Министерство образования Республики Беларусь
УО «Полоцкий государственный университет»

Факультет информационных технологий
Кафедра технологий программирования

Методы численного анализа
Лабораторная работа №8
На тему: «Методы решения граничных задач для нестационарного уравнения теплопроводности»

Полоцк 2017 г.

Название: «Методы решения граничных задач для нестационарного уравнения теплопроводности».

Цель работы: Научиться находить решения задач для нестационарного уравнения теплопроводности используя явную, чисто неявную и симметричную схему.

Теоретическая часть:

Постановка задачи

Будем рассматривать смешанную задачу для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами в стержне единичной длины, т.е. в области D={0≤x≤1; 0≤t≤T}. Нужно найти непрерывное решение $u= u(x,t)$ смешанной задачи, которая записывается следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \qquad 0\le x\le 1 \qquad 0\le t\le T \qquad (1)$$

$u(x,0)=u0(x)$ начальное условие (2)

$u(0,t)=u1(t)$ граничное условие слева (3)

$u(1,t)=u2(t)$ граничное условие справа (4).

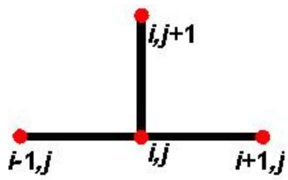
Все функции $u0(x)$, $u1(t)$,$u2(t)$ предполагаются заданными. Начальные и граничные условия должны быть согласованы, т.е. должны выполняться условия:

$$u(0;0)=u0(0)=u1(0) \qquad u(1;0)=u0(1)=u2(0).$$

Явная схема

Пусть имеем смешанную задачу (1)-(4). Для решения применим ***метод сеток***. Для этого:

1. В области, ограниченной отрезками $0\le x\le 1$ и $0\le t\le T$ построим пространственно-временную прямоугольную сетку $\omega_{h,\tau}=\omega_h\times\omega_\tau$;
2. в узлах сетки определим сеточные функцию $y_i^j=y(x_i,t_j)$;
3. для выбора соотношений, аппроксимирующие производные, зададим 4-х точечный шаблон вида:



4. В соответствие с выбранным шаблоном запишем конечно-разностную производную по времени: $$\frac{\partial u}{\partial t}\approx\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau} \qquad (5)$$
5. вторую производную по параметру x аппроксимируем как: $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\approx\frac{y_{i+1}^j-2y_i^j+y_{i-1}^j}{h^2} \qquad (6)$$
6. функцию источника заменим сеточной функцией вида $\varphi_i^j=f(x_i,t_j)$;

7. В результате имеем разностное уравнение, которое аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение в узле (x_i, t_j) с первым порядком по τ и вторым по h при условии, что разность $\varphi_i^j - f(x_i, t_j)$ имеет тот же порядок малости. И для завершения построения разностной схемы распространим разностное уравнение на все внутренние точки сетки $\omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$ и учтем начальные и граничные условия. Получим:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} + \varphi_i^j \qquad i = 1,...,n-1; \quad j = 1,...,K-1 \qquad (8)$$

$$y_i^0 = u0(x_i) \qquad i = 0,1,...,n; \qquad (9)$$

$$y_0^j = u1(t_j) \qquad y_n^j = u2(t_j) \quad j = 0,1,...,K \qquad (10)$$

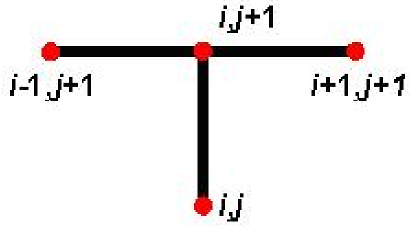
Эта схема (8)-(10) представляет собой *системy линейных алгебраических уравнений*, число которых совпадает с числом неизвестных. Следовательно, система имеет единственное решение, находить которое нужно по слоям. Решение на *нулевом слое* задается начальным условием (9) вида $y_i^0 = u0(x_i)$ $i = 0,1,...,n$. Если решение на j-том слое уже найдено, то на j+1 слое решение находится по явной формуле вида: $y_i^{j+1} = y_i^j + \tau(\frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} + \varphi_i^j)$ $i = 1,...,n-1$ (11), а значения $y_0^{j+1} = u1(t_{j+1})$, $y_n^{j+1} = u2(t_{j+1})$ $j = 0,1,...,K-1$ доопределяются из граничных условий. Именно из-за существования формулы (11) схема (8)-(10) называется ***явной разностной схемой***.

Доказывается, что схема (8)-(10) имеет сходимость первого порядка по τ и второго по h, но использовать эту схему можно при выполнении условия: $\tau \le \frac{h^2}{2}$ (12), т.е. только в этом случае решение будет *устойчивым*. Разностные схемы, устойчивые лишь при некотором ограничении на отношение шагов по пространству и времени, называются *условно устойчивыми*. Т.о. схема (8)-(10) является *условно устойчивой*, причем условие устойчивости имеет вид: $\frac{\tau}{h^2} \le \frac{1}{2}$ (13).

Чисто неявная схема

Пусть имеем смешанную задачу (1)-(4). Будем решать задачу ***методом сеток***. В области, ограниченной отрезками $0 \le x \le 1$ и $0 \le t \le T$ построим *пространственно-временную прямоугольную сетку* $\omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$, в узлах которой определим *сеточную функцию* $y_i^j = y(x_i, t_j)$.

Чисто неявной разностной схемой (иначе – *схемой с опережением*) для одномерного уравнения теплопроводности (1) называется разностная схема, которая использует 4-х точечный шаблон вида:



Функцию источника заменим сеточной функцией: $\varphi_i^j = f(x_i, t_j) + O(\tau + h^2)$.

В результате получим чисто неявное конечно- разностное уравнение, которое аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение в узле (x_i, t_j) с первым порядком по τ и вторым по h, т.к. оговорили, что разность $\varphi_i^j - f(x_i, t_j)$ имеет тот же порядок малости.

Для завершения построения разностной схемы распространим уравнение (7) на все внутренние узлы сетки $\omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$ и учтем начальные и граничные условия. Получаем:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \varphi_i^j \quad i = 1,...,n-1; \quad j = 1,...,K-1 \tag{8}$$

$$y_i^0 = u0(x_i) \qquad i = 0,1,...,n; \tag{9}$$

$$y_0^{j+1} = u1(t_{j+1}) \qquad y_n^{j+1} = u2(t_{j+1}) \quad j = 0,1,...,K-1 \tag{10}$$

Основное отличие построенной ***неявной конечно-разностной схемы*** от ***явной*** состоит в том, что в правой части системы уравнений (8) имеем значения сеточной функции на j+1 слое, т.е неизвестное значение искомой функции $y_i^{j+1} = y(x_i, t_{j+1})$. Система уравнений (8)-(10) - это система линейных уравнений, и решать ее, как и в случае явной схемы, нужно по слоям, начиная с *первого слоя*. На нулевом слое решение этой системы задается начальным условием $y_i^0 = u0(x_i)$ $i = 0,1,...,n$. В явной схеме мы могли для нахождения неизвестных значений сеточной функции на j+1 слое построить явные формулы на основе значений этой функции на j-ом слое. Здесь же, в отличие от явной схемы для нахождения значения y_i^{j+1} по уже известному значению y_i^j требуется решить систему уравнений вида:

$$\gamma y_{i+1}^{j+1} - (1+2\gamma) y_i^{j+1} + \gamma y_{i-1}^{j+1} = -F_i^j \qquad i = 1,...,n-1; \tag{11}$$

$$y_0^{j+1} = u1(t_{j+1}) \qquad y_n^{j+1} = u2(t_{j+1}) \quad j = 0,1,...,K-1 \qquad (12).$$

Здесь $\gamma = \tau / h^2 \qquad F_i^j = y_i^j + \tau\varphi_i^j$.

Матрица системы (11)-(12) является трехдиагональной, значит эту систему можно решать *методом прогонки*, т.к. условия устойчивости метода прогонки выполняются.

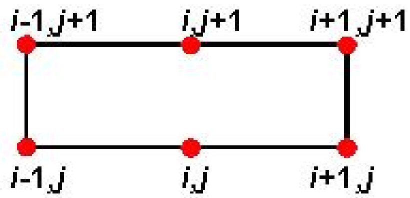
Доказывается, что чисто неявная разностная схема (8)-(10) является *абсолютно устойчивой*. Следовательно, чтобы не иметь больших погрешностей численного решения, при выборе шагов τ и h *неявной схемы* следует придерживаться соотношения: $\tau \sim ch^2$.

Симметричная неявная схема (*<u>Схема Кранка-Николсона</u>*)

Эта схема является по существу усреднением явного и неявного методов.

Пусть имеем смешанную задачу (1)-(4). Как и в предыдущих случаях в области, ограниченной отрезками $0 \le x \le 1$ и $0 \le t \le T$ построим *пространственно-временную прямоугольную сетку* $\omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$, в узлах которой определим *сеточную функцию* $y_i^j = y(x_i, t_j)$. Замену граничных и начальных условий проведем, как и для явной схемы.

Для построения разностной схемы выберем 6-ти точечный шаблон вида:



Функцию источника заменим сеточной функцией вида $\varphi_i^j = f(x_i, t_j) + O(\tau^2 + h^2)$.

В результате получим *<u>симметричное конечно- разностное уравнение</u>*.

Для завершения построения разностной схемы распространим уравнение, на все внутренние узлы сетки $\omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$ и учтем начальные и граничные условия. Получаем:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} + \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right) + \varphi_i^j \qquad (8)$$

$$i = 1, \ldots, n-1; \quad j = 1, \ldots, K-1$$

$$y_i^0 = u0(x_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, n; \qquad (9)$$

$$y_0^{j+1} = u1(t_{j+1}) \qquad y_n^{j+1} = u2(t_{j+1}) \quad j = 0, 1, \ldots, K-1 \qquad (10)$$

Эта схема имеет <u>второй порядок</u> аппроксимации по пространству и времени, т.е. $O(\tau^2 + h^2)$. Эта схема является *<u>абсолютно устойчивой</u>*.

Система уравнений (8)-(10) - это система линейных уравнений, и решать ее, как и в предыдущих случаях, нужно по слоям, начиная с *первого слоя*. На нулевом слое решение этой системы задается начальным условием $y_i^0 = u0(x_i)$ $i = 0, 1, \ldots, n$. Значения численного решения функции $y_i^{j+1} = y(x_i, t_{j+1})$ на каждом слое находятся из решения системы уравнений вида:

$$\frac{\gamma}{2} y_{i+1}^{j+1} - (1+\gamma) y_i^{j+1} + \frac{\gamma}{2} y_{i-1}^{j+1} = -F_i^j \qquad i = 1, \ldots, n-1; \qquad (11)$$

$$y_0^{j+1} = u1(t_{j+1}) \qquad y_n^{j+1} = u2(t_{j+1}) \quad j = 0, 1, \ldots, K-1 \qquad (12).$$

Здесь $\gamma = \tau / h^2$ $\qquad F_i^j = (1-\gamma) y_i^j + \frac{\gamma}{2}(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \tau\varphi_i^j$.

Метод (11)-(12) опять сводится к решению на каждом шаге по времени <u>трехдиагональной</u> системы уравнений.

Матрица коэффициентов этой системы совпадает с матрицей чисто неявной разностной схемы. *Преимущества* этого метода состоят в том, что схема безусловно устойчива и имеет второй порядок точности по обеим координатам. τ и h, а поэтому является наиболее используемой для параболических уравнений.

Рассмотрим пример. Найти решение следующей задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x \in [0,1] \text{ при } t=0.08, \text{ т.е. } t \in [0,0.08]$$

$u(x,0)=x^2/2$ начальное условие

$u(0,t)=t$ граничное условие слева

$u(1,t)=0.5+t$ граничное условие справа

Прежде всего, необходимо проверить согласованность условий. Краевые условия на левом конце отрезка и начальное условия должны иметь одинаковое значение, а также значения краевого условия на правом конце отрезка и начальные условия должны совпадать.

Слева $u(0,0) = u(0,t)_{t=0} = t = 0 \qquad u(0,0) = u(x,0)_{x=0} = \frac{x^2}{2} = 0$ - выполняется.

Справа $u(1,0) = u(1,t)_{t=0} = 0.5 + t = 0.5 \quad u(1,0) = u(x,0)_{x=1} = \frac{x^2}{2} = 0.5$ - выполняется.

Будем искать решение по явной разностной схеме. Выберем шаг по пространственной координате h=0.2, тогда из условия устойчивости $\frac{\tau}{h^2} \le \frac{1}{2}$ будем иметь шаг по времени $\tau = 0.2^2 * \frac{1}{2} = 0.02$. Таким образом, получаем пространственно-временную сетку, в узлах которой определяем сеточную функцию $y_i^j = y(x_i, t_j)$, i=0,1,2,3,4,5; j=0,1,2,3,4, которая аппроксимирует искомое решение в узлах сетки. Запишем выражения для сеточной по явной разностной схеме: $y_i^{j+1} = y_i^j + \tau(\frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2}) \quad i = 1,...,5\, j = 1,...,4$ с учетом $\frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{2}$, получаем $y_i^{j+1} = y_i^j + \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{2}$, в начальных и краевых узлах рассчитываем значение сеточной функции по формулам $y_i^0 = \frac{x_i^2}{2}$, $y_0^j = t_j$, $y_1^j = 0.5 + t_j$.

Проведем вычисления по слоям. На первом слое значения сеточной функции определяются начальными условиями $y_i^0 = \frac{x_i^2}{2}$.

$$y_0^0 = \frac{x_0^2}{2} = \frac{0}{2} = 0 \quad y_1^0 = \frac{x_1^2}{2} = \frac{0.2^2}{2} = 0.02 \quad y_2^0 = 0.08 \quad y_3^0 = 0.18 \quad y_4^0 = 0.32 \quad y_5^0 = 0.5$$

Сразу же рассчитываем значение функции в краевых узлах.

$$y_0^j = t_j, \qquad y_1^j = 0.5 + t_j,\ j = 1,2,3,4$$

$y_0^1 = t_1 = 0.02,\quad y_5^1 = 0.5 + t_1 = 0.5 + 0.02 = 0.52\quad y_0^2 = 0.04,\quad y_5^2 = 0.5 + t_2 = 0.5 + 0.04 = 0.54$

$y_0^3 = 0.06,\quad y_5^3 = 0.5 + t_3 = 0.5 + 0.06 = 0.56\quad y_0^4 = 0.08,\quad y_5^4 = 0.5 + t_4 = 0.5 + 0.08 = 0.58$

Получили таблицу следующего вида:

	i	0	1	2	3	4	5
j	x / t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0	0	0	0.02	0.08	0.18	0.32	0.50
1	0.02	0.02					0.52
2	0.04	0.04					0.54
3	0.06	0.06					0.56
4	0.08	0.08					0.58

А затем приступаем к поиску решения во всех внутренних узлах сетки.

$$y_i^{j+1} = y_i^j + \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{2}, i = 1,2,3,4;\ j = 1,2,3,4$$

$$y_1^1 = y_1^0 + \frac{y_2^0 - 2y_1^0 + y_0^0}{2} = 0.02 + \frac{1}{2}(0.08 - 2\cdot 0.02 + 0) = 0.04$$

$$y_2^1 = y_2^0 + \frac{y_3^0 - 2y_2^0 + y_1^0}{2} = 0.08 + \frac{1}{2}(0.18 - 2\cdot 0.08 + 0.02) = 0.10 \text{ и т.д.}$$

Все вычисления отражены в таблице.

	i	0	1	2	3	4	5
j	x / t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0	0	0	0.02	0.08	0.18	0.32	0.50
1	0.02	0.02	0.04	0.10	0.20	0.34	0.52
2	0.04	0.04	0.06	0.12	0.22	0.36	0.54
3	0.06	0.06	0.08	0.14	0.24	0.38	0.56
4	0.08	0.08	0.1	0.16	0.26	0.40	0.58

Приведем решение этой же задачи по неявной схеме.

Выберем шаг по пространственной координате h=0.2. Неявная схема является абсолютно устойчивой, поэтому по времени возьмем шаг $\tau = 0.08$. Краевые и начальное условия можем рассчитать как в предыдущем случае и занести в таблицу. Имеем:

	i	0	1	2	3	4	5
j	x / t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0	0	0	0.02	0.08	0.18	0.32	0.50
1	0.08	0.08					0.58

Запишем систему уравнений для всех внутренних точек:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{h^2} \qquad i = 1,2,3,4;\ j = 0$$

Сгруппируем подобные и получаем:

$$\frac{\tau}{h^2} y_{i+1}^{j+1} - (1 + 2\frac{\tau}{h^2}) y_i^{j+1} + \frac{\tau}{h^2} y_{i-1}^{j+1} = -y_i^j \qquad i = 1,2,3,4;\ j = 0$$

Учтем, что $\dfrac{\tau}{h^2} = \dfrac{0.08}{0.2^2} = 2 \qquad y_i^0 = \dfrac{x_i^2}{2}$, получим систему уравнений:

$i = 1 \quad 2y_2^1 - 5y_1^1 + 2y_0^1 = -0.02 \qquad\qquad i = 2 \quad 2y_3^1 - 5y_2^1 + 2y_1^1 = -0.08$

$i = 3 \quad 2y_4^1 - 5y_3^1 + 2y_2^1 = -0.18 \qquad\qquad i = 4 \quad 2y_5^1 - 5y_4^1 + 2y_3^1 = -0.32$

$y_0^1 = 0.02 \qquad\qquad y_5^1 = 0.58$

Решаем систему методом прогонки и получаем:

	i	0	1	2	3	4	5
j	x \ t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0	0	0	0.02	0.08	0.18	0.32	0.50
1	0.08	0.08	0.10	0.16	0.26	0.40	0.58

Контрольные вопросы:

1. Какую сетку необходимо ввести для рассматриваемой смешанной задачи, в основе которой лежит нестационарное уравнение теплопроводности? Как она задается?
2. Какой метод применяется для нахождения решения такой смешанной задачи?
3. Какой шаблон для аппроксимации производной второго порядка используется в явной, чисто неявной схеме, а также в симметрической неявной схеме?
4. Когда решение по явной схеме будет устойчивым, а когда условно устойчивым?
5. Чисто неявная схема является устойчивой, условно устойчивой или абсолютно устойчивой?
6. Какой порядок точности по координатам τ и h имеет симметричная неявная схема?
7. Как иначе называется симметричная неявная схема?

Содержание задания:

Дана смешанная задача для уравнения теплопроводности в области $\overline{D} = \{0 \le x \le 1; 0 \le t \le 0.01\ \}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x^2 - t^2) + btx - 0.378(c - 1.9)$$

$$u(x,0) = \alpha \sin\frac{\pi}{2}x + \beta \cos\frac{\pi}{2}x$$

$$u(0,t) = \beta(t+1) \qquad\qquad u(1,t) = \alpha(t^2 + 1)$$

Методом сеток решите эту задачу с шагами по пространству и времени. Соответственно *h = 0,1*, *τ = 0,005*. Ответы даются с округлением до третьего знака после запятой.

Для решения используйте:

1. Явную схему. (на 7-8)

2. Чисто неявную схему. (на 8-9)

3. Симметричную неявную схему. (на 9-10)

Сравните полученные решения. Значения параметров a, b, c, α и β приведены в таблице.

Варианты параметров:

Вариант	**Параметры**				
	a	b	c	α	β
1	-2,00	2,01	0,00	0,1	2,0
2	-1,95	2,11	0,12	0,2	1,9
3	-1,90	2,21	0,24	0,3	1,8
4	-1,85	2,31	0,36	0,4	1,7
5	-1,80	2,41	0,48	0,5	1,6
6	-1,75	2,51	0,60	0,6	1,5
7	-1,70	2,61	0,72	0,7	1,4
8	-1,65	2,71	0,84	0,8	1,3
9	-1,60	2,81	0,96	0,9	1,2
10	-1,55	2,91	1,08	1,0	1,1
11	-1,50	3,01	1,20	1,1	1,0
12	-1,45	3,11	1,32	1,2	0,9
13	-1.40	3,21	1,44	1,3	0,8
14	-1.35	3.31	1.56	1.4	0.7
15	-1.30	3.41	1.68	1.5	0.6

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретической частью по данной теме.
2. Ответить на контрольные вопросы к лабораторной работе.
3. Получить вариант задания у преподавателя.
4. Выполнить индивидуальное задание в соответствии с вариантом задания.
5. Составить отчёт о проделанной работе.
6. Показать программу и отчёт преподавателю.

Содержание отчёта:

1. Титульный лист (идентификация).
2. Тема и цель работы.
3. Краткие теоретические сведения.
4. Вариант и условие задания.
5. Анализ задания (алгоритм выполнения задания).

6. Основные и промежуточные результаты по каждому пункту хода выполнения работы (листинг программного кода, реализующий данный алгоритм; скриншот результатов выполнения программы; скриншоты результатов работы в математическом пакете Mathcad).
7. Выводы о проделанной работе.

Защита лабораторной работы проводится индивидуально. Для сдачи работы студент должен предъявить программу, отчет, ответить на контрольные вопросы, дать пояснения по выполненной работе.

Дополнительное задание:

Дано уравнение параболического типа (уравнение теплопроводности): $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

при заданных начальных условиях: $u(x, 0) = f(x)$, $u(0, t) = \varphi(t)$, $u(0{,}6, t) = \psi(t)$, где x принадлежит [0; 0,6].

Используя схему с весами, составьте решение для этой задачи при $h = 0{,}1$ и t из отрезка [0; 0,01] с четырьмя десятичными знаками, считая вес $s = 1/6$.

Варианты задания:

Вариант	***u (x, 0)***	***u (0, t)***	***u (0,6; t)***
1	cos 2x	1 – 6t	0,3624
2	x (x + 1)	0	2t + 0,96
3	1,2 + lg (x + 0,4)	0,8 + t	1,2
4	sin 2x	2t	0,932
5	3x(2 – x)	0	t + 2,52
6	1 – lg (x + 0,4)	1,4	t + 1
7	sin (0,55x + 0,03)	t + 0,03	0,354
8	2x(1 – x) + 0,2	0,2	t + 0,68
9	sin x + 0,08	0,08 + 2t	0,6446
10	cos (2x + 0,19)	0,932	0,1798
11	2x(x + 0,2) + 0,4	2t + 0,4	1,36
12	lg (x + 0,26) + 1	0,415 + t	0,9345