Тема: МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§2 Методы решения задачи Коши для ОДУ первого порядка.

п.2.1 Постановка задачи

Пусть задано дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dx} = f(x,u(x)) \qquad (1)$$

где *f(x,u(x))* – заданная непрерывная функция двух аргументов. Требуется найти функцию $u=u(x)$, непрерывную при $0 \le x < X$, удовлетворяющую этому уравнению (1) и некоторому начальному условию

$$u(0)=u0, \qquad (2)$$

Задачу Коши (1)-(2) можно записать в операторном виде

$$Lu = f(x,u(x)), x \ge 0 \quad u(0) = u0 . \qquad (3)$$

Здесь оператор L содержит операцию дифференцирования функции *u(x)*.

Из курса «дифференциальных уравнений» известно, что решение *u(x)* задачи Коши (1)-(2) существует, единственно и является *гладкой функцией*, если правая часть уравнения (1), т.е. функция *f(x,u(x))* удовлетворяет некоторым условиям гладкости.

При изучении численных методов решения задачи Коши будем заранее предполагать, что эти условия гладкости выполняются, т.е. существует столько частных производных функции *f(x,u(x))* по ее аргументам, сколько требуется по ходу изложения, и, следовательно, существует единственное решение исходной задачи.

Решение задачи Коши любым численным методом может быть найдено только в виде таблицы. Чаще всего используются разностные методы. Поэтому построим сетку (дискретное множество точек) $\omega=\{0=x_0<x_1<\ldots<x_n=X\}$, $h_i=x_{i+1}-x_i$ - шаг сетки}. В каждом узле сетки $x_i \quad i = 0,1,2,..,n$ будем рассматривать сеточную функцию $y_i = y(x_i) \approx u(x_i)$ как приближенное (аппроксимирующее) к точному решение на данном множестве точек. Далее заменим значения производной функции *u(x) в* уравнении (1) отношением конечных разностей. Таким образом, переходим от непрерывного дифференциального уравнения (1)-(2) относительно функции *u(x)* к разностной задаче относительно сеточной функции y_i:

$y_{i+1}=F(x_i, h_i, y_{i+1}, y_i, y_{i-1}, \ldots, y_{i-k+1})$, $x_i \in \omega$, $i=1,2,\ldots,n-1$, $k=0,1,\ldots,i+1$(4) $y(x_0)=y_0$(5)

Уравнение (4) – это разностное уравнение, записанное в общем виде, конкретное выражение правой части зависит от способа аппроксимации производной. Каждый численный метод имеет свой вид уравнения (4).

На основании анализа вида разностного уравнения (4) можно провести некоторую *классификацию* численных методов решения задачи Коши. Если в правой части уравнения (4) отсутствует значение сеточной функции y_{i+1}, т.е значение сеточной функции y_{i+1} явно вычисляется по предыдущим k значениям сеточной функции $y_0, y_1,.., y_i$ то разностная схема называется <u>*явной*</u>. При этом будем иметь <u>k-шаговый</u> метод: <u>k</u>=1 – одношаговый метод, <u>k</u>=2 – двух шаговый метод. *Одношаговый метод* позволяет найти приближенное значение решения исходной задачи в узле $x_{i+1} \in \omega$ используя лишь одно известное или ранее найденное значение сеточной функции в предыдущей узловой точке $x_i \in \omega$. В *многошаговых* методах для нахождения y_{i+1} необходимо иметь информацию о значениях сеточной функции во многих предыдущих узлах $y_i, y_{i-1}, \ldots, y_{i-k+1}$.

Если в правую часть (4) входит искомое значение y_{i+1}, то разностная схема называется <u>*неявной*</u> и решение ищется *итерационными методами*. Неявные методы также могут быть *одно- и многошаговыми*.

Иногда численные методы решения задачи Коши классифицируют на две группы: многошаговые методы; многоэтапные (методы Рунге-Кутты).

Методы Рунге-Кутты отличаются тем, что в них допускается вычисление функции правой части уравнения (1) $f(x,u(x))$ не только в узлах сетки, но и в некоторых промежуточных точках.

<u>п.2.2 Разностная схема Эйлера (метод ломаных)</u>

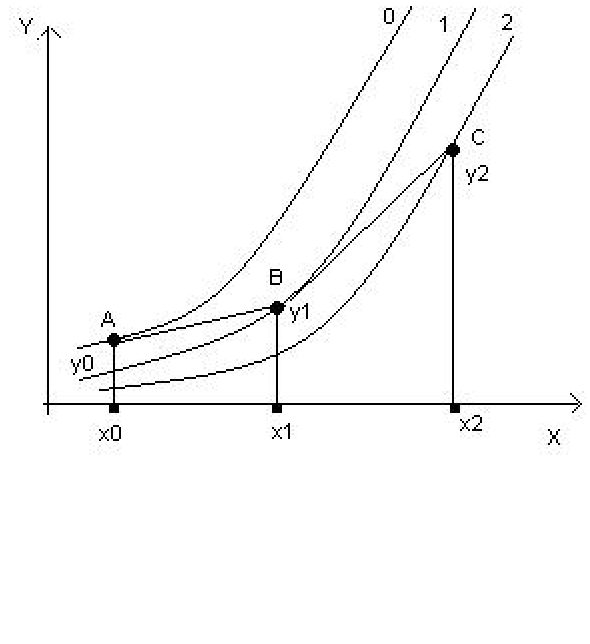
Пусть задана задача Коши

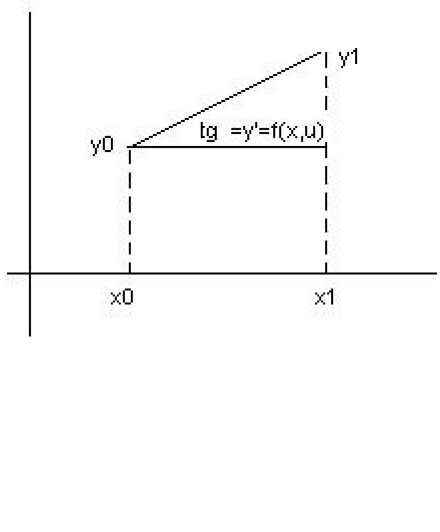
$$\frac{du}{dx} = f(x,u(x)) \qquad x \in [a,b], \qquad (1)$$

$$u(a)=u_0, \qquad (2)$$

где $f(x,u(x))$ – заданная непрерывная функция двух аргументов. Требуется найти функцию $u=u(x)$, непрерывную на отрезке $[a,b]$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальному условию (2).

Простейшим численным методом решения задачи (1)-(2) , т.е задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, является *метод Эйлера*. Рассмотрим создание разрешающего уравнения этого метода на основе графических построений.





Разделим отрезок $[a,b]$ на n равных частей. Решением исходной задачи является интегральная кривая под номером 0, которая проходит через точку $A(x_0, y_0)$. Вместо искомой интегральной кривой на отрезке $[x_0, x_1]$ будем рассматривать отрезок касательной к интегральной кривой в точке $A(x_0, y_0)$.

Построим уравнение этого отрезка касательной:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) \qquad (3)$$

Точку с координатами (x_1, y_1) обозначим как $B(x_1, y_1)$. Эта точка принадлежит интегральной кривой с номером 1. Заменим интегральную кривую с номером 1 на отрезке $[x_1, x_2]$ отрезком касательной к этой интегральной кривой в точке $B(x_1, y_1)$.

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) \qquad (4)$$

Поступаем аналогичным образом на каждом частичном отрезке. Для отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ будем иметь уравнение отрезка касательной в виде:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad (5)$$

Формула (5) представляет ***<u>метод Эйлера</u>*** для всех $i = 0,1,2,...,n-1$ и с учетом, что для начальной точки выполняется $y_0 = u_0$ (6).

<u>Точным решением</u> задачи (1)-(2) является интегральная кривая под номером 0, которая проходит через точку $A(x_0, y_0)$. Методом Эйлера мы заменяем ее ломаной с вершинами в точках (x_i, y_i) $i = \overline{0,n}$. При этом каждое звено ломаной совпадает по направлению с интегральной кривой, проходящей через точки (x_i, y_i) $i = \overline{0,n}$. Таким образом методом Эйлера происходит движение не по интегральной кривой, а по касательной к ней, поэтому метод Эйлера называют иначе *<u>методом ломаных</u>*.

Погрешность метода Эйлера возникает из-за того, что на каждом шаге решение переходит на другую интегральную кривую из семейства решений уравнения (1). Для некоторых диф. уравнений это обстоятельство может привести к большим ошибкам, т.е. решение окажется неустойчивым.

Метод Эйлера может быть построен, исходя из понятий теории разностных схем. Введем на отрезке $[a,b]$ равномерную сетку $\omega_h = \{x_i = a + ih, i = 0,1,2,...,n\}$ и соответствующую ей сеточную функцию для аппроксимации искомого решения $y_i = y(x_i) \approx u(x_i)$. Для аппроксимации производной используем <u>правую разностную</u> <u>схему</u>, т.е. $u'(x_i) \approx y_i' = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}$.

Заменим исходное дифференциальное уравнение (1) следующей разностной схемой $\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$ $i = 0,1,2,...,n-1$ (7)

И добавим начальное условие $y_0 = u_0$ (8)

Решение уравнения (7) можно выразить явным образом через предыдущие значения, т.е. $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$ $h = (x_{i+1} - x_i)$ (9)

Распространим уравнение (9) на всю сетку и добавим начальное условие $i = 0,1,2,...,n-1$ $y_0 = u_0$ (10)

Построенный таким образом метод Эйлера является одношаговым.

Метод Эйлера также можно построить, используя разложение функции *u(x)* в ряд Тейлора в окрестности узла x_i. В этом ряду отбрасываются все члены, содержащие производные второго и более высоких порядков.

$$u(x_i+h)=u_{i+1}=u_i+hu'(x_i)+\frac{h^2}{2}u''(x_i)+...$$

Т.к. $u'(x_i)=f(x_i,u_i)$ получаем $u_{i+1}=u_i+hf(x_i,u_i)$.

Метод Эйлера обладает малой точностью, т.е имеет первый порядок точности. Погрешность каждого нового шага вообще говоря систематически возрастает. Теоретически для оценки погрешности метода Эйлера имеет место неравенство $$r_i \le \frac{M1\cdot h}{2\cdot M2}\cdot e^{M3(x_i-x_0)} \qquad (11)$$

Здесь *M1,M2,M3* - верхние границы для функции $f(x,u)$ и ее частных производных. Однако для практики наиболее приемлемым способом оценки погрешности решения является метод двойного пересчета с шагами h и $h/2$. Совпадающие десятичные знаки решения в соответствующих узлах при различных пересчетах считаются верными.

Пример. Методом Эйлера найти решение следующей задачи Коши

$$\frac{du}{dx}=u+(1+x)u^2 \qquad x\in[1;1.5] \qquad u(1)=-1$$

Функция $f(x,u)=u+(1+x)u^2$. Возьмем шаг h=0.1, введем сеточные функции и вычисления метода Эйлера $y_{i+1}=y_i+h\cdot f(x_i,y_i)$ разместим в таблице.

i	x(i)	y(i)	f(xi,yi)	точное решение
0	1	-1	1	1
1	1,1	-0,9	0,801	-0,909091
2	1,2	-0,8199	0,659019222	-0,83333
3	1,3	-0,75399808	0,553582055	-0,769231
4	1,4	-0,69863987	0,472794538	-0,714286
5	1,5	-0,65136042	0,409315568	-0,66667

п.2.3 Усовершенствованный метод Эйлера. Метод Эйлера-Коши

Существуют различные модификации метода Эйлера, повышающие его точность.

Усовершенствованным методом Эйлера называется метод, который использует формулу следующего вида

$$y_{i+1}=y_i+h*f(x_{i+\frac{1}{2}},y_{i+\frac{1}{2}}) \qquad (1)$$

При использовании этого метода сначала по формуле Эйлера найдем приближенное решение в середине интервала, т.е.

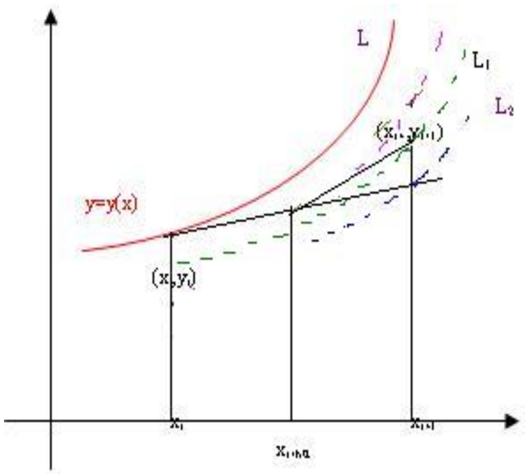
$$y_{i+\frac{1}{2}}=y(x_i+0.5h)=y_i+\frac{h}{2}*f(x_i,y_i) \qquad (2)$$

Затем в середине отрезка, т.е. точке $(x_i + 0.5h, y_i + 0.5h)$ вычисляем значение функции $f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$, т.е. определяем в этой точке наклон интегральной кривой $y' = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$. Используя эти найденные промежуточные значения вычисляем значение сеточной функции.

Следовательно, формулу (1) можно записать следующим образом:

$$y_{i+1} = y_i + h * f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} * f(x_i, y_i)) \tag{3}$$

<u>Геометрически усовершенствованный метод Эйлера</u> можно изобразить следующим образом.



По методу Эйлера мы получаем кривую L2, а усовершенствованный метод Эйлера дает решение в виде кривой L1. В модифицированном методе Эйлера усредняются наклоны касательных, при этом для нахождения следующего значения вычисляется значение *f* два раза, т.е. увеличивается объем вычислений. Из рисунка видно, что этот метод является более точным по сравнению с методом Эйлера. Усовершенствованный метод Эйлера имеет *<u>точность второго порядка</u>*.

Рассмотрим еще одну модификацию метода Эйлера, которая получается, если аппроксимацию функции *f* приравнять среднему арифметическому значений этой функции на концах элементарного отрезка, т.е. имеем

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right] \qquad i=0,1,2,\ldots,n-1 \tag{4}$$

$$y_0 = u_0 \tag{5}$$

Выразим значение сеточной функции решения

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right] \qquad i=0,1,2,\ldots,n-1 \tag{6}$$

$$y_0 = u_0 \tag{7}$$

Полученная схема является *<u>неявной</u>*, т.к. искомое значение сеточной функции y_{i+1} входит в обе части уравнения (6) и его нельзя выразить явно. Значит решение разностной задачи (6)-(7) следует искать итерационным способом. Вычисление сеточной функции в каждой последующей точке, т.е. y_{i+1} можно проводить на основе двух итераций. Будем предполагать, что значение y_i уже известно.

Применим метод Эйлера и найдем промежуточное значение

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i) \tag{8}$$

Это найденное промежуточное значение подставим в правую часть уравнения (6), чтобы вычислить значение функции *f*.

Окончательно получаем:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})] \qquad i=0,1,2,\ldots,n-1 \qquad (9)$$

$$y_0 = u_0 \qquad (10)$$

Алгоритм (8)-(10) можно записать в виде одного соотношения вида

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + h * f(x_i, y_i)] \qquad i=0,1,2,\ldots,n-1 \qquad (11)$$

$$y_0 = u_0 \qquad (12)$$

Схема (4)-(5) или в варианте (11)-(12) является ***модификацией метода Эйлера*** и ее называют ***методом Эйлера-Коши или методом Эйлера с пересчетом.*** Этот метод может быть получен путем разложения функции *u(x)* в ряд Тейлора. Параллельно можно показать , что этот метод имеет второй порядок точности, т.е его применение уменьшает в среднем значение погрешностей до величины второго порядка малости $O(h^2)$. На практике же оценку погрешности полученного решения принято получать <u>с помощью двойного пересчета с шагами *h* и *h*/2</u>.

Пример. Методом Эйлера-Коши решить следующую задачу Коши.

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x} \qquad x \in [1;1.5] \qquad y(1) = 0.5$$

Взять шаг *h*=0.1 и результаты сравнить с точным решением. Все вычисления оформим в виде таблицы.

i	x_i	y_i	f_i	$\tilde{y}_{i+1}$	$\tilde{f}_{i+1}$	Δy_i	Точное решение
0	1	0.5	0.25			0.023835	0.5
1	1.1	0.523635	0.226756	0.525	0.226704	0.021664	0.523809
2	1.2	0.545499	0.206608	0.546511	0.206531	0.019777	0.545455
3	1.3	0.56276	0.179030	0.566160	0.188941	0.018127	0.565216
4	1.4	0.583403	0.173603	0.584178	0.173510	0.016675	0.583333
5	1.5	0.600378		0.600783	0.159898		0.60000

Заполнения таблицы имеет следующий порядок.

$$x_{i+1} = x_i + h \qquad f_i = f(x_i, y_i) = \frac{y_i}{x_i}(1 - y_i) \qquad f_0 = \frac{y_0}{x_0}(1 - y_0) = \frac{0.5}{1}(1 - 0.5) = 0.25$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i) \qquad \tilde{y}_1 = y_0 + h * f_0 = 0.5 + 0.1 * 0.25 = 0.525$$

$$\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) = \frac{\tilde{y}_{i+1}}{x_{i+1}}(1 - \tilde{y}_{i+1}) \qquad \tilde{f}_1 = \frac{\tilde{y}_1}{x_1}(1 - \tilde{y}_1) = \frac{0.525}{1.1}(1 - 0.525) = 0.226704$$

$$\Delta y_i = \frac{h}{2}(f_i + \tilde{f}_{i+1}) \qquad \Delta y_0 = \frac{h}{2}(f_0 + \tilde{f}_1) = \frac{0.1}{2}(0.25 + 0.226704) = 0.023835$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})] \qquad y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0.5 + 0.023835 = 0.523835$$

С помощью <u>метода Эйлера-Коши</u> можно проводить контроль точности решения путем сравнения промежуточного значения функции в *i*+1 узле с ее окончательным значением в этом узле, т.е. значений $\tilde{y}_{i+1}$ и y_{i+1}. На основании этого сравнения выбирается величина шага h в каждом узле. Если модуль разности этих значений сравним с погрешностью вычислений, т.е. выполняется неравенство $|\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}| \le \varepsilon$, то шаг можно увеличить.

п.2.4 Сходимость метода Эйлера

Одним из важнейших вопросов теории разностных схем, которая лежит в основе применяемых нами численных методов, является *исследование метода на сходимость*. Понятие сходимости можно сформулировать по-разному. Применительно к разностным численным методам, к которым относится и метод Эйлера, наибольшее распространение получило понятие сходимости в точке при неограниченном уменьшении шага сетки, т.е. $h \to 0$. Это означает следующее. Фиксируем точку x^* и построим последовательность равномерных сеток $\{\varpi\}$ таких, что $h \to 0$ и $x_i = i * h = x^*$. (При этом необходимо, чтобы выполнялось условие $i \to \infty$).

- Говорят, что метод Эйлера $y_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i)$ сходится в точке x^*, если $|y_i - u(x_i)| \to 0$ при $h \to 0$, $x_i = x^*$

- Метод сходится на отрезке [0,X] если он сходится в каждой точке отрезка $x \in [0,X]$

- Говорят, что метод имеет p-й порядок точности, если существует такое целое число $p>0$, что $|y_i - u(x_i)| = O(h^p)$ при $h \to 0$

Получим уравнение, которому удовлетворяет разностная схема Эйлера

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \qquad i=0,1,2,\ldots,n-1 \qquad (1),$$

и сеточная функция, называемая *погрешностью метода*, т.е. $z_i = y_i - u(x_i)$. Для этого подставим сеточную функцию y_i в уравнение Эйлера, выразив ее через функцию погрешности $y_i = z_i + u(x_i)$, получим:

$$\frac{z_{i+1} + u(x_{i+1}) - z_i - u(x_i)}{h} = f(x_i, z_i + u(x_i)) \qquad i=0,1,2,\ldots,n-1 \qquad (2)$$

Преобразуем и окончательно получаем

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{h} = f(x_i, z_i + u(x_i)) - \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} \qquad i=0,1,2,\ldots,n-1 \qquad (3)$$

Введем следующие обозначения

$$\psi_i^1 = -\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} + f(x_i, u(x_i)) \qquad i=0,1,2,\ldots,n-1 \qquad (4)$$

$$\psi_i^2 = f(x_i, u(x_i) + z_i) - f(x_i, u(x_i)) \qquad i=0,1,2,\ldots,n-1 \qquad (5)$$

Тогда правую часть (3) можно записать как сумму этих функций

$$\psi_i^1 + \psi_i^2 = -\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} + f(x_i, u(x_i)) + f(x_i, u(x_i) + z_i)) - f(x_i, u(x_i)).$$

А метод Эйлера (3) будет выглядеть следующим образом

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{h} = \psi_i^1 + \psi_i^2 \qquad i=0,1,2,\ldots,n-1 \qquad (6)$$

Функция ψ_i^1, определяемая соотношением (4), называется *невязкой* или *погрешностью аппроксимации* разностного уравнения (1) на решении исходного дифференциального уравнения.

Невязка представляет собой результат подстановки точного решения *u=u(x)* в левую часть разностного уравнения Эйлера (1). Если бы решение, полученное численным методом, совпадало с точным, т.е. выполнялось бы точное равенство $y(x_i)=u(x_i)$, то невязка равнялась бы нулю.

Говорят, что разностный метод аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение с *p* порядком аппроксимации, если невязка $\psi_i^1 \to 0$ при неограниченном уменьшении шага дискретизации, т.е. $h \to 0$ и при этом невязка имеет *p* порядок точности, т.е. выполняется равенство $\psi_i^1 = O(h^p)$.

В теории разностных схем доказывается, что порядок точности разностного метода совпадает с его порядком аппроксимации.

Функция ψ_i^2, определяемая соотношением (5) $\psi_i^2 = f(x_i, u(x_i)+z_i) - f(x_i, u(x_i))$,обращается в 0, если правая часть исходного уравнения, т.е. функция $f(\psi_i^2 x, u(x))$, не зависит от искомого решения. Имеем $f(x,u(x))= f(x)$. В общем случае функция ψ_i^2 характеризует вычислительную погрешность функции $f(x,u(x))$ и ее значение пропорционально погрешности метода

$$\psi_i^2 = A_i(z_i) \qquad i=0,1,2,\dots,n-1 \qquad (7)$$

Найдем порядок аппроксимации метода Эйлера (1), т.е. оценим величину функции ψ_i^1 при стремлении шага дискретизации $h \to 0$. Воспользуемся разложением функции решения дифференциального уравнения $u=u(x)$ в окрестности точки x_i в ряд Тейлора.

$$u_{i+1} = u(x_i+h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \dots \qquad i=0,1,2,\dots,n-1 \qquad (8)$$

В разложении отбросим слагаемые, ограничившись второй производной от искомой функции решения. Преобразуем соотношение (8):

$$\frac{u_{i+1}-u_i}{h} = u'(x_i) + O(h) \qquad i=0,1,2,\dots,n-1 \qquad (9)\ ,$$

Исходное дифференциальное уравнение для *i*-го узла может быть записано как

$$\frac{u_{i+1}-u_i}{h} = u'(x_i) \qquad i=0,1,2,\dots,n-1 \qquad (10)\ ,$$

С другой стороны, учтем, что $u'(x_i) = f(x_i, u(x_i))$, и перепишем (9)

$$-\frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{h} + f(x_i, u(x_i)) = O(h) \qquad i=0,1,2,\dots,n-1 \qquad (11)\ ,$$

Левая часть (11) представляет собой функцию ψ_i^1 , т.е. погрешность разностного метода по определению (4). Таким образом, анализируя (9)-(11), приходим к выводу, что метод Эйлера имеет первый порядок аппроксимации. Наши рассуждения опирались на предположение, что вторая производная искомого решения *u=u(x)* в окрестности точки x_i - ограниченная функция.