**Министерство образования Республики Беларусь**

**УО «Полоцкий государственный университет»**

**Факультет информационных технологий**

**Кафедра технологий программирования**

**Методы численного анализа**

**Лабораторная работа №7**

**На тему: «Решение задачи Дирихле в области простой геометрии»**

**Полоцк 2017 г.**

**Название:** «Решение задачи Дирихле в области простой геометрии».

**Цель работы**: Изучить методы сеток для решения задачи Дирихле в области простой геометрии.

**Теоретическая часть:**

### Разностная задача Дирихле в прямоугольной области

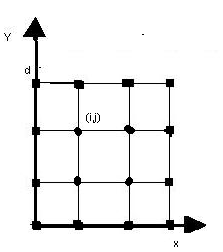
Будем рассматривать задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

 (1)

 (2) краевое условие.

В предположение, что область *D* является прямоугольником, т.е. *D={0≤x≤a,0≤z≤d}* а функции *f(x,z), ϕ(x,z)* –заданные. Будем искать решение этой задачи (1)-(2) т.е. функцию *u(x,z)*, непрерывную в указанном прямоугольнике, конечно-разностным методом.

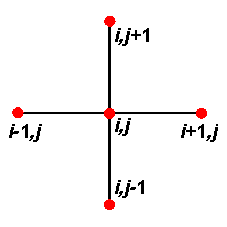
Для этого в области *D* введем сетку с равномерными шагами *h*1 и *h*2 соответственно по направлениям координатных осей *X,Z* таким образом, что *h*1=*a*/*N*1 и *h*2=*d*/*N*2.

Обозначим координаты по осям следующим образом: .

Т.о. мы получили прямоугольную сетку  (3) , которая состоит из совокупности узлов вида (*xi,zj*). Причем  - это совокупность всех внутренних узлов области D, а узлы, лежащие на границе - .

Обозначим функцию, заданную в узлах сетки (3) как .

Будем предполагать, что эта сеточная функция аппроксимирует искомое решение задачи (1)-(2) в узлах сетки, т.е. . Для аппроксимации вторых производных конечноразностными отношениями с минимальным количеством точек нужно использовать 5-точечный шаблон «крест»:



Получим конечно-разностную схему следующего вида:

 (7)

*i*=1,2,…,*N*1-1 *j*=1,2,…,*N*2-1

  *i*=0,..,*N*1 (8)

  *j*=0,..,*N*2 (9)

В теории разностных схем доказывается, что построенная схема имеет единственное решение, сама схема устойчива и имеет второй порядок аппроксимации по параметрам *h*1 и *h*2. Разностная схема (7)-(9) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, количество которых (N1-1)·(N2-1). Эта система может быть решена *методом Гаусса* (для небольшого числа неизвестных), но предпочтительнее использовать *итерационные методы*.

*Тогда каждое из уравнений системы необходимо записать в виде, разрешенном относительно сеточной функции*:

Если строится квадратная сетка, т.е. *h*1 = *h*2, то конечно-разностное уравнение (7) можно преобразовать к виду:

 (10)

Если в основе задачи Дирихле лежит уравнение Лапласа, то для квадратной сетки его конечно-разностная аппроксимация запишется следующим образом:

 (11)

***Пример***. Найти приближенное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в квадрате АВСD с вершинами A(0,0), B(0,1), C(1,1), D(1,0)  с шагом h=0.2.



Граничные условия: .

Процесс решения проведем в несколько этапов.

1. Построим в области решения квадратную сетку с шагом *h*=0,2 и вычислим . значение функции в граничных узлах:

1)AB:                                                             2)BC:

            u(0,0)=0                                                        u(0.2,1)=5

            u(0,0.2)=7.2                                                  u(0.4,1)=10

            u(0,0.4)=10.8                                                u(0.6,1)=15

            u(0,0.6)=10.8                                                u(0.8,1)=20

            u(0,0.8)=7.2                                      u(1,1)=25

            u(0,1)=0

3)CD:                                                            4)АD:

            u(1,0)=25                                                      u(0.2,0)=1.545

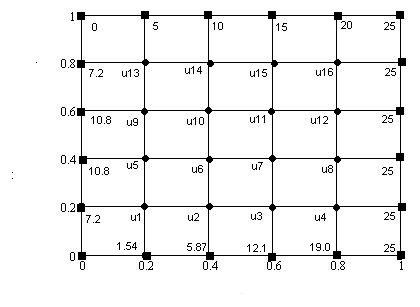
            u(1,0.2)=25                                                   u(0.4,0)=5.878

            u(1,0.4)=25                                                   u(0.6,0)=12.135

            u(1,0.6)=25                                                   u(0.8,0)=19.021

            u(1,0.8)=25

Нанесем эти значения на сетку и пронумеруем  значения искомой функции u во внутренних узлах:



1. Для определения значений функции во внутренних узлах области следует воспользоваться разностным уравнением (11): .

На основании этой формулы составим уравнение для каждой внутренней точки:

u1=(7.2+1,545+u2+u5)/4 u2=(5.878+u1+u3+u6)/4 u3=(12.135+u4+u2+u7)/4

u4=(19.021+25+u3+u8)/4 u5=(10.8+u1+u6+u9)/4 u6=(u7+u10+u2+u5)/4

u7=(u3+u6+u8+u11)/4 u8=(25+u7+u4+u12)/4 u9=(10.8+u10+u13+u5)/4

u10=(u6+u9+u11+u14)/4 u11=(u7+u10+u12+u15)/4 u12=(25+u8+u11+u16)/4

u13=(7.2+5+u9+u14)/4 u14=(10+u10+u13+u15)/4 u15=(15+u11+u14+u16)/4

u16=(20+25+u12+u15)/4

1. Решение этой системы запишем таким образом, чтобы было целесообразно применить итерационный процесс типа *Зейделя*. Для каждого значения составим последовательность . Последовательность строим до тех пор, пока не получим решение с точностью до сотых. Запишем итерационный процесс по правилу Зейделя:



…

Начальное приближение можно найти каким-либо образом или принять нулевым. Например, предположим, что вдоль горизонталей температура распределяется равномерно. Возьмем горизонталь с граничными точками (0;0.2) и (1;0.02). Имеем пять равномерных частей: 7.2\_\_u1\_\_u2\_\_u3\_\_u4\_\_25. Возьмем шаг изменения температуры ht=(25-7.2)/5=3.56. Следовательно, начальное значение температуры для этих узлов можно взять таким:





Аналогичным образом можно найти начальные значения искомой функции во всех внутренних узлах. Применяем метод Зейделя до тех пор, пока не будет найдено решение с заранее заданной точностью.

МathСad имеет две функции для решения задачи Дирихле в области с квадратной матрицей.

* 1. Если на всех четырех сторонах квадрата заданы граничные ненулевые условия, то используется функция *relax*. Эта функция возвращает квадратную матрицу, в которой:
* индекс элемента матрицы совпадает с нумерацией узлов сетки;
* значение элемента матрицы является аппроксимацией искомого решения в этой точке.
  1. Если на всех сторонах квадрата мы имеем нулевые граничные условия, то можно использовать функцию *multigrid*.

Функция *relax* имеет следующие аргументы: *Relax(a,b,c,d,e,f,u,w).*

Где *a,b,c,d,e, -* квадратные матрицы, содержащие коэффициенты исходного уравнения Пуассона, *f-* квадратная матрица значений правой части исходного уравнения, *u* – матрица начальных приближений для граничных и внутренних узлов области решения, *w*- параметр релаксации, имеет положительное значение не превышающее единицы.

***Например***, Уравнение Пуассона вида:  на квадратной сетке представляем как: .

Параметры функции в этом случае имеют значение:

.

**Контрольные вопросы:**

1. Сформулируйте задачу Дирихле для уравнения Пуассона.
2. Какой шаблон используется для аппроксимации вторых производных конечноразностными отношениями с минимальным количеством точек?
3. Какой порядок аппроксимации имеет построенная конечно-разностная схема?
4. Верно ли, что такая построенная разностная схема представляет собой систему линейных алгебраических уравнений?
5. В каком методе каждое из уравнений системы необходимо записать в виде, разрешенном относительно сеточной функции?
6. Как определяется значение функции в центре шаблона для квадратной сетки, если в основе задачи Дирихле лежит уравнение Лапласа?
7. Какие две функции для решения задачи Дирихле в области с квадратной матрицей имеет МathСad?

**Содержание задания:**

Дана задача Дирихле для уравнения Лапласа  в квадрате *ABCD* с вершинами *A(0; 0), B(0; 1), C(1; 1), D(1; 0).* В таблице вариантов приведены формулы, задающие искомую функцию на сторонах квадрата *ABCD*. Используя метод сеток, составьте приближенное решение для этой задачи с шагом h = 0,2.

**Варианты задания:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант** | **u|AB** | **u|BC** | **u|CD** | **u|AD** |
| 1 |  |  | 0 | 0 |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  | 0 | 0 |  |
| 4 |  | 20 |  |  |
| 5 | 0 |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |
| 8 |  |  |  |  |
| 9 |  | 40 | 40 |  |
| 10 |  |  | 0 |  |
| 11 |  | 20 |  |  |
| 12 |  |  |  | 0 |
| 13 |  |  |  |  |
| 14 |  |  |  |  |
| 15 |  |  |  |  |

**Порядок выполнения работы:**

1. Ознакомиться с теоретической частью по данной теме.
2. Ответить на контрольные вопросы к лабораторной работе.
3. Получить вариант задания у преподавателя.
4. Выполнить индивидуальное задание в соответствии с вариантом задания.
5. Составить отчёт о проделанной работе.
6. Показать программу и отчёт преподавателю.

**Содержание отчёта:**

1. Титульный лист (идентификация).
2. Тема и цель работы.
3. Краткие теоретические сведения.
4. Вариант и условие задания.
5. Анализ задания (алгоритм выполнения задания).
6. Основные и промежуточные результаты по каждому пункту хода выполнения работы (листинг программного кода, реализующий данный алгоритм; скриншот результатов выполнения программы; скриншоты результатов работы в математическом пакете Mathcad).
7. Выводы о проделанной работе.

Защита лабораторной работы проводится индивидуально. Для сдачи работы студент должен предъявить программу, отчет, ответить на контрольные вопросы, дать пояснения по выполненной работе.

**Дополнительное задание:**

Дана задача Дирихле для уравнения Лапласа  в области с криволинейной границей *Г.* Используя метод сеток, составьте решение этой задачи с заданными начальными условиями; шаг *h = 1*. Уточнение решения проводить с помощью процесса Либмана до сотых долей.

**Варианты задания:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Номер варианта** | **Уравнение границы Г** | **Вид функции на границе Г** |
| 1 |  | u(x, y) |Г = |x| + |y| |
| 2 |  | u(x, y) |Г = |x| + 2|y| |
| 3 |  | u(x, y) |Г = |x| · |y| |
| 4 |  | u(x, y) |Г = 2|x| + |y| |
| 5 |  | u(x, y) |Г = |x| · |y| |
| 6 |  | u(x, y) |Г = 0,5|x| + |y| |
| 7 |  | u(x, y) |Г = |x| + 0,5|y| |
| 8 |  | u(x, y) |Г = |x| + |y| |
| 9 |  | U(x, y) |Г = 2|x| + 0,5|y| |
| 10 |  | U(x, y) |Г = 0,5(|x| + |y|) |