Тема: МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§3 Системы ОДУ.

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\frac{dU}{dx} = f(x, U(x)) \qquad 0 \le x \le X \qquad (1)$$

$$U(0) = U0 \qquad (2)$$

Здесь $U(x) = (u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x))$ - искомый вектор решения задачи (1)-(2), $f(x,U(x)) = (f_1(x,U(x)), f_2(x.U(x)), ..., f_n(x,U(x))$ заданный вектор правой части. *U0* – вектор начальных условий.

Запишем задачу Коши покомпонентно:

$$\frac{du_1}{dx} = f_1(x, U(x)) \qquad 0 \le x \le X$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

$$\frac{du_n}{dx} = f_n(x, U(x)) \qquad 0 \le x \le X$$

$$u_1(0) = U0_1$$

$$u_2(0) = U0_2 \qquad (4)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_n(0) = U0_n$$

Задача Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения является *частным случаем задачи Коши* для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1)-(2). Поэтому многие из рассмотренных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений практически без изменений могут быть перенесены на случай системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера легко распространить на систему дифференциальных уравнений первого порядка.

Рассмотрим случай системы, состоящей из двух дифференциальных уравнений.

Пусть вектор $U(x) = (u_1(x), u_2(x)) = (y(x), z(x))$ и система имеет вид

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases} \quad x \in [a, b] \quad (5) \quad \textit{с условиями}$$

$$y(a) = y_0 \qquad z(a) = z_0 \qquad (6)$$

Метод Эйлера для решения задачи (5)-(6) является конечно-разностным методом. Поэтому введем равномерную сетку с постоянным шагом $h>0$ $\omega_h = \{x_i = a + ih,\ i = 0, ..., N\}$. Введем сеточные функции $y_i \approx y(x_i),\ z_i = z(x_i)$ и функции правой части $f1_i \approx f_1(x_i, y_i, z_i)$ *и* $f2_i \approx f_2(x_i, y_i, z_i)$.

Приближенное решение системы (5)-(6) в узлах x_{i+1} будем вычислять последовательно по формулам:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf1(x_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} = z_i + hf2(x_i, y_i, z_i) \end{cases} \quad i = 0,1,....,n-1 \qquad (7)$$

Рассмотрим пример

$$\begin{cases} y' = e^{-\left|z^2+y^2\right|} + 2x \\ z' = 2y^2 + z \end{cases} \quad x \in [0;0.5] \quad \textit{с условиями}$$

$$y(0) = 0.5 \quad z(0) = 1$$

Т.е. $f1 = e^{-\left|z^2+y^2\right|} + 2x \quad f2 = 2y^2 + z$, выберем шаг h=0.1 и построим следующую таблицу:

i	x_i	y_i	$f1_i$	z_i	$f2_i$
0	0	0,5	0,286505	1	1,5
1	0,1	0,52865	0,401499	1,15	1,708943
2	0,2	0,5688	0,526401	1,320894	1,967962
3	0,3	0,62144	0,66791	1,51769	2,290067
4	0,4	0,688231	0,829463	1,746697	2,694022
5	0,5	0,771178	1,009472	2,016099	3,20553

Таблицу заполняем в следующем порядке:

1. Заполняем столбец x_i с шагом h=0.1;
2. Заносим в соответствующие ячейки начальные условия:

$$y_0 = y(0) = 0.5 \quad z_0 = z(0) = 1;$$

3. Рассчитываем функции правых частей для первой узловой точки:

$$f1_0 = e^{-\left|z_0{}^2+y_0{}^2\right|} + 2x_0 = e^{-(1+0.25)} + 2\cdot 0 = 0.286505$$

$$f2_0 = 2y_0{}^2 + z_0 = 2(0.5)^2 + 1 = 1.5$$

4. Определяем значение решения в первом узле:

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + hf1(x_0, y_0, z_0) = 0.5 + 0.1\cdot 0.286505 = 0.5286505 \\ z_1 = z_0 + hf2(x_0, y_0, z_0) = 1 + 0.1\cdot 1.5 = 1.15 \end{cases}$$

5. повторяем с пункта 3.

Сравним полученное решение с решением, полученным стандартными функциями пакета MathCad:

$$nz := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D(x,u) := \begin{bmatrix} e^{-\left|(u_0)^2+(u_1)^2\right|} + 2\cdot x \\ 2\cdot(u_0)^2 + u_1 \end{bmatrix} \qquad S := rkfixed(nz, 0, 0.5, 5, D)$$

Рисунок 1 – находим точное решение системы

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.1 & 0.534 & 1.161 \\ 0.2 & 0.579 & 1.348 \\ 0.3 & 0.638 & 1.568 \\ 0.4 & 0.712 & 1.828 \\ 0.5 & 0.803 & 2.14 \end{pmatrix} \qquad Yt := S^{\langle 1 \rangle} \qquad X := S^{\langle 0 \rangle} \qquad Zt := S^{\langle 2 \rangle}$$

$$Yel := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.52885 \\ 0.5688 \\ 0.62144 \\ 0.688231 \\ 0.771178 \end{pmatrix} \qquad Yt = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.534 \\ 0.579 \\ 0.638 \\ 0.712 \\ 0.803 \end{pmatrix} \qquad Zel := \begin{pmatrix} 1 \\ 1.15 \\ 1.32094 \\ 1.51769 \\ 1.746697 \\ 2.016099 \end{pmatrix} \qquad Zt = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.161 \\ 1.348 \\ 1.568 \\ 1.828 \\ 2.14 \end{pmatrix}$$

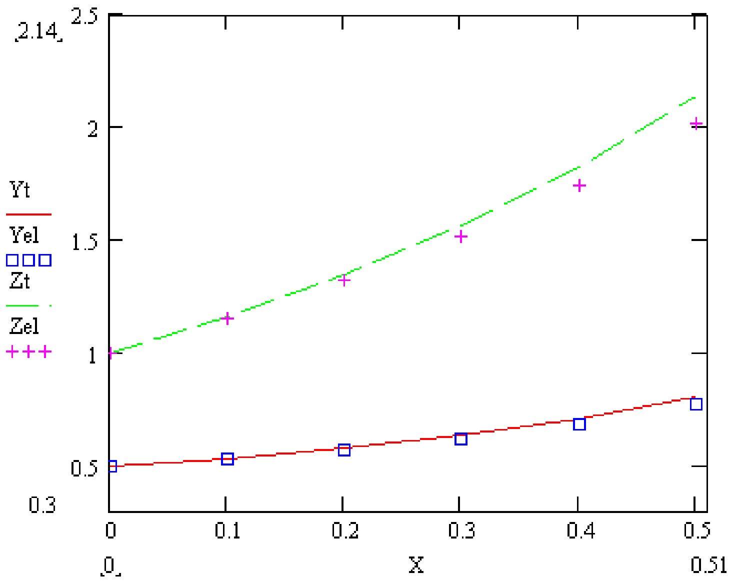


Рисунок 2 – графики полученных решений

Известно, что метод Эйлера обладает малой точностью. Т.е. решение получаем с большой погрешностью. Повысить точность можно, уменьшив шаг сетки, или применить одну из формул Рунге-Кутта.

Для системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (5)-(6) Метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности записывается следующим образом:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \qquad z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)$$

$$K_1 = f_1(x_i, y_i, z_i) \qquad L_1 = f_2(x_i, y_i, z_i)$$

$$K_2 = f_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1, z_i + \frac{h}{2}L_1) \qquad L_2 = f_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1, z_i + \frac{h}{2}L_1)$$

$$K_3 = f_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2, z_i + \frac{h}{2}L_2) \qquad L_3 = f_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2, z_i + \frac{h}{2}L_2)$$

$$K_4 = f_1(x_i + h, y_i + hK_3, z_i + hL_3) \qquad L_4 = f_2(x_i + h, y_i + hK_3, z_i + hL_3)$$

(8)

§4 Понятие жесткой системы

Рассмотрим задачу Коши следующего вида:

$$y' = -100y + 100 \qquad x \ge 0 \qquad y(0) = y_0 \qquad (1)$$

Точным решением этой задачи является функция:

$$y(x) = (y_0 - 1)e^{-100x} + 1 \qquad (2)$$

Будем решать эту задачу (1) методом сеток (методом Эйлера):

$$y_i = y_{i-1} + h(-100y_{i-1} + 100) = (1 - 100h)y_{i-1} + 100h \qquad (3)$$

Выразим сеточную функцию в i-том узле через начальные условия:

$$y_i = (y_0 - 1)(1 - 100h)^i + 1 \qquad (4)$$

Формула (4) получается путем последовательной подстановки для каждого узла схемы Эйлера:

$$y_1 = (1 - 100h)y_0 + 100h$$

$$y_2 = (1 - 100h)y_1 + 100h = (1 - 100h)\big((1 - 100h)y_0 + 100h\big) + 100h =$$

$$= y_0(1 - 100h)^2 + 100h(1 - 100h) + 100h = y_0(1 - 100h)^2 + 2h \cdot 100 - (100h)^2 + 1 - 1 =$$

$$= y_0(1 - 100h)^2 - (1 - 100h)^2 + 1 = (y_0 - 1)(1 - 100h)^2 + 1$$

Таким образом получили $y_2 = (y_0 - 1)(1 - 100h)^2 + 1$.

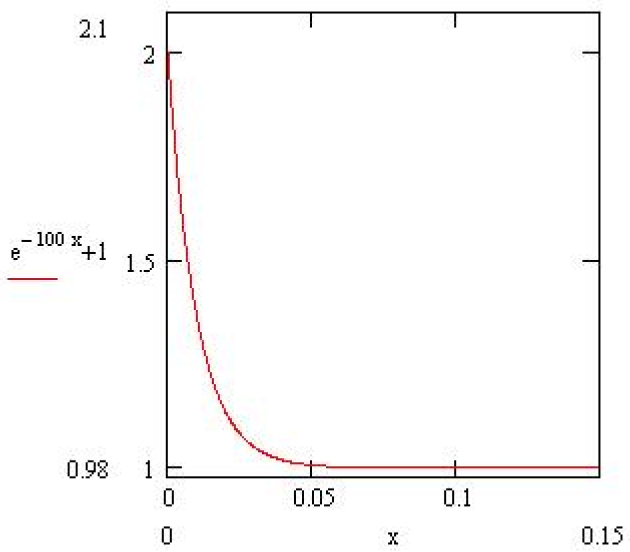
Продолжая по следующим узлам, придем к формуле (4).

Рассмотрим для конкретности задачу Коши (1) при условии $y_0 = 2$. В этом случае точное решение (2) и численное (4) будет иметь вид:

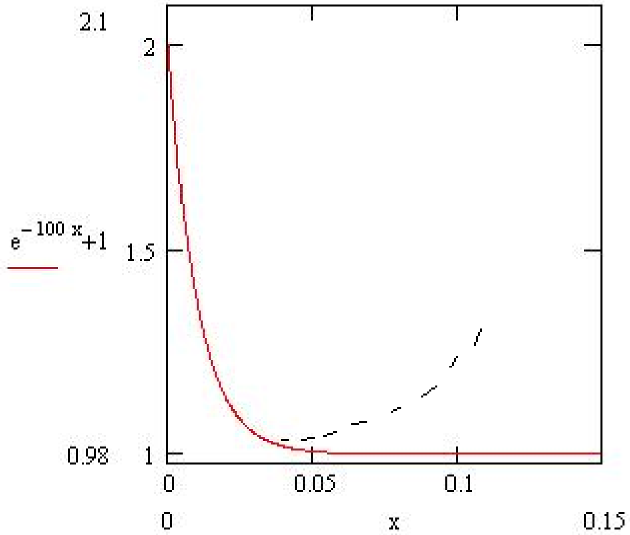
$$y(x) = e^{-100x} + 1 \qquad (5)$$

$$y_i = (1 - 100h)^i + 1 \qquad (6)$$

<u>Проанализируем точное решение (5)</u>: функция *y(x)* очень быстро убывает от начального значения $y_0 = 2$ до своего предельного значения, равного 1.



Например $y(0.1) = 1 + 5 \cdot 10^{-5}$. Поэтому на начальном этапе численного решения задачи Коши нам потребуется счет с очень мелким шагом *h*. Однако после какого-то значения x^*, например $x^* = 0.1$, решение этой задачи изменяется очень медленно и практически равно 1. Поэтому, казалось бы, что можно применить метод Эйлера, значительно увеличив шаг. Однако из соотношения (6) видно, что если взять шаг *h>0.02*, то первое слагаемое по модулю будет больше 1,т.е. $|1\text{-}100h| > 1$. Следовательно, *значение сеточной функции y_i с увеличением номера узла (т.е. параметра i) начинает быстро расти.*



Если сравнить соотношения (5) и (6), то видно, что экспоненциальный член точного решения (5) аппроксимируется слагаемым $(1-100h)^i$ в методе Эйлера (6). При малых значениях шага h такая аппроксимация дает хорошую точность. Но если шаг увеличить до значений превышающих 0.02, то эта аппроксимация становится неудовлетворительной. И хотя после значений *x=0.1* это слагаемое фактически не вносит никакого вклада в решение, метод Эйлера по-прежнему будет требовать его точной аппроксимации для сохранения устойчивости метода.

(Устойчивость разностных схем см. Самарский, Ч.М. стр. 233-240).

Рассмотренная ситуация характерна для так называемых «*жестких уравнений*». *В решении такого уравнения присутствует член, вклад которого очень мал. Однако, применяя численный метод решения исходного уравнения, для сохранения устойчивости метода требуется достаточно точная аппроксимация этого члена. Такая же проблема очень часто возникает при решении систем дифференциальных уравнений.*

Например. Требуется решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$y''+101y'+100y=0 \quad y(0)=1.01 \quad y'(0)=-2 \tag{7}$$

Общее решение этого уравнения в аналитическом виде можно выразить следующим образом:

$$y(x)=C1e^{-100x}+C2e^{-x} \tag{8}$$

Значение параметров C1 и C2 определим из начальных условий. Имеем:

$$y(x)=\frac{1}{100}e^{-100x}+e^{-x} \tag{9}$$

Проанализируем решение (9): при значениях $x>0.1$ первое слагаемое в (9) вносит в общее решение очень малый вклад.

Чтобы задачу (7) решить численно, нам потребуется привести исходное уравнение к эквивалентной системе двух уравнений первого порядка. Если далее воспользоваться методом Эйлера, то получим проблему, аналогичную рассмотренному выше. Нам придется выбирать шаг очень маленьким, чтобы как можно точнее аппроксимировать первое слагаемое из решения (9).

Рассмотренные примеры демонстрируют сущность проблемы жестких дифференциальных систем: *искомое решение изменяется медленно, однако в нем содержится член, дающий быстро затухающее возмущение*. Наличие таких возмущений затрудняет получение решения системы численным методом.

Задачи, называемые *жесткими*, весьма разнообразны и дать математически строгое определение жесткости очень непросто. Поэтому встречаются различные определения жесткости, которые отличаются степенью математической строгости. (см. Самарский Ч.М. стр.250)

Явные методы часто оказываются непригодными для численного решения жестких систем задач с частными производными, т.к. имеют большие ограничения на шаг сетки. *Поэтому принято решать жесткие системы уравнений с частными производными, применяя неявные абсолютно устойчивые методы.*