Министерство образования Республики Беларусь
УО «Полоцкий государственный университет»

Факультет информационных технологий
Кафедра технологий программирования

Методы численного анализа
Лабораторная работа №3
На тему: «Решение систем ОДУ»

Полоцк 2017 г.

Название: «Решение систем ОДУ».

Цель работы: Изучить основные методы для нахождения решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теоретическая часть:

Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\frac{dU}{dx} = f(x,U(x)) \qquad 0 \le x \le X \qquad (1)$$

$$U(0) = U0 \qquad (2)$$

Здесь $U(x) = (u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x))$ - <u>искомый вектор решения</u> задачи (1)-(2), $f(x,U(x)) = (f_1(x,U(x)), f_2\ (x.U(x)),..., f_n(x,U(x))$ <u>заданный вектор правой части</u>. *U0* – <u>вектор начальных условий</u>.

<u>*Задача Коши*</u> для <u>одного</u> обыкновенного дифференциального уравнения является <u>*частным случаем задачи Коши*</u> для <u>системы</u> ОДУ (1)-(2).

Рассмотрим случай системы, состоящей из двух дифференциальных уравнений.

Пусть вектор $U(x) = (u_1(x), u_2(x)) = (y(x), z(x))$ и система имеет вид:

$$\begin{cases} y' = f_1(x,y,z) \\ z' = f_2(x,y,z) \end{cases} \quad x \in [a,b] \quad (5) \quad \text{\textit{с условиями}}$$

$$y(a) = y_0 \quad z(a) = z_0 \qquad (6)$$

<u>*Метод Эйлера*</u> для решения задачи (5)-(6) является <u>конечно-разностным</u> <u>методом</u>. Поэтому введем равномерную сетку с постоянным шагом *h*>0 $\omega_h = \{x_i = a + ih,\ i = 0,...,N\}$. Введем сеточные функции $y_i \approx y(x_i),\ z_i = z(x_i)$ и функции правой части $f1_i \approx f_1(x_i, y_i, z_i)\ \text{и}\ f2_i \approx f_2(x_i, y_i, z_i)$. Тогда <u>приближенное решение</u> системы (5)-(6) в узлах x_{i+1} будем вычислять последовательно по формулам:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf1(x_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} = z_i + hf2(x_i, y_i, z_i) \end{cases} \quad i = 0,1,....,n-1 \qquad (7)$$

<u>**Пример**</u>.

$$\begin{cases} y' = e^{-\left|z^2+y^2\right|} + 2x \\ z' = 2y^2 + z \end{cases} \quad x \in [0;0.5] \quad \text{\textit{с условиями}}$$ Т.е. $f1 = e^{-\left|z^2+y^2\right|} + 2x \quad f2 = 2y^2 + z$,

$$y(0) = 0.5 \quad z(0) = 1$$

выберем шаг *h*=0.1 и построим следующую таблицу:

i	x_i	y_i	$f1_i$	z_i	$f2_i$
0	0	0,5	0,286505	1	1,5
1	0,1	0,52865	0,401499	1,15	1,708943
2	0,2	0,5688	0,526401	1,320894	1,967962
3	0,3	0,62144	0,66791	1,51769	2,290067
4	0,4	0,688231	0,829463	1,746697	2,694022
5	0,5	0,771178	1,009472	2,016099	3,20553

Таблицу заполняем в следующем порядке:

1. Заполняем столбец x_i с шагом h=0.1;
2. Заносим в соответствующие ячейки начальные условия: $y_0 = y(0) = 0.5 \quad z_0 = z(0) = 1$;
3. Рассчитываем функции правых частей для первой узловой точки:

$$f1_0 = e^{-\left|z_0{}^2 + y_0{}^2\right|} + 2x_0 = e^{-(1+0.25)} + 2\cdot 0 = 0.286505$$
$$f2_0 = 2y_0{}^2 + z_0 = 2(0.5)^2 + 1 = 1.5$$

4. Определяем значение решения в первом узле:

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + hf1(x_0, y_0, z_0) = 0.5 + 0.1\cdot 0.286505 = 0.5286505 \\ z_1 = z_0 + hf2(x_0, y_0, z_0) = 1 + 0.1\cdot 1.5 = 1.15 \end{cases}$$

5. повторяем с пункта 3.

Сравним полученное решение с решением, полученным стандартными функциями пакета MathCad:

$$nz := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D(x,u) := \begin{bmatrix} e^{-\left|(u_0)^2 + (u_1)^2\right|} + 2\cdot x \\ 2\cdot(u_0)^2 + u_1 \end{bmatrix} \qquad S := rkfixed(nz, 0, 0.5, 5, D)$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.1 & 0.534 & 1.161 \\ 0.2 & 0.579 & 1.348 \\ 0.3 & 0.638 & 1.568 \\ 0.4 & 0.712 & 1.828 \\ 0.5 & 0.803 & 2.14 \end{pmatrix} \qquad Yt := S^{\langle 1 \rangle} \qquad Zt := S^{\langle 2 \rangle} \qquad X := S^{\langle 0 \rangle}$$

$$Yel := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.52885 \\ 0.5688 \\ 0.62144 \\ 0.688231 \\ 0.771178 \end{pmatrix} \quad Yt = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.534 \\ 0.579 \\ 0.638 \\ 0.712 \\ 0.803 \end{pmatrix} \quad Zel := \begin{pmatrix} 1 \\ 1.15 \\ 1.32094 \\ 1.51769 \\ 1.746697 \\ 2.016099 \end{pmatrix} \quad Zt = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.161 \\ 1.348 \\ 1.568 \\ 1.828 \\ 2.14 \end{pmatrix}$$

Рисунок 1 – нахождение точного решения системы

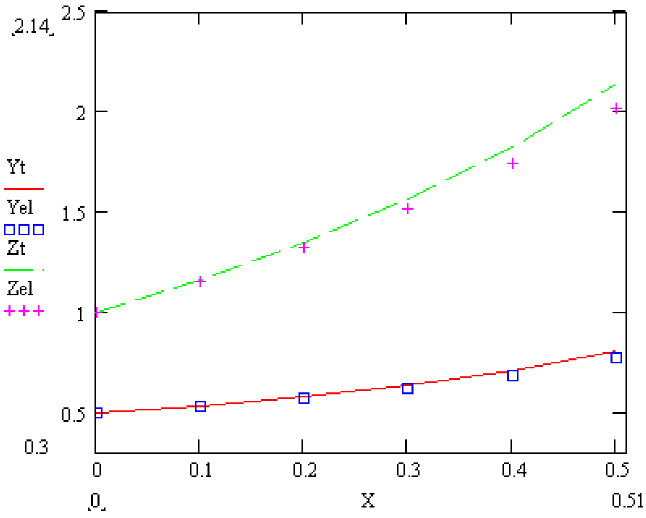

Рисунок 2 – графики полученных решений

Для системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (5)-(6) Метод Рунге-Кутта <u>четвертого порядка точности</u> записывается следующим образом:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \qquad z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)$$

$$K_1 = f_1(x_i, y_i, z_i) \qquad L_1 = f_2(x_i, y_i, z_i)$$

$$K_2 = f_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1, z_i + \frac{h}{2}L_1) \qquad L_2 = f_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1, z_i + \frac{h}{2}L_1) \tag{8}$$

$$K_3 = f_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2, z_i + \frac{h}{2}L_2) \qquad L_3 = f_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2, z_i + \frac{h}{2}L_2)$$

$$K_4 = f_1(x_i + h, y_i + hK_3, z_i + hL_3) \qquad L_4 = f_2(x_i + h, y_i + hK_3, z_i + hL_3)$$

Контрольные вопросы:

1. Сформулировать метод Эйлера, как конечно-разностный метод, для решения системы ОДУ.
2. Как повысить точность метода Эйлера для решения систем ОДУ?
3. Сформулировать метод Рунге-Кутта, используемый для нахождения решения системы из двух ОДУ первого порядка.
4. Как в математическом пакете MathCad найти точное решение системы ОДУ?

Содержание задания:

Найти решение систем дифференциальных уравнений методом Эйлера и Рунге-Кутта на отрезке [0;1] при заданных начальных условиях с шагом h. Оценить погрешность полученного решения. В случае если решение имеет погрешность больше 5%-7% уменьшить шаг h.

Варианты заданий:

Вариант	Задание
1	$\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{z} \\ z' = \dfrac{1}{y - x} \end{cases}$ $\quad y(0) = -1 \quad z(0) = 1 \quad h = 0.1$
2	$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x + 0.5} + \sqrt{y^2 + x^2} \\ z' = \dfrac{y + z}{z^2 - x + 1.5} \end{cases}$ $\quad y(0) = 0.25 \quad z(0) = 0 \quad h = 0.1$
3	$\begin{cases} y' = -2xy^2 + z^2 - x^2 - 1 \\ z' = \dfrac{1}{z^2} - y - \dfrac{x}{z} \end{cases}$ $\quad y(0) = 1 \quad z(0) = 1 \quad h = 0.1$
4	$\begin{cases} y' = e^{-(x^2 + y^2)} + 3x \\ z' = 3y^2 + z \end{cases}$ $\quad y(0) = 0.5 \quad z(0) = 1 \quad h = 0.1$
5	$\begin{cases} y' = z - \cos(x) \\ z' = y + \cos(x) \end{cases}$ $\quad y(0) = 0 \quad z(0) = 0 \quad h = 0.1$
6	$\begin{cases} y' = z + x + \sin(2y^2) \\ z' = y + x - 2z + 1 \end{cases}$ $\quad y(0) = 1 \quad z(0) = 0.5 \quad h = 0.1$
7	$\begin{cases} y' = \ln(2x + \sqrt{2x^2 + z^2}) \\ z' = \sqrt{2x^2 + y^2} \end{cases}$ $\quad y(0) = 0.5 \quad z(0) = 1 \quad h = 0.1$
8	$\begin{cases} y' = y + x \\ z' = x - z^2 \end{cases}$ $\quad y(0) = 0 \quad z(0) = 1 \quad h = 0.1$
9	$\begin{cases} y' = yz + x \\ z' = x^2 - y^2 \end{cases}$ $\quad y(0) = 1 \quad z(0) = 0.5 \quad h = 0.1$
10	$\begin{cases} y' = \cos(y + 2z) \\ z' = \dfrac{2}{4y + x} + x + 1 \end{cases}$ $\quad y(0) = 1 \quad z(0) = 2 \quad h = 0.1$
11	$\begin{cases} y' = y^2 + z^2 + x \\ z' = z^2 - y^2 - x \end{cases}$ $\quad y(0) = 0 \quad z(0) = 0 \quad h = 0.1$
12	$\begin{cases} y' = y^3 - z^2 - x \\ z' = z^3 + y^2 + x \end{cases}$ $\quad y(1) = 0 \quad z(1) = 0 \quad h = 0.1 \quad x \in [1;1.5]$

13	$\begin{cases} y' = \sin y + \cos z \\ z' = \sin y + 2\cos z \end{cases}$	$y(0) = 1 \quad z(0) = 0.5 \qquad h = 0.1$
14	$\begin{cases} y' = \sqrt{y^2 + z^2 + 1} \\ z' = y + z - 1 \end{cases}$	$y(1) = 0.5 \quad z(1) = 0 \qquad h = 0.1 \quad x \in [1;1.5]$
15	$\begin{cases} y' = \sqrt{y^2 + z^2 + 4} \\ z' = y - z - 1 \end{cases}$	$y(0.5) = 0.5 \quad z(0.5) = 0.5 \quad h = 0.1 \quad x \in [0.5;1.5]$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретической частью по данной теме.
2. Ответить на контрольные вопросы к лабораторной работе.
3. Получить вариант задания у преподавателя.
4. Выполнить индивидуальное задание в соответствии с вариантом задания.
5. Составить отчёт о проделанной работе.
6. Показать программу и отчёт преподавателю.

Содержание отчёта:

1. Титульный лист (идентификация).
2. Тема и цель работы.
3. Краткие теоретические сведения.
4. Вариант и условие задания.
5. Анализ задания (алгоритм выполнения задания).
6. Основные и промежуточные результаты по каждому пункту хода выполнения работы (листинг программного кода, реализующий данный алгоритм; скриншот результатов выполнения программы; скриншоты результатов работы в математическом пакете Mathcad).
7. Выводы о проделанной работе.

Защита лабораторной работы проводится индивидуально. Для сдачи работы студент должен предъявить программу, отчет, ответить на контрольные вопросы, дать пояснения по выполненной работе.