

Unidad 4. Análisis Operacional

Sesión especial pre-teoría

Isaac // isaac.lera@uib.es //

Unidad 4. Análisis Operacional

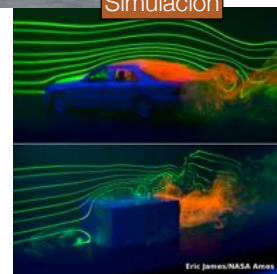


Modelo Matemático

$$\begin{aligned}
 R &= 24 \text{ kg} \\
 \rho &= 1.225 \text{ kg/m}^3 \\
 T_0 &= 298.15 \text{ K} \\
 \mu &= 1.81 \times 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s} \\
 \gamma &= 1.4 \\
 \beta &= 1.225 \text{ kg/m}^3 \\
 F &= \frac{1}{2} \rho v^2 C_D A \\
 T &= 298.15 \text{ K} \\
 \mu &= 1.81 \times 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s} \\
 \gamma &= 1.4 \\
 \beta &= 1.225 \text{ kg/m}^3 \\
 F &= \frac{1}{2} \rho v^2 C_D A \\
 T &= 298.15 \text{ K} \\
 \mu &= 1.81 \times 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s} \\
 \gamma &= 1.4 \\
 \beta &= 1.225 \text{ kg/m}^3 \\
 F &= \frac{1}{2} \rho v^2 C_D A
 \end{aligned}$$

Aerodynamics

Simulación



Valores precisos: medias, desv., distribuciones,...

Instrumental, Control de la prueba...

2

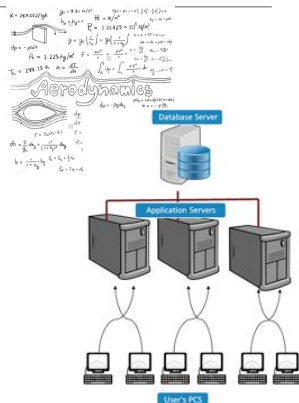
Unidad 4. Análisis Operacional



¿Es posible modelar infraestructuras de servicios para obtener indicadores de rendimiento?

Objetivos:

- Simplificar el proceso de obtención de métricas: tiempo de respuesta, productividad, límites del sistema,...
- Valorar la **adquisición** o la **mejora** de una parte o de la totalidad del sistema sin una gran inversión; y su **planificación** (Unidad 5).



Unidad 4. Análisis Operacional



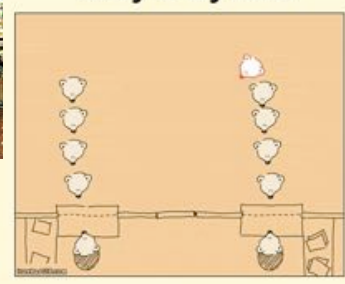
MEMENTO



¿Alguna vez habéis comprado en una **tienda física**?



Story of my life...



¡Os propongo una actividad!

4

Vamos a emular un entorno “real”

Dispositivo	Tiempo de Servicio
X	2
Y	1

role

“el cliente 4 solicita servicio a la estación X en el ciclo 3, y cuando acaba solicita servicio a la estación Y”

Cliente	Ciclo de Entrada	Solicitudes en orden de servicio
Cliente0	1	X
Cliente1	2	X
Cliente2	2	X
Cliente3	2	X
Cliente4	3	XY
Cliente5	4	XX
Cliente6	6	XX
Cliente7	6	XY

5

Indicadores

- “Diagrama”
- Tiempo respuesta, específico de cada estación y de cada cliente
- Tiempo de servicio
- Tiempo de espera
- Productividad -> Periodo de observación
- Trabajos/Clientes que entran -> Frecuencia de Llegada
- Trabajos que salen -> Productividad o Frecuencia de Salida
- Tamaño máximo de la cola de espera
- Visita
- Utilización
- ¿Qué ocurriría si se pudieran servir dos clientes al mismo tiempo?

6



¿lo podemos formalizar?



rotar



Número de clientes



7



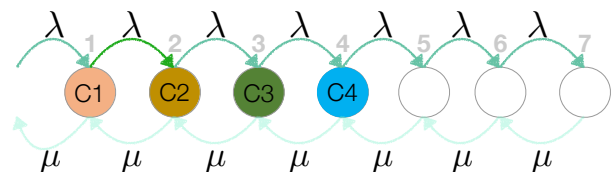
Una cola puede ser representada por un conjunto de estados

¿A qué ritmo **llegan** nuevos clientes?

λ *lambda*

¿A qué ritmo **son servidos** los clientes?

μ *mu*



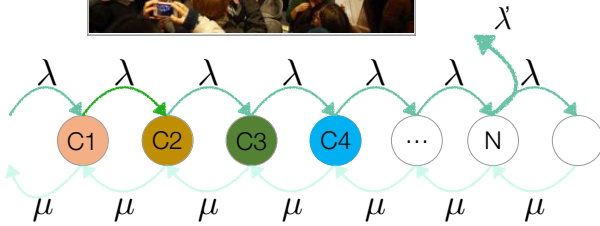
8



¿Vosotros entraríais a un sistema "lleno"?



¿tiene esa opción una Instrucción?



El conjunto de estados y el/los **tipos de distribuciones (t)**

9

Cadenas de Markov Markov Chains

- Estados
- Transiciones
- Probabilidades
- Tiempo
- Convergencia



Andrei Markov (1856-1922)

https://en.wikipedia.org/wiki/Andrey_Markov

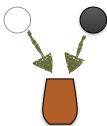
10

LA HISTORIA

**Jakob Bernoulli
(1654-1705)**



$p(\text{Cara}) = 1/2 = 0.5$
 $p(\text{Cruz}) = 0.5$



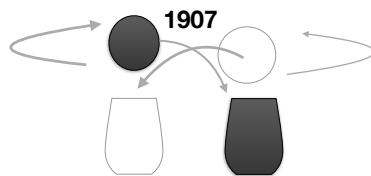
Extracciones aleatorias de bolas convergerá la $p(\text{blanca})$ y $p(\text{negra})$

**Pierre de Laplace
(1749-1827)**

¹¹ *Théorie Analytique des Probabilités*

Andrei Markov (1856-1922)

no era tan evidente que los eventos era independientes y su convergencia (teorema del límite central)



1913

Análisis lingüístico de un poema de 20.000 palabras
las probabilidades de letras en el poema no son independientes!

SE APLICAN

- **Predicciones meteorológicas:**

<https://towardsdatascience.com/a-very-simple-method-of-weather-forecast-using-markov-chain-lookup-table-19238e110938>

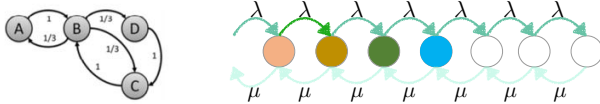


- **Urbanismo: movilidad**
- **Biología: poblaciones**
- **Teoría de juegos: probabilidades**
- **Química: reacciones**
- **Bioinformática: análisis de ADN**
- **Informática: reconocimiento de voz, texto, ..., simulaciones y Análisis Operacional (rendimiento)**

12

Cadenas de Markov

Una **cadena de Markov** es un proceso de evolución de una *Variable Aleatoria (VA)* entre diferentes estados a lo largo de una distribución de tiempo.



¿Qué interpretación podemos hacer de “nuestros” estados?

$P_n(t)$ Probabilidad de encontrar N-clientes en el tiempo t

$P_2(4s)$ Probabilidad de encontrar 2-clientes en el paso de 4s

$\lambda(t) \longrightarrow \lambda$
Depende del tipo de VA

13

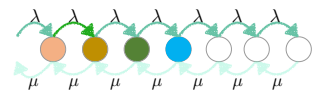
Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov discretas se pueden utilizar para **modelar procesos** interesantes que tienen su propio nombre y análisis:

- *Ehrenfest chains* (intercambio de moléculas de gas entre contenedores)
- *Bernoulli-Laplace chain* (difusión de dos gases entre contenedores)
- *Reliability chains* (éxitos y fallos)
- *Branching chain* (“evolución” de organismos o reacciones)
- **Queuing chains** (sirven para modelizar servicios)

• *Random walks on graphs*

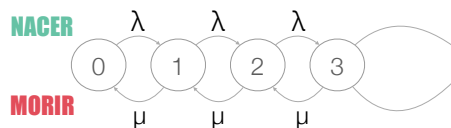
• **Birth-death chains**



Atención: Simplificación

14

Cadenas de Markov



A

$$P_n(t) = \underbrace{\lambda P_{n-1}(t)}_{\text{NACER}} + \underbrace{\mu P_{n+1}(t)}_{\text{MORIR}}$$

EQUILIBRIO

B

$$\lambda P_{n-1} = \mu P_n$$

C

$$P_n = \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1}$$

EQUILIBRIO

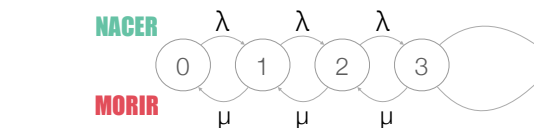
D

$$\text{“rho” } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \text{“UTILIZACIÓN”}$$

EQUILIBRIO

15

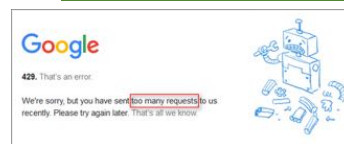
Cadenas de Markov



EQUILIBRIO

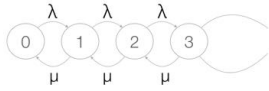
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \text{“UTILIZACIÓN”}$$

¿Qué ocurre si la utilización es mayor que 1?



16

Cadenas de Markov



$$P_n = \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

A

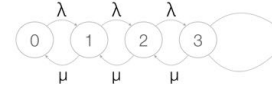
$$\begin{aligned} P_1 &= \rho P_0 \\ P_2 &= \rho P_1 = \rho \rho P_0 = \rho^2 P_0 \\ \dots \\ P_n &= \rho^n P_0 \end{aligned}$$

B

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_0 = 1$$

17

Cadenas de Markov



$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_0 = 1$$

A

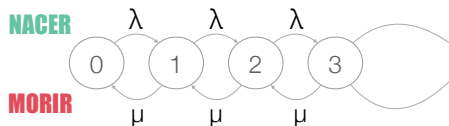
$$P_0 = \frac{1}{\rho^0 + \rho^1 + \rho^2 + \dots + \rho^{\infty}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} = 1 - \rho$$

B

$$P_0 = 1 - \rho$$

18

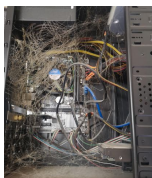
Cadenas de Markov



$$P_0 = 1 - \rho = 1 - \text{"UTILIZACIÓN"}$$

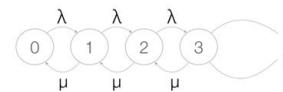


¿Qué representa el estado P_0 ?



19

Cadenas de Markov



$$P_n = \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_0 = 1 \quad P_0 = 1 - \rho$$

A

$$P_n = (1 - \rho) \rho^n$$

B

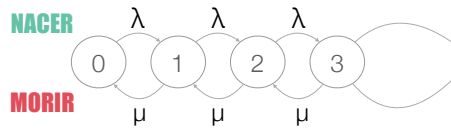
$$P_{\geq n} = \sum_{i=n}^{\infty} P_i = \sum_{i=n}^{\infty} (1 - \rho) \rho^i = \rho^n$$

20

Cadenas de Markov



P_n y $P_{>n}$?



$$P_n = (1 - \rho)\rho^n$$

$$P_{10} = (1 - 0.4) * 0.4^{10} = 0.0000629$$

$$P_{10} = (1 - 0.999) * 0.999^{10} = 0.00009904$$

$$P_{10} = (1 - 2.4) * 2.4^{10} = -8876.47333$$

$$P_{\geq 10} = 0.4^{10} = 0.00010485$$

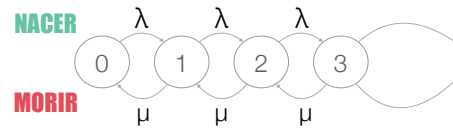
$$P_{\geq 10} = 0.999^{10} = 0.990044$$

$$P_{\geq 10} = 2.4^{10} = 6340.338096$$

$$P_{\geq n} = \rho^n$$

21

Cadenas de Markov



$$P_n = (1 - \rho)\rho^n$$

$$E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} n * P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n * (1 - \rho)\rho^n = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

$E[n]$, Esperanza, Número medio de trabajos en la cola

22



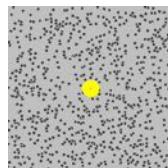
CURIOSIDADES

Libro: "el juego, la suerte"

Otros estudios:

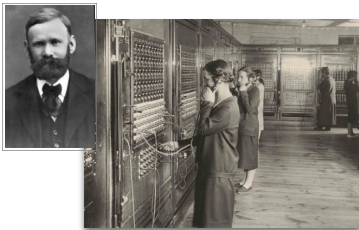
1900- Poincaré, Bachelier, Einsten: *Movimiento Browniano*

El problema de los tres cuerpos



1909 - A. K. Erlang:

"Waiting times and number of calls (on delays problems-for incoming calls in manual telephone exchange switchboards)"



Novela SCI-FI

Trilogía de los tres cuerpos

https://es.wikipedia.org/wiki/Agner_Krarpup_Erlang

23

Resultado de la actividad

