Лекции по математическому анализу для 1 курса ФН2, 3

Власова Елена Александровна

2024-2025 год.

Contents

Элементарные функции и их пределы

1 Введение

1.1 Элементы теории множеств

1.2 Кванторные операции

1.3 Метод математической индукции

2 Множество действительных чисел

2.1 Аксиоматика действительных чисел

Определение 1. *Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных чисел, если элементы этого множества удовлетворяют следующему комплексу условий:*

1. *На множестве $\mathbb{R}$ определена операция сложения "+", то есть задано отображение, которое каждой упорядоченной паре $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ставит в соответствие элемент из $\mathbb{R}$, называемый суммой $x + y$ и удовлетворяющий следующим аксиомам:*

   (a) $\exists 0 \in \mathbb{R}$, *такой, что* $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$

   (b) $\forall x \exists$ *противоположный элемент* "$-x$ ", *такой, что* $x+(-x) = (-x) + x = 0$

   (c) *Ассоциативность*

   (d) *Коммутативность*

2.2 Геометрическая интерпретация $\mathbb{R}$

2.3 Числовые промежутки

2.4 Бесконечные числовые промежутки

2.5 Окрестности точки

2.6 Принцип вложенных отрезков (Коши-Кантора)

2.7 Ограниченные и неограниченные числовые множества

2.8 Точные грани числового множества

2.9 Принцип Архимеда

3 Функции или отображения

3.1 Понятие функции

3.2 Ограниченные и неограниченные числовые множества

3.3 Обратные функции

3.4 Чётные и нечётные функции

3.5 Периодические функции

3.6 Сложная функция (композиция)

3.7 Основные элементарные функции

4 Числовые последовательности и их пределы

Определение 2. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ - *числовая последовательность, т.е.* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \mathbb{R}$.

4.1 Ограниченные и неограниченные числовые последовательности

Определение 3. *Числовая последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется*

1) ограниченной сверху, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \ x_n \leq M;$

2) ограниченной снизу, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \ x_n \geq M;$

3) ограниченной, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M;$

4) неограниченной, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| > M;$

4.2 Предел числовой последовательности

Определение 4. *Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности, если $\forall \varepsilon > 0$ существует такой номер n, зависящий от ε, что $\forall$ натурального числа $N > n$ верно неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

4.3 Бесконечные пределы

4.4 Свойства сходящихся последовательностей

4.5 Монотонные числовые последовательности

4.6 Число e

4.7 Гиперболические функции

4.8 Предельные точки числового множества

4.9 Предельные точки числовых последовательностей