замечательный предел

**Теорема 5.16.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} + 1 \right)^x = [1^\infty] = e.$$

*Доказательство.* Докажем, что предел функции  $(1 + \frac{1}{x})^x$  при  $x \rightarrow +\infty$  равен  $e$ . ...

Теперь докажем, что предел функции  $(1 + \frac{1}{x})^x$  при  $x \rightarrow -\infty$  равен  $e$ . ...

По теореме о связи двустороннего предела с односторонним существует предел функции  $(1 + \frac{1}{x})^x$  при  $x \rightarrow \infty$ , равный  $e$ .  $\square$

**Следствие 5.16.1.**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= [1^\infty] = \\
&= |\text{Замена } x = \frac{1}{y}, \ x \rightarrow 0 \implies y \rightarrow \infty| = \\
&= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.
\end{aligned}$$

**Следствие 5.16.2.**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \\
&= \log_a e = \frac{1}{\ln a}.
\end{aligned}$$

**Следствие 5.16.3** (Частный случай следствия 2).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

**Следствие 5.16.4.**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \\
&= |\text{Замена } y = a^x - 1, \ x = \log_a(y+1), \ x \rightarrow 0 \implies y \rightarrow 0| = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(y+1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log_a(y+1)}{y}} = \\
&= \frac{1}{\log_a e} = \ln a.
\end{aligned}$$

**Следствие 5.16.5** (Частный случай следствия 4).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

**Следствие 5.16.6.**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} &= \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \right) \cdot \left( \frac{\alpha \ln(1+x)}{\alpha x} \right) = \\
&= 1.
\end{aligned}$$



*Замечание.*

$$\lim_{x \rightarrow *} (U(x))^{V(x)} = [1^\infty].$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow *} (U(x))^{V(x)} &= \lim_{x \rightarrow *} e^{\ln(U(x))^{V(x)}} = \lim_{x \rightarrow *} e^{V(x) \ln(U(x))} = \\ &= \lim_{x \rightarrow *} e^{V(x) \ln(1+U(x)-1)} = \lim_{x \rightarrow *} e^{\frac{V(x) \ln(1+U(x)-1)}{U(x)-1} \cdot (U(x)-1)} = \\ &= \begin{cases} e^{\lim_{x \rightarrow *} V(x)(U(x)-1)}, & \text{если } \lim_{x \rightarrow *} V(x)(U(x)-1) = A \in \mathbb{R}, \\ +\infty, & \text{если } \lim_{x \rightarrow *} V(x)(U(x)-1) = +\infty, \\ 0, & \text{если } \lim_{x \rightarrow *} V(x)(U(x)-1) = -\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

**Пример 5.7.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3} \right)^{x^2} = [1^\infty] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( \frac{x^2+1}{x^2+3} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2}{x^2+3}} = e^{-2}.$$

## 5.8 Сравнение бесконечно малых

**Определение 5.6.** Пусть  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  — бесконечно малые при  $x \rightarrow *$ .

1.

2.

3.  $\alpha(x)$  — бесконечно малая более высокого порядка малости по сравнению с  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow *$  тогда и только тогда, когда предел  $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$  при  $x \rightarrow *$  равен 0. Обозначается  $\alpha(x) = \bar{o}(\beta(x))$ ,  $x \rightarrow *$ .

## 5.9 Таблица эквивалентных бесконечно малых

1.  $\sin x \sim x$

2.  $\operatorname{tg} x \sim x$

3.  $\arcsin x \sim x$

4.  $\operatorname{arctg} x \sim x$

5.  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

6.  $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$

7.  $\ln(1+x) \sim x$

8.  $a^x - 1 \sim \ln a$
9.  $e^x - 1 \sim x$
10.  $(1 + x)^\alpha \sim \alpha x$

### 5.10 Свойства эквивалентных бесконечно малых

**Теорема 5.17.** Пусть  $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$  — бесконечно малые при  $x \rightarrow *$ , причем  $\forall k = 1, \dots, n : \alpha_k(x) = \bar{o}(\alpha_0(x))$ , т.е.  $\alpha_0(x)$  — бесконечно малая самого низкого порядка малости по сравнению с  $\alpha_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Тогда  $\alpha_0(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k(x) \sim \alpha_0(x)$  при  $x \rightarrow *$ .

*Доказательство.*

□

### 5.11 $O$ -символика

Правила работы с  $\bar{o}$

### 5.12 Сравнение бесконечно больших

### 5.13 Свойства эквивалентных бесконечно больших

## 6 Непрерывность

### 6.1 Непрерывность функции в точке

**Определение 6.1.** Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Функцию  $f(x)$  называют непрерывной в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда существует предел  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , равный  $f(x_0)$ .

Приведем формально-логическую запись этого определения в формулировке по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall x \in \mathbb{R} : (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

и в формулировке по Гейне:

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) : (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)).$$

### 6.2 Приращение аргумента в точке и приращение функции

**Определение 6.2.** Пусть  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , т.е. в некотором интервале  $(a; b)$ , содержащем  $x_0$ . Выберем любую  $\Delta x \in \mathbb{R} : x_0 + \Delta x \in (a; b)$ . Таким образом,  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  — функция, зависящая от  $\Delta x$ .

$\Delta x$  — приращение аргумента в точке  $x_0$ .  $\Delta y$  — приращение функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , отвечающее приращению аргумента  $\Delta x$ .

**Теорема 6.1.** Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 &\iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff \\ &\iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\text{Замена } \Delta x = x - x_0, \ x = x_0 + \Delta x, \ x \rightarrow x_0, \ \Delta x \rightarrow 0| &\iff \\ \iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0 &\iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \end{aligned}$$

□

### 6.3 Точки разрыва

**Определение 6.3.** Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой проколотой окрестности точки  $a$  и в точке  $a$   $f(x)$  не является непрерывной. Тогда точку  $a$  называют точкой разрыва. В самой точке функция  $f(x)$  может быть как определена, так и не определена.

### 6.4 Классификация точек разрыва

**Определение 6.4.**  $a$  — точка устранимого разрыва тогда и только тогда, когда существует предел  $f(x)$ , равный  $b$  при  $x \rightarrow a$ , а  $f(x)$  либо не определена в точке  $a$ , либо  $f(a) \neq b$ .

**Пример 6.1.**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) = 2.$$

**Определение 6.5.**  $a$  — точка неустранимого разрыва I рода тогда и только тогда, когда существует предел  $f(x)$ , равный  $A \in \mathbb{R}$  при  $x \rightarrow a - 0$ , и существует предел  $f(x)$ , равный  $B \in \mathbb{R}$  при  $x \rightarrow a + 0$ , причем  $A \neq B$ .

$h : B - A$  — скачок функции в точке  $a$ ,  $h \neq 0$  — неустранимый разрыв I рода. Точку устранимого разрыва иногда называют точкой разрыва I рода с нулевым скачком.

**Пример 6.2.**

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad a = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow a-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,  $a$  — точка неустранимого разрыва I рода.

**Определение 6.6.**  $a$  — точка неустранимого разрыва II рода тогда и только тогда, когда хотя бы один из односторонних пределов функции  $f(x)$  равен бесконечности, либо предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$  не существует

**Пример 6.3.**

$$y = 2^{\frac{1}{x}}, \quad a = 0,$$
$$\lim_{x \rightarrow a+0} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Следовательно,  $a$  — точка неустранимого разрыва II рода.

**Пример 6.4.**

$$y = \sin \frac{1}{x}, \quad a = 0. \quad \lim_{x \rightarrow a} \sin \frac{1}{x} \text{ не существует.}$$

## 6.5 Односторонняя непрерывность

Не будем забывать, что если функция определена в окрестности точки, то она определена и в самой точке тоже.

**Определение 6.7.** Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности  $U(a+0)$ . Если предел  $f(x)$  при  $x \rightarrow a+0$  равен  $f(a)$ , то говорят, что  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$  справа. Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$  справа тогда и только тогда, когда  $f(a) = f(a+0)$ .

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a).$$

Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности  $U(a-0)$ . Если предел  $f(x)$  при  $x \rightarrow a-0$  равен  $f(a)$ , то говорят, что  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$  слева. Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$  слева тогда и только тогда, когда  $f(a) = f(a-0)$ .

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a).$$

**Пример 6.5.**  $y = [x]$ ,  $x = 0$  — левосторонний разрыв I рода.

## 6.6 Свойства функций, непрерывных в точке

**Теорема 6.2.** Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$  тогда и только тогда, когда  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$  и слева, и справа.

*Доказательство.*  $f(x)$  непрерывна в точке  $a \iff$  предел  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$  равен  $f(a) \iff$  по теореме о связи двустороннего предела с односторонними существуют  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$  и  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a) \iff f$  непрерывна в  $a$  и слева, и справа.  $\square$

**Теорема 6.3** (о знакопостоянстве непрерывной функции). Пусть функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$  и  $f(a) > 0$  ( $f(a) < 0$ ). Тогда существует такая окрестность точки  $a$ , что для любого  $x$  из этой окрестности  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ ).

*Доказательство.*  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ , следовательно, предел  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$  равен  $f(a)$ . Тогда по теореме о знакопостоянстве функции, имеющей ненулевой предел, найдется такая окрестность точки  $a$ , что для любого  $x$  из этой окрестности  $f(x) > 0$ .  $\square$

**Теорема 6.4** (локальная ограниченность). *Если  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ , то  $f(x)$  локально ограничена при  $x \rightarrow a$ .*