

Лекции по математическому анализу для 1 курса ФН2, 3

Власова Елена Александровна

2024-2025 год.

Содержание

1	Введение	3
1.1	Элементы теории множеств	3
1.2	Кванторные операции	3
1.3	Метод математической индукции	3
2	Множество действительных чисел	3
2.1	Аксиоматика действительных чисел	3
2.2	Геометрическая интерпретация \mathbb{R}	4
2.3	Числовые промежутки	4
2.4	Бесконечные числовые промежутки	4
2.5	Окрестности точки	4
2.6	Принцип вложенных отрезков (Коши-Кантора)	4
2.7	Ограниченные и неограниченные числовые множества	5
2.8	Точные грани числового множества	5
2.9	Принцип Архимеда	5
3	Функции или отображения	5
3.1	Понятие функции	5
3.2	Ограниченные и неограниченные числовые множества	5
3.3	Обратные функции	5
3.4	Чётные и нечётные функции	5
3.5	Периодические функции	5
3.6	Сложная функция (композиция)	5
3.7	Основные элементарные функции	5
4	Числовые последовательности и их пределы	5
4.1	Ограниченные и неограниченные числовые последовательности	5
4.2	Предел числовой последовательности	6
4.3	Бесконечные пределы	6
4.4	Свойства сходящихся последовательностей	6
4.5	Монотонные числовые последовательности	6
4.6	Число e	7
4.7	Гиперболические функции	7
4.8	Предельные точки числового множества	7
4.9	Предельные точки числовых последовательностей	7

Элементарные функции и их пределы

1 Введение

1.1 Элементы теории множеств

1.2 Кванторные операции

1.3 Метод математической индукции

2 Множество действительных чисел

2.1 Аксиоматика действительных чисел

Определение 1. Множество \mathbb{R} называется множеством действительных чисел, если элементы этого множества удовлетворяют следующему комплексу условий:

1. На множестве \mathbb{R} определена операция сложения “+”, то есть задано отображение, которое каждой упорядоченной паре $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ставит в соответствие элемент из \mathbb{R} , называемый суммой $x + y$ и удовлетворяющий следующим аксиомам:

- (a) $\exists 0 \in \mathbb{R}$, такой, что $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$;
- (b) $\forall x \exists$ противоположный элемент “ $-x$ ”, такой, что $x + (-x) = (-x) + x = 0$;
- (c) Ассоциативность. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$;
- (d) Коммутативность. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$.

2. На \mathbb{R} определена операция умножения “ \cdot ”, то есть $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ставится в соответствие элемент $(x \cdot y) \in \mathbb{R}$.

- (a) \exists нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R}$, такой, что $\forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$;
- (b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists$ обратный элемент “ x^{-1} ”, такой, что $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$;
- (c) Ассоциативность. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
- (d) Коммутативность. $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \cdot y = y \cdot x$.

Операция умножения дистрибутивна по отношению к сложению.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y)z = xz + yz$$

3. Отношения порядка. Для \mathbb{R} определено отношение “ \leq ”.

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{R} : x \leq x;$$

$$(b) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y \wedge y \leq x) \implies x = y;$$

...

2.2 Геометрическая интерпретация \mathbb{R}

2.3 Числовые промежутки

2.4 Бесконечные числовые промежутки

2.5 Окрестности точки

2.6 Принцип вложенных отрезков (Коши-Кантора)

Определение 2. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность некоторых множеств. Если $\forall n \in \mathbb{N} : X_n \supset X_{n+1}$, то эта последовательность называется последовательностью вложенных отрезков.

2.7 Ограниченные и неограниченные числовые множества

2.8 Точные грани числового множества

2.9 Принцип Архимеда

3 Функции или отображения

3.1 Понятие функции

3.2 Ограниченные и неограниченные числовые множества

3.3 Обратные функции

3.4 Чётные и нечётные функции

3.5 Периодические функции

3.6 Сложная функция (композиция)

3.7 Основные элементарные функции

4 Числовые последовательности и их пределы

Определение 3. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ — числовая последовательность, т.е. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \mathbb{R}$.

4.1 Ограниченные и неограниченные числовые последовательности

Определение 4. Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется

1. ограниченной сверху, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M$;
2. ограниченной снизу, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq M$;
3. ограниченной, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M$;
4. неограниченной, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| > M$;

4.2 Предел числовой последовательности

Определение 5. Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности, если $\forall \varepsilon > 0$ существует такой номер n , зависящий от ε , что \forall натурального числа $N > n$ верно неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

4.3 Бесконечные пределы

4.4 Свойства сходящихся последовательностей

4.5 Монотонные числовые последовательности

Определение 6. Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется

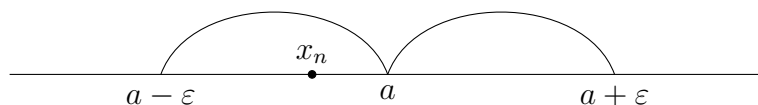
1. возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}$;
2. убывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1}$;
3. неубывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}$;
4. невозрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n+1}$.

Для монотонных числовых последовательностей ограниченность является достаточным условием для сходимости.

Теорема 1 (Вейерштрасса о сходимости монотонных числовых последовательностей). Если последовательность не убывает и ограничена сверху, то она является сходящейся. Если последовательность не возрастает и ограничена снизу, то она является сходящейся. В общем, любая монотонная последовательность сходится.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает и ограничена сверху $\implies \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M \implies$ множество значений этой последовательности $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\} = A$ является ограниченным сверху числовым множеством $\implies \exists \sup A \in \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = a$, то есть

1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq a$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : x_N > a - \varepsilon$.



Т.к. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность \implies

$$\begin{aligned} \implies \forall n > N = N(\varepsilon) : x_n &\geq x_N \implies \\ \implies a - \varepsilon < x_N \leq x_n &\leq a < a + \varepsilon \implies \\ \implies a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon &\implies |x_n - a| < \varepsilon \implies \\ \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon &\implies \\ \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R} &\implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ сходится.} \end{aligned}$$

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — невозрастающая и ограниченная снизу последовательность, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf A$, $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Доказательство аналогично. \square

4.6 Число e

4.7 Гиперболические функции

4.8 Предельные точки числового множества

4.9 Предельные точки числовых последовательностей