

Лекции по математическому анализу для 1 курса ФН2, 3

Власова Елена Александровна

2024-2025 год.

Содержание

1	Введение	3
1.1	Элементы теории множеств	3
1.2	Кванторные операции	3
1.3	Метод математической индукции	3
2	Множество действительных чисел	3
2.1	Аксиоматика действительных чисел	3
2.2	Геометрическая интерпретация \mathbb{R}	4
2.3	Числовые промежутки	4
2.4	Бесконечные числовые промежутки	4
2.5	Окрестности точки	4
2.6	Принцип вложенных отрезков (Коши-Кантора)	4
2.7	Ограниченные и неограниченные числовые множества	5
2.8	Точные грани числового множества	5
2.9	Принцип Архимеда	5
3	Функции или отображения	5
3.1	Понятие функции	5
3.2	Ограниченные и неограниченные числовые множества	5
3.3	Обратные функции	5
3.4	Чётные и нечётные функции	5
3.5	Периодические функции	5
3.6	Сложная функция (композиция)	5
3.7	Основные элементарные функции	5
4	Числовые последовательности и их пределы	5
4.1	Ограниченные и неограниченные числовые последовательности	5
4.2	Предел числовой последовательности	6
4.3	Бесконечные пределы	6
4.4	Свойства сходящихся последовательностей	6
4.5	Монотонные числовые последовательности	7
4.6	Число e	8
4.7	Гиперболические функции	8
4.8	Предельные точки числового множества	8
4.9	Предельные точки числовых последовательностей	12

Элементарные функции и их пределы

1 Введение

1.1 Элементы теории множеств

1.2 Кванторные операции

1.3 Метод математической индукции

2 Множество действительных чисел

2.1 Аксиоматика действительных чисел

Определение 2.1.1. Множество \mathbb{R} называется множеством действительных чисел, если элементы этого множества удовлетворяют следующему комплексу условий:

1. На множестве \mathbb{R} определена операция сложения “+”, то есть задано отображение, которое каждой упорядоченной паре $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ставит в соответствие элемент из \mathbb{R} , называемый суммой $x + y$ и удовлетворяющий следующим аксиомам:

- (a) $\exists 0 \in \mathbb{R}$, такой, что $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$;
- (b) $\forall x \exists$ противоположный элемент “ $-x$ ”, такой, что $x + (-x) = (-x) + x = 0$;
- (c) Ассоциативность. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$;
- (d) Коммутативность. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$.

2. На \mathbb{R} определена операция умножения “ \cdot ”, то есть $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ставится в соответствие элемент $(x \cdot y) \in \mathbb{R}$.

- (a) \exists нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R}$, такой, что $\forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$;
- (b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists$ обратный элемент “ x^{-1} ”, такой, что $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$;
- (c) Ассоциативность. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
- (d) Коммутативность. $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \cdot y = y \cdot x$.

Операция умножения дистрибутивна по отношению к сложению.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y)z = xz + yz$$

3. Отношения порядка. Для \mathbb{R} определено отношение " \leq ".

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{R} : x \leq x;$$

$$(b) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y \wedge y \leq x) \implies x = y;$$

...

2.2 Геометрическая интерпретация \mathbb{R}

2.3 Числовые промежутки

2.4 Бесконечные числовые промежутки

2.5 Окрестности точки

2.6 Принцип вложенных отрезков (Коши-Кантора)

Определение 2.6.1. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность некоторых множеств. Если $\forall n \in \mathbb{N} : X_n \supset X_{n+1}$, то эта последовательность называется последовательностью вложенных отрезков.

2.7 Ограниченные и неограниченные числовые множества

2.8 Точные грани числового множества

2.9 Принцип Архимеда

3 Функции или отображения

3.1 Понятие функции

3.2 Ограниченные и неограниченные числовые множества

3.3 Обратные функции

3.4 Чётные и нечётные функции

3.5 Периодические функции

3.6 Сложная функция (композиция)

3.7 Основные элементарные функции

4 Числовые последовательности и их пределы

Определение 4.0.1. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ — числовая последовательность, т.е. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \mathbb{R}$.

4.1 Ограниченные и неограниченные числовые последовательности

Определение 4.1.1. Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется

1. ограниченной сверху, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M$;
2. ограниченной снизу, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq M$;
3. ограниченной, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M$;
4. неограниченной, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| > M$;

4.2 Предел числовой последовательности

Определение 4.2.1. Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности, если $\forall \varepsilon > 0$ существует такой номер n , зависящий от ε , что \forall натурального числа $N > n$ верно неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

4.3 Бесконечные пределы

4.4 Свойства сходящихся последовательностей

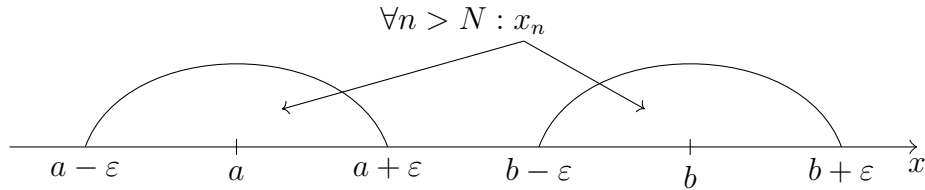
Теорема 4.4.1 (о единственности предела). Любая сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Доказательство. "От противного". Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — сходящаяся последовательность. Предположим, что $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, причем $a \neq b$. Пусть для определенности $a < b$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 : |x_n - b| < \varepsilon.$$

$$N = \max\{N_1, N_2\} \implies \forall n > N : \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon, \\ |x_n - b| < \varepsilon. \end{cases}$$



Выберем $\varepsilon = \frac{b-a}{4} > 0$. Найдем $N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда

$$\forall n > N \quad |x_n - a| < \frac{b-a}{4}, \quad |x_n - b| < \frac{b-a}{4}.$$

Следовательно,

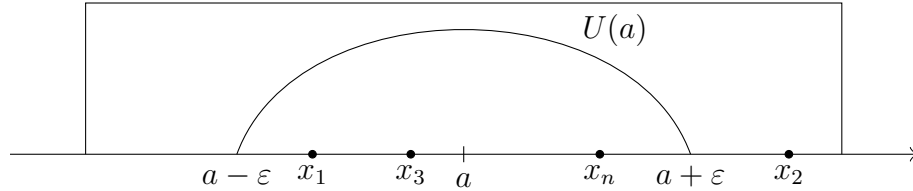
$$0 < b - a = |b - a| = |b - x_n + x_n - a| \leq |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{b-a}{2},$$

то есть

$$0 < b - a < \frac{b-a}{2}.$$

Мы пришли к противоречию, следовательно, $a = b \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет единственный предел. \square

Теорема 4.4.2 (об ограниченности сходящейся последовательности).
Любая сходящаяся последовательность является ограниченной.



Доказательство. Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} = a \in \mathbb{R} \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = 1 \implies \exists N = N(1) \quad \forall n > N : |x_n - a| < 1$. Следовательно,

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Пусть $M_0 = 1 + |a| \implies \forall n > N : x_n < M_0$.

Пусть $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, M_0\}$, тогда $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной. \square

Замечание. Ограниченность является необходимым условием сходимости числовой последовательности. В то же время условие ограниченности не является достаточным для сходимости числовой последовательности. Например, $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная, но не сходящаяся числовая последовательность.

4.5 Монотонные числовые последовательности

Определение 4.5.1. Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется

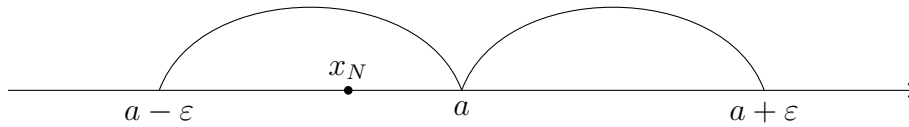
1. *возрастающей*, если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}$;
2. *убывающей*, если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1}$;
3. *неубывающей*, если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}$;
4. *невозрастающей*, если $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n+1}$

Для монотонных числовых последовательностей ограниченность является достаточным условием для сходимости.

Теорема 4.5.1 (Вейерштрасса о сходимости монотонных числовых последовательностей). *Если последовательность не убывает и ограничена сверху, то она является сходящейся. Если последовательность не возрастает и ограничена снизу, то она является сходящейся. В общем, любая монотонная последовательность сходится.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает и ограничена сверху \implies
 $\implies \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M \implies$
 \implies множество значений этой последовательности
 $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = A$ является ограниченным
сверху числовым множеством \implies
 $\implies \exists \sup A \in \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = a$, то есть

1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq a$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : x_N > a - \varepsilon$.



$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность, то есть

$$\begin{aligned} \forall n > N = N(\varepsilon) : x_n &\geq x_N \implies \\ \implies a - \varepsilon < x_N \leq x_n &\leq a < a + \varepsilon \implies \\ \implies a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon &\implies |x_n - a| < \varepsilon \implies \\ \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N : &|x_n - a| < \varepsilon \implies \\ \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R} \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty} &\text{сходится.} \end{aligned}$$

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — невозрастающая и ограниченная снизу последовательность, то

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf A, A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

Доказательство аналогично. □

4.6 Число e

4.7 Гиперболические функции

4.8 Предельные точки числового множества

Определение 4.8.1. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R} \iff$ любая окрестность $U(a)$ содержит бесконечно

много элементов множества X .

Замечание. Множество A называется бесконечным или содержащим бесконечно много элементов, если при вычитании из A любого его конечного подмножества получается непустое множество.

Множество всех предельных точек множества X называется производным множеством для X и обозначается X' .

Утверждение 4.8.1. Точка $a \in \mathbb{R}$ является предельной для $X \subset \mathbb{R} \iff$ в любой проколотой δ -окрестности точки a содержится хотя бы один элемент множества X , т.е.

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \cap \mathring{U}(a).$$

Доказательство. (\implies) Необходимость.

a — предельная для $X \subset \mathbb{R} \implies$

\implies любая $U(a)$ содержит бесконечно много элементов из $X \implies$

$\implies \mathring{U}(a)$ тоже содержит бесконечно много элементов из $X \implies$

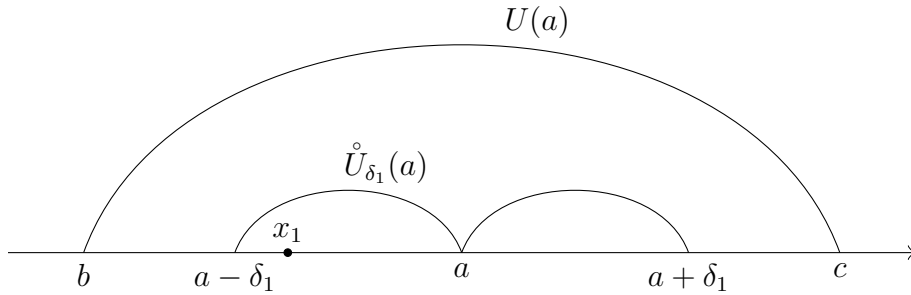
\implies любая \mathring{U} содержит хотя бы один элемент $x \in X$.

(\impliedby) Достаточность.

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \cap \mathring{U}(a).$$

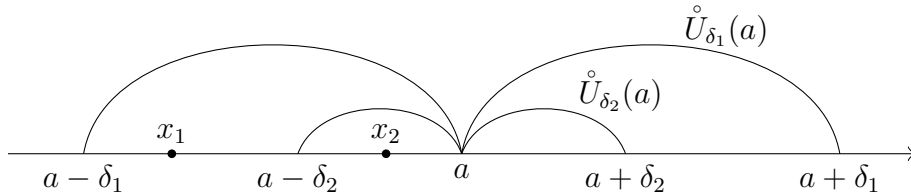
Выберем любую $U(a)$. Тогда

$$\exists \delta_1 > 0 : \mathring{U}(a) \subset U(a) \implies \exists x_1 \in X : x_1 \in \mathring{U}_{\delta_1}(a).$$



Пусть $\delta_2 = \frac{|x_1 - a|}{2} > 0$. Тогда

$$\exists x_2 \in \mathring{U}_{\delta_2}(a) : x_2 \neq x_1.$$



Пусть $\delta_3 = \frac{|x_2 - a|}{2} > 0$. Тогда

$$\exists x_3 \in \mathring{U}_{\delta_3}(a) : x_3 \neq x_2$$

и т.д. На шаге n :

$$\delta_n = \frac{|x_{n-1} - a|}{2} > 0 \implies \exists x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(a) : x_n \neq x_k, k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Таким образом,

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in U(a) : x_n \in X, x_n \neq x_k, n \neq k,$$

а значит, любая окрестность $U(a)$ содержит бесконечно много элементов из $X \implies a$ — предельная точка. \square

Утверждение 4.8.2. Если точка $a \in \mathbb{R}$ является предельной точкой для множества $X \subset \mathbb{R}$, то

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Доказательство. a — предельная точка для $X \subset \mathbb{R} \iff \forall \delta > 0 \quad \mathring{U}_{\delta}(a)$ содержит хотя бы одну точку множества X (по утверждению 1).

Выберем $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}, \delta_n = \frac{1}{n} > 0$, тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in X : x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(a),$$

то есть

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}.$$

Т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

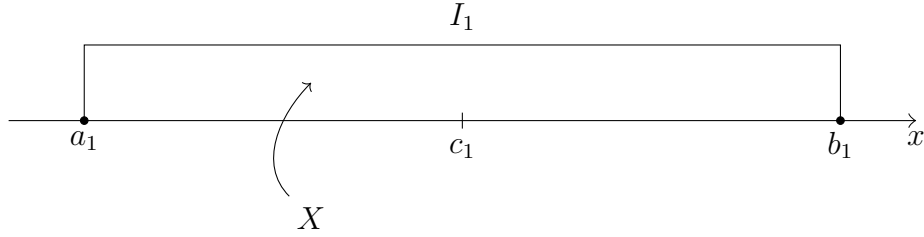
а значит,

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

\square

Теорема 4.8.1 (принцип Больцано-Вейерштрасса). Любое ограниченное бесконечное числовое множество имеет хотя бы одну предельную точку.

Доказательство. Пусть X — бесконечное ограниченное множество, то есть $\exists I_1 = [a_1, b_1] : X \subset [a_1, b_1]$. Пусть $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, т.е. середина отрезка I_1 .



Так как множество X бесконечно, то либо отрезок $[a_1, c_1]$, либо отрезок $[c_1, b_1]$ содержит бесконечно много элементов множества X . Обозначим ту половину отрезка I_1 , которая содержит бесконечно много элементов множества X через $I_2 = [a_2, b_2]$, $I_2 \subset I_1$. Выразим длину отрезка I_2 :

$$|I_2| = b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{|I_1|}{2}.$$

На отрезке I_2 содержится бесконечно много элементов множества X . Пусть $c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$ — середина I_2 , тогда либо $[a_2, c_2]$, либо $[c_2, b_2]$ содержит бесконечно много элементов множества X . Обозначим ту половину I_2 , где бесконечно много элементов множества X через $I_3 = [a_3, b_3]$. Тогда

$$|I_3| = \frac{|I_1|}{2^2}$$

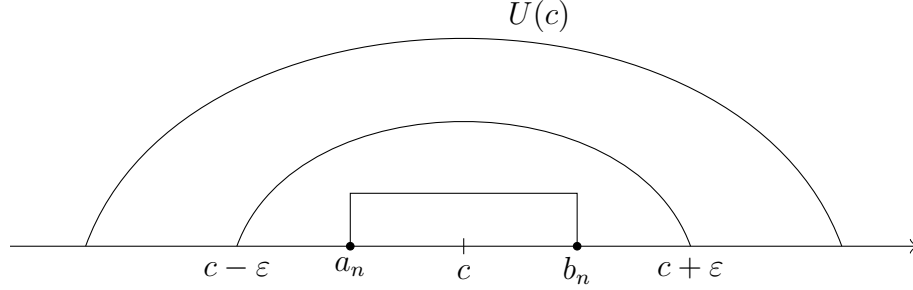
и т.д. На шаге n : $I_n = [a_n, b_n]$, $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ — середина I_n , I_n содержит бесконечно много элементов из X , тогда либо $[a_n, c_n]$, либо $[c_n, b_n]$ содержит бесконечно много элементов из $X \implies I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset I_n$ и содержит бесконечно много элементов из X . Таким образом, мы получили последовательность вложенных отрезков $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} : I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$

$$\begin{aligned} |I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}} &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|I_1|}{2^{n-1}} = 0 \implies \\ &\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |I_n| < \varepsilon. \end{aligned}$$

По принципу Коши-Кантора $\exists!$ общая точка c , т.е. $\forall n \in \mathbb{N} : c \in I_n$.

$$\forall U(c) \quad \exists \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(c) \subset U(c) \implies \exists n \in \mathbb{N} : I_n = [a_n, b_n] \subset U_\varepsilon(c)$$

(например, $|I_n| < \frac{\varepsilon}{2}$).



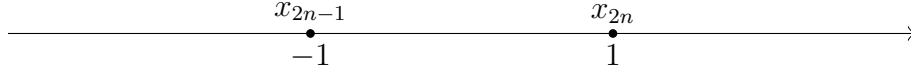
Отрезок I_n содержит бесконечно много элементов множества X по построению последовательности $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} \implies$ окрестность $U(c)$ содержит бесконечно много элементов из $X \implies c$ — предельная. \square

4.9 Предельные точки числовых последовательностей

Определение 4.9.1. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \iff$ любая окрестность $U(a)$ содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Замечание. Если a — предельная точка $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то любая $U(a)$ содержит какую-либо подпоследовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пример: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n = (-1)^n$.



Теорема 4.9.1. Точка $a \in \mathbb{R}$ является предельной для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \iff \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть a — предельная точка последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Выберем $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}, \varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0$.

Для $n = 1$ $U_{\varepsilon_1=1}(a)$ содержит ∞ много элементов $\implies \exists x_{n_1} \in U_{\varepsilon_1}(a)$, т.е. $|x_{n_1} - a| < 1$.

Для $n = 2$ $U_{\varepsilon_2=\frac{1}{2}}(a)$ содержит ∞ много элементов $\implies \exists n_2 > n_1 : x_{n_2} \in U_{\varepsilon_2}(a)$, т.е. $|x_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$.

Для $n = 3$ $U_{\varepsilon_3=\frac{1}{3}}(a)$ содержит ∞ много элементов $\implies \exists n_3 > n_2 : x_{n_3} \in U_{\varepsilon_3}(a)$, т.е. $|x_{n_3} - a| < \frac{1}{3}$ и т.д.

Для $n = k$ $U_{\varepsilon_k=\frac{1}{k}}(a)$ содержит ∞ много элементов $\implies \exists n_k > n_{k-1} : x_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}(a)$, т.е. $|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \implies \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ является подпоследователь-

ностью последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \implies \forall k \in \mathbb{N} : |x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0 &\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall k > N : \frac{1}{k} < \varepsilon \implies \\ &\implies \forall k > N \quad |x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} < \varepsilon \implies \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a. \end{aligned}$$

Докажем достаточность.

Пусть $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. Выберем любую $U(a)$ и найдем такое $\varepsilon > 0$, что $U_{\varepsilon}(a) \subset U(a)$:

$$\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall k > N : |x_{n_k} - a| < \varepsilon \implies x_{n_k} \in U_{\varepsilon}(a) \subset U(a).$$

Следовательно, $U(a)$ содержит бесконечно много элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, а значит a — предельная. \square