Тема: МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§2 Методы решения задачи Коши для ОДУ первого порядка.

п.2.5 Методы Рунге-Кутта

Пусть имеем задачу Коши для ОДУ первого порядка

$$\frac{du}{dx} = f(x,u(x)) \qquad 0 \le x \le X \qquad (1)$$

$$u(0) = u_0 \qquad (2)$$

И будем решать её разностными методами. Среди других явных одношаговых методов наибольшее распространение получил метод Рунге-Кутта. На его основе можно построить множество схем различного порядка точности.

Семейство явных одношаговых методов Рунге-Кутта для вычисления сеточного решения $y_{i+1} \approx u(x_{i+1})$ по уже известному значению этой функции в i-том узле, т.е. $y_i \approx u(x_i)$ может быть выражено следующим образом.

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \sum_{j=1}^{m} A_j K_j \qquad (3).$$

Или в явном виде это семейство записать как:

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{j=1}^{m} A_j K_j$$

(4),

где коэффициент

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$
$$K_2 = f(x_i + a_2 h, y_i + b_{21} h K_1)$$
$$K_3 = f(x_i + a_3 h, y_i + b_{31} h K_1 + b_{32} h K_2) \qquad (5)$$

....

$$K_m = f(x_i + a_{m3} h, y_i + b_{m1} h K_1 + b_{m2} h K_2 + \ldots + b_{m,m-1} h K_{m-1})$$

Коэффициенты

$$a_i, b_{is} \quad i = 2,3,\ldots m, s = 1,2,\ldots, m-1 \qquad A_j \quad j = 1,2,\ldots, m$$

представляют собой *константы*, значение которых выбирается из соображений точности, устойчивости и экономичности алгоритма.

Как правило, методы Рунге-Кутта со значениями m>5 не используются.

Выражения (4)-(5) описывают *явный m-этапный одношаговый* метод Рунге-Кутта. Используя одну из схем этого метода можно последовательно найти численное значение сеточной функции $y_i \approx u(x_i)$ во всех узлах сетки от i=0 до n.

Рассмотрим частные случаи метода Рунге-Кутта.

При m=1 получаем схему Эйлера. $A_1 = 1$, $K_1 = f(x_i, y_i)$

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = f(x_i, y_i)$$

При m=2 получим семейство методов

$$y_{i+1} = y_i + h(A_1K_1 + A_2K_2)$$
$$K_1 = f(x_i, y_i) \qquad K_2 = f(x_i + ha_2, y_i + hb_{21}K_1) \tag{6}$$

Чтобы присвоить параметрам A_1, A_2, a_2, b_{21} конкретные числовые значения, нужно исследовать погрешность аппроксимации построенной схемы (6). Исключаем из схемы (6) параметры K_1, K_2. Получаем

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = A_1 f(x_i, y_i) + A_2 f(x_i + a_2h, y_i + b_{21}hf(x_i, y_i)) \tag{7}$$

Чтобы получить погрешность разностного метода или невязку подставим в (7) вместо сеточной функции y_i её точное значение в этом узле $u(x_i)$, и получим:

$$\psi_i^1 = -\frac{u_{i+1}-u_i}{h} + A_1 f(x_i, u_i) + A_2 f(x_i + a_2h, u_i + b_{21}hf(x_i, u_i)) \tag{8}$$

Чтобы найти порядок погрешности аппроксимации (8), будем предполагать, что функции *u(x)* и *f(x,u(x)),* входящие в это выражение, являются гладкими. Представим эти функции в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности *i*-го узла. Для функции *u(x)* имеем:

$$u_{i+1} = u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + O(h^3) + ... \tag{9}$$

Преобразуем (9) (переносим в левую часть u_i и разделим на h) т.о., чтобы правая часть соответствовала первому слагаемому из (8)

$$\frac{u_{i+1}-u(x_i)}{h} = u'(x_i) + \frac{h}{2}u''(x_i) + O(h^2) \tag{10}$$

Для функции *f(x,u(x))* окрестность *i*-го узла рассматриваем в виде, соответствующем последнему слагаемому из (8), получаем разложение

$$f(x_i + a_2h, u_i + b_{21}hf(x_i, u_i)) = f(x_i, u_i) + a_2h\frac{\partial f(x_i, u_i)}{\partial x} + b_{21}hf(x_i, u_i)\frac{\partial f(x_i, u_i)}{\partial u} + O(h^2) \tag{11}$$

Подставим правые части (10) и (11) в правую часть (8), т.е для *функции невязки* имеем выражение:

$$\psi_i^1 = -u_i' - \frac{h}{2}u_i'' + O(h^2) + A_1 f_i + A_2\left[f_i + a_2h\frac{\partial f_i}{\partial x} + b_{21}hf_i\frac{\partial f_i}{\partial u} + O(h^2)\right] \tag{12}$$

При этом $f_i = f(x_i, u_i)$. Найдем вторую производную функции *u(x),* учитывая, что из (1) имеем $u' = \frac{du}{dx} = f(x, u(x))$.

$$u'' = \frac{\partial f}{\partial x} + u'\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial u} \tag{13}$$

Второе слагаемое в (12) заменяем правой частью (13) и внесем A_2 под знак скобок, и получаем выражение для *невязки*:

$$\psi_i^1 = -u_i' - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x} + f_i\frac{\partial f_i}{\partial u}\right) + O(h^2) + A_1 f_i + A_2 f_i + A_2 a_2 h\frac{\partial f_i}{\partial x} + A_2 b_{21} h f_i \frac{\partial f_i}{\partial u} + O(h^2) \quad (14)$$

Приведем подобные и <u>окончательно</u> получаем:

$$\psi_i^1 = -u_i' + (A_1 + A_2) f_i + h\left[(A_2 b_{21} - 0.5) f_i \frac{\partial f_i}{\partial u} + (A_2 a_2 - 0.5)\frac{\partial f_i}{\partial x}\right] + O(h^2) \quad (15)$$

(15) – выражение для погрешности метода Рунге-Кутта для m=2.

Проанализировав (15), можно получить условия, которые определяют для <u>*двухэтапных методов Рунге-Кутта*</u> порядок аппроксимации. Потребуем выполнения следующих условий:

$$A_1 + A_2 = 1 \qquad A_2 \cdot a_2 = 0.5 \qquad A_2 b_{21} = 0.5 \quad (16)$$

Если выполняется только первое из условий (16), то методы Рунге-Кутта (6) будут иметь <u>*первый порядок аппроксимации*</u>. Если выполняются все три условия, то двух этапные методы Рунге-Кутта будут иметь <u>*второй порядок аппроксимации*</u>. Рассмотрим два частных случая таких двухэтапных схем.

а) $A_1 = A_2 = \frac{1}{2} \qquad a_2 = b_{21} = 1$, тогда

$$K_1 = f(x_i, y_i) \qquad K_2 = f(x_i + h, y_i + hK_1)$$

И в явном виде <u>*двухэтапный метод Рунге-Кутта*</u> будет выглядеть:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) = \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))\right] \quad (17)$$

Эта формула (17) совпадает с методом *Эйлера-Коши*. Иногда этот метод называют *явным методом трапеций*. Метод (17) имеет <u>*второй порядок точности*</u>.

б) $A_1 = 0 \quad A_2 = 1 \qquad a_2 = b_{21} = 0.5$

В этом случае получим <u>*явный одношаговый двухэтапный метод Рунге-Кутта*</u>, который иначе называют метод <u>*предиктор-корректор*</u> (предсказывающий-исправляющий).

$$K_1 = f(x_i, y_i) \qquad K_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + h(A_1 K_1 + A_2 K_2) = y_i + hK_2$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + 0.5h, y_i + 0.5hf(x_i, y_i)) \quad (18)$$

В этом методе <u>два этапа реализации</u>. Сначала по схеме Эйлера находим значение сеточной функции в середине отрезка:

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \quad (19)$$

А затем находим значение сеточной функции в *i+1* узле:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}) \quad (20)$$

На первом, т.е. по формуле (19) значение сеточной функции будет иметь невысокую точность, т.е первый порядок аппроксимации. А затем это значение корректируется на втором этапе так, чтобы результирующая погрешность имела второй порядок точности.

Поэтому метод *предиктор-корректор* имеет *второй порядок точности*.

При m=2 можно построить множество схем Рунге-Кутта, однако нельзя достигнуть третьего порядка точности.

Рассмотрим схемы методов Рунге-Кутта третьего порядка точности m=3.

а) $K_1 = f(x_i, y_i) \qquad K_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1) \qquad K_3 = f(x_i + h, y_i - hK_1 + 2hK_2)$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \tag{21}$$

б) $K_1 = f(x_i, y_i) \qquad K_2 = f(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3}K_1) \qquad K_3 = f(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{2h}{3}K_2)$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}(K_1 + 3K_3) \tag{22}$$

Запишем схемы методов Рунге-Кутта четвертого порядка точности m=4.

а) $K_1 = f(x_i, y_i) \qquad K_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1)$

$K_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2) \qquad K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3)$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \tag{23}$$

б) $K_1 = f(x_i, y_i) \qquad K_2 = f(x_i + \frac{h}{4}, y_i + \frac{h}{4}K_1)$

$K_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2) \qquad K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_1 - 2hK_2 + 2hK_3)$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_3 + K_4) \tag{24}$$

Приведенные формулы являются частным случаем методов Рунге-Кутта третьего и четвертого порядков. Метод *четвертого порядка* точности (23) является одним из самых распространенных методов решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот метод, как правило, используется в математических пакетах (Maple, MathCad) для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Формулы более высокого порядка (m>5) не используются из-за громоздкости выражений, которая возрастает значительно быстрее, чем точность формулы.

Оценки погрешностей различных схем Рунге-Кутта связаны с вычислением максимумов модулей соответствующих производных функции *f(x,u(x))* и представляют собой достаточно сложные формулы. В связи с этим при решении конкретной задачи всегда возникает вопрос о целесообразности применения конкретной схемы Рунге-Кутта и выборе шага сетки.

Если функция *f(x,u(x))* является непрерывной и ограниченной вместе со своими четырьмя производными, то хорошие результаты даст применение схемы четвертого порядка (23). Если функция *f(x,u(x))* не имеет указанных производных, то целесообразно использовать схему, порядок точности которой будет равен порядку имеющихся производных!

Шаг сетки следует выбирать настолько малым, чтобы обеспечить требуемую точность. Других условий, ограничивающих шаг сетки, метод Рунге-Кутта не имеет. На практике используют также апостериорную (после проведенных расчетов) оценку точности, проведя серию расчетов со сгущающейся сеткой. Шаг сетки можно также менять при переходе от одной точки к другой. Для контроля правильности выбора шага сетки при использовании схем Рунге-Кутта (23) на практике вычисляют дробь

$$\alpha = \left| \frac{K_2^i - K_3^i}{K_1^i - K_2^i} \right| \qquad (25)$$

Величина этой дроби не должна превышать нескольких сотых. В противном случае шаг следует уменьшить.

Для контроля вычислений можно применять двойной пересчет, т.е. решения находят для шага h и $0.5h$. В соответствующих точках этих сеток решения должны совпадать в пределах заданной точности.

Пример. Методом Рунге-Кутта решить с точностью ε=0.001 задачу Коши на отрезке [0; 0.6] для уравнения $y' = x + y, \text{если} \quad y(0) = 1$.

Начальную величину шага h выбираем на основание неравенства $h^4 \le \varepsilon \Rightarrow h^4 \le 0.001$. Получаем h=0.15.

Все вычисления будем располагать в таблице следующим образом:

I	x_i	y_i	k	Δy_i	Точное решение
0	x_0	y_0	K_1^0		$y = 2*e^{x_0} - x_0 - 1$
	$x_0 + 0.5h$	$y_0 + 0.5hK_1^0$	K_2^0		
	$x_0 + 0.5h$	$y_0 + 0.5hK_2^0$	K_3^0		
	$x_0 + h$	$y_0 + hK_3^0$	K_4^0	Δy_0	
1	$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$			$y = 2*e^{x_1} - x_1 - 1$

$$K_1 = f(x_i, y_i) \quad K_2 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5hK_1)$$
$$K_3 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5hK_2)$$
$$K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3)$$
$$\Delta y_i = \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right)$$

Все вычисления приведены в таблице:

I	Xi	Yi	k	ΔYi	точное решение
0	0	1	1		1
	0,075	1,075	1,15		
	0,075	1,08625	1,16125		
	0,15	1,174188	1,324188	0,173667	

1	0,15	1,173667	1,323667		1,173668485
	0,225	1,272942	1,497942		
	0,225	1,286013	1,511013		
	0,3	1,400319	1,700319	0,226047	
2	0,3	1,399715	1,699715		1,399717615
	0,375	1,527193	1,902193		
	0,375	1,542379	1,917379		
	0,45	1,687321	2,137321	0,286905	
3	0,45	1,686619	2,136619		1,686624371
	0,525	1,846866	2,371866		
	0,525	1,864509	2,389509		
	0,6	2,045045	2,645045	0,35761	
4	0,6	2,044229			2,044237601

Заполняем таблицу

$K_1 = f(x_i, y_i) = x_0 + y_0 = 0 + 1 = 1$

$y_0 + 0.5hK_1^0$=1+0.5*0.15*1=1.075

$K_2 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5hK_1)$=0+0.5*0.15 + 1+0.5*0.15*1=0.075+1+0.075=1.15

$y_0 + 0.5hK_2^0$=1+0.5*0.15*1.15=1.08625

$K_3 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5hK_2)$=0.075+1,08625=1,16125

$y_0 + hK_3^0$=1+0.15*1,16125=1,173667

$K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3)$=0.15+1,173667=1,324188

$\Delta y_i = \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right)$ =0.15*(1+2*1.15+2*1,16125+1,324188)/6=0,173667

$y_1 = y_0 + \Delta y_0$=1+0,173667=1,173667 и т.д.

Схемы Рунге-Кутта имеют ряд важных <u>*достоинств*</u>:

1. все схемы, кроме схемы ломаных, имеют хорошую точность.
2. все схемы являются явными, т.е. каждое последующее значение сеточной функции $y_{i+1} \approx u(x_{i+1})$ вычисляется по ранее найденным значениям этой функции за определенное количество действий по аналитическим формулам.
3. все схемы допускают расчеты с переменным шагом, шаг уменьшают там, где функция быстро меняет свое значение, и увеличивают шаг в обратном случае.
4. для начала расчетов достаточно выбрать равномерную сетку, определить значение сеточной функции в начальной точке и продолжить вычисления по явным формулам конкретной схемы.

п.2.6 Повышение точности результатов Правило Рунге

Точность численного решения можно повысить различными путями. В частности этого можно достичь применением разностных схем повышенного порядка точности. Однако, *во-первых,* такие схемы целесообразно строить лишь для уравнений с постоянными коэффициентами, иначе алгоритмы будут слишком трудоемкими. И *во-вторых,* схемы повышенного порядка аппроксимации, как правило, неустойчивы.

Если повышать точность путем уменьшения значения шага, то этот путь также ограничен, т.к. *во-первых,* должно выполняться требование экономичности, а при уменьшении шага можно значительно увеличить объем вычислений для поиска решения исходной задачи. *Во-вторых,* уменьшение шага может повлечь значительный рост вычислительной погрешности.

Поэтому на практике, для повышения точности численного решения без существенного увеличения машинного времени используется метод Рунге.

Метод Рунге состоит в том, что проводятся повторные расчеты по одной разностной схеме с различными шагами. Уточненное решение в совпадающих при разных расчетах узлах строится с помощью проведенной серии расчетов (см. Самарский Ч.М. с.168-169).

Предположим, проведены две серии расчетов по схеме порядка k соответственно с шагами h и $h/2$. В результате расчетов получены таблицы значений сеточной функции y_h *и* $y_{\frac{h}{2}}$. Тогда уточненное решение сеточной функции в узлах сетки с шагом h вычисляется по формуле:

$$\bar{y}_h = \frac{2^k y_{\frac{h}{2}} - y_h}{2^k - 1} + O(h^{k+1}) \qquad (1)$$

Порядок точности этого решения на 1 больше, чем порядок точности используемой формулы, т.е. равен $k+1$. Т.о. решение задачи на двух сетках позволяет повысить точность решения на порядок.

Для схемы Эйлера первого порядка точности формула Рунге имеет вид

$$\bar{y}_h = 2y_{\frac{h}{2}} - y_h + O(h^2) \qquad (2)$$

Аналогично можно записать формулу для уточнения решения, полученного по методу Р-К. (сделать самостоятельно для k=3 и сравнить результаты с методом Р-К четвертого порядка)