Министерство образования Республики Беларусь
УО «Полоцкий государственный университет»

Факультет информационных технологий
Кафедра технологий программирования

Методы численного анализа
Лабораторная работа №6
На тему: «Метод последовательных приближений для решения интегральных уравнений»

Полоцк 2017 г.

Название: «Метод последовательных приближений для решения интегральных уравнений».

Цель работы: Изучить методы последовательных приближений для решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Теоретическая часть:

Линейные интегральные уравнения

Интегральным называется уравнение, в котором неизвестная функция u(x) стоит под знаком интеграла. В общем случае одномерное интегральное уравнение имеет вид (1):

$$\int_a^b K(x,s,u(s))ds = f(x,u(x)) \qquad a \le x \le b \qquad (1)$$

где *ядро* *K(x,s,u(s))* и *правая часть* *f(x,u(x))* – заданные функции, s – *переменная интегрирования*, *x* - *независимая переменная*, *u* - *искомая функция*.

Наиболее изученными и важными являются интегральные уравнения вида (1), в которых неизвестная функция u(x) входит линейно. Они называются *линейными интегральными уравнениями*. К ним относятся:

—*уравнения Фредгольма первого рода* $$\int_a^b K(x,s)u(s)ds = f(x) \qquad a \le x \le b \qquad (7)$$

—*уравнения Фредгольма второго рода* $$u(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)u(s)ds = f(x) \qquad a \le x \le b \quad (8)$$

В уравнениях Фредгольма ядро *K(x,s)* определено на квадрате a≤x≤b, a ≤s≤b.

Если K(x,s)=0 при x<s, т.е. ядро отлично от нуля только на треугольнике a≤s≤x, a≤x≤b, то уравнения (7), (8) переходят в уравнения *Вольтера* соответственно *первого* и *второго рода.*

$$\int_a^x K(x,s)u(s)ds = f(x) \qquad a \le x \le b \qquad (9) \qquad u(x) - \lambda\int_a^x K(x,s)u(s)ds = f(x) \qquad a \le x \le b \qquad (10)$$

Если правая часть уравнения (8) равна нулю, то получается *однородное уравнения Фредгольма второго рода,* которое имеет вид:

$$u(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)u(s)ds = 0 \qquad a \le x \le b\,(11) \text{ или } u(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)u(s)ds \qquad a \le x \le b \quad (12)$$

Для рассматриваемых интегральных уравнений основными задачами являются:

1. Нахождение решения неоднородного интегрального уравнения при заданном значении параметра λ;
2. Вычисление собственных значений и поиск соответствующих им собственных функций однородного интегрального уравнения.

Метод последовательных приближений для решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

Рассмотрим неоднородное уравнение Фредгольма второго рода:

$$u(x) \ = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) u(s) ds \qquad a \le x \le b \qquad (1)$$

Для решения (1) построим итерационный процесс, аналогичный методу простой итерации для решения нелинейного уравнения. Пусть $u_0(x)$ – начальное приближение искомой функции $u(x)$. Обычно полагают $u_0(x) = 0$. Подставим $u_0(x)$ в правую часть уравнения (1), получим выражение для первого приближения:

$$u_1 = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) u_0(s) ds \qquad a \le x \le b \qquad (2)$$

Подставляя найденное приближение в подынтегральное выражение в (1), найдем следующее приближение и т.д. Аналогично, подставляя найденное на k-ой итерации приближение в подынтегральное выражение, найдем k+1 приближение:

$$u_{k+1} = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) u_k(s) ds \qquad a \le x \le b \qquad k = 0,1,2... \qquad (3)$$

При достаточно малом значении параметра λ и ограниченном ядре $K(x,s)$ этот итерационный процесс сходится равномерно по x, причем сходимость *линейная*. Достаточное условие сходимости имеет вид:

$$q=M|\lambda|(b-a)<1, \quad M=\max|K(x,s)| \quad \text{для любых } x,s \qquad (4)$$

Пример. Методом последовательных приближений найти решение интегрального уравнения $u(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 (x+s) u(s) ds = 1 + x^3$.

Для применения итерационного процесса решения данного интегрального уравнения методом последовательных приближений проверим достаточное условие сходимости (4).

$M=\max|K(x,s)|= \max(x+s)\le 2$ и $q=M|\lambda|(b-a)=2*1/2*1\le 1$

Достаточное условие не выполняется только в одной точке. Далее примем в качестве начального приближения $u_0(x) = 0$. Тогда:

$$u_1(x) = 1 + x^3 + \frac{1}{2}\int_0^1 (x+s) u_0(s) ds = 1 + x^3$$

$$u_2(x) = 1 + x^3 + \frac{1}{2}\int_0^1 (x+s) u_1(s) ds = 1 + x^3 + \frac{1}{2}\int_0^1 (x+s)(1+s^3) ds = 1 + x^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}x + \frac{7}{10}\right)$$

$$u_3(x) = 1 + x^3 + \frac{1}{2}\int_0^1 (x+s) u_2(s) ds = 1 + x^3 + \frac{1}{2}\int_0^1 (x+s)\left(1 + x^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}x + \frac{7}{10}\right)\right) ds = 1 + x^3 + ...$$

Одним из вариантов метода последовательных приближений является метод, в котором используются степенные ряды. Он состоит в том, что искомое решение *u(x)* разлагается в ряд по степеням λ:

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k(x) \qquad (5)$$

где $u_k(x)$ - некоторая система функций, которая определяется из следующих соображений.

Подставив (5) в исходное уравнение (1), получим: $\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k(s)ds+f(x)$

Для определения $u_k(x)$ сравним коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем рекуррентные соотношения:

$$\lambda^0: \qquad u_0(x)=f(x)$$

$$\lambda^1: \qquad u_1(x)=\int_a^b K(x,s)u_0(s)ds$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (6)$$

$$\lambda^k: \qquad u_k(x)=\int_a^b K(x,s)u_{k-1}(s)ds$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Тогда приближенное решение определяется формулой: $u(x)\approx y_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\lambda^k u_k(x)$ (7).

При ограниченных *K(x,s)* и *f(x)* ряд (7) сходится, если выполняется достаточное условие сходимости (4), т.е. выполнение неравенства: $q=|\lambda|(b-a)\|K(x,s)\|<1$

В вычислениях интегралы, возникающие в этом методе, редко удается выразить через элементарные функции. Поэтому обычно ограничиваются нахождением первых приближений.

Пример. Методом последовательных приближений найти решение интегрального уравнения $u(x)-\frac{1}{2}\int_0^1(x+s)u(s)ds=1+x^3$, полагая n = 3. Легко видеть, что $\lambda=\frac{1}{2}$ и

$$u_0(x)=1+x^3 \qquad u_1(x)=\int_0^1(x+s)(1+s^3)ds=\frac{5}{4}x+\frac{7}{10}$$

$$u_2(x)=\int_0^1(x+s)\left(\frac{5}{4}s+\frac{7}{10}\right)ds=\frac{53}{40}x+\frac{23}{30} \qquad u_3(x)=\int_0^1(x+s)\left(\frac{53}{40}s+\frac{23}{30}\right)ds=\frac{343}{240}x+\frac{33}{40}$$

Тогда приближенное решение можно записать в виде:

$$y_3(x)=1+x^3+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}x+\frac{7}{10}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{53}{40}x+\frac{23}{30}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{343}{240}x+\frac{33}{40}\right)=$$
$$=x^3+\frac{2179}{1920}x+\frac{1579}{960}$$

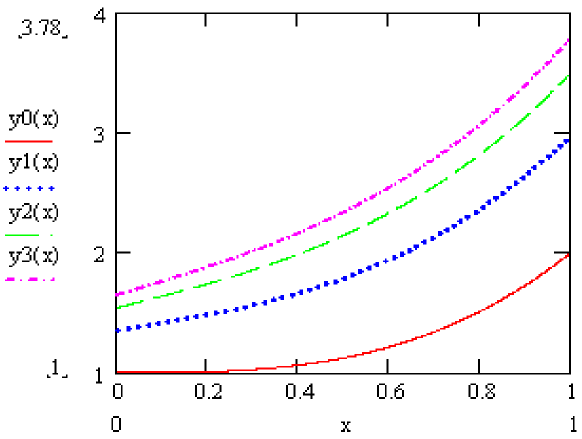
Чтобы убедиться в наличии сходимости этого процесса построим на графике приближенные решения, учитывая что:

$$y0(x) = 1 + x^3$$

$$y1(x) = 1 + x^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}x + \frac{7}{10}\right)$$

$$y2(x) = 1 + x^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}x + \frac{7}{10}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{53}{40}x + \frac{23}{30}\right)$$

$$y3(x) = x^3 + \frac{2179}{1920}x + \frac{1579}{960}$$



Контрольные вопросы:

1. Какое уравнение называется интегральным?
2. Какие существуют наиболее изученные и важные интегральные уравнения?
3. Назовите основные задачи для рассматриваемых интегральных уравнений.
4. Сформулируйте метод последовательных приближений для решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.

Содержание заданий:

1. Найти приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода, используя метод последовательных приближений.

Варианты заданий:

Вариант	Задание
1	$u(x) + \frac{1}{4}\int_0^2 (x+s)u(s)ds = 1 + x^2$
2	$u(x) + \frac{1}{3}\int_0^{1.5} \left(\frac{1}{2}x - s\right)u(s)ds = 1 + x$
3	$u(x) + \frac{1}{4}\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{2}s\right)u(s)ds = 1 - x$
4	$u(x) + \frac{1}{8}\int_1^{2.5} \left(\frac{1}{2}x - s^2\right)u(s)ds = 1 + x^2$
5	$u(x) + \frac{1}{4}\int_{0.5}^2 \left(x^2 - s^2\right)u(s)ds = 1 + x^3$
6	$u(x) + \frac{1}{4}\int_{0.5}^2 \left(x + \frac{1}{4}s^3\right)u(s)ds = 1 + x^3 + x$

7	$u(x)+\frac{1}{2}\int\limits_{0.5}^{1}(x+s)u(s)ds = x^2+3x-1$
8	$u(x)+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\left(x^2+s^2\right)u(s)ds = x^3-x^2+1$
9	$u(x)+\frac{1}{4}\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{5}s^2\right)u(s)ds = 1+\frac{1}{2}x$
10	$u(x)+\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{1.5}\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}s^2\right)u(s)ds = x^2-3x+5$
11	$u(x)+\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{2}\left(x^2+\frac{1}{4}s^2\right)u(s)ds = 1-x^3$
12	$u(x)+\frac{1}{3}\int\limits_{0.5}^{2}\left(x-\frac{1}{4}s^2\right)u(s)ds = 1+x^2$
13	$u(x)+\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{1.5}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{9}s^2\right)u(s)ds = x^2-x+1$
14	$u(x)+\frac{1}{4}\int\limits_{1}^{2}\left(x-\frac{1}{8}s^2\right)u(s)ds = 1-x$
15	$u(x)+\frac{1}{8}\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{13}s^3\right)u(s)ds = 1+x$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретической частью по данной теме.
2. Ответить на контрольные вопросы к лабораторной работе.
3. Получить вариант заданий у преподавателя.
4. Выполнить индивидуальные задания в соответствии с вариантом заданий.
5. Составить отчёт о проделанной работе.
6. Показать программу и отчёт преподавателю.

Содержание отчёта:

1. Титульный лист (идентификация).
2. Тема и цель работы.
3. Краткие теоретические сведения.
4. Вариант и условие заданий.
5. Анализ заданий (алгоритм выполнения заданий).

6. Основные и промежуточные результаты по каждому пункту хода выполнения работы (листинг программного кода, реализующий данный алгоритм; скриншот результатов выполнения программы; скриншоты результатов работы в математическом пакете Mathcad).

7. Выводы о проделанной работе.

Защита лабораторной работы проводится индивидуально. Для сдачи работы студент должен предъявить программу, отчет, ответить на контрольные вопросы, дать пояснения по выполненной работе.

Дополнительные задания:

1. Найти приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода, используя метод последовательных приближений.

Варианты заданий:

Вариант	Задание
1	$u(x)+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{(xs)^2}{5}u(s)ds=1+x+e^x$
2	$u(x)+\int\limits_0^{0.5}\frac{1}{5+\cos(x+s)}u(s)ds=\sin(\pi x)$
3	$u(x)-0.3\int\limits_0^{1}\frac{1}{\ln(2+xs)}u(s)ds=1+e^x$
4	$u(x)-\int\limits_0^{1}e^{\frac{-(x+s)}{5}}u(s)ds=\cos(\pi x)$
5	$u(x)+0.1\int\limits_0^{1}tg\left(\frac{x}{1+s}\right)u(s)ds=\ln(1+x)$
6	$u(x)-\frac{1}{7}\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{5+\sin^2(x+s)}u(s)ds=\cos(x)$
7	$u(x)-\frac{1}{2}\int\limits_0^{1}\frac{\sin xs}{2+s}u(s)ds=e^{-x}$
8	$u(x)+\frac{1}{9}\int\limits_0^{1}\cos x(1+s)^2u(s)ds=\frac{\sin x}{1+x^2}$
9	$u(x)-\int\limits_0^{\pi}tg\left(\frac{x+s}{2}\right)u(s)ds=1+\sin x$
10	$u(x)+\frac{1}{4}\int\limits_0^{1}\cos\frac{x}{5+s}u(s)ds=e^x$