Catatan Persamaan Diferensial Parsial (MA5271)

Uzumaki Nagato Tenshou

January 18, 2021

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial bagi fungsi peubah banyak $u(x, y, \cdots)$. Orde dari PDP adalah turunan tertinggi yang muncul pada PDP tersebut.

Berbagai persamaan diferensial yang penting

1. $u_x + u_t = 0$ (Persamaan Transport).
2. $u_x + uu_t = 0$ (Persamaan Burgers(Shockwave), merupakan bentuk khusus persamaan Buckley-Leverett).
3. $u_t = ku_{xx}$ (Persamaan panas, Persamaan difusi).
4. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ (Persamaan Gelombang).
5. $u_{xx} + u_{yy} = 0 = \Delta u = 0$ (Persamaan Laplace).

Operator Linear

Suatu operator $\mathfrak{L}$ dikatakan *linier* jika

$$\mathfrak{L}(u + v) = \mathfrak{L}u + \mathfrak{L}v, \text{ dan } \mathfrak{L}(cu) = c\mathfrak{L}u$$

untuk setiap fungsi u, v dan untuk setiap $c \in \mathbb{R}$.
Suatu PDP berbentuk

$$\mathfrak{L}u = 0$$

dikatakan linier jika $\mathfrak{L}$ operator linier.

1. Akan dibuktikan persamaan difusi merupakan PDP linier.
   Penyelesaian. Diketahui persamaan umum difusi $u_t = ku_{xx}$ atau ditulis

   $$\partial_t u - k\partial_{xx} u = (\partial_t - k\partial_{xx})u = 0.$$

   Sehingga dapat dituliskan dalam bentuk $\mathfrak{L}u = 0$, dengan operator $\mathfrak{L} = \partial_t - k\partial_{xx}$.
   Ambil sebarang fungsi u, v dan $c \in \mathbb{R}$ kemudian tinjau

   $$\begin{aligned}\mathfrak{L}(u + cv) &= (\partial_t - k\partial_{xx})(u + cv)\\ &= (\partial_t - k\partial_{xx})u + (\partial_t - k\partial_{xx})(cv)\\ &= \partial_t u - k\partial_{xx} u + \partial_t(cv) - k\partial_{xx}(cv)\\ &= \partial_t u - k\partial_{xx} u + c\partial_t v - kc\partial_{xx} v\\ &= \partial_t u - k\partial_{xx} u + c(\partial_t - k\partial_{xx} v)\\ &= (\partial_t - k\partial_{xx})u + c(\partial_t - k\partial_{xx})v\\ &= \mathfrak{L}u + c\mathfrak{L}v\end{aligned}$$

   Hal ini berakibat bahwa persamaan difusi merupakan PDP linier.

2. Akan dibuktikan persamaan transport merupakan PDP linier.
Penyelesaian. Diketahui persamaan transport $u_x = u_t$ atau ditulis

$$\partial_x u - \partial_t u = (\partial_x - \partial_t)u = 0.$$

Sehingga dapat dituliskan dalam bentuk $\mathfrak{L}u = 0$, dengan operator $\mathfrak{L} = \partial_x - \partial_t$.
Ambil sebarang fungsi u, v dan $c \in \mathbb{R}$ kemudian tinjau

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(u+cv) &= (\partial_x - \partial_t)(u+cv) \\
&= (\partial_x - \partial_t)u + (\partial_x - \partial_t)(cv) \\
&= \partial_x u - \partial_t u + \partial_x(cv) - \partial_t(cv) \\
&= \partial_x u - \partial_t u + c\partial_x v - c\partial_t v \\
&= (\partial_x - \partial_t)u + c(\partial_x - \partial_t)v \\
&= \mathfrak{L}u + c\mathfrak{L}v
\end{aligned}$$

Hal ini berakibat bahwa persamaan transport merupakan PDP linier.

3. Akan dibuktikan persamaan gelombang merupakan PDP linier.
Penyelesaian. Diketahui persamaan umum gelombang $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ atau ditulis

$$\partial_{tt} u - c^2 \partial_{xx} u = (\partial_{tt} - c^2\partial_{xx})u = 0.$$

Sehingga dapat dituliskan dalam bentuk $\mathfrak{L}u = 0$, dengan operator $\mathfrak{L} = \partial_{tt} - c^2\partial_{xx}$.
Ambil sebarang fungsi u, v dan $k \in \mathbb{R}$ kemudian tinjau

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(u+cv) &= (\partial_{tt} - c^2\partial_{xx})(u+kv) \\
&= (\partial_{tt} - c^2\partial_{xx})u + (\partial_{tt} - c^2\partial_{xx})(kv) \\
&= \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u + \partial_{tt}(kv) - c^2\partial_{xx}(kv) \\
&= \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u + k\partial_{tt}v - c^2 k\partial_{xx}v \\
&= \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u + k(\partial_{tt}v - c^2\partial_{xx}v) \\
&= (\partial_{tt} - c^2\partial_{xx})u + k(\partial_{tt} - c^2\partial_{xx})v \\
&= \mathfrak{L}u + k\mathfrak{L}v
\end{aligned}$$

Hal ini berakibat bahwa persamaan gelombang merupakan PDP linier.

4. Akan dibuktikan persamaan gelombang merupakan PDP linier.
Penyelesaian. Diketahui persamaan umum gelombang $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ atau ditulis

$$\partial_{tt} u - c^2 \partial_{xx} u = (\partial_{tt} - c^2\partial_{xx})u = 0.$$

Sehingga dapat dituliskan dalam bentuk $\mathfrak{L}u = 0$, dengan operator $\mathfrak{L} = \partial_{tt} - c^2\partial_{xx}$.
Ambil sebarang fungsi u, v dan $k \in \mathbb{R}$ kemudian tinjau

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(u+cv) &= (\partial_{tt} - c^2\partial_{xx})(u+kv) \\
&= (\partial_{tt} - c^2\partial_{xx})u + (\partial_{tt} - c^2\partial_{xx})(kv) \\
&= \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u + \partial_{tt}(kv) - c^2\partial_{xx}(kv) \\
&= \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u + k\partial_{tt}v - c^2 k\partial_{xx}v \\
&= \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u + k(\partial_{tt}v - c^2\partial_{xx}v) \\
&= (\partial_{tt} - c^2\partial_{xx})u + k(\partial_{tt} - c^2\partial_{xx})v \\
&= \mathfrak{L}u + k\mathfrak{L}v
\end{aligned}$$

Hal ini berakibat bahwa persamaan gelombang merupakan PDP linier.

1 Persamaan Differensial Parsial

Untuk fungsi dua peubah $u(x, y)$ bentuk umum pdp orde satu adalah:

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

Sedangkan bentuk umum PDP orde dua adalah:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Solusi dari PDP adalah fungsi $u(x, y)$ yang memenuhi persamaan diferensial tersebut, untuk suatu daerah di bidang-xy.

1.1 Persamaan Differensial Parsial Linear Orde 1

1.1.1 Persamaan Transport

1.2 Persamaan Differensial Parsial Linear Orde 2

1.