Министерство образования Республики Беларусь
УО «Полоцкий государственный университет»

Факультет информационных технологий
Кафедра технологий программирования

Методы численного анализа
Лабораторная работа №1
На тему: «Метод Эйлера, усовершенствованный метод Эйлера, метод Эйлера-Коши для решения ОДУ»

Полоцк 2017 г.

Название: «Метод Эйлера, усовершенствованный метод Эйлера, метод Эйлера-Коши для решения ОДУ».

Цель работы: Изучить основные методы решения задачи Коши для ОДУ первого порядка: Метод Эйлера, усовершенствованный метод Эйлера, метод Эйлера-Коши.

Теоретическая часть:

Постановка задачи

Пусть задано дифференциальное уравнение $\frac{du}{dx} = f(x,u(x))$ (1)

где $f(x,u(x))$ – заданная непрерывная функция двух аргументов. Требуется найти функцию $u=u(x)$, непрерывную при $0 \le x < X$, удовлетворяющую этому уравнению (1) и некоторому начальному условию $u(0)=u0$. (2)

Задачу Коши (1)-(2) можно записать в операторном виде:

$$Lu = f(x,u(x)), x \geq 0 \quad u(0) = u0\,. \qquad (3)$$

Здесь оператор L содержит операцию дифференцирования функции $u(x)$.

Решение задачи Коши любым численным методом может быть найдено только в виде таблицы. Чаще всего используются разностные методы. Поэтому построим сетку (дискретное множество точек) $\omega=\{0=x_0<x_1<\ldots<x_n=X\}$, $h_i=x_{i+1}-x_i$ - шаг сетки}. В каждом узле сетки x_i $i=0,1,2,..,n$ будем рассматривать сеточную функцию $y_i = y(x_i) \approx u(x_i)$ как приближенную (аппроксимирующую) к точному решение на данном множестве точек. Далее заменим значения производной функции u(x) в уравнении (1) отношением конечных разностей. Таким образом, переходим от непрерывного дифференциального уравнения (1)-(2) относительно функции u(x) к разностной задаче относительно сеточной функции y_i:

$y_{i+1}=F(x_i, h_i, y_{i+1}, y_i, y_{i-1}, \ldots, y_{i-k+1})$, $x_i \in \omega$, $i=1,2,\ldots,n-1$, $k=0,1,\ldots,i+1$ (4) y(x0)=y0 (5)

Уравнение (4) – это разностное уравнение, записанное в общем виде, конкретное выражение правой части зависит от способа аппроксимации производной. Каждый численный метод имеет свой вид уравнения (4).

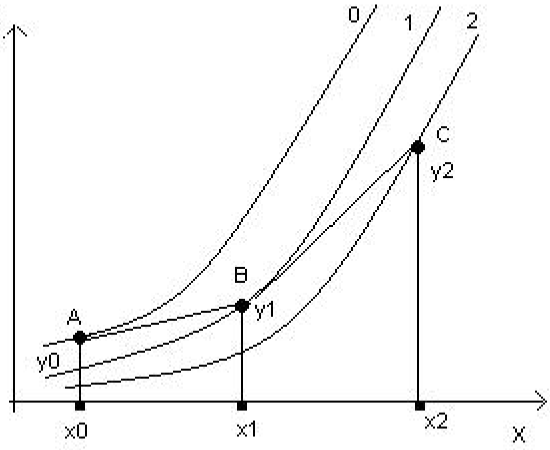
Разностная схема Эйлера (метод ломаных)

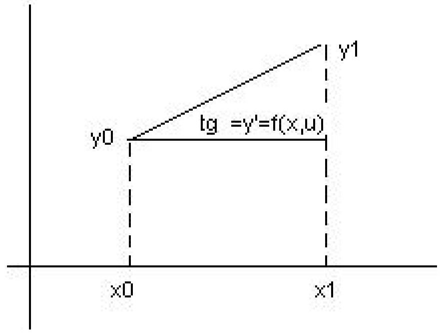
Пусть задана задача Коши

$$\frac{du}{dx} = f(x,u(x)) \qquad x \in [a,b], \quad (1) \qquad u(a)=u_0, \quad (2)$$

где $f(x,u(x))$ –непрерывная функция двух аргументов. Требуется найти функцию $u=u(x)$, непрерывную на отрезке $[a,b]$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальному условию (2).

Простейшим численным методом решения задачи (1)-(2) , т.е задачи Коши для ОДУ первого порядка, является метод Эйлера. Рассмотрим создание разрешающего уравнения этого метода на основе графических построений.





Разделим отрезок $[a,b]$ на n равных частей. Решением исходной задачи является интегральная кривая под номером 0, которая проходит через точку $A(x_0, y_0)$. Вместо искомой интегральной кривой на отрезке $[x_0, x_1]$ будем рассматривать отрезок касательной к этой интегральной кривой в точке $A(x_0, y_0)$. Построим уравнение этого отрезка касательной

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) \qquad (3)$$

Точку с координатами (x_1, y_1) обозначим как $B(x_1, y_1)$. Эта точка принадлежит интегральной кривой с номером 1 Заменим интегральную кривую с номером 1 на отрезке $[x_1, x_2]$ отрезком касательной к этой интегральной кривой в точке $B(x_1, y_1)$.

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) \qquad (4)$$

Поступаем аналогичным образом на каждом частичном отрезке. Для отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ будем иметь уравнение отрезка касательной в следующем виде:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad (5)$$

Формула (5) представляет собой метод Эйлера для всех $i = 0,1,2,...,n-1$ и с учетом, что для начальной точки выполняется $y_0 = u_0$ (6)

Точным решением задачи (1)-(2) является интегральная кривая под номером 0, которая проходит через точку $A(x_0, y_0)$. Методом Эйлера мы заменяем ее ломаной с вершинами в точках (x_i, y_i) $i = \overline{0,n}$. При этом каждое звено ломаной совпадает по направлению с интегральной кривой, проходящей через точки (x_i, y_i) $i = \overline{0,n}$. Таким образом методом Эйлера происходит движение не по интегральной кривой, а по касательной к ней, поэтому метод Эйлера называют иначе методом ломаных.

Метод Эйлера может быть построен, исходя из понятий теории разностных схем. Введем на отрезке $[a,b]$ равномерную сетку $\omega_h = \{x_i = a + ih, i = 0,1,2,...,n\}$ и соответствующую ей сеточную функцию для аппроксимации искомого решения $y_i = y(x_i) \approx u(x_i)$. Для аппроксимации производной используем правую разностную схему, т.е. $u'(x_i) \approx y_i' = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}$.

И получим, $\quad y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \qquad h = (x_{i+1} - x_i)$ (9).

Распространим уравнение (9) на всю сетку $i = 0,1,2,...,n-1$ и добавим начальное условие $\quad y_0 = u_0$ (10).

Метод Эйлера обладает малой точностью, т.е имеет первый порядок точности. Погрешность каждого нового шага вообще говоря систематически возрастает. Теоретически для оценки погрешности метода Эйлера имеет место неравенство: $r_i \le \dfrac{M1 \cdot h}{2 \cdot M2} \cdot e^{M3(x_i - x_0)}$ (11)

Здесь *M1,M2,M3* - верхние границы для функции $f(x,u)$ и ее частных производных. Однако для практики наиболее приемлемым способом оценки погрешности решения является метод двойного пересчета с шагами h и $h/2$. Совпадающие десятичные знаки решения в соответствующих узлах при различных пересчетах считаются верными.

Пример. Методом Эйлера найти решение следующей задачи Коши

$$\frac{du}{dx} = u + (1+x)u^2 \qquad x \in [1;1.5] \qquad u(1) = -1$$

Решение: Функция $f(x,u) = u + (1+x)u^2$. Возьмем шаг h=0.1, введем сеточные функции и вычисления метода Эйлера $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$ разместим в таблице.

I	x(i)	y(i)	f(xi,yi)	точное решение
0	1	-1	1	1
1	1,1	-0,9	0,801	-0,909091
2	1,2	-0,8199	0,659019222	-0,83333
3	1,3	-0,75399808	0,553582055	-0,769231
4	1,4	-0,69863987	0,472794538	-0,714286
5	1,5	-0,65136042	0,409315568	-0,66667

Усовершенствованный метод Эйлера. Метод Эйлера-Коши

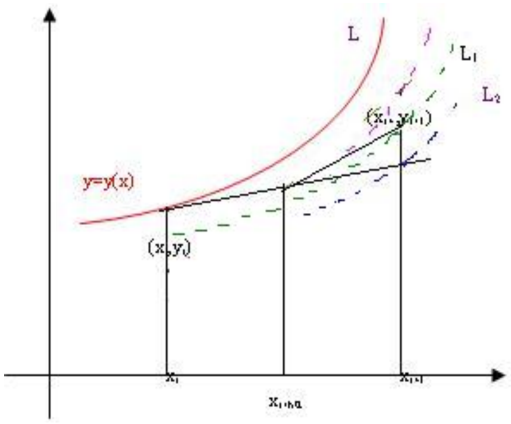
Усовершенствованным методом Эйлера называется метод, который использует формулу следующего вида $\qquad y_{i+1} = y_i + h * f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$ (1)

При использовании этого метода сначала по формуле Эйлера найдем приближенное решение в середине интервала, т.е. $\qquad y_{i+\frac{1}{2}} = y(x_i + 0.5h) = y_i + \dfrac{h}{2} * f(x_i, y_i)$ (2)

Затем в середине отрезка, т.е. точке ($x_i + 0.5h, y_i + 0.5h$) вычисляем значение функции $f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$, т.е. определяем наклон интегральной кривой $y' = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$. Используя найденные промежуточные значения, вычисляем значение сеточной функции по формуле (1).

Поэтому формула (1) будет иметь вид: $y_{i+1} = y_i + h * f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} * f(x_i, y_i))$ (3).

Геометрически усовершенствованный метод Эйлера можно изобразить как:



По методу Эйлера мы получаем кривую L2, а усовершенствованный метод Эйлера дает решение L1. В модифицированном методе Эйлера усредняются наклоны касательных, при этом для нахождения следующего значения вычисляется значение *f* два раза, т.е. увеличивается объем вычислений. Но из рисунка видно, что метод является более точным по сравнению с методом Эйлера. Поэтому, усовершенствованный метод Эйлера имеет *точность второго порядка*.

Рассмотрим еще одну модификацию метода Эйлера, если аппроксимацию функции *f* приравнять среднему арифметическому значений этой функции на концах элементарного отрезка: $\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$ i=0,1,2,…,n-1 (4) $y_0 = u_0$ (5)

Алгоритм (8)-(10) можно записать в виде одного соотношения вида:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + h * f(x_i, y_i))] \quad i=0,1,2,\ldots,n-1 \quad (11) \qquad y_0 = u_0 \qquad (12)$$

Схема (4)-(5) или в варианте (11)-(12) является *модификацией метода Эйлера* и ее называют ***методом Эйлера-Коши***. Этот метод может быть получен путем разложения функции *u(x)* в ряд Тейлора. На практике же оценку погрешности полученного решения принято получать с помощью двойного пересчета с шагами *h* и *h*/2.

Пример. Методом Эйлера-Коши решить следующую задачу Коши. Взять шаг *h*=0.1 и результаты сравнить с точным решением. $y' = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x}$ $x \in [1;1.5]$ $y(1) = 0.5$

Решение: Все вычисления оформим в виде таблицы.

i	x_i	y_i	f_i	$\tilde{y}_{i+1}$	$\tilde{f}_{i+1}$	Δy_i	Точное решение
0	1	0.5	0.25			0.023835	0.5
1	1.1	0.523635	0.226756	0.525	0.226704	0.021664	0.523809
2	1.2	0.545499	0.206608	0.546511	0.206531	0.019777	0.545455
3	1.3	0.56276	0.179030	0.566160	0.188941	0.018127	0.565216
4	1.4	0.583403	0.173603	0.584178	0.173510	0.016675	0.583333
5	1.5	0.600378		0.600783	0.159898		0.60000

Заполнения таблицы имеет следующий порядок.

$$x_{i+1} = x_i + h \qquad f_i = f(x_i, y_i) = \frac{y_i}{x_i}(1 - y_i) \qquad f_0 = \frac{y_0}{x_0}(1 - y_0) = \frac{0.5}{1}(1 - 0.5) = 0.25$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i) \qquad \tilde{y}_1 = y_0 + h * f_0 = 0.5 + 0.1 * 0.25 = 0.525$$

$$\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) = \frac{\tilde{y}_{i+1}}{x_{i+1}}(1 - \tilde{y}_{i+1}) \qquad \tilde{f}_1 = \frac{\tilde{y}_1}{x_1}(1 - \tilde{y}_1) = \frac{0.525}{1.1}(1 - 0.525) = 0.226704$$

$$\Delta y_i = \frac{h}{2}(f_i + \tilde{f}_{i+1}) \qquad \Delta y_0 = \frac{h}{2}(f_0 + \tilde{f}_1) = \frac{0.1}{2}(0.25 + 0.226704) = 0.023835$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})\right] \qquad y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0.5 + 0.023835 = 0.523835$$

С помощью метода Эйлера-Коши можно проводить контроль точности решения путем сравнения промежуточного значения функции в i+1 узле с ее окончательным значением в этом узле , т.е. значений $\tilde{y}_{i+1}$ и y_{i+1}. На основании этого сравнения выбирается величина шага h в каждом узле. Если модуль разности этих значений сравним с погрешностью вычислений, т.е. выполняется неравенство $|\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}| \le \varepsilon$, то шаг можно увеличить.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте постановку задачи Коши.
2. Для каких ОДУ применяется метод Эйлера?
3. Сформулируйте построение метода Эйлера исходя из геометрического смысла.
4. Каким является метод Эйлера: многошаговым, двух шаговым или одношаговым?
5. Какой порядок точности имеет метод Эйлера?
6. В чем отличие построения усовершенствованного метода Эйлера от метода Эйлера исходя из геометрического смысла?
7. Какой порядок точности имеет усовершенствованный метод Эйлера?
8. Как на практике принято получать оценку погрешности полученного решения?

Содержание задания:

Решить дифференциальное уравнение. Составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения y'=f(x,y), удовлетворяющего начальным условиям y(x0)=y0 на отрезке [a,b] с шагом h=0,1. Все вычисления вести с четырьмя десятичными знаками. Оценить погрешность вычислений.

Для решения задачи Коши ОДУ применить:

1. Метод Эйлера;
2. Усовершенствованный метод Эйлера;
3. Метод Эйлера-Коши.

Варианты заданий:

Вариант	Задание
1	$y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{5}}) \quad y_0(1.8) = 2.6 \quad x \in [1.8;2.8]$
2	$y' = x + \cos(\frac{y}{3}) \quad y_0(1.6) = 4.6 \quad x \in [1.6;2.6]$
3	$y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{10}}) \quad y_0(0.6) = 0.8 \quad x \in [0.6;1.6]$
4	$y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{7}}) \quad y_0(0.5) = 0.6 \quad x \in [0.5;1.5]$
5	$y' = x + \cos(\frac{y}{\pi}) \quad y_0(1.7) = 5.3 \quad x \in [1.7;2.7]$
6	$y' = x + \cos(\frac{y}{2.25}) \quad y_0(1.4) = 2.2 \quad x \in [1.4;2.4]$
7	$y' = x + \cos(\frac{y}{e}) \quad y_0(1.4) = 2.5 \quad x \in [1.4;2.4]$
8	$y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{2}}) \quad y_0(0.8) = 1.4 \quad x \in [0.8;1.8]$
9	$y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{3}}) \quad y_0(1.2) = 2.1 \quad x \in [1.2;2.2]$
10	$y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{11}}) \quad y_0(2.1) = 2.5 \quad x \in [2.1;3.1]$
11	$y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{5}}) \quad y_0(1.8) = 2.6 \quad x \in [1.8;2.8]$
12	$y' = x + \sin(\frac{y}{3}) \quad y_0(1.6) = 4.6 \quad x \in [1.6;2.6]$
13	$y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{10}}) \quad y_0(0.6) = 0.8 \quad x \in [0.6;1.6]$
14	$y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{7}}) \quad y_0(0.5) = 0.6 \quad x \in [0.5;1.5]$
15	$y' = x + \sin(\frac{y}{\pi}) \quad y_0(1.7) = 5.3 \quad x \in [1.7;2.7]$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретической частью по данной теме.
2. Ответить на контрольные вопросы к лабораторной работе.
3. Получить вариант задания у преподавателя.
4. Выполнить индивидуальное задание в соответствии с вариантом задания.
5. Составить отчёт о проделанной работе.
6. Показать программу и отчёт преподавателю.

Содержание отчёта:

1. Титульный лист (идентификация).
2. Тема и цель работы.
3. Краткие теоретические сведения.
4. Вариант и условие задания.
5. Анализ заданий (алгоритм выполнения задания).
6. Основные и промежуточные результаты по каждому пункту хода выполнения работы (листинг программного кода, реализующий данный алгоритм; скриншот результатов выполнения программы; скриншоты результатов работы в математическом пакете Mathcad).
7. Выводы о проделанной работе.

Защита лабораторной работы проводится индивидуально. Для сдачи работы студент должен предъявить программу, отчет, ответить на контрольные вопросы, дать пояснения по выполненной работе.

Дополнительное задание:

Для решения задачи Коши ОДУ применить: Метод Эйлера, Усовершенствованный метод Эйлера, Метод Эйлера-Коши. Оценить погрешность вычислений.

Вариант	**Задание**
1	$y' = \dfrac{x^2 + y^2}{10} \quad y_0(1) = 1 \quad x \in [1;2] \quad h = 0.1$
2	$y' = \dfrac{1}{x^2 + y^2} \quad y_0(0.5) = 0.5 \quad x \in [0.5;1.5] \quad h = 0.1$
3	$y' = x^2 + xy^3 \quad y_0(0) = 0 \quad x \in [0;1] \quad h = 0.1$
4	$y' = \sqrt{xy} + 1 \quad y_0(0) = 0 \quad x \in [0;2] \quad h = 0.2$
5	$y' = 2xy^3 - 1 \quad y_0(0) = 0 \quad x \in [0;1] \quad h = 0.1$
6	$y' = e^{x+y} + e^{x-y} \quad y_0(0) = 0 \quad x \in [0;0.5] \quad h = 0.05$
7	$y' = \dfrac{4x^2 + y^2}{4} \quad y_0(0) = -1 \quad x \in [0;1] \quad h = 0.1$
8	$y' = \dfrac{1}{3x^2 + y^2} \quad y_0(1) = 2 \quad x \in [1;3] \quad h = 0.2$
9	$y' = x^2 + y^3 \quad y_0(0) = 0 \quad x \in [0;1] \quad h = 0.1$
10	$y' = \dfrac{x^2 + 3y^2}{4} \quad y_0(2) = 0 \quad x \in [2;3] \quad h = 0.1$