Министерство образования Республики Беларусь
УО «Полоцкий государственный университет»

Факультет информационных технологий
Кафедра технологий программирования

Методы численного анализа
Лабораторная работа №9

На тему: «Решение смешанной задачи для уравнения колебания струны методом сеток»

Полоцк 2017 г.

Название: «Решение смешанной задачи для уравнения колебания струны методом сеток».

Цель работы: Научиться находить решения задач для нестационарного уравнения колебания струны используя явную и неявную схему.

Теоретическая часть:

Постановка задачи

Рассмотрим задачу (2)-(6).

Имеем уравнение колебаний струны: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1 \quad t > 0 \quad (2)$

В *начальный* момент времени необходимо задать два условия. Для уравнения колебаний струны эти условия таковы: $u(x,0) = u0(x)$ (3) – это *начальное отклонение* точек струны и $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \overline{u0}(x)$ (4) – *начальная скорость* соответствующих точек.

Граничные условия представляют функциями движения концов струны, т.е. $u(0,t) = u1(t)$ (5) и $u(1,t) = u2(t)$ (6).

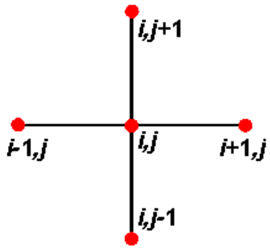
Если концы струны закреплены, то смещения будут равны нулю, т.е. $u1(t)$=0, u2(t)=0.

Доказывается, что задача (2)-(6) является *корректной*, т.е. имеет единственное решение, которое непрерывно зависит от начальных и граничных данных (устойчиво).

Т.к. в основе задачи (2)-(6) лежит нестационарное дифференциальное уравнение, то имеем прямоугольную равномерную сетку $\omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$, которая называется *пространственно-временной*. Точки с координатами (x_i, t_j) $i = 0,1,\ldots,n;$ $j = 0,1,\ldots,K$ образуют *узлы* этой сетки. Среди них различают узлы внутренние и граничные.

Следующим шагом построения разностной схемы для задачи (2)-(6) определим *сеточную функцию* $y(x_i, t_j) \approx u(x_i, t_j)$, для которой введем обозначение $y_i^j = y(x_i, t_j)$.

Т.к. уравнение (2) содержит вторую производную по времени, то минимальным шаблоном, на котором можно аппроксимировать уравнение (2), является пятиточечный шаблон «крест»:



.

Таким образом, для аппроксимации волнового уравнения требуется использовать три слоя *j-1, j, j+1* и полученные схемы будут *трехслойными*. Использование таких схем предполагает, что для нахождения значений сеточной функции $y_i^j = y(x_i, t_j)$ на *j+1* слое уже известны ее значения на двух предыдущих слоях *j-1, j*.

Производную *второго порядка* по времени в (x_i, t_j) $i = 0,1,...,n;$ $j = 1,...,K-1$ узле можно заменить разностным отношением: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2}$ (7). Это соотношение имеет второй порядок аппроксимации по переменной *t*.

Для аппроксимации производной второго порядка по пространственной переменной следует воспользоваться аналогичной формулой *второй разностной производной по пространству, вид которой должен соответствовать выбранному шаблону*.

Явная схема

Будем решать задачу (2)-(6) *методом конечных разностей*. В области, ограниченной отрезками 0≤x≤1 и 0≤t≤T построим пространственно-временную прямоугольную сетку $\omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$, в узлах которой определим сеточную функцию $y_i^j = y(x_i, t_j)$. В соответствие с выбранным шаблоном конечно-разностную производную второго порядка по времени заменим выражением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2}$ (7), а вторую производную по параметру *x* аппроксимируем как: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2}$ (8).

В результате подстановки этих соотношений в уравнение (2) получим конечно-разностное уравнение следующего вида, которое аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение в узле (x_i, t_j) со вторым порядком по τ и *h*: $\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2}$ (9).

Распространим уравнение (9) на все внутренние узлы сетки $\omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$ и учтем начальные и граничные условия. Замену граничных условий и начального условия (3) проведем, как и прежде, т.к. такая замена не связана ни с какими погрешностями. Получаем:

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} \qquad (10)$$

$$i = 1,...,n-1; \quad j = 1,...,K-1$$

$$y_0^{j+1} = u1(t_{j+1}) \qquad y_n^{j+1} = u2(t_{j+1}) \quad j = 0,1,...,K-1 \qquad (11)$$

$$y_i^0 = u0(x_i) \qquad i = 0,1,...,n; \qquad (12)$$

$$\frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} = \overline{u0}(x_i) + \frac{\tau}{2}\frac{u0(x_{i+1}) - 2u0(x_i) + u0(x_{i-1})}{h^2} \qquad i = 1,...,n-1; \quad (13)$$

Это выражение (13) является *конечно-разностной аппроксимацией второго начального условия* (4), порядок этой аппроксимации равен O(τ^2+h^2).

Совокупность уравнений (10)-(13) составляет ***разностную схему***, которая аппроксимирует исходную задачу (2)-(6) колебаний струны, т.е. смешанную задачу гиперболического типа. Эта схема имеет *второй порядок погрешности аппроксимации по времени и пространству* O(τ^2+h^2). Схема является ***явной***, т.е. решение $y_i^{j+1} = y(x_i, t_{j+1})$ явным образом выражается через значения этой функции на двух предыдущих слоях:

$$y_i^{j+1} = 2y_i^j - y_i^{j-1} + \gamma(y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j) \quad i = 1,\dots,n-1; \quad j = 1,\dots,K-1 \quad \gamma = \tau^2 / h^2 \qquad (14)$$

Доказывается, что разностная схема (10)-(13) является *условно устойчивой*. Необходимое и достаточное условие устойчивости имеет вид: $\dfrac{\tau}{h} \le 1$ (15). Если в основе задачи одномерных колебаний струны лежит уравнение вида (1), т.е коэффициент $a^2 \ne 1$, то $\gamma = a^2 \dfrac{\tau^2}{h^2}$ и *условие устойчивости* будет выглядеть : $\dfrac{\tau^2}{h^2} \le \dfrac{1}{\max a^2(x,t)}$ (16).

Начинать счет по формуле (14) можно только для 2-го слоя, решение на нулевом слое – это *начальное условие* (3). Решение на первом слое находим из соотношения (13), т.е.:

$$y_i^1 = y_i^0 + \tau \overline{u0}(x_i) + \frac{\tau^2}{2}\frac{u0(x_{i+1}) - 2u0(x_i) + u0(x_{i-1})}{h^2} \qquad i = 1,\dots,n-1; \qquad (17).$$

И далее решение получаем по формулам (14).

Если в основе задачи лежит уравнение *вынужденных* колебаний струны вида:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (18),$$

то в разностной схеме (14), (17) следует *добавить слагаемое, аппроксимирующее вынуждающую силу*. Имеем:

$$y_i^{j+1} = 2y_i^j - y_i^{j-1} + \gamma(y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j) + \tau \cdot f(x_i, t_j) \; i = 1,\dots,n-1; \; j = 1,\dots,K-1 \quad \gamma = a^2\frac{\tau^2}{h^2} \qquad (19)$$

$$y_i^1 = y_i^0 + \tau \overline{u0}(x_i) + \frac{\tau^2}{2}\frac{u0(x_{i+1}) - 2u0(x_i) + u0(x_{i-1})}{h^2} + f(x_i, 0) \qquad i = 1,\dots,n-1; \qquad (20)$$

Для *волнового уравнения* иногда удобнее использовать ***неявные схемы***, чтобы избавиться от ограничений на величину шага по времени. *Неявные схемы* являются *абсолютно устойчивыми*, но алгоритм решения исходной задачи (2)-(6) значительно усложняется.

Чисто неявная схема

Для построения этой схемы на сетке $\omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$ вторую производную по времени аппроксимируем как и в _явной схеме по слоям j-1, j, j+1,_ т.е.: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \dfrac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2}$ (21).

Вторую производную по пространственной координате заменяем _полу суммой ее аппроксимаций на j+1 и j-1 слоях_: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y_{i+1}^{j-1} - 2y_i^{j-1} + y_{i-1}^{j-1}}{h^2} + \dfrac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right)$ (22).

В результате получим следующую схему для всех внутренних точек сетки $i = 1,\dots,n-1; \quad j = 1,\dots,K-1$: $\dfrac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y_{i+1}^{j-1} - 2y_i^{j-1} + y_{i-1}^{j-1}}{h^2} + \dfrac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right)$ (23).

Разностную систему можно преобразовать к виду системы уравнений относительно неизвестных значений сеточной функции на *j+1* слое:

$$\gamma \cdot y_{i-1}^{j+1} - (1+2\gamma)y_i^{j+1} + \gamma \cdot y_{i+1}^{j+1} = (1+2\gamma)y_i^{j-1} - \gamma(y_{i+1}^{j-1} + y_{i-1}^{j-1}) - 2y_i^j \qquad (24)$$

$$\gamma = \frac{\tau^2}{h^2}, \quad i = 1,\dots,n-1; \quad j = 1,\dots,K-1$$

Полученная ***неявная схема***, в основе которой лежит система (24), является _устойчивой_ и сходится со скоростью O(τ^2+h^2). Эту систему следует решать _методом прогонки_, добавив разностные начальные и граничные условия. Эти условия должны использоваться для вычисления искомого решения на нулевом и первом слоях по времени.

Контрольные вопросы:

1. Какую сетку необходимо ввести для рассматриваемой задачи, в основе которой лежит нестационарное уравнение колебаний струны? Как она задается?
2. Какое соотношение в постановке задачи отвечает за начальное отклонение точек струны и начальную скорость таких точек?
3. Какие схемы используются для аппроксимации волнового уравнения?
4. Каким методом решается рассматриваемая задача?
5. Какой порядок погрешности аппроксимации по времени и пространству имеет разностная явная схема, которая аппроксимирует исходную задачу колебаний струны?
6. Верно ли, что неявные схемы являются абсолютно устойчивыми, а явная схема является условно устойчивой?
7. Какое необходимое и достаточное условие устойчивости имеет явная схема?

Содержание задания:

Дано уравнение колебания струны: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, с начальными и краевыми условиями:

$$u(x, 0) = f(x),\ u_t(x, 0) = \Phi(x)\ (0 \le x \le 1)$$

$$u(0, t) = \varphi(t),\ \ u(1, t) = \psi(t).$$

Используя *метод сеток*, составьте решение для этой задачи при $h = 0{,}1$, определяя значение функции $u(x, t)$ с четырьмя десятичными знаками, причём $0 \le t \le 0{,}5$. Анимировать колебания струн.

Для решения используйте:

1. Явную схему. (на 8-9)
2. Неявную схему. (на 9-10)

Варианты задания:

Вариант	***f(x)***	***Φ(x)***	***φ(t)***	***ψ(t)***
1	$x(x+1)$	$\cos(x)$	*0*	$2(t+1)$
2	$x\cos(\pi x)$	$x(2-x)$	$2t$	*-1*
3	$\cos(\frac{\pi x}{2})$	x^2	$1+2t$	*0*
4	$(x+0.5)(x-1)$	$\sin(x+0.2)$	$t-0.5$	$3t$
5	$2x(x+1)+0.3$	$2\sin(x)$	*0,3*	$4.3+t$
6	$(x+0.2)\sin(\frac{\pi x}{2})$	$1+x^2$	*0*	$1.2(t+1)$
7	$x\sin(\pi x)$	$(x+1)^2$	$2t$	*0*
8	$3x(1-x)$	$\cos(x+0.5)$	$2t$	*0*
9	$x(2x-0.5)$	$\cos(2x)$	t^2	*1,5*
10	$(x+1)\sin(\pi x)$	x^2+x	*0*	$0.5t$
11	$(1-x)\cos(\frac{\pi x}{2})$	$2x+1$	$2t+1$	*0*
12	$0.5x(x+1)$	$x\cos(x)$	$2t^2$	*1*
13	0	$\pi\cdot\sin(\pi x)$	0	0
14	$x(x+1)$	$x\cos(x)$	0	$2t$
15	e^x	e^x	e^t	e^{t+1}

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретической частью по данной теме.
2. Ответить на контрольные вопросы к лабораторной работе.
3. Получить вариант задания у преподавателя.
4. Выполнить индивидуальное задание в соответствии с вариантом задания.
5. Составить отчёт о проделанной работе.
6. Показать программу и отчёт преподавателю.

Содержание отчёта:

1. Титульный лист (идентификация).
2. Тема и цель работы.
3. Краткие теоретические сведения.
4. Вариант и условие задания.
5. Анализ задания (алгоритм выполнения задания).
6. Основные и промежуточные результаты по каждому пункту хода выполнения работы (листинг программного кода, реализующий данный алгоритм; скриншот результатов выполнения программы; скриншоты результатов работы в математическом пакете Mathcad).
7. Выводы о проделанной работе.

Защита лабораторной работы проводится индивидуально. Для сдачи работы студент должен предъявить программу, отчет, ответить на контрольные вопросы, дать пояснения по выполненной работе.

Дополнительное задание:

Дано уравнение колебания струны: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, с начальными и краевыми условиями:

$u(x, 0) = f(x),\ u_t(x, 0) = \Phi(x)\ (0 \le x \le 1) \qquad u(0, t) = \varphi(t),\ u(1, t) = \psi(t).$

Используя *метод сеток*, составьте решение для этой задачи при $h = 0{,}1$, определяя значение функции $u(x, t)$ с четырьмя десятичными знаками, причём $0 \le t \le 0{,}5$.

Для решения используйте явную и неявную схему.

Варианты задания:

Вариант	***f(x)***	***Φ(x)***	***φ(t)***	***ψ(t)***
1	$\frac{1}{x+1.5}$	$\frac{-1}{(x+1.5)^2}$	$\frac{1}{t+1.5}$	$\frac{1}{t+2.5}$
2	$\frac{1}{x+1}$	$\frac{-1.5}{(x+1)^2}$	$\frac{1}{1.5t+1}$	$\frac{1}{1.5t+2}$
3	$\frac{x}{2x+2}$	$\frac{-2x}{(2x+2)^2}$	0	$\frac{1}{2t+4}$