



République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Ecole Supérieure Privée d'Ingénierie et des
Technologies



RAPPORT DE PROJET ACTUARIAT VIE

Sujet 3 : Prix de rentes viagères genrés et unisexe

Réalisé par

Wissal Bayoudh

Mustapha Bouattour

Mohamed Amine Hamza

Oussama Sassi

Wissal khemiri

Table des matières

1	Contexte général du projet	2
1.1	Motivation	3
1.2	Problématique : Enjeux de la tarification	3
1.3	Planification du projet	4
1.3.1	Objectif général	4
1.3.2	Objectif spécifiques	4
1.3.3	Planification prévisionnelle du projet	4
2	Vue d'ensemble des notions actuarielles	5
2.1	Rente viagère	6
2.2	Taux de mortalité	6
2.3	Modélisation des taux de mortalité	6
2.3.1	Modèle de Weibull	7
2.3.2	Modèle de Gompertz-makeham	7
2.3.3	Modèle de Lee-Carter	8
2.4	Principe de lissage des tables de mortalité	9
3	Mise en oeuvre en R : Implémentation et interprétation des résultats	10
3.1	Lecture et compréhension des données	12
3.2	Modélisation de l'évolution des taux de Mortalité	13
3.2.1	Taux de mortalité sur l'ensemble des années	13
3.2.2	Taux de mortalité selon le sexe	14
3.2.3	Taux de mortalité pour les années extrêmes	15
3.2.4	Taux de mortalité de la polpulation totale en fonction des années	16
3.2.5	Taux de mortalité en fonction de l'âge : Etude des cohortes	17
3.2.6	Taux de mortalité historique	19
3.3	Projection avec le modèle de Lee-Carter	20
3.3.1	Choix de la période de calibration des données	20
3.3.2	Choix de la plage d'âges	21
3.3.3	Lissage	21
3.3.4	Paramètre a_x	22
3.3.5	Paramètre b_x	22

3.3.6	Ecart absolu des coefficients	23
3.3.7	Paramètre k_t	24
3.3.8	E tude résiduelle	24
3.3.9	Forecast	25
3.3.10	Taux ajustés historiques	26
3.4	valeur actuelle probable (VAP)	26
3.4.1	calcul de la valeur actuelle probable en utilisant les taux projetés	28

Bibliographie	30
----------------------	-----------

Table des figures

1.1	Espérance de vie à la naissance (année) , au Royaume-Uni	3
2.1	Chronologie de la modélisation de la mortalité	7
3.1	Le résumé statique du demogdata	12
3.2	Taux de mortalité total en fonction de l'âge	13
3.3	Taux de mortalité sur toutes les années de la sous-population masculine	14
3.4	Taux de mortalité sur toutes les années de la sous-population féminine	15
3.5	Taux de mortalité pour l'année 1922	16
3.6	Taux de mortalité pour l'année 2016	16
3.7	Taux de mortalité pendant la 2ème guerre mondiale	17
3.8	Taux de mortalité entre les années 1955 au 2015	17
3.9	Lecture longitudinale et la 1ere cohorte	18
3.10	Lecture longitudinale et la 2ème cohorte	18
3.11	taux de mortalités historiques des femmes	19
3.12	taux de mortalités historiques des hommes	19
3.13	Evolution des taux de mortalité pendant la période 1922-2016	20
3.14	Death rates volatility (1922,2016)	21
3.15	Les différents type de lissage	21
3.16	Coef. ax sur données britanniques	22
3.17	Coef. bx sur données britanniques	22
3.18	Ecart absolu des coefficients	23
3.19	Coef. kt sur données britanniques	24
3.20	Taux de mortalité résiduel en fonction de l'âge	24
3.21	Projection de la composante temporelle pour les femmes ainsi que les hommes	25
3.22	Taux observés et projetés à un horizon de 25 ans pour $x = 60$ ans	25
3.23	LC model simulations	26
3.24	Taux ajustés historiques	26
3.25	Comparaison des Espérance de vie	27
3.26	Comparaison des probabilités de survie	27
3.27	Comparaison des probabilités de décès	27
3.28	Comparaison des valeurs actuelle probable	27

3.29	28
----------------	----

Liste des abréviations

- **ARIMA** = **A**uto **R**egressive **I**ntegrated **M**oving **A**verage
- **HMD** = **H**uman **M**ortality **D**atabase
- **NHS** = **N**ational **H**ealth **S**ervice
- **SVD** = **S**ingular **V**alue **D**ecomposition
- **VAP** = **V**aleur **A**ctuelle et **P**robable

Introduction générale

Grâce à l'émergence d'outils mathématiques, notamment le calcul probabiliste, le développement de l'assurance s'est poursuivi aux XVII^e et XVIII^e siècles . Il demeure alors possible qu'on mesure les paramètres du contrat d'assurance (tables de mortalité, risque de perte de l'assureur, rente viagère ...etc).

L'assurance-vie fait partie du domaine économique et réglementaire en plein mouvement et présentant des incertitudes croissantes pour plusieurs raisons , d'où l'exigence des professionnel qui gèrent l'impact financier du risque et de l'incertitude. La tarification de contrats d'assurance est basée sur deux points : la prédiction de la mortalité ainsi que la Mortalité. Dans cette étude rentrant dans un cadre académique, nous nous intéressons uniquement à la prévision de la mortalité . Une fois l'espérance de vie estimée, il y aura une autre aléa à risque. En effet, dans de tels contrats, les échéances sont très longues. En outre, le montant de l'indemnisation dépend fortement du taux d'intérêt fourni Par le marché. Ces ratios sont également des sources appelé le "Risque de taux d'intérêt". Enfin, tout cela nous permet de projeter le taux de mortalité des cohortes concernés afin de l'assimiler une tarification adéquate pour les assurés une tarification pour ce portefeuille par l'analyse et la prévision de résultats financiers des régimes de rente

Notre travail est de traiter le portefeuille d'un assureur composé d'assurés Britanniques : 60% de femmes nées en 1955 et 40% d'hommes également nés en 1955. Cet étude consiste a la visualisation et la modélisation des 'taux de mortalité' par le modèle de 'Lee Carter' pour le Royaume-Uni (United Kingdom) , selon l'indice de développement humain , le Royaume-Uni est classé parmi les pays ayant un niveau de vie les plus élevés , ce modèle de prédiction nous mène a construire des tables de mortalité , en plus , peut intervenir dans des applications scientifiques actuarielles et dans la planification de régimes de retraite. kingdom

Afin de décrire les différentes phases du projet, ce rapport va être répartie en 3 chapitres.

Dans un premier temps, le contexte et l'objectif du projet sont abordés. Afin de répondre au mieux au exigences du projet.

Dans un second temps, la Vue d'ensemble des notions d'Actuariat Vie. A ce titre, les généralités sur la durée de vie ainsi que des notions actuarielles sont rappelées. De plus, un rappel sur les différents modèles utilisés est effectué dans le but d'expliquer Les modèles d'évolution des taux de mortalité.

Enfin dans un troisième temps, après avoir mis en place les bases théoriques préliminaires une analyse sera effectuée et détaillée.

CONTEXTE GÉNÉRAL DU PROJET

Plan

1	Motivation	3
2	Problématique : Enjeux de la tarification	3
3	Planification du projet	4
1.3.1	Objectif général	4
1.3.2	Objectif spécifiques	4
1.3.3	Planification prévisionnelle du projet	4

Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation générale du projet. Nous commençons par l'explication des motivations pour entreprendre ce projet. Ensuite, nous focalisons sur les objectifs de notre sujet et la solution proposée après avoir discuté la problématique à résoudre.

1.1 Motivation

L'étude de mortalité en Royaume-uni infantile et post infantile a déjà une longue histoire. L'intérêt pour ce sujet est dû non seulement à la place importante qu'elle tient dans monde, mais aussi du fait des événements politiques, économique, et sociales qu'elle soulève tout particulièrement après la guerre mondiale.

Les événements majeurs qui ont causé un grand nombre de meurtres en Royaume-uni sont [1] :

1. *La première Guerre mondiale et la dépression* 900 000 morts et plus de 1 600 000 blessés.
2. *Seconde Guerre mondiale*
3. *Grand smog de Londres de 1952*

1.2 Problématique : Enjeux de la tarification

Le système de santé en Angleterre " le national Health Service (NHS) " est considéré parmi les systèmes sanitaires les plus avancés dans l'Europe. L'assurance maladie britannique représente une faible charge financière pour les personnes qui en bénéficient. D'ou l'augmentation de l'espérance de vie.

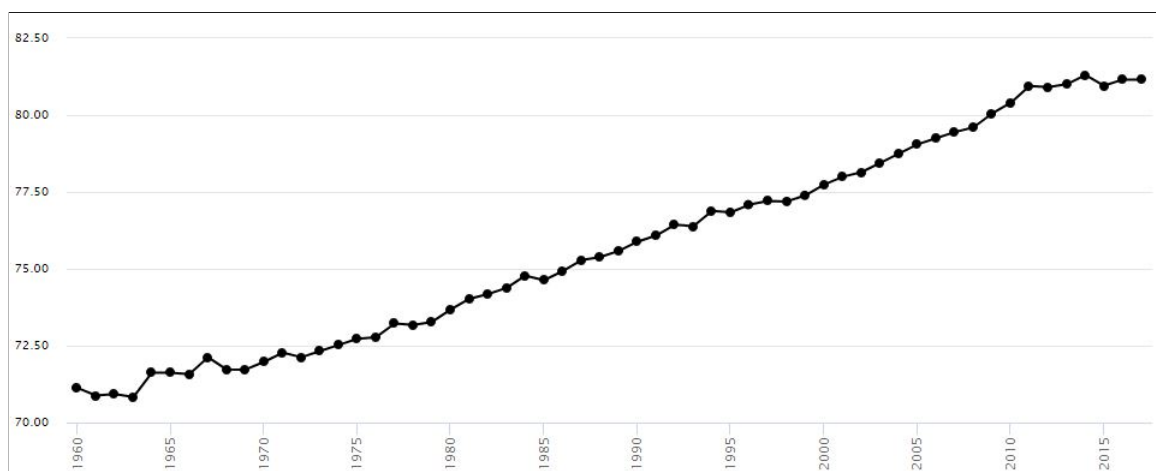


Figure 1.1: Espérance de vie à la naissance (année) , au Royaume-Uni

Les compagnies d'assurance proposant des contrats d'assurance vie ou retraite sont de plus en plus inquiet du risque de longévité, menant à une durée de vie plus longue. En d'autre terme une durée

du service de rente plus longue.

Le but de la tarification de la santé est de déterminer les frais médicaux des régimes supplémentaires nécessaires payés par les parties prenantes pour en bénéficier défini par contrat d'assurance.

La tarification de la rente viagère dépend notamment de l'espérance de vie moyenne du bénéficiaire à la date de liquidation de l'épargne et est évalué en fonction de l'année de naissance.

1.3 Planification du projet

1.3.1 Objectif général

L'objectif du projet est d'estimer et de prédire le taux de mortalité d'un groupe d'assurés britanniques pour calculer la valeur actuelle d'un produit de rente viagère pour ce faire on va utiliser R pour le calcul et l'estimation et R shiny pour la projection graphique des résultats.

1.3.2 Objectif spécifiques

Les objectifs spécifiques sont :

- * Exploitation et compréhension des données.
- * Chercher les librairies adéquates pour nos besoins.
- * Estimer les paramètres d'un modèle de Lee-Carter.
- * Expliquer les différentes notations et préliminaires actuariels.
- * Modélisation de l'évolution de taux de mortalité.

1.3.3 Planification prévisionnelle du projet

Pour assurer le bon déroulement et l'avancement du travail on a mis en place une planification qui s'étale en 3 étapes selon les besoins spécifiques décrits précédemment.

- * *Du 17-22 Avril* Exploitation et compréhension des données.
- * *Du 23-30 Avril* Compréhension des notations et préliminaires actuariels.
- * *Du 30 Avril-11 Mai* Codage sous R et Rédaction du rapport.

Conclusion

Dans ce qui précède, nous avons abordées le contexte général de ce projet et plus précisément l'environnement de réalisation. De même, nous avons précisées les objectifs du projet par une planification prévisionnelle qui nous a permis d'assurer le bon déroulement du travail et de garantir le respect des délais.

VUE D'ENSEMBLE DES NOTIONS ACTUARIELLES

Plan

1	Rente viagère	6
2	Taux de mortalité	6
3	Modélisation des taux de mortalité	6
2.3.1	Modèle de Weibull	7
2.3.2	Modèle de Gompertz-makeham	7
2.3.3	Modèle de Lee-Carter	8
2.3.3.1	Choix des paramètres	8
4	Principe de lissage des tables de mortalité	9

Introduction

Dans ce chapitre, on va définir quelques mots-clés nécessaires pour la construction des tables de mortalité. Puis on va introduire le modèle de Lee-Carter et introduire la notion de taux de mortalité.

2.1 Rente viagère

Par définition, la rente viagère fait référence à la rente versée avant le décès du bénéficiaire. En termes actuariels, elle correspond au versement d'une unité monétaire, jusqu'au décès du bénéficiaire. Le fractionnement de la rente peut être mensuel, trimestriel, semestriel ou annuel [2].

- La valeur actuelle probable (VAP) d'une rente annuelle à terme d'avance pour un individu d'âge x à la date t est définie par [2] :

$$a_x = \sum_{i=0}^{+\infty} (v_{(t,t+i)})^i P_x(t) \quad (2.1)$$

avec $v_{(t,t+i)}$ le facteur d'actualisation entre l'année t et $t+i$, soit $v_{(t,t+i)} = \frac{1}{(1+t_x^{(t+i-t)})}$

2.2 Taux de mortalité

Un taux de mortalité est une mesure de la fréquence des décès dans une population définie au cours d'un intervalle spécifié. Les mesures de morbidité et de mortalité sont souvent les mêmes mathématiquement ; c'est juste une question de ce que vous choisissez de mesurer, la maladie ou la mort.

Le taux de mortalité à l'âge x d'un individu est notée μ_x , La formule de mortalité d'une population définie, sur une période de temps spécifiée, est donnée par [3] :

$$\mu_{x+t} = \frac{f_x}{S_x} \quad (2.2)$$

Avec ,

- la fonction de répartition $F_x(t) = P(T_x < t | T_x > 0) = tq_x$,
- la fonction de survie $S_x(t) = P(T_x > t | T_x > 0) = tp_x$.

2.3 Modélisation des taux de mortalité

La modélisation de la mortalité humaine est un domaine de recherche important et actif pour les démographes, les mathématiciens d'assurance et les chercheurs en médecine depuis *Graunt (1662)*. Le premier a examiné la mortalité à Londres pour produire la première publication qui concernait

principalement les statistiques de santé publique, Le modèle *Gompertz* et sa version modifiée par *Makeham (1867)*, Le modèle de *Weibull 1951* à *Lee et Carter (1992, désormais LC)*. Le principal avantage des modèles stochastiques est que la sortie n'est pas un chiffre unique mais une distribution. La figure 2.1 représente les différent découverte du 1662 jusqu'au 2000.

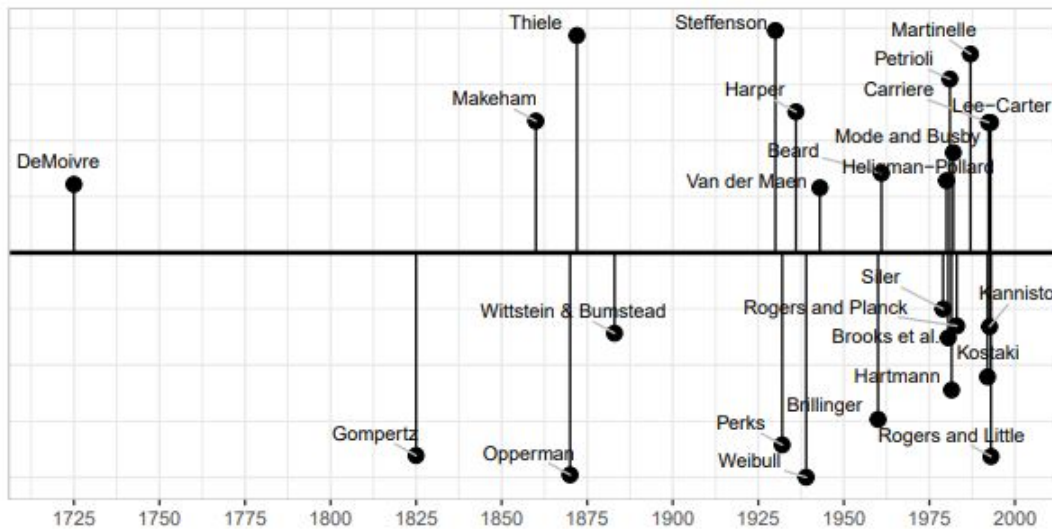


Figure 2.1: Chronologie de la modélisation de la mortalité

2.3.1 Modèle de Weibull

T est Weibull avec les paramètres λ et p , notés $T \sim W(\lambda, p)$, si $T^p \sim E(\lambda)$. Le hasard cumulatif est $\lambda(t) = (\lambda t^p)$, la fonction de survie est $S_x(t) = \exp -(\lambda t)^p$, et le hasard est

$$\lambda(t) = \lambda^p p t^{p-1}$$

Le log de l'aléa de Weibull est une fonction linéaire du temps logarithmique à constante $p \log \lambda + \log p$ et pente $p - 1$. Ainsi, le risque augmente si $p > 1$, constant si $p = 1$, et décroissant si $p < 1$ [4].

2.3.2 Modèle de Gompertz-makeham

La distribution de Gompertz se caractérise par le fait que le log de l'hasard est linéaire en t , donc

$$\lambda(t) = \exp(\alpha + \beta t)$$

donc il est étroitement liée à la distribution de Weibull où le log de l'hasard est linéaire dans $\log t$. En fait, le Gompertz est une distribution log-Weibull. Cette distribution fournit un ajustement remarquablement proche de la mortalité des adultes dans les pays développés contemporains

2.3.3 Modèle de Lee-Carter

Le modèle Lee-Carter est un algorithme numérique utilisé dans la prévision de la mortalité et la prévision de l'espérance de vie. L'entrée dans le modèle est une matrice des taux de mortalité par âge classés de façon monotone par le temps, généralement avec des âges en colonnes et des années en rangées. La sortie est une autre matrice prévue des taux de mortalité [5].

En pseudocode Matlabstyle, l'algorithme est le suivant :

1. Créer le paramètre a_x en prenant des logarithmes des taux de mortalité et en centrant les résultats sur la mortalité logarithmique moyenne à un âge donné.
2. Dérivez k_t , une valeur propre de mise à l'échelle et b_x à partir de $U(:,1), S(1,1), V(1,:)$, où $[USV] = \text{svd}(\text{mort})$.
3. Prévoir k_t avec les méthodes *ARIMA* univariées standard.
4. Utilisez la prévision k_t avec le b_x et la a_x d'origine pour calculer les taux de mortalité enregistrés pour chaque année de prévision.
5. Récupérez les taux de mortalité réguliers en calculant l'exponentielle des taux de mortalité logarithmiques prévus.

Le modèle de Lee Carter pour les données de mortalité est le suivant [6] :

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \epsilon_{x,t} \quad (2.3)$$

- Avec, $m_{x,t}$ taux de mortalité central pour le groupe d'âge x au temps t .
- a_x coefficient qui décrit le profil de mortalité moyen par âge.
- k_t évolution temporelle de la mortalité générale.
- b_x coefficient qui mesure la sensibilité de $\ln(m_{x,t})$ au groupe d'âge x lorsque k_t varie.
- $\epsilon_{x,t}$ erreur associée au groupe d'âge x et à l'heure t

2.3.3.1 Choix des paramètres

Le modèle de Lee Carter est considéré comme le modèle d'or pour la modélisation de la mortalité en raison de la simplicité dans l'estimation des paramètres et il donne un bon ajustement sur une large gamme d'âges. Lee et Carter ont utilisé les taux de mortalité américains pour les groupes d'âge conventionnels de 5 ans.

Les paramètres sont estimés par la méthode des moindres carrés minimisant donc [3] :

$$\min_{a_x, b_x, k_t} \Delta(a_x, b_x, k_t) = \min_{a_x, b_x, k_t} \sum_{t=1}^n \sum_{x=x_m \text{ in}}^{x_m ax} (\log(\mu_x, t) - a_x - b_x t_x)^2 \quad (2.4)$$

Paramètre a_x Le vecteur de paramètre estimé a_x est déterminé comme la moyenne dans le temps du logarithme des taux de mortalité centraux

$$a_x = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log(\mu_x, t) \quad (2.5)$$

Paramètre b_x Le paramètre b_x modélise la façon par laquelle les différents groupes d'âge réagissent au changement de la mortalité.

$$\Delta(\beta_x, k_x) = \sum_{t=1}^n \sum_{x=x_m \text{ in}}^{x_m ax} (z_{x,t} - \beta_x k_t)^2 \quad (2.6)$$

Paramètre k_t Le modèle utilise l'approche de décomposition en valeurs singulières (SVD) pour trouver un vecteur de série temporelle univariée k_t qui décrit la tendance de la mortalité à un moment donné t .

$$\sum_{x=x_m \text{ in}}^{x_m ax} D_{x,t} = \sum_{x=x_m \text{ in}}^{x_m ax} E_{x,t} \exp(a_x + \beta_x k_x) \quad (2.7)$$

2.4 Principe de lissage des tables de mortalité

Une table de mortalité, également connue sous le nom de table de mortalité ou table actuarielle, montre le taux de décès survenant dans une population définie pendant un intervalle de temps sélectionné, ou les taux de survie de la naissance au décès. Une table de mortalité montre généralement la probabilité générale de décès d'une personne avant son prochain anniversaire, en fonction de son âge actuel. Ces tableaux sont généralement utilisés pour éclairer la construction de polices d'assurance et d'autres formes de gestion du passif.

Conclusion

Au cours de la section précédente, nous avons défini les différentes notions de l'actuariat vie que nous allons utiliser dans ce qui suit.

MISE EN OEUVRE EN R : IMPLÉMENTATION ET INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

Plan

1	Lecture et compréhension des données	12
2	Modélisation de l'évolution des taux de Mortalité	13
3.2.1	Taux de mortalité sur l'ensemble des années	13
3.2.2	Taux de mortalité selon le sexe	14
3.2.2.1	Sous-population masculine	14
3.2.2.2	Sous-population féminine	14
3.2.2.3	Etude comparative	15
3.2.3	Taux de mortalité pour les années extrêmes	15
3.2.4	Taux de mortalité de la polpulation totale en fonction des années	16
3.2.4.1	Taux de mortalité pendant la 2ème guerre mondiale	17
3.2.4.2	Taux de mortalité entre les années 1955 au 2015	17
3.2.5	Taux de mortalité en fonction de l'âge : Etude des cohortes	17
3.2.5.1	1ère Cohorte : 60% de femmes nées en 1955 ayant contractés un contrat en 2015	18
3.2.5.2	2ème Cohorte : 40% de hommes nées en 1955 ayant contractés un contrat en 2015	18
3.2.6	Taux de mortalité historique	19
3.2.6.1	Taux de mortalité historique féminine	19
3.2.6.2	Taux de mortalité historique masculine	19
3	Projection avec le modèle de Lee-Carter	20
3.3.1	Choix de la période de calibration des données	20
3.3.2	Choix de la plage d'âges	21
3.3.3	Lissage	21
3.3.4	Paramètre a_x	22

3.3.5	Paramètre b_x	22
3.3.6	Ecart absolu des coefficients	23
3.3.7	Paramètre k_t	24
3.3.8	E tude résiduelle	24
3.3.9	Forecast	25
3.3.10	Taux ajustés historiques	26
4	valeur actuelle probable (VAP)	26
3.4.1	calcul de la valeur actuelle probable en utilisant les taux projetés	28

Introduction

La phase de réalisation de ce projet se décompose en plusieurs parties avec notamment une première étape consacrée à une analyse démographique sur les données qui compose la population en question. Des sous-populations font figure (les cohortes...) et l'étude est appliquée à chacune d'entre elles. Ces analyses révèlent quelques fluctuations (taux bruts de mortalité varie significativement) nécessitant un lissage des taux observés. Différentes méthodes sont testées de sorte à retenir celle qui tient compte au mieux de la fidélité et de la conformité à nos données.

L'étape suivante de ce travail est la mise en application des méthodes de construction des tables de mortalité. Enfin, de nombreux tests sont effectués et les résultats obtenus sont discutés et interprétés.

3.1 Lecture et compréhension des données

Comme indiqué dans l'énoncé on va travailler sur un portefeuille d'un assureur composé d'assurés Britanniques bien évidemment notre pays concerné c'est le *Royaume-Uni*. Pour ce faire nous avons eu recours au site *Human Mortality Database (HMD)*. C'est une base de données qui a été créée pour fournir des données détaillées sur la mortalité et la population aux chercheurs, étudiants, journalistes, analystes des politiques et autres personnes intéressées par l'histoire de la longévité humaine.

Les données ont été décomposées en deux fichiers :

- "Mx-1x1.txt" : Nom de fichier contenant les taux de mortalité démographiques.
- "Exposures-1x1" : Nom de fichier contenant l'exposition au risque

Nous avons choisi le format *1x1* parce que formats de l'âge et du date doivent être : par âge et par année (on va balayer tous les âges et tous les années un par un).

Deux méthodes sont possibles pour le chargement des données la première c'est la commande `hmd.mx()` et on entre comme paramètre le login, le mot de passe du compte HMD et la population désignée. La deuxième méthode, c'est la construction du `demogdata` du Royaume-Uni, et dont le type d'objet est : «mortality» avec la commande `read.demogdata()`.

```
Mortality data for United Kingdom Total Population
Series: female male total
Years: 1922 - 2016
Ages: 0 - 110
```

Figure 3.1: Le résumé statique du `demogdata`

La série de mortalités pour le Royaume-Uni commence en 1922, donc nous pouvons montrer les taux de mortalité pour la cohorte de naissance de 1955 pour les 60 ans . Les taux de mortalité par cohorte aux plus jeunes âges sont indiqués comme manquants (notés "."). De même, la série de mortalités se termine en 2016, nous pouvons montrer les taux de mortalité pour la cohorte de 1955 jusqu'à 29 ans car au 31 décembre 2016, tous les membres de cette cohorte ont atteint l'âge de 61 ans. Pourtant, les données de mortalité pour 61 ans resteront incomplètes jusqu'au 31 décembre 2017.

3.2 Modélisation de l'évolution des taux de Mortalité

Pour modéliser l'évolution des taux de mortalité il est intéressant d'interpréter en premier lieu chaque sous-population à part afin de déterminer enfin le comportement total de la population.

3.2.1 Taux de mortalité sur l'ensemble des années

Dans cette sous-section nous allons projeter l'évolution des taux de mortalité de l'ensemble de la population du Royaume-Uni entre les années 1922 à 2016 en fonction des âges. Comme la montre la figure 3.2

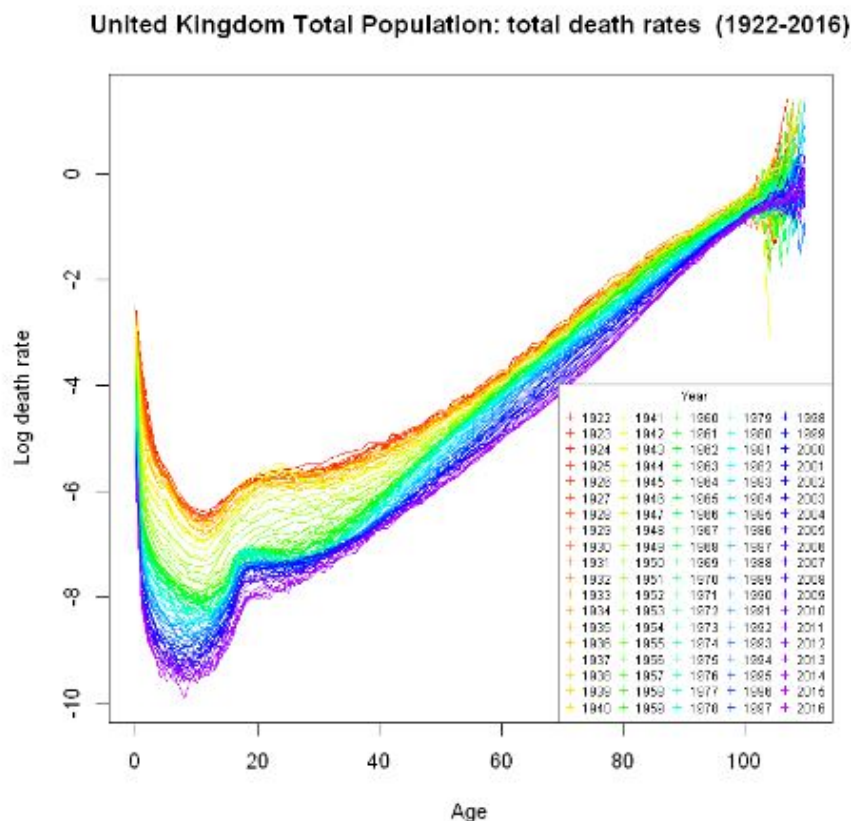


Figure 3.2: Taux de mortalité total en fonction de l'âge

On remarque que les taux de mortalité sont les plus élevés pour les âges extrêmes (les nouveaux nés / les personnes âgées)

3.2.2 Taux de mortalité selon le sexe

3.2.2.1 Sous-population masculine

Nous avons commencé par la projection du taux de mortalité de la sous-population masculine en fonction de l'âge.

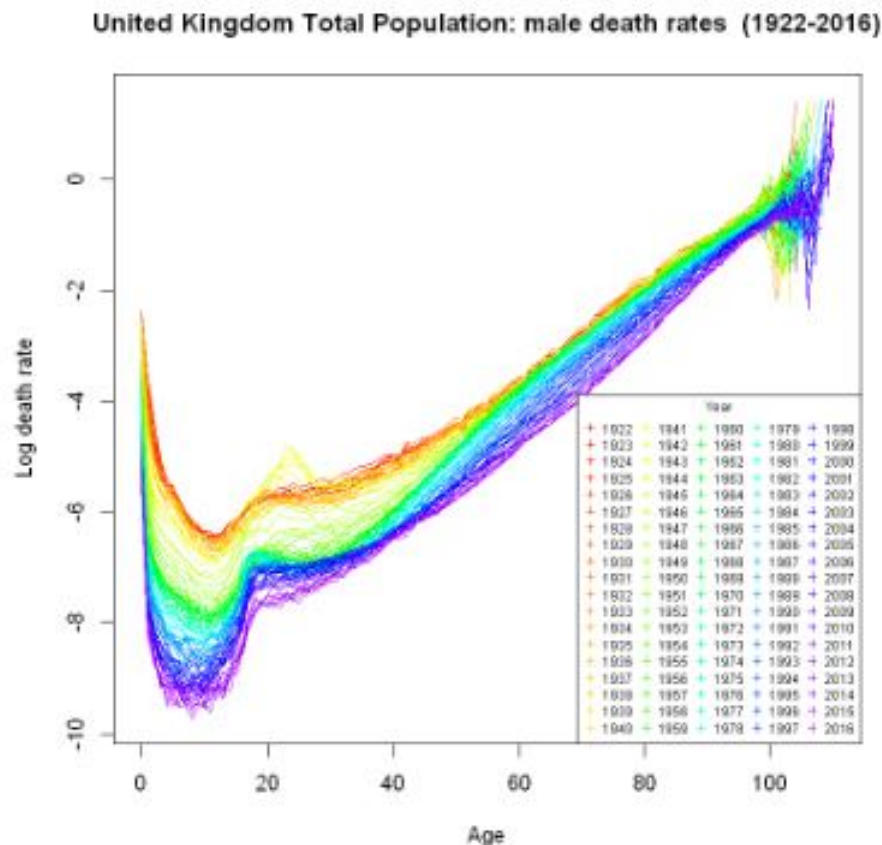


Figure 3.3: Taux de mortalité sur toutes les années de la sous-population masculine

D'après la figure 3.3 on remarque que les taux de mortalité sont les plus élevés pour les âges extrêmes (les nouveau-nés / les personnes âgées). La courbe de mortalité masculine présente une courbe en double cloche, avec un au minimum, un maximum local, un minimal local et une croissance. Pour les hommes, on remarque une décroissance jusqu'à un niveau minimum des âgées de 10 ans puis croissance brusque et importante des années en couleur jaune (1939-1945) ce qui est expliqué par le décès de L'armée de terre britannique.

3.2.2.2 Sous-population féminine

L'étude graphique du taux de mortalité de la sous-polpulation féminine en fonction de l'âge nous donne le graphique suivant :

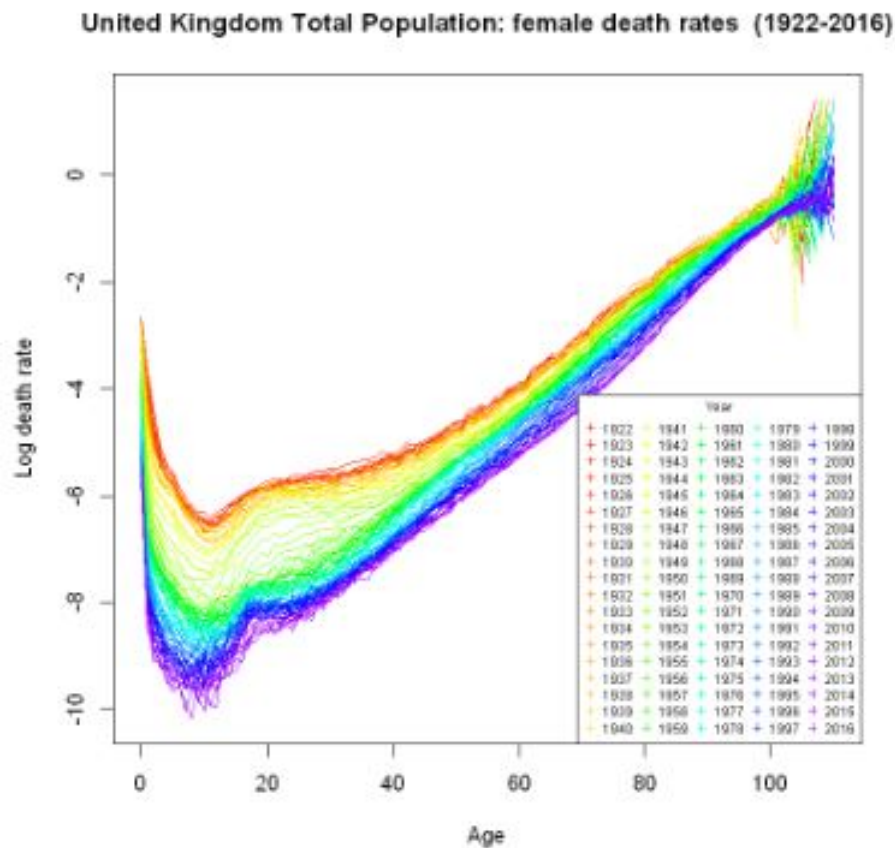


Figure 3.4: Taux de mortalité sur toutes les années de la sous-population féminine

3.2.2.3 Etude comparative

Compte tenu de ce qui précède, il convient de noter que les femmes sont également épargnées du pic de mortalité que la courbe rencontrée chez les hommes à la sortie de l'adolescence. Cela est probablement dû au fait que les normes culturelles imposent souvent aux hommes une tendance à prendre plus de risques pour s'affirmer à la sortie de l'adolescence .

3.2.3 Taux de mortalité pour les années extrêmes

Pour cette projection nous avons choisi d'utiliser la fonction log pour lignariser nos graphics (paramètre *type='l'*)

On remarque que les taux de mortalité pour les deux années 1922 et 2016 sont les plus élevés pour les âges extrêmes (les nouveaux nés / les personnes âgées) avec une croissance rapide a partir 30.

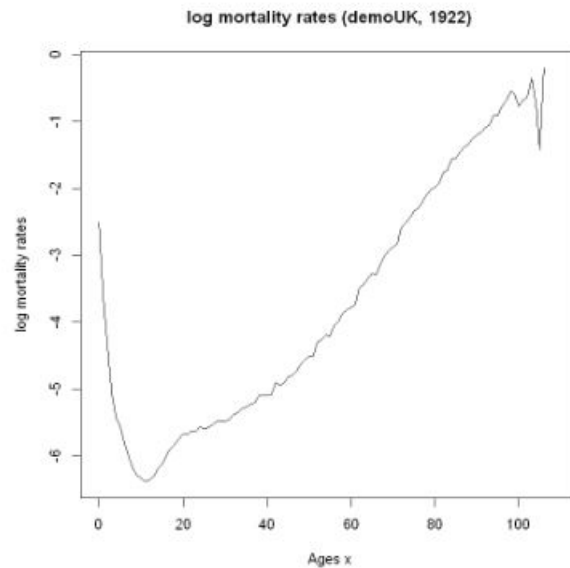


Figure 3.5: Taux de mortalité pour l'année 1922

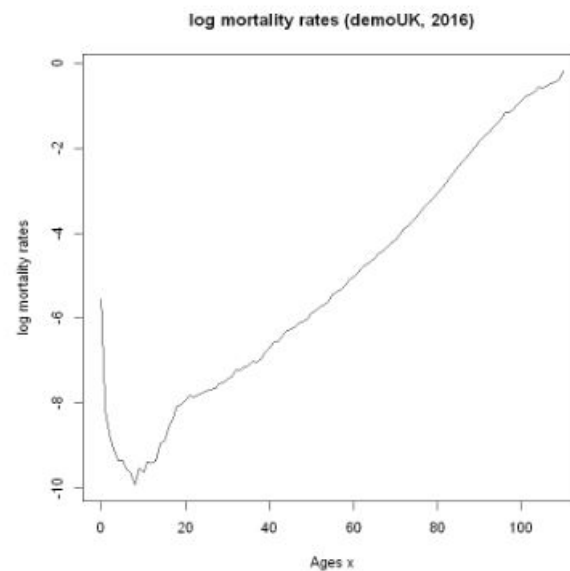


Figure 3.6: Taux de mortalité pour l'année 2016

3.2.4 Taux de mortalité de la population totale en fonction des années

Pour mieux comprendre le comportement de l'évolution de taux de mortalité en fonction des années nous avons travaillé sur différents groupes d'années comme suit ;

- Pendant la 2ème guerre mondiale
- Au delà de la periode de guerre.

3.2.4.1 Taux de mortalité pendant la 2ème guerre mondiale

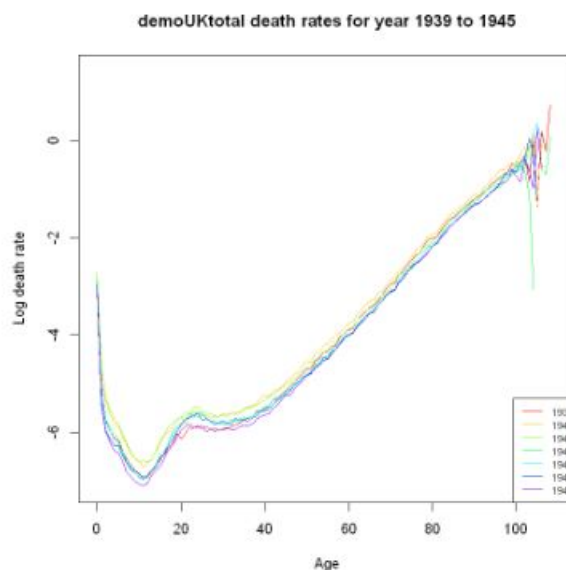


Figure 3.7: Taux de mortalité pendant la 2ème guerre mondiale

3.2.4.2 Taux de mortalité entre les années 1955 au 2015

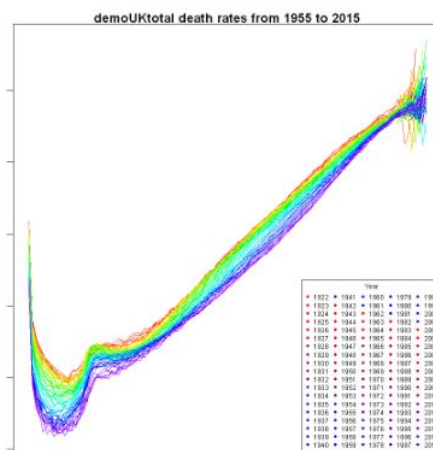


Figure 3.8: Taux de mortalité entre les années 1955 au 2015

3.2.5 Taux de mortalité en fonction de l'âge : Etude des cohortes

En assurance vie, le principe est de suivre un individu par année de naissance pour pouvoir offrir un produit d'assurance-vie pour les individus de la même génération. Ces trois dimensions x (âge), t (date) et tx (année de naissance) n'est pas sans rappeler la lecture des triangles de provisionnement j (développement, ou âge d'un sinistre), $i + j$ (année calendaire, ou date de paiement) et i (année de survenance, ou année de naissance du sinistre).

La génération est obtenue par $g = xt$, par exemple $1901 = 1902 - 1 = 1903 - 2 = \dots$

Pour extraire une génération, nous avons défini la fonction *cohort*.

3.2.5.1 1ère Cohorte : 60% de femmes nées en 1955 ayant contractés un contrat en 2015

En exécutant la fonction *cohort* 60% de femmes nées en 1955 ayant contractés un contrat en 2015 on obtient le résultat suivant :

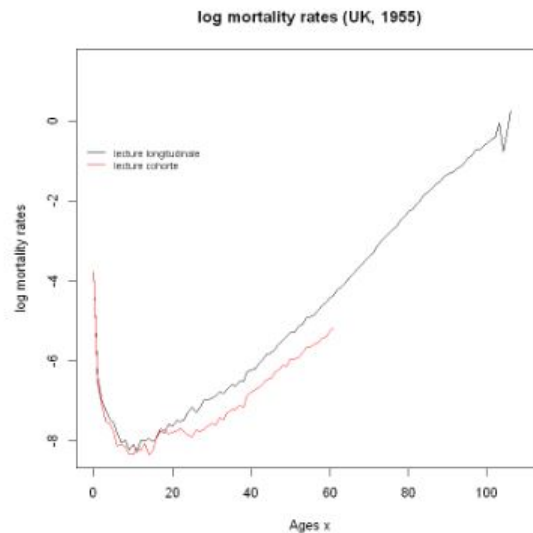


Figure 3.9: Lecture longitudinale et la 1ere cohorte

On observe que pour l'année 1955 le taux de mortalité augmente rapidement contrairement pour la génération de 1955 pour l'âge de 40 ans c'est à dire à partir de l'année 1995.

3.2.5.2 2ème Cohorte : 40% de hommes nées en 1955 ayant contractés un contrat en 2015

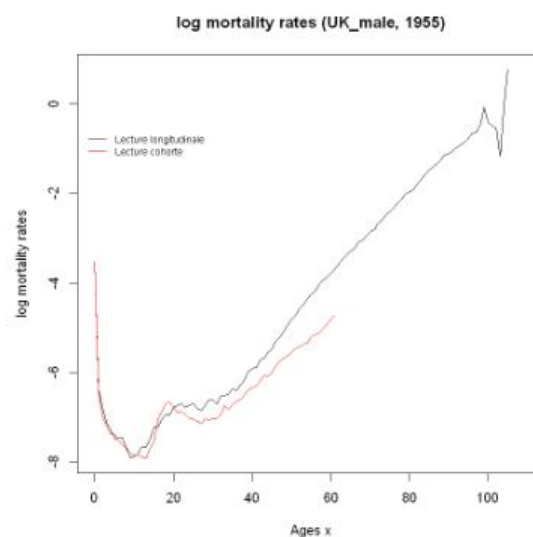


Figure 3.10: Lecture longitudinale et la 2ème cohorte

On observe que pour l'année 1955 le taux de mortalité augmente rapidement contrairement pour la génération de 1955 pour l'âge de 40 ans c'est à dire à partir de l'année 1995.

3.2.6 Taux de mortalité historique

3.2.6.1 Taux de mortalité historique féminine

Nous allons maintenant afficher des log taux de mortalités historiques des femmes

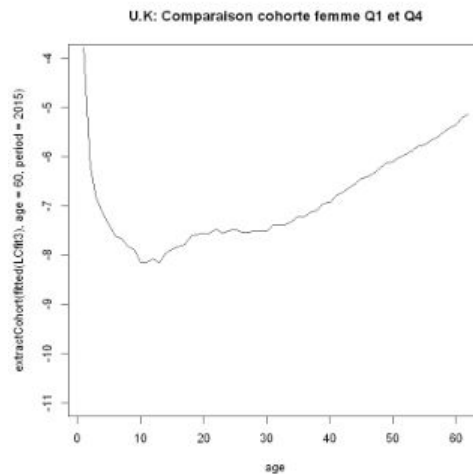


Figure 3.11: taux de mortalités historiques des femmes

en utilisant de la fonction `extractCohort`, on a remarqué que l'affichage des log taux de mortalités historiques semble aux taux estimés

3.2.6.2 Taux de mortalité historique masculine

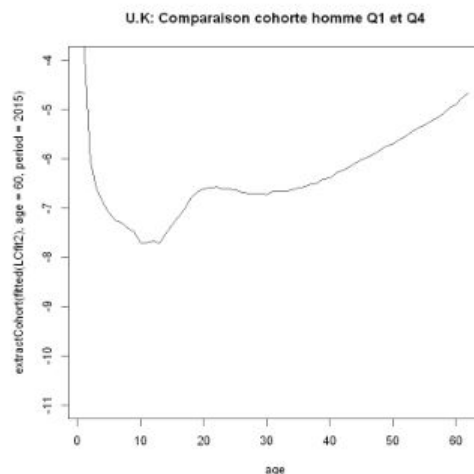


Figure 3.12: taux de mortalités historiques des hommes

3.3 Projection avec le modèle de Lee-Carter

3.3.1 Choix de la période de calibration des données

Afin de déterminer la bonne période pour calibrer les paramètres du modèle, on peut commencer par afficher les taux de mortalité de certains âges en fonction des années :

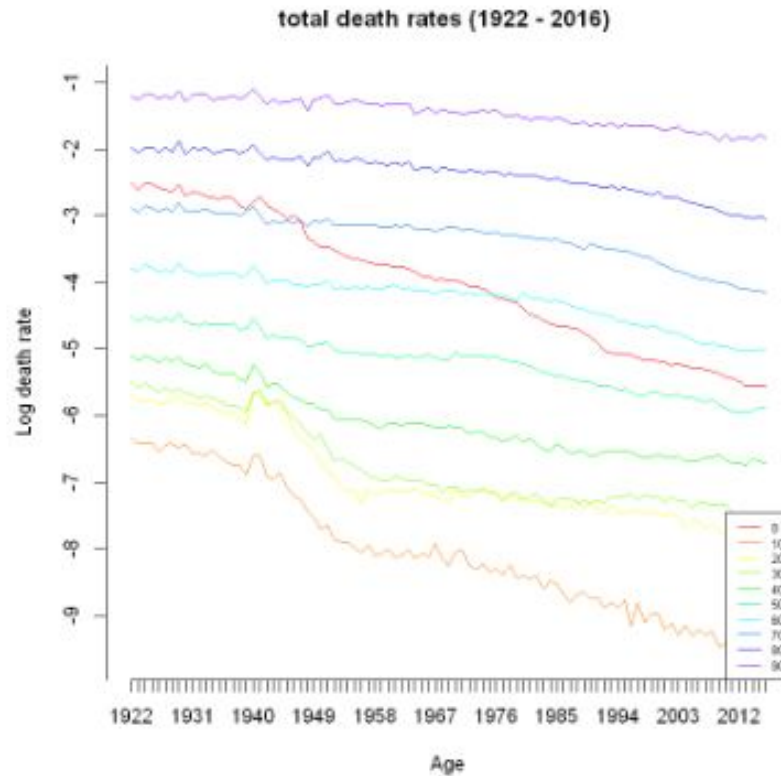


Figure 3.13: Evolution des taux de mortalité pendant la période 1922-2016

le comportement des taux de mortalité reste constants durant toutes les années on va prendre en considération tous les années 1922 -à- 2016 , $t \in [1922, 2016]$

3.3.2 Choix de la plage d'âges

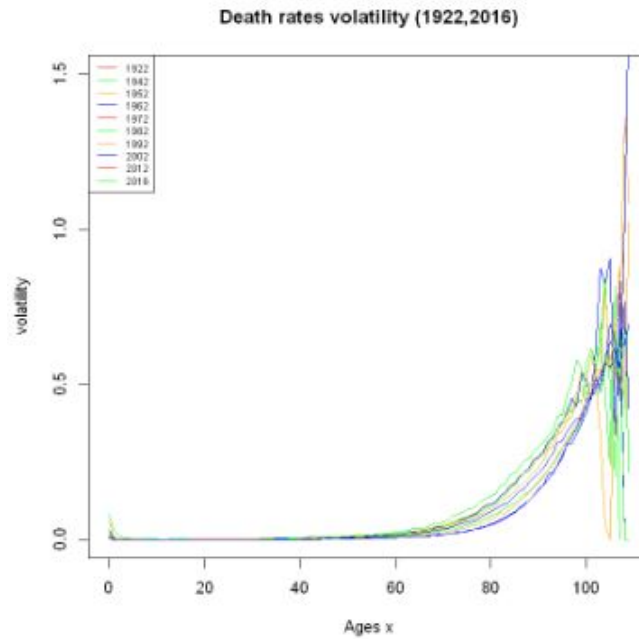


Figure 3.14: Death rates volatility (1922,2016)

faute d'une forte variabilité des taux de mortalité pour les âges > 100 on va se limiter à choisir $x \in [0, 100]$.

3.3.3 Lissage

Pour le lissage nous avons testé plusieurs type de spline (spline monotone, standard, concave, et localement quadratique) pour en choisir le modèle le plus adéquat.

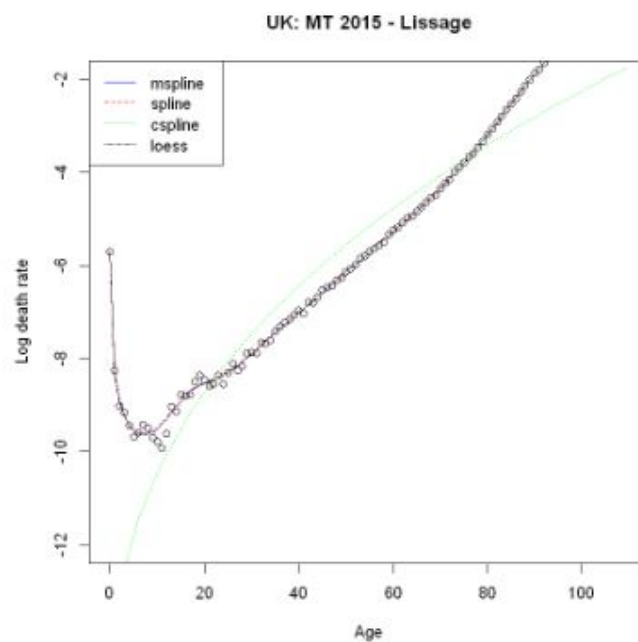


Figure 3.15: Les différents type de lissage

mspline (lissage monotone) représente le mieux la variation du taux de mortalité

3.3.4 Paramètre a_x

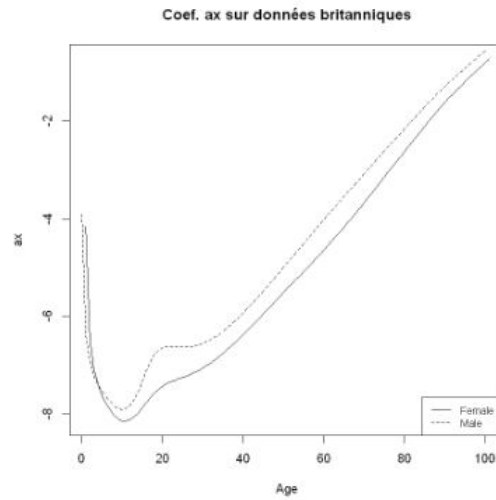


Figure 3.16: Coef. ax sur données britanniques

Ce paramètre a_x représente la tendance liée à l'effet isolé de l'âge sur les taux de mortalité (moyenne temporelle du logarithme du taux de mortalité par âge). Les courbes de a_x suivent la tendance des courbes des données empiriques. Les âges faibles ont une décroissance jusqu'à atteindre un minimum absolu à de l'âge de 12 ans, puis une croissance exponentielle à partir de l'âge de 60 ans.

3.3.5 Paramètre b_x

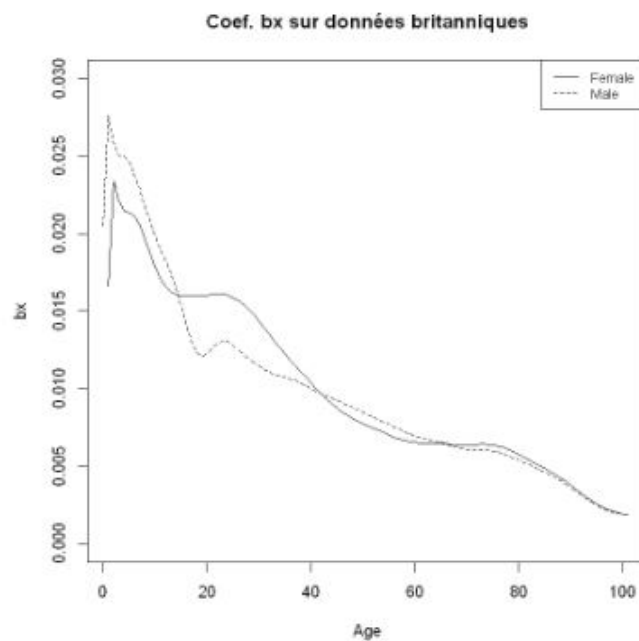


Figure 3.17: Coef. bx sur données britanniques

Le paramètre b_x représentant l'interaction de l'effet des années calendaires sur les taux de mortalité. Cet effet est toujours positif mais la valeur ne cesse de diminuer avec l'âge. Autrement dit, l'effet des années calendaires agit majoritairement avant 50 ans et de moins en moins au delà. On constate une bosse à 22 ans et une bosse plus légère à 68 ans. Pour des âges élevés, l'effet est quasi-inexistant puisque b_x est presque nul. C'est explicable grâce au fait que l'amélioration des conditions de vie et de la médecine ont diminué largement la mortalité infantile. De plus, chez les hommes, l'année a un plus grand effet que chez les femmes.

3.3.6 Ecart absolu des coefficients

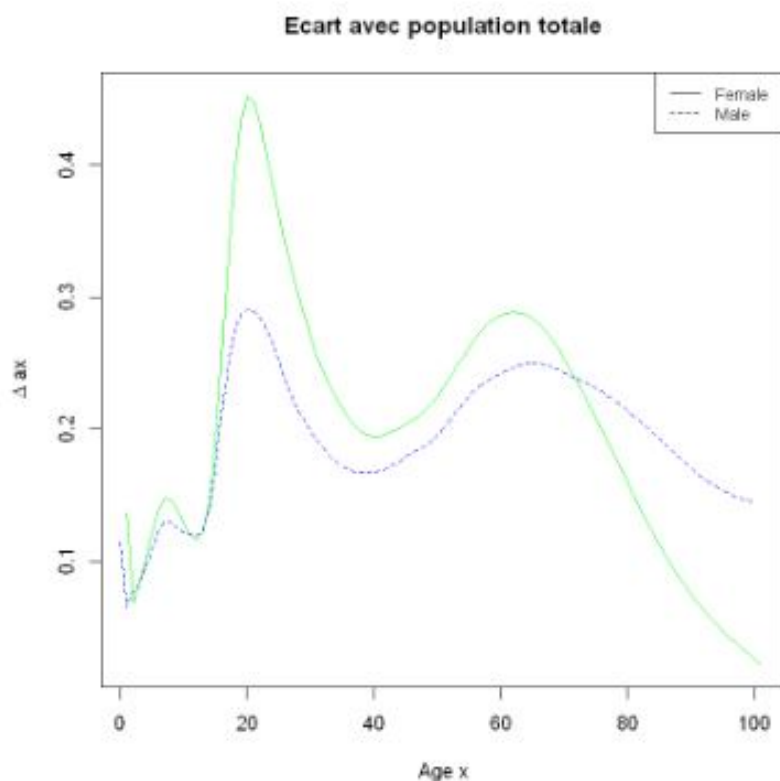


Figure 3.18: Ecart absolu des coefficients

On constate un plus grand écart de mortalité chez les femmes entre 20 et 30 ans que chez les hommes jusqu'à l'âge de 70 ans. La tendance s'inverse puisqu'au delà, l'écart de mortalité est plus grand pour les hommes.

3.3.7 Paramètre k_t

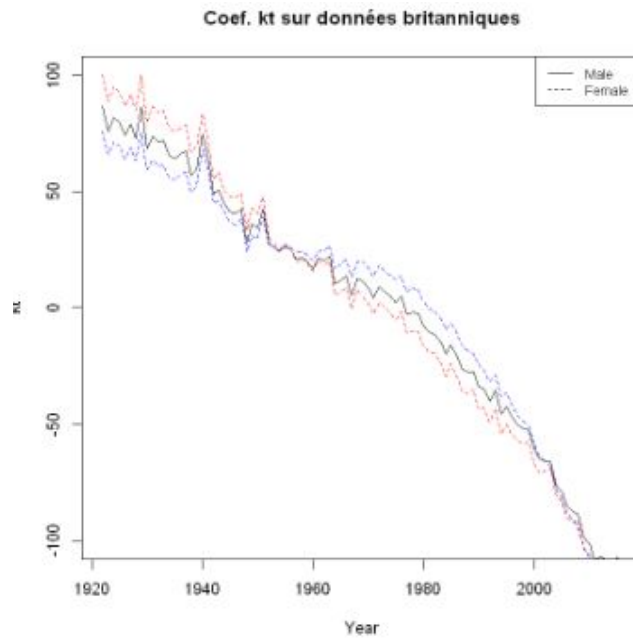


Figure 3.19: Coef. k_t sur données britanniques

La valeur k_t est en chute constante. On remarque un pic de la valeur de k_t autour de la deuxième guerre mondiale.

3.3.8 Etude résiduelle

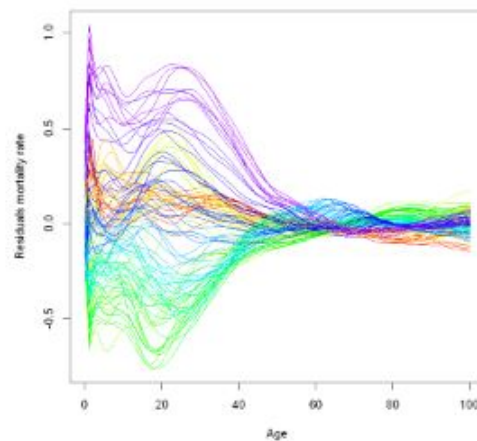


Figure 3.20: Taux de mortalité résiduel en fonction de l'âge

On constate que la variance n'est plus stable pour les ages a partir de 0 à 60 ans et est inférieur à 0.5 le modèle ne semble pas adapté à la description des taux de mortalité des agés moins de 60 ans.

3.3.9 Forecast

Dans cette section nous allons projeter les taux de mortalité passés et prévus, selon les différentes populations, de personnes âgés de 65 ans. Projection de la composante temporelle pour les femmes ainsi que les hommes.

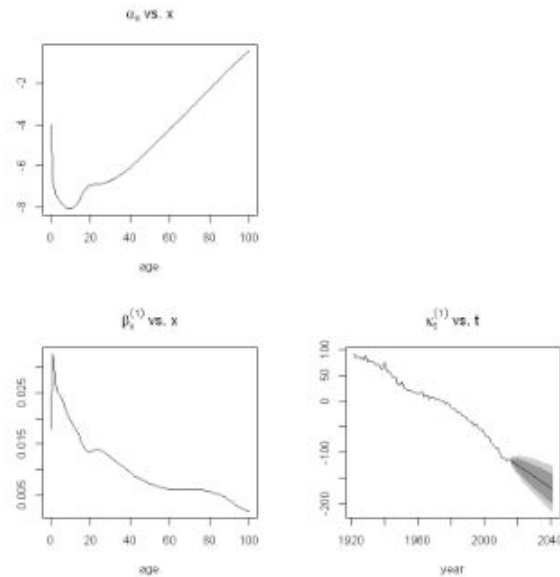


Figure 3.21: Projection de la composante temporelle pour les femmes ainsi que les hommes

On peut changer la période de calibration et voir regarder à chaque fois l'intervalle de confiance (voir annexe)

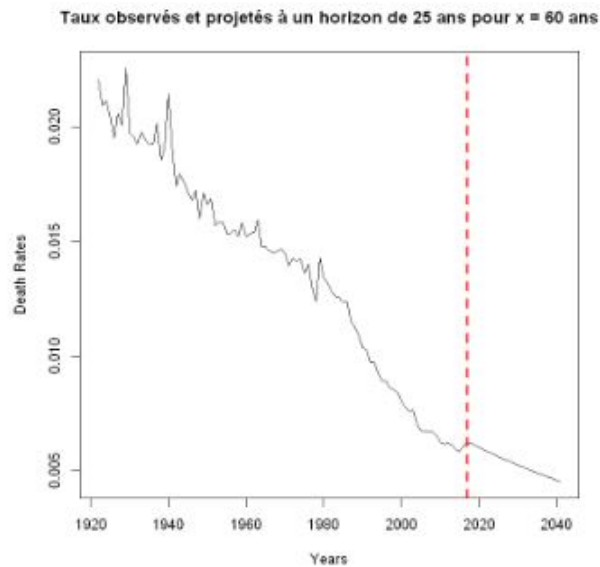


Figure 3.22: Taux observés et projetés à un horizon de 25 ans pour $x = 60$ ans

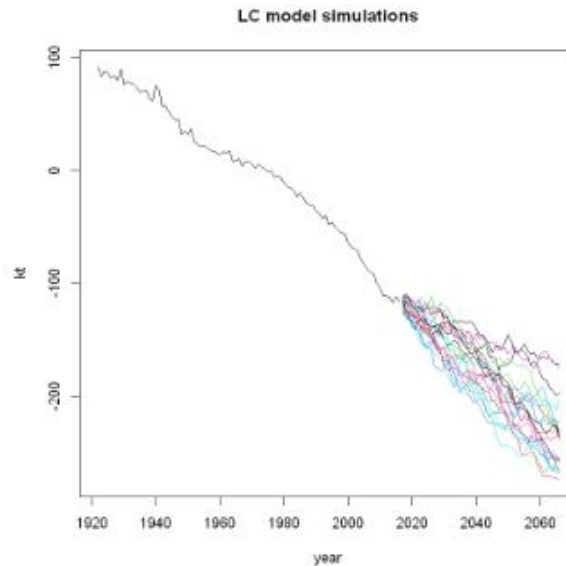


Figure 3.23: LC model simulations

3.3.10 Taux ajustés historiques

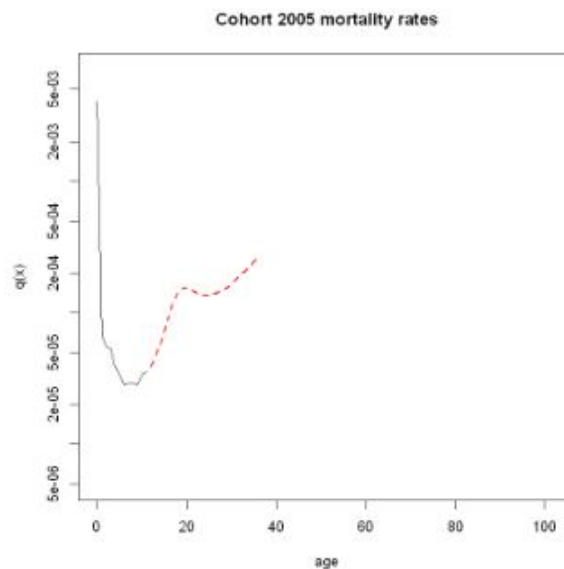


Figure 3.24: Taux ajustés historiques

3.4 valeur actuelle probable (VAP)

Dans cette partie pour calculer les valeurs actuelles probables, on doit contruire des tables actuarielles (actuarial tables) c'est pourquoi à partir de cette question, on va optez a l'extraction directe de deux colonnes "age" et "lx" des a partir Tables de survie(Life tables) des fichiers suivants :

- "bltper-1x1.txt" : United Kingdom, Life tables (period 1x1), Total
- "mltper-1x1.txt" : United Kingdom, Life tables (period 1x1), Males

— "fltper-1x1.txt" : United Kingdom, Life tables (period 1x1), Females

```
A matrix 3 × 2 of type chr
male : 21.9279268386515
female : 24.5450856675483
total : 23.2900019447266
```

Figure 3.25: Comparaison des Espérance de vie

On remarque que l'espérance de vie unisexe (totale) est presque la moyenne entre l'espérance de vie masculine et féminine

```
A matrix 3 × 2 of type chr
male : 0.222166041966651
female : 0.328022264002634
total : 0.278020268372264
```

Figure 3.26: Comparaison des probabilités de survie

On remarque que la probabilité de survie unisexe (totale) est presque la moyenne entre la probabilité de survie masculine et féminine .

```
A matrix 3 × 2 of type chr
male : 15.8490674816521
female : 16.9570119198997
total : 16.4170834989252
```

Figure 3.27: Comparaison des probabilités de décès

on remarque que la probabilité de décès unisexe (totale) est presque la moyenne entre la probabilité de décès masculine et féminine

```
A matrix 3 × 2 of type chr
male : 15.8490674816521
female : 16.9570119198997
total : 16.4170834989252
```

Figure 3.28: Comparaison des valeurs actuelle probable

on remarque que la valeur actuelle probable unisexe (totale) est presque la moyenne entre la valeur actuelle probable masculine et féminine .

3.4.1 calcul de la valeur actuelle probable en utilisant les taux projetés

```
A matrix 3 x 2 of type chr
male: 15.8490674816521
female: 16.9570119198997
total: 16.4170834989252
```

Conclusion générale

L'objectif de ce sujet était d'estimer et de projeter la cohorte d'assurés anglais afin de calculer la valeur d'un contrat d'assurance. Notre étude a été effectuée sur une population venant exactement de « Royaume-Uni » qui est une population assez spéciale dans le monde d'assurance par ce qu'elle est caractérisée par un niveau de vie élevé d'où la baisse de taux de mortalité. Durant la période du projet on a essayé de traiter le sujet en répondant à des questions bien spécifiques permettant de résoudre des problèmes d'actualités pour les assurances, on a estimé les taux de mortalité des hommes et des femmes en utilisant le modèle de Lee-Carter qui est une référence dans le domaine de prévision de mortalité qu'on a déjà estimé ses paramètres et on a aussi calculé la valeur de contrat d'assurance en proposant à l'assureur une méthode de différencier ses tarifs selon le genre de ses assurés, à la fin notre groupe a essayé de montrer sa propre vision en proposant une méthode de tarification unisexe. Pour conclure le projet a été très bénéfique pour tous les membres de l'équipe et nous a permis de découvrir de plus près le monde d'actuariat vie en travaillant sur des données réelles.

Bibliographie

- [1] WIKIPEADIA. (). Histoire du Royaume-Uni, adresse : https://fr.wikipedia.org/wiki/Histoire_du_Royaume-Uni.
- [2] R. MARIN. (le 2 juillet 2012). Garantie de mortalité et couverture du risque de longévité. 50 Avenue Tony Garnier 69366 Lyon Cedex 07, 'Institut de Science Financière et d'Assurances, Université de Lyon, adresse : <http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/0/a05e4dde0aa7a3bac1257a09002fef1f/FILE.pdf>.
- [3] A. MATOUSSI. (**Année 2017-2018**). Actuariat - Assurance vie chapitre 2 - Mortalité stochastique, Université Le Mans (Maine) -'Institut du Risque et de l'Assurance du Mans.
- [4] g. GERMAN RODRIGUEZ. (**Spring, 2001 ; revised Spring 2005, Summer 2010**). Parametric Survival Models.
- [5] (), adresse : http://www.soa.org/library/journals/north-american-actuarial-journal/2000/january/naaj0001_5.pdf.
- [6] N. L. BASNAYAKE BMSC. (**Published : June 16, 2017**). Modeling and forecasting norway mortality rates using the lee carter model, Department of Statistics et Computer Science, University of Peradeniya, Sri Lanka, adresse : <https://medcraveonline.com/BBIJ/modeling-and-forecasting-norway-mortality-rates-using-the-lee-carter-model.html>.
- [7] C. CAPPE. (**le 19 Septembre 2018**). <https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?newsitemmem>, EURIA et de l'admission à l'Institut des Actuaires, adresse : <https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?newsitemmem>.