METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH: RÓWNANIE ODKSZTAŁCENIA SPRĘŻYSTEGO

Jakub Wiśniewski
Informatyka Rok II

27/12/2023

1 Sformułowanie silne

Zadano równanie odkształcenia sprężystego:

$$-\frac{d}{dx}\left(E(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

gdzie

$$E(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 5 & \text{dla } x \in (1,2] \end{cases}$$

przy warunkach brzegowych

$$(Dirichleta)\ u(2) = 0, \quad (Cauchyego)\ \frac{du(0)}{dx} + u(0) = 10$$

Poszukujemy funkcji u:

$$[0,2] \ni x \mapsto u(x) \in \mathbb{R}$$

2 Sformułowanie wariacyjne

Po pomnożeniu obu stron przez funkcję testującą ϕ oraz obustronnym zcałkowaniu w dziedzinie u otrzymujemy:

$$-\int_0^2 \frac{d}{dx}\left(E(x)\frac{du(x)}{dx}\right)\phi(x)\,dx = 0$$

Całkujemy przez części:

$$-E(x)\frac{du(x)}{dx}\phi(x)\Big|_0^2 + \int_0^2 E(x)\frac{du(x)}{dx}\frac{d\phi(x)}{dx}\,dx = 0$$

Podstawiamy lewą stronę:

$$-E(2)\frac{du(2)}{dx}\phi(2) + E(0)\frac{du(0)}{dx}\phi(0) + \int_0^2 E(x)\frac{du(x)}{dx}\frac{d\phi(x)}{dx}\,dx = 0$$

Uwzględniamy warunki brzegowe oraz wyliczamy znane wartości:

$$3\,(10 - u(0))\,\phi(0) + \int_0^2 E(x)\frac{du(x)}{dx}\frac{d\phi(x)}{dx}\,dx = 0$$

Wymnażamy i przenosimy na prawo elementy zależne jedynie od funkcji testowej ϕ otrzymując sformułowanie wariacyjne postaci $B(u,\phi) = L(\phi)$:

$$-3u(0)\phi(0) + \int_0^2 E(x)\frac{du(x)}{dx}\frac{d\phi(x)}{dx}\,dx = -30\phi(0) \tag{2}$$

3 Wynik pracy algorytmu

Wykres wygenerowany dla programu uruchomionego z n = 5000: