Министерство образования Республики Беларусь
УО «Полоцкий государственный университет»

Факультет информационных технологий
Кафедра технологий программирования

Методы численного анализа
Лабораторная работа №4
На тему: «Метод редукции, метод стрельбы для решения краевой задачи ОДУ»

Полоцк 2017 г.

Название: «Метод редукции, метод стрельбы для решения краевой задачи обыкновенных дифференциальных уравнений».

Цель работы: Изучить основные методы для нахождения решения краевой задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теоретическая часть:

Метод редукции

Пусть на отрезке [*a,b*] задано линейное ОДУ *n*-го порядка с непрерывными коэффициентами $p_i(x)$ $\quad i = 0,1,2,...,n$ и функцией правой части *f(x):*

$$p_0(x)u^{(n)}(x) + p_1(x)u^{(n-1)}(x) + p_2(x)u^{(n-2)}(x) + ... + p_n(x)u(x) = f(x) \qquad (2)$$

При этом $p_0(x) > 0 \quad \text{для} \ x \in [a,b]$.

Кроме этого на отрезке $x \in [a,b]$ заданы граничные условия вида:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{ik} u^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{ik} u^{(k)}(b) = \gamma_i \qquad i = 1,2,...,n \quad (3)$$

Требуется найти решение поставленной краевой задачи (2)-(3) на отрезке [*a,b*] *методом редукции*. Суть метода состоит в том, *чтобы поиск решения свести к решению задач Коши*.

Известно, что искомое решение задачи (2)- (3) можно представить в виде линейной комбинации: $u(x) \approx y(x) = Y0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i Yi(x)$ (4), где *Y0* – является частным решением неоднородного ДУ (2), а *Yi ,i=1,2,…,n*– линейно независимые решения однородного ДУ $\sum_{i=0}^{n} p_i(x)u^{(n-i)}(x) = 0$, c_i - произвольные константы.

Метод *редукции* к задачам Коши состоит из следующих этапов:

1. На отрезке поиска решения [*a,b*] любым известным методом находим численные решения *Yi ,i=0,1,2,…,n.*
2. Используя общий вид решения (4) и краевые условия (3), определяем $c_1, c_2, \ldots, c_n$.
3. Вычисляем по формуле (4) искомое решение задачи (2)-(3) .

Рассмотрим метод *редукции для двухточечной краевой задачи* на основе обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x) \qquad x \in [a,b] \qquad (8)$$

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1 \qquad (9)$$

$$\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2 \qquad (10)$$

где *p(x),q(x),f(x)* – известные функции, определенные на отрезке поиска решения, а параметры $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ имеют конкретное числовое значение, причем выполняется условие $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, i = 1,2$.

Ищем общее решение в виде: $$u(x) \approx y(x) = Y0(x) + c1Y1(x) + c2Y2(x) \qquad (11)$$

Далее необходимо решить три задачи Коши (12)-(14):

$$\begin{cases} Y0''(x) + p(x)Y0'(x) + q(x)Y0(x) = f(x) & x \in [a,b] \\ Y0(a) = 0 \\ Y0'(a) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y1''(x) + p(x)Y1'(x) + q(x)Y1(x) = 0 & x \in [a,b] \\ Y1(a) = 1 \\ Y1'(a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y2''(x) + p(x)Y2'(x) + q(x)Y2(x) = 0 & x \in [a,b] \\ Y2(a) = 0 \\ Y2'(a) = 1 \end{cases}$$

Решив эти системы (12)-(14) численным методом, получим в узлах выбранной сетки значения функций *Y0,Y1,Y2*. Подставим эти найденные значения в краевые условия:

$$\begin{cases} \alpha_1\left[Y0(a) + c1Y1(a) + c2Y2(a)\right] + \beta_1\left[Y0'(a) + c1Y1'(a) + c2Y2'(a)\right] = \gamma_1 \\ \alpha_2\left[Y0(b) + c1Y1(b) + c2Y2(b)\right] + \beta_2\left[Y0'(b) + c1Y1'(b) + c2Y2'(b)\right] = \gamma_2 \end{cases} \qquad (15)$$

Учтем из (12)-(14), что Y0(a)=0, $Y0'(a) = 0$, Y1(a)=1, $Y1'(a) = 0$, Y2(a)=0, $Y2'(a) = 1$ и получаем систему: $$\begin{cases} \alpha_1 c1 + \beta_1 c2 = \gamma_1 \\ \alpha_2\left[Y0(b) + c1Y1(b) + c2Y2(b)\right] + \beta_2\left[Y0'(b) + c1Y1'(b) + c2Y2'(b)\right] = \gamma_2 \end{cases} \qquad (16)$$

Из системы (16) найдем значения коэффициентов *c1, c2* и подставим их в соотношение (11), на основании которого можем найти искомое решение в любой точке отрезка поиска решения.

Пример. Методом редукции найти решение следующей граничной задачи:

$$u''(x) + (x+1)u'(x) - 2u(x) = 2 \qquad x \in [0,1]$$

$$u(0) - u'(0) = -1$$

$$u(1) = 4$$

Решение найти на отрезке с шагом 0.1. Для решения вспомогательных задач Коши воспользоваться методом Эйлера с шагом 0.01.

Приближенное решение ищем в виде $u(x) \approx y(x) = Y0(x) + c1Y1(x) + c2Y2(x)$.

Для поиска коэффициентов этого разложения построим три задачи Коши:

$$\begin{cases} Y0''(x) + (x+1)Y0'(x) - 2Y0(x) = 2 \\ Y0(0) = 0 \\ Y0'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Y1''(x) + (x+1)Y1'(x) - 2Y1(x) = 0 \\ Y1(0) = 1 \\ Y1'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Y2''(x) + (x+1)Y2'(x) - 2Y2(x) = 0 \\ Y2(0) = 0 \\ Y2'(0) = 1 \end{cases}$$

Каждая из этих задач основана на уравнении второго порядка, следовательно, понижением порядка уравнений получаем системы дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} Y0'(x) = S0(x) \\ S0'(x) = -(x+1)S0(x) + 2Y0(x) + 2 \\ Y0(0) = 0 \\ S0(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Y1'(x) = S1(x) \\ S1'(x) = -(x+1)S1(x) + 2Y1(x) \\ Y1(0) = 1 \\ S1(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Y2'(x) = S2(x) \\ S2'(x) = -(x+1)S2(x) + 2Y2(x) \\ Y2(0) = 0 \\ S2(0) = 1 \end{cases}$$

Решаем эти системы методом Эйлера с шагом 0.01, все вычисления занесем в таблицу.

Решение первой задачи Коши осуществим средствами MathCad и одновременно сформируем столбцы сводной таблицы:

$$nz := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D(x,u) := \begin{bmatrix} u_1 \\ -(x+1)\cdot u_1 + 2u_0 + 2 \end{bmatrix} \qquad Z := \mathrm{rkfixed}(nz, 0, 1, 10, D)$$

$$X := Z^{\langle 0 \rangle} \qquad S0 := Z^{\langle 2 \rangle} \qquad Y0 := Z^{\langle 1 \rangle}$$

Аналогично решаем вторую задачу Коши:

$$nz := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D(x,u) := \begin{bmatrix} u_1 \\ -(x+1)\cdot u_1 + 2u_0 \end{bmatrix} \qquad Z := \mathrm{rkfixed}(nz, 0, 1, 10, D)$$

И формируем столбцы сводной таблицы: $Y1 := Z^{\langle 1 \rangle} \qquad S1 := Z^{\langle 2 \rangle}$.

Решение третьей задачи Коши:

$$nz := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D(x,u) := \begin{bmatrix} u_1 \\ -(x+1)\cdot u_1 + 2u_0 \end{bmatrix} \qquad Z := \mathrm{rkfixed}(nz, 0, 1, 10, D)$$

Формируем столбцы сводной таблицы: $Y2 := Z^{\langle 1 \rangle} \qquad S2 := Z^{\langle 2 \rangle}$.

Оформляем таблицу:

$$M^{\langle 0 \rangle} := X \qquad M^{\langle 1 \rangle} := Y0 \qquad M^{\langle 2 \rangle} := S0 \qquad M^{\langle 3 \rangle} := Y1 \qquad M^{\langle 4 \rangle} := S1$$

$$M^{\langle 5 \rangle} := Y2 \qquad M^{\langle 6 \rangle} := S2$$

	X	**Y0**	**S0**	**Y1**	**S1**	**Y2**	**S2**
0	0	0	0	1	0	0	1
1	0,1	0.00967	0.19	1.01	0.19	0.095	0.91
2	0.2	0.037	0.363	1.037	0.363	0.183	0.837
3	0.3	0.082	0.519	1.082	0.519	0.263	0.781
4	0.4	0.141	0.661	1.141	0.661	0.339	0.739
5	0.5	0.213	0.791	1.213	0.791	0.412	0.709
6	0.6	0.299	0.91	1.299	0.91	0.481	0.69
7	0.7	0.395	1.02	1.395	1.02	0.55	0.68
8	0.8	0.502	1.122	1.502	1.122	0.618	0.678
9	0.9	0.619	1.217	1.619	1.217	0.686	0.683
10	1.0	0.745	1.307	1.745	1.307	0.755	0.693

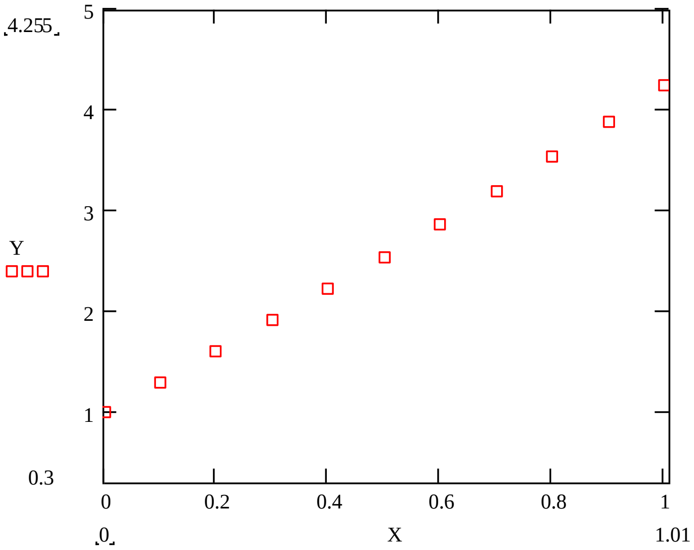
Составим систему уравнений относительно параметров c1 и c2, учитывая, что $\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \beta_1 = -1 \quad \beta_2 = 0 \quad \gamma_1 = -1 \quad \gamma_2 = 4$. Имеем: $\begin{cases} c1 - c2 = -1 \\ 0.745 + 1.745c1 + 0.755c2 = 4 \end{cases}$

Решаем систему и получаем $c1$=1, $c2$=2.

Строим приближенное решение исходной задачи $u(x) \approx y(x) = Y0(x) + Y1(x) + 2Y2(x)$.

Вычисляем значение приближенного решения во всех точках сетки и строим график:

	X	Y
0	0	1
1	0,1	1.3
2	0.2	1.603
3	0.3	1.908
4	0.4	2.219
5	0.5	2.537
6	0.6	2.861
7	0.7	3.195
8	0.8	3.538
9	0.9	3.891
10	1.0	4.255



Т.к. мы применяли метод Эйлера, получили достаточно большую погрешность:

$$\varepsilon := \frac{4.255 - 4.0}{4}$$ ε=0.064 или 6.4%

Метод стрельбы

Рассмотрим *метод стрельбы* для двухточечной краевой задачи на основе ОДУ-2.

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x) \qquad x \in [a,b] \qquad (1)$$

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1 \qquad (2)$$

$$\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2 \qquad (3)$$

где *p(x),q(x),f(x)* – известные функции, определенные на отрезке поиска решения, а параметры $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ имеют конкретное числовое значение, причем выполняется условие $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, i = 1,2$.

Суть этого метода заключается *в сведении решения краевой задачи к многократному решению задач Коши*. Будем предполагать, что отрезок поиска решения задачи [0,1]. Известно, что любой отрезок [*a*,*b*] можно заменить отрезком [0,1], путем ввода замены переменной вида: $t = \frac{x-a}{b-a}$ (4). Граничные условия на концах рассматриваемого отрезка также примем в простейшем виде, т.е. *u*(0)~*y*(0)=Y0 , *u*(1)~ *y*(1)=Y1 (5).

Имеем задачу (1)-(3). Доказывается, что в случае, когда для двух линейно независимых решений *Y*0 и *Y*1 этой задачи одно граничное условие выполняется, например $\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1$, то общее решение задачи (1)-(3) будет теперь зависеть от одного произвольного параметра: *u*(*x*)~Y(*x*) =Y0(*x*) + CY1(*x*) (8)

Параметр C находим из второго граничного условия $\alpha_2 u(b)+\beta_2 u'(b)=\gamma_2$. Получим:

$$C=\frac{\gamma_2-\alpha_2 Y0(b)-\beta_2 Y0'(b)}{\alpha_2 Y1(b)+\beta_2 Y1'(b)} \qquad (9)$$

Для реализации такого алгоритма выбираем на левом конце одно из начальных условий, вообще говоря, произвольно. *Например*, если $\alpha_1 \neq 0$, то принимаем $y'(a)=\varphi 1$ тогда из граничного условия (2) находим $y(a)=\dfrac{\gamma_1-\beta_1\varphi 1}{\alpha_1}$ и решаем следующую задачу Коши, решение которой обозначаем как Y0:

$$\begin{cases} Y0''(x)+p(x)Y0'(x)+q(x)Y0(x)=f(x) \qquad x\in[a,b] \\ Y0(a)=\dfrac{\gamma_1-\beta_1\varphi 1}{\alpha_1} \\ Y0'(a)=\varphi 1 \end{cases}$$

Затем выбираем другое значение $y'(a)=\varphi 2$ так, чтобы φ2 ≠ φ1 (т.е. решения при этих $\varphi 1, \varphi 2$ должны быть линейно независимы).

Решаем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} Y1''(x)+p(x)Y1'(x)+q(x)Y1(x)=f(x) \qquad x\in[a,b] \\ Y1(a)=\dfrac{\gamma_1-\beta_1\varphi 2}{\alpha_1} \\ Y1'(a)=\varphi 2 \end{cases}$$

Используя результаты решения этих задач Коши на правом конце отрезка, т.е в точке *x=b*, вычислим параметр C как соотношение (9) и по формуле (8) найдем решение исходной граничной задачи.

Пример. Методом стрельбы найти решение граничной задачи. Решение найти на отрезке с шагом 0.1. Для решения вспомогательных задач Коши воспользоваться методом Эйлера с шагом 0.01.

$$u''(x)+(x+1)u'(x)-2u(x)=2 \qquad x\in[0,1]$$

$$u(0)-u'(0)=-1$$

$$u(1)=4$$

Приближенное решение ищем в виде $u(x)\approx y(x)=Y0(x)+CY1(x)$. Для поиска коэффициента этого разложения построим две задачи Коши.

$$\begin{cases} Y0''(x)+(x+1)Y0'(x)-2Y0(x)=2 \\ Y0(0)-Y0'(0)=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y1''(x)+(x+1)Y1'(x)-2Y1(x)=2 \\ Y1(0)-Y1'(0)=-1 \end{cases}$$

Каждая из этих задач основана на уравнении второго порядка, следовательно, понижением порядка уравнений получаем системы дифференциальных уравнений вида. Принимаем *Y*0(0)=1, тогда из граничного условия имеем $1-Y0'(0)=-1$, т.е. $Y0'(0)=2$. Аналогично для второй задачи принимаем *Y*1(0)= -2, тогда $Y1'(0)=-1$. Имеем две системы уравнений:

$$\begin{cases} Y0'(x) = S0(x) \\ S0'(x) = -(x+1)S0(x) + 2Y0(x) + 2 \\ Y0(0) = 1 \\ S0(0) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y1'(x) = S1(x) \\ S1'(x) = -(x+1)S1(x) + 2Y1(x) + 2 \\ Y1(0) = -2 \\ S1(0) = -1 \end{cases}$$

Решение этих систем методом Эйлера приведено в таблице:

		Р Е Ш Е Н И Е			
X	**Y0**	**S0**	**Y1**	**S1**	**y**
0	1	2	-2	-1	1,0051
0,1	1,209	2,1999	-2,1045	-1,1	1,214633
0,2	1,438	2,3996	-2,219	-1,1998	1,444217
0,3	1,6869	2,5992	-2,3436	-1,2996	1,693752
0,4	1,9558	2,7986	-2,4779	-1,3993	1,963337
0,5	2,2446	2,9979	-2,6223	-1,499	2,252874
0,6	2,5634	3,1971	-2,7767	-1,5986	2,572478
0,7	2,8821	3,3962	-2,941	-1,6981	2,891999
0,8	3,2307	3,5953	-3,1153	-1,7976	3,241488
0,9	3,5991	3,7942	-3,2996	-18971	3,610828
1	3,9875	3,9931	-3,4938	-1,9966	4,000218

Используя табличные значения S0(x), Y0′(x), S1(x),Y1′(x) найдем значение параметра C:

$$C = \frac{\gamma_2 - \alpha_2 Y0(b) - \beta_2 Y0'(b)}{\alpha_2 Y1(b) + \beta_2 Y1'(b)} = \frac{4 - 1\cdot 3.9875 - 0\cdot 3.9931}{1\cdot(-3.4938) + 0\cdot(-1.9966)} = -0.0017$$

Затем вычисляем решение исходной граничной задачи. Построим график и сравним решение с методом редукции:

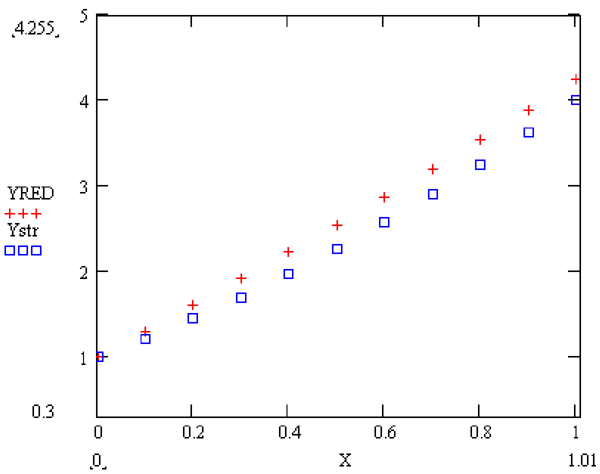


Рисунок 1 – Графики функций решений по методу стрельбы
и методу редукции

Для решения <u>двухточечной краевой задачи на основе дифференциального уравнения второго порядка</u> в пакете MathCad имеются функции *Odesolve*(*x*,b) и *sbval*(v,a,b,D,load,score).

Контрольные вопросы:

1. Суть метода редукции?
2. Суть метода стрельбы?
3. Сформулируйте этапы сведения метода редукции к задачам Коши.
4. Какие функции в пакете MathCad имеются для решения двухточечной краевой задачи на основе ОДУ-2?

Содержание задания:

Найти решения граничных задач с шагом $h=0.1$ на отрезке $[a,b]$:

1. используя метод редукции;
2. используя метод стрельбы.

Для решения задач Коши использовать метод Рунге-Кутта четвертого порядка с шагом $h=0.1$. Оценить погрешность полученного решения.

Варианты заданий:

Вариант	Задание
1	$\begin{cases} y'' + 2y' - \frac{4}{x}y = 1 \\ y'(0.5) = 1.5 \\ y(1) + y'(1) = 4 \end{cases}$ $a = 0.5 \quad b = 1$
2	$\begin{cases} y'' - \frac{6x}{3x^2 - 0.5}y' - \frac{1}{x}y = 0.5 - x^2 \\ y'(0.5) = 0.25 \\ 2y(1) + y'(1) = 3.5 \end{cases}$ $a = 0.5 \quad b = 1$
3	$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = -\frac{2}{x^3} \\ y(0.5) = -2\ln(2) \\ y(1) = 0 \end{cases}$ $a = 0.5 \quad b = 1$

4	$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' = \frac{1}{x} \\ y'(0.5) = 3 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ $a = 0.5 \quad b = 1$
5	$\begin{cases} y'' + 2xy' - y = 2(x^2+1)\cos(x) \\ y(0) = 0 \\ y(0.5) = 0.5\sin(0.5) \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 0.5$
6	$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' - 2y = -2x^2 \\ y'(0.5) = 1 \\ y(1) + y'(1) = 5 \end{cases}$ $a = 0.5 \quad b = 1$
7	$\begin{cases} y'' - 2tg(x)y' = -2tg(x) \\ y(0) - 3.5y'(0) = -7 \\ y(1) = 1 + tg(1) \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 1$
8	$\begin{cases} y'' - \frac{1}{x+1}y' - 2y = -(x+1)^2 \\ y'(0) = 1 \\ 2y(0.5) + 1.5y'(0.5) = 2\cdot 1.5^2 \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 0.5$
9	$\begin{cases} y'' - \frac{1}{2(x+1)}y' = -\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}} \\ y(0) - y'(0) = 1 \\ 0.5y(1) + 2y'(1) = 2\cdot\sqrt{2} \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 1$
10	$\begin{cases} y'' - x^2y' - \frac{2}{x^2}y = 1 \\ y(0.5) - y'(0.5) = 6 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ $a = 0.5 \quad b = 1$

11	$\begin{cases} y'' + \dfrac{2}{x} y' - xy = -1 \\ y'(0.5) = -4 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ $a = 0.5 \quad b = 1$
12	$\begin{cases} y'' + \dfrac{1}{x} y' = 0 \\ y'(0.5) = 2 \\ y(1) + y'(1) = 1 \end{cases}$ $a = 0.5 \quad b = 1$
13	$\begin{cases} y'' + y' - \dfrac{1}{x} y = 2x + 4 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 3 \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 1$
14	$\begin{cases} y'' - \dfrac{1}{x} y' = \dfrac{-2}{x^2} \\ y'(0.5) = 2 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$ $a = 0.5 \quad b = 1$
15	$\begin{cases} y'' + y' - \dfrac{6x}{2x^2 + 1} y = 12x + 1 \\ y'(0) = 1 \\ y(1) = 3 \end{cases}$ $a = 0 \quad b = 1$

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с теоретической частью по данной теме.
2. Ответить на контрольные вопросы к лабораторной работе.
3. Получить вариант задания у преподавателя.
4. Выполнить индивидуальное задание в соответствии с вариантом задания.
5. Составить отчёт о проделанной работе.
6. Показать программу и отчёт преподавателю.

Содержание отчёта:

1. Титульный лист (идентификация).
2. Тема и цель работы.
3. Краткие теоретические сведения.
4. Вариант и условие задания.
5. Анализ задания (алгоритм выполнения задания).
6. Основные и промежуточные результаты по каждому пункту хода выполнения работы (листинг программного кода, реализующий данный алгоритм; скриншот результатов выполнения программы; скриншоты результатов работы в математическом пакете Mathcad).
7. Выводы о проделанной работе.

Защита лабораторной работы проводится индивидуально. Для сдачи работы студент должен предъявить программу, отчет, ответить на контрольные вопросы, дать пояснения по выполненной работе.

Дополнительное задание:

Найти решения граничных задач с шагом $h=0.1$ на отрезке $[a,b]$:

1. используя метод редукции;
2. используя метод стрельбы.

Оценить погрешность полученного решения.

Вариант	Задание
1	$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' - 2y = -2x^2 \\ y'(0.5) = 1 \qquad a = 0.5 \quad b = 1 \\ y(1) = 3 \end{cases}$
2	$\begin{cases} y'' - \frac{2}{x}y' - \frac{4}{x^2+2}y = -4 \\ y(0) = 0 \qquad a = 0 \quad b = 1 \\ y'(1) = 8 \end{cases}$

Ответы для метода редукции и стрельбы:

Вариант	Ответ
1	$y(x) = x^2 + 0.5x$
2	$y(x) = x(x^2 - 0.5)$
3	$y(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
4	$y(x) = \ln(x) + x$
5	$y(x) = x\sin(x)$
6	$y(x) = x^2 + 2$
7	$y(x) = x + tg(x)$
8	$y(x) = \frac{(x+1)^2}{2}$
9	$y(x) = 2\sqrt{1+x}$
10	$y(x) = \frac{1}{x}$
11	$y(x) = \frac{1}{x}$
12	$y(x) = \ln(x)$
13	$y(x) = 2x^2 + x$
14	$y(x) = \ln(x)$
15	$y(x) = (2x^2 + 1)x$

Вариант	Ответы для дополнительного задания
1	$y(x) = x^2 + 2$
2	$y(x) = (x^2 + 2)x^2$