Самостійна робота з Основ дискретної математики

Номер варіанту обирати згідно з останньою цифрою свого студентського квитка. Цифра нуль відповідає десятому варіанту. У кожному з десяти завдань розв'язувати лише одне — відповідно до номеру свого варіанту

1. Нехай множина M містить n елементів. Визначити кількість відношень на M, які є:
   1) рефлексивними;
   2) нерефлексивними й неантирефлексивними;
   3) симетричними;
   4) антисиметричними;
   5) рефлексивними й несиметричними;
   6) рефлексивними й симетричними;
   7) антирефлексивними й симетричними;
   8) антирефлексивними й несиметричними;
   9) рефлексивними й антисиметричними;
   10) антирефлексивними й антисиметричними.

2. Нехай на множині всіх людей P означено такі відношення: $F = \{(x,y) \mid x,y \in P$ і x є батьком $y\}$, $D = \{(x,y) \mid x,y \in P$ і x є донькою $y\}$. Описати відношення:
   1) $F \circ F$;
   2) $D \circ D$;
   3) $F \circ D$;
   4) $D \circ F$;
   5) $D \circ F^{-1}$;
   6) $F^{-1} \circ D$;
   7) $F \circ D^{-1}$;
   8) $F^{-1} \circ D^{-1}$;
   9) $D^{-1} \circ F$;
   10) $D^{-1} \circ D^{-1}$.

3. На множині $M = \{1,2,3,4\}$ задано відношення $R_1 = \{(1,2),(2,4),(3,1),(4,3)\}$, $R_2 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$. Знайти відношення X на множині M, для якого виконується рівність:
   1) $(R_1 \circ R_1) \circ X = R_2$;
   2) $X \circ (R_1 \circ R_2) = R_2$;
   3) $R_2 \circ X = R_1 \circ R_2$;
   4) $R_1 \circ X = R_2$;
   5) $R_2 \circ X = R_1$;
   6) $(R_2 \circ R_2) \circ X = R_1$;
   7) $X \circ R_1 = R_2$;
   8) $X \circ R_2 = R_1$;
   9) $(R_2 \circ R_1) \circ X = R_1$;
   10) $R_1 \circ X = R_2 \circ R_1$.

4. Навести приклад таких відношень R_1 і R_2 на множині $M = \{1,2,3,4\}$, що:
   1) R_1 і R_2 антирефлексивні, а згортка $R_1 \circ R_2$ — не антирефлексивна;
   2) R_1 і R_2 антирефлексивні, а згортка $R_1 \circ R_2$ — рефлексивна;
   3) R_1 і R_2 симетричні, а згортка $R_1 \circ R_2$ — не симетрична;
   4) R_1 і R_2 симетричні й згортка $R_1 \circ R_2$ теж;
   5) R_1 і R_2 антисиметричні, а згортка $R_1 \circ R_2$ — не антисиметрична;

6) R_1 і R_2 антисиметричні й згортка $R_1 \circ R_2$ теж;
7) R_1 і R_2 транзитивні, а згортка $R_1 \circ R_2$ — не транзитивна;
8) R_1 і R_2 транзитивні й згортка $R_1 \circ R_2$ теж;
9) R_1 і R_2 транзитивні, а $R_1 \cup R_2$ — не транзитивне;
10) R_1 і R_2 транзитивні й $R_1 \cup R_2$ теж.

5. Побудувати приклад частково впорядкованої множини, яка:
1) має мінімальний елемент, але не має найменшого елемента;
2) має точно один мінімальний елемент, але не має найменшого елемента;
3) має максимальний елемент, але не має найбільшого елемента;
4) має точно один максимальний елемент, але не має найбільшого елемента;
5) має мінімальний і максимальний елементи, але не має найменшого і найбільшого елементів;
6) має точно один мінімальний і точно один максимальний елементи, але не має найменшого і найбільшого елементів;
7) не має жодного мінімального і максимального елементів та не має найменшого і найбільшого елементів;
8) має два мінімальні й три максимальні елементи;
9) має два максимальні елементи і найменший елемент;
10) має найменший і найбільший елементи й непорівнювані елементи.

6. У певному товаристві з n осіб кожен знайомий з k і тільки k іншими особами. З'ясувати, чи можливе подібне товариство для таких значень n і k:
1) $n = 7$, $k = 2$;
2) $n = 7$, $k = 3$;
3) $n = 6$, $k = 4$;
4) $n = 8$, $k = 3$;
5) $n = 8$, $k = 4$;
6) $n = 11$, $k = 3$;
7) $n = 7$, $k = 4$;
8) $n = 12$, $k = 3$;
9) $n = 10$, $k = 1$;
10) $n = 9$, $k = 5$.

7. Визначити, скільки існує попарно неізоморфних графів, які мають:
1) 6 вершин і 11 ребер;
2) 7 вершин і 18 ребер;
3) 8 вершин і 24 ребра;
4) 8 вершин і 26 ребер;
5) 10 вершин і 43 ребра;
6) n вершин і $n(n-1)/2 - 2$ ребра;
7) 8 вершин і 25 ребер;
8) 5 вершин і 8 ребер;
9) 6 вершин і 12 ребер;
10) 7 вершин і 19 ребер.

8. Побудувати три попарно неізоморфні дерева, які мають:
1) 6 ребер та 3 кінцеві вершини;
2) 6 ребер та 4 кінцеві вершини;
3) 7 ребер та 3 кінцеві вершини;
4) 10 ребер та 4 вершини степеня 3;
5) 8 ребер та 3 кінцеві вершини;
6) 12 ребер та 2 вершини степеня 5;
7) 7 ребер та 4 кінцеві вершини;

8) 8 ребер та 5 кінцевих вершин;
9) 9 ребер та 4 кінцеві вершини;
10) 13 ребер та 3 вершини степеня 4.

9. Яку найбільшу та яку найменшу кількість кінцевих вершин може мати дерево з n вершинами? Яку структуру мають відповідні дерева?
1) $n = 18$;
2) $n = 17$;
3) $n = 19$;
4) $n = 29$;
5) $n = 20$;
6) $n = 25$;
7) $n = 15$;
8) $n = 14$;
9) $n = 28$;
10) $n = 27$.

10. Побудувати два неізоморфні ейлерові графи з n вершинами і k ребрами:
1) $n = 8$, $k = 12$;
2) $n = 7$, $k = 12$;
3) $n = 8$, $k = 10$;
4) $n = 6$, $k = 8$;
5) $n = 7$, $k = 11$;
6) $n = 10$, $k = 16$;
7) $n = 7$, $k = 10$;
8) $n = 7$, $k = 13$;
9) $n = 8$, $k = 16$;
10) $n = 6$, $k = 10$.