

Лекции по математическому анализу для 1
курса ФН2, 3

Власова Елена Александровна

2024-2025 год.

Содержание

1	Введение	4
1.1	Элементы теории множеств	4
1.2	Кванторные операции	5
1.3	Метод математической индукции	5
2	Множество действительных чисел	6
2.1	Аксиоматика действительных чисел	6
2.2	Интерпретации \mathbb{R}	7
2.3	Числовые промежутки	8
2.4	Бесконечные числовые промежутки (лучи)	8
2.5	Окрестности точки	8
2.6	Принцип вложенных отрезков (Коши-Кантора)	9
2.7	Ограниченные и неограниченные числовые множества	10
2.8	Точные грани числового множества	10
2.9	Принцип Архимеда	10
3	Функции или отображения	11
3.1	Понятие функции	11
3.2	Ограниченные и неограниченные числовые множества	11
3.3	Обратные функции	11
3.4	Чётные и нечётные функции	11
3.5	Периодические функции	11
3.6	Сложная функция (композиция)	11
3.7	Основные элементарные функции	11
4	Числовые последовательности и их пределы	12
4.1	Ограниченные и неограниченные числовые последовательности	12
4.2	Предел числовой последовательности	12
4.3	Бесконечные пределы	13
4.4	Свойства сходящихся последовательностей	13
4.5	Монотонные числовые последовательности	14
4.6	Число e	16
4.7	Гиперболические функции	17
4.8	Предельные точки числового множества	17
4.9	Предельные точки числовых последовательностей	20
4.10	Фундаментальные последовательности	22

5	Пределы функций	26
5.1	Определение предела по Коши	26
5.2	Бесконечно малые функции	31
5.3	Свойства бесконечно малых функций	32
5.4	Арифметические операции с функциями, имеющими пре- делы	33
5.5	Бесконечно большие функции	37
5.6	Первый замечательный предел	38
5.7	Второй замечательный предел	39

Элементарные функции и их пределы

1 Введение

1.1 Элементы теории множеств

“Множество есть многое, мыслимое как единое.”

(Г. Кантор)

Множество — то же, что и класс, семейство, совокупность, набор; может состоять из любых различных объектов; однозначно определяется набором составляющих его объектов.

Важные обозначения:

- A, B, C — множества;
- $a \in A$ — элемент a принадлежит множеству A ;
- $a \notin A$ — элемент a не принадлежит множеству A ;
- $A \subset B$ — A является подмножеством множества B , т.е. любой элемент множества A будет являться элементом множества B ;
- \emptyset — пустое множество или множество, не содержащее элементов;
- Если x — объект, P — свойство, $P(x)$ — обозначение того, что x обладает свойством P , то через $\{x : P(x)\}$ или $\{x \mid P(x)\}$ обозначают все множество объектов, обладающих свойством P .

Пять основных операций над множествами:

1. $A \cup B = C \iff C = \{c \in C : c \in A \text{ или } c \in B\}$;
2. $A \cap B = C \iff C = \{c \in C : c \in A \text{ и } c \in B\}$;
3. $A \setminus B = C \iff C = \{c \in C : c \in A \text{ и } c \notin B\}$;
4. $\bar{A} = X \setminus A$. Говорят, что \bar{A} — дополнение A до X ;
5. Декартово произведение множеств.

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\},$$

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_k \in X_k, k \in 1, \dots, n\}.$$

1.2 Кванторные операции

Высказывание, содержащее переменную, называется предикатом и обозначается $P(x)$. Отрицание $P(x)$ обозначается $\overline{P}(x)$.

- \forall — квантор общности. $\forall x \in X : P(x)$ — “для любого элемента x из множества X выполняется высказывание $P(x)$ ”.
- \exists — квантор существования. $\exists x \in X : P(x)$ — “существует элемент x из множества X , для которого выполняется высказывание $P(x)$ ”.
- $\exists!$ — квантор существования и единственности. $\exists! x \in X : P(x)$ — “существует единственный элемент x из множества X , для которого выполняется высказывание $P(x)$ ”. Например, $\exists! x \in \mathbb{R} : \log_2 x = 1$.

Следующая выкладка иллюстрирует правило построения отрицаний высказываний, содержащих кванторы.

$$Q = \forall x \in X : P(x), \quad \overline{Q} = \exists x \in X : \overline{P}(x),$$

$$R = \exists x \in X : P(x), \quad \overline{R} = \forall x \in X : \overline{P}(x),$$

1.3 Метод математической индукции

Пусть $A(n)$ — некоторое высказывание. Докажем, что $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$.

1. Проверяем истинность $A(n)$ при $n = 1$ (или $n = n_1$, где n_1 — число, с которого целесообразно начать).
2. Полагаем, что $A(n)$ верно для некоторого $n \in \mathbb{N}$.
3. Доказываем, что $A(n+1)$ верно, используя 2). $A(1) \implies A(2) \implies \dots \implies A(n) \implies A(n+1)$

Пример 1.1. Докажем по индукции неравенство Бернулли:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1+nx, x > 0.$$

1. Проверим верность для $n = 1$. Неравенство $1+x \geq 1+x$ верно.
2. Пусть $(1+x)^n \geq 1+nx$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.
3. Используя верность для n , докажем верность для $n+1$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = \\ &= 1+nx+x+nx^2 \geq 1+nx+1 \implies (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x. \end{aligned}$$

2 Множество действительных чисел

2.1 Аксиоматика действительных чисел

Определение 2.1. Множество \mathbb{R} называется множеством действительных чисел, если элементы этого множества удовлетворяют следующему комплексу условий:

(I) Аксиомы сложения

На \mathbb{R} определена операция сложения “+”, то есть задано отображение, которое каждой упорядоченной паре $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ставит в соответствие элемент из \mathbb{R} , называемый суммой $x + y$ и удовлетворяющий следующим аксиомам:

1. $\exists 0 \in \mathbb{R}$, такой, что $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$;
2. $\forall x \exists$ противоположный элемент $-x$, такой, что $x + (-x) = (-x) + x = 0$;
3. Ассоциативность. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$;
4. Коммутативность. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$.

(II) Аксиомы умножения

На \mathbb{R} определена операция умножения “ \cdot ”, то есть $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ставится в соответствие элемент $(x \cdot y) \in \mathbb{R}$.

1. \exists нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R}$, такой, что $\forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$;
2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists$ обратный элемент “ x^{-1} ”, такой, что $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$;
3. Ассоциативность. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
4. Коммутативность. $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \cdot y = y \cdot x$.

(I, II) Связь операций сложения и умножения

Операция умножения дистрибутивна по отношению к операции сложения.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y)z = xz + yz$$

(III) Аксиомы порядка

Для \mathbb{R} определено отношение " \leq ".

1. $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$;
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y \wedge y \leq x) \implies x = y$;
3. Транзитивность. Если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$;
4. $\forall x, y \in \mathbb{R} (x \leq y) \text{ и } (y \leq x)$.

(I, III) Связь сложения с неравенством

Если $x \leq y$, то $\forall z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z$.

(II, III) Связь умножения с неравенством

Если $0 \leq x$ и $0 \leq y$, то $0 \leq x \cdot y$.

(IV) Аксиома полноты \mathbb{R}

Для любых ненулевых подмножеств X и Y множества \mathbb{R} , таких, что $\forall x \in X, \forall y \in Y : x \leq y$, существует $c \in \mathbb{R}$, такое, что $(\forall x \in X \text{ и } \forall y \in Y) : x \leq c \leq y$.

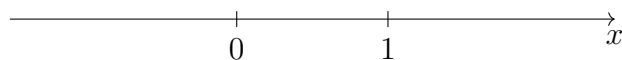
2.2 Интерпретации \mathbb{R}

Геометрическая

Между прямой и \mathbb{R} существует взаимно-однозначное соответствие, т.е. отображение из \mathbb{R} на прямую биективно. Для задания этого отображения определяется

1. начальное положение, которому соответствует $0 \in \mathbb{R}$,
2. положительное направление,
3. масштаб, то есть положение $1 \in \mathbb{R}$.

Ox — числовая прямая. Каждое действительное число можно найти на числовой оси и для каждой точки числовой оси существует действительное число.



Десятичная форма записи чисел из \mathbb{R}

$$a \in \mathbb{R} \iff a = a_0, a_1, \dots, a_n : a_0 \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

Если $a \in \mathbb{Q}$, то в десятичной форме записи $a = a_0, a_1, \dots, a_n$ представляется конечной или бесконечной периодической дробью.

2.3 Числовые промежутки

Возьмем числа $a, b \in \mathbb{R}$, такие, что $a < b$.

- $(a; b) = \{c \in \mathbb{R} : a < c < b\}$ — интервал;
- $[a; b] = \{c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b\}$ — отрезок;
- $(a; b] = \{c \in \mathbb{R} : a < c \leq b\}$ — полуинтервал;
- $[a; b) = \{c \in \mathbb{R} : a \leq c < b\}$ — полуинтервал.

2.4 Бесконечные числовые промежутки (лучи)

Возьмем $a \in \mathbb{R}$.

- $(a; +\infty) = \{c \in \mathbb{R} : c > a\}$ — открытый луч;
- $[a; +\infty) = \{c \in \mathbb{R} : c \geq a\}$ — замкнутый луч;
- $(-\infty; a) = \{c \in \mathbb{R} : c < a\}$ — открытый луч;
- $(-\infty; a] = \{c \in \mathbb{R} : c \leq a\}$ — замкнутый луч.

2.5 Окрестности точки

Пусть ε — некоторое положительное число.

Определение 2.2. Окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется любой интервал, содержащий точку a и обозначается $U(a)$.

Определение 2.3. ε -окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется интервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ и обозначается $U_\varepsilon(a)$.

$$c \in U_\varepsilon(a) \iff |a - c| < \varepsilon.$$

Определение 2.4. Проколотой ε -окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество $(a - \varepsilon; a) \cup (a; a + \varepsilon) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ и обозначается $\mathring{U}_\varepsilon(a)$.

Определение 2.5. Окрестностью бесконечности называют любое множество вида $(-\infty; a) \cup (b; +\infty)$.

Определение 2.6. ε -окрестностью бесконечности называют множество $(-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty)$.

Замечание. $U_\varepsilon(\infty) = \overset{\circ}{U}_\varepsilon(\infty)$.

2.6 Принцип вложенных отрезков (Коши-Кантора)

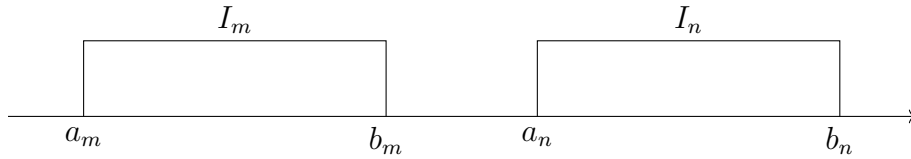
Определение 2.7. Пусть $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность некоторых множеств. Если $\forall n \in \mathbb{N} : X_n \supset X_{n+1}$, то эта последовательность называется последовательностью вложенных отрезков.

Теорема 2.1 (принцип Коши-Кантора). Во всякой последовательности $\{I_n\}_{n=1}^\infty$, $I_n = [a_n, b_n]$ вложенных отрезков найдется точка $c \in \mathbb{R}$, принадлежащая всем этим отрезкам. Или, что то же,

$$\forall \{I_n\}_{n=1}^\infty, I_n = [a_n, b_n] \quad \exists c \in \mathbb{R} : (\forall n \in \mathbb{N} : c \in I_n).$$

Если, кроме того, известно, что для любого $\varepsilon > 0$ в последовательности можно найти отрезок I_k , длина которого $|I_k| < \varepsilon$, то c — единственная общая точка всех отрезков.

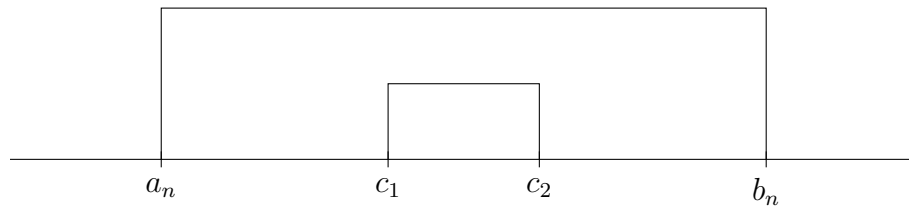
Доказательство. Заметим сначала, что для любых двух отрезков $I_m = [a_m; b_m]$, $I_n = [a_n, b_n]$ нашей последовательности имеет место $a_m \leq b_n$, т.е. $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$. Докажем “от противного”. Предположим, что $\exists n, m \in \mathbb{N} : a_n > b_m$



$a_m < b_m < a_n < b_n \implies I_n \cap I_m = \emptyset$, что противоречит условию $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$.

Пусть $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_m, m \in \mathbb{N}\}$, $A, B \neq \emptyset$, $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$. По аксиоме полноты IV $\forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$ существует $c \in \mathbb{R} : \forall n, m \in \mathbb{N} : a_n \leq c \leq b_m$. Следовательно, $c \in [a_n; b_n] = I_n$, т.е. c — общая точка всех отрезков.

Пусть $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |I_n| = b_n - a_n < \varepsilon$. Докажем “от противного”. Предположим, что общая точка не является единственной, то есть существуют $c_1, c_2, c_1 \neq c_2$, такие, что $c_1 \in I_n$ и $c_2 \in I_n$. Пусть для определенности $c_1 < c_2$.



Выберем $\varepsilon = \frac{c_2 - c_1}{2}$. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n$, следовательно, $b_n - a_n \geq c_2 - c_1$. По условию $\exists n \in \mathbb{N} : |I_n| = b_n - a_n < \varepsilon = \frac{c_2 - c_1}{2}$, но $c_2 - c_1 \leq b_n - a_n < \frac{c_2 - c_1}{2}$ — противоречие, следовательно, $c_1 = c_2$. Единственность доказана. \square

2.7 Ограниченные и неограниченные числовые множества

2.8 Точные грани числового множества

2.9 Принцип Архимеда

3 Функции или отображения

3.1 Понятие функции

3.2 Ограниченные и неограниченные числовые множества

3.3 Обратные функции

3.4 Чётные и нечётные функции

3.5 Периодические функции

3.6 Сложная функция (композиция)

3.7 Основные элементарные функции

4 Числовые последовательности и их пределы

Определение 4.1. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ — числовая последовательность, т.е. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \mathbb{R}$.

4.1 Ограниченные и неограниченные числовые последовательности

Определение 4.2. Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется

1. ограниченной сверху, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M$;
2. ограниченной снизу, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq M$;
3. ограниченной, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M$;
4. неограниченной, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| > M$;

4.2 Предел числовой последовательности

Определение 4.3. Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности, если $\forall \varepsilon > 0$ существует такой номер n , зависящий от ε , что \forall натурального числа $N > n$ верно неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Пример:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \implies n > \frac{1}{\varepsilon}$. Возьмем $N(\varepsilon) = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$. Тогда $\forall n > \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil : \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Определение 4.4. Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел a , то эта последовательность называется сходящейся, в противном случае — расходящейся.

Определение 4.5. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, то последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесконечно малой (б.м.).

4.3 Бесконечные пределы

4.4 Свойства сходящихся последовательностей

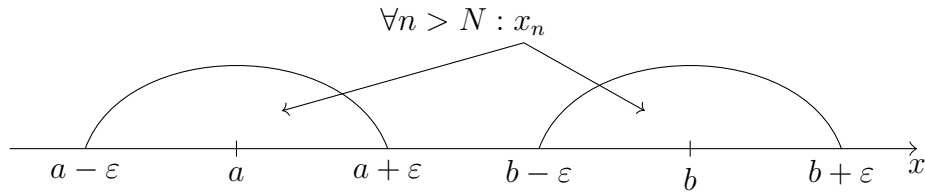
Теорема 4.1 (о единственности предела). *Любая сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Доказательство. “От противного”. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — сходящаяся последовательность. Предположим, что $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, причем $a \neq b$. Пусть для определенности $a < b$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 : |x_n - b| < \varepsilon.$$

$$N = \max\{N_1, N_2\} \implies \forall n > N : \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon, \\ |x_n - b| < \varepsilon. \end{cases}$$



Выберем $\varepsilon = \frac{b-a}{4} > 0$. Найдем $N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда

$$\forall n > N \quad |x_n - a| < \frac{b-a}{4}, \quad |x_n - b| < \frac{b-a}{4}.$$

Следовательно,

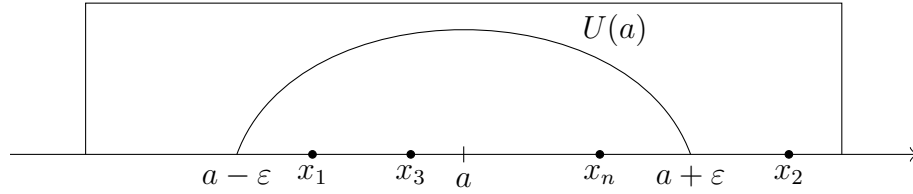
$$0 < b - a = |b - a| = |b - x_n + x_n - a| \leq |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{b-a}{2},$$

то есть

$$0 < b - a < \frac{b-a}{2}.$$

Мы пришли к противоречию, следовательно, $a = b \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет единственный предел. \square

Теорема 4.2 (об ограниченности сходящейся последовательности). *Любая сходящаяся последовательность является ограниченной.*



Доказательство. Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} = a \in \mathbb{R} \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = 1 \implies \exists N = N(1) \quad \forall n > N : |x_n - a| < 1$. Следовательно,

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Пусть $M_0 = 1 + |a| \implies \forall n > N : x_n < M_0$.

Пусть $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, M_0\}$, тогда $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной. \square

Замечание. Ограниченность является необходимым условием сходимости числовой последовательности. В то же время условие ограниченности не является достаточным для сходимости числовой последовательности. Например, $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная, но не сходящаяся числовая последовательность.

Теорема 4.3 (об арифметических операциях со сходящимися последовательностями). Пусть $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b;$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = ab;$$

если $y_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, b \neq 0$, то

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

4.5 Монотонные числовые последовательности

Определение 4.6. Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется

1. возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}$;
2. убывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1}$;

3. неубывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}$;

4. невозрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n+1}$

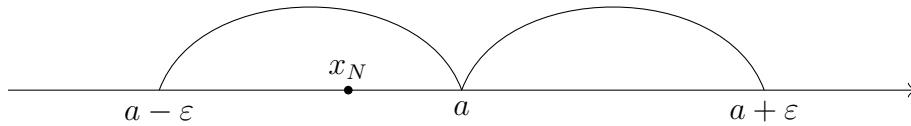
Для монотонных числовых последовательностей ограниченность является достаточным условием для сходимости.

Теорема 4.4 (Вейерштрасса о сходимости монотонных числовых последовательностей). *Если последовательность не убывает и ограничена сверху, то она является сходящейся. Если последовательность не возрастает и ограничена снизу, то она является сходящейся. В общем, любая монотонная последовательность сходится.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает и ограничена сверху \Rightarrow
 $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M \Rightarrow$
 \Rightarrow множество значений этой последовательности
 $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = A$ является ограниченным
сверху числовым множеством \Rightarrow
 $\Rightarrow \exists \sup A \in \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = a$, то есть

1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq a$;

2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : x_N > a - \varepsilon$.



$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность, то есть

$$\begin{aligned} \forall n > N = N(\varepsilon) : x_n &\geq x_N \Rightarrow \\ \Rightarrow a - \varepsilon < x_N \leq x_n &\leq a < a + \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon &\Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon &\Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R} \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} &\text{сходится.} \end{aligned}$$

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — невозрастающая и ограниченная снизу последовательность, то

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf A, A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

Доказательство аналогично. □

4.6 Число e

Теорема 4.5. Числовая последовательность $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n=1}^\infty$ является сходящейся, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$.

Доказательство. $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n, n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность $\{y_n\}_{n=1}^\infty, y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. Докажем, что $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ ограничена снизу. Т.к. $\forall n \in \mathbb{N} : (1 + \frac{1}{n})^{n+1} > 0 \implies \{y_n\}_{n=1}^\infty$ ограничена снизу. Теперь докажем, что $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ убывает.

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2 \quad \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{(1 + \frac{1}{n-1})^n}{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{(1 + \frac{1}{n-1})}{(1 + \frac{1}{n})^n (1 + \frac{1}{n})} = \left(\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \\ &= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством $\forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1+nx, x \geq 0$, известным как неравенство Бернулли.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} &\geq \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} > \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $\forall n \geq 2 \quad \frac{y_{n-1}}{y_n} > 1 \implies y_{n-1} > y_n \implies \{y_n\}_{n=1}^\infty$ убывает. $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ убывает и ограничена снизу \implies по теореме Вейерштрасса $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e \in \mathbb{R}$. Вернемся к x_n :

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})} = \frac{y_n}{(1 + \frac{1}{n})},$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{(1 + \frac{1}{n})} = \frac{e}{1+0} = e \implies \\ &\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \end{aligned}$$

□

Замечание. $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ — возрастающая последовательность и ограничена сверху: $2 < x_n < 3$; e — иррациональное число, т.е. $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; $e \approx 2,718281828459045$.

4.7 Гиперболические функции

4.8 Пределные точки числового множества

Определение 4.7. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R} \iff$ любая окрестность $U(a)$ содержит бесконечно много элементов множества X .

Замечание. Множество A называется бесконечным или содержащим бесконечно много элементов, если при вычитании из A любого его конечного подмножества получается непустое множество.

Множество всех предельных точек множества X называется производным множеством для X и обозначается X' .

Утверждение 4.1. Точка $a \in \mathbb{R}$ является предельной для $X \subset \mathbb{R} \iff$ в любой проколотой δ -окрестности точки a содержится хотя бы один элемент множества X , т.е.

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \cap \mathring{U}(a).$$

Доказательство. (\implies) Необходимость.

a — предельная для $X \subset \mathbb{R} \implies$

\implies любая $U(a)$ содержит бесконечно много элементов из $X \implies$

$\implies \mathring{U}(a)$ тоже содержит бесконечно много элементов из $X \implies$

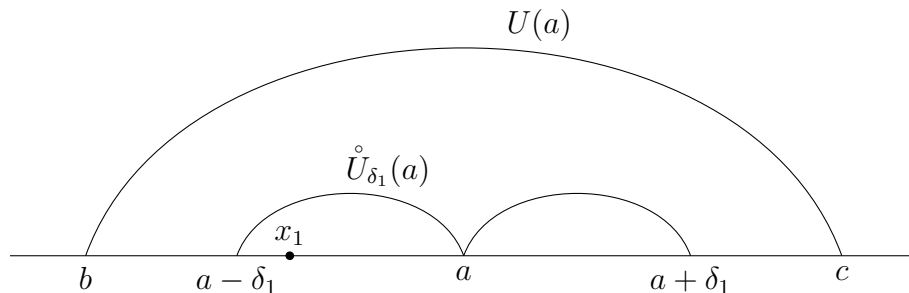
\implies любая \mathring{U} содержит хотя бы один элемент $x \in X$.

(\impliedby) Достаточность.

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \cap \mathring{U}(a).$$

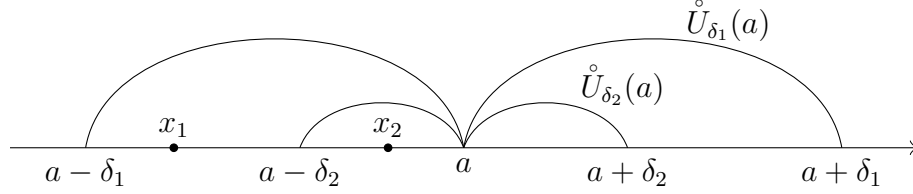
Выберем любую $U(a)$. Тогда

$$\exists \delta_1 > 0 : \mathring{U}(a) \subset U(a) \implies \exists x_1 \in X : x_1 \in \mathring{U}_{\delta_1}(a).$$



Пусть $\delta_2 = \frac{|x_1 - a|}{2} > 0$. Тогда

$$\exists x_2 \in \mathring{U}_{\delta_2}(a) : x_2 \neq x_1.$$



Пусть $\delta_3 = \frac{|x_2 - a|}{2} > 0$. Тогда

$$\exists x_3 \in \mathring{U}_{\delta_3}(a) : x_3 \neq x_2$$

и т.д. На шаге n :

$$\delta_n = \frac{|x_{n-1} - a|}{2} > 0 \implies \exists x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(a) : x_n \neq x_k, k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Таким образом,

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in U(a) : x_n \in X, x_n \neq x_k, n \neq k,$$

а значит, любая окрестность $U(a)$ содержит бесконечно много элементов из $X \implies a$ — предельная точка. \square

Утверждение 4.2. Если точка $a \in \mathbb{R}$ является предельной точкой для множества $X \subset \mathbb{R}$, то

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Доказательство. a — предельная точка для $X \subset \mathbb{R} \iff \forall \delta > 0 \quad \mathring{U}_{\delta}(a)$ содержит хотя бы одну точку множества X (по утверждению 1).

Выберем $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\delta_n = \frac{1}{n} > 0$, тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in X : x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(a),$$

то есть

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}.$$

Т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

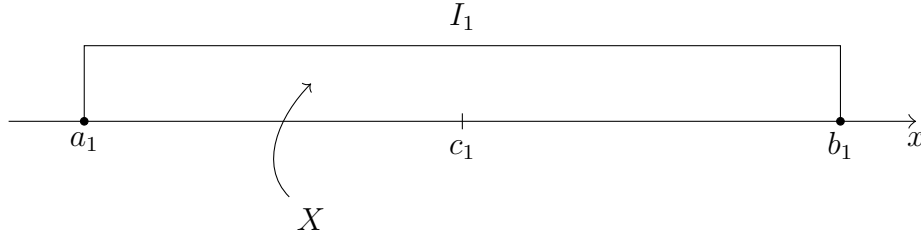
а значит,

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

\square

Теорема 4.6 (принцип Больцано-Вейерштрасса). *Любое ограниченное бесконечное числовое множество имеет хотя бы одну предельную точку.*

Доказательство. Пусть X — бесконечное ограниченное множество, то есть $\exists I_1 = [a_1, b_1] : X \subset [a_1, b_1]$. Пусть $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, т.е. середина отрезка I_1 .



Так как множество X бесконечное, то либо отрезок $[a_1, c_1]$, либо отрезок $[c_1, b_1]$ содержит бесконечно много элементов множества X . Обозначим ту половину отрезка I_1 , которая содержит бесконечно много элементов множества X через $I_2 = [a_2, b_2]$, $I_2 \subset I_1$. Выразим длину отрезка I_2 :

$$|I_2| = b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{|I_1|}{2}.$$

На отрезке I_2 содержится бесконечно много элементов множества X . Пусть $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$ — середина I_2 , тогда либо $[a_2, c_2]$, либо $[c_2, b_2]$ содержит бесконечно много элементов множества X . Обозначим ту половину I_2 , где бесконечно много элементов множества X через $I_3 = [a_3, b_3]$. Тогда

$$|I_3| = \frac{|I_1|}{2^2}$$

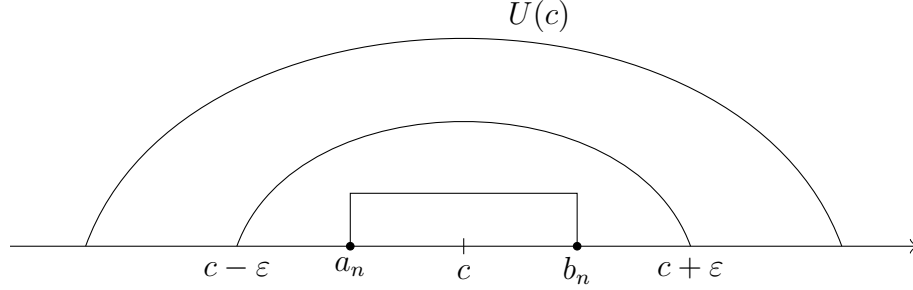
и т.д. На шаге n : $I_n = [a_n, b_n]$, $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ — середина I_n , I_n содержит бесконечно много элементов из X , тогда либо $[a_n, c_n]$, либо $[c_n, b_n]$ содержит бесконечно много элементов из $X \implies I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset I_n$ и содержит бесконечно много элементов из X . Таким образом, мы получили последовательность вложенных отрезков $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} : I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$

$$\begin{aligned} |I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}} &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|I_n|}{2^{n-1}} = 0 \implies \\ &\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |I_n| < \varepsilon. \end{aligned}$$

По принципу Коши-Кантора $\exists!$ общая точка c , т.е. $\forall n \in \mathbb{N} : c \in I_n$.

$$\forall U(c) \quad \exists \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(c) \subset U(c) \implies \exists n \in \mathbb{N} : I_n = [a_n, b_n] \subset U_\varepsilon(c)$$

(например, $|I_n| < \frac{\varepsilon}{2}$).



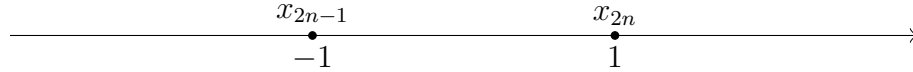
Отрезок I_n содержит бесконечно много элементов множества X по построению последовательности $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} \implies$ окрестность $U(c)$ содержит бесконечно много элементов из $X \implies c$ — предельная. \square

4.9 Пределные точки числовых последовательностей

Определение 4.8. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \iff$ любая окрестность $U(a)$ содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Замечание. Если a — предельная точка $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то любая $U(a)$ содержит какую-либо подпоследовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пример: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n = (-1)^n$.



Теорема 4.7. Точка $a \in \mathbb{R}$ является предельной для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть a — предельная точка последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Выберем $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}, \varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0$.

Для $n = 1$ $U_{\varepsilon_1=1}(a)$ содержит ∞ много элементов $\implies \exists x_{n_1} \in U_{\varepsilon_1}(a)$, т.е. $|x_{n_1} - a| < 1$.

Для $n = 2$ $U_{\varepsilon_2=\frac{1}{2}}(a)$ содержит ∞ много элементов $\implies \exists n_2 > n_1 : x_{n_2} \in U_{\varepsilon_2}(a)$, т.е. $|x_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$.

Для $n = 3$ $U_{\varepsilon_3=\frac{1}{3}}(a)$ содержит ∞ много элементов $\implies \exists n_3 > n_2 : x_{n_3} \in U_{\varepsilon_3}(a)$, т.е. $|x_{n_3} - a| < \frac{1}{3}$ и т.д.

Для $n = k$ $U_{\varepsilon_k=\frac{1}{k}}(a)$ содержит ∞ много элементов $\implies \exists n_k > n_{k-1} : x_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}(a)$, т.е. $|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \implies \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ является подпоследователь-

ностью последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \implies \forall k \in \mathbb{N} : |x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0 &\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall k > N : \frac{1}{k} < \varepsilon \implies \\ &\implies \forall k > N \quad |x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} < \varepsilon \implies \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a. \end{aligned}$$

Докажем достаточность.

Пусть $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. Выберем любую $U(a)$ и найдем такое $\varepsilon > 0$, что $U_{\varepsilon}(a) \subset U(a)$:

$$\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall k > N : |x_{n_k} - a| < \varepsilon \implies x_{n_k} \in U_{\varepsilon}(a) \subset U(a).$$

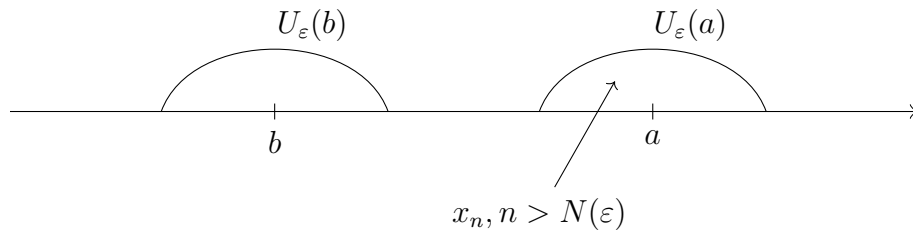
Следовательно, $U(a)$ содержит бесконечно много элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, а значит, a — предельная. \square

Теорема 4.8. Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то a является предельной точкой для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, причем единственной.

Доказательство. a — предельная, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (по теореме 1).

Докажем единственность предельной точки для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ “от противного”. Пусть $\exists b \neq a$, b — предельная точка $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогда $|b - a| \geq \delta > 0$. Т.к. $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, любая ε -окрестность точки содержит бесконечно много элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, а именно все, начиная с номера $N(\varepsilon) + 1$, т.е. $\forall n > n(\varepsilon)$. Вне $U_{\varepsilon}(a)$ может содержаться не более конечного числа элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (возможно x_n с номерами $1, 2, \dots, N(\varepsilon)$).

Выберем $\varepsilon = \frac{\delta}{4} > 0$. Тогда $\forall n > N(\varepsilon) : x_n \in U_{\varepsilon}(a)$.



Но $U_{\varepsilon}(a) \cap U_{\varepsilon}(b) = \emptyset$, что противоречит тому, что b — предельная точка для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. $U_{\varepsilon}(b)$ должна содержать бесконечно много элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, а туда может попасть не более конечного. Следовательно, $a = b$. \square

Теорема 4.9. Любая ограниченная числовая последовательность имеет хотя бы одну предельную точку.

Доказательство. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset \mathbb{R}$, X — множество значений числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Т.к. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная числовая последовательность, X — ограниченное числовое множество. Рассмотрим два случая.

Первый: X — бесконечное числовое множество. Тогда X по принципу Больцано-Вейерштрасса имеет хотя бы одну предельную точку a , т.е. в любую $U(a)$ попадает бесконечно много элементов множества X , а значит, и бесконечно много элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Следовательно, a — предельная точка последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Второй: X — конечное числовое множество. Тогда хотя бы один элемент последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ повторяется бесконечно много раз, т.е. \exists подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (постоянная $\forall k \in \mathbb{N}$), $x_{n_k} = a \in X \implies a$ — предельная точка $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. \square

Теорема 4.10 (критерий сходимости числовой последовательности). *Для того, чтобы точка $a \in \mathbb{R}$ была пределом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, необходимо и достаточно, чтобы $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ была ограниченной и имела единственную предельную точку.*

Доказательство. Докажем необходимость. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R} \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена (по свойству сходящейся последовательности), а значит, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет единственную предельную точку (по теореме 2).

Докажем достаточность. Пусть a — единственная предельная точка ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Будем доказывать “от противного”. Предположим, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет предела. Тогда

$$\forall b \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N : |x_n - b| \geq \varepsilon,$$

а значит, вне $U_\varepsilon(a)$ лежит бесконечное множество элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда существует $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : |x_{n_k} - a| \geq \varepsilon$, т.е. $x_{n_k} \notin U_\varepsilon(a)$. Следовательно, $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность, лежащая вне $U_\varepsilon(a)$. У этой последовательности есть предельная точка b (по теореме 3). $U_\varepsilon(a)$ не содержит ни одного элемента $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \implies b \neq a$, что противоречит условию. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. \square

4.10 Фундаментальные последовательности

Определение 4.9. *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ называется фундаментальной тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N, \forall m > N : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Теорема 4.11. Если числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, то она ограничена.

Доказательство. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная, т.е.

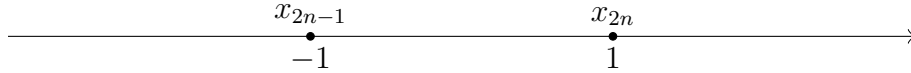
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N, \forall m > N : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда

$$\begin{aligned} \exists N = N(1) &\implies \forall n > N, m = N + 1 : |x_n - x_{N+1}| < 1 \implies \\ &\implies \forall n > N : |x_n| = |x_n - x_{N+1} + x_{N+1}| \leq \\ &\leq |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| < 1 + |x_{N+1}| = M_0 \implies \\ &\implies \forall n > N : |x_n| < M_0. \end{aligned}$$

Пусть $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, M_0\}$, тогда $\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M$, следовательно, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. \square

Пример 4.1. В обратную сторону Теорема 4.11 не работает. Например, $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, но не фундаментальна.

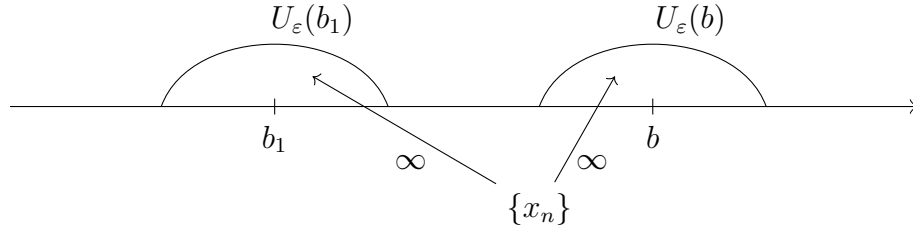


Теорема 4.12 (критерий Коши сходимости числовой последовательности). Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Доказательство. Докажем необходимость. По условию $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$. По числу $\varepsilon > 0$ найдем номер N так, чтобы при $n > N$ иметь $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если теперь $m > N$ и $n > N$, то $|x_m - x_n| < |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ и, таким образом, проверено, что сходящаяся последовательность фундаментальна.

Докажем достаточность. По условию $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, следовательно, ограничена, а значит, у нее есть хотя бы одна предельная точка. Докажем, что эта предельная точка единственна “от противного”. Предположим, что существует две предельные точки b и b_1 , $b \neq b_1$ последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. По определению предельной точки для любого числа $\varepsilon > 0$ окрестности $U_\varepsilon(b)$ и $U_\varepsilon(b_1)$ содержат бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Выберем удобный для дальнейших рассуждений ε . $b_1 \neq b$, следовательно, $\varepsilon = \frac{|b_1 - b|}{6} > 0$. Для выбранного ε найдем соответствующий номер $N = N(\varepsilon)$. По определению фундаментальной последовательности для этого номера выполняется, что $\forall n, m > N : |x_n - x_m| < \frac{|b_1 - b|}{6}$.



Т.к. в $U_\varepsilon(b)$ и $U_\varepsilon(b_1)$ попадает бесконечно много элементов $\{x_n\}_{n=1}^\infty$,

$$\exists n_1 > N : x_{n_1} \in U_\varepsilon(b) \quad \text{и} \quad \exists m_1 > N : x_{m_1} \in U_\varepsilon(b_1).$$

А значит, выполняется следующее неравенство:

$$\begin{aligned} 0 < |b - b_1| &= |b - x_{n_1} + x_{n_1} - x_{m_1} + x_{m_1} - b_1| \leq \\ &\leq |x_{n_1} - b| + |x_{n_1} - x_{m_1}| + |x_{m_1} - b_1| < 3\varepsilon = \\ &= \frac{3|b - b_1|}{6} = \frac{|b - b_1|}{2} \implies 0 < |b - b_1| < \frac{|b - b_1|}{2} \end{aligned}$$

Получено противоречие $\implies b = b_1 \implies \{x_n\}_{n=1}^\infty$ имеет единственную предельную точку $\implies \{x_n\}_{n=1}^\infty$ сходится (по теореме 4 о предельной точке последовательности). \square

Пример 4.2. $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Существует ли $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$? Возьмем $m = 2n > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |x_n - x_{2n}| &= |x_{2n} - x_n| = \left| 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \right| = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \implies \\ &\implies \exists \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N, \exists m = 2n > N : |x_n - x_{2n}| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Следовательно, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ не является фундаментальной. Значит, конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ не существует, т.е. последовательность не является сходящейся.

Определение 4.10. Число b или $+\infty(-\infty)$ называют частичным пределом числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = b.$$

Причем, если частичный предел есть конечное число, то это число является предельной точкой $\{x_n\}_{n=1}^\infty$.

Наибольший частичный предел (может быть $\pm\infty$) называют верхним пределом числовой последовательности и обозначают $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Наименьший частичный предел (может быть $\pm\infty$) называют нижним пределом числовой последовательности и обозначают $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Пример 4.3. Для последовательности $\{(-1)^n\}_{n=1}^\infty = x_n$ частичными пределами будут $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$.

Пример 4.4. Для последовательности $\{(-1)^n n\}_{n=1}^\infty = x_n$ частичными пределами будут $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Теорема 4.13. Верхний и нижний частичные пределы удовлетворяют неравенству

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Теорема 4.14. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

и является конечным числом.

5 Пределы функций

5.1 Определение предела по Коши

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$*$: a ; $a + 0$; $a - 0$; ∞ ; $+\infty$; $-\infty$

$**$: b ; ∞ ; $+\infty$; $-\infty$

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $*$.

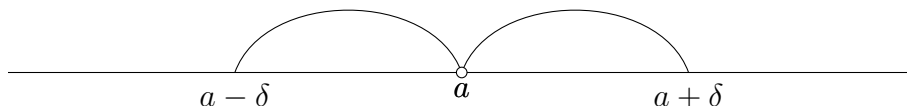
Определение 5.1 (предела функции по Коши). $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = **$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies f(x) \in U_\varepsilon(**).$$

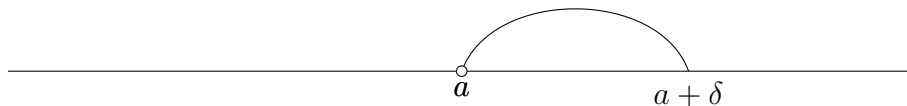
$*$	$x \in \mathring{U}_\delta(*)$
a	$x \in \mathbb{R} : 0 < x - a < \delta$
$a + 0$	$x \in \mathbb{R} : a < x < a + \delta$
$a - 0$	$x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a$
∞	$x \in \mathbb{R} : x > \delta$
$+\infty$	$x \in \mathbb{R} : x > \delta$
$-\infty$	$x \in \mathbb{R} : x < -\delta$

$**$	$f(x) \in U_\varepsilon(**)$
b	$ f(x) - b < \varepsilon$
∞	$ f(x) > \varepsilon$
$+\infty$	$f(x) > \varepsilon$
$-\infty$	$f(x) < -\varepsilon$

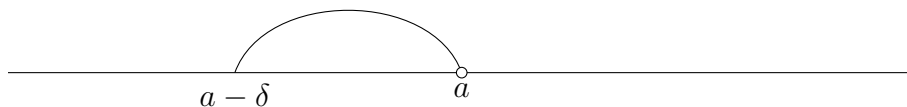
$$x \in \mathring{U}_\delta(a)$$



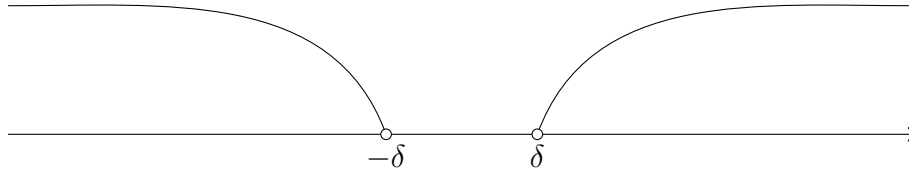
$$x \in \mathring{U}_\delta(a + 0)$$



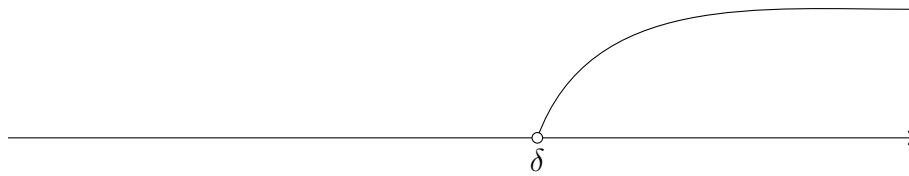
$$x \in \mathring{U}_\delta(a - 0)$$



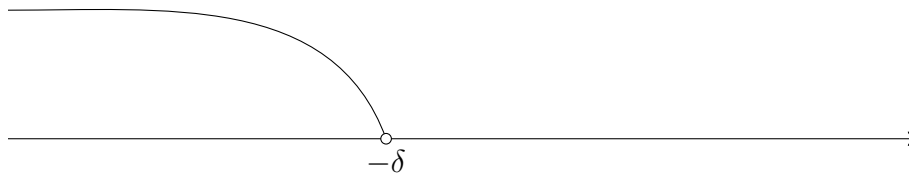
$$x \in \mathring{U}_\delta(\infty)$$



$$x \in \mathring{U}_\delta(+\infty)$$

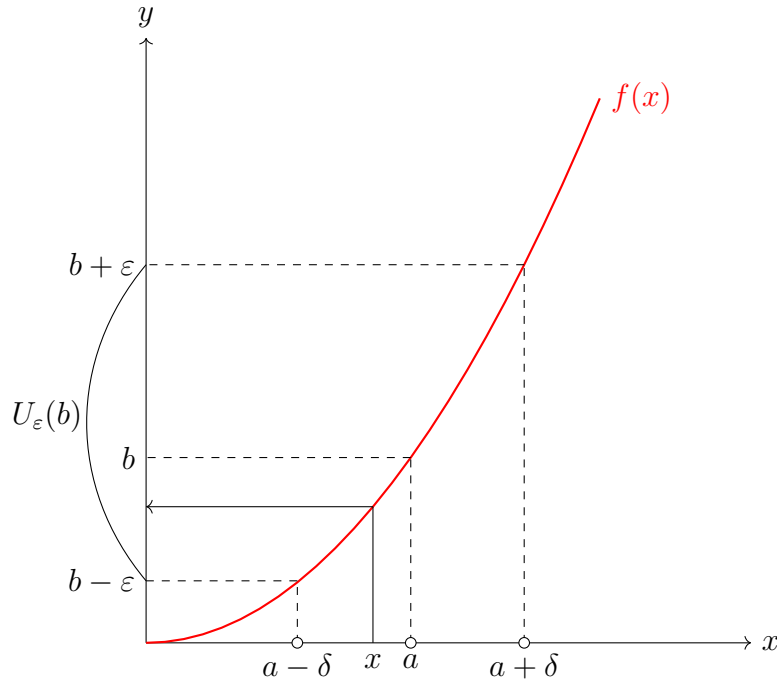


$$x \in \mathring{U}_\delta(-\infty)$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$



$x \approx a$ с точностью $< \delta = \delta(\varepsilon) \implies f(x) \approx b$ с точностью $< \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b &\iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : x > \delta \implies \\ &\implies |f(x) - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Пример 5.1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b &\iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : x < -\delta \implies \\ &\implies |f(x) - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Пример 5.2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

Если $*$ = a ; ∞ , то $\lim_{x \rightarrow *} f(x)$ называется двусторонним пределом. Если $*$ = $a+0$; $a-0$; $+\infty$; $-\infty$, то $\lim_{x \rightarrow *} f(x)$ называется односторонним пределом. Если $**$ = b (конечное число), то $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = b$ называют конечным пределом. Если $**$ = ∞ ; $+\infty$; $-\infty$, то $\lim_{x \rightarrow *} f(x)$ называют бесконечным.

Теорема 5.1 (о связи двустороннего предела с односторонними).

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b \text{ и } \exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Распишем определение двустороннего предела по Коши.

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b &\implies \\ &\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta \implies \\ &\implies |f(x) - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Рассмотрим неравенство $0 < |x - a| < \delta$.

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta &\iff x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \implies \\ &\implies \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} : a < x < a + \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon, \\ \forall x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a \implies |f(x) - b| < \varepsilon. \end{cases} \implies \\ &\implies \begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b, \\ \exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b. \end{cases} \end{aligned}$$

Докажем достаточность. Распишем определения односторонних пределов по Коши.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b &\iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : a < x < a + \delta_1 \implies \\ &\implies |f(x) - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b &\iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : a - \delta_2 < x < a \implies \\ &\implies |f(x) - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Тогда $\mathring{U}_\delta(a) \subset (\mathring{U}_{\delta_1}(a) \cap \mathring{U}_{\delta_2}(a)) \implies$

$$\implies (\forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon) \implies \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

□

Замечание (1).

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \iff \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty.$$

Замечание (2).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b(\infty), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b(\infty).$$

Определение 5.2 (Определение предела по Гейне). Пусть $f(x)$ определена в некоторой $\mathring{U}(*)$.

$$\lim_{x \rightarrow *} f(x) = ** \iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathring{U}(*) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = * \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = **,$$

где $x_n \neq * \forall n \in \mathbb{N}$.

Теорема 5.2 (об эквивалентности определений предела по Коши и Гейне). Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.

Пример 5.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ не определен.

Пример 5.4.

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi n = 0.$$

$$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{2} + 2\pi n = 1.$$

$0 \neq 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ не существует.

Теорема 5.3 (о единственности предела функции). Если существует $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = b \in \mathbb{R}$, то этот предел единственный (при $x \rightarrow *$).

Доказательство. Воспользуемся определением предела по Гейне.

$$\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b \in \mathbb{R} \implies \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \neq *, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = * \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b.$$

Числовая последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, следовательно, имеет единственный предел b (по теореме о единственности предела последовательности). \square

Определение 5.3. Функция $f(x)$ называется локально ограниченной при $x \rightarrow *$ (в точке $*$ или в окрестности $*$), если существуют такие $\mathring{U}(*)$ и $M > 0$, что $f(x)$ определена в $\mathring{U}(*)$ и $\forall x \in \mathring{U}(*) : |f(x)| \leq M$.

Замечание: Если функция f локально ограничена при $x \rightarrow *$, то в точке $*$ такая функция может быть как определена, так и не определена.

Теорема 5.4 (о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел). Пусть $\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Тогда $f(x)$ локально ограничена при $x \rightarrow *$.

Доказательство. По определению предела функции по Коши,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b &\iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies |f(x) - b| < \varepsilon \implies \\ &\implies \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |f(x)| = |f(x) - b + b| \leq |f(x) - b| + |b| < \varepsilon + |b| = M. \end{aligned}$$

Выберем любой $\varepsilon > 0$, например, $\varepsilon = 1$. Для соответствующей ему $\delta > 0$ будет верно, что $\forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |f(x)| < 1 + |b| = M$, а значит, $f(x)$ локально ограничена при $x \rightarrow *$. \square

5.2 Бесконечно малые функции

Определение 5.4. Функцию $\alpha(x)$ называют бесконечно малой (б.м.) при $x \rightarrow *$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \rightarrow *} \alpha(x) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Пример: Рассмотрим функцию $y = 2^{\frac{1}{x}}$. Если $x \rightarrow 0 + 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = [2^{+\infty}] = +\infty.$$

Если же $x \rightarrow 0 - 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = [2^{-\infty}] = 0 \implies f(x) \text{ бесконечно малая при } x \rightarrow 0 - 0.$$

Теорема 5.5 (о связи функции, ее предела и бесконечно малой).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b &\iff \\ &\iff f(x) = b + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \text{ — бесконечно малая при } x \rightarrow *. \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем необходимость.

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b &\iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |f(x) - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Положим $\alpha(x) = f(x) - b$, тогда $\forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |\alpha(x)| < \varepsilon \implies \implies \lim_{x \rightarrow *} \alpha(x) = 0 \implies \alpha(x) \text{ — бесконечно малая при } x \rightarrow * \implies \implies f(x) = b + \alpha(x) \text{ при } x \rightarrow *.$

Докажем достаточность. Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow *$ \implies , тогда $\alpha(x) = f(x) - b \rightarrow 0$ при $x \rightarrow *$. По определению бесконечно малой,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow *} \alpha(x) = 0 &\iff \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon \implies \\ &\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies |f(x) - b| < \varepsilon \implies \\ &\implies \exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b. \end{aligned}$$

□

5.3 Свойства бесконечно малых функций

Теорема 5.6. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \rightarrow *$. Тогда $\alpha(x) + \beta(x)$ — бесконечно малые при $x \rightarrow *$.

Доказательство. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые при $x \rightarrow *$

$$\lim_{x \rightarrow *} \alpha(x) \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_1}(*) \implies |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow *} \beta(x) \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(*) \implies |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, если $*$: $a; a + 0; a - 0$ и $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$, если $*$: $\infty; +\infty, -\infty$.

$$\begin{aligned} \implies \mathring{U}_\delta(*) &= \mathring{U}_{\delta_1}(*) \cap \mathring{U}_{\delta_2}(*) \implies . \\ &\implies \forall. \end{aligned}$$

□

Следствие 5.6.1. Сумма конечного числа бесконечно малой при $x \rightarrow *$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow *$.

Теорема 5.7 (произведение бесконечно малой на ограниченную). Пусть α — бесконечно малая при $x \rightarrow *$, $f(x)$ локально ограничена при $x \rightarrow *$. Тогда $\alpha(x) \cdot f(x)$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow *$.

Доказательство. $f(x)$ — локально ограничена при $x \rightarrow *$ $\implies \exists \mathring{U}_{\delta_1}(*) \quad \exists M > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_1}(*) : |f(x)| < M$; $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow *$ $\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(*) \implies |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \implies \implies \mathring{U}_\delta = \mathring{U}_{\delta_1}(*) \cap \mathring{U}_{\delta_2}(*)$

□

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = .$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \arctan \frac{1}{x^{100}} = 0.$$

Теорема 5.8 (о произведении двух бесконечно малых). Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \rightarrow *$. Тогда $\alpha(x)\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow *$

Доказательство. $\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow *$ $\implies \lim_{x \rightarrow *} \beta(x) = 0 \implies$ по теореме о локальной ограниченной функции, имеющей конечный предел $\implies \beta(x)$ локально ограничена при $x \rightarrow *$ $\implies \alpha(x) \cdot \beta(x)$ — произведение бесконечно малой на локально ограниченную при $x \rightarrow *$ \implies по теореме 2 $\alpha \cdot \beta$ — бесконечно малые при. \square

Следствие 5.8.1. Произведение конечного числа бесконечно малых при $x \rightarrow *$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow *$.

5.4 Арифметические операции с функциями, имеющими пределы

Теорема 5.9. Пусть $\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = A \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow *} g(x) = B \in \mathbb{R}$ Тогда

1. $\exists \lim_{x \rightarrow *} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\exists \lim_{x \rightarrow *} (f(x)g(x)) = AB$
3. $B \neq 0 \implies \exists \lim_{x \rightarrow *} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

Доказательство. $\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = A; \exists \lim_{x \rightarrow *} g(x) = B \implies$ по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой $\implies f(x) = A + \alpha(x), g(x) = B + \beta(x)$, где $\alpha(x), \beta(x)$ — бесконечно малые при $x \rightarrow *$.

1. $f(x) \pm g(x) = (A + \alpha(x)) \pm (B + \beta(x)) = A \pm B + \alpha(x) \pm \beta(x) = A \pm B + \gamma(x)$, где $\gamma(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow *$ \implies
2. $f(x) \cdot g(x) = (A + \alpha(x))(B + \beta(x)) = AB + B\alpha(x) + A\beta(x) + \alpha(x)\beta(x) = AB + \gamma(x) \implies$ по теореме о связи предела функции, ее предела и бесконечно малой $\implies \lim_{x \rightarrow *} f(x)g(x) = AB$

$$3. \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} = \frac{A}{B} + \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - AB$$

$$\gamma(x) = \frac{AB + B\alpha(x) - AB - A\beta(x)}{B(B + \beta(x))} = \frac{B\alpha(x) - A\beta(x)}{B} \cdot \frac{1}{B + \beta(x)}.$$

$\frac{B\alpha(x)-A\beta(x)}{B}$ — бесконечно малая при $x \rightarrow *$ по свойствам бесконечно малых.

Докажем, что $\phi(x) = \frac{1}{B+\beta(x)}$ локально ограничена при $x \rightarrow *$.
 $\beta(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow *$ $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies |\beta(x)| < \varepsilon$. Выберем $\varepsilon = \frac{|B|}{2} > 0$, найдем соответствующее $\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \implies \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |\beta(x)| < \frac{|B|}{2}$

$$\implies |B + \beta(x)| \geq |B| - |\beta(x)| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2} \implies .$$

$$\implies \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |B + \beta(x)| > \frac{|B|}{2} > 0 \implies .$$

$$\frac{1}{B + \beta(x) < \frac{2}{|B|}} \implies .$$

$\implies \phi(x) = \frac{1}{B+\beta(x)}$ локально ограничена при $x \rightarrow *$ $\gamma(x)$ — произведение бесконечно малой на локально ограниченную при $x \rightarrow *$ \implies по свойству бесконечно малой является бесконечно малой при $x \rightarrow *$.

□

Теорема 5.10 (о знаковостойности функции, имеющей ненулевой предел). Пусть $\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b \neq 0$. Тогда $\exists \mathring{U}_\delta(*) \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |f(x)| > \frac{|b|}{2}$. Кроме того, если $b > 0$, то $\forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : f(x) > \frac{b}{2} \implies f(x) > 0$, т.е. имеет тот же знак, что и предел; если $b < 0$, то $\forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : f(x) < \frac{b}{2} \implies f(x) < 0$, т.е. имеет тот же знак, что и предел.

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Или $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Выберем $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$, найдем соответствующий $\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \implies$

$$\forall x \in \mathring{U}_\delta(*) : |f(x)| = |b + f(x) - b| \geq |b| - |f(x) - b| > |b| - \frac{|b|}{2}.$$

$$\implies |f(x)| > \frac{|b|}{2}.$$

Пусть $b > 0$, тогда $\varepsilon = \frac{|b|}{2} = \frac{b}{2} > 0 \implies \forall x \in \mathring{U}_\delta(*) \quad f(x) > b - \varepsilon = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} > 0$ \square

Теорема 5.11 (о предельном переходе в неравенстве). *Если существуют два предела $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = b_1$, $\lim_{x \rightarrow *} g(x) = b_2$ и проколота окрестность $\mathring{U}(*)$, такая, что для любого x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$, то $b_1 \leq b_2$.*

Доказательство. Пусть существуют $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = b_1$ и $\lim_{x \rightarrow *} g(x) = b_2$. Т.к. пределы конечны, по теореме об арифметических операциях с функциями, имеющими пределы, для разности $\phi(x) = g(x) - f(x)$ существует предел $\lim_{x \rightarrow *} \phi(x) = b_2 - b_1$.

Будем доказывать “от противного”. Предположим, что $b_1 > b_2$. Из этого следует, что $b_2 - b_1 < 0$, тогда по теореме о знаковостоянстве функции, имеющей ненулевой предел, существует такая проколота окрестность $\mathring{U}_1(*)$, что $\forall x \in \mathring{U}_1(*) : \phi(x) = g(x) - f(x) < \frac{b_2 - b_1}{2} < 0$. Таким образом, $g(x) < f(x)$, а тогда $\forall x \in \mathring{U}(*) \cap \mathring{U}_1(*)$ выполняются сразу два неравенства: $f(x) \leq g(x)$ и $g(x) < f(x)$, что является противоречием. Значит, $b_1 \leq b_2$. \square

Замечание. Если существует $\mathring{U}(*)$, такая, что $\forall x \in \mathring{U}(*)$ верно неравенство $f(x) < g(x)$, то для пределов $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = b_1$ и $\lim_{x \rightarrow *} g(x) = b_2$ выполняется $b_1 \leq b_2$.

Теорема 5.12 (о пределе промежуточной функции или лемма о двух милиционерах). *Если слева и справа от правонарушителя находится по милиционеру, каждый из которых держит его и идет в отделение милиции, то правонарушитель тоже придет в отделение милиции. Или, говоря простым языком, если существует $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow *} g(x) = b$ и $\mathring{U}(*)$, такая, что $\forall x \in \mathring{U}(*)$ выполняется неравенство $f(x) \leq \phi(x) \leq g(x)$, то существует $\lim_{x \rightarrow *} \phi(x) = b$.*

Доказательство. Пусть существуют $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow *} g(x) = b$. Распишем эти пределы по определению Коши:

$$\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = b \iff$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_1}(*) \implies b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon,$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow *} g(x) = b \iff$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(*) \implies b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon.$$

Пусть $\delta > 0$ таково, что $\mathring{U}_\delta(*) \subset \mathring{U}(*) \cap \mathring{U}_{\delta_1}(*) \cap \mathring{U}_{\delta_2}(*)$. Тогда $\forall x \in \mathring{U}_\delta(*)$ выполняются неравенства $f(x) \leq \phi(x) \leq g(x)$, $b - \varepsilon < f(x)$ и $g(x) < b + \varepsilon$. Записав их вместе, получим, что

$$b - \varepsilon < f(x) \leq \phi(x) \leq g(x) < b + \varepsilon \implies \exists \lim_{x \rightarrow *} \phi(x) = b.$$

□

Теорема 5.13 (о пределе сложной функции). *Если существуют пределы $\lim_{x \rightarrow *} f(x) = A$ и $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$, в некоторой окрестности $\mathring{U}(*)$ $f(x) \neq A$, и в этой окрестности определена сложная функция $g(f(x))$, то существует $\lim_{x \rightarrow *} g(f(x)) = B$.*

Обратим внимание на то, как осуществляется замена:

$$(y = f(x), x \rightarrow *, y \rightarrow A) \implies \lim_{y \rightarrow A} g(y) = B.$$

Доказательство. По определению предела по Гейне

$$\exists \lim_{x \rightarrow *} f(x) = A \implies$$

$$\implies \forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathring{U}(*) : (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = * \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A), \quad (\Delta)$$

$$\exists \lim_{y \rightarrow A} g(y) = B \implies$$

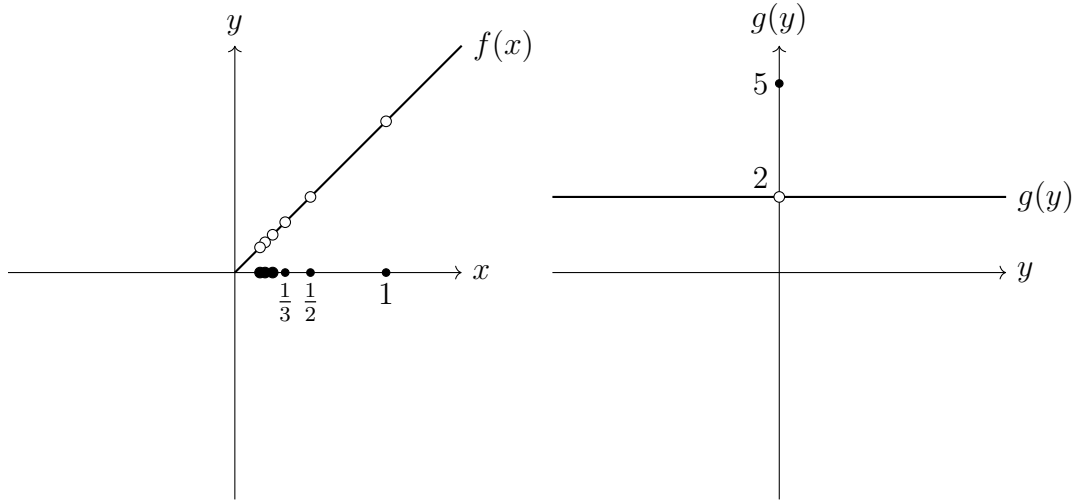
$$\implies \forall \{y_n\}_{n=1}^\infty, y_n \neq A : (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \implies \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = B). \quad (\Delta\Delta)$$

Выберем любую $\{x_n\}_{n=1}^\infty : x_n \in \mathring{U}(*)$, тогда по (Δ) из того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = *$, следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. Обозначим $y_n = f(x_n)$, по условию теоремы $y_n \neq A$, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. Тогда по $(\Delta\Delta)$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = B$. Следовательно, по определению предела по Гейне, существует $\lim_{x \rightarrow *} g(f(x)) = B$. □

Замечание. Условие $f(x) \neq A$ в окрестности $\mathring{U}(*)$ является существенным. Если это условие отсутствует, то теорема может не выполняться.

Пример 5.5.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad g(y) = \begin{cases} 2, & y \neq 0, \\ 5, & y = 0. \end{cases}$$



$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. $x = 0$ в любой точке $x = \frac{1}{n}$, следовательно, в любой $\overset{\circ}{U}(0)$ есть точки, где $f(x) = 0$.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow 0} g(0) = 5.$$

Рассмотрим последовательность $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \{e^{-n}\}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = 0, \quad e \notin \mathbb{N} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(\tilde{x}_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(e^{-n}) = 2.$$

Подведем итог:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n, \\ \lim_{n \rightarrow 0} g(f(x_n)) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(\tilde{x}_n)). \end{cases} \implies \nexists \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)).$$

5.5 Бесконечно большие функции

Определение 5.5. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой (б.б.) при $x \rightarrow *$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ определена в некоторой $\overset{\circ}{U}(*)$ и ее предел при $x \rightarrow *$ равен бесконечности, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(*) : |f(x)| > \varepsilon.$$

Пример 5.6. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$. $\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty$, следовательно, y — бесконечно большая при $x \rightarrow 0$.

Теорема 5.14 (о связи бесконечно большой с бесконечно малой).

1. Если $f(x)$ — бесконечно большая при $x \rightarrow *$, то $\frac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow *$.
2. Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow *$ и существует такая проколота окрестность $\mathring{U}(*)$, что $\forall x \in \mathring{U}(*) : \alpha(x) \neq 0$, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \rightarrow *$.

Доказательство.

1. $f(x)$ — бесконечно большая при $x \rightarrow *$, тогда для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такая, что для любого x из $\mathring{U}_\delta(*)$ выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon_1$. Выберем любой $\varepsilon > 0$, найдем $\varepsilon_1 = \frac{1}{\varepsilon}$ и $\delta = \delta(\varepsilon_1) = \delta(\frac{1}{\varepsilon})$. Тогда для любого x из $\mathring{U}_\delta(*)$ выполняется неравенство $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$, или, что то же, $\frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon$. Положим $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$, тогда для любого x из $\mathring{U}_\delta(*)$ верно, что $|\alpha(x)| < \varepsilon$, из чего следует, что предел $\alpha(x)$ при $x \rightarrow *$ равен нулю. Таким образом, $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow *$.
2. Пусть $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow *$ и для любого x из $\mathring{U}(*)$ верно, что $\alpha(x) \neq 0$. Предел $\alpha(x)$ при $x \rightarrow *$ равен нулю, т.е. для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется $\delta > 0$, зависящая от ε , такая, что для любого x из $\mathring{U}_\delta(*) \subset \mathring{U}(*)$ выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon_1$. Выберем любой $\varepsilon > 0$, найдем $\varepsilon_1 = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ и соответствующую $\delta = \delta(\varepsilon_1) = \delta(\frac{1}{\varepsilon}) > 0$.

□

Замечание. Рассмотрим функцию $y = x \sin \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow 0$. $\sin \frac{1}{x}$ — ограниченная, x — бесконечно малая, следовательно, $y = \alpha(x)$ — бесконечно малая.

Теперь рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x \sin x}$. В любой $\mathring{U}(0)$ есть хотя бы один x , следовательно, $\alpha(x)$ равна нулю, а значит, $f(x)$ не существует.

5.6 Первый замечательный предел

Теорема 5.15.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Утверждение 5.1. Если $f(x)$ — элементарная функция, $a \in D(f)$ — область определения f , то существует предел $f(x)$, равный $f(a)$ при $x \rightarrow a$.

Следствие 5.15.1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1 * 1 = 1.$$

Следствие 5.15.2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} &= \\ &= | \text{Замена } y = \arcsin x, x = \sin y, x \rightarrow 0 \implies y \rightarrow 0 | = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y} \right)^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Следствие 5.15.3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} &= \\ &= | \text{Замена } y = \operatorname{arctg} x, x = \operatorname{tg} y, x \rightarrow 0 \implies y \rightarrow 0 | = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} y}{y} \right)^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Следствие 5.15.4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2/2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2/2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x/2} \right)^2 = 1.$$

5.7 Второй замечательный предел

Теорема 5.16.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^x = [1^\infty] = e.$$