# Devoir surveillé n° 1
**date : 25 novembre 2014, durée : 2h**

## Exercice 1 :

On considère $E$ et $F$ les sous-ensembles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x + 2y - 3z = 0\}, \quad F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x = 2y = -3z\}$$

**1)** Monter, en utilisant la stabilité, que $E$ et $F$ sont des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
**2)** Monter que $E$ et $F$ sont des sous-espaces vectoriels engendrés par des familles que l'on précisera. Donner alors les dimensions de $E$ et $F$.
**3)** Soient $\boldsymbol{u}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (5,-1,1)$ et $\boldsymbol{u}_3 = (-1,2,1)$.
  **a)** Montrer que la famille $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ est liée.
  **b)** Montrer que $E = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$.
**4)** Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.

## Exercice 2 :

On considère $E$ et $F$ les sous-ensembles de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivants :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} | a,b,d \in \mathbb{R} \right\}, \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} | c \in \mathbb{R} \right\}.$$

**1)** Monter que $E$ et $F$ sont des sous-espace vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
**2)** Déterminer une base de $E$ et une base de $F$. Donner alors les dimensions de $E$ et $F$.
**3)** Montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = E \oplus F$.
**4)** Donner la décomposition sur cette somme directe de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 3 :

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$.

$$P \in \mathbb{R}_n[X] \Leftrightarrow \exists a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

**1)** Soit $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ où $P'$ désigne le polynôme dérivé de $P$.
  **a)** Montrer que $f_1$ est linéaire.
  **b)** Déterminer le noyau et l'image de $f_1$, préciser si $f_1$ est injective, surjective.

**2)** Soit $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & X\,P \end{array}$ où $XP$ désigne le polynôme $x \mapsto xP(x)$.
  **a)** Montrer que $f_2$ est linéaire.
  **b)** Déterminer le noyau et l'image de $f_2$, préciser si $f_2$ est injective, surjective.

## Exercice 4 :

Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x,y,z) = (x + y - z, 4x + y - 2z, 6x + 3y - 4z).$$

Soit $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
**1)**
  **a)** Déterminer l'image de $f$ c'est-à dire $\mathrm{Im}(f)$. En donner une base et la dimension.
  **b)** Que peut-on dire sur la surjectivité, l'injectivité et la bijectivité de $f$ ?
  **c)** Donner uniquement la dimension du noyau de $f$ c'est-à dire $\dim \mathrm{Ker}(f)$(dans cette question on ne demande pas de déterminer $\mathrm{Ker}(f)$).
**2)** On pose $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ et $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3$.
  **a)** Montrer que les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ forment une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.
  **b)** Calculer $f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$ et $f(\boldsymbol{v}_3)$ en fonction de $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$.
  **c)** En déduire $\mathrm{Ker}(f)$.
  **d)** Justifier que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$.
**3)** D'après ce qui précède, justifier que $f \circ f = -f$.
**4)** A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ ?

# Devoir surveillé n° 2
**date : 06 janvier 2015, durée : 1h45**

## Exercice 1 :

Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x,y,z) = f(x,y,z) = (x+2y-2z, 2x+y-2z, 2x+2y-3z).$$

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Ecrire la matrice $A = \text{mat}(f,\mathcal{B})$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Calculer le déterminant de $A$, $\det A$.
   (c) Quelles conclusions peut-on en tirer concernant l'inversibilité, le rang, le noyau et l'image de $f$ ?
   (d) Déterminer l'ensemble des vecteurs $u \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = u$. En donner une base et la dimension.
   (e) Déterminer l'ensemble des vecteurs $u \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = -u$. En donner une base et la dimension.
   On remarquera que
   $\dim\{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = u\} + \dim\{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = -u\} = 3$.
2. Soit $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (0,1,1)$ et $\mathcal{B}' = (u_1,u_2,u_3)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Écrire la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$. On note $A' = \text{mat}(f,\mathcal{B}')$.
   (c) Écrire la matrice $P$ de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
   (d) Calculer, par une méthode de votre choix, $P^{-1}$(On trouvera $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$).
   le calcul est obligatoire , la vérification de $PP^{-1} = I_3$ n'est pas acceptable.
   (e) Calculer $P^{-1}A$ puis $P^{-1}AP$. Pouvait-on prévoir le résultat ?
   (f) Calculer, à partir de la question précédente, $A^n$ pour $n$ entier naturel quelconque. Préciser $A^n$ pour $n$ pair ou impair. Que remarque-t-on ?
   (g) Calculer $A^2$ puis constater la remarque de la question précédente.
   (h) Donner, à partir de la question précédente, l'inverse de $A$.

## Exercice 2 :

Le but de cet exercice est de résoudre le système linéaire suivant, d'inconnues $x, y, z$, en discutant suivant les valeurs du paramètre réel $m$

$$(S_m)\begin{cases} x & +my & +z & = 1 \\ mx & +y & +z & = 1 \\ x & +y & +mz & = 1 \end{cases}.$$

Pour faciliter la résolution du système linéaire $(S_m)$, on considère $B_m$ la matrice augmentée du système $(S_m)$ :$B_m = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$.

**1)** Démontrer que, par la méthode du pivot de Gauss, la matrice augmentée échelonnée du système $(S_m)$ est équivalente à

$$C_m = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-m)(2+m) & 1-m \end{pmatrix}.$$

(il est demandé ici de détailler toutes les étapes de cette méthode en précisant les opérations élémentaires : permutation, $L_i \leftarrow L_i + a_j L_j$, etc ...)

Le résultat de cette question pourra être admis pour la suite.

**2)** Ecrire le système équivalent à $(S_m)$ découlant de la matrice $C_m$.

**3)** Résoudre alors le système linéaire $(S_m)$, d'inconnues $x, y, z$, en discutant suivant les valeurs du paramètre réel $m$.

## Exercice 3 : MATLAB

**1)** Que signifie la phrase suivante : MATLAB est *case sensitive.*

**2)** Donnez la commande MATLAB pour saisir les matrices $A$ et $P$ et celle pour calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ de l'exercice n° 1.

**3)** Comment résoudre le système linéaire $(S_m)$ de l'exercice n° 2 lorsque le système est de Cramer( de matrice inversible) : donner les commandes qui permettent de faire la saisie des données et celle qui donne la solution du système linéaire.
On pourra définir une fonction d'entrée $m$ et qui donnera en sortie la solution du système.

# Devoir surveillé de rattrapage

**date : 23 janvier 2015, durée : 1h 20 min**
**Responsable : Mostafa KABBAJ**

## Exercice 1 :

Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 4x + y - 2z, 6x + 3y - 4z).$$

Soit $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
La matrice $A = \text{mat}(f, \mathcal{B})$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ est alors :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

**1)**

**a)** Calculer le déterminant de $A$, $\det A$.

**b)** Donner, par la méthode du pivot de Gauss, la matrice échelonnée de $A$. (il est demandé ici de détailler toutes les étapes de cette méthode en précisant les opérations élémentaires)

**c)** Déterminer le noyau de $f$ $\text{Ker}(f)$. En donner une base et la dimension. Que peut-on dire sur l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de $f$ ?

**d)** Déterminer l'image de $f$ $\text{Im}(f)$. En donner une base et la dimension.

**e)** Vérifier que $\text{Im}(f)$ est le plan vectoriel $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ caractérisé par l'équation $2x + y - z = 0$ :

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + y - z = 0\}.$$

Pour cette question, on pourra utiliser qu'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ appartient au sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs constituant une famille libre de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si le déterminant des trois vecteurs est nul.

**f)** Vérifier que l'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{u}$ est le plan $\mathcal{P}$.

**2)** Soient $\boldsymbol{u}_1 = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{u}_2 = (0, 1, 1)$, $\boldsymbol{u}_3 = (1, 0, 2)$ et $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$.

**a)** Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (justifier rigoureusement votre réponse).

**b)** Calculer $f(\boldsymbol{u}_1)$, $f(\boldsymbol{u}_2)$ et $f(\boldsymbol{u}_3)$ en fonction de $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ et $\boldsymbol{u}_3$. Écrire alors la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.

**c)** Écrire la matrice $P$ de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et montrer par un calcul que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$).

**d)** Calculer directement $A^2 = A \times A$ puis montrer par récurrence que $A^n = A$ si $n$ est un entier naturel impair et $A^n = -A$ si $n$ est un entier naturel pair non nul.

## Exercice 2 :

Le but de cet exercice est de résoudre le système linéaire suivant, d'inconnues $x, y, z$, en discutant suivant les valeurs du paramètre réel $m$

$$(S_m) \begin{cases} x & +y & +mz & = & 1 \\ x & +my & +z & = & 1 \\ mx & +y & +z & = & 1 \end{cases}$$

Pour faciliter la résolution du système linéaire $(S_m)$, on considère $A_m$ et $B_m$ la matrice et le second membre associés au système $(S_m)$ :

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**1)** Calculer $\det(A_m)$ et vérifier que $\det(A_m) = -(m-1)^2(m+2)$.

**2)** On considère dans cette question que $m \neq 1$ et $m \neq -2$.

**a)** Que dire de la matrice $A_m$ ? Que dire de l'ensemble des solutions de $(S_m)$ ?

**b)** Résoudre dans ce cas le système $(S_m)$ par la méthode du pivot de Gauss.

**3)** Résoudre le système $(S_m)$ pour $m = 1$.

**4)** Résoudre le système $(S_m)$ pour $m = -2$(on pourra sommer les trois équations du système $(S_{-2})$ pour conclure).

# Devoir surveillé n° 1

**date : 17 novembre 2015, durée : 2h**

① Aucun document n'est autorisé.
② L'utilisation des téléphones portables est strictement interdite.
③ La qualité et la clarté de la rédaction et de l'argumentation seront prises en compte dans la notation.

## Exercice 1 :

On considère $E$ et $F$ les sous-ensembles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x+y-z=0\}, \quad F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x=y=-z\}$$

**1)** Monter, en utilisant la stabilité, que $E$ et $F$ sont des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
**2)** Donner des bases de $E$ et $F$. Donner alors les dimensions de $E$ et $F$.
**3)** Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.
**4)** Soit $p$ la projection de $\mathbb{R}^3$ sur $E$ parallèlement à $F$ et soit $s$ la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $E$ parallèlement à $F$.
- **a)** Calculer $p(u)$ où $u$ a pour coordonnées $(x,y,z)$.
- **b)** Donner la matrice $A$ dans la base canonique de cette projection $p$.
- **c)** Calculer $s(u)$ où $u$ a pour coordonnées $(x,y,z)$.
- **d)** Donner la matrice $B$ dans la base canonique de cette symétrie $s$.
- **e)** Quelle relation matricielle lie les matrices $A$ et $B$ ? la vérifier.

## Exercice 2 :

Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x,y,z) = (-3x-y-2z, 4x+2y+2z, 4x+y+3z).$$

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

**1)** Ecrire la matrice $A = \mathrm{mat}(f, \mathcal{B})$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.
**2)** Donner une base de l'image $\mathrm{Im}(f)$ et sa dimension.
**3)** Vérifier que $\mathrm{Im}(f)$ est le plan vectoriel $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 4x+y+2z=0\}$.
**4)** Donner une base du noyau $\mathrm{Ker}(f)$ et sa dimension.
**5)** Calculer le produit $A \times A = A^2$, puis conclure la nature de l'endomorphisme $f$ en précisant ses éléments caractéristiques.
**6)** Déterminer une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de $f$ est égale à $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
**7)** Donner la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et Calculer $P^{-1}$.

## Exercice 3 :

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à deux muni de sa base canonique
$\mathbf{B} = (1, X, X^2)$. On considère l'application $T : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$T(P) = XP' - P, \text{ c'est-à-dire } T(P)(x) = xP'(x) - P(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

**1)** Montrer que $T$ est une application linéaire. Donner la matrice de $T$ dans la base canonique $\mathbf{B}$.
**2)** Exprimer $T(a_0 + a_1 X + a_2 X^2)$ en fonction de $a_0, a_1$ et $a_2$.
**3)** Déterminer une base $\mathbf{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(T)$ et une base $\mathbf{B}_2$ de $\mathrm{Im}(T)$.
**4)** Exprimer $T^2(P)$ en fonction de $P$ et ses dérivées et déterminer la matrice de $T^2$ dans la base canonique $\mathbf{B}$.

Fin

**EST CASABLANCA** **Filière GI, 1ère année** **UH2**
**M02A : Algèbre et géométrie** **Prof. : Mostafa KABBAJ** **A.U. 15/16**

# Devoir surveillé n° 2
**date : 09 janvier 2016, durée : 2h**

## Exercice 1 : */15 Points*

Soit $A$ la matrice réelle carrée d'ordre 3 suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**1)**

**a)** Calculer le déterminant de la matrice $A$ par la méthodes de Sarrus ; puis par développement par rapport à la première colonne.

**b)** En déduire que $A$ est inversible et calculer son inverse.

**c)** Sans faire aucun calcul, déduire (en justifiant) de la question précédente : le rang de $A$, le noyau et l'image de l'endomorphisme admettant comme matrice dans la base canonique la matrice $A$.

**d)** Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 1 \\ x + 2y + z &= -3 \\ 2x + y + z &= 2 \end{cases}$$

en utilisant uniquement la méthode du pivot de Gauss.

**e)** Calculer $A^{-1}b$ où $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ puis comparer avec le résultat de la question précédente.

**2)**

**a)** Justifier que la matrice $A$ est diagonalisable.

**b)** Calculer le polynôme caractéristique $P_A$ de la matrice $A$ défini par : $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$.

On admettra par la suite que $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 4$

**c)** Calculer les valeurs propres de la matrice $A$ en remarquant que 1 est une racine évidente.

**d)** Comparer le déterminant de $A$ avec le produit des valeurs propres et comparer la trace de $A$ avec la somme des valeurs propres.

**e)** Déterminer les sous-espaces propres associés aux différentes valeurs propres de la matrice $A$ et choisir des bases de ces sous-espaces propres.

**f)** Donner une base de vecteurs propres, la matrice de passage associée $P$ ( de la base canonique à la base des vecteurs propres) et calculer $P^{-1}$.

**g)** Sans faire de calculs, donner en justifiant la matrice $P^{-1}AP$. Quelle est sa nature ?

**h)** Expliquer, sans faire aucun calcul, comment on peut calculer $A^n$.

**3)** Donner les commandes MATLAB permettant de :

**a)** saisir $A$, $b$ et avoir $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la solution unique de $Au = b$ sans utiliser $A^{-1}$.

**b)** calculer le déterminant et le rang de $A$.

**c)** donner une matrice de passage $P$ de la base canonique à la base des vecteurs propres et un vecteur $L$ dont les composantes sont les valeurs propres de $A$.

## Exercice 2 : */2 Points*

Montrer que la matrice suivante n'est pas diagonalisable $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

## Exercice 3 : */3 Points*

Soit $t$ un réel et soit $A(t)$ la matrice définie par :

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & t-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & t+1 & -t \end{pmatrix}.$$

**1)** Vérifier que pour toutes les valeurs de $t$, la matrice $A(t)$ n'est pas inversible.

**2)** Montrer que si $t \neq -1$, la matrice $A(t)$ est diagonalisable.

**3)** Si $t = -1$, $A(t)$ est-elle diagonalisable ?

| | | |
|---|---|---|
| **EST CASABLANCA** | **Filière GI, 1ère année** | **UH2** |
| **M02A : Algèbre et géométrie** | **Prof. : Mostafa KABBAJ** | **A.U. 15/16** |

# Devoir surveillé de rattrapage

**date : 22 janvier 2016, durée : 1 h 30 mn**

## Exercice 1 : */10 points*

Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x, y, z) = (7x + 2y + 4z, -12x - 3y - 8z, -6x - 2y - 3z).$$

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

**1)** Vérifier que la matrice $A = \mathrm{mat}(f, \mathcal{B})$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ -12 & -3 & -8 \\ -6 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

**2)** Calculer le déterminant de $A$.

**3)** Quelles conclusions peut-on en déduire concernant l'inversibilité et le rang de $A$, le noyau et l'image de $f$ ?

**4)** Calculer le produit $A \times A = A^2$, puis conclure la nature de l'endomorphisme $f$.

**5)** Déterminer le s.e.v dont les éléments sont des vecteurs $u \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = u$. En donner une base et la dimension.

**6)** Déterminer le s.e.v dont les éléments sont des vecteurs $u \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = -u$. En donner une base et la dimension.

On remarquera que $\dim\{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = u\} + \dim\{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = -u\} = 3$.

**7)** En déduire les éléments caractéristiques de l'application linéaire $f$.

**8)** Justifier rigoureusement, d'après les questions précédentes, que la matrice $A$ est diagonalisable en donnant une matrice de passage $P$ et la matrice diagonale $D$ telles que $P^{-1}AP = D$.

## Exercice 2 : */10 Points*

Soit $A$ la matrice réelle carrée d'ordre 3 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**1)** Justifier que la matrice $A$ est diagonalisable.

**2)** Calculer le polynôme caractéristique $P_A$ de la matrice $A$ défini par : $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$.

On admettra par la suite que $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$

**3)** Calculer les valeurs propres de la matrice $A$ en remarquant que 1 est une racine évidente du polynôme caractéristique $P_A$.

**4)** Comparer le déterminant de $A$ avec le produit des valeurs propres et comparer la trace de $A$ avec la somme des valeurs propres.

**5)** Déterminer les sous-espaces propres associés aux différentes valeurs propres de la matrice $A$ et choisir des bases de ces sous-espaces propres.

**6)** Donner une base de vecteurs propres, la matrice de passage associée $P$ ( de la base canonique à la base des vecteurs propres) et calculer $P^{-1}$.

*Bon travail et bon courage. Fin*

# Devoir surveillé n° 1
**date : 22 novembre 2016, durée : 2h**

① Aucun document n'est autorisé.
② L'utilisation des téléphones portables est strictement interdite.
③ La qualité et la clarté de la rédaction et de l'argumentation seront prises en compte dans la notation.

## Exercice 1 : /≃ *7 points*

On considère $E$ et $F$ les sous-ensembles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y + z = 0\}, \quad F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x = 2z \text{ et } y = z\}.$$

**1)** Monter, en utilisant les sous-espaces engendrés (Vect), que $E$ et $F$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Donner alors des bases de $E$ et $F$ et les dimensions de $E$ et $F$.

**2)** Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.

**3)** Soit $p$ la projection de $\mathbb{R}^3$ sur $E$ parallèlement à $F$ et soit $s$ la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $E$ parallèlement à $F$.

**a)** Calculer $p(u)$ et $s(u)$ où $u$ a pour coordonnées $(x, y, z)$.

**b)** Donner la matrice $A$ (respectivement $B$) dans la base canonique de cette projection $p$ (respectivement de cette symétrie $s$).

**c)** Quelle relation vectorielle lie $p(u)$, $s(u)$ et $u$ ?

**d)** Quelle relation matricielle lie les matrices $A$, $B$ et $I_3$ ? la vérifier.

## Exercice 2 : /≃ *7 points*

Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 2z, 4x + 3y + 4z, -4x - 4y - 5z).$$

Soit $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

**1)** Justifier que La matrice $A = \text{mat}(f, \mathcal{B}_1)$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}_1$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ -4 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

**2)** Déterminer $Inv(f) = \{u \in \mathbb{R}^3 \ , \ f(u) = u\}$. En donner une base $\mathcal{C}_1 = \{u_1\}$.

**3)** Déterminer $Opp(f) = \{u \in \mathbb{R}^3 \ , \ f(u) = -u\}$. En donner une base $\mathcal{C}_2 = \{u_2, u_3\}$.

**4)** Calculer le produit $A \times A = A^2$, puis conclure la nature de l'endomorphisme $f$ et préciser ses éléments caractéristiques.

**5)** Justifier l'inversibilité de $A$, et donner sans calculs le noyau et l'image de $f$.

**6)** Montrer que $\mathcal{B}_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$.

**7)** Justifier rigoureusement, d'après les questions précédentes, que la matrice $A$ est diagonalisable en donnant une matrice de passage $P$ et une matrice diagonale $D$ telles que $P^{-1}AP = D$. (on ne demande pas ici de calculer $P^{-1}$)

## Exercice 3 : /≃ *6 points*

**1)** Déterminer pour quelles valeurs du réel $a$, les vecteurs $u_1 = (a, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, a)$ et $u_3 = (1, 0, a)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

**2)** Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $2 \times 2$ à coefficients réels. On admet que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

**a)** Vérifier que les sous-ensembles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels en donnant pour chacun une base et la dimension.

$E_1 = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \ x, y, z, t \in \mathbb{R} \text{ et } x = t\}$ ;

$E_2 = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, x, y, z, t \in \mathbb{R} \text{ et } x = -t, \ y = z = 0\}$.

**b)** Montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = E_1 \oplus E_2$.

**c)** Donner la décomposition sur cette somme directe de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Fin

# Devoir surveillé n° 2

**date : 07 janvier 2017, durée : 2h**

**Exercice 1 :** */≃ 8.5 points*

Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x, y, z) = (2x + 3y + z, -4y - 2z, 4x + 12y + 5z).$$

Soit $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

**1)** Justifier que La matrice $A = \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}_1)$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}_1$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

**2)** Calculer le déterminant de $A$. Quelles conclusions peut-on en tirer ?

**3)** Soit $(a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.

**a)** Donner la matrice réduite de Gauss associée à la matrice augmentée $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & a \\ 0 & -4 & -2 & | & b \\ 4 & 12 & 5 & | & c \end{pmatrix}$.

**b)** Donner alors une équation de l'image de $f$ : à quelle relation doivent satisfaire les coordonnées d'un point générique $(a, b, c)$ pour qu'il appartienne à $\mathrm{Im}\, f$ ?

**c)** Donner une base du noyau $\mathrm{Ker}(f)$ et sa dimension.

**4)** On considère la famille $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2, u_3)$ avec

$$u_1 = (1, -2, 4)\ ,\ u_2 = (1, -2, 5)\ ,\ u_3 = (3, -4, 12).$$

**a)** Vérifier que $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

**b)** Donner la matrice de passage entre $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ notée $P$.

**c)** Calculer $P^{-1}$, (on prouvera par l'une des diverses méthodes que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$).

**d)** Calculer $P^{-1}A$ puis $P^{-1}AP$ et préciser la nature de $P^{-1}AP$ et en déduire la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}_2$.

**5)** Retrouver la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}_2$ par un procédé direct sans passer par $P^{-1}AP$.

**6)** Justifier, d'après ce qui précède uniquement, que la matrice $A$ est diagonalisable, puis donner sans calculs les valeurs propres de $A$.

**Exercice 2 :** */≃ 8,5 points*

Soit $A$ la matrice réelle carrée d'ordre 3 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{pmatrix}.$$

**1)** Calculer le polynôme caractéristique $P_A$ de la matrice $A$ défini par :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3).$$

(Faire le calcul par l'une des trois méthodes : Sarrus OU Développement OU Pivot de Gauss)

On admettra par la suite que $P_A(\lambda) = -\lambda^3 - 5\lambda^2 - 3\lambda + 9$

**2)** Calculer $P_A(1)$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

**3)** Prouver par factorisation que

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 3)^2.$$

et en déduire toutes les valeurs propres de la matrice $A$ en précisant la multiplicité algébrique de chacune.

**4)** Comparer le déterminant de $A$ avec le produit des valeurs propres et comparer la trace de $A$ avec la somme des valeurs propres.

**5)** Déterminer les sous-espaces propres associés aux différentes valeurs propres de la matrice $A$ et choisir des bases de ces sous-espaces propres.

**6)** Donner une base de vecteurs propres, la matrice de passage associée $P$ ( de la base canonique à la base des vecteurs propres) et calculer $P^{-1}$.

**7)** Donner, sans calculs, la matrice diagonale $D$ telle que $D = P^{-1}AP$.

**8)** Expliquer, sans faire de calculs, comment on peut calculer $A^n$.

**Exercice 3 :** */≃ 3 points*

Soit $t$ un réel et soit $A(t)$ la matrice définie par : $A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & 0 & t+1 \\ t-1 & 1 & -t \end{pmatrix}$.

**1)** Vérifier que pour toutes les valeurs de $t$, la matrice $A(t)$ n'est pas inversible.

**2)** Montrer que le spectre de $A(t)$ est $\{0, t+1, -(t+1)\}$.

**3)** En déduire que

**a)** Si $t \neq -1$, la matrice $A(t)$ est diagonalisable.

**b)** Si $t = -1$, $A(t)$ est-elle diagonalisable ?

Bon travail. Fin

**EST CASABLANCA** | **Filière GI, 1ère année** | **UH2**
**M02A : Algèbre et géométrie** | **Prof. : Mostafa KABBAJ** | **A.U. 15/16**

# Devoir surveillé de rattrapage
**date : 20 janvier 2017, durée : 1 h 30 mn**

① Aucun document n'est autorisé.
② L'utilisation des téléphones portables est strictement interdite.
③ La qualité de la rédaction et de l'argumentation seront prises en compte dans la notation.

## Exercice 1 :

En utilisant un déterminant, déterminer pour quelles valeurs du réel $a$, les vecteurs $u_1 = (a, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, a)$ et $u_3 = (1, 0, a)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

## Exercice 2 :

On considère $E$ et $F$ les sous-espaces de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x - y + 2z = 0\}, \quad F = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$$

On admettra que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.
Soit $s$ la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $E$ parallèlement à $F$.

**1)** Calculer $s(u)$ où $u$ a pour coordonnées $(x, y, z)$.
**2)** Donner la matrice $A$ dans la base canonique de cette symétrie $s$.
**3)** Vérifier que $A^2 = I_3$.(écrire sur la copie le détail des calculs concernant le produit $A$ par $A$)

## Exercice 3 :

On considère la matrice $A$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

et on considère $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A$.

**1)** Calculer la valeur du déterminant de $A$. Quelles conclusions peut-on en tirer ?
**2)** Soit $(a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice réduite de Gauss associée à la matrice augmentée $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & a \\ 1 & -2 & 1 & b \\ 1 & 1 & -2 & c \end{array}\right)$.
**3)** Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et une équation cartésienne de $\mathrm{Im}(f)$.
**4)** Sans faire de calculs, justifier que la matrice $A$ est diagonalisable.
**5)** Calculer le polynôme caractéristique $P_A$ de la matrice $A$ défini par : $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$.

On admettra par la suite que $P_A(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda$

**6)** Calculer les valeurs propres de la matrice $A$.
**7)** Comparer le déterminant de $A$ avec le produit des valeurs propres et comparer la trace de $A$ avec la somme des valeurs propres.
**8)** Déterminer les sous-espaces propres associés aux différentes valeurs propres de la matrice $A$ et choisir des bases de ces sous-espaces propres.
**9)** Donner une base de vecteurs propres, la matrice de passage associée $P$ ( de la base canonique à la base des vecteurs propres).
**10)** Sans faire de calculs, donner en justifiant la matrice $P^{-1}AP$. Quelle est sa nature ?

*Bon travail et bon courage. Fin*

## Devoir à rendre le 11/11/2014–

### Exercice 1 :

Répondre par Vrai ou Faux aux questions suivantes. Si la réponse est fausse, alors donner un contre-exemple et donner une référence($n^o$ de la proposition, du théorème ...etc) si la réponse est vraie.

On suppose que $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que $F_1$ et $F_2$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$. Alors

**1)** leur intersection $F_1 \cap F_2$ est aussi un s.e.v de $E$.
**2)** leur réunion $F_1 \cup F_2$ est aussi un s.e.v de $E$.
**3)** leur somme $F_1 + F_2$ est aussi un s.e.v de $E$.

### Exercice 2 :

**1)** La somme $\mathcal{M}_2^{ts}(\mathbb{R}) + \mathcal{M}_2^{ti}(\mathbb{R})$ est-elle directe ? Justifier la réponse.
**2)** Énoncer le théorème du "ballon".
**3)** On suppose que $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- **a)** Donner la définition d'une famille $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ génératrice de $E$.
- **b)** Donner la définition d'une famille $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ libre dans $E$.
- **c)** Donner la définition d'une famille $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ base de $E$.
- **d)** Compléter les pointillés

– Toute $\cdots\cdots$-famille d'une famille libre est libre.
– Toute $\cdots\cdots$-famille d'une famille génératrice est génératrice.

### Exercice 3 :

Soit $E$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie égale à $\dim E = n$. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.

**1)** Que dire de la dimension de $F$ par rapport à $n$ ?
**2)** Que peut-on conclure si $\dim F = n$ ?
**3)** Que peut-on dire du cardinal de toute famille libre ?
**4)** Que peut-on dire du cardinal de toute famille génératrice ?
**5)** Que peut-on dire du cardinal de toute famille qui est une base ?
**6)** Donner pour $n = 3$ une famille non génératrice de cardinal égal à 4.
**7)** Donner pour $n = 3$ une famille non libre de cardinal égal à 2.
**8)** Soit $E$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie égale à $n$. Soit $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à $n$ et soient $F_1$ et $F_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.

- **a)** Comment montrer que la somme $F_1 + F_2$ est directe ?
- **b)** Comment appelle-t-on $F_1$ si sa dimension vaut 1 ?
- **c)** Comment appelle-t-on $F_2$ si sa dimension vaut 2 ?
- **d)** Soient $P_1$ et $P_2$ deux plans distincts de $\mathbb{R}^3$. A-t-on $dim(P_1 \cap P_2) = 1$ ?
- **e)** Soit $P$ un plan de $\mathbb{R}^3$, de base $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$.

Les vecteurs $\boldsymbol{v}_1 = \frac{\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2}{2}$ et $\boldsymbol{v}_2 = \frac{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2}{2}$ forment-ils une base de $P$ ?

- **f)** Soient $D_1$, $D_2$ et $D_3$ trois droites de $\mathbb{R}^3$ distinctes 2 à 2. Leur somme est-elle nécessairement égale à $\mathbb{R}^3$ ?

### Exercice 4 :

**1)** Soit $a$ un réel non nul et soit la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = \{(1, a, a^2), (1/a, 1, a), (1/a^2, 1/a, 1)\}$.
Quelle est la dimension de Vect($\mathcal{F}$) ?

**2)** Soit $V \subseteq \mathbb{R}^m$ un s.e.v. On suppose que $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ est une famille génératrice de $V$. Montrer que la famille suivante $\{\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1} - \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_n\}$ est aussi une famille génératrice de $V$.

**3)** Soit $V \subseteq \mathbb{R}^m$ un s.e.v. On suppose que $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ est une famille libre. Montrer que la famille suivante $\{\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1} - \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_n\}$ est aussi une famille libre.

**4)** Justifier qu'il n'existe pas d'application linéaire $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ dont le noyau est le s.e.v. suivant $\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 3x_2 \text{ et } x_3 = x_4 = x_5\right\}$.

**5)** Dans $\mathbb{R}^4$, montrer l'égalité des sous-espaces $F$ et $G$ suivants :

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{Vect}\{(1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, -5)\} \\ G &= \mathrm{Vect}\{(-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4)\}. \end{aligned}$$

**6)** Soient $\boldsymbol{e_1}(0, 1, -2, 1), \boldsymbol{e_2}(1, 0, 2, -1), \boldsymbol{e_3}(3, 2, 2, -1), \boldsymbol{e_4}(0, 0, 1, 0)$ et $\boldsymbol{e_5}(0, 0, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

- **a)** $Vect\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\} = Vect\{(1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)\}$.
- **b)** $(1, 1, 0, 0) \in Vect\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}\} \cap Vect\{\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_4}\}$.
- **c)** $dim(Vect\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}\} \cap Vect\{\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_4}\}) = 1$.
- **d)** $Vect\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}\} + Vect\{\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_4}\} = \mathbb{R}^4$.
- **e)** $Vect\{\boldsymbol{e_4}, \boldsymbol{e_5}\}$ est un sous-espace vectoriel de supplémentaire $Vect\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

## Devoir à rendre le mardi 15/11/2016

### Exercice 1 :

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $2\times 2$ à coefficients réels. On admet que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

**1)** Vérifier que les sous-ensembles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels en donnant pour chacun une base et la dimension.

$E_1 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ a,b,c\in\mathbb{R}\}$ ;

$E_2 = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a\in\mathbb{R}\}$ ;

$E_3 = \{\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix},\ a\in\mathbb{R}\}$.

**2)** A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = E_1\oplus E_2$ , $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = E_1\oplus E_3$ ?

**3)** Déterminer pour quelles valeurs du réel $t$, les vecteurs $u_1=(1,0,t)$, $u_2=(1,1,t)$ et $u_3=(t,0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

**4)** On considère l'application linéaire $f$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z)=(x+y+z,2x+y,2x+z).$$

**a)** Montrer que $f$ est bijective et calculer $f^{-1}$.

**b)** Soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ 2x+y+z=0\}$. Donner une équation cartésienne de $f(F)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

### Exercice 2 :

Soient $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; 2x+y-z=0\}$ et $D=Vect\{u_3\}$ où $u_3=(1,1,0)$.

**1)** Montrer que $\mathbb{R}^3=P\oplus D$.

**2)** Soit $p$ la projection de $\mathbb{R}^3$ sur $P$ parallèlement à $D$. Calculer $p(u)$ où $u$ a pour coordonnées $(x,y,z)$.

**3)** Soit $s$ la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $P$ parallèlement à $D$. Calculer $s(u)$ où $u$ a pour coordonnées $(x,y,z)$.

### Exercice 3 :

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $f$ est une projection sur un plan vectoriel dont on donnera une équation cartésienne, parallèlement à une droite vectorielle dont on donnera une base.

### Exercice 4 :

Écrire, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice de la symétrie par rapport au plan d'équation $x+y-z=0$ parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $(1,2,2)$.

### Exercice 5 :

Soit $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. et soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

**1)** Donner une base du noyau $\mathrm{Ker}(f)$ et sa dimension.

**2)** Donner une base de l'image $\mathrm{Im}(f)$ et sa dimension. Vérifier que $\mathrm{Im}(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$.

### Exercice 6 :

**1)** Soit $p$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ tel que $p^2=p$.

**a)** Montrer que, pour tout $x\in E$, on a $x-p(x)\in\mathrm{Ker}(p)$. En déduire que l'on a $E=\mathrm{Ker}(p)+\mathrm{Im}(p)$.

**b)** Montrer que l'on a $E=\mathrm{Ker}(p)\oplus\mathrm{Im}(p)$. En déduire que $p$ est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

**2)** Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$ ($f$ est une application linéaire de $E$ dans $F$) où $E$ et $F$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.On notera $0_E$ et $0_F$ les éléments neutres de l'addition dans $E$ et $F$ respectivement.

**a)** Donner la définition de $\mathrm{Ker}(f)$ et montrer qu'il s'agit d'un sous espace vectoriel de $E$.

**b)** Montrer que $f$ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)=\{0_E\}$.

**c)** Énoncer le théorème du rang lorsque $E$ est de dimension finie.

**d)** Montrer que si $f$ est injective alors elle transforme les familles libres de $E$ en familles libres de $F$.

**e)** Supposons dans cette question que $\dim E=\dim F<\infty$.

Montrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ est injective sur } E \Leftrightarrow f \text{ est surjective sur } F.$$

## Correction d'une partie du Devoir n° 1

### Solution de l'exercice 1

**1) Indications** :
- justifier que $E_1$ est engendré par une famille de trois matrices libre à donner, donc $E_1$ est de dimension 3.
- justifier que $E_2$ est engendré par une famille d'une matrice libre à donner, donc $E_2$ est de dimension 1.
- justifier que $E_3$ est engendré par une famille d'une matrice libre à donner, donc $E_3$ est de dimension 1.

**2)** On n'a pas $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = E_1 \oplus E_2$ car $E_1 \cap E_2 = E_2 \neq \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$, par contre on a $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = E_1 \oplus E_3$ car $E_1 \cap E_3 = \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$ et $\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4 = 3 + 1 = \dim(E_1) + \dim(E_3)$.

**3)** Vérifier en utilisant un système et la méthode du pivot de Gauss que la famille proposée de cardinal 3 sera une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $t^2 - 1 \neq 0$, c-à-d $t \neq \pm 1$.

**4)**

**a)** Comme $f$ est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, pour prouver que $f$ est bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective (cela résulte du théorème du rang) *i.e.* que son noyau est nul. Mais comme on nous demande de calculer $f^{-1}$, on ne procède pas ainsi : on va résoudre l'équation

$$(*) \quad f(\alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z).$$

Cette équation équivaut au système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} \alpha & +\beta & +\gamma & = & x & (L1) \\ 2\alpha & +\beta & & = & y & (L2) \\ 2\alpha & & +\gamma & = & z & (L3) \end{cases} .$$

On applique la méthode du pivot :

$$(S) \iff \begin{cases} \alpha & +\beta & +\gamma & = & x & (L1) \\ 2\alpha & +\beta & & = & y & (L2) \\ 3\alpha & & & = & -x+y+z & (L2)+(L3)-(L1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3\alpha & & & = -x+y+z \\ & 3\beta & & = 2x+y-2z \\ & & 3\gamma & = 2x-2y+z \end{cases} .$$

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, l'équation $(*)$ admet une unique solution : l'application $f$ est bijective. Par ailleurs, on a $f^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x+y+z, 2x+y-2z, 2x-2y+z)$.

**b)** Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $f$ est bijective, on a $v \in f(F) \Leftrightarrow f^{-1}(v) \in F$. Comme $f^{-1}(v) = f^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x+y+z, 2x+y-2z, 2x-2y+z)$, on a $v \in f(F) \Leftrightarrow (-x+y+z, 2x+y-2z, 2x-2y+z) \in F \Leftrightarrow 2(-x+y+z) + (2x+y-2z) + (2x-2y+z) = 0$ soit $v \in f(F) \Leftrightarrow 2x+y+z = 0$. Le sous-espace $f(F)$ admet donc $2x+y+z = 0$ pour équation cartésienne (on a donc $f(F) = F$).

### Solution de l'exercice 2

**1)** On commence par remarquer que $P$ est un plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax+by+cz = 0$ où $(a, b, c) = (2, 1, -1) \neq (0, 0, 0)$, On a donc $\dim(P) = 2$.
$D = Vect\{u_3\}$ où $u_3 = (1, 1, 0) \neq (0, 0, 0)$. $\{u_3\}$ est une base de $D$. On a donc $\dim(D) = 1$.
Le plan $P$ et la droite $D$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ (parce que $u_3 \notin P$ car $2+1-0 = 3 \neq 0$ et donc $D \subsetneq P$).

**2)** Soit $p$ la projection de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan $P$ d'équation $2x+y-z = 0$ parallèlement à la droite $D$ engendrée par le vecteur $u_3 = (1, 1, 0)$.
Le plan $P$ et la droite $D$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ : tout vecteur $u$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de façon unique $u = u_P + u_D$ avec $u_P \in P$ et $u_D \in D$. On a alors $p(u) = u_P$.
L'endomorphisme $p$ est donc caractérisé par les deux propriétés suivantes :

$$\boxed{p(u) = u_P \in P \text{ et } u - p(u) = u_D \in D.}$$

On cherche maintenant $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $u = u_P + u_D = u_P + \gamma u_3$ et $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ce qui est équivalent à $(x, y, z) = u_P + \gamma(1, 1, 0)$.
D'où $u - \gamma(1, 1, 0) = (x, y, z) - \gamma(1, 1, 0) = (x-\gamma, y-\gamma, z) \in P$. On en déduit que $2(x-\gamma) + (y-\gamma) - z = 0$ et que $\gamma = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z$
Ainsi $p(u) = p(x, y, z) = u_P = u - u_D = (x, y, z) - (\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z)(1, 1, 0)$

$$\boxed{p(u) = p(x,y,z) = (\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{3}z, -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}z, z)}$$

$u - p(u) = u_D = \gamma(1,1,0) = (\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z)(1,1,0)$, d'où

$$\boxed{u - p(u) = u_D = (\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{3}z, \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{3}z, 0).}$$

**3)** La symétrie $s$ par rapport à $P$ parallèlement à $D$ est définie par

$$\boxed{s(u) = s(x,y,z) = u_P - u_D = (-\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{2}{3}z, -\tfrac{4}{3}x + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}z, z)}$$

## Solution de l'exercice 3

Notons $A$ la matrice $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ de $f$. La matrice de $f^2$ dans la base canonique est $A^2$. On a $A^2 = A$, donc $f^2 = f$. L'endomorphisme $f$ est donc la projection de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.
On a $(x,y,z) \in \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $(\exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3)\ f(\alpha,\beta,\gamma) = (x,y,z)$. Cela équivaut à

$$(\exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3) \quad \begin{cases} 5\alpha & -2\beta & +\gamma & = 6x & (L1) \\ -2\alpha & +2\beta & +2\gamma & = 6y & (L2) \\ \alpha & +2\beta & +5\gamma & = 6z & (L3) \end{cases}$$

$$\iff (\exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3) \quad \begin{cases} \alpha & +2\beta & +5\gamma & = & 6z & (L3) \\ & 6\beta & +12\gamma & = & 6y + 12z & (L2) + 2(L3) \\ & -12\beta & -24\gamma & = & 6x - 30z & (L1) - 5(L3) \end{cases}$$

$$\iff (\exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3) \quad \begin{cases} \alpha & +2\beta & +5\gamma & = & 6z \\ & \beta & +2\gamma & = & y + 2z \\ & & 0 & = & 6x + 12y - 6z \end{cases}$$

$$\iff x + 2y - z = 0.$$

On a donc $\mathrm{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0\}$.
D'après le calcul qui précède, on a $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha & +2\beta & +5\gamma & = 0 \\ & \beta & +2\gamma & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha & & +\gamma & = 0 \\ & \beta & +2\gamma & = 0 \end{cases}$$
$$\iff (\alpha,\beta,\gamma) = (-\gamma, -2\gamma, \gamma) = -\gamma(1,2,-1).$$

On a donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{vect}\{(1,2,-1)\}$.
L'endomorphisme $f$ est donc la projection sur le plan d'équation $x + 2y - z = 0$ parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $(1,2,-1)$.

## Solution de l'exercice 4

Soit $s$ la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan $P$ d'équation $x + y - z = 0$ parallèlement à la droite $D$ engendrée par le vecteur $v_0 = (1,2,2)$, et $A$ sa matrice dans la base canonique.

Le plan $P$ et la droite $D$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ (parce que $v_0 \notin P$) : tout vecteur $u$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de façon unique $u = u_P + u_D$ avec $u_P \in P$ et $u_D \in D$. On a alors $s(u) = u_P - u_D$. L'endomorphisme $s$ est donc caractérisé par les deux propriétés suivantes :

$$\boxed{s(u) + u = 2u_P \in P \text{ et } u - s(u) = 2u_D \in D.}$$

On a $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $s(u) = u - 2u_D = u - 2\gamma v_0$ et $s(u) + u = 2u - 2\gamma v_0 \in P$. Si $u = (x,y,z)$, on a $2u - 2\gamma v_0 = (2x - 2\gamma, 2y - 4\gamma, 2z - 4\gamma)$ et donc $2x - 2\gamma + 2y - 4\gamma - 2z + 4\gamma = 0$, soit $\gamma = (x + y - z)$.
On a donc $s(u) = u - 2(x+y-z)v_0 = (x,y,z) - 2(x+y-z)(1,2,2)$. D'où

$$\boxed{s(u) = (-x - 2y + 2z, -4x - 3y + 4z, -4x - 4y + 5z)}$$

En particulier, on a $s(1,0,0) = (-1,-4,-4)$, $s(0,1,0) = (-2,-3,-4)$ et $s(0,0,1) = (2,4,5)$. On a donc

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

## Devoir libre

**Devoir à rendre ! –**

### Exercice 1 :

Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x,y,z) = (x+2y-2z, 2x+y-2z, 2x+2y-3z).$$

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

**1)** Vérifier que la matrice $A = \text{mat}(f,\mathcal{B})$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

**2)** Calculer le rang de $A$, quelles conclusions peut-on en tirer concernant l'inversibilité , le noyau et l'image de $f$ ?

**3)** Calculer le produit $A \times A = A^2$, puis conclure la nature de l'endomorphisme $f$ en précisant ses éléments caractéristiques.

**4)** Justifier rigoureusement, d'après la question précédente, que la matrice $A$ est diagonalisable en précisant la matrice diagonale $D$ semblable à $A$(c'est-à-dire telle qu'il existe une matrice inversible $P$ vérifiant $P^{-1}AP = D$).

### Exercice 2 :

Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x,y,z) = (-x-2z, 4x+y+4z, x+2z).$$

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

**1)** Ecrire la matrice $A = \text{mat}(f,\mathcal{B})$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.
**2)** Donner une base du noyau $\text{Ker}(f)$ et sa dimension.
**3)** Donner une base de l'image $\text{Im}(f)$ et sa dimension.
**4)** Vérifier que $\text{Im}(f)$ est le plan vectoriel $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+z=0\}$.
**5)** Vérifier que l'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ est le plan $\mathcal{P}$.
**6)** Calculer le produit $A \times A = A^2$, puis conclure la nature de l'endomorphisme $f$ en précisant ses éléments caractéristiques.
**7)** Déterminer une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de $f$ est égale à $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
**8)** Sans faire de calculs donner, en justifiant, $A^n$ pour $n$ entier naturel non nul.

### Exercice 3 : *Trois questions indépendantes sur la diagonalisibilité*

**1)** Justifier que la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

**2)** Justifier que la matrice suivante $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

**3)** Soit la matrice $C$ donnée par $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

**a)** Calculer le polynôme caractéristique de $C$.
**b)** Déterminer les racines du polynôme caractéristique de $C$, que représentent-elles ?
**c)** Quelle conclusion peut-on en tirer ?
**d)** Déterminer une matrice inversible $P$ et calculer $P^{-1}$ telle que $P^{-1}CP$ soit diagonale en précisant les éléments diagonaux de cette diagonale notée $D$.
**e)** Calculer les déterminants de $C$ et $D$ et les comparer. Calculer les traces de $C$ et $D$ et les comparer.

**Devoir libre n° 4 à faire personnellement pour préparer le DS n° 2**

## Exercice 1 :

**1)** Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est inversible. Et si elle l'est, calculer son inverse. (pour $A, B, C$ utiliser respectivement la méthode de "Cayley-Hamilton", "l'adjointe", "les composantes")

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**2)** Calculer l'inverse de la matrice suivante grâce à la méthode de Gauss-Jordan
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**3)** Calculer $D_1 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

**4)** Soit le système représenté par la matrice augmentée suivante :

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

Donner i) une forme échelonnée ; ii) une forme échelonnée réduite ; iii) la solution générale du système homogène correspondant.

## Exercice 2 :

**1)** Diagonaliser les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -14 & -28 & -14 \\ -7 & -14 & -23 \\ 9 & 18 & 29 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On donnera aussi la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

**2)** Calculer le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ (on trouvera } P_A(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 2).$$

**3)** Montrer que la matrice suivante n'est pas diagonalisable

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**4)** Diagonaliser ou trigonaliser (suivant possibilité) les matrices suivantes sur $\mathbb{R}$.

$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Résoudre maintenant les système $A_1X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,$A_2X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $A_3X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

par une méthode moins coûteuse que la résolution globale.

**5)** For each of the following matrices, find the eigenvalues, and for each eigenvalue determine the algebraic and geometric multiplicities. Which matrices are diagonalizable ?

5.1. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 5.2. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 5.3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 5.4. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5.5. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 5.6. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 5.7. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.