Министерство образования Республики Беларусь
УО «Полоцкий государственный университет»

Факультет информационных технологий
Кафедра технологий программирования

Методы численного анализа
Лабораторная работа №5
На тему: «Метод коллокаций и Галёркина для решения краевой задачи ОДУ»

Полоцк 2017 г.

Название: «Метод коллокаций и Галёркина для решения краевой задачи обыкновенных дифференциальных уравнений».

Цель работы: Изучить метод коллокаций и Галёркина для нахождения решения краевой задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теоретическая часть:

Метод коллокаций

Пусть имеем задачу, в основе которой лежит линейное дифференциальное уравнение второго порядка следующего вида: $u''(x)+p(x)u'(x)+q(x)u(x)=f(x) \quad x\in[0,1]$ (1)

Где *p(x), q(x), f(x)*- известные функции и задача имеет нулевые граничные условия:

$$u(0)=0 \qquad u(1)=0 \qquad (2)$$

Будем искать приближенное решение этой задачи (1)-(2) в виде:

$$u(x)\approx y(x)=\varphi_0+\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x) \qquad (3)$$

Функция $\varphi_0=0$, т.к. имеем нулевые граничные условия. Следовательно, можем записать решение в виде (4): $u(x)\approx y(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x)$ (4)

Базисные функции $\varphi_i \quad i=1,2,...,n$, дважды дифференцированы и должны удовлетворять нулевым граничным условиям задачи, т.е. $\varphi_i(0)=\varphi_i(1)=0 \quad i=1,2,...,n$ (5)

На отрезке [0,1] построим сетку, т.е. выберем n точек $\omega_h=\{0=x_1<x_2<...<x_n=1\}$, где x_k – узлы сетки ω_h, k=1,…,n и называются *точками коллокации*.

Потребуем, чтобы приближенное решение (4) точно удовлетворяло дифференциальному уравнению (1) в этих n точках, т.е. требуем выполнения следующего равенства:

$$y''(x_k)+p(x_k)y'(x_k)+q(x_k)y(x_k)=f(x_k) \qquad x_k\in[0,1] \quad k=1,2,\ldots,n \quad (6)$$

Так как невязка для исходной задачи (1)-(2) определяется по (7):

$$Z(x,c_1,c_2,...,c_n)=y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)-f(x) \qquad (7),$$

то соотношение (6) означает, *что в точках коллокации невязка уравнения (1) равна нулю и, следовательно, эта невязка будет ортогональна любому набору функций*.

Подставим в (6) вместо *y(x)* правую часть выражения (4), и выполним дифференцирование и соберем коэффициенты, получаем систему n линейных уравнений с n неизвестными $c_i \quad i=1,2,...,n$. Введем обозначения:

$$a_{ki}=\left(\frac{d^2}{dx^2}\varphi_i(x_k)+p(x_k)\frac{d}{dx}\varphi_i(x_k)+q(x_k)\varphi_i(x_k)\right) i=1,2,...,n \quad k=1,2,...,n \quad (10)$$

$$F=\{f(x_k)\} \qquad k=1,2,...,n \qquad (11)$$

$$C=\{c_i\} \quad i=1,2,...,n \tag{12}$$

$$A=\{a_{ki}\} \quad i=1,2,...,n \quad k=1,2,...,n \tag{13}$$

В этих обозначениях (10)-(13) система будет выглядеть так: $AC=F$ (14), где A – матрица размера n x n с элементами $A=\{a_{ki}\} i=1,2,...,n \quad k=1,2,...,n$, $C=\{c_i\} \quad i=1,2,...,n$ – вектор неизвестных коэффициентов, $F=\{f(x_k)\}$- вектор-столбец свободных членов.

Решив систему (14), найдем значения параметров $c_i \quad i=1,2,...,n$ и, следовательно, конкретное выражение приближенного решения (4) исходной задачи (1)-(2).

Таким образом, *решение линейной двухточечной краевой задачи методом коллокаций состоит в следующем*:

1. на отрезке поиска решения нужно выбрать точки коллокаций x_i i=1,2,…,n, т.е. построить сетку $\omega_h=\{a=x_1<x_2<...<x_n=b\}$;
2. нужно подобрать функцию φ_0 так, чтобы выполнялись граничные условия и выбрать систему базисных функций $\varphi_i \quad i=1,2,...,n$, удовлетворяющих нулевым граничным условиям;
3. выразить приближенное решение в виде (4);
4. построить систему (14), т.е. найти коэффициенты $\{a_{ki}\} i=1,2,...,n \quad k=1,2,...,n$ и вектор F;
5. решить систему (14), т.е. определить значения компонент вектора C;
6. записать решение в явном виде;
7. найти решение задачи по (3) в любых точках отрезка, в том числе и в точках коллокаций.

Пример. Методом коллокаций решить следующую задачу:

$$u''(x)+u(x)=-x \qquad x\in[0,1]$$

$$u(0)=0 \qquad u(1)=0$$

Выберем узлы коллокаций $x_k=0.25k \quad k=1,2$ и определим базисные функции:

$$\varphi_0=0, \qquad \varphi_1(x)=x(1-x), \quad \varphi_2(x)=x^2(1-x).$$

Функция $\varphi_0=0$ удовлетворяет граничным условиям. Функции $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ линейно независимые, дважды непрерывно дифференцируемые и удовлетворяют нулевым граничным условиям. Действительно: $\varphi_1(0)=0(1-0)=0, \quad \varphi_2(0)=0^2(1-0)=0$

$$\varphi_1(1)=1(1-1)=0, \quad \varphi_2(1)=1^2(1-1)=0$$

Таким образом, решение исходной задачи будем искать в виде:

$$u(x)\approx y(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)=c_1x(1-x)+c_2x^2(1-x)$$

Найдем производные базисных функций: $\varphi_1''(x)=-2 \qquad \varphi_2''(x)=2-6x$

И определим коэффициенты матрицы *A*,

т.е. $a_{ki} = \varphi_i''(x_k) + \varphi_i(x_k)$ с учетом, что $x_1 = 0.25 \quad x_2 = 0.5$:

$$a_{11} = \varphi_1''(x_1) + \varphi_1(x_1) = -2 + x_1(1 - x_1) = -2 + x_1 - x_1^2 = -\frac{29}{16}$$

$$a_{21} = \varphi_1''(x_2) + \varphi_1(x_2) = -2 + x_2 - x_2^2 = -\frac{7}{4}$$

$$a_{12} = \varphi_2''(x_1) + \varphi_2(x_1) = 2 - 6x_1 + x_1^2(1 - x_1) = 2 - 6x_1 + x_1^2 - x_1^3 = \frac{35}{64}$$

$$a_{22} = \varphi_2''(x_2) + \varphi_2(x_2) = 2 - 6x_2 + x_2^2(1 - x_2) = 2 - 6x_2 + x_2^2 - x_2^3 = -\frac{7}{8}$$

Далее строим систему уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{29}{16}c_1 + \frac{35}{64}c_2 = \frac{1}{4} \\ -\frac{7}{4}c_1 - \frac{7}{8}c_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{и находим ее решение} \quad C = \begin{bmatrix} -0.194 \\ -0.184 \end{bmatrix}$$

Таким образом, приближенное решение исходной задачи можем записать в виде: $u(x) \approx y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = -0.194x(1-x) - 0.184x^2(1-x)$

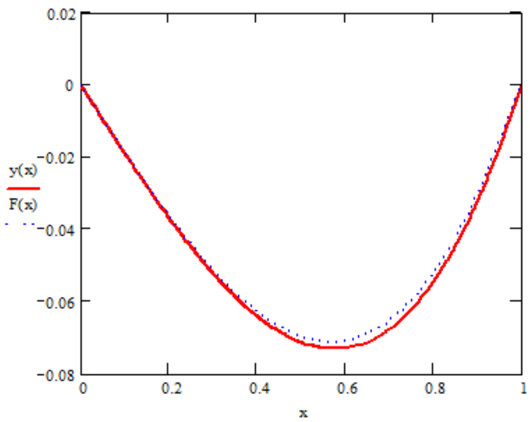
Найдем решение исходной задачи с помощью стандартных функций:

GIVEN

$$\frac{d^2}{dx^2}z(x) + z(x) = x$$

$$z(0) = 0 \qquad z(1) = 0$$

$$F := \mathrm{odesolve}(x, 1)$$



Метод Галеркина

<u>Метод Галеркина</u> основывается на том, что *для отыскания коэффициентов в линейном разложении приближенного решения краевой задачи требуют выполнения ортогональности невязки полученной системы алгебраических уравнений к системе базисных функций*.

Рассмотрим применение <u>*метода Галеркина к двухточечной граничной задаче*</u>, где *p(x)*, *q(x)*, *f(x)*- известные функции: $\quad u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x) \qquad x \in [a, b] \qquad (13)$

Граничные условия выражаются следующим образом:

$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1 \qquad (14) \qquad$ и $\qquad \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2 \qquad (15)$

Параметры $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ конкретные числовые значения, причем выполняется условие $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, i = 1,2$.

Будем искать приближенное решение этой задачи в виде (6), т.е. $u(x) \approx y(x) = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)$ (16). $\varphi_0(x)$, отвечает за <u>выполнение граничных условий</u> (14)-(15), $\varphi_i(x)$ i=1,2,…,n – <u>базисные функции</u>, удовлетворяющие нулевым граничным условиям.

Необходимо определить невязку решения *u(x)* задачи (13)-(15) из уравнения (13) в виде (17): $R(x, c_1, c_2, ..., c_n) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) - f(x)$ (17)

Потребуем ортогональности невязки (17) и системы базисных функций $\varphi_k(x)$ k=1,2,…,n, т.е. для k=1,2,…,n выполнения: $\int_a^b (y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) - f(x))\varphi_k(x)dx = 0$ (18).

Подставим выражение приближенного решения в виде (16) в равенство (18) для k=1,2,…,n, поменяем местами суммирование и интегрирование, получим систему уравнений вида (20): $\sum_{i=1}^{n}(c_i a_{ik} - b_k) = 0 \qquad k = 1,2,...,n$ (20)

Где $a_{ik} = \int_a^b (\varphi_i''(x) + p(x)\varphi_i'(x) + q(x)\varphi_i(x))\varphi_k(x)dx$ (21)

$b_k = \int_a^b [f(x) - (\varphi_0''(x) + p(x)\varphi_0'(x) + q(x)\varphi_0(x))]\varphi_k(x)dx$ (22)

Вычислив все коэффициенты (21)-(22), решив систему (20) относительно коэффициентов c_i i=1,2,…,n, найдем приближенное решение исходной задачи.

Рассмотрим пример. Методом Галеркина решить задачу:

$u''(x) + 2xu'(x) - 2u(x) = 2x^2 \qquad x \in [0,1]$

$u(1) + u'(1) = 0 \qquad u'(0) = -2$

Имеем $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1, \gamma_1 = -2, \gamma_2 = 0$. Подберем систему базисных функций. Будем использовать при этом комбинации функций $1, x, x^2, ..., x^n$.

Предположим, что функция $\varphi_0(x)$ имеет следующий вид $\varphi_0(x) = D + Cx$. При этом эта функция $\varphi_0(x)$ должна удовлетворять граничным условиям на концах отрезка. Найдем, что $\varphi_0'(x) = C$ и подставим $\varphi_0'(x) = C$ в первое граничное условие , получим C= -2. Запишем второе граничное условие: $\varphi_0(1) + \varphi_0'(1) = 0$ или D+C*1+C=0. Из этого можно определить второй коэффициент, т.е. D-2-2=0 или D=4. Окончательно получили $\varphi_0(x) = 4 - 2x$.

Для базисных функций $\varphi_i(x)$ i=1,2,…,n должны выполняться условия: $\varphi_i'(0) = 0$ $\varphi_i(1) + \varphi_i'(1) = 0$. Если взять $\varphi_i(x) = D_i + x^{i+1}$, то первое граничное условие выполняется.

Параметр D найдем из второго граничного условия. Определим первую производную $\varphi_i'(x) = D_i + x^{i+1} = (i+1)x^i$ и подставим выражения $\varphi_i(x)$ и $\varphi_i'(x)$ во второе граничное условие, т.е. при x=1. Имеем: $(D_i + 1) + (i+1) = 0$, $D_i = -(i+2)$.

Ограничимся первоначально i=1,2. Получаем систему базисных функций:

$$\varphi_0(x) = 4 - 2x \qquad \varphi_1(x) = x^2 - 3 \qquad \varphi_2(x) = x^3 - 4.$$

И соответственно:

$$\varphi_0'(x) = -2 \qquad \varphi_0''(x) = 0$$

$$\varphi_1'(x) = 2x \qquad \varphi_1''(x) = 2$$

$$\varphi_2'(x) = 3x^2 \qquad \varphi_2''(x) = 6x$$

Теперь можно определить коэффициенты (21) и (22) для системы уравнений (20). Имеем:

$$a_{11} = \int_0^1 (\varphi_1'' + 2x\varphi_1' - 2\varphi_1)\varphi_1 dx = \int_0^1 (2 + 2x - 2x - 2x^2 + 6)(x^2 - 3)dx = \int_0^1 (2x^2 + 8)(x^2 - 3)dx = -22{,}93333$$

$$a_{12} = \int_0^1 (\varphi_1'' + 2x\varphi_1' - 2\varphi_1)\varphi_2 dx = \int_0^1 (2x^2 + 8)(x^3 - 4)dx = -32{,}3333$$

$$a_{21} = \int_0^1 (\varphi_2'' + 2x\varphi_2' - 2\varphi_2)\varphi_1 dx = \int_0^1 (6x + 2x3x^2 - 2x^3 + 8)(x^2 - 3)dx = \int_0^1 (4x^3 + 6x + 8)(x^2 - 3)dx = -31{,}16667$$

$$a_{22} = \int_0^1 (\varphi_2'' + 2x\varphi_2' - 2\varphi_2)\varphi_2 dx = \int_0^1 (4x^3 + 6x + 8)(x^3 - 4)dx = -44{,}22857$$

$$b_1 = \int_0^1 [x^2 - \varphi_0''(x) - 2x\varphi_0'(x) + 2\varphi_0(x)]\varphi_1(x)dx = \int_0^1 (x^2 + 4x + 8 - 4x)(x^2 - 3)dx = -22{,}9333$$

$$b_2 = \int_0^1 [x^2 - \varphi_0''(x) - 2x\varphi_0'(x) + 2\varphi_0(x)]\varphi_2(x)dx = \int_0^1 (2x^2 + 8)(x^3 - 4)dx = -32{,}33333$$

Окончательно имеем следующую систему уравнений относительно коэффициентов разложения $c_i(x)$ приближенного решения y(x):

$$\begin{cases} 22{,}9333 \cdot \mathrm{c}_1 + 31{,}16667 \cdot \mathrm{c}_2 = 22{,}93333 \\ -32{,}3333 \cdot \mathrm{c}_1 + 44.22857 \cdot \mathrm{c}_2 = 32{,}33333 \end{cases}$$

Решение этой системы $c_1 = 1$ и $c_2 = -0.000258$ подставляем в формулу (16) и решение исходной задачи будет выглядеть следующим образом:

$$u(x) \approx y(x) = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x) = 4 - 2x + c_1(x^2 - 3) + c_2(x^3 - 4)$$

т.е. имеем: $y(x) = 1 - 2x + x^2 - 0.000258x^3$.

Теперь можем найти значение исходной задачи в любой точке отрезка [0;1]. Точное решение задачи $u(x) = (1-x)^2$.

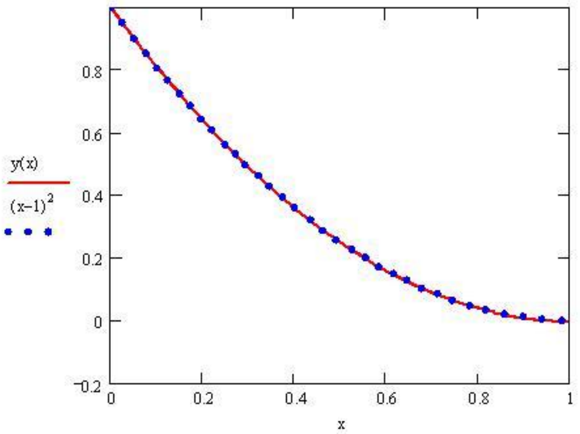


Рисунок 1 – Графики функций приближенного и точного решения

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте постановку линейной двухточечной краевой задачи для метода коллокаций.
2. Запишите вид приближенного решения для такой задачи.
3. Каким условиям должны удовлетворять базисные функции?
4. Перечислите этапы решения линейной двухточечной краевой задачи методом коллокаций.
5. На чем основывается метод Галеркина?
6. Сформулируйте постановку двухточечной граничной задачи для метода Галеркина.
7. Запишите вид приближенного решения для такой задачи.
8. За что отвечает функция $\varphi_0(x)$?
9. Каким условиям должны удовлетворять базисные функции?

Содержание задания:

Найти решения граничных задач на отрезке [a,b] с шагом h=0.1:

1. используя метод коллокаций;
2. используя метод Галёркина.

Оценить погрешность полученного решения.

Варианты заданий:

Вариант	Задание
1	$\begin{cases} y'' - y'(1+x) - y = \dfrac{2}{(1+x)^3} \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 0.5 \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 1$
2	$\begin{cases} y'' + \dfrac{2}{x-2} y' + (x-2)y = 1 \\ y(0) = -0.5 \\ y(1) = -1 \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 1$
3	$\begin{cases} y'' + \dfrac{4x}{x^2+1} y' - \dfrac{1}{x^2+1} y = \dfrac{-3}{(x^2+1)^2} \\ y'(0) = 0 \\ y(1) = 0.5 \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 1$
4	$\begin{cases} y'' - (x+1)y' - y = \dfrac{x^2+2x+2}{1+x} \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1.38294 \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 1$
5	$\begin{cases} y'' - y' - 2y = -3e^{-x} \\ y'(0) = 0 \\ y(1) + 2y'(1) = 0 \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 1$
6	$\begin{cases} y'' - 2y' - y = -2xe^{x} \\ y(0) = 0 \\ y(1) = e \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 1$
7	$\begin{cases} y'' - (1+x^2)y' - 2xy = \dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \\ y(0) - 2y'(0) = 1 \\ y(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 1$
8	$\begin{cases} y'' - 0.3^2 y = -0.3^2 x \\ y(0) = 1 \\ y(1) = e^{0.3} + 1 \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 1$

9	$\begin{cases} y'' + \dfrac{1.5}{x+1} y' = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}} \\ 3y(0) - y'(0) = 1 \\ y'(1) = \sqrt{2} \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 1$
10	$\begin{cases} y'' - (x+3)^2 y' - \dfrac{2}{(x+3)^2} y = 3 \\ y(0) - y'(0) = \dfrac{4}{3} \\ y(1) = \dfrac{3}{4} \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 1$
11	$\begin{cases} y'' + \dfrac{1}{2(x+2)} y' - y = -\sqrt{x+2} \\ y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ y(1) = \sqrt{3} \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 1$
12	$\begin{cases} y'' + \dfrac{3}{2(x+2)} y' - (x+2)y = -2\sqrt{x+2} + 2(x+2) \\ y(0) - 2y'(0) = \dfrac{3}{\sqrt{2}} - 2 \\ y'(1) = \dfrac{-1}{\sqrt{27}} \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 1$
13	$\begin{cases} y'' + y' - \dfrac{1}{x} y = 2x + 4 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 3 \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 1$
14	$\begin{cases} y'' - \dfrac{1}{x} y' = \dfrac{-2}{x^2} \\ y'(0.5) = 2 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$ $a = 0.5 \quad b = 1$
15	$\begin{cases} y'' + y' - \dfrac{6x}{2x^2+1} y = 12x + 1 \\ y'(0) = 1 \\ y(1) = 3 \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 1$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретической частью по данной теме.
2. Ответить на контрольные вопросы к лабораторной работе.
3. Получить вариант задания у преподавателя.
4. Выполнить индивидуальное задание в соответствии с вариантом задания.
5. Составить отчёт о проделанной работе.
6. Показать программу и отчёт преподавателю.

Содержание отчёта:

1. Титульный лист (идентификация).
2. Тема и цель работы.
3. Краткие теоретические сведения.
4. Вариант и условие задания.
5. Анализ задания (алгоритм выполнения задания).
6. Основные и промежуточные результаты по каждому пункту хода выполнения работы (листинг программного кода, реализующий данный алгоритм; скриншот результатов выполнения программы; скриншоты результатов работы в математическом пакете Mathcad).
7. Выводы о проделанной работе.

Защита лабораторной работы проводится индивидуально. Для сдачи работы студент должен предъявить программу, отчет, ответить на контрольные вопросы, дать пояснения по выполненной работе.

Дополнительное задание:

Найти решения граничных задач на отрезке [a,b] с шагом h=0.1, используя метод коллокаций. Оценить погрешность полученного решения.

Вариант	**Задание**
1	$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x} y' - 2y = -2x^2 \\ y'(0.5) = 1 \\ y(1) = 3 \end{cases}$ $a = 0.5 \quad b = 1$

2	$\begin{cases} y'' - \dfrac{2}{x}y' - \dfrac{4}{x^2+2}y = -4 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 8 \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 1$

Ответы для метода коллокаций:

Вариант	Ответ
1	$y(x) = \dfrac{1}{1+x}$
2	$y(x) = \dfrac{1}{x-2}$
3	$y(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
4	$y(x) = (x+1)\ln(x+1)$
5	$y(x) = (x+1)e^{-x}$
6	$y(x) = xe^{x}$
7	$y(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
8	$y(x) = e^{0.3x} + x$
9	$y(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}$
10	$y(x) = \dfrac{3}{x+3}$
11	$y(x) = \sqrt{x+2}$
12	$y(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}} - 2$
13	$y(x) = 2x^2 + x$
14	$y(x) = \ln(x)$
15	$y(x) = (2x^2+1)x$

Вариант	Ответы для дополнительного задания
1	$y(x) = x^2 + 2$
2	$y(x) = (x^2+2)x^2$