C. DESCHAMPS | F. MOULIN | N. CLEIREC | J.-M. CORNIL |
Y. GENTRIC | F. LUSSIER | C. MULLAERT | S. NICOLAS

MATHS MPSI

TOUT-EN-UN

5e édition

DUNOD

Conception et création de couverture : Hokus Pokus Créations

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-077902-4

Préface

La réforme du lycée, qui a suivi celle du collège, a débuté par la classe de seconde en septembre 2010 et elle s'est achevée, en 2012, avec la mise en œuvre des nouvelles classes de terminale. Les étudiants qui entreprennent des études en classes préparatoires en septembre 2013 ont bénéficié, durant toute leur scolarité, de programmes rénovés, en particulier en mathématiques. Afin d'assurer une continuité avec ces programmes, de nouveaux programmes de classes préparatoires étaient donc indispensables.
En mathématiques, en 1995, lors de la mise en place des programmes de l'époque, les Éditions Dunod nous avaient confié la tâche de fournir aux étudiants un ouvrage de référence clair et précis complétant le cours, irremplaçable, du professeur. Nous avions alors tenté un pari : faire tenir exposés et exercices, avec corrigés, en un seul volume, le premier « tout-en-un » (depuis, très largement imité), qui a remporté un grand succès. Aujourd'hui, avec une équipe partiellement renouvelée et de grande qualité, nous publions ce nouveau « tout-en-un ». Tout en gardant les grands principes de l'ancien ouvrage, ce nouveau « tout-en-un » a l'ambition, en mettant en œuvre de nouvelles méthodes d'acquisition des connaissances, de proposer à l'étudiant une démarche pour s'approprier les théories du programme, théories indispensables tant aux mathématiques qu'aux autres disciplines.
L'esprit qui a guidé l'équipe tout au long de son travail a été de ne pas se contenter d'un « toilettage » de l'ouvrage existant mais bien de concevoir et proposer un cours en conformité avec le texte, mais aussi avec l'esprit, du nouveau programme.
Dans ce but, par exemple, la première partie « Techniques de calcul » est là pour aider les étudiants à réaliser la transition entre les programmes rénovés du lycée et les objectifs de la « formation mathématique » en classes préparatoires. Ces premiers chapitres ont pour mission de consolider et d'élargir les acquis du secondaire, en particulier dans la pratique du calcul, afin d'aborder dans les meilleures conditions le cœur du programme ; à dessein, certaines définitions précises et constructions rigoureuses ont donc été différées à des chapitres
922 ultérieurs (avec un pictogramme comme ci-contre indiquant la page à laquelle se référer).

En pratique :

- Le livre débute par un chapitre 0 : « Pour commencer » ; il ne s'agit pas d'un cours de logique mais d'une acquisition, à minima, de notions fondamentales (assertions, ensembles, quantificateurs), chacune étant très largement illustrée.
- De très nombreux exemples, souvent simples et issus de connaissances du lycée, illustrent chaque définition.

- Les propositions et théorèmes sont énoncés, suivis immédiatement d'exemples élémentaires d'applications, et leurs démonstrations sont l'occasion d'un travail personnel de l'étudiant. Nous avons choisi de ne pas faire figurer systématiquement à la suite de l'énoncé la rédaction complète de ces démonstrations mais plutôt d'indiquer à l'étudiant le principe de celles-ci avec les éléments qui lui permettront de la construire par lui-même et ainsi de mieux s'approprier la propriété. Évidemment, guidé par un renvoi précis en fin du chapitre, il pourra ensuite consulter la démonstration complète et vérifier (ou compléter) son travail personnel.

- Lorsque plusieurs preuves étaient possibles, nous avons choisi de ne pas privilégier systématiquement la plus courte, souvent au profit de constructions explicites. C'est volontaire ; durant leurs études au lycée nos étudiants n'ont en général pas construit les objets mathématiques qu'ils ont utilisés : ils se sont contentés d'en admettre les propriétés. Or construire un objet, comme le fait un artisan, c'est se l'approprier, connaître parfaitement ses propriétés et les limites de ces propriétés.

- Au cours du déroulement de chaque chapitre, l'étudiant trouvera, pour illustrer immédiatement l'usage des propositions et théorèmes, de très nombreux exercices simples qu'il doit évidemment chercher et dont il pourra consulter une solution en fin de chapitre afin de vérifier son propre travail.

- Régulièrement l'étudiant trouvera des « point méthode » qui, pour une situation donnée, lui offrent une ou deux possibilités d'approche de la résolution de son problème. Évidemment il trouvera après ce « point méthode » un ou plusieurs exemples ou exercices l'illustrant.

- Enfin, à l'issue de chaque chapitre, il trouvera des exercices plus ambitieux demandant plus de réflexion, à chercher une fois le chapitre totalement maitrisé. Certains plus difficiles sont signalés par des étoiles ; les solutions de tous ces exercices complémentaires sont données, mais parfois de façon plus succincte que les solutions des exercices fondamentaux figurant dans le déroulement du cours.

- Bien entendu nous sommes très intéressés par toute remarque que les étudiants, nos collègues, tout lecteur… seraient amenés à nous communiquer. Cela nous permettra, le cas échéant, de corriger certaines erreurs nous ayant échappé et surtout ce contact nous guidera pour une meilleure exploitation des choix pédagogiques que nous avons faits aujourd'hui dans cet ouvrage.

Claude Deschamps et François Moulin

Le site
les-maths-en-prepas.fr

Ce livre est prolongé par un site web qui vous aidera à assimiler efficacement le programme de première année. Ce site, en synergie complète avec l'ouvrage mais qu'il ne remplace absolument pas, a été développé par certains des auteurs du livre pour offrir des compléments pédagogiques impossibles à mettre dans un ouvrage papier sous peine de le rendre illisible. Ces compléments portent à la fois sur les exercices et sur le cours.

- En ce qui concerne les **exercices**, il ne s'agit pas juste d'une série supplémentaire d'exercices corrigés. Au contraire, l'interactivité que permet l'ordinateur ou la tablette est mise à profit pour vous fournir des niveaux d'explication bien plus détaillés que ceux d'un livre, pour vous proposer des pistes, voire de fausses pistes qu'il est bon d'avoir explorées afin de bien comprendre pourquoi elles ne mènent à rien. C'est vous-même qui choisirez, en fonction des problèmes de compréhension que vous rencontrerez, d'accéder ou non à ces différents niveaux d'explication, avant d'aboutir à une solution exhaustive et complètement rédigée.
- En ce qui concerne le **cours**, la présentation des chapitres vous aidera à réviser plus efficacement en vue d'une colle ou d'une interrogation écrite. Après avoir étudié et travaillé votre cours sur papier avec le livre, la forme interactive du site vous permettra d'évaluer l'état exact de vos connaissances. Plutôt que de relire des pages de cours (ou des fiches, par nature incomplètes) au risque de vous y endormir, vous pourrez bénéficier de la présentation inversée des chapitres : partant de la table des matières et affinant par étapes successives, elle est conçue pour vous inciter à vous demander ce qu'il peut y avoir dans chaque partie qui n'est pas encore développée, quel théorème ou quelle propriété peut bien s'y trouver, quel en est l'énoncé exact, et quels exemples, contre-exemples ou cas particuliers peuvent vous fournir une aide précieuse pour « assurer » ce résultat. Cette démarche, privilégiée par les auteurs du site, est exactement celle dont vous aurez besoin lors d'une interrogation orale ou écrite.

Que ce soit pour les exercices ou pour le cours, il ne faut pas chercher sur ce site des questions ou des exercices pointus issus des oraux des écoles les plus prestigieuses. Le but poursuivi est avant tout pédagogique : permettre à chacun, quel que soit son niveau, d'acquérir les bases et les réflexes indispensables pour effectuer une bonne première année, et de ne plus avoir d'angoisse sur les notions au programme. L'idée essentielle est qu'en allant voir un peu plus loin que le simple énoncé d'un théorème ou d'une formule, en assimilant en même temps le principe de la démonstration, des exemples et des contre-exemples, il est plus facile d'en avoir une connaissance précise.

Enfin, bon nombre de questions sont enrichies de **graphiques interactifs animés** qui vous faciliteront l'assimilation de certaines notions en les visualisant et les manipulant plus facilement.

Table des matières

Préface iii

Le site `les-maths-en-prepas.fr` complémentaire du livre v

Table des matières vi

Chapitre 0. Pour commencer 1

I Assertions, ensembles et prédicats 3
II Quantificateurs 7
Démonstrations et solutions des exercices du cours 14

Partie I. Techniques de calcul

Chapitre 1. Droite numérique, fonctions à valeurs réelles 19

I Ensemble des nombres réels 20
II Fonctions réelles 29
III Dérivabilité – Rappels de Terminale 40
IV Fonctions trigonométriques 51
Démonstrations et solutions des exercices du cours 66
Exercices 85

Chapitre 2. Calculs algébriques 93

I Symboles $\sum$ et $\prod$ 94
II Coefficients binomiaux, formule du binôme 109
III Systèmes linéaires, méthode du pivot 113
Démonstrations et solutions des exercices du cours 128
Exercices 141

Chapitre 3. Nombres complexes 149

I L'ensemble des nombres complexes 151
II Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$ 164
III Applications géométriques 170
Démonstrations et solutions des exercices du cours 174
Exercices 189

Chapitre 4. Fonctions usuelles 203

I Fonctions logarithmes et exponentielles 204
II Fonctions puissances 208
III Fonctions circulaires réciproques 212
IV Fonctions hyperboliques 218
V Fonctions à valeurs complexes 220
Démonstrations et solutions des exercices du cours 224
Exercices 233

Chapitre 5. Primitives et équations différentielles linéaires 245

I Primitives 246
II Équations différentielles linéaires du premier ordre 259
III Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants 268
Démonstrations et solutions des exercices du cours 274
Exercices 291

Partie II. Raisonnement et vocabulaire

Chapitre 6. Raisonnement, opérations sur les ensembles 309

I Implication et équivalence 310
II Opérations sur les ensembles 315
III Pratique de la démonstration 321
Démonstrations et solutions des exercices du cours 327

Chapitre 7. Applications, relations, entiers naturels 333

I Applications, fonctions 334
II Relations binaires 347
III L'ensemble des entiers naturels 356
IV Notions sur les ensembles finis 362
Démonstrations et solutions des exercices du cours 366
Exercices 381

Partie III. Analyse

Chapitre 8. Nombres réels, suites numériques 391

I L'ensemble des nombres réels 393
II Généralités sur les suites réelles 400
III Limite d'une suite réelle 403
IV Opérations sur les limites 409
V Résultats d'existence de limites 414
VI Intermède : comment démontrer la convergence d'une suite ? . 417
VII Traduction séquentielle de certaines propriétés 418
VIII Suites complexes 420
IX Suites récurrentes 424
X Relations de comparaison sur les suites 429
Démonstrations et solutions des exercices du cours 438
Exercices 468

Chapitre 9. Limites et continuité 483

I L'aspect ponctuel : limites, continuité 484
II L'aspect global : fonctions continues sur un intervalle 508
III Extension aux fonctions à valeurs complexes 519
Démonstrations et solutions des exercices du cours 522
Exercices 540

Chapitre 10. Dérivation 551

I Dérivée 552
II Théorèmes de Rolle et des accroissements finis 560
III Fonctions continument dérivables 571
IV Extension aux fonctions à valeurs complexes 578
Démonstrations et solutions des exercices du cours 583
Exercices 599

Chapitre 11. Intégration 611

I Intégrale des fonctions en escalier 613
II Intégrale des fonctions continues par morceaux 617
III Inégalités 622
IV Extension aux fonctions à valeurs complexes 624
V Sommes de Riemann 625
Démonstrations et solutions des exercices du cours 627
Exercices 636

Chapitre 12. Calcul intégral 643

I Notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 644
II Intégration et dérivation 647
III Calcul d'intégrales 650
IV Formules de Taylor 657
V Application aux méthodes numériques 660
Démonstrations et solutions des exercices du cours 664
Exercices 682

Chapitre 13. Analyse asymptotique 691

I Fonctions dominées, fonctions négligeables 692
II Fonctions équivalentes 696
III Développements limités : généralités 706
IV Opérations sur les développements limités 718
V Applications des développements limités 732
VI Développements asymptotiques 737
Démonstrations et solutions des exercices du cours 740
Exercices 764

Chapitre 14. Séries 777

I Séries numériques 778
II Séries à termes réels positifs 783
III Séries absolument convergentes 790
IV Représentation décimale d'un réel 792
Démonstrations et solutions des exercices du cours 796
Exercices 807

Partie IV. Algèbre

Chapitre 15. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ 823

I Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ 824
II PGCD, PPCM 826
III Nombres premiers 837
IV Congruences 842
Démonstrations et solutions des exercices du cours 845
Exercices 855

Chapitre 16. Structures algébriques usuelles 863

I Lois de composition interne 864
II Groupes 869

III Anneaux 871
IV Espaces vectoriels 876
V Exemple : une construction de $\mathbb{C}$ 876
Démonstrations et solutions des exercices du cours 879

Chapitre 17. Polynômes 885

I Anneau des polynômes à une indéterminée 886
II Divisibilité et division euclidienne 894
III Fonctions polynomiales et racines 896
IV Dérivation 906
V Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ 910
VI Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ 912
VII Une preuve du théorème de d'Alembert 922
Démonstrations et solutions des exercices du cours 924
Exercices 943

Chapitre 18. Fractions rationnelles 955

I Corps des fractions rationnelles 956
II Décomposition en éléments simples 962
III Primitives d'une fonction rationnelle 971
Démonstrations et solutions des exercices du cours 974
Exercices 983

Chapitre 19. Espaces vectoriels 997

I Espaces vectoriels 999
II Sous-espaces vectoriels 1001
III Applications linéaires 1007
IV Sous-espaces affines d'un espace vectoriel 1012
V Retour sur les sous-espaces engendrés 1016
Démonstrations et solutions des exercices du cours 1019
Exercices 1029

Chapitre 20. Décompositions en algèbre linéaire 1035

I Familles et parties génératrices 1037
II Familles et parties libres 1040
III Bases d'un espace vectoriel 1047
IV Sommes de sous-espaces vectoriels 1052
V Formes linéaires et hyperplans 1064
Démonstrations et solutions des exercices du cours 1067
Exercices 1083

Chapitre 21. Dimension finie 1089

I Dimension d'un espace vectoriel . . . 1090
II Relations entre les dimensions . . . 1097
III Applications linéaires et dimension finie . . . 1102
IV Formes linéaires et hyperplans . . . 1106
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . . 1110
Exercices . . . 1127

Chapitre 22. Matrices 1133

I Calcul matriciel . . . 1134
II Représentations matricielles . . . 1145
III Écriture par blocs . . . 1156
IV Rang d'une matrice . . . 1159
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . . 1162
Exercices . . . 1178

Chapitre 23. Opérations élémentaires, Systèmes linéaires 1195

I Opérations élémentaires . . . 1196
II Systèmes linéaires . . . 1201
III Systèmes de Cramer . . . 1205
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . . 1209
Exercices . . . 1215

Chapitre 24. Déterminants 1225

I Groupe symétrique . . . 1226
II Formes p–linéaires alternées . . . 1232
III Déterminant d'une famille de vecteurs . . . 1237
IV Déterminant d'un endomorphisme . . . 1241
V Déterminant d'une matrice carrée . . . 1242
VI Calcul des déterminants . . . 1246
VII Comatrice . . . 1251
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . . 1252
Exercices . . . 1269

Chapitre 25. Espaces euclidiens 1285

I Produit scalaire . . . 1286
II Orthogonalité . . . 1293
III Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie 1298
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . . 1303
Exercices . . . 1312

Chapitre 26. Isométries et matrices orthogonales 1317

I Isométries vectorielles 1318
II Matrices orthogonales 1320
III Isométries vectorielles en dimension 2 1326
Démonstrations et solutions des exercices du cours 1330
Exercices 1335

Chapitre 27. Géométrie affine et euclidienne 1341

I Sous–espaces affines 1343
II Parallélisme et intersection 1351
III Géométrie euclidienne 1354
Démonstrations et solutions des exercices du cours 1359

Partie V. Probabilités

Chapitre 28. Dénombrement 1367

I Ensembles finis 1368
II Dénombrement 1374
Démonstrations et solutions des exercices du cours 1383
Exercices 1393

Chapitre 29. Probabilités sur un univers fini 1403

I Univers finis 1404
II Espaces probabilisés 1407
III Probabilités conditionnelles 1413
IV Indépendance 1421
Démonstrations et solutions des exercices du cours 1427
Exercices 1440

Chapitre 30. Variables aléatoires sur un univers fini 1455

I Une application liée à une expérience aléatoire : la variable aléatoire 1456
II Couples de variables aléatoires 1467
III Indépendance de variables aléatoires 1474
IV Espérance d'une variable aléatoire 1480
V Variance 1486
VI Covariance 1491
Démonstrations et solutions des exercices du cours 1496
Exercices 1522

Chapitre 0 : Pour commencer

I Assertions, ensembles et prédicats 3

1 Assertions 4

2 Ensembles 4

3 Prédicats 5

4 Connecteurs élémentaires « NON », « OU », « ET » 5

II Quantificateurs 7

1 Quantificateur universel et existentiel 7

2 Négation et quantificateurs 10

3 Succession de quantificateurs 11

4 De la bonne utilisation des symboles 13

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 14

Pour commencer 0

L'activité mathématique se développe suivant trois axes principaux :

- la *construction* d'objets mathématiques, qui peuvent être des nombres, des figures géométriques, des fonctions, ..., ainsi que la caractérisation à l'aide de *définitions* de certains d'entre eux ; ces objets servant souvent de modèles pour étudier les phénomènes physiques, chimiques, biologiques, etc ;
- la *recherche de propriétés* que peuvent posséder ces objets, ce qui amène à énoncer des **conjectures** c'est-à-dire des propriétés que l'on pense vraies car on a pu les vérifier sur plusieurs cas particuliers, par observation de dessins ou encore par utilisation de moyens informatiques ;
- la *démonstration* de certaines propriétés énoncées précédemment ; une fois démontrées, ces propriétés prennent le nom de théorèmes, propositions, lemmes, corollaires, etc.

Dans ce livre, pour distinguer les différents résultats que nous allons démontrer, nous leur donnons les noms de :

- **proposition** pour la plupart des résultats,
- **théorème** pour les résultats les plus fondamentaux,
- **corollaire** pour les conséquences immédiates de résultats précédents,
- **lemme** pour certains résultats préliminaires, utiles pour la suite, mais dont l'intérêt intrinsèque est assez limité.

I Assertions, ensembles et prédicats

Vous avez certainement déjà rencontré des affirmations telles que :

$\boxed{1}$ « 7 est un entier pair » ;

$\boxed{2}$ « $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$ » ;

$\boxed{3}$ « f est une fonction affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ » ;

$\boxed{4}$ « toute fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue » ;

$\boxed{5}$ « toute fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dérivable » ;

$\boxed{6}$ « on a $(a+b)^2 = a^2+b^2$ » ;

$\boxed{7}$ « on a $a^2-b^2 = (a+b)\,(a-b)$ » ;

$\boxed{8}$ « le nombre x est un carré » ;

$\boxed{9}$ « un triangle est rectangle si, et seulement si, le carré de l'un des côtés est égal à la somme des carrés des deux autres côtés ».

Parmi les affirmations précédentes, vous pouvez justifier, ou vous savez :

- que certaines, comme $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, et $\boxed{9}$, sont vraies ;
- que d'autres, comme $\boxed{1}$ et $\boxed{5}$, sont fausses.

Mais il en existe plusieurs qui dépendent de variables plus ou moins explicitées et qui peuvent être vraies dans certains cas et fausses dans d'autres.

- L'affirmation $\boxed{3}$ est vraie lorsque f est la fonction $x \mapsto 2x+1$, mais elle est fausse lorsque f est la fonction $x \mapsto x^2$.
- L'affirmation $\boxed{6}$ est vraie pour quelques (rares) valeurs de a et b, mais elle est fausse dans une grande majorité de cas.
- L'affirmation $\boxed{7}$ est vraie lorsque a et b sont des complexes quelconques, mais elle n'est pas toujours vraie si a et b désignent des matrices 2×2.
- L'affirmation $\boxed{8}$ dépend évidemment de x, mais elle dépend aussi de la nature des valeurs que peut prendre cette variable x :
  * si l'on travaille avec des entiers naturels, elle n'est est vraie que pour certaines valeurs de x : lorsque x est « un carré parfait » ;
  * si l'on travaille avec des nombres réels, elle est vraie lorsque x est un nombre positif ;
  * si l'on travaille avec des nombres complexes, elle est vraie pour tout x.

Par suite, lorsque les affirmations dépendent de variables, il est indispensable de préciser dans quels *ensembles* on prendra ces variables.

1 Assertions

La notion d'assertion sera considérée comme une notion première, que nous ne définirons pas rigoureusement : il faut bien partir de quelque chose !

- Intuitivement, une **assertion** est une phrase mathématique, sans variable, à laquelle on peut donner un sens.
- Dans le cadre de notre étude, on admet qu'une telle assertion est soit **vraie** soit **fausse**, et qu'elle ne peut être simultanément vraie et fausse : c'est ce que l'on appelle le **principe du tiers exclu**.

Exemples

1. « 2 est un entier impair » est une assertion fausse.
2. « $(1000+1)^2 = 1000^2 + 2000 + 1$ » est une assertion vraie.
3. « $1 = 2+$ » n'est pas une assertion ; d'ailleurs, sur une telle entrée, l'analyseur syntaxique de tout langage informatique, voire celui de votre calculatrice, retournerait alors un message de type « `syntax error` ».

Conventions Si P est une assertion :

- on écrit la plupart du temps « on a P » ou « ... donc P » au lieu de « P est vraie » ou « donc P est vraie » ;
- de même on écrit « supposons P » au lieu de « supposons P vraie ».

2 Ensembles

La théorie des ensembles a vu le jour dans le dernier quart du XIX^e siècle. Il n'est pas question dans cette section d'en faire une étude axiomatique abstraite, mais plutôt d'en donner le vocabulaire et les règles d'utilisation. Les notions d'**ensemble** et d'**élément** sont ici considérées comme des notions premières ; un ensemble correspond intuitivement à une « collection d'objets » qui sont les « éléments » de cet ensemble.

Notations

- Lorsque a est un élément et E un ensemble :
  - ∗ l'assertion $a \in E$, qui se lit « a appartient à E » ou « E contient a », est vraie si a est élément de E, et elle est fausse dans le cas contraire ;
  - ∗ lorsque a n'est pas élément de E, on écrit $a \notin E$.
- Les notions d'*ensemble* et d'*élément* sont relatives puisque nous verrons dans la suite qu'un ensemble peut être élément d'un autre ensemble (*cf.* définition 7 de la page 318).
- L'usage veut que, lorsque l'on choisit les notations, on désigne habituellement les éléments par des lettres minuscules et les ensembles par des lettres majuscules : on écrira donc plutôt $a \in E$ pour signifier que « l'élément a appartient à l'ensemble E » mais, comme toujours, il y a des exceptions (comme par exemple pour les éléments de $\mathcal{P}(E)$ que nous verrons page 318).

Description d'un ensemble Lorsque p est un entier naturel non nul et que l'on dispose de p éléments distincts notés a_1, ..., a_p, alors on admet qu'il existe un unique ensemble E contenant ces p éléments et aucun autre, ensemble que l'on note alors $E = \{a_1, \ldots, a_p\}$.

Exemples

- $E = \{1, 3, 5, 7\}$ est l'ensemble contenant les quatre premiers entiers impairs.
- On peut parfois être amené à utiliser la notation $\{a_1, \ldots, a_p\}$ avec des éléments pas tous distincts : par exemple, si $a_1 = a_2$, alors on a $\{a_1, a_2\} = \{a_1\}$.

3 Prédicats

On appelle **prédicat** toute phrase mathématique faisant intervenir (au moins) une variable et telle que, dès que l'on attribue une valeur à chaque variable y figurant, on obtienne une assertion qui est donc soit vraie soit fausse.

Exemples

1. « $x^2 - 1 = 0$ » est un prédicat qui est vrai si l'on donne au réel x les valeurs ± 1, et qui est faux dans tous les autres cas.
2. « $x^2 - 1 \geqslant 0$ » est un prédicat dont la variable x peut appartenir à $\mathbb{R}$ mais pas à $\mathbb{C}$ puisque l'on n'utilise pas d'inégalité sur $\mathbb{C}$.
3. « $x^2 + x + 1 + y^2 = 0$ » est un prédicat à deux variables, chacune d'entre elles pouvant appartenir à $\mathbb{C}$.

4 Connecteurs élémentaires « NON », « OU », « ET »

En Mathématiques, il est utile de nier certaines relations ou d'en relier d'autres par « et », « ou » voire « si ..., alors ». Toutefois dans le langage courant ces mots de liaison, ces **connecteurs**, n'ont pas une signification unique :

- Le « *ou* » peut être utilisé avec des sens différents, comme par exemple :
  - *ou* exclusif — ex : fromage *ou* dessert,
  - *ou* mathématique — ex : s'il pleut *ou* s'il fait du vent, je ne sors pas,
  - *ou* conditionnel — ex : mange ta soupe *ou* tu seras puni(e).
- De même le « *et* » peut avoir le sens temporel de « puis », lorsque l'on dit « je prends un livre sur l'étagère et je le lis ».

Une telle multiplicité de significations est évidemment impensable lorsque l'on fait des mathématiques, ce qui justifie les définitions suivantes qui ne font que codifier une partie du langage courant le plus usuel.

Définitions

Définition 1

- Si P est une assertion alors NON P, appelée **négation** de P, est une assertion qui est vraie lorsque P est fausse et uniquement dans ce cas.
- si P et Q sont deux assertions alors P OU Q est une assertion qui est vraie lorsqu'au moins l'une des deux est vraie.
- si P et Q sont deux assertions alors P ET Q est une assertion qui est vraie lorsque les deux assertions sont vraies et uniquement dans ce cas.

Remarque Dans le texte de ce chapitre nous noterons ces connecteurs « NON », « OU », « ET », pour les distinguer de ceux du langage courant, mais rapidement ensuite, nous utiliserons les graphismes classiques « non », « ou », « et ».

Exemples

1. Si a est un élément et si E est un ensemble, alors l'assertion « NON $(a \in E)$ » se note aussi « $a \notin E$ » .
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, l'assertion « NON $(x = 0)$ » se note aussi « $x \neq 0$ ».
3. Si x est un nombre réel quelconque, l'assertion « $x^2 - 1 = 0$ » et l'assertion « $(x = 1)$ OU $(x = -1)$ » sont simultanément vraies ou simultanément fausses.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'assertion « $(x-1)^2+y^2 = 0$ » et l'assertion « $(x = 1)$ ET $(y = 0)$ » sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

   Il n'en est évidemment pas de même si $x \in \mathbb{C}$ ou $y \in \mathbb{C}$, puisque, par exemple, si $x = 0$ et $y = i$ la première assertion est vraie mais pas la seconde.
5. Pour $x \in \mathbb{R}$, l'assertion « $-1 \leqslant x \leqslant +1$ » devrait se noter :
   $$(-1 \leqslant x) \text{ ET } (x \leqslant +1).$$
   Bien que tout humain comprenne la première forme, c'est sous la seconde qu'il faut l'écrire dans n'importe quel langage de programmation.
6. Si P est une assertion alors :
   - P ET (NON P) est fausse, c'est le **principe du tiers exclu**,
   - P OU (NON P) est vraie, puisque toute assertion est vraie ou fausse.

Rappelons qu'en Mathématiques, ce n'est pas parce que l'on a écrit une assertion qu'elle est vraie. Il arrive donc souvent d'avoir à nier une assertion, et vous avez certainement déjà dû faire une démonstration par l'absurde où, pour démontrer une propriété P, vous avez supposé (NON P) vraie.

Règles de négation

Exemple Si x est un réel, on visualise immédiatement sur l'axe réel que :

- la négation de « $x \geqslant -1$ » est « $x < -1$ » ;
- la négation « $x \leqslant 1$ » est « $x > 1$ » ;
- l'assertion « $(x \geqslant -1)$ ET $(x \leqslant 1)$ » et l'assertion « $(x < -1)$ OU $(x > 1)$ » sont, chacune, la négation de l'autre.

Conformément à l'usage courant et aux exemples précédents, on utilise les règles suivantes pour nier une assertion de type P ET Q ou de type P OU Q.

Règles de négation du « ET » et du « OU »

Si P et Q sont deux assertions, alors :

- l'assertion NON (P ET Q) s'écrit aussi (NON P) OU (NON Q) ;
- l'assertion NON (P OU Q) s'écrit aussi (NON P) ET (NON Q).

Remarque Il est indispensable de savoir utiliser ces règles automatiquement, et sans hésiter, pour nier une assertion des types précédents.

p.14

Exercice 1 Soit A, B et C trois points du plan formant un triangle $\mathcal{T}$.

1. Écrire une assertion portant sur AB, BC et CA, et exprimant que $\mathcal{T}$ est un triangle équilatéral.
2. En déduire une assertion exprimant que $\mathcal{T}$ n'est pas équilatéral.
3. Comment exprimer que $\mathcal{T}$ n'est pas isocèle ?

II Quantificateurs

1 Quantificateur universel et existentiel

Soit $A(x)$ un prédicat à une variable x défini sur E, c'est-à-dire tel que pour tout élément $x_0 \in E$, l'écriture $A(x_0)$ soit une assertion. On peut alors construire :

- l'assertion : $\forall x \in E \quad A(x)$
  - qui se lit « pour tout x de E, on a $A(x)$ » ,
  - qui, par définition, est vraie lorsque l'assertion $A(x_0)$ est vraie pour tout élément x_0 de l'ensemble E ;

  le symbole « $\forall$ » est appelé **quantificateur universel** ;
- l'assertion : $\exists x \in E \quad A(x)$
  - qui se lit « il existe un x de E tel que $A(x)$ »,
  - qui, par définition, est vraie lorsqu'il existe (au moins) un élément x_0 de l'ensemble E tel que l'assertion $A(x_0)$ soit vraie ;

  le symbole « $\exists$ » est appelé **quantificateur existentiel**.

Exemples

1. L'assertion « $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 \geqslant 0$ » est vraie. En effet pour tout nombre réel x_0 choisi, les règles de calcul sur les nombres réels nous disent que x_0^2+1 est supérieur (ou égal) à 1, et donc positif.
2. L'assertion « $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 \geqslant 0$ » est fausse puisque, si l'on donne à x la valeur $x_0 = 0$, alors on a $x_0^2 - 1 < 0$.
3. L'assertion « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 \geqslant 0$ » est vraie, puisque le nombre réel $x_0 = 1$ vérifie bien $x_0^2 - 1 \geqslant 0$.

p.14 **Exercice 2** Que pensez-vous de « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2+1=0$ » ?

p.14 **Exercice 3** Que pensez-vous de « $\exists x \in \mathbb{C} \quad x^2+1=0$ » ?

Remarques

- Malgré les apparences, « $\forall x \in E \quad A(x)$ » ne dépend d'aucun x !

  La lettre x figurant dans cette assertion a le statut de **variable muette**. En effet cette assertion peut aussi être écrite : « $\forall y \in E \quad A(y)$ », ou encore « $\forall z \in E \quad A(z)$ », sans en modifier le sens.

- Il en est de même de l'assertion « $\exists x \in E \quad A(x)$ » : elle affirme qu'il existe (au moins) un élément x de E tel que $A(x)$ soit vrai, mais n'en définit aucun en particulier.

Exemples Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- L'assertion « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant 0$ », qui pourrait tout aussi bien s'écrire « $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) \geqslant 0$ », traduit « la fonction f est positive » ;
- L'assertion « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x)=0$ » se traduit par « la fonction f s'annule ».

Dans aucune de ces phrases en français, il n'y a la moindre trace du moindre x !

Point méthode (quand on a une conclusion du type « $\forall x \in E \quad A(x)$ »)

Pour démontrer une assertion de ce type, on commence la plupart du temps par fixer un élément quelconque x de E, avec lequel on doit alors travailler pour démontrer que l'assertion $A(x)$ est vraie. Une telle démonstration doit donc commencer par *« Soit x un élément de E »* ou encore *« Soit $x \in E$ »*.

Point méthode (quand on a une conclusion du type « $\exists x \in E \quad A(x)$ »)

Pour démontrer une assertion de ce type, la première méthode à laquelle penser est de construire un élément x de E tel que $A(x)$ soit vraie.

Exemples Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=x^2+x+1$.

- Démonstration de l'assertion $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)>0$.

  Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :
  $$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4},$$
  et donc $f(x) \geqslant \frac{3}{4}>0$. On a ainsi prouvé $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)>0$.

- Démonstration de l'assertion $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x)>2$.

  En prenant $x=1$, on a $f(x)=3$. Par suite, on a prouvé $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x)>2$.

Point méthode (quand on a une hypothèse du type « $\forall x \in E \quad A(x)$ »)

Si l'on sait que « $\forall x \in E \quad A(x)$ » est vraie, alors on peut évidemment utiliser $A(x)$ avec n'importe quel élément $x \in E$ mais, la plupart du temps, il suffit de choisir un « bon élément », un « élément judicieux », dépendant du but que l'on veut atteindre.

Point méthode (quand on a une hypothèse du type « $\exists x \in E \quad A(x)$ »)

Si l'on sait que « $\exists x \in E \quad A(x)$ » est vraie, alors on peut prendre un élément $x \in E$ tel que $A(x)$ soit vrai, mais il est indispensable d'introduire un tel élément par une phrase du type *« Prenons $x \in E$ tel que $A(x)$ »*; il faut alors faire avec cet élément qui nous est donné, offert, et l'on ne peut pas, sans justification supplémentaire, lui attribuer d'autres propriétés.

Exemples Étant donné deux réels a et b, on considère ici la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout x réel, par $f(x) = a\,x^2 + b$.

- Montrons que si l'on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$, alors on a $a = b = 0$.

  Supposons donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad a\,x^2 + b = 0$.

  * En utilisant cette hypothèse avec $x = 0$, on obtient $b = 0$.
  * Puis, en utilisant alors l'hypothèse avec $x = 1$, on obtient $a = 0$.

  On en déduit $a = b = 0$, ce qui termine la démonstration.

  Remarque Parmi l'infinité des valeurs possibles pour x, on n'en a utilisé que deux ; mais cela a suffi pour établir ce que l'on voulait !

- On suppose $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Montrons que si l'on a $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$, alors les réels a et b vérifient $a\,b < 0$.

  Par hypothèse, on peut trouver un réel x tel que $a\,x^2 + b = 0$. Prenons un tel x.

  * Comme $b \neq 0$ on a $x \neq 0$ et donc $x^2 > 0$.
  * On a alors $a\,b = a\,(-a\,x^2) = -a^2\,x^2$.

  On en déduit $a\,b < 0$, ce qui termine la démonstration.

  Remarque
  Le nombre réel x fourni par l'hypothèse « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$ » étant, *a priori*, quelconque, nous avons dû justifier $x \neq 0$ pour pouvoir utiliser la relation $x^2 > 0$.

p.14 **Exercice 4** Soit a et b deux entiers naturels. On suppose :

$$(\exists x \in \mathbb{N} \quad a = b\,x) \quad \text{et} \quad (\exists x \in \mathbb{N} \quad b = a\,x). \qquad (*)$$

Montrer que $a = b$.

Remarque L'hypothèse $(*)$ ci-dessus nous dit qu'il existe un réel x tel que $a = b\,x$ et qu'il existe un réel x tel que $b = a\,x$. Rien ne dit qu'il s'agit du même réel. La variable x figurant dans $(*)$ est muette, et $(*)$ aurait pu aussi s'écrire :

$$(\exists x_1 \in \mathbb{N} \quad a = b\,x_1) \quad \text{et} \quad (\exists x_2 \in \mathbb{N} \quad b = a\,x_2).$$

On ne peut donc pas commencer la résolution de l'exercice précédent en disant : « Prenons un réel x tel que $a = b\,x$ et $b = a\,x$ ».

2 Négation et quantificateurs

Exemples

1. L'assertion « $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 = 0$ » peut se traduire en français par la phrase : « pour tout réel x, on a $x^2 - 1 = 0$ ». Elle est évidemment fausse.

   Sa négation, « on peut trouver un réel x tel que $x^2 - 1 \neq 0$ », qui est donc vraie, s'écrit mathématiquement « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 \neq 0$ » .
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   - Pour écrire que f est la fonction nulle, c'est-à-dire que toutes les valeurs qu'elle prend sont nulles, on écrit « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$ ».
   - La négation de cette affirmation est « la fonction f prend des valeurs non nulles », ce qui donne l'assertion « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0$ ».
   - Attention de ne pas confondre cette assertion avec « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0$ »
     * qui exprime que f ne s'annule pas,
     * dont la négation (f s'annule) est « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$ ».

Conformément à l'usage courant et aux exemples précédents, on utilise les règles suivantes pour nier une assertion commençant par un quantificateur.

Règles de négation des quantificateurs

Soit E un ensemble et $A(x)$ un prédicat de la variable x définie sur E.

- La négation de « $\forall x \in E \ A(x)$ » est « $\exists x \in E$ NON $A(x)$ ».
- La négation de « $\exists x \in E \ A(x)$ » est « $\forall x \in E$ NON $A(x)$ ».

Remarque Il est indispensable de savoir utiliser ces règles automatiquement et sans hésiter, pour nier une assertion des types précédents.

p.14 **Exercice 5** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Comment, à l'aide de $f(x)$, écrire que f est positive ?
2. Écrire la négation de cette assertion.
3. Que pensez-vous de « $\forall x \in \mathbb{R} \quad \big(f(x) \geqslant 0 \text{ ou } f(x) \leqslant 0\big)$ » ? (i)
4. Que pensez-vous de « $(\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant 0)$ » ? (ii)

3 Succession de quantificateurs

Dans ce qui précède nous n'avons utilisé que des prédicats à une variable, mais en général les choses sont un peu plus compliquées. Traitons un exemple.

Exemple Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Soit a un réel donné.
  - ∗ Pour exprimer « f présente un minimum en a », on écrit :
    $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant f(a).$$
  - ∗ Si f ne présente pas de minimum en a, on le traduit avec la négation de l'assertion précédente, à savoir « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) < f(a)$ ».
- Si l'on veut exprimer « f présente un minimum », c'est-à-dire « il existe (au moins) une valeur de a telle que $f(a)$ soit minimum », on écrit donc :
  $$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant f(a).$$
- Pour exprimer « f ne présente aucun minimum », on peut dire en français « il n'existe aucun point où f présente un minimum » ou encore « en a, réel quelconque, f ne peut pas présenter de minimum », ce qui se traduit par :
  $$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) < f(a).$$

En fait, l'exemple précédent est construit à partir de « $f(x) \geqslant f(a)$ », qui est un prédicat des deux variables x et a puisque f est fixée.

- L'écriture « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant f(a)$ », où l'on a **quantifié** x, (*i.e.* on a fait précéder x d'un quantificateur), nous donne un prédicat de la seule variable a, exprimant que « f présente un minimum en a ».
- L'écriture « $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant f(a)$ » utilise une succession de quantificateurs, ce qui a rendu muettes les deux variables x et a ; effectivement, cela exprime seulement « f présente un minimum », qui ne dépend ni de a, ni de x.

Règle

Si, dans un prédicat à plusieurs variables, on en quantifie une, alors cette variable devient muette, et ce qui reste ne dépend plus de cette variable.

Ce que l'on a vu dans l'exemple précédent se généralise aussi à la négation d'une assertion commençant par une suite de quantificateurs, en appliquant successivement à chaque quantificateur (de gauche à droite) les règles de négation des assertions commençant par un seul quantificateur.

Règles générales de négation des quantificateurs

Pour nier une assertion commençant par une suite de quantificateurs :

- on remplace tout « $\forall x \in E$ » par « $\exists x \in E$ » et l'on nie ce qui suit ;
- on remplace tout « $\exists x \in E$ » par « $\forall x \in E$ » et l'on nie ce qui suit.

Point méthode

Il est indispensable de savoir utiliser ces règles automatiquement et sans hésiter, pour nier une assertion des types précédents.

Exemple L'assertion « tout entier naturel est le carré d'un entier naturel » s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad n = p^2.$$

- Sa négation est donc : $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad n \neq p^2$.
- Pour démontrer que l'affirmation initiale est fausse, on peut par exemple dire que 2 n'est le carré d'aucun entier, ce qui est facile à justifier.
- Que vient-on de faire dans le point précédent ? S'agit-il d'une démonstration ou d'un contre-exemple ? En fait c'est une question de point de vue et d'intention initiale, plus que de raisonnement.
  * Si, au départ, on a l'idée de prouver que l'assertion donnée est vraie, alors l'entier exhibé est un contre-exemple prouvant que cette assertion est fausse.
  * En revanche, si au départ on a l'idée de prouver que l'assertion donnée est fausse, alors l'entier exhibé prouve que sa négation est vraie.

p.15 **Exercice 6** Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et le justifier.

(*i*) $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad x \leqslant y$

(*ii*) $\exists y \in E \quad \forall x \in E \quad x \leqslant y$

(*iii*) $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad x < y$

(*iv*) $\forall y \in E \quad \forall x \in E \quad x \leqslant y$

p.15 **Exercice 7** Reprendre l'exercice précédent mais avec $E = \mathbb{R}$.

p.15 **Exercice 8** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Écrire une assertion exprimant que f est majorée par un réel M donné.
2. Écrire une assertion exprimant que f est majorée.
3. Écrire une assertion exprimant que f n'est pas majorée.

Autre exemple d'utilisation d'un prédicat à deux variables

Pour toute valeur du réel m, alors appelé paramètre, considérons l'équation, de la variable réelle x, notée (E_m) : $x^2 - m = 0$.

Cas particuliers. Il est alors évident que :

- (E_1) possède une solution, et donc « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 = 0$ » est vrai,
- (E_{-1}) n'a pas de solution, et donc « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 = 0$ » est faux.

Plus généralement, pour tout m réel donné on peut essayer de déterminer le nombre de solutions de (E_m), voire leurs valeurs : cela s'appelle résoudre et discuter l'équation (E_m).

- Ainsi « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - m = 0$ » est un prédicat, dépendant de la seule variable m, qui signifie que l'équation (E_m) possède au moins une solution.
- Il est ici assez facile de justifier que :
  - si $m > 0$ l'équation (E_m) possède deux solutions $\pm\sqrt{m}$,
  - si $m = 0$ l'équation (E_m) possède une seule solution 0,
  - si $m < 0$ l'équation (E_m) ne possède aucune solution.
- Par suite l'assertion « $\forall m \in \mathbb{R}_+ \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - m = 0$ » est vraie.

  En revanche cette assertion, seule, donne comme unique information :

  « Pour tout $m \geqslant 0$ l'équation (E_m) possède (au moins) une solution ».

  Elle ne donne ni le nombre exact de solutions de l'équation E_m, ni évidemment leur expression.

p.15 **Exercice 9** Dans cet exercice, x et y désignent des variables réelles.

- Traduire en français le prédicat « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x + y^2 = 0$ » et dire pour quelles valeurs de sa variable il est vrai.
- Résumer le résultat obtenu sous forme d'une seule assertion quantifiée.

4 De la bonne utilisation des symboles

Comme on vient de voir, l'usage des symboles mathématiques, et en particulier des quantificateurs, obéit à des règles strictes.

- Ce sont des outils d'écriture très utiles lorsqu'on veut énoncer de manière précise et concise une propriété mathématique, et leur utilisation est même quasiment *indispensable pour obtenir automatiquement une négation correcte de la plupart des assertions non évidentes.*
- En revanche, il ne faut pas mélanger dans une même phrase les quantificateurs et le langage français : les symboles mathématiques ne sont pas des sténogrammes et ne doivent pas être utilisés comme abréviations. Des phrases telles que « la fonction $\in$ l'ensemble des fonctions paires » ou « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)$ existe » sont à proscrire et seront évidemment très mal accueillies par un correcteur !
- Toutefois il est toléré d'utiliser à l'intérieur d'une phrase de rédaction des incises telles que « $a \in E$ » voire « $E \subset F$ » et plus généralement toute assertion mathématique complète comme vous pouvez en voir dans ce livre.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

1. Le triangle $\mathcal{T}$ est équilatéral lorsque $AB = BC = CA$, mais une telle écriture, que l'on utilise couramment, n'est pas syntaxiquement correcte car l'égalité est binaire et ne peut donc relier que deux éléments.
   Pour avoir une assertion syntaxiquement correcte on peut écrire :
   $$(AB = AC) \quad \text{et} \quad (BA = BC).$$
2. Pour exprimer que $\mathcal{T}$ n'est pas équilatéral, on nie la relation précédente, soit :
   $$(AB \neq AC) \quad \text{ou} \quad (BA \neq BC).$$
3. Le triangle $\mathcal{T}$ est isocèle lorsqu'il a deux côtés égaux, ce qui s'écrit encore :
   $$(AB = AC) \quad \text{ou} \quad (BA = BC) \quad \text{ou} \quad (CA = CB).$$
   Pour exprimer que $\mathcal{T}$ n'est pas isocèle, on nie la relation précédente, ce qui donne :
   $$(AB \neq AC) \quad \text{et} \quad (BA \neq BC) \quad \text{et} \quad (CA \neq CB).$$

Exercice 2 Comme on sait que l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a aucune solution sur $\mathbb{R}$:
$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 = 0 \text{ est une assertion fausse.}$$

Exercice 3 Comme l'équation $x^2 + 1 = 0$ possède (au moins) une solution sur $\mathbb{C}$, le nombre complexe i par exemple, on en déduit que :
$$\exists x \in \mathbb{C} \quad x^2 + 1 = 0 \text{ est une assertion vraie.}$$

Dire que cette assertion est vraie signifie que l'équation $x^2+1 = 0$ possède (au moins) une solution sur $\mathbb{C}$ mais ne donne aucune autre information. Si l'on veut utiliser une solution de cette équation, il faudra l'introduire grâce à une phrase

- soit du type : « Soit x_0 une solution complexe de l'équation $x^2 + 1 = 0$ » ,
- soit du type : « Prenons x_0 un complexe vérifiant $x_0^2 + 1 = 0$ » .

Exercice 4

- L'assertion $\exists x \in \mathbb{N} \quad a = b\,x$ est vraie. Prenons donc un $x_1 \in \mathbb{N}$ tel que $a = b\,x_1$.
- On peut, de même, prendre un $x_2 \in \mathbb{N}$ tel que $b = a\,x_2$.

On en déduit immédiatement $a = a\,x_2\,x_1$.

- Si $a = 0$ alors la relation $b = a\,x_2$ donne $b = 0$, et donc $a = b$.
- Sinon, on peut alors simplifier $a = a\,x_2\,x_1$ par a, ce qui donne $1 = x_2\,x_1$. Comme x_1 et x_2 sont entiers naturels, on en déduit $x_1 = x_2 = 1$, et donc $a = b$.

Par suite on a $a = b$.

Exercice 5

1. Pour exprimer que f est positive, on écrit « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant 0$ ».
2. La négation de ce qui précède est donc « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) < 0$ ».
3. L'assertion (i) affirme que, pour tout nombre réel x, le nombre réel $f(x)$ est, soit positif, soit négatif, ce qui est vrai.
4. En revanche, l'assertion (ii) dit que l'on a, soit f positive, soit f négative. Sans autre information sur f, on ne peut pas affirmer que c'est vrai : il existe évidemment des fonctions pour lesquelles c'est faux, comme, par exemple, $f : x \mapsto x$ qui prend des valeurs strictement négatives et des valeurs strictement positives.

Exercice 6

- L'assertion (i) est vraie : en effet, pour chaque élément x choisi dans E, l'élément $y = x$ vérifie bien $x \leqslant y$.
- L'assertion (ii) est vraie : en effet, l'élément $y = 5$ est bien tel que, pour tout élément x de E, on ait $x \leqslant y$. Elle exprime que E est majoré.
- L'assertion (iii) est fausse : en effet, pour l'élément $x = 5$, on ne peut pas trouver d'élément y de E vérifiant $5 < y$.

  On pourrait aussi, en utilisant un raisonnement similaire à celui du point précédent, dire que sa négation « $\exists x \in E \quad \forall y \in E \quad x \geqslant y$ » est vraie.
- L'assertion (iv) est fausse : en effet, l'élément $y = 1$ de E ne vérifie évidemment pas $\forall x \in E \quad x \leqslant y$.

  On pourrait aussi dire que sa négation « $\exists y \in E \quad \exists x \in E \quad x > y$ » est vraie en justifiant à l'aide de $x = 2$ et $y = 1$.

Exercice 7

- L'assertion (i) reste vraie (même justification que pour l'exercice précédent).
- L'assertion (ii) est fausse car $\mathbb{R}$ n'est pas majoré.
- L'assertion (iii) est vraie car, si x est un nombre réel quelconque, alors le réel $y = x + 1$ vérifie $x < y$.
- L'assertion (iv) est fausse (même justification que pour l'exercice précédent).

Exercice 8

1. L'affirmation « f est majorée par M » se traduit par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant M.$$
2. La fonction f est majorée si l'on peut trouver un réel M qui la majore, ce qui s'écrit :
$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant M.$$
3. On en déduit automatiquement la négation :
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) > M,$$
qui traduit donc que f n'est pas majorée.

Exercice 9

- Dans « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x + y^2 = 0$ », la lettre x est quantifiée, elle est donc muette. Comme y n'est pas quantifiée, il s'agit d'un prédicat $P(y)$ de la variable y.

  Pour un y (paramètre) réel donné, $P(y)$ signifie que l'équation $x + y^2 = 0$ (de la variable x) possède (au moins) une solution ; comme c'est une équation du premier degré, il est évident que $P(y)$ est vrai. Ainsi, $P(y)$ est vrai pour tout y réel.
- D'après ce qui précède on sait que l'assertion :
$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad x + y^2 = 0$$
est vraie.

Partie I

Techniques de calcul

Chapitre 1 : Droite numérique, fonctions à valeurs réelles

I Ensemble des nombres réels **20**

1 La droite numérique 20

2 Relations de comparaison 22

3 Majorants, minorants 26

4 Plus grand, plus petit élément 26

5 Valeur absolue 27

II Fonctions réelles **29**

1 Domaine de définition, graphe 29

2 Domaine d'étude 30

3 Opérations sur les fonctions à valeurs réelles 35

4 Monotonie 36

5 Fonctions majorées, minorées, bornées 38

III Dérivabilité – Rappels de Terminale **40**

1 Dérivée en un point, fonction dérivée 40

2 Interprétations des dérivées 41

3 Opérations sur les fonctions dérivables 42

4 Variations d'une fonction sur un intervalle 44

5 Étude d'une fonction 46

6 Fonction réciproque 48

7 Dérivées successives 51

IV Fonctions trigonométriques **51**

1 Les fonctions sinus et cosinus 51

2 Paramétrage du cercle trigonométrique 54

3 La fonction tangente 57

4 Utilisation du cercle trigonométrique 59

5 Retour sur les formules d'addition 59

6 Équations trigonométriques 62

7 Inéquations trigonométriques 63

8 Le triangle rectangle 64

9 Formulaire muet 65

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . **66**

Exercices **85**

Droite numérique, fonctions à valeurs réelles

1

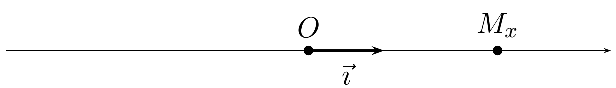
I Ensemble des nombres réels

1 La droite numérique

Durant les années antérieures, vous avez travaillé avec les **nombres réels** dont vous avez l'habitude d'utiliser les opérations d'*addition* $+$ et de *multiplication* $\times$, ainsi que celles qui s'en déduisent, la *soustraction* et la *division*, et dont nous supposerons ici connues les propriétés élémentaires.
Habituellement l'ensemble des nombre réels, noté $\mathbb{R}$, se représente géométriquement à l'aide d'un axe $\mathcal{D}$, appelé **droite numérique**, muni d'une origine O, et dirigé par un vecteur unitaire $\vec{\imath}$ non nul. Ainsi :

- pour tout point M de $\mathcal{D}$, il existe un unique réel x tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath}$;
- pour tout réel x il existe un unique point de $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath}$; dans toute la suite, ce point sera noté M_x.

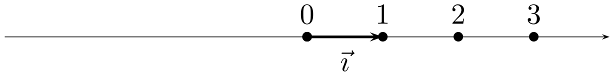
On dit alors que x est l'**abscisse** du point M_x, ou encore que M_x est le **point image** du réel x. Le point O est ainsi associé au réel 0.



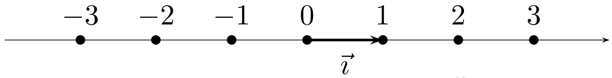
Ne pas hésiter à faire usage de cette représentation, souvent très utile !

Dans l'ensemble des nombres réels, on trouve :

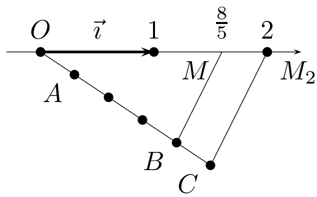
- $\mathbb{N}$: ensemble des **entiers naturels** : $0,\ 1,\ 2,\ \ldots$



- $\mathbb{Z}$: ensemble des **entiers relatifs** ; c'est l'ensemble des entiers naturels et de leurs opposés ;



- $\mathbb{Q}$: ensemble des **rationnels**, *i.e.* des quotients $\dfrac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$; de tels nombres peuvent être construits simplement sur la droite numérique à l'aide de droites parallèles ; par exemple, sur le dessin ci-contre où $OB = 4\,OA$ et $OC = 5\,OA$, les droites (BM) et (CM_2) étant parallèles, le théorème de Thalès permet de conclure que l'abscisse de M est $\frac{8}{5}$.



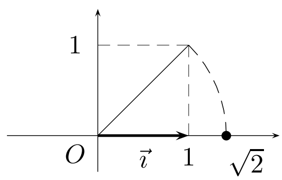
- $\mathbb{D}$: ensemble des **décimaux** ; il est contenu dans $\mathbb{Q}$; c'est l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Ces nombres, qui s'écrivent avec un nombre fini de décimales, permettent de faire facilement des calculs.

On a $0 \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, chacune des inclusions étant stricte.

- La somme et le produit de deux éléments de $\mathbb{N}$ sont éléments de $\mathbb{N}$.
- Pour chacun des ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$, la somme, la différence et le produit de deux éléments de cet ensemble lui appartiennent.
- Si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}^*$, alors le quotient a/b est élément de $\mathbb{Q}$.

Ces ensembles privés de 0 sont respectivement notés $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{D}^*$, $\mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$.

Si l'on essaie de représenter tous les points d'abscisse rationnelle, on a l'impression d'obtenir ainsi tous les points de la droite mais il en manque. Au chapitre 6, nous démontrerons que $\sqrt{2}$, le réel positif dont le carré vaut 2, et que l'on peut construire comme indiqué ci-contre, n'est pas un nombre rationnel.



Par suite, l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est stricte car l'ensemble des **réels** contient des nombres non rationnels appelés nombres **irrationnels**, tels que $\sqrt{2}$, π ....

p.66 **Exercice 1** *(Rationnels et irrationnels)*

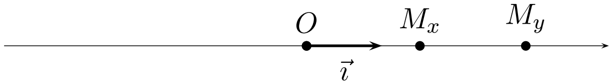
1. Montrer que la somme d'un irrationnel et d'un rationnel est un irrationnel.
2. Montrer que le produit d'un rationnel non nul par un irrationnel est irrationnel.
3. Que pensez-vous de la somme, du produit de deux irrationnels ?

2 Relations de comparaison

L'ensemble $\mathbb{R}$, et donc chacun des ensembles précédents, est muni des relations de comparaison $\leqslant$ et $<$. Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on dispose de :

- la relation $x \leqslant y$, qui se lit « x est inférieur (ou égal) à y » ou « x est plus petit que y » ; comme usuellement on dirige le vecteur $\vec{\imath}$ vers la droite, cette relation se traduit géométriquement par le fait que M_x est à gauche de M_y ; il est confondu avec M_y lorsque $x = y$;
- la relation $x < y$, qui se lit « x est strictement inférieur à y » ou « x est strictement plus petit que y » ; elle se traduit géométriquement par le fait que M_x est strictement à gauche de M_y.

Par suite on a $x < y$ si, et seulement si, $x \leqslant y$ et $x \neq y$.



L'interprétation graphique ci-dessus de la relation de comparaison $\leqslant$ en met en évidence certaines propriétés. Si x, y et z sont des réels quelconques alors :

- on a toujours $x \leqslant x$; *(réflexivité)*
- si l'on a $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors on a $x = y$; *(antisymétrie)*
- si l'on a $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors on a $x \leqslant z$; *(transitivité)*
- on a toujours $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$. *(ordre total)*

Ces quatre propriétés signifient que $\leqslant$ est une **relation d'ordre total**, ce que nous étudierons en détail au chapitre 7. Remarquons qu'il n'en est pas de même pour la relation $<$ puisque l'on n'a pas $x < x$.

- La relation $x \leqslant y$ peut aussi s'écrire $y \geqslant x$ qui se lit « y est supérieur (ou égal) à x » ou encore « y est plus grand que x ».
- La relation $x < y$ peut aussi s'écrire $y > x$ se lit « y est strictement supérieur à x » ou encore « y est strictement plus grand que x ».

Il y a une terminologie propre à la comparaison avec 0 :

- un réel x est **positif** (respectivement **strictement positif**) si $x \geqslant 0$ (respectivement $x > 0$) ;
- un réel x est **négatif** (respectivement **strictement négatif**) si $x \leqslant 0$ (respectivement $x < 0$).

Notations

- $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{Q}_+$ désignent respectivement les ensembles des réels positifs et des rationnels positifs.
- $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{Q}_-$ et $\mathbb{Z}_-$ désignent respectivement les ensembles des réels négatifs, des rationnels négatifs et des entiers négatifs.

- $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{Q}_+^*$ et $\mathbb{N}^*$ désignent respectivement les ensembles des réels strictement positifs, des rationnels strictement positifs et des entiers strictement positifs.
- $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{Q}_-^*$ et $\mathbb{Z}_-^*$ désignent respectivement les ensembles des réels strictement négatifs, des rationnels strictement négatifs et des entiers strictement négatifs.

Intervalles de $\mathbb{R}$

Soit a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. On note alors :

$$\begin{aligned}
&[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\} && [a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}\\
&[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\} &&]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}\\
&]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\} &&]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}\\
&]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} &&]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}
\end{aligned}$$

Ces ensembles, ainsi que $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$, sont appelés **intervalles** de $\mathbb{R}$.

Remarques

1. L'ensemble vide est un intervalle puisque, par exemple, $\varnothing =]0,0[$.
2. Si $a \leqslant b$, l'intervalle $[a,b]$ est appelé **segment** $[a,b]$.
3. Pour $a < b$:
   - l'intervalle $]a,b[$ est appelé **intervalle ouvert** d'extrémités a et b ;
   - les intervalles $[a,b[$ et $]a,b]$ sont qualifiés d'**intervalles semi-ouverts** ou **semi-fermés** ;
4. Les intervalles $]a,+\infty[$ et $]-\infty,b[$ sont qualifiés de **demi-droites ouvertes**. Les intervalles $[a,+\infty[$ et $]-\infty,b]$ sont qualifiés de **demi-droites fermées**.
5. Dans chacun des cas précédents, le réel a (resp. b) est appelé **extrémité inférieure** (resp. **extrémité supérieure**) de l'intervalle.

   Si I est la demi-droite $[a,+\infty[$ ou la demi-droite $]a,+\infty[$, alors $+\infty$ est l'extrémité supérieure de I.

   De même, $-\infty$ est l'extrémité inférieure de $]-\infty,b]$ et de $]-\infty,b[$.

   Si $I = \mathbb{R}$, alors ses extrémités sont $-\infty$ et $+\infty$.
6. Par définition, les **intervalles ouverts** de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de la forme $]a,+\infty[$, $]-\infty,a[$ et $]a,b[$, avec $a < b$, ainsi que $\mathbb{R}$ et l'ensemble vide.

   Les **intervalles fermés** sont les intervalles de la forme $[a,+\infty[$ et $]-\infty,a]$ avec $a \in \mathbb{R}$, les segments ainsi que $\mathbb{R}$ et l'ensemble vide.

7. L'**intérieur** d'un intervalle I est l'intervalle ouvert qui a les mêmes extrémités que I. Ainsi, pour $a \leqslant b$, l'intérieur des intervalles $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$ est l'intervalle $]a,b[$.

   Dans la suite de ce livre, on utilisera souvent l'expression : « soit I un intervalle d'intérieur non vide ». Cela signifie que les extrémités de I sont distinctes, et permet de dire que I contient deux points distincts ou encore que I contient une infinité d'éléments.

p.66 **Exercice 2** Représenter graphiquement le segment $[a,b]$, l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$, l'intervalle ouvert $]a,b[$ et la demi-droite fermée $[a,+\infty[$.

Intervalles d'entiers

Soit a et b deux entiers relatifs vérifiant $a \leqslant b$. On note alors :

$$[\![a,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\},$$

$$[\![a,+\infty[\![= \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant n\},$$

$$]\!]-\infty,a]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant a\}.$$

Remarque Pour a et b entiers relatifs, on a :

$$[\![a,b]\!] = [a,b] \cap \mathbb{Z}, \quad [\![a,+\infty[\![= [a,+\infty[\cap \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad]\!]-\infty,b]\!] =]-\infty,b] \cap \mathbb{Z}.$$

Compatibilité de la relation $\leqslant$ et des opérations

Dans cette section x, y, z et t désignent quatre réels quelconques.

On se convainc facilement, grâce à la représentation géométrique, de la validité des deux règles de compatibilité suivantes :

- si $x \leqslant y$, alors on a $x+z \leqslant y+z$;
- si $x \leqslant y$ et $z \geqslant 0$, alors on a $x\,z \leqslant y\,z$.

On en déduit immédiatement les résultats suivants (que vous avez déjà utilisés).

Proposition 1

Soit x, y, z et t quatre réels.

- Si $x \leqslant y$ et $z \leqslant t$, alors on a $x+z \leqslant y+t$.
- Si $0 \leqslant x \leqslant y$ et $0 \leqslant z \leqslant t$, alors on a $0 \leqslant x\,z \leqslant y\,t$.
- On a $x \leqslant y$ si, et seulement si, $-y \leqslant -x$.
- Si $x \leqslant y$ et $z \leqslant 0$ alors on a $x\,z \geqslant y\,z$.

Démonstration.

- Supposons $x \leqslant y$ et $z \leqslant t$. D'après la première règle de compatibilité, en ajoutant z à la première relation, on obtient $x+z \leqslant y+z$. En ajoutant y à la seconde, on obtient de même $y+z \leqslant y+t$. On en déduit le résultat par transitivité de la relation d'ordre.

- Démonstration analogue à la précédente : on prouve $0 \leqslant x\,z \leqslant y\,z$ et $0 \leqslant y\,z \leqslant y\,t$ en utilisant la seconde règle de compatibilité puisque $z \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.
- On passe de la première relation à la seconde en ajoutant $-x-y$ de chaque côté de l'inégalité $x \leqslant y$. Démonstration analogue pour la réciproque, en ajoutant $x+y$.
- Comme $z \leqslant 0$, le point précédent nous donne $-z \geqslant 0$. De $x \leqslant y$ on déduit alors $x\,(-z) \leqslant y\,(-z)$, et une nouvelle utilisation du point précédent nous permet de conclure. □

Remarque Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on a donc :
- si $(x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0)$ ou $(x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0)$ alors $x\,y \leqslant 0$;
- si $(x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0)$ ou $(x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0)$ alors $x\,y \geqslant 0$.

Attention La multiplication d'une inégalité par un nombre strictement négatif en change le sens.

Point méthode

Pour multiplier des inégalités, il est préférable de toujours se ramener à des inégalités entre nombres positifs.

p.66 **Exercice 3** En supposant $0 \leqslant a \leqslant b$ et $d \leqslant c \leqslant 0$, peut-on en déduire une inégalité entre $a\,c$ et $b\,d$, une inégalité entre $a\,d$ et $b\,c$?

p.66 **Exercice 4** En supposant $a < b$ et $c \geqslant 0$, peut-on en déduire $a\,c < b\,c$?

p.66 **Exercice 5** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels vérifiant $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$.

1. Montrer que, si $a_1 = a_n$, alors on a $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.
2. Montrer que, s'il existe $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $a_i < a_{i+1}$, alors on a $a_1 < a_n$.

Point méthode

Par suite, dans une succession d'inégalités :

1. si l'on suppose que l'inégalité résultante est une égalité, alors chacune des inégalités intermédiaires doit être une égalité ;
2. si l'une d'elles est stricte, alors l'inégalité résultante est stricte.

p.66 **Exercice 6** Soit a, b, c et d des réels vérifiant $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$.

1. Montrer que si $a+c = b+d$, alors on a $a = b$ et $c = d$.
2. Montrer que si $c < d$, alors on a $a+c < b+d$

3 Majorants, minorants

Définition 1

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et a un élément de $\mathbb{R}$.

- Le réel a est un **majorant** de X si $\forall x \in X \quad x \leqslant a$.
- Le réel a est un **minorant** de X si $\forall x \in X \quad x \geqslant a$.

On dit que la partie X est **majorée** (respectivement **minorée**) si elle possède (au moins) un majorant (respectivement un minorant).

p.67 **Exercice 7** Quels sont les majorants de $[0,1]$? de $[0,1[$?

Attention Si X est une partie donnée de $\mathbb{R}$, bien distinguer :

- le premier énoncé « X est majorée par a », traduit par « $\forall x \in X \quad x \leqslant a$ », qui est un prédicat en a,
- du second l'énoncé « X est majorée » qui, en ce qui le concerne, se traduit par « $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad x \leqslant a$ » où a est une variable muette.

p.67 **Exercice 8**

1. Écrire une assertion exprimant qu'une partie X de $\mathbb{R}$ n'est pas majorée.
2. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas majoré.

4 Plus grand, plus petit élément

Définition 2

Soit X une partie (non vide) de $\mathbb{R}$ et a *un élément de* X.

- a est **le plus grand élément**, ou **le maximum**, de X si $\forall x \in X \quad x \leqslant a$. Quand il existe, le plus grand élément de X se note $\max(X)$ ou $\max X$.
- a est **le plus petit élément**, ou **le minimum**, de X si $\forall x \in X \quad a \leqslant x$. Quand il existe, le plus petit élément de X se note $\min(X)$ ou $\min X$.

p.67 **Exercice 9** L'utilisation de l'article défini « le » dans la définition précédente exige une démonstration d'unicité. La faire en prenant a et b deux plus grands éléments de X, et en utilisant l'antisymétrie de la relation $\leqslant$.

Remarque Une partie X possède un maximum (resp. minimum) si, et seulement si, elle possède un majorant (resp. minorant) qui est élément de X.

p.67 **Exercice 10** Le segment $[0,1]$ a-t-il un maximum ? un minimum ?

p.67 **Exercice 11** Soit X une partie de $\mathbb{R}$.

1. Écrire une assertion exprimant que X possède un maximum.
2. En déduire une assertion exprimant que X ne possède pas de maximum.

p.67 **Exercice 12** L'intervalle $[0,1[$ possède-t-il un maximum ?

p.67 **Exercice 13** Vérifier que si X est une partie de $\mathbb{R}$ possédant un maximum, alors elle est majorée. Exhiber une partie majorée et ne possédant pas de maximum.

p.67 **Exercice 14** Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, montrer que l'ensemble $\{x, y\}$ possède un plus grand et un plus petit élément.

Remarque Les nombres réels $\max\{x,y\}$ et $\min\{x,y\}$ se notent aussi respectivement $\max(x,y)$ et $\min(x,y)$.

Exemple Le résultat de l'exercice précédent permet alors de prouver, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que toute partie à n éléments de $\mathbb{R}$ possède un maximum et un minimum.

5 Valeur absolue

Définition 3

On définit la **valeur absolue** d'un réel x par $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$

Remarques

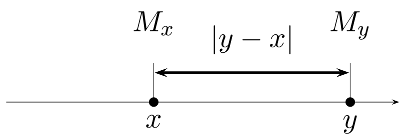
- Cette définition est cohérente car, si $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$, alors $x = -x = 0$.
- Comme $\leqslant$ est un ordre total, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x \geqslant 0$ ou $x \leqslant 0$; par suite, on a donc bien défini $|x|$ pour tout réel x.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| \geqslant 0$. De plus, $|x| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.
- Pour tout x réel, on a $|x| = \max(-x, x)$.
- La règle des signes donne $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |xy| = |x|\,|y|$.

Définition 4

La **distance entre deux réels** est la valeur absolue de leur différence.

Remarque

La définition de la distance entre deux réels est cohérente avec la représentation géométrique des nombres réels vue précédemment. En effet, étant donné deux réels x et y, on a $d(M_x, M_y) = |y-x|$.



Proposition 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+$. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, on a $|x-a| \leqslant h$ si, et seulement si, $a-h \leqslant x \leqslant a+h$.

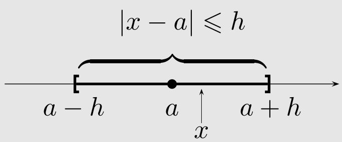
Démonstration.

- Commençons par la cas particulier $a=0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $|x| = \max(-x, x)$, on a $|x| \leqslant h$ si, et seulement si, on a $(-x \leqslant h$ et $x \leqslant h)$, c'est-à-dire $(-h \leqslant x$ et $x \leqslant h)$.
- On en déduit que $|x-a| \leqslant h$ est équivalente à $-h \leqslant x-a \leqslant h$, ou encore $a-h \leqslant x \leqslant a+h$.

□

Point méthode

La représentation géométrique de la proposition précédente (indispensable !)



permet de visualiser que $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \leqslant h\} = [a-h, a+h]$.

Proposition 3 (Inégalités triangulaires)

Si x et y sont deux réels quelconques, alors on a :

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \qquad \text{et} \qquad \big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|.$$

Principe de démonstration.

- Pour la première, partir de $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ et de $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$.
- Pour la seconde, commencer par écrire $x = (x-y)+y$ et appliquer le point précédent.

Démonstration page 68

Remarques

- Dans le chapitre sur les complexes, on comprendra mieux l'origine du terme « inégalités triangulaires ».
- Ces inégalités peuvent aussi s'écrire $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|$.

p.68

Exercice 15 Pour $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on note ici $I_a = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

On considère a et b deux réels vérifiant $a < b$ et l'on pose $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$.

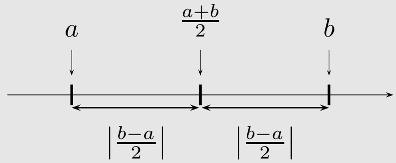
En vous inspirant d'un dessin, que pouvez-vous conjecturer de $I_a \cap I_b$? Le justifier.

p.68

Exercice 16

Soit a et b deux réels.

1. En utilisant le dessin ci-contre, donner des expressions de $\max(a, b)$ et de $\min(a, b)$ à l'aide de $\frac{a+b}{2}$ et de $\left|\frac{b-a}{2}\right|$.
2. Les justifier rigoureusement (donc sans utilisation de dessin).



II Fonctions réelles

1 Domaine de définition, graphe

Une fonction f d'une variable réelle à valeurs réelles permet, à tout élément x d'une partie non vide de $\mathbb{R}$, d'associer un unique nombre réel alors noté $f(x)$.

- L'ensemble des x pour lesquels $f(x)$ est défini s'appelle **domaine de définition** de f. Si l'on désigne par X ce domaine de définition, on a alors l'habitude de noter :

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad f : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

- Dans de nombreux exercices, on dispose d'une expression $f(x)$ et il faut commencer par déterminer un ensemble sur lequel la relation $y = f(x)$ définit une fonction.

- Si le couple (x, y) vérifie $y = f(x)$ on dit alors que y est **l'image de x par f** et que x est *un* **antécédent de y par f**.

- Le plan étant supposé rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x))\,;\ x \in X\}$ est appelé **représentation graphique** de f ou **graphe** de f. On dit encore que Γ_f est la **courbe d'équation** $y = f(x)$.

Exemples

1. La relation $y = \dfrac{1}{x}$ permet de définir une fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}\cdot \end{array}$

2. La relation $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ permet de définir $f: \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot \end{array}$

3. Une **fonction polynomiale** définie sur X est une fonction $f: X \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :
$$\forall x \in X \quad f(x) = a_0 + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n. \tag{$*$}$$

   Remarques

   - Si $a_n \neq 0$, une telle fonction ne peut s'annuler qu'au plus n fois sur X ; c'est un résultat que vous pourrez utiliser si nécessaire, même si nous ne le démontrerons que dans le chapitre 17 sur les polynômes.
   - Par suite, dès que la partie X contient une infinité de points :
     * si la fonction f ci-dessus est nulle alors, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $a_k = 0$;
     * il y a unicité de la famille $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ figurant dans la relation $(*)$.

4. Une **fonction rationnelle** définie sur X est une fonction $h: X \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe deux fonctions polynomiales f et g telles que :
$$\forall x \in X \quad g(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\cdot$$
C'est donc une fonction pour laquelle il existe $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $p \in \mathbb{N}$ et $(b_0, b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ avec $b_p \neq 0$ tels que :
$$\forall x \in X \quad b_0 + b_1\,x + \cdots + b_p\,x^p \neq 0 \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{a_0 + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n}{b_0 + b_1\,x + \cdots + b_p\,x^p}\cdot$$

p.68 **Exercice 17** Si $m \in \mathbb{R}$, déterminer le domaine de définition de $f_m : x \mapsto \dfrac{x+m}{1+m\,x}\cdot$

2 Domaine d'étude

Dans le secondaire, vous avez la plupart du temps représenté les graphes à l'aide de logiciels ou en utilisant votre calculatrice. Mais lorsque, pour une raison ou pour une autre, on ne dispose pas d'un tel outil, il est bon de pouvoir donner l'allure d'un graphe le plus rapidement possible. Les propriétés qui suivent permettent de réduire le domaine d'étude et donc le temps de travail.

Symétries – Parité, imparité

Proposition 4

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

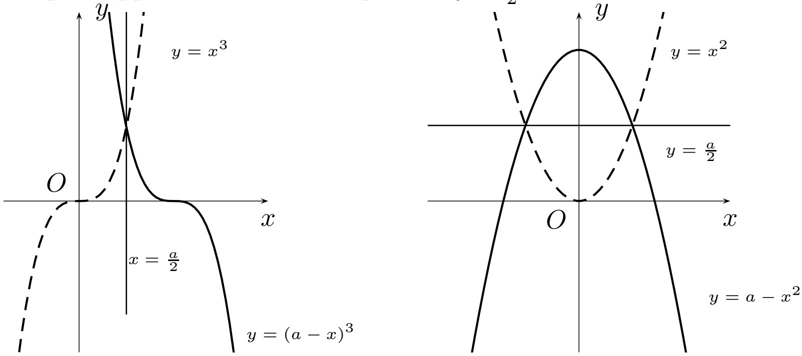
- La fonction $u_a : x \mapsto a - f(x)$ est définie sur X. Son graphe se déduit de celui de f par la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \frac{a}{2}\cdot$
- La fonction $v_a : x \mapsto f(a-x)$ est définie sur $X'_a = \{a - x\,;\ x \in X\}$. Son domaine de définition et son graphe se déduisent de ceux de f par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}\cdot$

Démonstration.

- Un point (x,y) appartient au graphe Γ_{u_a} si, et seulement si, $y = a - f(x)$, ce qui équivaut à $(x, a-y) \in \Gamma_f$. Comme les points (x,y) et $(x,a-y)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \frac{a}{2}$, le graphe Γ_{u_a} se déduit de Γ_f par cette même symétrie.
- Le réel x' appartient au domaine de définition X'_a de v_a si, et seulement si, $a - x' \in X$, ce qui équivaut à dire qu'il existe $x \in X$ tel que $x' = a - x$. Ainsi X et X'_a sont des parties de $\mathbb{R}$ symétriques par rapport au point d'abscisse $\frac{a}{2}$ et, par abus de langage, symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}\cdot$ On démontre comme précédemment que les graphes sont aussi symétriques par rapport à cette droite. □

Exemples Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Le graphe de la fonction $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (a-x)^3 \end{array}$ se déduit de celui de $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}\cdot$
- Le graphe de la fonction : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a - x^2 \end{array}$ se déduit de celui de $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \frac{a}{2}\cdot$



Définition 5

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ où X est symétrique par rapport à O.

- La fonction f est **paire** si $\quad \forall x \in X \quad f(x) = f(-x)$.

  Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe $(O, \vec{\jmath})$.
- La fonction f est **impaire** si $\quad \forall x \in X \quad f(x) = -f(-x)$.

  Son graphe est alors symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Exemples

- Le graphe de la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est symétrique par rapport à (Oy).
- Le graphe de la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ admet O comme centre de symétrie.

Translations – Périodicité

Proposition 5

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

- La fonction $u_a : x \mapsto f(x) + a$ est définie sur X, et son graphe se déduit de celui de f par la translation de vecteur $a\,\vec{\jmath}$.
- La fonction $v_a : x \mapsto f(x+a)$ est définie sur $X'_a = \{x - a\,;\; x \in X\}$. Son domaine de définition et son graphe se déduisent de ceux de f par la translation de vecteur $-a\,\vec{\imath}$.

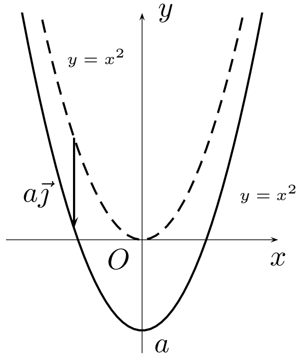
Démonstration.

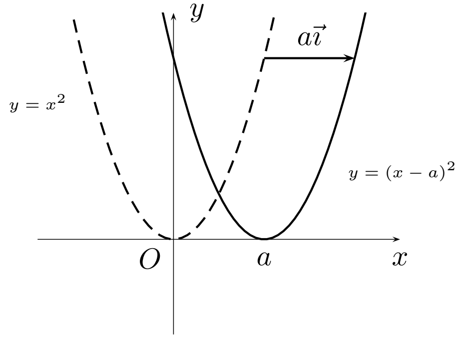
- Un point (x, y) appartient au graphe Γ_{u_a} si, et seulement si, $y = f(x) + a$, ce qui équivaut à $(x, y - a) \in \Gamma_f$. Ainsi Γ_{u_a} se déduit de Γ_f par une translation de vecteur $a\,\vec{\jmath}$, ce qui prouve le résultat.
- Le réel x' appartient au domaine de définition X'_a de u_a si, et seulement si, $x' + a \in X$, ce qui équivaut à dire qu'il existe $x \in X$ tel que $x' = x - a$. Ainsi $X'_a = \{x - a\,;\; x \in X\}$.

  Un point (x', y) appartient au graphe Γ_{u_a} si, et seulement si, $y = f(x'+a)$, ce qui équivaut à $(x' + a, y) \in \Gamma_f$. Ainsi Γ_{u_a} se déduit de Γ_f par une translation de vecteur $-a\,\vec{\imath}$, ce qui prouve le résultat. □

Exemples Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Le graphe de la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + a \end{array}$ se déduit de celui de $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ par translation de vecteur $a\,\vec{\jmath}$.
- Le graphe de la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x-a)^2 \end{array}$ se déduit de celui de $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ par translation de vecteur $a\,\vec{\imath}$.





p.69

Exercice 18 Soit $a \in \mathbb{R}$. Représenter sur un même dessin les graphes des fonctions :

$$g : x \mapsto \sqrt{x+a} \qquad \text{et} \qquad f : x \mapsto \sqrt{x}.$$

Remarque En combinant les deux propositions précédentes, on trouve que si $f : X \to \mathbb{R}$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(a-x) = -f(x)$, alors le graphe de f admet le point de coordonnées $(\frac{a}{2}, 0)$ comme centre de symétrie.

Définition 6

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Le réel T est une **période** de f (ou encore f est T-**périodique**) si :
  - $*$ d'une part $\quad \forall x \in X \quad x+T \in X \quad$ et $\quad x-T \in X$,
  - $*$ d'autre part $\quad \forall x \in X \quad f(x+T) = f(x)$.
- f est **périodique** s'il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ qui soit période de f.

Exemples

- Si T est une période de f, alors kT est une période de f, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- Les fonctions sin et cos sont périodiques, et 2π est une de leurs périodes.

p.69

Exercice 19 Écrire une assertion exprimant que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est périodique.

Proposition 6

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique avec $T \in \mathbb{R}_+^*$.

- Γ_f est invariant par toute translation de vecteur $kT\vec{\imath}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $a \in \mathbb{R}$ est un réel donné, le graphe de f est la réunion des images de l'ensemble $\{(x, f(x)) \, ; \; x \in X \cap [a, a+T]\}$ par toutes les translations de vecteur $kT\vec{\imath}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Analogue aux précédentes. □

Exemple Il est aisé de tracer les graphes des fonctions sin et cos sur tout $\mathbb{R}$ dès qu'on les a tracés sur $[0, 2\pi]$ ou, mieux, sur $[-\pi, \pi]$ qui permet d'utiliser parité et imparité.

Autres transformations

Proposition 7

Soit $f\,:\,X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

- La fonction $u_a : x \mapsto a\,f(x)$ est définie sur X, et son graphe se déduit de celui de f par la transformation $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, a\,y). \end{array}$
- Dans le cas particulier $a = -1$, le graphe de u_a est le symétrique de celui de f par rapport à l'axe $(O, \vec{\imath})$.

Démonstration. Analogue aux précédentes. □

Exemple

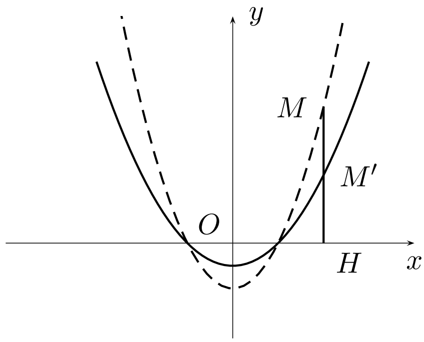
Le graphe de $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\,x^2 \end{array}$

se déduit de celui de $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

par la transformation $M \mapsto M'$ telle que :

- les points M, M' et H sont alignés sur une droite parallèle à (Oy),
- le point H est sur (Ox),
- on a $\overrightarrow{HM'} = a\,\overrightarrow{HM}$.

Le dessin est réalisé avec $a = 0,5$.



Proposition 8

Soit $f\,:\,X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$.

- La fonction $v_a : x \mapsto f(a\,x)$ est définie sur $X'_a = \{\frac{x}{a}\,;\,x \in X\}$.

  Son domaine de définition et son graphe se déduisent de ceux de la fonction f par la transformation $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (\frac{x}{a}, y). \end{array}$
- Dans le cas particulier $a = -1$ le graphe de v_a est le symétrique de celui de f par rapport à l'axe $(O, \vec{\jmath})$.

Exemple

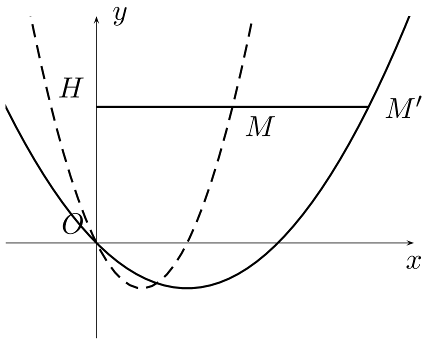
Le graphe de $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (a\,x)^2 - a\,x \end{array}$

se déduit de celui de $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - x \end{array}$

par la transformation $M \mapsto M'$ telle que :

- les points M, M' et H sont alignés sur une droite parallèle à (Ox),
- le point H est sur (Oy),
- on a $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{a}\,\overrightarrow{HM}$.

Le dessin est réalisé avec $a = 0,5$.



Remarque Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. Posons $w_a : x \mapsto a\, f(\frac{x}{a})$. Alors, en utilisant les deux propositions précédentes, on peut établir que le domaine de définition de w_a et son graphe se déduisent de ceux de la fonction f par l'homothétie de centre O et de rapport a.

3 Opérations sur les fonctions à valeurs réelles

Dans toute cette partie X désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- On note $\boldsymbol{\mathcal{F}(X, \mathbb{R})}$ ou encore $\boldsymbol{\mathbb{R}^X}$ l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$.
- Pour $f \in \mathbb{R}^X$ et $g \in \mathbb{R}^X$ ainsi que $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on définit :
  - ∗ la fonction $a\,f + b\,g$ par : $\forall x \in X \quad (a\,f + b\,g)(x) = a\,f(x) + b\,g(x)$;
  - ∗ la fonction $f \times g$, encore notée $f\,g$, par : $\forall x \in X \quad (f\,g)(x) = f(x)\,g(x)$.
- La relation d'ordre utilisée sur $\mathbb{R}$ s'étend naturellement à $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ en définissant, pour $(f, g) \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})^2$, la relation $f \leqslant g$ par :
$$\forall x \in X \quad f(x) \leqslant g(x).$$
- On désigne par $|f|$ la fonction définie sur X par :
$$\forall x \in X \quad |f|(x) = \big|f(x)\big|.$$

p.69 **Exercice 20** Soit $f \in \mathbb{R}^X$. On pose $f^+ = \dfrac{|f| + f}{2}$ et $f^- = \dfrac{|f| - f}{2}$.

1. Pour tout $x \in X$, simplifier $f^+(x)$ et $f^-(x)$, d'abord dans le cas où $f(x) \geqslant 0$, puis dans le cas où $f(x) \leqslant 0$.
2. Représenter graphiquement f, $|f|$, f^+ et f^- lorsque $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 2\,x. \end{array}$
3. Quel composant électrique permet d'obtenir f^+ à partir de f ?

p.69 **Exercice 21** Pouvez-vous énoncer (et justifier) des résultats sur la somme et le produit de fonctions paires ou impaires ?

Définition 7 (Composition des fonctions)

Soit $f : X \to \mathbb{R}$, soit $Y \subset \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in X \quad f(x) \in Y$.

La fonction $\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}$ est appelée **fonction composée** de f et g.

Cette fonction, aussi appelée **composée** de f et g, est notée $g \circ f$.

Exemple Si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$, alors on a :

$$f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x+1)^2 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + 1. \end{array}$$

On peut ainsi vérifier que $f \circ g$ n'est pas toujours égale à $g \circ f$.

4 Monotonie

Définition 8

Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est :

- **croissante** si, pour tout réel $x \in X$ et tout réel $y \in X$ vérifiant $x \leqslant y$, on a $f(x) \leqslant f(y)$.
- **strictement croissante** si, pour tout réel $x \in X$ et tout réel $y \in X$ vérifiant $x < y$, on a $f(x) < f(y)$.
- **(strictement) décroissante** si $-f$ est (strictement) croissante,
- **(strictement) monotone** si elle est (strictement) croissante ou si elle est (strictement) décroissante.

Remarque Par suite, la fonction f est :

- décroissante si, pour tout réel $x \in X$ et tout réel $y \in X$ vérifiant $x \leqslant y$, on a $f(x) \geqslant f(y)$.
- strictement décroissante si, pour tout réel $x \in X$ et tout réel $y \in X$ vérifiant $x < y$, on a $f(x) > f(y)$.

p.70 **Exercice 22** Soit f et g deux fonctions croissantes.

1. Montrer que $f+g$ est une fonction croissante.
2. Si f est strictement croissante, montrer que $f+g$ est strictement croissante.
3. Si f et g sont positives, montrer que $f\,g$ est croissante.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Montrer que λf est croissante.
   Si on suppose f strictement croissante, peut-on en déduire que λf l'est aussi ?

Remarque

- Pour montrer que f n'est pas croissante, il suffit d'exhiber un élément $x \in X$ et un élément $y \in X$ tels que $x \leqslant y$ et $f(x) > f(y)$.
- Pour montrer que f n'est pas monotone, il suffit d'exhiber
  - ∗ un $x \in X$ et un $y \in X$ tels que $x \leqslant y$ et $f(x) > f(y)$,
  - ∗ un $x' \in X$ et un $y' \in X$ tels que $x' \leqslant y'$ et $f(x') < f(y')$.

p.70 **Exercice 23**

1. Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 - x + 1 \end{array}$ n'est pas monotone.
2. Que pensez-vous de la somme de deux fonctions monotones ?

p.70 **Exercice 24** Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \frac{1}{x}\cdot$

1. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Est-elle décroissante sur $\mathbb{R}^*$?

Proposition 9

Soit f une fonction d'une partie X de $\mathbb{R}$ à valeurs dans une partie Y de $\mathbb{R}$ et g une fonction de Y dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont monotones (resp. strictement monotones), alors $g \circ f$ est monotone (resp. strictement monotone).

Démonstration page 71

p.71 **Exercice 25** Soit f une fonction monotone sur X et qui ne s'annule pas sur X.

1. Si f reste positive sur X, montrer que $1/f$ est monotone sur X.
2. Si f reste négative sur X, la fonction $1/f$ est-elle monotone sur X ?
3. Dans le cas général, la fonction $1/f$ est-elle monotone sur X ?

Tableau de variations

Exemple

- La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas monotone.
- Mais $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ sont strictement monotones.

Comme dans l'exemple précédent, pour la plupart des fonctions numériques f que vous étudierez, vous pourrez découper le domaine de définition de f en un nombre fini d'intervalles sur lesquels la fonction est strictement monotone. On a alors l'habitude de résumer ces résultats dans un **tableau de variations**.

Exemple Pour la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$, cela donne :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

où les flèches indiquent une fonction strictement monotone sur l'intervalle.

Dans le tableau de variations, il est d'usage de mettre (quand elles existent) les limites en les points où la fonction n'est pas définie.

Exemple Dans le cas de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$, cela donne :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 9

Soit f une fonction de X dans $\mathbb{R}$.

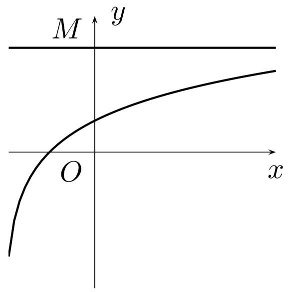
- f est **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad f(x) \leqslant M$,
- f est **minorée** si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad f(x) \geqslant M$,
- f est **bornée** si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad |f(x)| \leqslant M$.

Remarques

- La fonction f est majorée si, et seulement si, l'ensemble $\{f(x)\,;\ x \in X\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$.
- La fonction f est minorée si, et seulement si, $-f$ est majorée.
- La fonction f est bornée si, et seulement si, elle est minorée et majorée.

Interprétation graphique :

- La fonction f est majorée si, et seulement si, son graphe se trouve en dessous d'une droite horizontale.
- Plus précisément, la fonction f est majorée par M si, et seulement si, son graphe se trouve en dessous de la droite d'équation $y = M$.



Attention Si f est une fonction de X dans $\mathbb{R}$, bien distinguer :

- « f est majorée par M » se traduisant par « $\forall x \in X \quad f(x) \leqslant M$ » qui est un prédicat en M,
- de « f est majorée » qui se traduit par « $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad f(x) \leqslant M$ » où M est une variable muette.

p.71

Exercice 26

- Écrire une assertion exprimant que $f : X \to \mathbb{R}$ n'est pas majorée.
- Montrer que la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ n'est pas majorée.

p.71

Exercice 27

1. Montrer que la somme et le produit de deux fonctions bornées sont bornées.
2. En est-il de même pour la somme et le produit de deux fonctions majorées ?

Définition 10

Soit f une fonction de X dans $\mathbb{R}$.

- f admet un **maximum** en $a \in X$ si $\forall x \in X \quad f(x) \leqslant f(a)$.
- f admet un **minimum** en $a \in X$ si $\forall x \in X \quad f(x) \geqslant f(a)$.
- f admet un **extremum** en a, si elle admet soit un maximum en a, soit un minimum en a.

Remarque La fonction f possède un minimum (respectivement un maximum) si, et seulement si, l'ensemble $\{f(x)\,;\ x \in X\}$ possède un plus petit (respectivement plus grand) élément.

Exemple La fonction $\cos$ admet :

- un maximum, 1, qui est atteint en tous les multiples de 2π ;
- un minimum, -1, atteint en tous les points de la forme $\pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

p.72

Exercice 28 Soit $f \in \mathbb{R}^X$.

1. Écrire une assertion exprimant que f possède un minimum.
2. En déduire une assertion exprimant que f ne possède pas de minimum.

p.72

Exercice 29 Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \dfrac{1}{x}\cdot$

La fonction f est-elle minorée ? possède-t-elle un minimum ?

p.72

Exercice 30 Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\cdot$

Représenter f à l'aide de votre calculatrice et dire si elle possède un maximum et un minimum, puis le justifier.

Remarque Comme on vient de le voir, une fonction f peut être majorée (resp. minorée) sur X sans admettre de maximum (resp. de minimum) sur X. Autrement dit, l'ensemble $\{f(x)\,;\ x \in X\}$ peut être majoré (resp. minoré) sans admettre de plus grand élément (resp. de plus petit élément).

III Dérivabilité – Rappels de Terminale

Dans toute cette partie :

- I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $a \in I$;
- f est une fonction définie sur I.

1 Dérivée en un point, fonction dérivée

Définition 11

Le taux d'accroissement de f en a est la fonction τ_a définie sur $I \setminus \{a\}$ par :

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \quad \tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

La fonction f est **dérivable en a** si son taux d'accroissement en a, possède une limite finie quand x tend vers a. Cette limite s'appelle alors **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$ ou $D(f)(a)$.

Exemples

- La fonction $f : x \mapsto x$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et $f'(a) = 1$.
- Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, la factorisation :

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + a\, x^{n-2} + a^2\, x^{n-3} + \cdots + a^{n-1})$$

  montre que $g : x \mapsto x^n$ est dérivable en a et que $g'(a) = n\, a^{n-1}$.
- Pour $n \in \mathbb{Z}^-$ et $a \in \mathbb{R}^*$, l'écriture :

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = -a^n\, x^n\, \frac{x^{-n} - a^{-n}}{x - a}$$

  associée au résultat précédent montre que $h : x \mapsto x^n$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}^*$ et que $h'(a) = n\, a^{n-1}$.

p.72

Exercice 31 Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

- Si $a > 0$, montrer que f est dérivable en a.
- La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Définition 12

Lorsque la fonction f est dérivable en tout point de I, on dit que f est **dérivable sur I** et la fonction définie sur I par $x \mapsto f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f ; elle se note f' ou $D(f)$.

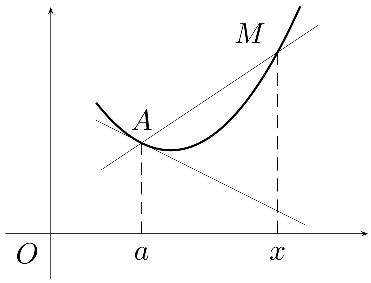
Remarque La notation « $'$ » s'applique à une fonction. On écrit $f'(x)$ et surtout pas $f(x)'$. En revanche, on peut utiliser la notation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$.

2 Interprétations des dérivées

Tangente à une courbe

Étant donné une fonction f définie sur I, pour $x \in I \setminus \{a\}$, la droite joignant les points $A \left| \begin{smallmatrix} a \\ f(a) \end{smallmatrix} \right.$ et $M \left| \begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right.$ (avec $a \neq x$) a pour pente :

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$



- Si f est dérivable en $a \in I$, cette pente a pour limite $f'(a)$ quand x tend vers a.
- Le vecteur de composantes $(1, \tau_a(x))$ est un vecteur directeur de la corde (AM), et il « tend » vers $(1, f'(a))$.

Par définition, la droite passant par A et de pente $f'(a)$ est la **tangente en A** à la courbe d'équation $y = f(x)$. C'est la « position limite » des cordes (AM) lorsque le point M tend vers A.

Remarques

- Lorsque la fonction f est dérivable en a, la tangente en A est horizontale si, et seulement si, $f'(a) = 0$.
- Si f est continue en a et si son taux d'accroissement en a tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, alors les cordes possèdent « une position limite verticale » que l'on appelle encore tangente à la courbe en A.

Exemples d'utilisation

- Lorsque $f(t)$ est l'abscisse à l'instant t d'un point en mouvement rectiligne, pour $t \neq a$ le taux d'accroissement $\tau_a(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ représente la **vitesse moyenne** entre les instants a et t, et sa limite $f'(a)$, que l'on note aussi $\dot{f}(a)$ en cinématique, représente la **vitesse instantanée** à l'instant a.

  En physique, on confond souvent la fonction avec les valeurs qu'elle prend ; si M est le point d'abscisse $f(t)$, la vitesse de M se note alors $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$.
- En cinétique chimique, la dérivée de la concentration d'un produit s'appelle vitesse d'apparition de ce produit.
- Lorsque la fonction f représente l'évolution de la charge d'une armature de condensateur, sa dérivée représente l'intensité du courant de charge ou de décharge du condensateur.

Approximation de la fonction

Par définition de $f'(a)$, on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + \varepsilon(x)$ ou encore :

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + (x-a)\,\varepsilon(x)$$

où ε *est une fonction qui tend vers* 0 *en* a. On utilise souvent cela en Physique et en SI, en disant que $x \mapsto f(a)+f'(a)\,(x-a)$ est une « bonne approximation » de f en a, ou une approximation au premier ordre de f au voisinage de a.

Dérivées partielles

En physique, certaines quantités peuvent dépendre de plusieurs variables. Ainsi, le potentiel créé par une charge q placée en O est V définie en dehors de l'origine par $V : (x,y) \mapsto \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$ où k est un réel dépendant de q.

Le vecteur champ électrique associé a comme composantes (E_x, E_y) où :

- la composante E_x est l'opposée de la dérivée de V par rapport à x, la variable y étant alors considérée comme constante ; une telle dérivée s'appelle **dérivée partielle** par rapport à x, et l'on note alors $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$;
- de même, la composante E_y est l'opposée de la dérivée de V par rapport à y, la variable x étant alors considérée comme constante ; une telle dérivée s'appelle dérivée partielle par rapport à y, et l'on note alors $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$.

Dans ce cas, on a donc :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{k\,x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} \qquad \text{et} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{k\,y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}.$$

3 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 10

Soit f et g deux fonctions définies sur I et dérivables en a.

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et l'on a :

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a),$$

  résultat encore appelé « linéarité de la dérivation ».
- La fonction $f\,g$ est dérivable en a et :

$$(f\,g)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a).$$

Exemple Comme on a prouvé (*cf.* exemple page 40) que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k$ est dérivable, on en déduit que toute fonction polynomiale :

$$f : x \mapsto a_0 + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = a_1 + 2\,a_2\,x + \cdots + n\,a_n\,x^{n-1}.$$

Proposition 11

Soit f à valeurs dans un intervalle J de $\mathbb{R}$ et soit $g \in \mathbb{R}^J$. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et :

$$(g \circ f)'(a) \ = g'(b)\, f'(a) = g'\big(f(a)\big)\, f'(a).$$

Principe de démonstration. Dans le cas où $\forall x \neq a \quad f(x) \neq f(a)$, on peut écrire :

$$\frac{\big(g \circ f\big)(x) - \big(g \circ f\big)(a)}{x - a} = \frac{\big(g \circ f\big)(x) - \big(g \circ f\big)(a)}{f(x) - f(a)}\, \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

ce qui permet de conclure rapidement.

Une démonstration générale sera faite dans le chapitre 10 de dérivation.

p.73

Exercice 32 Si x est un réel donné, que pensez-vous des relations suivantes ?

(a) $\sin'(2x) = \cos 2x$ $\qquad$ (b) $\sin'(2x) = 2\,\cos 2x$

(c) $\sin(2x)' = \cos 2x$ $\qquad$ (d) $\sin(2x)' = 2\,\cos 2x$

Proposition 12

Soit f une fonction définie sur I et dérivable en a.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f^n est dérivable en a et :
$$(f^n)'(a) = n\, f^{n-1}(a)\, f'(a).$$
- Si $f(a) \neq 0$ alors, pour $n \in \mathbb{Z}$, la fonction f^n est dérivable en a et :
$$(f^n)'(a) = n\, f^{n-1}(a)\, f'(a).$$

Démonstration. En utilisant les résultats vus dans les exemples de la page 40 :

- si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ est dérivable en tout $b \in \mathbb{R}$ et $g'(b) = n\, b^{n-1}$ et le résultat découle alors directement de la proposition précédente ;
- le raisonnement est analogue si $n \in \mathbb{Z}$, car g est alors dérivable en tout $b \in \mathbb{R}^*$. □

Remarques

- En utilisant le résultat précédent avec $n = -1$, on obtient la formule donnant la dérivée d'une fonction inverse :
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}.$$
- En combinant avec le résultat sur le produit, on retrouve la formule donnant la dérivée d'un quotient ; si g est dérivable en a et $g(a) \neq 0$, alors :
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a)}{g(a)^2}.$$

Point méthode

Ces dernières formules, très efficaces dans le cas des fonctions homographiques (*cf.* exercice 33), le sont beaucoup moins lorsque le dénominateur contient des puissances (*cf.* exercice 34).

p.73 **Exercice 33** Soit (a, b, c, d) quatre réels tels que $c \neq 0$ et $a\,d - b\,c \neq 0$.

Calculer la dérivée de la **fonction homographique** $f : x \mapsto \dfrac{a\,x + b}{c\,x + d}\cdot$

p.73 **Exercice 34** Soit $a \in \,]0, \pi[$. Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \dfrac{x - \cos a}{\left(x^2 - 2\,x \cos a + 1\right)^5}\cdot$

- À l'aide de la formule donnant la dérivée de f/g.
- En dérivant le produit $(x - \cos a)\left(x^2 - 2x \cos a + 1\right)^{-5}$.

4 Variations d'une fonction sur un intervalle

Fonctions monotones et fonctions constantes sur un intervalle

Proposition 13 (Fonctions monotones sur un intervalle)

Soit I un intervalle et f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$.

- La fonction f est croissante si, et seulement si, $\forall x \in I \quad f'(x) \geqslant 0$.
- La fonction f est décroissante si, et seulement si, $\forall x \in I \quad f'(x) \leqslant 0$.

Principe de démonstration.

- Si f est croissante, elle a un taux d'accroissement positif et, par passage à la limite, on prouve facilement que f' est positive.
- La réciproque est admise pour l'instant et sera démontrée grâce au théorème des accroissements finis dans le chapitre 10.
- Le cas décroissant s'en déduit aisément en changeant f en $-f$.

Remarque Le second résultat de la proposition précédente se déduit évidemment du premier en changeant f en $-f$. C'est pourquoi, dans la suite, nous n'énoncerons plus ce genre de résultats que pour les fonctions croissantes.

Attention *Quand on veut appliquer le résultat de la proposition précédente, il est indispensable de vérifier que l'on travaille sur un intervalle !*

La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est dérivable en tout point de son domaine de définition, sa dérivée est négative et, pourtant, f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$. On le voit sur un dessin et on le justifie en disant que $f(-1) < f(1)$.

p.73

Exercice 35 Montrer que $f_1 : x \mapsto x^3 + 3\,x^2 + 3\,x + 2$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

p.74

Exercice 36 Montrer que la fonction $f_2 : x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^3}$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

Est-elle décroissante sur son ensemble de définition ?

Corollaire 14 (Fonctions constantes sur un intervalle)

Une fonction dérivable sur un intervalle I est constante si, et seulement si, sa dérivée est nulle.

Démonstration. Conséquence de ce qui précède car une fonction est constante si, et seulement si, elle est croissante et décroissante. □

Attention Comme pour la proposition précédente, avant d'appliquer ce résultat, il faut être sûr que l'on travaille bien sur un intervalle !

p.74

Exercice 37 Construire une fonction dérivable $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dont la dérivée est nulle sur $\mathbb{R}^*$ mais qui n'est pas constante.

p.74

Exercice 38 Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Montrer que si $f' = g'$ alors f et g diffèrent d'une constante.

Stricte monotonie

Proposition 15

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f' est positive (respectivement négative) et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante (respectivement décroissante).

Principe de démonstration. Résultat admis pour l'instant et qui se déduit aussi du théorème des accroissements finis.

Point méthode

La plupart du temps, l'étude du signe de la dérivée d'une fonction f permet de déterminer un certain nombre d'intervalles sur lesquels cette dérivée garde un signe constant, en ne s'annulant qu'un nombre fini de fois. La fonction f est alors strictement monotone sur chacun de ces intervalles, ce qui permet d'en dresser le tableau de variations (*cf.* page 37).

p.74

Exercice 39 Dresser le tableau de variations de $f_2 : x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^3}$.

Remarque On peut généraliser le résultat de la proposition 15 de la page précédente à une fonction continue qui est dérivable sauf en un nombre fini de points de l'intervalle (ce résultat, admis pour l'instant, sera démontré au chapitre concernant la dérivation).

p.74

Exercice 40 Soit $f_3 : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x-2)\sqrt{x-1}. \end{array}$

1. La fonction f_3 est-elle dérivable en 1 ?
2. Pour $x \in]1,+\infty[$, calculer $f_3'(x)$.
3. En déduire le tableau de variations de f_3.

5 Étude d'une fonction

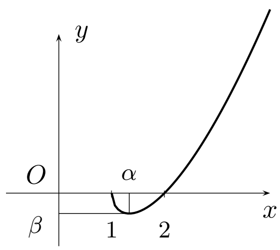
L'étude des variations d'une fonction f permet entre autres :

- de donner l'allure du graphe de f ;
- d'en étudier le signe (quand cela ne résulte pas d'une factorisation évidente) et donc de prouver des inégalités ;
- d'étudier le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$.

Avec les outils modernes dont on dispose, il est possible de tracer directement le graphe d'une fonction sans faire la moindre étude et, la plupart du temps, cela permet de se faire une idée précise du résultat attendu. Toutefois cela ne peut constituer une justification rigoureuse, ne serait-ce que parce que le nombre fini de points de tout écran ne permet jamais d'être sûr que la fonction n'a pas un comportement aberrant entre deux points tracés ou à l'extérieur de la zone tracée.

Exemple de résolution d'inéquation

En prenant par exemple la fonction f_3 de l'exercice 40, la représentation graphique à l'ordinateur met en évidence un minimum atteint en $\alpha \in [1,2]$ qui paraît être un minimum absolu et dont on pourrait donner une valeur décimale approchée en zoomant un peu.



Mais seule l'étude de la dérivée et la construction du tableau de variations nous permettent de donner les coordonnées exactes de ce minimum, soit $\alpha = \frac{4}{3}$ et $\beta = -\frac{2}{3^{3/2}}$, ainsi que de certifier qu'il n'y a pas de variation erratique en dehors de la zone tracée.

x	1		α		2		$+\infty$
$f_3'(x)$	$\|\|$	$-$	0		$+$		
f_3	0	$\searrow$	β	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

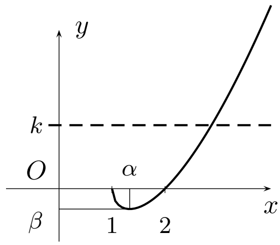
Ainsi l'étude des variations de f_3, résumée dans le tableau ci-dessus (comme on doit toujours le faire), permet de justifier que :

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad (x-2)\sqrt{x-1} \geqslant -\frac{2}{3^{3/2}}.$$

Exemple de discussion d'équation

La représentation précédente ci-dessus permet, pour un réel k donné, de se rendre compte du nombre de solutions de l'équation $f_3(x) = k$, puisque toute solution de cette équation est l'abscisse d'un point d'intersection de la courbe d'équation $y = f_3(x)$ et de la droite d'équation $y = k$.

Il est graphiquement évident que :



- si $k > 0$ l'équation donnée possède une unique solution, d'ailleurs élément de $]2, +\infty[$;
- si $k \in]\beta, 0]$ l'équation donnée possède exactement deux solutions, l'une étant élément de $[1, \alpha[$ et l'autre étant élément de $]\alpha, 2[$;
- si $k = \beta$ l'équation donnée possède une unique solution, qui vaut α ;
- si $k < \beta$ l'équation n'a aucune solution.

Cette fois, c'est le tableau de variations qui, avec le théorème des valeurs intermédiaires (*cf.* le théorème 40 de la page 511), vont nous permettre de justifier ces résultats.

- Supposons $k > 0$.
  * Comme le tableau de variations nous prouve que $\forall x \in [1, 2] \quad f_3(x) \leqslant 0$, l'équation $f_3(x) = k$ ne peut avoir de solution dans $[1, 2]$.
  * Étant donné que f_3 est continue, que $f_3(2) = 0 \leqslant k$ et que $\lim\limits_{+\infty} f_3 = +\infty > k$, le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que l'équation $f_3(x) = k$ possède au moins une solution dans $[2, +\infty[$.
  * La fonction f_3 étant strictement croissante sur cet intervalle, la solution précédente est donc unique et appartient en fait à $]2, +\infty[$.
- Lorsque $\beta < k \leqslant 0$, on prouve de même :
  * que l'équation $f_3(x) = k$ possède une solution sur l'intervalle $[1, \alpha]$ puisque $f(\alpha) \leqslant k \leqslant f(1)$ et que la fonction f_3 est continue ;
  * que cette solution est unique et appartient à $[1, \alpha[$ puisque f_3 est strictement décroissante sur cet intervalle ;
  * et aussi (de façon similaire) que l'équation $f_3(x) = k$ possède une unique solution sur $]\alpha, +\infty[$.

  On en déduit que l'équation possède exactement deux solutions.

Plan général d'étude d'une fonction

- Si le domaine de définition n'est pas défini dans l'énoncé et que la fonction f est juste donnée par une expression, il faut évidemment commencer par déterminer ce domaine de définition X.
- Si la fonction f est périodique, on peut en réduire l'étude à tout domaine de la forme $X \cap [a, a+T]$ où a est un réel, *a priori* quelconque, et T la plus petite période strictement positive trouvée.
- Si f est paire (ou impaire), il suffit d'étudier f sur $X \cap \mathbb{R}_-$ ou sur $X \cap \mathbb{R}_+$.

  Dans le cas où f est de plus T-périodique, on choisit alors le a du point précédent tel que 0 soit le milieu de $X \cap [a, a+T]$, ce qui amène donc à n'étudier f que sur $X \cap [0, \frac{T}{2}]$ ou sur $X \cap [-\frac{T}{2}, 0]$.
- Plus généralement, s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\quad \forall x \in X \quad f(b-x) = \pm f(x)$,

  il suffit d'étudier f sur $X \cap \left]-\infty, \frac{b}{2}\right]$ ou sur $X \cap \left[\frac{b}{2}, \infty\right[$.

  Dans le cas où f est de plus T-périodique, on choisit alors le a du point précédent tel que $\frac{b}{2}$ soit le milieu de $X \cap [a, a+T]$, ce qui amène donc à n'étudier f que sur $X \cap [\frac{b}{2}, \frac{b}{2} + \frac{T}{2}]$ ou sur $X \cap [\frac{b}{2} - \frac{T}{2}, \frac{b}{2}]$.

  Remarque Même pour un tracé avec ordinateur ou calculatrice, la réduction du domaine d'étude peut s'avérer très intéressante car elle permet de diminuer le temps de tracé et d'utiliser au mieux la surface disponible de l'écran.

- On dresse alors le tableau des variations de f sur le domaine d'étude, ce qui se fait le plus souvent en étudiant le signe de la dérivée mais peut aussi parfois se faire directement à l'aide des résultats de la partie II.4.
- Cas où il existe des asymptotes horizontales ou verticales.
  * Lorsque le domaine d'étude est non borné et que f possède une limite finie b en $+\infty$ ou en $-\infty$ alors la droite d'équation $y = b$ est appelée **asymptote** (horizontale) au graphe de f.
  * Lorsqu'en a la fonction f possède une limite infinie alors la droite d'équation $x = a$ est appelée **asymptote** (verticale) au graphe de f.
- On peut alors donner l'allure du graphe en commençant par placer les points correspondant aux valeurs introduites dans le tableau de variations (avec leurs tangentes quand elles existent), et les asymptotes (s'il en existe) ; ensuite préciser le tracé si nécessaire en calculant quelques valeurs décimales.

6 Fonction réciproque

On suppose ici que f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, que f' est positive (respectivement négative) et ne s'annule qu'un nombre fini de fois.

- D'après la proposition 15 de la page 45, on sait que f est strictement monotone.
- Le théorème des valeurs intermédiaires entraîne que l'image de f, c'est-à-dire l'ensemble $\{f(x)\,;\ x \in I\}$, est un intervalle J de $\mathbb{R}$.
- Pour tout $y \in J$, il existe donc un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$. On dit alors que f réalise une **bijection** de I sur J.

- On note f^{-1} la fonction qui, à tout $y \in J$, associe l'unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$. La fonction f^{-1} s'appelle **fonction réciproque** de f.

Exemples

1. La fonction $\exp$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa fonction réciproque est la fonction $\ln$.
2. La fonction $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ a une dérivée positive qui ne s'annule qu'en 0.

   Elle réalise donc une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur son image $\mathbb{R}_+$

   dont la fonction réciproque est la fonction racine $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \sqrt{y}. \end{array}$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, et sa fonction réciproque est notée $\varphi_{\frac{1}{n}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \sqrt[n]{y}. \end{array}$

p.75

Exercice 41 Soit f vérifiant les hypothèses précédentes.

1. Montrer que si f est strictement croissante (respectivement décroissante) alors la fonction f^{-1} est strictement croissante (respectivement décroissante).
2. Montrer que si f est impaire alors f^{-1} est impaire.
   Que peut-on dire d'analogue si f est paire ?

Proposition 16

Les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice.

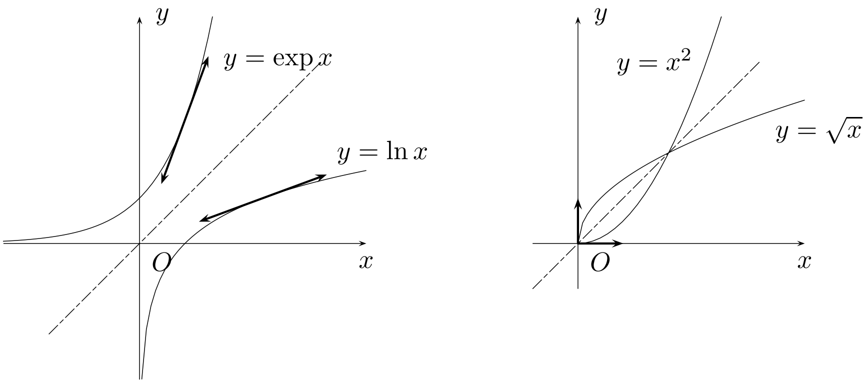
Démonstration. Soit $(x, y) \in \Gamma_f$. Par définition du graphe, on a $x \in I$ et $y = f(x)$. On en déduit que $y \in J$ et $x = f^{-1}(y)$, ce qui prouve que $(y, x) \in \Gamma_{f^{-1}}$.

Comme il est immédiat que f est la fonction réciproque de f^{-1}, on en déduit de même que si $(y, x) \in \Gamma_{f^{-1}}$, alors $(x, y) \in \Gamma_f$.

Ainsi, les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice. $\square$

Exemples

1. Les graphes des fonctions exponentielle et logarithme sont symétriques par rapport à la première bissectrice.
2. De même pour les fonctions $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $\varphi_{\frac{1}{2}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$



Conséquence Soit $a \in I$ et $b = f(a)$. Avec nos hypothèses, le graphe de f possède en (a, b) une tangente $\mathcal{D}$ de pente $m = f'(a)$; par suite, le graphe de f^{-1} possède comme tangente en (b, a) la droite $\mathcal{D}'$, symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à la première bissectrice.

- Si $m = 0$ alors $\mathcal{D}'$ est verticale et f^{-1} n'est donc pas dérivable en b.
- Si $m \neq 0$ la droite $\mathcal{D}'$ a pour pente $1/m$ et, en admettant que f^{-1} est dérivable en b, on a donc $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

D'où la proposition suivante qui sera démontrée au chapitre 10, et que l'on admet pour l'instant.

Proposition 17

Soit f une fonction strictement monotone et dérivable de I sur $J = f(I)$ ainsi que $b \in J$ et $a = f^{-1}(b)$.

- La fonction f^{-1} est dérivable en b si, et seulement si, $f'(a) \neq 0$.
- Si $f'(a) \neq 0$, on a alors $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

p.75 **Exercice 42** Expliquer comment on peut retrouver la formule donnant $(f^{-1})'(b)$ en supposant f^{-1} dérivable et en calculant la dérivée de $f \circ f^{-1}$ ou de $f^{-1} \circ f$.

Exemples

1. Sachant que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp'(x) = \exp x > 0$, on en déduit que la fonction $\ln$ est dérivable et que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}.$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ est dérivable et vérifie :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi_n'(x) = n\,x^{n-1} > 0.$$
On en déduit que la fonction $\varphi_{\frac{1}{n}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{y} \end{array}$ est dérivable et vérifie :
$$\forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi_{\frac{1}{n}}'(y) = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}\,y^{\frac{1}{n}-1}.$$

C'est l'une des raisons qui justifie que $\sqrt[n]{y}$ se note aussi $y^{\frac{1}{n}}$. En effet, avec cette convention, que le réel α soit entier ou inverse d'entier, on a défini la fonction $x \mapsto x^{\alpha}$ dont la dérivée est $x \mapsto \alpha\, x^{\alpha-1}$. Cela évite de retenir une formule particulière pour la dérivée de la fonction racine $\begin{array}{rccl} \varphi_{\frac{1}{2}} : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}. \end{array}$

En appliquant la règle précédente, on obtient directement :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi'_{\frac{1}{2}}(y) = \frac{1}{2}\, y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot$$

7 Dérivées successives

Définition 13

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, On pose $f^{(0)} = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit par récurrence la fonction dérivée n-ième de f sur I, notée $f^{(n)}$, comme la dérivée, si elle existe, de $f^{(n-1)}$, fonction dérivée d'ordre $(n-1)$.

p.75 **Exercice 43** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, expliciter la dérivée n-ième de $f : x \mapsto \frac{1}{x}\cdot$

IV Fonctions trigonométriques

Durant votre scolarité, vous avez déjà rencontré les fonctions sin et cos, que vous avez utilisées dans des domaines variés. Vous en aurez une définition précise en seconde année, mais nous allons, dans cette partie, montrer comment les notions abordées au début de ce chapitre permettent d'obtenir les propriétés principales de ces fonctions en partant d'un minimum d'axiomes. Les résultats sont essentiels mais les démonstrations peuvent, dans un premier temps, n'être que survolées.

1 Les fonctions sinus et cosinus

Définition 14

Les fonctions sin et cos sont deux fonctions 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- La fonction sin est impaire, dérivable et vérifie $\sin' = \cos$.
- La fonction cos est paire, dérivable et vérifie $\cos' = -\sin$.
- Leurs variations sur $[0, \pi]$ sont données par :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
sin	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Remarque On en déduit immédiatement $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$

Conséquences de l'imparité de $\sin$ **et de la parité de** $\cos$

- Le graphe de la fonction $\sin$ admet O comme centre de symétrie.
- Le graphe de la fonction $\cos$ admet l'axe (Oy) comme axe de symétrie.
- Les tableaux de variations de ces fonctions sur $[-\pi, \pi]$ sont :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$\sin$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Grâce à la périodicité, on peut alors en déduire les variations sur $\mathbb{R}$.

Conséquences des variations précédentes

- L'équation $\sin\theta = 1$ a pour ensemble de solutions $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
- L'équation $\sin\theta = -1$ a pour ensemble de solutions $\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
- L'équation $\sin\theta = 0$ a pour ensemble de solutions $\{k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Conséquences du théorème des valeurs intermédiaires et des variations

- Pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation $\sin\theta = x$ possède (au moins) une solution si, et seulement si, on a $x \in [-1, 1]$.
- Pour tout $x \in [-1, 1]$, l'équation $\sin\theta = x$ possède une et une seule solution dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

p.75

Exercice 44 Énoncer les résultats correspondants pour les équations :

(a) $\cos\theta = 1$ (b) $\cos\theta = -1$ (c) $\cos\theta = 0$ (d) $\cos\theta = x$.

Dans les classes antérieures, vous avez eu une définition géométrique des fonctions trigonométriques, et l'on vous avait donc donné une justification géométrique des formules suivantes, appelées formules d'addition. Nous allons maintenant les démontrer avec notre définition actuelle de ces fonctions.

Proposition 18 (Formules d'addition)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Principe de démonstration.

- Pour la première formule, commencer par prouver que, si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la fonction :

$$\begin{array}{rccl} u : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cos(\alpha - x)\cos x - \sin(\alpha - x)\sin x \end{array}$$

est constante. Puis appliquer ce résultat avec de « bonnes valeurs » de α et x

- Pour la seconde, utiliser la fonction : $v : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(\alpha - x)\,\cos x + \cos(\alpha - x)\,\sin x. \end{array}$

Démonstration page 76

Remarque *A priori*, on peut se demander d'où sortent ces fonctions u et v de la démonstration précédente. En revanche, si l'on « triche » un peu, et que l'on pense aux formules à prouver, il est évident que c'est ce que l'on peut prendre pour avoir des fonctions constantes, ce qui est le ressort de la démonstration.

p.76 **Exercice 45** Donner les formules correspondantes pour $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$.

Corollaire 19

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(\pi - x) = \sin x \quad \text{et} \quad \cos(\pi - x) = -\cos x.$$

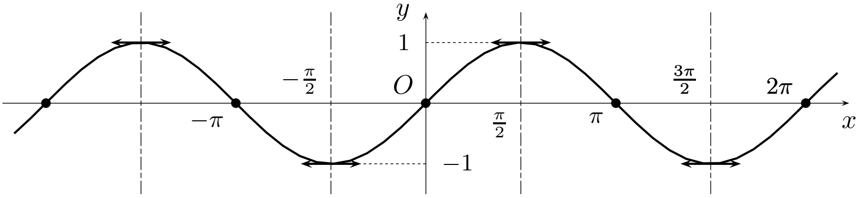
Par suite :

- Le graphe de la fonction sin admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ mais aussi toute droite d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Le graphe de la fonction cos admet comme centre de symétrie le point de coordonnées $(\frac{\pi}{2}, 0)$ mais aussi tout point $(\frac{\pi}{2} + k\,\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

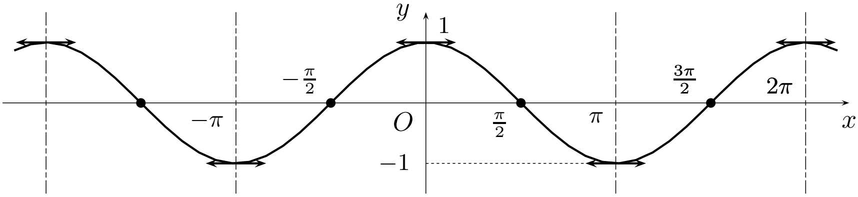
Démonstration page 76

Remarque Au vu de ce dernier corollaire, on aurait pu, dans la définition 14 de la page 51, ne donner les variations des fonctions sin et cos que sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On peut maintenant donner les graphes des fonctions sin et cos :



Courbe d'équation $y = \sin x$



Courbe d'équation $y = \cos x$

Corollaire 20

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Par suite, les graphes de sin et cos sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ et, plus généralement, toute droite d'équation $x = \frac{\pi}{4} + k\,\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Analogue à la précédente. □

Remarque On déduit de ce qui précède que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \cos(-x) = \cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sin(-x) = -\sin x.$$

Par suite, le graphe de la fonction cos se déduit de celui de la fonction sin par une translation du vecteur de composantes $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

On peut remarquer que $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin' x$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos' x$.

Corollaire 21

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(\pi + x) = -\sin x \quad \text{et} \quad \cos(\pi + x) = -\cos x.$$

p.76 **Exercice 46** Pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, simplifier $\sin(x + k\pi)$ et $\cos(x + k\pi)$.

2 Paramétrage du cercle trigonométrique

Proposition 22

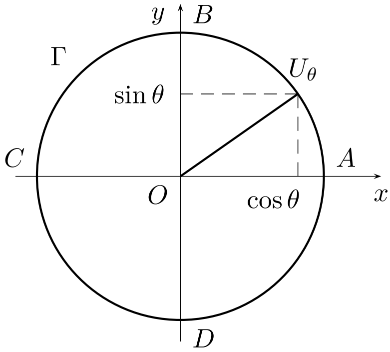
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. (**Relation fondamentale**)
- Réciproquement, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$, il existe un réel θ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$.

Principe de démonstration.

- Pour le premier point, il suffit d'utiliser les formules d'addition.
- Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le théorème des valeurs intermédiaires permet de trouver un θ_0 tel que $\cos\theta_0 = x$. On peut alors aisément en déduire un réel θ répondant au problème.

Démonstration page 77

Interprétation graphique



Dans ce qui suit, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

- Le **cercle trigonométrique** est le cercle Γ de centre O et de rayon 1.
- Selon la proposition précédente :
  - $*$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le point U_θ de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ est un point de Γ ;
  - $*$ réciproquement, pour tout point M de Γ, il existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = U_\theta$.

La fonction $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \Gamma \\ \theta & \longmapsto & \varphi(\theta) = U_\theta \end{array}$ est alors appelée **paramétrage du cercle** Γ.

p.77

Exercice 47 Avec les notations de la figure précédente, déterminer :

(a) $S_A = \{\theta \in \mathbb{R} \mid \varphi(\theta) = A\}$ $\quad$ (c) $S_C = \{\theta \in \mathbb{R} \mid \varphi(\theta) = C\}$

(b) $S_B = \{\theta \in \mathbb{R} \mid \varphi(\theta) = B\}$ $\quad$ (d) $S_D = \{\theta \in \mathbb{R} \mid \varphi(\theta) = D\}$

et caractériser chacun de ces ensembles à l'aide des fonctions $\sin$ ou $\cos$.

p.77

Exercice 48

- Montrer que $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$ et en déduire cette valeur.

  Que peut-on dire de la droite $(OU_{\frac{\pi}{4}})$?
- Placer sur Γ les points $\varphi(\frac{\pi}{4})$, $\varphi(\frac{5\pi}{4})$, $\varphi(\frac{9\pi}{4})$.

Proposition 23

Soit θ_1 et θ_2 deux nombres réels. Alors on a $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ et $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$ si, et seulement si, $\exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta_1 = \theta_2 + 2\,k\,\pi$.

Principe de démonstration. Démonstration page 78

Pour prouver que « si $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ et $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$ alors … », utiliser $\cos(\theta_1 - \theta_2)$.

Définition 15

Si θ_1, θ_2 et α sont trois nombres réels, alors **$\boldsymbol{\theta_1}$ est congru à $\boldsymbol{\theta_2}$ modulo $\boldsymbol{\alpha}$** s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_2 - \theta_1 = k\,\alpha$.

Notations

- La relation « θ_1 est congru à θ_2 modulo α » se note $\theta_1 \equiv \theta_2\ [\alpha]$.
- Sa négation se note $\theta_1 \not\equiv \theta_2\ [\alpha]$.

Exemple Avec cette nouvelle notation, la proposition précédente devient :

« on a $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ et $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$ si, et seulement si, $\theta_1 \equiv \theta_2\ [2\,\pi]$ »

Calcul avec des congruences

Règles de calcul Soit θ_1, θ_2, φ_1, φ_2, α et r des réels.

- Si $\theta_1 \equiv \varphi_1\,[\alpha]$ et $\theta_2 \equiv \varphi_2\,[\alpha]$, alors $\theta_1 + \theta_2 \equiv \varphi_1 + \varphi_1\,[\alpha]$ et $\theta_1 - \theta_2 \equiv \varphi_1 - \varphi_1\,[\alpha]$.
- Si $\theta_1 \equiv \varphi_1\,[\alpha]$, alors $r\,\theta_1 \equiv r\,\varphi_1\,[r\,\alpha]$.

Ces règles sont immédiates dès que l'on pense à la définition de la congruence.
Pour la dernière par exemple, l'hypothèse, $\theta_1 \equiv \varphi_1\,[\alpha]$, nous dit :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta_1 = \varphi_1 + k\,\alpha.$$

Avec un tel k, il est alors évident que $r\,\theta_1 = r\,\varphi_1 + k\,(r\,\alpha)$, et donc $r\,\theta_1 \equiv r\,\varphi_1\,[r\,\alpha]$.

Exemple Traitons des deux manières l'équation $3\,\theta + \pi \equiv \theta - \dfrac{\pi}{3}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]\cdot$
Elle s'écrit successivement :

avec les congruences	avec les égalités
$3\,\theta - \theta \equiv -\frac{\pi}{3} - \pi\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$	$3\,\theta - \theta = -\frac{\pi}{3} - \pi + k\,\frac{\pi}{2}$
$2\,\theta \equiv -\frac{4\pi}{3}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$	$2\,\theta = -\frac{4\pi}{3} + k\,\frac{\pi}{2}$
$\theta \equiv -\frac{2\pi}{3}\ \left[\frac{\pi}{4}\right]$	$\theta = -\frac{2\pi}{3} + k\,\frac{\pi}{4}$

ce qui donne $\theta \equiv -\frac{2\pi}{3}\ \left[\frac{\pi}{4}\right]\cdot$

Point méthode

Quand on a le moindre doute lors de l'utilisation de l'une de ces règles, il est préférable d'utiliser l'écriture de droite ci-dessus plutôt que de jouer à pile ou face.

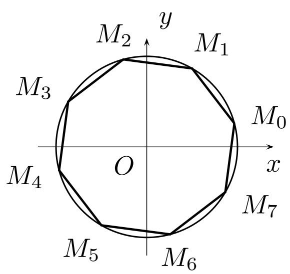
Représentation sur le cercle trigonométrique

Remarques Au chapitre 3 nous verrons les résultats suivants.

- Si M est un point de Γ, alors tout réel θ tel que $M = U_\theta$ est une mesure (en radians) de l'angle orienté $\widehat{\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)}$, ce que l'on écrit encore $\widehat{\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)} \equiv \theta\ [2\pi]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Si pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $M_k = U_{\theta_0 + \frac{2k\pi}{n}}$ alors M_{k+1} est l'image de M_k par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}\cdot$ Ainsi $(M_0 M_1 \dots M_{n-1})$ est un polygone régulier à n côtés.

Exemple

Les valeurs de θ trouvées dans l'exemple précédent nous donnent, sur le cercle trigonométrique, 8 images U_θ qui forment donc un octogone régulier.



p.78

Exercice 49 Déterminer les réels θ vérifiant $3\,\theta+\pi \equiv -\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]\cdot$

À combien de points U_θ cela correspond-il sur le cercle trigonométrique ?

p.78

Exercice 50

- Exprimer $\cos\frac{2\pi}{3}$ en fonction de $\cos\frac{\pi}{3}\cdot$
- En utilisant que $\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}$, en déduire $\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{\pi}{3}\cdot$
  Que peut-on dire du triangle $OAU_{\frac{\pi}{3}}$?
- Placer sur Γ les points $\varphi(\frac{\pi}{3})$, $\varphi(\frac{2\,\pi}{3})$, $\varphi(\frac{4\,\pi}{3})\cdot$

Remarque Dans certains domaines, on mesure les angles en degrés ; ces diverses mesures étant proportionnelles, il est aisé de convertir ; toutefois, les correspondances du tableau suivant doivent tenir du réflexe :

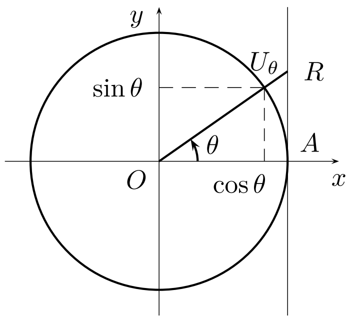
Mesure en radians	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
Mesure en degrés	180	90	60	45	30

3 La fonction tangente

Définition 16

Pour θ non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π, on pose $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot$

- Pour $\theta\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a $\cos\theta\neq 0$, ce qui justifie la définition.
- La fonction $\tan$, lire « tangente », est ainsi définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\,\pi\,;\ k\in\mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire pour tout nombre x réel non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π.
- En complétant la figure du cercle trigonométrique, le point R a pour coordonnées $(1,\tan\theta)$.
- Par suite, $\tan\theta$ est la pente de la droite (OU_θ).



p.78

Exercice 51 Justifier la valeur des coordonnées de R.

p.78

Exercice 52 Déterminer les valeurs de $\tan\frac{\pi}{4}$ et $\tan\frac{\pi}{3}\cdot$

p.78

Exercice 53 Montrer que pour tout $\theta\not\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$, on a $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\cdot$

Proposition 24

La fonction tan est π-périodique et impaire. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, elle est dérivable sur $I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\,\pi, \frac{\pi}{2} + k\,\pi\right[$ et :

$$\forall x \in I_k \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot$$

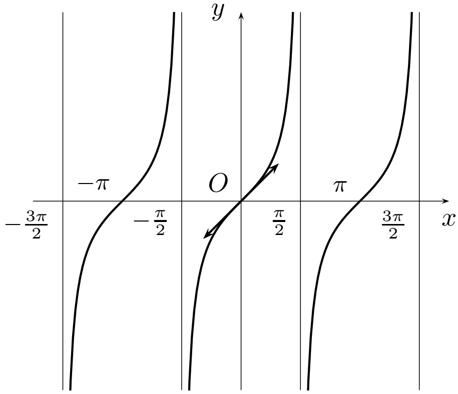
Elle est donc strictement croissante sur I_k et, en particulier, sur $I_0 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$·

Démonstration page 79

p.79 **Exercice 54** Montrer que $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to (-\frac{\pi}{2})^+} \tan x = -\infty$.

On en déduit le tableau de variations de tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et le graphe :

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
tan	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Courbe d'équation $y = \tan x$

Remarque Avec ce tableau (incluant les limites) et le théorème des valeurs intermédiaires, il est immédiat que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan x = y$.

p.79 **Exercice 55** Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vérifie $\sin x = -\frac{1}{5}$, que vaut $\tan x$?

p.79 **Exercice 56** Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vérifie $\cos x = \frac{1}{3}$ que vaut $\tan x$?

Corollaire 25

- Pour tout réel $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, on a :

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta, \quad \tan(\pi + \theta) = \tan\theta \quad \text{et} \quad \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta.$$

- Pour tout réel $\theta \not\equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$, on a $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}\cdot$

Démonstration. Conséquences immédiates des propriétés correspondantes sur sin et cos. □

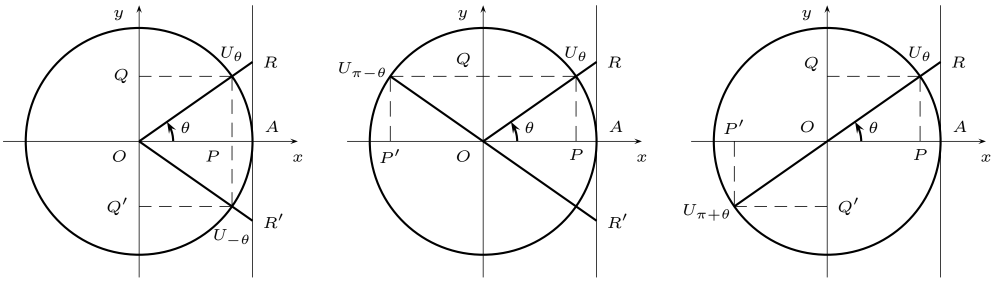
p.79 **Exercice 57** Montrer que pour $\theta \not\equiv 0\,[\frac{\pi}{2}]$, on a $\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\frac{1}{\tan\theta}\cdot$

4 Utilisation du cercle trigonométrique

Sur le cercle trigonométrique

- les points U_θ et $U_{-\theta}$ sont symétriques par rapport à (Ox)
(traduction géométrique de la parité du cos et de l'imparité du sin),
- les points U_θ et $U_{\pi-\theta}$ sont symétriques par rapport à (Oy)
(traduction géométrique des résultats du corollaire 19 de la page 53),
- les points U_θ et $U_{\pi+\theta}$ sont symétriques par rapport à O
(traduction géométrique des résultats du corollaire 21 de la page 54).

Les relations entre les lignes trigonométriques de θ, $\pi-\theta$ et $\pi+\theta$ sont donc évidentes dès que l'on visualise l'une des figures suivantes.



On « voit » ainsi immédiatement des formules telles que :

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta, \quad \sin(\pi+\theta) = -\sin\theta \quad \text{ou} \quad \tan(-\theta) = -\tan\theta.$$

Point méthode

De telles figures ne constituent pas une justification de ces formules mais permettent de les retenir sans le moindre effort de mémoire : il serait dommage de s'en priver !

p.80 **Exercice 58** Valeurs des lignes trigonométriques en $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$· et $\frac{5\pi}{4}$
(il s'agit de calculer le sinus, le cosinus et la tangente de ces valeurs).

p.80 **Exercice 59** Valeurs des lignes trigonométriques en $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$·

5 Retour sur les formules d'addition

Formules de duplication

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des formules d'addition.

Proposition 26

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(2\,\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \text{et} \quad \sin(2\,\theta) = 2\,\sin\theta\,\cos\theta,$$

la première relation étant souvent très utile sous l'une des formes :

$$1+\cos(2\,\theta) = 2\,\cos^2\theta \quad \text{et} \quad 1-\cos(2\,\theta) = 2\,\sin^2\theta.$$

Point méthode

Si un jour vous hésitez sur les deux dernières formules, vous pouvez utiliser :

- d'une part, que les quantités $1+\cos(2\,\theta)$ et $1-\cos(2\,\theta)$ sont positives ;
- d'autre part, que l'une est nulle pour $\theta = 0$, alors que l'autre vaut 2.

p.80 **Exercice 60** Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

p.80 **Exercice 61** Résoudre l'équation $\sin\theta = \sin 2\theta$.

Indication : commencer par factoriser le $\sin 2\theta$*.*

Formules d'addition pour $\tan$

Proposition 27

Pour $a \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$, $b \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$ et $(a+b) \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$, on a $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\,\tan b}$.

Principe de démonstration. Après avoir écrit $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$, utiliser les formules d'addition de $\sin$ et $\cos$, puis diviser haut et bas par $\cos a\,\cos b$. Démonstration page 80

p.81 **Exercice 62** Donner une formule analogue pour $\tan(a-b)$.

Point méthode

Quand on hésite pour savoir si le « $-$ » est au numérateur ou au dénominateur de la formule précédente, ne pas oublier que $\tan(a-b)$ doit être nul lorsque $a=b$, alors que $\tan(a+b)$ doit être nul lorsque $a=-b$.

Applications utiles

p.81 **Exercice 63** Transformation de $a\cos x + b\sin x$.

Soit a et b deux réels donnés tels que $(a,b) \neq (0,0)$.

- En mettant $\sqrt{a^2+b^2}$ en facteur, montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\,\cos x + b\,\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(x-\theta).$$

- Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\,\cos x + b\,\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\theta).$$

Exemple Dans un circuit RC, si l'intensité est sinusoïdale et donnée par :

$$i = I\,\cos(\omega t),$$

alors la tension aux bornes vaut $u = R\,I\,\cos(\omega t) + \frac{I}{C\,w}\sin(\omega t)$.
La transformation précédente permet de mettre cette tension sous la forme :

$$u = U\cos(\omega t + \varphi)$$

où U est l'amplitude de tension et φ le déphasage.

p.81

Exercice 64

- En développant $\cos(\theta+\varphi)$ et $\cos(\theta-\varphi)$, retrouver les formules de linéarisation de $\cos\theta\,\cos\varphi$ et de $\sin\theta\,\sin\varphi$, *i.e.* les formules donnant ces produits en fonction de la somme ou de la différence des premières quantités.
- En développant les quantités $\sin(\theta+\varphi)$ et $\sin(\theta-\varphi)$, retrouver de même la formule de linéarisation de $\sin\theta\,\cos\varphi$.

Expressions en fonction de la tangente de l'arc moitié

Pour a réel donné tel que $a \not\equiv \pi\,[2\pi]$, posons $t = \tan\frac{a}{2}\cdot$

- On a alors $\quad \cos a = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \quad$ et $\quad \sin a = \dfrac{2\,t}{1+t^2}\cdot$
- Si, de plus, $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, on a alors $\quad \tan a = \dfrac{2\,t}{1-t^2}\cdot$

p.81

Exercice 65 Justifier les trois formules précédentes.

Point méthode

Quand on hésite entre ces diverses formules, on peut utiliser que :

- ce sont des fractions en $2\,t$, $1+t^2$ et $1-t^2$;
- les fonctions cos et sin sont toujours définies, ce qui entraîne que leur dénominateur ne peut être ni $2\,t$ ni $1-t^2$, qui pour certaines valeurs de t poseraient des problèmes de définition ;
- la formule donnant $\tan a$ n'est qu'un cas particulier de la formule d'addition concernant la fonction tangente ;
- si l'on change a en $-a$, et donc t en $-t$, alors cos est invariant alors que sin, aussi bien que tan, se transforme en son opposé.

p.82

Exercice 66 Déterminer la valeur exacte de $\tan\dfrac{\pi}{8}\cdot$

6 Équations trigonométriques

Équations de la forme $\cos\theta = \cos\varphi$, $\sin\theta = \sin\varphi$ ou $\tan\theta = \tan\varphi$

- Il est exclu d'apprendre la moindre formule concernant ces équations !
- La visualisation du cercle trigonométrique (penser aux figures de la page 59) est amplement suffisante pour conclure que si θ et φ sont deux réels, alors :
  - la relation $\cos\theta = \cos\varphi$ est équivalente à $\theta \equiv \varphi\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv -\varphi\ [2\pi]$;
  - la relation $\sin\theta = \sin\varphi$ est équivalente à $\theta \equiv \varphi\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \pi - \varphi\ [2\pi]$;
  - la relation $\tan\theta = \tan\varphi$ est équivalente à $\theta \equiv \varphi\ [\pi]$.
- L'utilisation des tableaux de variations permet une justification rigoureuse des affirmations précédentes.

Justifications dans le cas de l'équation $\cos\theta = \cos\varphi$

- En utilisant le cercle trigonométrique, on voit que les réels θ et φ vérifient $\cos\theta = \cos\varphi$ si, et seulement si, les points U_θ et U_φ ont même abscisse (ce qui correspond à la première des trois figures de la page 59) ; il est alors immédiat que cela équivaut à dire que $\theta \equiv \varphi\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv -\varphi\ [2\pi]$.
- Justification rigoureuse.
  - Si les réels θ et φ vérifient $\theta \equiv \varphi\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv -\varphi\ [2\pi]$, la parité et la périodicité de la fonction cos montrent que l'on a $\cos\theta = \cos\varphi$.
  - Réciproquement, supposons $\cos\theta = \cos\varphi$ et considérons θ_0 et φ_0 tel que :

    $$\theta_0 \equiv \theta\ [2\pi], \quad \varphi_0 \equiv \varphi\ [2\pi], \quad \theta_0 \in [-\pi, +\pi] \quad \text{et} \quad \varphi_0 \in [-\pi, +\pi].$$

    La fonction cos étant 2π-périodique, on a $\cos\theta_0 = \cos\varphi_0$, et le tableau de variations de la fonction cos sur $[-\pi, +\pi]$ entraîne alors que l'on a, soit $\theta_0 = \varphi_0$, soit $\theta_0 = -\varphi_0$. On en déduit $\theta \equiv \varphi\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv -\varphi\ [2\pi]$.

Point méthode

L'utilisation du cercle trigonométrique est le moyen le plus efficace d'assurer les résultats précédents. En cas de doute, il est indispensable de s'y référer.

p.82 **Exercice 67** Soit $\alpha \in [0, \pi]$. Combien y a-t-il points U_θ tels que $\cos\theta = \cos\alpha$?

p.82 **Exercice 68** Résoudre l'équation $\sin\theta = \cos 2\theta$.

Indication : un sinus est un cosinus qui s'ignore !

Cas des équations de la forme $\cos\theta = a$, $\sin\theta = a$ ou $\tan\theta = a$.
Ici, a désigne un réel (paramètre) donné, et θ est l'inconnue.

- Le tableau de variations de la fonction $\cos$ (ou le cercle trigonométrique) montre que l'équation $\cos\theta = a$ ne possède de solution que si $a \in [-1, +1]$.

  Dans ce cas, il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\alpha = a$, et l'équation donnée s'écrit alors $\cos\theta = \cos\alpha$, équation que l'on a étudiée précédemment.
- L'équation $\sin\theta = a$ se traite de façon similaire.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $a = \tan\alpha$, et l'équation $\tan\theta = a$ s'écrit alors $\tan\theta = \tan\alpha$, équation que l'on a déjà étudiée.

p.82 **Exercice 69** Résoudre l'équation $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$.

Indication : introduire et factoriser l'expression polynomiale $2u^2 - 3u + 1$.

p.83 **Exercice 70** Résoudre l'équation $2\cos^2\theta - 3\sin\theta - 3 = 0$.

Indication : se ramener à une équation en $\sin\ldots$

p.83 **Exercice 71** Résoudre l'équation $\sin\theta = \sqrt{3}\cos\theta$.

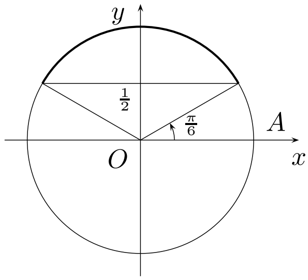
Indication : se ramener à une équation du type $\tan x = \cdots$

7 Inéquations trigonométriques

Comme les équations, les inéquations trigonométriques se résolvent aussi plus facilement en utilisant le cercle trigonométrique, une justification rigoureuse pouvant toujours être donnée à l'aide des tableaux de variations.

Exemple Pour $\theta \in [0, 2\pi]$ résoudre $\sin\theta \geqslant \frac{1}{2}$.

- On *voit* sur le cercle trigonométrique que θ est solution de l'inéquation donnée si, et seulement si, $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$.
- Le tableau de variations de la fonction sin (que l'on peut visualiser sur sa représentation graphique) *prouve* que l'on a $\sin\theta \geqslant \frac{1}{2}$ si, et seulement si, $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$.

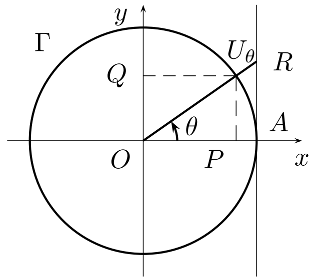


p.83 **Exercice 72** Résoudre l'inéquation $\sin^2\theta \leqslant \frac{1}{2}$.

p.84 **Exercice 73** Résoudre l'inéquation $\sin\theta \geqslant \sqrt{3}\cos\theta$.

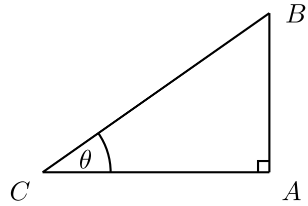
8 Le triangle rectangle

On suppose ici que $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cdot$



- Si l'on désigne par P et Q les projections orthogonales respectives de U_θ sur (Ox) et (Oy), alors, comme Γ est de rayon 1, on a :
$$\cos\theta = OP = \frac{OP}{OU_\theta} \quad \text{et} \quad \sin\theta = OQ = \frac{OQ}{OU_\theta}\cdot$$

- Si ABC est un triangle rectangle en A dont θ est une mesure de l'angle en C, alors les triangles CAB et OPU_θ sont semblables.
Par suite on a :
$$\cos\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \qquad (a)$$
$$\sin\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}\cdot \qquad (b)$$



On en déduit immédiatement :
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}\cdot \qquad (c)$$
Comme la somme des mesures des angles géométriques ACB et ABC vaut $\frac{\pi}{2}$, on retrouve facilement que, pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$
et donc $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{1}{\tan\theta}\cdot$

p.84 **Exercice 74** Retrouver ainsi les valeurs des fonctions $\cos$, $\sin$ et $\tan$ en $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}\cdot$

Indication : utiliser (si possible de tête) un demi triangle équilatéral.

p.84 **Exercice 75** Retrouver de même les valeurs des fonctions $\cos$, $\sin$ et $\tan$ en $\frac{\pi}{4}$.

Indication : utiliser (si possible de tête) un demi carré.

Point méthode

- La visualisation d'un triangle rectangle et la connaissance des formules (a), (b) et (c) ci-dessus, permettent de retrouver immédiatement, et sans risque, les relations entre les lignes trigonométriques de θ et celles de $\frac{\pi}{2} - \theta$.
- En ce qui concerne la transformation de x en $x + \frac{\pi}{2}$, il y a permutation des sin et cos mais avec « parfois » introduction d'un signe. Pour assurer le résultat, on peut travailler par « double détente » en visualisant $\frac{\pi}{2}+\theta$ sous la forme $\frac{\pi}{2}-(-\theta)$, et en utilisant les relations concernant les angles complémentaires puis celles concernant les angles opposés.

9 Formulaire muet

Pour finir, sous forme d'exercices, quelques questions qu'il est bon de se poser de temps en temps afin de bien ancrer ces formules de trigonométrie et d'éviter l'angoisse des veilles d'interrogations. Les réponses se trouvent parmi les pages précédentes.

Exercice 76 Quelles sont les lignes trigonométriques (c'est-à-dire le sinus, le cosinus et la tangente) de : 0, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, π, etc.

Exercice 77 Quelle relation entre $\tan^2\theta$ et $\cos^2\theta$?

Exercice 78

- Simplifier $\cos(-\theta)$, $\sin(-\theta)$, $\tan(-\theta)$.
- Simplifier $\cos(\pi-\theta)$, $\sin(\pi-\theta)$, $\tan(\pi-\theta)$.
- Simplifier $\cos(\theta+\pi)$, $\sin(\theta+\pi)$, $\tan(\theta+\pi)$.

Exercice 79

- Simplifier $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$.
- Simplifier $\cos(\theta+\frac{\pi}{2})$, $\sin(\theta+\frac{\pi}{2})$, $\tan(\theta+\frac{\pi}{2})$.

Exercice 80 Résolutions des équations $\cos u=\cos v$, $\sin u=\sin v$, $\tan u=\tan v$.

Exercice 81

- Développement de $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$, $\tan(a+b)$.
- Linéarisation de $\cos a\cos b$, $\sin a\sin b$, $\sin a\cos b$.

Exercice 82

- Factorisation de $1+\cos 2a$ et de $1-\cos 2a$.
- Linéarisation de $\cos^2 a$ et$\sin^2 a$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

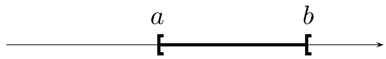
- Soit x un irrationnel et y un rationnel. Posons $z = x + y$.
  Si z était rationnel, alors $x = z - y$ le serait aussi (différence de deux rationnels), ce qui est contradictoire. Par suite, $z = x + y$ est irrationnel.
- Soit x un irrationnel et y un rationnel non nul. Posons $z = x\,y$.
  Comme $y \neq 0$, on a alors $x = z\,y^{-1}$. Si z était rationnel, alors x le serait (quotient de rationnels), ce qui est contradictoire. Par suite, $z = x\,y$ est irrationnel.
- La somme et le produit de deux irrationnels peuvent très bien être des nombres rationnels, comme par exemple :

$$(1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 1 \quad \text{et} \quad (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = -1.$$

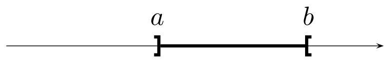
Exercice 2 *(Représentation d'un intervalle)*

Le segment $[a,b]$

L'intervalle $[a,b[$



L'intervalle ouvert $]a,b[$



La demi-droite fermée $[a,+\infty[$

Exercice 3

- En multipliant $d \leqslant c \leqslant 0$ par -1, on obtient $0 \leqslant -c \leqslant -d$.
  On peut alors multiplier avec la première inégalité (tous les termes sont positifs), ce qui donne $0 \leqslant -a\,c \leqslant -b\,d$ et donc $a\,c \geqslant b\,d$.
- Avec les hypothèses, on ne peut pas comparer $a\,d$ et $b\,c$ puisqu'il est facile de trouver un exemple pour lequel $a\,d > b\,c$, et un pour lequel $a\,d < b\,c$.

Exercice 4 Comme $a < b$, on a $a \leqslant b$ et donc $a\,c \leqslant b\,c$.

- Mais on ne peut pas conclure $a\,c < b\,c$, puisque si $c = 0$ alors $a\,c = b\,c = 0$.
- En revanche si $c > 0$, alors, comme $b - a > 0$, on a $(b-a)\,c > 0$ et, dans ce cas, on peut donc déduire $a\,c < b\,c$.

Exercice 5

1. Comme pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $a_1 \leqslant a_i \leqslant a_n$, l'égalité $a_1 = a_n$ nous donne $a_1 \leqslant a_i \leqslant a_1$ et donc $a_i = a_1$.
2. Par suite, si $a_1 = a_n$, alors, pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$, on a $a_i = a_{i+1} = a_1$. Donc, s'il existe $i \in [\![1,n-1]\!]$ tel que $a_i < a_{i+1}$, alors on a $a_1 < a_n$.

Exercice 6 En partant des inégalités $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, on obtient :

$$a + c \leqslant a + d \leqslant b + d.$$

1. Si $a + c = b + d$, alors on a $a + c = a + d = b + d$, et donc $c = d$ ainsi que $a = b$.
2. Supposons $c < d$. D'après le point précédent on ne peut pas avoir $a + c = b + d$ (ce qui entraînerait $c = d$). Comme on a $a + c \leqslant b + d$, on en déduit $a + c < b + d$.

Exercice 7 Dans chacun des cas, l'ensemble des majorants est $[1,+\infty[$.

Exercice 8

1. Pour exprimer que X n'est pas majorée, il suffit de nier l'assertion disant que X est majorée, ce qui donne $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists x \in X \quad x > a$.
2. Si a est un réel quelconque alors $x = a+1$ vérifie $x > a$, et donc $\mathbb{R}$ vérifie l'assertion que l'on vient d'écrire. Par suite, $\mathbb{R}$ n'est pas majoré.

Exercice 9 Supposons que a et b soient deux plus grands éléments de X ; on a alors :

- $a \leqslant b$ car b est plus grand élément de X et $a \in X$,
- $b \leqslant a$ car a est plus grand élément de X et $b \in X$.

Donc, par antisymétrie de la relation $\leqslant$, on a $a = b$.

Exercice 10 Le segment $[0,1]$ a 0 comme minimum et 1 comme maximum.

Exercice 11

1. L'assertion « X possède un maximum » peut s'écrire :
$$\exists a \in X \quad \forall x \in X \quad x \leqslant a.$$
Attention, ne oublier de quantifier le a (qui doit appartenir à X).
2. Il suffit de nier la relation précédente, ce qui donne :
$$\forall a \in X \quad \exists x \in X \quad x > a.$$

Exercice 12

L'intervalle $[0,1[$ ne possède pas de plus grand élément. En effet, pour tout $a \in [0,1[$, le réel $x = \frac{1+a}{2}$ vérifie $x \in [0,1[$ et $a < x$. On en déduit :
$$\forall a \in [0,1[\quad \exists x \in [0,1[\quad x > a,$$
ce qui prouve que $[0,1[$ ne possède pas de plus grand élément.

Exercice 13

- Si X possède a comme plus grand élément, alors a est un majorant de X.
- L'intervalle $[0,1[$ est majoré mais ne possède pas de plus grand élément.

Exercice 14 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

- Si $x \geqslant y$, alors $x = \max\{x,y\}$ et $y = \min\{x,y\}$.
- Sinon, alors on a $x < y$ et donc $y = \max\{x,y\}$ et $x = \min\{x,y\}$.

Proposition 3

Première inégalité. D'après la proposition précédente, on a $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ et $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$. Par addition, on en déduit :

$$-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|$$

ce qui, d'après la proposition précédente, entraîne $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.

Seconde inégalité. En appliquant la première inégalité avec $(x-y)$ et x, on obtient :

$$|x| = |(x-y)+y)| \leqslant |x-y|+|y|$$

et donc $|x|-|y| \leqslant |x-y|$.

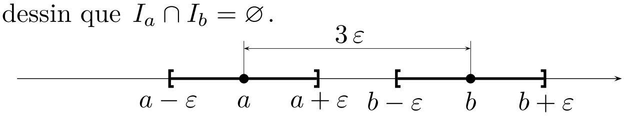
En permutant x et y, on en déduit $|y|-|x| \leqslant |y-x| = |x-y|$.

Comme $\big||x|-|y|\big| = \max\big(|x|-|y|, |y|-|x|\big)$, cela donne :

$$\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|.$$

Exercice 15

- On voit sur un dessin que $I_a \cap I_b = \varnothing$.



- Prouvons-le par l'absurde.
  Supposons donc $I_a \cap I_b \neq \varnothing$ et prenons $c \in I_a \cap I_b$. On a alors :

  $$3\,\varepsilon = |b-a| = |(b-c)+(c-a)| \leqslant |b-c|+|c-a| \leqslant 2\,\varepsilon,$$

  ce qui est impossible puisque $\varepsilon > 0$.

Exercice 16

1. Sur le dessin (réalisé dans le cas où $b \geqslant a$), on voit que :

$$b = \max(a,b) = \frac{a+b}{2} + \left|\frac{b-a}{2}\right| \quad \text{et} \quad a = \min(a,b) = \frac{a+b}{2} - \left|\frac{b-a}{2}\right|.$$

2. Pour le démontrer, il suffit de distinguer deux cas :
   - Si $a \leqslant b$, alors $\frac{b-a}{2} \geqslant 0$ et donc $\left|\frac{b-a}{2}\right| = \frac{b-a}{2}$, ce qui donne :

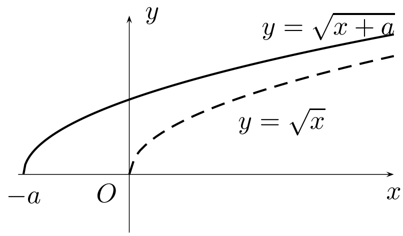
   $$\frac{a+b}{2} + \left|\frac{b-a}{2}\right| = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} = b = \max(a,b)$$
   $$\frac{a+b}{2} - \left|\frac{b-a}{2}\right| = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} = a = \min(a,b).$$

   - Sinon, on a $b < a$, et le raisonnement est analogue, avec $\left|\frac{b-a}{2}\right| = -\frac{b-a}{2}$.

Exercice 17

- Si $m = 0$, alors $f_m : x \mapsto x$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- Si $m \neq 0$, alors $f_m(x)$ est définie pour tout $x \neq -\dfrac{1}{m}$.

Exercice 18



Le graphe de $g : \begin{array}{ccc} [-a,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+a} \end{array}$

se déduit de celui de $f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

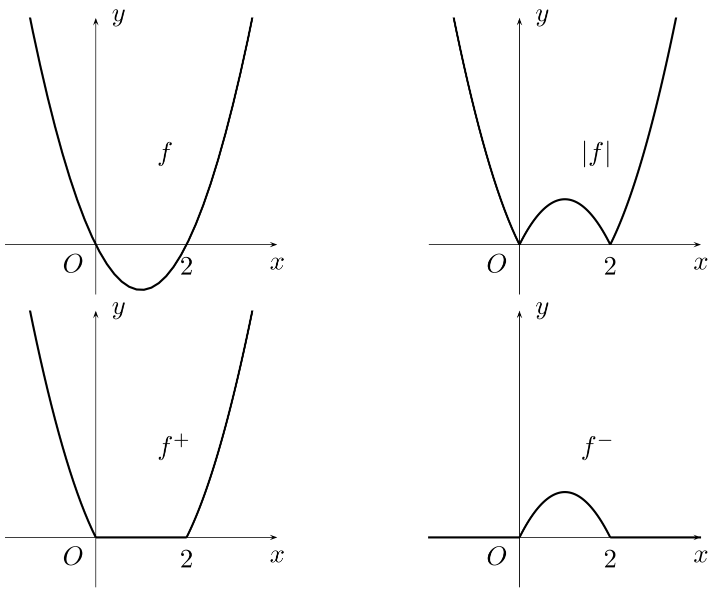
par la translation de vecteur $(-a,0)$.

Exercice 19 Il suffit de traduire mot à mot la définition :

$$\exists T \in \mathbb{R}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x).$$

Exercice 20

1. Si $f(x) \geqslant 0$, alors $|f|(x) = f(x)$ et donc $f^+(x) = f(x)$ et $f^-(x) = 0$.
   Si $f(x) \leqslant 0$ alors $|f|(x) = -f(x)$ et donc $f^+(x) = 0$ et $f^-(x) = -f(x)$.
2. Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 2\,x \end{array}$, on obtient les graphes :



3. C'est la diode qui permet d'obtenir f^+ à partir de f.

Exercice 21 Il est facile de justifier que :

- la somme de deux fonctions paires (respectivement de deux fonctions impaires) est une fonction paire (respectivement une fonction impaire) ;
- le produit de deux fonctions paires, ou de deux fonctions impaires, est paire ;
- le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est impaire.

Exercice 22

1. Soit $x_1 \in X$ et $x_2 \in X$ tels que $x_1 \leqslant x_2$. Comme f et g sont croissantes, on a :
$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \qquad \text{et} \qquad g(x_1) \leqslant g(x_2).$$
Par addition de ces inégalités, on déduit :
$$(f+g)(x_1) = f(x_1) + g(x_1) \leqslant f(x_2) + g(x_2) = (f+g)(x_2),$$
ce qui prouve que $f+g$ est croissante.
2. Soit $x_1 \in X$ et $x_2 \in X$ tels que $x_1 < x_2$. Comme f est strictement croissante et g croissante, on a :
$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{et} \qquad g(x_1) \leqslant g(x_2).$$
Par addition de ces inégalités dont l'une est stricte, on déduit :
$$(f+g)(x_1) = f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2) = (f+g)(x_2),$$
ce qui prouve que $f+g$ est strictement croissante.
3. Soit x_1 et x_2 deux éléments de X vérifiant $x_1 \leqslant x_2$. Comme f et g sont croissantes on a :
$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad \text{et} \quad g(x_1) \leqslant g(x_2).$$
Par multiplication de ces inégalités *entre nombres positifs*, on déduit :
$$f(x_1)\, g(x_1) \leqslant g(x_2)\, f(x_2),$$
ce qui prouve que $f\,g$ est croissante.
4. Soit $x_1 \in X$ et $x_2 \in X$ tels que $x_1 \leqslant x_2$. Comme f est croissante, on a $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ et, comme $\lambda \geqslant 0$, on en déduit $\lambda f(x_1) \leqslant \lambda f(x_2)$; par suite la fonction λf est croissante.

   En supposant f strictement croissante, pour conclure $\lambda\, f$ strictement croissante, on a besoin de $\lambda > 0$ (sauf bien sûr si X ne contient qu'un élément).

Exercice 23

1. Comme $f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{8} < 0 = f(0)$, la fonction f n'est pas croissante.

   Comme $f(2) = 6 > 0 = f(0)$, la fonction f n'est pas décroissante.

   Par suite, f n'est pas monotone.
2. La fonction f étant la somme des fonctions $x \mapsto x^3$ et de $x \mapsto 1-x$, toutes deux monotones, on en déduit que la somme de deux fonctions monotones n'est pas nécessairement monotone.

Exercice 24

1. Supposons $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$. Soit $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$.

   Alors ils sont de même signe et $x_1\, x_2 > 0$. Par suite :
$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = -\frac{x_2 - x_1}{x_1\, x_2}$$
est du signe opposé à celui de $x_2 - x_1$, ce qui prouve que f est décroissante sur I.
2. La fonction f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car :
$$-1 \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(-1) < f(1).$$

Proposition 9 En notant $\nearrow$ pour « croissante » et $\searrow$ pour « décroissante », si x et y sont deux éléments de X vérifiant $x \leqslant y$, le tableau suivant récapitule les 4 cas possibles :

	$f \nearrow$	$f \searrow$
	$f(x) \leqslant f(y)$	$f(x) \geqslant f(y)$
$g \nearrow$	$g\big(f(x)\big) \leqslant g\big(f(y)\big)$	$g\big(f(x)\big) \geqslant g\big(f(y)\big)$
$g \searrow$	$g\big(f(x)\big) \geqslant g\big(f(y)\big)$	$g\big(f(x)\big) \leqslant g\big(f(y)\big)$

On fait de même pour la stricte monotonie avec, partout, des inégalités strictes.

Exercice 25

1. Si f reste positive, alors $1/f$ est la composée
   - de f qui est monotone,
   - de la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ qui est décroissante et donc monotone ;

   par suite elle est monotone.
2. Si f reste négative, alors $1/f$ est la composée
   - de f qui est monotone ,
   - de la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R}_-^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ qui est décroissante et donc monotone ;

   par suite elle est monotone.
3. Si $X = \mathbb{R}^*$, la fonction $f : x \mapsto x$ est croissante et pourtant $1/f$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}^*$ puisque l'on a :
   - $f(1) > f(2)$, ce qui prouve qu'elle n'est pas croissante ;
   - $f(-1) < f(1)$, ce qui prouve qu'elle n'est pas décroissante.

Exercice 26

- Il suffit de nier $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad f(x) \leqslant M$, ce qui donne :
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in X \quad f(x) > M.$$
- La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ n'est pas majorée puisque, pour tout $M \in \mathbb{R}$, le réel $x = \max(0, M+1)$ vérifie $x \in \mathbb{R}_+$ et $f(x) > M$.

Exercice 27

1. Soit f_1 et f_2 deux fonctions bornées. On peut donc trouver deux réels M_1 et M_2 (nécessairement positifs) tels que :
$$\forall x \in X \quad |f_1(x)| \leqslant M_1 \quad \text{et} \quad |f_2(x)| \leqslant M_2.$$
   - Par inégalité triangulaire et addition, on en déduit :
$$\forall x \in X \quad |(f_1 + f_2)(x)| = |f_1(x) + f_2(x)| \leqslant |f_1(x)| + |f_2(x)| \leqslant M_1 + M_2,$$
     ce qui prouve que $f_1 + f_2$ est bornée.

- Par produit d'inégalités entre nombres positifs, on en déduit :
$$\forall x \in X \quad |(f_1\, f_2)(x)| = |f_1(x)\, f_2(x)| = |f_1(x)|\,|f_2(x)| \leqslant M_1\, M_2,$$
ce qui prouve que $f_1\, f_2$ est bornée.

2. Soit f_1 et f_2 deux fonctions majorées. On peut donc trouver deux réels M_1 et M_2 tels que :
$$\forall x \in X \quad f_1(x) \leqslant M_1 \quad \text{et} \quad f_2(x) \leqslant M_2.$$
   - Par addition, on en déduit :
$$\forall x \in X \quad (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \leqslant M_1 + M_2,$$
ce qui prouve que $f_1 + f_2$ est majorée.
   - En revanche pour le produit, on ne peut pas conclure, comme le prouve l'exemple des fonctions $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{array}$ et $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -1 \end{array}$, qui sont toutes deux majorées mais dont le produit n'est pas majoré.

Exercice 28

1. Pour dire que f possède un minimum, on écrit :
$$\exists a \in X \quad \forall x \in X \quad f(x) \geqslant f(a).$$
2. Pour énoncer que f ne possède pas de minimum, on écrit donc :
$$\forall a \in X \quad \exists x \in X \quad f(x) < f(a).$$

Exercice 29

- Cette fonction est évidemment minorée par 0.
- Elle ne possède pas de minimum car, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, le réel $x = 2\,a$ vérifie $f(x) = \frac{1}{2} f(a) < f(a)$.

Exercice 30

- Cette fonction est majorée et possède un maximum en 0 qui vaut 1 puisque
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1 = f(0).$$
- Elle ne possède pas de minimum car elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x+1) < f(x)$.
Remarque : on peut prouver la stricte décroissance de f sur $\mathbb{R}_+$ en utilisant les résultats des exercices 22 de la page 36, et 25 de la page 37.

Exercice 31 La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$.

- Si $a > 0$, pour tout $x \neq a$, on a :
$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$
et donc f dérivable en a avec $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.
- En 0, elle n'est pas dérivable car pour tout $x > 0$:
$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice 32

- Les relations (c) et (d) n'ont aucun sens car le symbole « $'$ » ne peut s'appliquer qu'à des fonctions alors que $\sin(2x)$ est un réel.
- Entre (a) et (b), c'est la relation (a) qui est correcte car $\sin'(2x)$ représente la valeur en $2x$ de la dérivée de la fonction $\sin$.
- La valeur $2\,\cos 2x$ est égale à $f'(x)$ lorsque $f : x \mapsto \sin(2x)$.

  D'ailleurs, au lieu d'introduire f et d'écrire $f'(x) = 2\,\cos 2x$, on peut aussi écrire directement $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(2x) = 2\,\cos(2x)$.

Exercice 33 La fonction homographique $f : x \mapsto \dfrac{a\,x+b}{c\,x+d}$ est dérivable sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty, -\frac{d}{c}[$ et $I_2 =]-\frac{d}{c}, +\infty[$, et l'on a :

$$\forall x \in I_2 \cup I_2 \quad f'(x) = \frac{a\,d - b\,c}{(c\,x+d)^2}.$$

Exercice 34 La fonction donnée est définie sur $\mathbb{R}$ puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2x\cos a + 1 = (x-\cos a)^2 + \sin^2 a \geqslant \sin^2 a > 0.$$

- En dérivant comme un quotient, on obtient :

$$f'(x) = \frac{\left(x^2 - 2\,x\cos a + 1\right)^5 - 5\,(x-\cos a)\,(2\,x - 2\,\cos a)\left(x^2 - 2\,x\cos a + 1\right)^4}{\left(x^2 - 2\,x\cos a + 1\right)^{10}}$$

  expression dans laquelle il ne faut surtout pas oublier la simplification par $\left(x^2 - 2\,x\cos a + 1\right)^4$, sinon on ne s'en sort pas !
- En dérivant comme un produit, on obtient :

$$f'(x) = \left(x^2 - 2\,x\cos a + 1\right)^{-5} - \frac{(5\,x - 5\,\cos a)\,(2\,x - 2\,\cos a)}{\left(x^2 - 2\,x\cos a + 1\right)^6}$$

  qui donne directement :

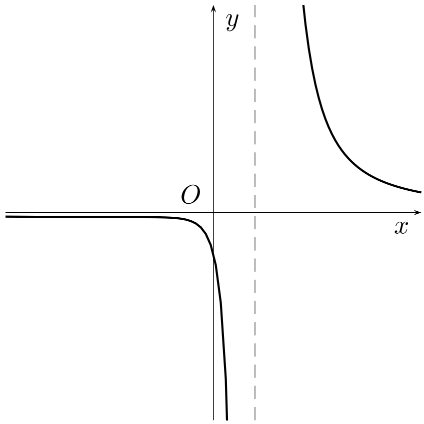
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(x^2 - 2\,x\cos a + 1\right) - (5\,x - 5\,\cos a)\,(2\,x - 2\,\cos a)}{\left(x^2 - 2\,x\cos a + 1\right)^6} \\ &= -\frac{9\,x^2 - 18\,x\cos a - 1 + 10\,(\cos a)^2}{\left(x^2 - 2\,x\cos a + 1\right)^6}. \end{aligned}$$

Exercice 35 $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 + 3\,x^2 + 3\,x + 2 \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1'(x) = 3\,x^2 + 6\,x + 3 = 3(x+1)^2 \geqslant 0.$$

Cette fonction f_1 est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 36 La fonction f_2 est définie sur $I_1 =]-\infty, 1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$;



elle y est dérivable, et pour $x \in I_1$ ou $x \in I_2$:

$$f_2'(x) = -\frac{(x+2)^2}{(x-1)^4} \leqslant 0.$$

Cette fonction f_2 est donc décroissante sur chacun des intervalles I_1 et I_2.

Comme on peut se rendre compte sur la représentation graphique obtenue à la machine, la fonction n'est pas décroissante sur son domaine de définition. On le justifie en disant que $f(0) = -1 < f(2) = 7$.

Exercice 37 La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}$

est dérivable en tout point de son domaine de définition, et sa dérivée est nulle. Pourtant la fonction f n'est pas constante.

Exercice 38 Avec les hypothèses, la fonction $f-g$ a une dérivée nulle sur l'intervalle I ; par suite elle est constante, ce qui prouve le résultat.

Exercice 39 Le calcul de dérivée de l'exercice 36 de la page 45 montre que f_2 est strictement décroissante sur chacun des intervalles de son domaine de définition. On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f_2	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

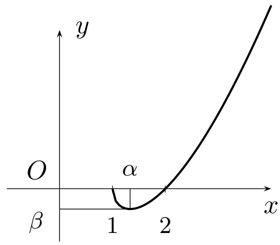
Exercice 40

1. La fonction f_3 n'est pas dérivable en 1 puisque la relation :
$$\forall x \in]1, +\infty[\quad \frac{f_3(x) - f_3(1)}{x-1} = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}$$
entraîne que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = -\infty$.
2. En revanche, pour $x \in]1, +\infty[$, elle est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et $f_3'(x) = \dfrac{3x-4}{2\sqrt{x-1}}$.
3. Donc si $x \in]1, +\infty[$, alors $f_3'(x)$ est du signe de $3x - 4$. Par suite, en utilisant le résultat de la proposition 15 de la page 45, la fonction f_3 est :
   - strictement croissante sur l'intervalle $[\frac{4}{3}, +\infty[$;

- strictement décroissante sur l'intervalle $]1, \frac{4}{3}]$;
  nous admettrons qu'elle est strictement décroissante aussi sur $[1, \frac{4}{3}]$.

On en déduit le tableau de variations de f_3 que l'on peut vérifier à l'aide d'une représentation graphique obtenue à la machine.

x	1		$\alpha = \frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$f_3'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$			
f_3	0	$\searrow$	$\beta = -\frac{2}{3^{3/2}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Exercice 41

1. Supposons f strictement croissante sur un intervalle I.
   Soit y et y' deux éléments de J vérifiant $y < y'$.
   Si $f^{-1}(y) \geqslant f^{-1}(y')$, alors, comme f est croissante, on a :
   $$y = f\left(f^{-1}(y)\right) \geqslant f\left(f^{-1}(y')\right) = y'$$
   ce qui est impossible. Par suite, on a $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$, ce qui prouve que f^{-1} est strictement croissante.
   Démonstration analogue dans le cas où f est strictement décroissante.
2. Supposons f impaire et donc I symétrique par rapport à 0.
   Soit $y \in J$. Il existe alors $x \in I$ tel que $y = f(x)$.
   Comme f est impaire, on en déduit $-y = f(-x)$ avec $-x \in I$. Par suite :
   - l'intervalle J, image de f, est symétrique par rapport à 0 ;
   - pour $y \in J$, on a $f^{-1}(-y) = -x = -f^{-1}(y)$, et donc f est impaire.

   Une fonction paire (sur un intervalle symétrique par rapport à 0) ne peut pas être strictement monotone. Donc il n'y a pas de question à se poser.

Exercice 42 Supposons f^{-1} dérivable en $b = f(a)$. Comme
$$\forall x \in I \quad f^{-1}\big(f(x)\big) = x,$$
la proposition 11 de la page 43 permet d'écrire : $\left(f^{-1}\right)'(b)\, f'(a) = \mathrm{Id}'(a) = 1$, ce qui permet de retrouver la valeur de $\left(f^{-1}\right)'(b)$.

Exercice 43 Après avoir calculé f', f'' voire f''', il est assez simple de deviner puis de démontrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}} = (-1)^n \,\frac{n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1}{x^{n+1}}.$$
Évidemment, il faut dériver $f^{(n)}$ comme une puissance négative, et non pas comme un quotient (*cf.* point méthode de la page 44).

Exercice 44

(a) L'équation $\cos\theta = 1$ a pour ensemble de solutions $\{2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(*b*) L'équation $\cos\theta = -1$ a pour ensemble de solutions $\{\pi + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(*c*) L'équation $\cos\theta = 0$ a pour ensemble de solutions $\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(*d*) * Pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation $\cos\theta = x$ possède (au moins) une solution si, et seulement si, l'on a $x \in [-1, 1]$.
  * Pour tout $x \in [-1, 1]$, l'équation $\cos\theta = x$ possède une et une seule solution dans l'intervalle $[0, \pi]$.

Proposition 18 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- La fonction $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(\alpha - x)\,\cos x - \sin(\alpha - x)\,\sin x \end{array}$

  est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$u'(x) = \big(\sin(\alpha - x)\,\cos x - \cos(\alpha - x)\,\sin x\big) \\ - \big(-\cos(\alpha - x)\,\sin x + \sin(\alpha - x)\,\cos x\big) = 0.$$

  Par suite, u est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(\alpha - x)\,\cos(x) - \sin(\alpha - x)\,\sin x = u(x) = u(0) = \cos\alpha.$$

  En remplaçant α par $a + b$ et x par b, on en déduit le premier résultat.

- On trouve de même que v est constante et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(x + \alpha)\,\cos(x) + \cos(x + \alpha)\,\sin x = v(x) = v(0) = \sin\alpha.$$

  On obtient alors le second résultat en remplaçant α par $a + b$ et x par b.

Exercice 45 En utilisant parité et imparité des fonctions $\cos$ et $\sin$, la substitution de b en $-b$ donne immédiatement :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

et :

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Corollaire 19 Les deux premières relations s'obtiennent aisément en utilisant les formules précédentes ainsi que les valeurs de $\cos\pi$ et $\sin\pi$.

Comme $\sin$ et $\cos$ sont 2π-périodiques, on en déduit, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\sin(2k\pi + \pi - x) = \sin x \quad \text{et} \quad \cos(2k\pi + \pi - x) = -\cos x.$$

Les propriétés de symétrie s'en déduisent immédiatement (*cf.* partie II.2).

Exercice 46 Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si k est pair, alors, comme $\sin$ et $\cos$ sont 2π-périodiques, on a :

$$\sin(x + k\pi) = \sin x \quad \text{et} \quad \cos(x + k\pi) = \cos x.$$

- Si k est impair, alors $k + 1$ est pair, et on a donc :

$$\sin x = \sin\big(x + (k+1)\pi\big) = -\sin(x + k\pi) \quad \text{et} \quad \cos(x + k\pi) = -\cos x.$$

Par suite, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x \quad \text{et} \quad \cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x.$$

Proposition 22

- La formule $\cos(a - b) = \cdots$ avec $a = b = \theta$ donne immédiatement le résultat.
- Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$.

  On a alors $x^2 \leqslant 1$ et donc $|x| \leqslant 1$. Les variations sur $[0, \pi]$ de la fonction cosinus montrent qu'elle atteint tout réel de $[-1, 1]$ et donc qu'il existe $\theta_0 \in [0, \pi]$ tel que $x = \cos\theta_0$.

  On a alors : $\sin^2\theta_0 = 1 - \cos^2\theta_0 = 1 - x^2 = y^2$ et donc $y = \pm\sin\theta_0$.

  * Si $y = \sin\theta_0$, alors $x = \cos\theta_0$ et $y = \sin\theta_0$;
  * Si $y = -\sin\theta_0$, alors $x = \cos(-\theta_0)$ et $y = \sin(-\theta_0)$.

  Par suite on a bien trouvé $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$.

Exercice 47

(a) L'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(\theta) = A$ est $\{2\,k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
C'est aussi l'ensemble des solutions de l'équation $\cos\theta = 1$.

(b) L'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(\theta) = B$ est $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C'est aussi l'ensemble des solutions de l'équation $\sin\theta = 1$.

(c) L'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(\theta) = C$ est $\{(2\,k+1)\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
C'est aussi l'ensemble des solutions de l'équation $\cos\theta = -1$.

(d) L'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(\theta) = D$ est $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C'est aussi l'ensemble des solutions de l'équation $\sin\theta = -1$.

Exercice 48

- En utilisant $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, avec $x = \frac{\pi}{4}$, on obtient $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})\cdot$

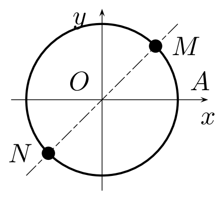
  La relation fondamentale donne alors $\cos^2(\frac{\pi}{4}) = \sin^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$, et, comme les fonctions sin et cos sont positives sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$$

  Comme les deux coordonnées de $U_{\frac{\pi}{4}}$ sont égales, $(OU_{\frac{\pi}{4}})$ est la première bissectrice.

- D'après ce qui précède, il est aisé de placer $M = \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot$

  Comme $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi$, on a $\varphi\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot$
  Comme $\frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi$, les points $\varphi\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ et $N = \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$ sont symétriques par rapport à l'origine.



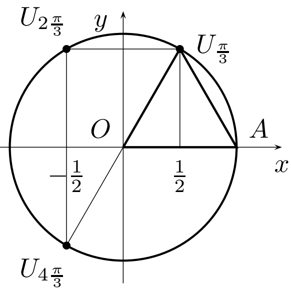
Proposition 23

- Les fonctions $\sin$ et $\cos$ étant 2π-périodiques, il est évident que, si :
$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta_1 = \theta_2 + 2\,k\,\pi,$$
alors $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ et $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$.
- Réciproquement, supposons $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ et $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$. En utilisant une formule d'addition, on obtient $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$, et on a déjà vu que cela entraîne $\exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta_1 - \theta_2 = 2\,k\,\pi$, ce qui est une autre écriture du résultat.

Exercice 49 L'équation $3\,\theta + \pi \equiv -\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right)\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$ est équivalente à $5\,\theta \equiv -\frac{2\pi}{3}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$ et donc à $\theta \equiv -\frac{2\pi}{15}\ \left[\frac{\pi}{10}\right]$, ce qui donne comme ensemble de solutions :
$$\left\{-\frac{2\pi}{15} + k\,\frac{\pi}{10}\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
On obtient donc 20 images sur le cercle trigonométrique.

Exercice 50

- La formule d'addition $\cos(a+b) = \cdots$ avec $a = b = \frac{\pi}{3}$ donne :
$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1.$$
- Comme $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, on a $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et le réel $u = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ vérifie :
$$-u = 2\,u^2 - 1 \quad \text{ou encore} \quad 2\,u^2 + u - 1 = 0.$$
Étant donné que $2\,u^2 + u - 1 = (u+1)\,(2u-1)$ et que $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \neq -1$, on en déduit $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.



La relation fondamentale donne alors $\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$, et, comme $\frac{\pi}{3} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$
Le triangle $OAU_{\frac{\pi}{3}}$ est isocèle, car on a $OA = OU_{\frac{\pi}{3}} = 1$; de plus son angle en O a pour mesure $\frac{\pi}{3}\cdot$ Il est donc équilatéral.
- On en déduit la représentation graphique.

Exercice 51 Soit $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$. Par définition, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées de R soient $(1, y)$. Comme les points 0, U_θ et R sont alignés, on peut trouver $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OR} = k\,\overrightarrow{OU}_\theta$, ce qui donne :
$$1 = k\,\cos\theta \quad \text{et} \quad y = k\,\sin\theta.$$
On en déduit immédiatement $y = \tan\theta$.

Exercice 52 En utilisant la définition, on trouve $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ et $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Exercice 53 Diviser la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ par $\cos^2\theta$ qui est non nul.

Proposition 24

- La fonction $\tan$ est définie sur $D = \{x \in \mathrm{IR} \mid x \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]\}$.
  - Si $x \in D$ alors $-x \in D$ ainsi que $x + \pi \in D$ et $x - \pi \in D$.
  - On a de plus :

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x,$$

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$

- En dérivant $\tan x = \sin x \dfrac{1}{\cos x}$ comme un produit, on trouve $\tan' x = 1 + \tan^2 x$.

  En dérivant $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ comme un quotient, on trouve $\tan' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot$
- Comme :

$$\forall x \in I_k \quad \tan' x > 0,$$

  la fonction $\tan$ est strictement croissante sur l'intervalle I_k.

Exercice 54

- Lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures, $\cos x$ tend vers 0 par valeurs positives, alors que $\sin x$ tend vers 1. On en déduit $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty$.
- La fonction $\tan$ étant impaire, il s'ensuit $\lim\limits_{x \to (-\frac{\pi}{2})^+} \tan x = -\infty$.

Exercice 55 Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\sin x = -\frac{1}{5}\cdot$

On en déduit $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{25}} = \dfrac{25}{24}$ et donc $\tan^2 x = \dfrac{1}{24}$,

ce qui entraîne $\tan x = \pm \dfrac{\sqrt{6}}{12}\cdot$

Comme $\sin x$ et $\tan x$ sont de même signe sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit :

$$\tan x = -\frac{\sqrt{6}}{12}\cdot$$

Exercice 56 Supposons $\cos x = \frac{1}{3}\cdot$ Comme précédemment on a :

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 9 \quad \text{et donc} \quad \tan x = \pm 2\sqrt{2}.$$

Ici il est impossible de faire mieux car, avec l'hypothèse $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, le réel $\tan x$ peut être aussi bien positif que négatif.

- Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\cos x = \frac{1}{3}$ alors $\tan x = 2\sqrt{2}$;
- Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ et $\cos x = \frac{1}{3}$ alors $\tan x = -2\sqrt{2}$.

Exercice 57 Avec l'hypothèse $\theta \not\equiv 0\,[\frac{\pi}{2}]$, les réels $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ et $\tan\theta$ sont définis et l'on a $\tan\theta \neq 0$. Comme pour les fonctions $\sin$ et $\cos$, on peut écrire :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) = \frac{1}{\tan(-\theta)} = -\frac{1}{\tan(\theta)}\cdot$$

Exercice 58 On sait que $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\tan\frac{\pi}{4} = 1$. Pour les autres valeurs, on utilise que $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$ ont pour somme π, et que $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$ diffèrent de π, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\cos\frac{3\pi}{4} &= -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\frac{5\pi}{4} &= -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\sin\frac{3\pi}{4} &= \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin\frac{5\pi}{4} &= -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\tan\frac{3\pi}{4} &= -\tan\frac{\pi}{4} = -1 & \tan\frac{5\pi}{4} &= \tan\frac{\pi}{4} = 1
\end{aligned}$$

Les égalités précédentes se voient sur le cercle trigonométriques, il ne faut pas se priver de regarder.

Exercice 59 Avec la même démarche que dans l'exercice précédent, on obtient :

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi}{3} &= -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} & \cos\frac{4\pi}{3} &= -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\\
\sin\frac{2\pi}{3} &= \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin\frac{4\pi}{3} &= -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\
\tan\frac{2\pi}{3} &= -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} & \tan\frac{4\pi}{3} &= \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Exercice 60 Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

En utilisant $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$, on en déduit $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}\cdot$

Exercice 61 L'équation proposée est définie sur $\mathbb{R}$ et s'écrit aussi :

$$\big(1 - 2\cos\theta\big)\sin\theta = 0. \qquad (*)$$

Comme un produit de deux réels est nul si, et seulement si, l'un des deux est nul, un réel θ est solution de $(*)$ si, et seulement si :

- soit $\sin\theta = 0$, ce qui est équivalent à $\theta \equiv 0\ [\pi]$,
- soit $\cos\theta = \frac{1}{2}$, ce qui est équivalent à $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Par suite l'ensemble des solutions de l'équation donnée est :

$$S = \{k\pi\,;\ k\in\mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,;\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

ce qui correspond à 4 points sur le cercle trigonométrique.

Proposition 27 Avec les hypothèses, $\tan(a+b)$, $\tan a$ et $\tan b$ sont définis, et :

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a\,\cos b + \sin b\,\cos a}{\cos a\,\cos b - \sin b\,\sin a}\cdot$$

On obtient la formule attendue en divisant haut et bas par $\cos a\,\cos b$, qui est non nul.

Exercice 62 L'imparité de la fonction tan permet de déduire cette formule de la précédente, en changeant b en $-b$, ce qui donne :
$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\,\tan b}\cdot$$

Exercice 63 En mettant $\sqrt{a^2+b^2}$ (non nul) en facteur, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on obtient :
$$a\,\cos x+b\,\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\sin x\right)\cdot$$

- Comme $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, on peut trouver $\theta\in\mathbb{R}$ tel que :
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\theta\quad\text{et}\quad\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\theta.$$
On a alors :
$$a\,\cos x+b\,\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\big(\cos\theta\,\cos x+\sin\theta\,\sin x\big)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta).$$
- En prenant θ tel que $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\theta$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\theta$, on a :
$$a\,\cos x+b\,\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\big(\sin\theta\,\cos x+\cos\theta\,\sin x\big)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+x).$$

Exercice 64 En additionnant et en soustrayant les relations :
$$\cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\,\cos\varphi-\sin\theta\,\sin\varphi$$
$$\cos(\theta-\varphi)=\cos\theta\,\cos\varphi+\sin\theta\,\sin\varphi,$$
on obtient :
$$2\,\cos\theta\,\cos\varphi=\cos(\theta-\varphi)+\cos(\theta+\varphi)$$
$$2\,\sin\theta\,\sin\varphi=\cos(\theta-\varphi)-\cos(\theta+\varphi).$$
De même, en additionnant les relations :
$$\sin(\theta+\varphi)=\sin\theta\,\cos\varphi+\cos\theta\,\sin\varphi$$
$$\sin(\theta-\varphi)=\sin\theta\,\cos\varphi-\cos\theta\,\sin\varphi,$$
on obtient :
$$2\,\sin\theta\,\cos\varphi=\sin(\theta+\varphi)+\sin(\theta-\varphi).$$

Exercice 65 Avec l'hypothèse $a\not\equiv\pi\;[2\pi]$ la quantité $t=\tan\dfrac{a}{2}$ est bien définie.

- On a alors $\cos a=\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}$, et donc :
$$\cos a=\cos^2\frac{a}{2}\left(1-\tan^2\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{1+\tan^2\frac{a}{2}}\left(1-\tan^2\frac{a}{2}\right)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot$$
- On a de même :
$$\sin a=2\,\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}=2\,\tan\frac{a}{2}\cos^2\frac{a}{2}=\frac{2\,\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}=\frac{2\,t}{1+t^2}\cdot$$
- En supposant $a\not\equiv\frac{\pi}{2}\;[\pi]$, alors $\tan a$ est défini, et l'on obtient directement :
$$\tan a=\frac{2\,\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}=\frac{2\,t}{1-t^2}\cdot$$

Exercice 66 Posons $u = \tan\frac{\pi}{8}$. Comme $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, on a :

$$1 = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{2\,\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}} = \frac{2\,u}{1-u^2}.$$

On en déduit :

$$0 = u^2 + 2\,u - 1 = 0 = (u+1)^2 - 2$$

ce qui entraîne :

$$u = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Comme $\frac{\pi}{8} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\tan\frac{\pi}{8} > 0$ et donc $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

Exercice 67

- Pour $\alpha = 0$, l'équation s'écrit $\cos\theta = 1$, qui a pour ensemble de solutions $S = \{2\,k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Dans ce cas, il y a un seul point U_θ.
- Pour $\alpha = \pi$, l'équation s'écrit $\cos\theta = -1$, qui a pour ensemble de solutions $S = \{(2\,k+1)\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Dans ce cas, il y a un seul point U_θ.
- Dans le cas général, $\alpha \in]0, \pi[$, l'équation $\cos\theta = \cos\alpha$ est équivalente à :

  $$\theta \equiv \alpha\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv -\alpha\ [2\,\pi],$$

  ce qui donne au plus deux points sur le cercle trigonométrique. Si ces deux points étaient confondus, alors on aurait $\alpha \equiv -\alpha\ [2\pi]$, et donc $\alpha \equiv 0\ [\pi]$, ce qui est exclu puisque $\alpha \in]0, \pi[$. Dans ce cas, il y a donc deux points U_θ.

Remarque

Lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$, l'ensemble de solutions s'écrit aussi $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 68 L'équation proposée $\sin\theta = \cos 2\,\theta$ est définie sur $\mathbb{R}$ et s'écrit encore :

$$\cos 2\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right). \tag{$*$}$$

Par suite, un réel θ est solution de $(*)$ si, et seulement si :

- soit $2\theta \equiv \frac{\pi}{2} - \theta\ [2\,\pi]$, ce qui donne $3\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\,\pi]$ ou encore $\theta \equiv \frac{\pi}{6}\ [\frac{2\,\pi}{3}]$,
- soit $2\theta \equiv -\frac{\pi}{2} + \theta\ [2\,\pi]$, ce qui donne $\theta \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\,\pi]$.

La fonction $\theta \mapsto \sin\theta - \cos 2\,\theta$ étant de période $2\,\pi$, on peut caractériser l'ensemble S des solutions de $(*)$ par son intersection avec $[0, 2\,\pi]$ qui est $S_0 = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\,\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, ce qui donne 3 points sur le cercle trigonométrique.

Exercice 69 Comme l'expression polynomiale $2\,u^2 - 3\,u + 1$ est nulle pour $u = 1$, on peut mettre $u - 1$ en facteur, et obtenir $2\,u^2 - 3\,u + 1 = (u-1)\,(2\,u-1)$.

On en déduit :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad 2\,\cos^2\theta - 3\,\cos\theta + 1 = (\cos\theta - 1)\,(2\,\cos\theta - 1).$$

Par suite, θ est solution de l'équation donnée si, et seulement si :

- soit $\cos\theta = 1$, ce qui est équivalent à $\theta \equiv 0\ [2\,\pi]$;
- soit $\cos\theta = \frac{1}{2}$, ce qui est équivalent à $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

L'ensemble des solutions de l'équation donnée est donc :

$$S = \{2\,k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

ce qui correspond à 3 points sur le cercle trigonométrique.

Exercice 70 Comme, pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$2\,\cos^2\theta - 3\,\sin\theta - 3 = -2\,\sin^2\theta - 3\,\sin\theta - 1,$$

l'équation proposée s'écrit encore :

$$2\,\sin^2\theta + 3\,\sin\theta + 1 = 0.$$

L'expression polynomiale $2\,u^2 + 3\,u + 1$ se factorisant sous la forme :

$$2\,u^2 + 3\,u + 1 = (u+1)\,(2u+1)\,,$$

l'équation donnée est équivalente à :

$$(\sin\theta + 1)\,(2\,\sin\theta + 1) = 0.$$

Par suite θ est solution de l'équation donnée si, et seulement si :

- soit $\sin\theta = -1$, ce qui est équivalent à $\theta \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\,\pi]$;
- soit $\sin\theta = -\frac{1}{2}$, ce qui est équivalent à $\theta \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv -\frac{5\,\pi}{6}\ [2\pi]$.

L'ensemble des solutions de l'équation donnée est donc :

$$S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\,\pi}{6} + 2\,k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

ce qui correspond à 3 points sur le cercle trigonométrique.

Exercice 71

- Si $\theta = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\sin\theta = \pm 1$ et $\cos\theta = 0$.
  Par suite une telle valeur n'est pas solution.
- Supposons $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$. Alors on a $\cos\theta \neq 0$ et l'équation donnée est équivalente à $\tan\theta = \sqrt{3}$, dont l'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\,\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Exercice 72 L'inéquation donnée s'écrit aussi $\left|\sin\theta\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot$

Comme la fonction $\theta \mapsto \left|\sin\theta\right|$ est π-périodique, il suffit de résoudre l'inéquation sur un intervalle d'amplitude π. Travaillons donc sur $I_0 = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\cdot$

Étant donné que l'inéquation s'écrit aussi :

$$-\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \sin\theta \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4},$$

et que la fonction $\sin$ est strictement croissante sur I_0, ses solutions sur cet intervalle sont les θ tels que $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}\cdot$ Par suite l'ensemble des solutions de l'équation donnée est la réunion des intervalles $[-\frac{\pi}{4} + k\,\pi, \frac{\pi}{4}k\,\pi]$ lorsque k décrit $\mathbb{Z}$.

Exercice 73

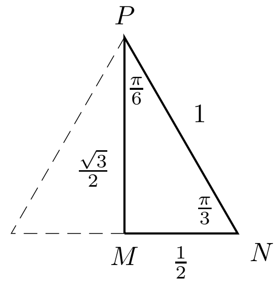
- On pourrait diviser par $\cos\theta$ et se ramener à une inéquation en $\tan\theta$, mais cela oblige à discuter selon le signe de $\cos\theta$. Ici, ce n'est pas efficace.
- L'inéquation donnée s'écrit aussi :

$$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta \geqslant 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \geqslant 0,$$

ce qui est équivalent à $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \geqslant 0$. Par suite θ en est solution si, et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta - \frac{\pi}{3} \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$, ou encore :

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi.$$

Exercice 74



Avec un triangle équilatéral de côté 1 divisé en 2 on obtient :

- l'hypothénuse de longueur 1,
- un côté de longueur $\frac{1}{2}$,
- et, avec Pythagore, un côté de longueur $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On en déduit immédiatement :

$$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

puis :

$$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Évidemment ces calculs doivent se faire à la vitesse de la lumière !

Remarque Avec un peu d'habitude, on sait qu'il suffit de choisir parmi quelques valeurs : parmi $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ pour sin et cos, parmi $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\sqrt{3}$ pour tan.

Pour choisir on peut par exemple utiliser :

- la croissance des fonctions sin et tan sur $[0, \frac{\pi}{2}[$,
- la décroissance de la fonction cos sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 75 En utilisant un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont de longueur 1 et donc l'hypoténuse de longueur $\sqrt{2}$, on obtient immédiatement :

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \tan\frac{\pi}{4} = 1.$$

S'entraîner et approfondir

1.1 Étant donné des réels a, b, c, d vérifiant $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$, on considère l'**homographie** (ou **fonction homographique**) f définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{ax+b}{cx+d}. \end{array}$$

1. Montrer qu'il existe α, β et γ tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-d/c\} \quad f(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{x-\gamma}\cdot$ Un telle écriture s'appelle forme canonique de la fonction homographique.
2. En déduire que f est strictement monotone sur $]-\infty, \gamma[$, puis sur $]\gamma, +\infty[$.

1.2 Sans utiliser la mise sous forme canonique, montrer que l'homographie précédente est strictement monotone sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.

Remarque Le résultat de cet exercice peut être utilisé sans justification pour prouver une monotonie.

1.3 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2e^x+1}{e^x+2}\right)$ est définie et monotone sur $\mathbb{R}$.

1.4 Si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vérifie $\sin x = \frac{1}{5}$, que vaut $\tan x$?

1.5 Pour $a \in [-\pi, \pi]$, exprimer $\cos \dfrac{a}{2}$ en fonction de $\cos a$.

1.6 Montrer que pour $x \in]0, \frac{\pi}{6}[$, on a $\dfrac{1 - \cos 2x + \cos 4x - \cos 6x}{\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x} = \tan 3x$.

1.7 Résoudre l'équation $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$.

1.8 Résoudre l'équation $|x+3| - |x-1| = |2x+1|$.

1.9 Déterminer la valeur exacte de $\cos \dfrac{\pi}{12}\cdot$
(On peut l'exprimer sans radicaux imbriqués.)

1.10 Déterminer un réel a tel que, pour tout réel x, on ait :

$$\sin 3x = a \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{2\,\pi}{3}\right)\cdot$$

1.11 Calculer la dérivée troisième de $f : x \mapsto \cos x \cos \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{4} \sin \dfrac{x}{4}\cdot$

1.12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\left(x - \dfrac{2}{x}\right)^6 < 1\,.$

1.13 Résoudre l'équation $\cos 2x + \cos 12\,x = \sqrt{3}\,\cos 5\,x\,.$

1.14 Étant donné un réel a, déterminer le maximum et le minimum sur $\mathbb{R}$ de :

$$f : x \mapsto \sin x + \sin(a - x).$$

1.15 Déterminer la valeur exacte de $\cos \dfrac{\pi}{16}\cdot$

1.16 Déterminer un réel a tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin 4x = a \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(x + \frac{3\,\pi}{4}\right)\cdot$$

1.17 Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{4 - x}}\cdot$

1.18 Résoudre l'équation $\sqrt{x + 1} = 3\,x - 7\,.$

1.19 Déterminer la limite en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{\tan x + \tan 7\,x}{\tan 3x + \tan 5x}\cdot$

1.20 Soit $f : x \mapsto \sin x + \sin 2x + \sin 7x + \sin 8x\,.$
Déterminer le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel f reste positive.

1.21 Déterminer le maximum et le minimum sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 3\,\cos x - 2 \sin x + 1\,.$

1.22 Déterminer en fonction du paramètre réel m le nombre de racines dans $[0, 1]$ de l'équation $x^2 - m\,x - 1 = 0\,.$

Solution des exercices

1.1 1. *Analyse :* si ces réels existent alors $\alpha = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{a}{c}\cdot$

Justification : prenons $\alpha = \dfrac{a}{c}$; pour $x \neq -\dfrac{d}{c}$ on a alors :

$$f(x) - \alpha = f(x) - \frac{a}{c} = \frac{a\,x+b}{c\,x+d} - \frac{a}{c} = \frac{b\,c-a\,d}{c\,(c\,x+d)} = \frac{\frac{b\,c-a\,d}{c^2}}{x+\frac{d}{c}},$$

ce qui prouve que l'on peut prendre $\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\beta = \dfrac{b\,c-a\,d}{c^2}$ et $\gamma = -\dfrac{d}{c}\cdot$

2. Soit $I =]\gamma, +\infty[$. La restriction de f à I est la composée des fonctions :

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x-\gamma \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \frac{\beta}{y} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & z+\alpha \end{array}$$

qui sont toutes strictement monotones. Par suite, elle est strictement monotone. Raisonnement analogue si $I =]-\infty, \gamma[$ en remplaçant $\mathbb{R}_+^*$ par $\mathbb{R}_-^*$.

1.2 Soit I un intervalle inclus dans $]-\infty, -\frac{d}{c}[\,\cup\,]-\frac{d}{c}, +\infty[$.
Soit $x \in I$ et $y \in I$ vérifiant $x \neq y$. Alors :

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{1}{x-y}\left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d} - \frac{a\,y+b}{c\,y+d}\right) = \frac{(ad-bc)}{(cx+d)\,(cy+d)}\cdot$$

Comme $(cx+d)$ et $(cy+d)$ sont de même signe on en déduit que $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ est du signe de $a\,d-b\,c$, ce qui entraîne que :

- si $ad-bc > 0$ la fonction f est croissante sur I,
- si $ad-bc < 0$ la fonction f est décroissante sur I.

1.3 La fonction $f\ :\ x \mapsto \ln\left(\dfrac{2e^x+1}{e^x+2}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x+2 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{2\,e^x+1}{e^x+2} > 0.$$

Elle est monotone comme composée de trois fonctions monotones :

- la fonction exp (à valeurs positives),
- la fonction homographique $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{2\,x+1}{x+2} \end{array}$ qui est monotone,
- la fonction $\ln$.

On en déduit que f est monotone en tant que composée de trois fonctions monotones. Comme $f(0) = 0$ et $f(\ln 2) = \ln(5/4) > 0$, la fonction f est croissante.

Remarque Pour la monotonie, on peut évidemment dériver mais il est alors préférable d'écrire auparavant :

$$f(x) = \ln(2e^x+1) - \ln(e^x+2).$$

1.4 Comme $|\sin x| \neq 1$, on a $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, et donc $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1-\frac{1}{25}} = \frac{25}{24}\cdot$ Par suite, on a $\tan^2 x = \frac{1}{24}$, ce qui entraîne $\tan x = \dfrac{1}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$ car sin et tan sont de même signe sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\cdot$

1.5 On a : $\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos a)$.
Comme $\frac{a}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos\frac{a}{2} \geqslant 0$ et donc $\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos a)}$.

1.6 Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} D &= \sin 2x - \sin 4x + \sin 6x = 2\ \sin x\ \cos 3x + \sin 6x \\ &= 2\cos 3x\,(-\sin x + \sin 3x) = 4\ \cos 3x\ \sin x \cos 2x. \end{aligned}$$

Par suite, le quotient est défini sur $]0, \frac{\pi}{6}[$. Comme :

$$\begin{aligned} N &= 1 - \cos 2x + \cos 4x - \cos 6x = 1 - \cos 6x - (\cos 2x - \cos 4x) \\ &= 2\sin^2 3x - 2\sin x\ \sin 3x = 2\ \sin 3x\,(\sin 3x - \sin x)\,, \end{aligned}$$

on en déduit immédiatement :

$$\forall x \in \left]0, \tfrac{\pi}{6}\right[\quad \frac{1-\cos 2x + \cos 4x - \cos 6x}{\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x} = \tan 3x.$$

1.7 En factorisant chacun des deux membres, l'équation s'écrit :

$$\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2} = \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2} \quad \text{ou encore} \quad \sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0.$$

Par suite, un réel x est solution de l'équation donnée si, et seulement si :

- soit $\sin\frac{3x}{2} = 0$, ce qui donne $x = \frac{2k\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$;
- soit $\cos\frac{3x}{2} = \sin\frac{x}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$, ce qui donne :

$$\frac{3x}{2} \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{3x}{2} \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\ [2\pi]$$

  ou encore :

$$x \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi] \qquad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$S = \left\{\frac{2k\pi}{3}\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

1.8 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x+3| - |x-1| - |2x+1|$.
Distinguons les cas suivants :

- si $x \in]-\infty, -3]$, alors on a :

$$f(x) = -(x+3) + (x-1) + (2x+1) = 2x - 3 \leqslant -3\ ;$$

- si $x \in [-3, -\frac{1}{2}]$, alors on a :

$$f(x) = (x+3) + (x-1) + (2x+1) = 4x + 3$$

  qui s'annule pour $x = -\frac{3}{4}$;

- si $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$, alors on a $f(x) = (x+3) + (x-1) - (2\,x+1) = 1 > 0$;
- si $x \in [1, +\infty[$, alors on a :
$$f(x) = (x+3) - (x-1) - (2\,x+1) = -2x + 3$$
qui s'annule pour $x = \frac{3}{2}\cdot$

Les solutions de l'équation donnée sont donc $x = -\dfrac{3}{4}$ et $x = \dfrac{3}{2}\cdot$

1.9 **Méthode 1** En utilisant $\cos^2(\frac{a}{2}) = \frac{1}{2}\,(1 + \cos a)$ avec $a = \frac{\pi}{6}$ on trouve :
$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\cdot$$
Comme $\cos \frac{\pi}{12} \geqslant 0$, on en déduit :
$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot$$
Méthode 2 On a :
$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot$$

1.10 Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = \sin x\, \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{2\,\pi}{3}\right)\cdot$ On a alors :
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\sin x\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos(2x+\pi)\right) = \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{2}\sin x\, \cos 2x \\ &= \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{4}\left(\sin 3x - \sin x\right) = \frac{1}{4}\sin 3x. \end{aligned}$$
et donc $a = 4$ répond au problème.

1.11 Commençons par linéariser l'expression. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f(x) = \cos x\, \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4} = \frac{1}{2}\cos x\, \cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{4}\cos x\, \sin x = \frac{1}{8}\sin 2\,x.$$
Il est alors immédiat de donner de tête :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(3)}(x) = -\cos 2x.$$

1.12 Le domaine de définition de l'équation est $\mathbb{R}^*$. Comme la fonction $u \mapsto u^3$ est strictement croissante, l'inéquation donnée est équivalente à : $\left(x - \dfrac{2}{x}\right)^2 < 1.$ $\qquad (*)$

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 - 1 = \left(x - \frac{2}{x} - 1\right)\left(x - \frac{2}{x} + 1\right) = \frac{\left(x^2 - x - 2\right)\left(x^2 + x - 2\right)}{x^2}$$
et :
$$\left(x^2 - x - 2\right)\left(x^2 + x - 2\right) = (x+1)\,(x-2)\,(x+2)\,(x-1)\,.$$
Par suite, l'inéquation donnée est équivalente à :
$$(x+2)\,(x+1)\,(x-1)\,(x-2) < 0,$$
ce qui donne comme ensemble de solutions $S = \,]-2, -1[\, \cup \,]1, 2[$.

1.13 Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos 2x + \cos 12\,x = 2\,\cos 7x\,\cos 5x.$$

Par suite, l'équation donnée se décompose en :

- $\cos 5x = 0$, soit $5x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ ou encore $x = (2k+1)\frac{\pi}{10}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $2\,\cos 7x = \sqrt{3}$ soit $7x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi$ ou encore $x = \pm\frac{\pi}{42} + \frac{2\,k\,\pi}{7}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$S = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{10}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{42} + \frac{2\,k\,\pi}{7}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

1.14 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = 2\,\sin\frac{a}{2}\,\cos(x - \frac{a}{2})$ et donc :

$$\min f = -2\left|\sin\frac{a}{2}\right| \quad \text{et} \quad \max f = 2\left|\sin\frac{a}{2}\right|\cdot$$

1.15 En utilisant $2\,\cos^2(\frac{a}{2}) = 1 + \cos a$ avec $a = \frac{\pi}{4}$ on trouve $\cos^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et, comme $\cos\dfrac{\pi}{8} > 0$, on a donc $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot$ On en déduit :

$$\cos^2\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)\cdot$$

Par suite, comme $\dfrac{\pi}{16} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos\dfrac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

1.16 Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = \sin x\,\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(x + \dfrac{3\,\pi}{4}\right)\cdot$

On a alors :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x\,\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(x + \frac{3\,\pi}{4}\right)\cdot\\
&= \sin x\,\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\,\cos x\,\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\\
&= \Big(\sin x\ \cos x\Big)\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\,\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}\,\sin 2x\right)\left(\frac{1}{2}\,\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\,\sin 2x\,\cos 2x\\
&= \frac{1}{8}\sin 4x
\end{aligned}$$

et donc $a = 8$ répond au problème.

1.17 Les deux quantités $\sqrt{x-2}$ et $\sqrt{4-x}$ sont simultanément définies lorsque $x \in [2,4]$.

- Leur différence s'annule pour $x=3$ et seulement pour cette valeur puisque l'égalité $\sqrt{x-2}=\sqrt{4-x}$ entraîne $(x-2)=(4-x)$ et donc $x=3$.
- Ainsi la fonction donnée est définie sur $X=[2,3[\cup]3,4]$.

En multipliant par la quantité conjuguée $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$, pour $x \in X$, on obtient :

$$f(x)=\frac{(x-3)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)}{2\,x-6}=\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}{2}\cdot$$

Par suite $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=1$.

1.18 Le domaine de définition de l'équation est l'intervalle $[-1,+\infty[$.
L'équation donnée est alors équivalente à :

$$x+1=(3\,x-7)^2 \quad \text{et} \quad 3\,x-7 \geqslant 0. \tag{$*$}$$

Remarque : il est inutile de garder la condition initiale $x+1 \geqslant 0$ puisque tout réel x solution de $(*)$ vérifie $x+1=(3\,x-7)^2 \geqslant 0$.

L'équation :

$$(3\,x-7)^2-(x+1)=9x^2-43x+48=0$$

a deux solutions, $x=3$ et $x=\frac{16}{9}$, dont seule la première vérifie $3\,x-7 \geqslant 0$.

Par suite l'ensemble solution recherché est $S=\{3\}$.

1.19 Les quantités $\tan x$, $\tan 7\,x$, $\tan 3x$ et $\tan 5x$ sont définies pour $x \in \left]-\frac{\pi}{14},\frac{\pi}{14}\right[\cdot$
Pour x dans cet intervalle le dénominateur D vaut :

$$D=\frac{\sin 3\,x}{\cos\,3\,x}+\frac{\sin 5\,x}{\cos 5\,x}=\frac{\sin 8\,x}{\cos\,3\,x\,\cos 5\,x}$$

et ne s'y annule donc pas. Par suite, f est définie sur $\left]-\frac{\pi}{14},\frac{\pi}{14}\right[\cdot$

Méthode 1 Une transformation analogue du numérateur donne :

$$\forall x \in \left]-\tfrac{\pi}{14},\tfrac{\pi}{14}\right[\quad f(x)=\frac{\cos\,3\,x\,\cos 5\,x}{\cos x\,\cos 7\,x}$$

ce qui entraîne immédiatement $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Méthode 2 On peut aussi diviser directement numérateur et dénominateur de $f(x)$ par x et, pour $a \in \mathbb{R}$, utiliser $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a$.

1.20 En factorisant, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x)&=(\sin x+\sin 8x)+(\sin 2x+\sin 7x)\\
&=2\sin\left(\frac{9x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{7x}{2}\right)+\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\right)\\
&=4\,\sin\left(\frac{9x}{2}\right)\cos 3x\,\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot
\end{aligned}$$

Il est alors immédiat que l'intervalle cherché est $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cdot$

1.21 En utilisant la transformation classique, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\cos x - 2\sin x + 1 \\ &= \sqrt{13}\cos(x+a) + 1 \qquad \text{avec } \cos a = \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ et } \sin a = \frac{2}{\sqrt{13}}. \end{aligned}$$

Il est alors immédiat que :

$$\max f = 1 + \sqrt{13} \quad \text{et} \quad \min f = 1 - \sqrt{13}.$$

1.22 • **Méthode 1 :** l'équation donnée est du second degré et, puisque (avec les notations classiques) $c/a < 0$, elle possède toujours deux racines réelles distinctes $x_1 < x_2$ qui sont en fait de signes contraires.
Comme $f(1) = -m$:

* si $m < 0$, alors 1 est extérieur aux racines et $x_1 < 0 < x_2 < 1$; par suite, l'équation possède une unique racine dans $[0,1]$;
* si $m > 0$, alors 1 est intérieur aux racines et $x_1 < 0 < 1 < x_2$; par suite l'équation ne possède aucune racine dans $[0,1]$;
* si $m = 0$, alors l'équation possède une racine dans $[0,1]$ qui est 1.

• **Méthode 2 :** Comme $x = 0$ n'est pas racine de l'équation donnée, cette équation possède autant de racines que l'équation :

$$m = \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x} \quad \text{avec} \quad x \in]0,1].$$

La fonction $\begin{array}{rccl} f: &]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x - \dfrac{1}{x} \end{array}$ est dérivable, et :

$$\forall x \in]0,1] \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2},$$

ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	0		1
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

D'après ce tableau de variations :

* si $m \leqslant 0$ l'équation donnée possède une racine dans $]0,1]$;
* si $m > 0$ l'équation donnée ne possède aucune racine dans $]0,1]$.

Chapitre 2 : Calculs algébriques

I Symboles $\sum$ et $\prod$ **94**
- 1 Définitions 94
- 2 Changement d'indice 98
- 3 Regroupements de termes 101
- 4 Sommes télescopiques, produits télescopiques . . . 102
- 5 Quelques calculs remarquables 104
- 6 Sommes doubles 106

II Coefficients binomiaux, formule du binôme **109**
- 1 Coefficient binomial 109
- 2 Propriétés 110
- 3 Interprétations du coefficient binomial 111
- 4 Formule du binôme 112

III Systèmes linéaires, méthode du pivot **113**
- 1 Système de 2 équations à 2 inconnues 113
- 2 Système de 2 équations à 3 inconnues 116
- 3 Cas général : système de n équations à p inconnues 117
- 4 Exemples 123

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . **128**

Exercices **141**

Calculs algébriques

2

Nous introduisons dans ce chapitre des outils de calculs algébriques :

- les symboles $\sum$ et $\prod$;
- les coefficients binomiaux et la formule du binôme ;
- les systèmes linéaires et la méthode du pivot.

I Symboles $\sum$ et $\prod$

1 Définitions

Étant donné des nombres complexes $a_1, \ldots, a_n$, il arrive fréquemment que l'on ait besoin de considérer leur somme et/ou leur produit. Une première possibilité est d'utiliser les notations suivantes :

- $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ pour désigner la somme des n nombres $a_1, \ldots, a_n$;
- $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ pour désigner le produit des n nombres $a_1, \ldots, a_n$.

Dans les notations ci-dessus, il faut bien comprendre que si n vaut 1, alors la somme et le produit considérés valent simplement a_1 (l'écriture du terme a_2 avant les points de suspension ne sert qu'à bien expliciter la liste utilisée).
Pour pallier cet inconvénient, on introduit les deux notations suivantes :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ pour désigner la somme de ces n nombres ;
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k$ pour désigner le produit de ces n nombres.

Exemple Étant donné un entier naturel n non nul, on appelle **factorielle $\boldsymbol{n}$**, et l'on note $n!$, le nombre entier :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

On a ainsi $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$,...

Plus généralement, si p et q sont deux entiers vérifiant $p \leqslant q$, et si l'on dispose de $q - p + 1$ nombres complexes numérotés de p à q : a_p, ..., a_q, on note :

- $a_p + \cdots + a_q$, ou $\sum\limits_{k=p}^{q} a_k$, leur somme ;
- $a_p \times \cdots \times a_q$, ou $\prod\limits_{k=p}^{q} a_k$, leur produit.

Attention Dans une somme ou un produit dont l'indice varie de p à q, le nombre de termes est égal à $q - p + 1$.

Notation On utilise indifféremment les notations suivantes :

- d'une part $\sum\limits_{k=p}^{q} a_k$, $\sum\limits_{p \leqslant k \leqslant q} a_k$ ou encore $\sum\limits_{k \in [\![p,q]\!]} a_k$;
- d'autre part $\prod\limits_{k=p}^{q} a_k$, $\prod\limits_{p \leqslant k \leqslant q} a_k$ ou encore $\prod\limits_{k \in [\![p,q]\!]} a_k$.

865 **Remarque** Les notations $\sum\limits_{k \in [\![p,q]\!]} a_k$ (respectivement $\prod\limits_{k \in [\![p,q]\!]} a_k$) sous-entendent que l'ordre dans lequel on somme (respectivement on multiplie) les termes n'a pas d'importance. C'est en effet le cas, du fait de la commutativité de l'addition sur $\mathbb{C}$ (respectivement de la multiplication sur $\mathbb{C}$).

Cas d'une famille finie quelconque

Dans toute la suite, et sauf mention plus précise, $(a_k)_{k \in I}$ désigne une famille finie de nombres complexes. Pour des détails sur la notion de famille, on se rapportera au chapitre 7.

On peut étendre les notions introduites ci-dessus au cas de n'importe quelle famille *finie* $(a_k)_{k \in I}$ (avec I non vide). On note alors :

- $\sum\limits_{k \in I} a_k$: la somme de tous les éléments de la famille ;
- $\prod\limits_{k \in I} a_k$: le produit de tous les éléments de la famille.

Exemple En notant $\mathcal{P}_{20}$ l'ensemble des nombres premiers qui sont inférieurs à 20, on peut considérer leur somme en écrivant simplement :

$$\sum_{k \in \mathcal{P}_{20}} k.$$

En l'occurrence, on a $\mathcal{P}_{20} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, et donc :

$$\sum_{k \in \mathcal{P}_{20}} k = 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 = 77.$$

Notation Pour considérer la somme de l'exemple ci-dessus, on s'autorise également la notation suivante :

$$\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 20\\ k \text{ premier}}} k.$$

Attention La lettre k intervenant dans les notations précédentes désigne une variable muette servant à décrire l'ensemble d'indexation. On peut choisir d'utiliser n'importe quelle autre lettre ! Ainsi on a :

$$\sum_{k\in I} a_k = \sum_{\ell\in I} a_\ell.$$

Remarque Lorsque tous les éléments de la famille $(a_k)_{k\in I}$ sont égaux, les calculs de $\sum\limits_{k\in I} a_k$ et $\prod\limits_{k\in I} a_k$ sont immédiats. En effet, en notant alors n le nombre d'éléments de la famille, et α leur valeur commune, on a :

$$\sum_{k\in I} a_k = \underbrace{\alpha+\cdots+\alpha}_{n \text{ termes}} = n\,\alpha \qquad \text{et} \qquad \prod_{k\in I} a_k = \underbrace{\alpha\times\cdots\times\alpha}_{n \text{ termes}} = \alpha^n.$$

Premières règles de calcul

Les règles de calculs dans $\mathbb{C}$ permettent de se convaincre sans difficulté de la validité des formules suivantes.

1. *Séparation* :

$$\sum_{k\in I}(a_k+b_k) = \sum_{k\in I} a_k + \sum_{k\in I} b_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k\in I}(a_k\,b_k) = \Bigl(\prod_{k\in I} a_k\Bigr)\Bigl(\prod_{k\in I} b_k\Bigr).$$

2. *Diverses opérations* (λ est un nombre complexe, p un entier naturel, et n désigne le nombre d'éléments de I) :

$$\sum_{k\in I}(\lambda\,a_k) = \lambda\sum_{k\in I} a_k \qquad\qquad \prod_{k\in I}(a_k)^p = \Bigl(\prod_{k\in I} a_k\Bigr)^p$$

$$\prod_{k\in I}(\lambda\,a_k) = \lambda^n\prod_{k\in I} a_k \qquad\qquad \sum_{k\in I}(a_k+\lambda) = \Bigl(\sum_{k\in I} a_k\Bigr) + n\,\lambda.$$

3. *Relation de Chasles :* si l'on a $p<r<q$, alors :

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{r-1} a_k + \sum_{k=r}^{q} a_k.$$

et :

$$\prod_{k=p}^{q} a_k = \Bigl(\prod_{k=p}^{r} a_k\Bigr)\Bigl(\prod_{k=r+1}^{q} a_k\Bigr) = \Bigl(\prod_{k=p}^{r-1} a_k\Bigr)\Bigl(\prod_{k=r}^{q} a_k\Bigr).$$

Attention Quand on utilise la relation de Chasles, il faut bien prendre garde à ne pas compter deux fois le terme a_r !

4. *Additivité par rapport à l'ensemble d'indexation :* si I_1 et I_2 sont deux ensembles disjoints non vides, alors :

$$\sum_{k\in I_1\cup I_2} a_k = \sum_{k\in I_1} a_k + \sum_{k\in I_2} a_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k\in I_1\cup I_2} a_k = \prod_{k\in I_1} a_k \times \prod_{k\in I_2} a_k.$$

Remarques

- Cette dernière propriété est une généralisation de la relation de Chasles.
- On remarque que l'on peut la rendre valable dans le cas où $I_1 = \varnothing$ ou $I_2 = \varnothing$, et ceci en convenant que :

$$\sum_{k\in\varnothing} a_k = 0 \qquad \text{et} \qquad \prod_{k\in\varnothing} a_k = 1.$$

  Nous prenons à partir de maintenant ces conventions.
- En particulier, si $p > q$, nous convenons que $\sum\limits_{k=p}^{q} a_k = 0$ et $\prod\limits_{k=p}^{q} a_k = 1$.
- Remarquons que ces conventions :
  - ∗ permettent d'étendre la relation de Chasles au cas où $p \leqslant r \leqslant q$;
  - ∗ permettent d'étendre la notation $n!$ pour $n = 0$; en effet, on a :

$$0! = \prod_{k=1}^{0} k = 1.$$

Remarque Les règles de calcul précédentes ne sont pas à apprendre par cœur, mais à comprendre ! Pour cela, il ne faut pas hésiter à les vérifier en les écrivant avec des points de suspension.

p.128 **Exercice 1** Que penser de l'égalité $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^p$?

p.128 **Exercice 2** *(Produit des entiers pairs, produit des entiers impairs)*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer, à l'aide de $n!$, le produit A_n des entiers pairs compris entre 1 et $2n$.
2. On note B_n le produit de tous les entiers impairs compris entre 1 et $2n+1$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par A_n, montrer que :

$$B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}.$$

2 Changement d'indice

Dans certaines situations il est intéressant de modifier l'indexation d'une somme ou d'un produit.

Décalage d'indice

Si r est un entier, alors, dans la somme $S = \sum\limits_{k=p}^{q} a_k$, on peut effectuer un décalage d'indice en utilisant $j = k + r$ et en écrivant $S = \sum\limits_{j=p+r}^{q+r} a_{j-r}$.

p.128 **Exercice 3** Étant donné la somme $S = \sum\limits_{k=p}^{q} a_k$, proposer un changement d'indice permettant d'obtenir une somme indexée à partir de 0, et écrire cette somme.

Exemple Pour $n \geqslant 2$, on souhaite calculer la somme $S = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2}{k(k+2)}$.

L'identité $\dfrac{2}{k(k+2)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}$, valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, nous donne $S = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+2}$.

En effectuant alors le changement d'indice $j = k + 2$ dans la deuxième somme, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j} = \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k},$$

et donc :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \qquad \text{(car } n \geqslant 2\text{)} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

p.128 **Exercice 4** À l'avant dernière égalité du calcul précédent, quelle est la raison de la justification « $n \geqslant 2$ » ?

Symétrisation

Dans certains calculs, il peut être judicieux d'inverser l'ordre dans lequel les termes sont considérés.

Exemple Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons une somme de la forme :

$$S = \sum_{k=0}^{n} a_k. \qquad (\star)$$

Pour inverser l'ordre de sommation, utilisons $j = n - k$. Lorsque k décrit l'ensemble $[\![0, n]\!]$, alors j décrit le même ensemble $[\![0, n]\!]$. On a donc :

$$S = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}. \qquad (\star\star)$$

- l'écriture $(\star)$ correspond à $S = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$;
- l'écriture $(\star\star)$ correspond à $S = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0$.

p.128 **Exercice 5** Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant q$, on considère une somme $S = \sum\limits_{k=p}^{q} a_k$.

Quel changement de variable effectuer pour inverser l'ordre de sommation :

1. tout en conservant une somme indexée de p à q ?
2. en se ramenant à une somme indexée de 0 à $q - p$?

La formule donnant la somme des n premiers entiers est une parfaite illustration du principe de symétrisation.

Proposition 1

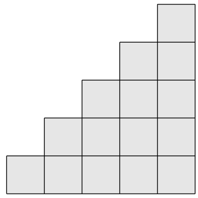
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration. Le résultat est évident pour $n = 0$. Donnons-nous $n \in \mathbb{N}^*$. Donnons une démonstration intuitive, en utilisant des points de suspension. Notons S la somme considérée, et sommant une fois dans un sens, et une fois dans l'autre :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\
S & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2\,S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

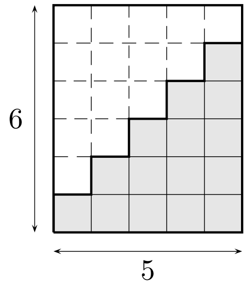
On a donc $2\,S = n(n+1)$, c'est-à-dire $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$. □

Donnons une autre manière d'interpréter cette formule.
Par exemple, pour $n = 5$:
la somme $\sum\limits_{k=1}^{5} k$ peut-être vue comme le nombre de petits carrés dans la figure « triangulaire » ci-contre.



$1+2+3+4+5$

En dupliquant la figure et en disposant les deux figures judicieusement, on voit apparaître un rectangle comportant 5×6 petits carrés.



p.129 **Exercice 6** Écrire la démonstration de la proposition précédente en utilisant le symbole $\sum$, c'est-à-dire en écrivant $2S$ puis en inversant l'ordre de sommation dans l'une des deux sommes.

p.129 **Exercice 7** *Somme des termes d'une suite arithmétique.* Soit a et b deux nombres complexes. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = a + n\,b$ (autrement dit, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme a et de raison b).

En s'inspirant de la démonstration précédente, montrer que pour $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant n$, on a :
$$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\,\frac{u_p+u_n}{2}.$$

Remarque La formule obtenue dans l'exercice précédent peut se formuler de la manière suivante : la somme de termes *consécutifs* d'une suite arithmétique est égale au produit entre :
- d'une part, la moyenne du premier et du dernier terme ;
- d'autre part le nombre de termes présents dans la somme.

p.130 **Exercice 8** Pour n un entier naturel non nul, on considère la somme suivante :
$$S = \sum_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\,\pi}{2\,n}\right),$$
Grâce à un changement d'indice, montrer que $S = -S$, puis que $S = 0$.

Indication : faire un dessin pour comprendre comment les termes se simplifient.

Remarques

1. Dans ce qui précède, les variables k et j intervenant dans les sommes étant des variables muettes, on peut utiliser la même lettre avant et après le changement d'indice. Ainsi, l'écriture :
$$S = \sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p-1}^{q-1} a_{k+1}$$
est tout à fait correcte. Cependant, l'utilisation d'une nouvelle lettre permet de réduire les risques d'erreurs dans la détermination des nouvelles bornes. Le plus souvent, on fait, de tête, les raisonnements suivants :
   - « quand k vaut p, combien vaut j, ... et quand k vaut q, combien vaut j ... »
   - « quand k décrit l'ensemble I, alors j décrit l'ensemble ... »
2. Bien que ce qui précède ne traite que du symbole $\sum$, les mêmes considérations peuvent être faites à propos du symbole $\prod$.

3 Regroupements de termes

Sélection des termes d'indice pair ou impair

Dans ce qui suit, I désigne un ensemble fini d'entiers.

Dans certains cas, il est intéressant de traiter séparément les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs.

Étant donné une somme $S = \sum\limits_{k\in I} a_k$, cela consiste à écrire :
$$S = \sum_{k\in I_1} a_k + \sum_{k\in I_2} a_k,$$
où :
- l'ensemble I_1 est l'ensemble des éléments de I qui sont impairs ;
- l'ensemble I_2 est l'ensemble des éléments de I qui sont pairs.

Remarque Dans la décomposition précédente, l'écriture suivante est également autorisée :
$$S = \sum_{\substack{k\in I\\ k \text{ impair}}} a_k + \sum_{\substack{k\in I\\ k \text{ pair}}} a_k.$$

p.130

Exercice 9 On se place dans le cas où $I = [\![1, n]\!]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, tout en gardant les notations précédentes.

1. Expliciter deux ensembles J_1 et J_2 qui sont tels que :
   - lorsque j décrit J_1, alors $2j+1$ décrit I_1 ;
   - lorsque j décrit J_2, alors $2j$ décrit I_2.
2. En déduire l'écriture correspondante pour la somme S.

p.131

Exercice 10 Soit n un entier naturel non nul. Calculer la somme :

$$S = \sum_{k=0}^{2n} 2^k \cos\left(\frac{k\,\pi}{2}\right),$$

en séparant les termes de la somme suivant la parité de k.

Indication : on pourra utiliser la proposition 3 de la page 104 pour calculer la somme des termes d'une suite géométrique.

p.131

Exercice 11 Que penser de la formule suivante : $\displaystyle\prod_{p=1}^{n} a_{2p} = \prod_{q=2}^{2n} a_q$?

Sommation par paquets

Dans certains calculs, le fait de regrouper les termes par paquets permet de faire apparaître des simplifications.

p.131

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$ en regroupant les termes deux à deux.

Point méthode

Le plus souvent, pour mettre en évidence un regroupement de termes, il est plus facile d'utiliser l'écriture avec les points de suspension. Effectuer une sommation par paquets revient alors à placer les parenthèses aux endroits pertinents.

4 Sommes télescopiques, produits télescopiques

Dans ce qui suit, on suppose que $p \leqslant q$.

- On appelle **somme télescopique** toute somme de la forme $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k)$.

  L'intérêt de ce type de somme est que sa simplification est immédiate, car tous les termes, sauf le premier et le dernier, se simplifient. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) &= (a_{q+1} - a_q) + (a_q - a_{q-1}) + \cdots + (a_{p+2} - a_{p+1}) + (a_{p+1} - a_p) \\ &= a_{q+1} - a_p,\end{aligned}$$

ou, de manière plus formelle :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{q}(a_{k+1}-a_k) &= \sum_{k=p}^{q} a_{k+1} - \sum_{k=p}^{q} a_k \\
&= \sum_{j=p+1}^{q+1} a_j - \sum_{k=p}^{q} a_k \qquad (j=k+1 \text{ dans la première somme}) \\
&= a_{q+1} + \underbrace{\sum_{j=p+1}^{q} a_j - \sum_{k=p+1}^{q} a_k}_{=0} - a_p \\
&= a_{q+1} - a_p.
\end{aligned}$$

- On appelle **produit télescopique** tout produit de la forme $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k}$, où les a_k sont supposés tous non nuls. La simplification d'un tel produit est immédiat. De façon analogue au calcul précédent, on a :

$$\prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{p+1}}{a_p} \cdot \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} \cdots \frac{a_q}{a_{q-1}} \cdot \frac{a_{q+1}}{a_q} = \frac{a_{q+1}}{a_p},$$

ou, de manière plus formelle :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\prod\limits_{k=p}^{q} a_{k+1}}{\prod\limits_{k=p}^{q} a_k} &= \frac{\prod\limits_{j=p+1}^{q+1} a_j}{\prod\limits_{k=p}^{q} a_k} \qquad (j=k+1 \text{ dans le produit du haut}) \\
&= \frac{a_{q+1}}{a_p}.
\end{aligned}$$

p.132 **Exercice 13** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En faisant apparaître un quotient dans le $\ln$, simplifier :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

p.132 **Exercice 14**

1. Déterminer deux nombres a et b vérifiant : $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire une écriture simplifiée de $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

5 Quelques calculs remarquables

Somme des carrés des n premiers entiers

Proposition 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Démonstration. La formule est évidemment vraie pour $n=0$. Donnons-nous $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. Il en résulte que :

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3 - k^3\right) = \sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1).$$

- À gauche, on reconnaît une somme télescopique : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3 - k^3\right) = (n+1)^3 - 1$.
- À droite, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1) = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n.$$

En identifiant les deux membres, on obtient $(n+1)^3 - 1 = 3\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$.

En simplifiant, on obtient la formule souhaitée :

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

□

p.132 **Exercice 15** *Somme des cubes des n premiers entiers.*

En s'inspirant de la méthode de la démonstration précédente, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{n}k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Somme des termes d'une suite géométrique

Proposition 3

- Pour $a \in \mathbb{C}$ et $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant n$, on a :

$$(1-a)\sum_{k=p}^{n}a^k = a^p - a^{n+1}.$$

- Si de plus $a \neq 1$, alors on a :

$$\sum_{k=p}^{n}a^k = \frac{a^p - a^{n+1}}{1-a}.$$

Démonstration.

- Pour $a \in \mathbb{C}$ et $p \leqslant n$ on a :
$$(1-a)\sum_{k=p}^{n} a^k = \sum_{k=p}^{n}(a^k - a^{k+1}),$$
qui, par télescopage, se simplifie directement en $a^p - a^{n+1}$.
- Le deuxième point découle directement du premier, car l'hypothèse $a \neq 1$ nous permet de diviser par $1-a$. □

Remarque Pour $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, la proposition précédente appliquée pour $p = 0$ donne la factorisation suivante de $1 - a^{n+1}$:
$$1 - a^{n+1} = (1-a)\sum_{k=0}^{n} a^k.$$

Corollaire 4

Pour $a \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Factorisation de $a^n - b^n$ et $a^{2p+1} + b^{2p+1}$

Proposition 5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on a :
$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + \cdots + a\,b^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k\,b^{n-1-k}. \end{aligned}$$

Démonstration. On a :
$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k\,b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{k+1}\,b^{n-1-k} - a^k b^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{k+1}\,b^{n-(k+1)} - a^k\,b^{n-k}\right).$$

On reconnaît alors une somme télescopique qui vaut $a^n b^0 - a^0 b^n = a^n - b^n$. □

p.132

Exercice 16 En utilisant la proposition 5, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall (a,b) \in \mathbb{C}^2 \quad a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a^k\,b^{2n-k}.$$

6 Sommes doubles

On appelle **somme double** une somme finie de la forme $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}$ où $(a_{i,j})_{(i,j)\in A}$ est une famille de complexes doublement indexée.
On distingue plusieurs cas, suivant la forme de l'ensemble d'indexation A et de la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in A}$.

Cas où l'ensemble A est un produit cartésien Un cas assez favorable est celui où l'ensemble fini A s'écrit comme un produit cartésien $I \times J$. Dans ce cas, le calcul de la somme double se ramène à celui de deux sommes simples « emboîtées » :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J} a_{i,j}\Big) = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I} a_{i,j}\Big).$$

L'ordre dans lequel apparaissent les deux symboles $\sum$ n'a ici pas d'importance, car l'addition des nombres complexes est commutative.

Exemple Le gérant d'un magasin employant 4 vendeurs répertorie toutes les ventes effectuées durant une année, et plus précisément il établit, pour chaque mois, le nombre d'articles vendus par chacun de ses vendeurs. Cela donne lieu à un tableau de la forme suivante :

	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	
vendeur 1	14	7	9	3	5	7	7	11	12	14	13	15	117
vendeur 2	8	7	21	9	11	13	6	9	18	14	9	10	135
vendeur 3	13	17	9	19	21	22	14	13	16	13	12	16	185
vendeur 4	7	9	8	11	12	11	9	8	14	11	9	8	117
	42	40	47	42	49	53	36	41	60	52	43	49	554

Le nombre total d'articles vendus dans l'année s'obtient alors en sommant tous les termes du tableau, et s'écrit sous la forme de la somme double :

$$S = \sum_{(i,j)\in[\![1,4]\!]\times[\![1,12]\!]} a_{i,j}$$

où $a_{i,j}$ désigne le nombre d'articles vendus par le i-ème vendeur lors du j-ème mois. Comme il apparaît sur le tableau ci-dessus, on peut calculer cette somme :

- soit en sommant d'abord sur les lignes :

$$S = \sum_{i=1}^{4}\Big(\sum_{j=1}^{12} a_{i,j}\Big) = 117 + 135 + 185 + 117 = 554\ ;$$

- soit en sommant d'abord sur les colonnes :

$$S = \sum_{j=1}^{12}\Big(\sum_{i=1}^{4} a_{i,j}\Big) = 42 + 40 + \cdots + 43 + 49 = 554.$$

p.133

Exercice 17 *(Un cas particulièrement favorable)*

On suppose que l'ensemble d'indexation est un produit cartésien $I \times J$ et qu'il existe deux familles $(b_i)_{i\in I}$ et $(c_j)_{j\in J}$ telles que $\forall (i,j) \in I \times J \quad a_{i,j} = b_i\, c_j$.

Montrer que l'on a alors $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \Big(\sum_{i\in I} b_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} c_j\Big)$.

p.133

Exercice 18 Étant donné un entier naturel n, calculer $\displaystyle\sum_{(i,j)\in [\![0,n]\!]^2} i\, 2^j$.

Sommes triangulaires. Commençons par un exemple.

Exemple On considère une famille $(a_{k,\ell})_{(k,\ell)\in A}$ dont l'ensemble d'indexation A est l'ensemble des couples d'entiers (k,ℓ) vérifiant :

$$1 \leqslant \ell \leqslant k \leqslant 6,$$

et dont les valeurs sont données par le tableau ci-contre.
On souhaite calculer la somme :

$$S = \sum_{(k,\ell)\in A} a_{k,\ell}.$$

ℓ \ k	1	2	3	4	5	6
6						-8
5					6	34
4				5	17	16
3			1	30	12	7
2		-3	13	21	-9	10
1	2	14	3	10	11	-4

La somme S peut-être écrite et calculée des deux manières suivantes :

- $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{6}\Big(\sum_{\ell=1}^{k} a_{k,\ell}\Big)$, ce qui revient à sommer colonne par colonne :

$$S = (2) + (14-3) + (3+13+1) + (10+21+30+5)$$
$$+ (11-9+12+17+6) + (-4+10+7+16+34-8) = 188\ ;$$

- $S = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{6}\Big(\sum_{k=\ell}^{6} a_{k,\ell}\Big)$, ce qui revient à sommer ligne par ligne :

$$S = (2+14+3+10+11-4) + (-3+13+21-9+10)$$
$$+ (1+30+12+7) + (5+17+16) + (6+34) - 8 = 188.$$

Notation Une telle somme est appelée **somme triangulaire**, ce qui se comprend bien sur le tableau de l'exemple ci-dessus.

Par rapport au cas où l'ensemble d'indexation est un produit cartésien, une somme triangulaire est plus délicate à manipuler, car, quand on l'écrit à l'aide de deux symboles $\sum$ successifs, l'ensemble décrit par le second indice dépend de la valeur du premier. L'interversion des symboles $\sum$ nécessite donc quelques précautions.

Exemple Considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une somme de la forme :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{k} a_{k,\ell}. \tag{$\star$}$$

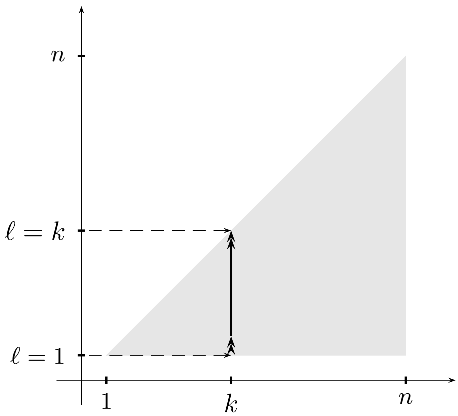
L'ensemble d'indexation A de la somme S est :

$$A = \{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leqslant \ell \leqslant k \leqslant n\},$$

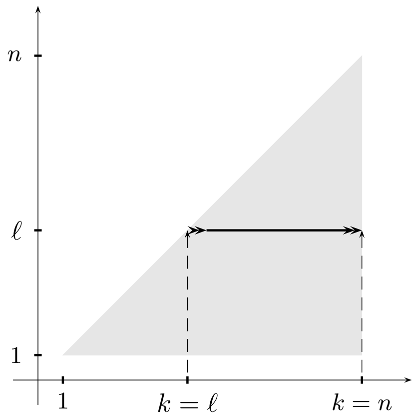
et l'interversion des symboles $\sum$ mène à :

$$S = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} a_{k,\ell}. \tag{$\star\star$}$$

Graphiquement, l'écriture ($\star$) revient à sommer colonne par colonne (dessin de gauche), et l'écriture ($\star\star$) revient à sommer ligne par ligne (dessin de droite) :



k varie de 1 et à n,
et à k fixé, ℓ varie de 1 à k



ℓ varie de 1 et à n,
et à ℓ fixé, k varie de ℓ à n

p.133 **Exercice 19** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une somme de la forme $S = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{\ell=1}^{n+1-k} a_{k,\ell}$.

Représenter graphiquement l'ensemble d'indexation, et intervertir les deux symboles $\sum$.

p.133 **Exercice 20** Étant donné un entier naturel non nul n, on note $S = \sum\limits_{i=1}^{n} i\, 2^i$.

Après avoir vérifié que $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{i} 2^i$, et en intervertissant les deux symboles $\sum$, montrer que $S = (n-1)2^{n+1} + 2$.

p.134 **Exercice 21** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme double $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}$.

Attention Il est important de comprendre que dans une somme triangulaire, c'est forcément l'ensemble parcouru par le second indice qui peut dépendre du premier, et surtout pas l'inverse car cela n'aurait pas de sens !

II Coefficients binomiaux, formule du binôme

1 Coefficient binomial

On rappelle (*cf.* exemple de la page 94) qu'étant donné un entier naturel n, on définit **factorielle n**, et on note $n!$, le nombre entier :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

On rappelle que $0! = 1$.

Définition 1

Étant donné deux entiers naturels n et p, on appelle **coefficient binomial « p parmi n »**, et l'on note $\binom{n}{p}$, le nombre suivant :

$$\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ termes}}}{p!} = \frac{1}{p!} \prod_{k=0}^{p-1} (n-k).$$

Notation On rencontre parfois la notation C_n^p pour désigner $\binom{n}{p}$.

Remarques

1. Si $p > n$, alors un des termes du numérateur est nul, et donc $\binom{n}{p} = 0$.
2. Si $p \leqslant n$, alors on a l'expression suivante du coefficient binomial :
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Proposition 6

Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geqslant p \geqslant 1$, on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1}.$$

Démonstration. C'est immédiat à partir de la définition en mettant p en facteur au dénominateur et, au numérateur, le premier ou le dernier terme. □

2 Propriétés

Proposition 7

Étant donné deux entiers naturels n et p, on a :

- $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ si $p \leqslant n$,
- $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ si $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$ (**Relation de Pascal**).

Principe de démonstration. Par le calcul, à partir de la définition de $\binom{n}{p}$.

p.134 **Exercice 22** Montrer que, pour tous entiers naturels n et p, le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ est un entier.

Triangle de Pascal

La relation de Pascal nous offre une méthode pour calculer les premiers coefficients binomiaux, en construisant le **triangle de Pascal**. Dans le triangle ci-contre, où chaque coefficient est la somme des deux coefficient situés au dessus de lui, on peut lire à la ligne numéro n les coefficients :

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}.$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccl}
 & & & & & & 1 & & & & & & & & n=0 \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & n=1 \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & n=2 \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & n=3 \\
 & & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & \boxed{4} & & 1 & & & & n=4 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & \boxed{10} & & 5 & & 1 & & & n=5 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & n=6
\end{array}$$

Les nombres encadrés dans le triangle ci-dessus correspondent à la relation :

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}.$$

Remarque

Une autre présentation possible du triangle de Pascal est celle ci-contre, qui est parfois plus facile à utiliser, surtout pour la lecture en colonne (c'est-à-dire pour accéder à différentes valeurs de $\binom{n}{p}$ pour une valeur fixée de p).

$$\begin{array}{c|ccccccc}
0 & 1 & & & & & & \\
1 & 1 & 1 & & & & & \\
2 & 1 & 2 & 1 & & & & \\
3 & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
4 & 1 & 4 & \boxed{6} & \boxed{4} & 1 & & \\
5 & 1 & 5 & 10 & \boxed{10} & 5 & 1 & \\
6 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\hline
n \downarrow & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \rightarrow p
\end{array}$$

3 Interprétations du coefficient binomial

Nombre de chemins réalisant p succès dans un arbre

On peut interpréter le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ comme le nombre de chemins réalisant p succès dans l'arbre modélisant une succession de n épreuves de Bernoulli.

p.134

Exercice 23 *(Justification de ce qui précède)*

Notons $a_{n,p}$ le nombre de manières de réaliser p succès dans une succession de n épreuves de Bernoulli.

1. Expliquer pourquoi la famille $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ vérifie la relation de Pascal :
$$\forall n \geqslant 1 \quad \forall p \geqslant 1 \quad a_{n,p} = a_{n-1,p} + a_{n-1,p-1}.$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons la propriété H_n : « $\forall p \in \mathbb{N} \quad a_{n,p} = \dbinom{n}{p}$ ».

   Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie, et conclure que :
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad a_{n,p} = \binom{n}{p}.$$

Remarque La démonstration par récurrence précédente repose sur les propriétés suivantes vérifiées par la famille $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$:

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n,0} = 1$;
- $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad a_{0,p} = 0$;
- la relation de Pascal : $a_{n,p} = a_{n-1,p} + a_{n-1,p-1}$.

Intuitivement, il était facile de se convaincre que ces deux propriétés assurent l'égalité entre la famille $(a_{n,p})$ et la famille des coefficients binomiaux. En effet, lors de la construction du triangle de Pascal, ces deux propriétés permettent à elles seules de construire tout le triangle :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \star & \star & \star & \star \\ 1 & \star & \star & \star & \star \\ 1 & \star & \star & \star & \star \\ 1 & \star & \star & \star & \star \end{array}$$

Les propriétés $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n,0} = 1$ et $\forall p \geqslant 1 \quad a_{0,p} = 0$ permettent de commencer la construction.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

La propriété ainsi que la relation de Pascal permettent ensuite de poursuivre la construction.

Nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments

Pour n et p entiers naturels, le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ peut également s'interpréter comme le nombre de parties à p éléments dans un ensemble qui en comporte n. De manière informelle, cela signifie qu'il y a $\binom{n}{p}$ manières de choisir p objets parmi n. La justification de tout ceci sera donnée dans le chapitre 28 sur le dénombrement.

Remarque Ceci justifie l'emploi de l'expression « p parmi n » pour désigner le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

4 Formule du binôme

Proposition 8 (Formule du binôme de Newton)

Étant donné $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n-p}.$$

Principe de démonstration. On procède par récurrence, en utilisant la formule de Pascal.

Démonstration page 135

Quelques applications

p.136 **Exercice 24** Soit $n \in \mathbb{N}$. Grâce à la formule du binôme, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

p.136 **Exercice 25** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. En reconnaissant une formule du binôme, montrer que :

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et de $\displaystyle\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$.

p.137 **Exercice 26** En utilisant la formule du binôme, démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

III Systèmes linéaires, méthode du pivot

1 Système de 2 équations à 2 inconnues

On appelle **système linéaire de 2 équations à 2 inconnues** tout système de la forme suivante :

$$(\mathcal{S}) \ : \ \begin{cases} a\,x + b\,y & = & e \\ c\,x + d\,y & = & f \end{cases}$$

où x et y sont les **inconnues**, et a, b, c, d, e et f sont des coefficients réels ou complexes. Résoudre ce système revient à trouver tous les couples (x, y) vérifiant simultanément les deux équations.

Remarque Si l'un des couples (a, b) et (c, d) est nul, alors la résolution du système est facile. En effet, si par exemple on a $(a, b) = (0, 0)$, alors la première équation devient : $0 = e$. Deux cas peuvent alors se présenter.

- **Premier cas $e = 0$.** Dans ce cas, la première équation est toujours vérifiée, et le système est équivalent à l'équation linéaire $c\,x + d\,y = f$ qu'il est facile de résoudre.

- **Deuxième cas $e \neq 0$.** Dans ce cas, la première équation n'est jamais vérifiée, et le système ne possède pas de solution (on dit alors qu'il est **incompatible**).

Interprétation géométrique (cas réel) : intersection de deux droites

Plaçons-nous dans le cas où les coefficients sont réels, et supposons que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$. Munissons le plan d'un repère.

- Comme $(a, b) \neq (0, 0)$, l'équation $a\,x + b\,y = e$ peut être interprétée comme l'équation d'une droite affine $\mathcal{D}_1$.

- De même, comme $(c, d) \neq (0, 0)$, l'équation $c\,x + d\,y = f$ peut être interprétée comme l'équation d'une droite affine $\mathcal{D}_2$.

Ainsi, résoudre le système $(\mathcal{S})$ revient à déterminer les points d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Trois cas peuvent alors se présenter :

- **Premier cas :** les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes. Alors, le système possède une unique solution : les coordonnées du point d'intersection.

- **Deuxième cas :** les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont confondues. Alors, le système possède une infinité de solutions : tous les couples de coordonnées des points de la droite.

- **Troisième cas :** les droites $\mathcal{D}_1$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont parallèles et non confondues. Alors le système est **incompatible**, c'est-à-dire qu'il ne possède pas de solution.

Remarque
Pour savoir si les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles, on peut considérer les vecteurs $\vec{n}_1 = (a,b)$ et $\vec{n}_2 = (c,d)$, qui sont des vecteurs non nuls normaux à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ respectivement.

- On sait alors que les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires.
- Ces deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, les couples (a,b) et (c,d) sont proportionnels, c'est-à-dire si, et seulement si, $a\,d - b\,c = 0$.

Définition 2

La quantité $a\,d - b\,c$ est appelée **déterminant du système $(\mathcal{S})$**. On le note $\det(\mathcal{S})$ ou encore $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

L'interprétation géométrique précédente nous indique donc que le système $(\mathcal{S})$ possède une unique solution si, et seulement si, son déterminant est non nul.

Remarque Dans le cas où le déterminant du système $(\mathcal{S})$ est nul, pour savoir si l'on est dans le deuxième cas ou le troisième, il s'agit de regarder si les deux équations sont proportionnelles ou pas.

- Si elles le sont, alors les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont confondues, et le système possède une infinité de solutions.
- Dans le cas contraire, alors les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles et non confondues, et donc le système est incompatible.

Cas général

La caractérisation de l'unicité de la solution à l'aide de la non nullité du déterminant, obtenue géométriquement dans le cas réel, est vraie dans le cas général, comme l'énonce la proposition suivante.

Proposition 9

Le système :

$$(\mathcal{S}) \ : \ \begin{cases} a\,x + b\,y & = \ e \\ c\,x + d\,y & = \ f \end{cases}$$

possède une unique solution si, et seulement si, son déterminant est non nul.

Démonstration.

- Supposons que le déterminant du système $(\mathcal{S})$ soit non nul, et montrons qu'il possède une unique solution. Procédons par analyse-synthèse.

  ∗ Supposons que (x,y) soit solution du système. On a alors :

$$a\,x + b\,y = e \quad (E_1) \qquad \text{et} \qquad c\,x + d\,y = f \quad (E_2).$$

  ⋆ L'équation $d \times (E_1) - b \times (E_2)$ nous donne alors $(ad-bc)\,x = ed - bf$, c'est-à-dire, comme $ad - bc \neq 0$:
$$x = \frac{ed-bf}{ad-bc}.$$
  ⋆ L'équation $c \times (E_1) - a \times (E_2)$ nous donne quant à elle $(bc-ad)\,y = ec - af$, c'est-à-dire, comme $ad-bc \neq 0$:
$$y = \frac{af-ec}{ad-bc}.$$

Cela montre que si le système est compatible, il possède une unique solution.

∗ Réciproquement, il est facile de vérifier que le couple proposé est solution du système, car il vérifie ses deux équations. □

- Il reste à démontrer l'autre sens. Démonstration page 137

Notation Un tel système $(\mathcal{S})$ de déterminant non nul est appelé **système de Cramer**. On dit aussi de $(\mathcal{S})$ qu'il *est de Cramer*.

Remarque Lors de la démonstration précédente, nous avons obtenu que si le système $(\mathcal{S})$ est de Cramer, alors son unique solution est le couple (x,y) défini par les formules :
$$x = \frac{ed-bf}{ad-bc} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{af-ec}{ad-bc}.$$
Dans ces formules :

- au dénominateur se trouve le déterminant du système $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$;
- au numérateur, nous voyons apparaître les déterminants :
$$\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix},$$
qui sont respectivement obtenus, à partir du déterminant du système, en substituant le second membre du système à la colonne associée à l'inconnue que l'on souhaite calculer.

Ces formules sont appelées **formules de Cramer**, et seront parfois utilisées dans la suite.

p.137 **Exercice 27** Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 5x + 3y &= -2 \\ 2x + \ \ y &= \ \ 3. \end{cases}$

p.137

Exercice 28 On considère le système suivant, dépendant de paramètres λ et μ :

$$(\mathcal{S}) \ : \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda x + 3y & = & -2 \\ 2x + \ \ y & = & \mu. \end{array} \right.$$

1. Pour quelles valeurs des paramètres λ et μ le système $(\mathcal{S})$ est-il de Cramer ? Donner alors l'unique solution.
2. Résoudre le système lorsque celui-ci n'est pas de Cramer.

2 Système de 2 équations à 3 inconnues

On appelle **système linéaire de 2 équations à 3 inconnues** un système de la forme suivante :

$$(\mathcal{S}) \ : \left\{ \begin{array}{rcl} a\,x + b\,y + c\,z & = & g \\ d\,x + e\,y + f\,z & = & h, \end{array} \right.$$

où x, y et z sont les **inconnues**, et a, b, c, d, e, f, g et h sont des coefficients réels ou complexes. Résoudre ce système revient à trouver tous les triplets (x, y, z) vérifiant simultanément les deux équations.

Remarque Si l'un des triplets (a, b, c) et (d, e, f) est nul, alors le système se ramène à une seule équation. En effet, si par exemple on a $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, alors, la première équation devient $0 = g$. Deux cas peuvent alors se présenter :

- **Premier cas $g = 0$.** Dans ce cas, la première équation est toujours vérifiée, et le système se ramène à l'équation linéaire $d\,x + e\,y + f\,z = h$.
- **Deuxième cas $g \neq 0$.** Dans ce cas, la première équation n'est jamais vérifiée, donc le système est incompatible.

Interprétation géométrique (cas réel) : intersection de plans

Plaçons-nous dans le cas où les coefficients sont réels, et supposons que :

$$(a, b, c) \neq (0, 0, 0) \qquad \text{et} \qquad (d, e, f) \neq (0, 0, 0).$$

Munissons l'espace d'un repère.

- Comme $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, l'équation $a\,x + b\,y + c\,z = g$ peut être interprétée comme l'équation d'un plan $\mathcal{P}_1$.
- De même, comme $(d, e, f) \neq (0, 0, 0)$, l'équation $d\,x + e\,y + f\,z = h$ peut être interprétée comme l'équation d'un plan $\mathcal{P}_2$.

Résoudre le système $(\mathcal{S})$ revient alors à déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

- Si les deux plans ne sont pas parallèles, alors leur intersection est une droite. Le système possède alors comme solutions tous les triplets de coordonnées des points de cette droite.

- Si les deux plans sont confondus, alors le système possède comme solutions tous les triplets de coordonnées des points du plan en question.

- Si les deux plans sont parallèles et non confondus, alors le système est incompatible.

Remarques

1. Comme les vecteurs $\vec{n}_1 = (a, b, c)$ et $\vec{n}_2 = (d, e, f)$ sont des vecteurs non nuls normaux respectivement à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires, c'est-à-dire si, et seulement si, les triplets (a, b, c) et (d, e, f) sont proportionnels.

2. On constate que si $(\mathcal{S})$ est un système de 2 équations à 3 inconnues, alors :

   - soit $(\mathcal{S})$ est incompatible,
   - soit $(\mathcal{S})$ possède une infinité de solutions.

   Il n'y aura donc jamais existence et unicité de solution pour un tel système.

p.138

Exercice 29 On considère le système suivant, que l'on souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(\mathcal{S}) \; : \; \begin{cases} x + 2\,y + 3\,z &= 3 \\ 2\,x + y + z &= 1. \end{cases}$$

1. Sans faire de calcul, expliquer pourquoi on peut trouver $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ et $(x_u, y_u, z_u) \in \mathbb{R}^3$ tels que l'ensemble des solutions soit :

$$\big\{(x_0 + \lambda x_u,\, y_0 + \lambda y_u,\, z_0 + \lambda z_u)\,;\; \lambda \in \mathbb{R}\big\}.$$

2. Résoudre $(\mathcal{S})$.

p.139

Exercice 30 On considère le système suivant, dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(\mathcal{S}) \; : \; \begin{cases} x + 2\,y + 3\,z &= 3 \\ 3\,x + 6\,y + 9\,z &= \lambda. \end{cases}$$

Résoudre $(\mathcal{S})$ en discutant suivant la valeur du paramètre λ.

3 Cas général : système de n équations à p inconnues

Dans toute la suite, nous considérons des systèmes linéaires à coefficients réels ou complexes. Nous utiliserons la lettre $\mathbb{K}$ pour désigner $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**.

Généralités

Étant donné deux entiers naturels n et p non nuls, on appelle système linéaire de n équations à p inconnues x_1, x_2,…, x_p tout système $(\mathcal{S})$ du type :

$$(\mathcal{S}) \ : \left\{\begin{array}{l} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,j}\,x_j + \cdots + a_{1,p}\,x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}\,x_1 + a_{i,2}\,x_2 + \cdots + a_{i,j}\,x_j + \cdots + a_{i,p}\,x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \cdots + a_{n,j}\,x_j + \cdots + a_{n,p}\,x_p = b_n \end{array}\right.$$

où $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $(b_1,\, b_2, \ldots,\, b_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$.

- Les $a_{i,j}$ sont appelés les **coefficients** du système.
- La n-liste $(b_1,\, b_2, \ldots,\, b_n)$ est appelée **second membre** du système.
- Lorsque $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ on dit que le système est **homogène**, ou encore qu'il est « **sans second membre** ».
- On appelle **solution du système** toute p-liste $(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant les n équations de $(\mathcal{S})$.
- Le système $(\mathcal{S})$ est dit **compatible** s'il admet au moins une solution. Sinon on dit qu'il est **incompatible**.
- Le système $(\mathcal{S}_0)$ obtenu en remplaçant tous les b_i par 0 est appelé **système homogène associé** à $(\mathcal{S})$.
- On dit qu'un système est **carré** s'il a autant d'équations que d'inconnues.

Remarque Tout système homogène est compatible, car il admet au moins la n-liste nulle $(0,\ldots,0)$ comme solution.

Exemple Le système de trois équations à trois inconnues $\left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_3 - x_1 = 1 \end{array}\right.$ n'est pas compatible puisque si (x_1, x_2, x_3) était une solution, alors en sommant les trois équations on obtiendrait $0 = 3$.

En revanche, le système homogène associé $\left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_1 = 0 \end{array}\right.$ admet, en plus du triplet $(0,0,0)$, des solutions non nulles, comme par exemple le triplet $(1,1,1)$.

Structure de l'ensemble des solutions

On considère ici un système linéaire $(\mathcal{S})$ et on note $(\mathcal{S}_0)$ son système homogène associé.
La proposition suivante explique comment la résolution du système $(\mathcal{S})$ se ramène, lorsque celui-ci est compatible, à :

- déterminer une solution particulière de $(\mathcal{S})$;
- résoudre le système homogène $(\mathcal{S}_0)$.

Proposition 10

Si $(\omega_1, \ldots, \omega_p)$ désigne une solution de $(\mathcal{S})$, alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est l'ensemble des p-listes de la forme :

$$(x_1, \ldots, x_p) = (\omega_1 + h_1, \ldots, \omega_p + h_p) \quad \text{avec} \quad (h_1, \ldots, h_p) \text{ solution de } (\mathcal{S}_0).$$

Principe de démonstration. La démonstration se fait en deux temps :

- on vérifie que toutes les p-listes annoncées sont bien solutions ;
- on montre que toutes les solutions sont bien de cette forme. Démonstration page 139

Système triangulaire

Certains systèmes linéaires sont « plus faciles » à résoudre que d'autres. Nous présentons dans cette partie les systèmes triangulaires, dont la résolution est particulièrement aisée.
On dit qu'un système est **triangulaire** s'il est de la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{rrrr}
a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,i}\,x_i + \cdots + & a_{1,n-1}\,x_{n-1} + & a_{1,n}\,x_n & = b_1 \\
a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,i}\,x_i + \cdots + & a_{2,n-1}\,x_{n-1} + & a_{2,n}\,x_n & = b_2 \\
 & & & \vdots \\
a_{i,i}\,x_i + \cdots + & a_{i,n-1}\,x_{n-1} + & a_{i,n}\,x_n & = b_i \\
 & & & \vdots \\
 & a_{n-1,n-1}\,x_{n-1} + & a_{n-1,n}\,x_n & = b_{n-1} \\
 & & a_{n,n}\,x_n & = b_n.
\end{array}\right.$$

Autrement dit, un système triangulaire est un système carré (sic !) dont les coefficients $a_{i,j}$ sont nuls lorsque $i > j$.

Notation Les coefficients $a_{k,k}$ sont appelés **coefficients diagonaux**.

Si les coefficients diagonaux sont *tous non nuls*, alors un tel système possède une unique n-liste solution, que l'on détermine composante par composante, en partant de la dernière équation et en remontant :

- la dernière ligne nous donne la valeur de x_n : $x_n = \dfrac{b_n}{a_{n,n}}$;
- puis, l'avant-dernière ligne nous fournit la valeur de x_{n-1} :
$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}}(b_{n-1} - a_{n-1,n}\,x_n) \;;$$
- on poursuit ainsi de suite, jusqu'à remonter à la première ligne, qui, comme on a alors déjà déterminé x_n, $x_{n-1}, \dots,$ x_2, nous donne la valeur de x_1.

Attention Dans le raisonnement ci-dessus, il est important que les coefficients diagonaux soit tous non nuls. En effet, la ligne i permet de déterminer x_i, mais ceci à condition de pouvoir diviser par $a_{i,i}$.

Remarque Le raisonnement précédent correspond à une partie « analyse » d'une démonstration, et montre en fait qu'il existe au plus une solution au système. En fait, il est facile de vérifier que, par construction, la n-liste $(x_1, \dots, x_n)$ que l'on a déterminée vérifie chaque équation du système, autrement dit est bien solution du système.

Exemple Selon le principe précédent, la résolution du système
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ \qquad x_2 - \ x_3 &= 1 \\ \qquad\qquad 2x_3 &= 3 \end{cases}$$
donne directement $x_3 = \dfrac{3}{2}$, puis $x_2 = 1 + x_3 = \dfrac{5}{2}$, et enfin $x_1 = 1 + x_2 - 3\,x_3 = -1$.
Le système possède donc une unique solution : $\left(-1, \dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

Opérations élémentaires

Définition 3

Deux systèmes sont dits **équivalents** s'il possèdent les mêmes solutions.

Nous venons de voir précédemment qu'il était facile de résoudre un système triangulaire. La question qui se pose alors est : peut-on transformer tout système linéaire en un système triangulaire qui lui est équivalent ?
La réponse est négative dans le cas général. Cependant, nous allons présenter ici la **méthode du pivot**, qui permet de transformer un système linéaire en un système « plus simple » à résoudre.

Opérations élémentaires sur les lignes

Dans la suite, nous emploierons le terme **ligne** pour désigner une équation d'un système linéaire. Ainsi, un système à p équations comporte p lignes, que l'on numérote de la ligne 1 à la ligne p, du haut vers le bas.

Pour modifier un système en un système qui lui est équivalent, nous nous autorisons les trois types d'opérations suivantes, que nous appelons **opérations élémentaires**.

- **Ajout à une ligne d'un multiple d'une autre**

  Étant donné λ un scalaire et $i \neq j$, on indiquera $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ pour signaler que l'on a modifié la ligne i en lui ajoutant la ligne j multipliée par λ.

- **Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul**

  Étant donné un scalaire *non nul* μ, on indiquera $L_i \leftarrow \mu L_i$ pour signaler que l'on a modifié la ligne i en la multipliant par μ.

- **Échange de deux lignes**

  On indiquera $L_i \leftrightarrow L_j$ pour signaler que l'on a échangé les lignes i et j.

Remarque En combinant les deux premières opérations, on obtient une autre opération élémentaire de la forme $L_i \leftarrow \alpha\, L_i + \beta\, L_j$, avec $\alpha \neq 0$ et $j \neq i$.

Proposition 11

Toute opération élémentaire transforme un système en un système qui lui est équivalent.

Démonstration page 140

Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot consiste à effectuer sur un système une suite d'opérations élémentaires pour le transformer en un système équivalent « plus simple ».
Dans ce qui suit, nous expliquons concrètement comment ramener la résolution d'un système à p inconnues à celle d'un système à $p-1$ inconnues.
Considérons un système linéaire $(\mathcal{S})$ à n équations et p inconnues :

$$(\mathcal{S}) \ : \left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \\
a_{2,1}\,x_1 & + & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & a_{2,p}\,x_p & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1}\,x_1 & + & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & a_{n,p}\,x_p & = & b_n
\end{array}\right. .$$

- Si tous les coefficients devant x_1 sont nuls, alors l'inconnue x_1 n'intervient pas dans l'écriture du système, et donc sa valeur n'a pas d'influence sur le fait que la liste $(x_1,\ldots,x_p)$ soit solution ou non.

On résout alors le système $(\widetilde{S})$, qui a la même écriture que (S), mais que l'on voit comme un système à seulement $p-1$ inconnues qui sont $x_2, \ldots, x_p$.

Les solutions de $(\mathcal{S})$ sont alors les p-listes :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p), \quad \text{avec} \quad x_1 \in \mathbb{K} \quad \text{et} \quad (x_2, \ldots, x_p) \text{ solution de } (\widetilde{\mathcal{S}}).$$

- Si au moins un des coefficients devant x_1 est non nul, alors choisissons-en un, que l'on appelle **pivot**.

  * En notant i_0 l'indice de la ligne où se trouve le pivot choisi et en réalisant l'échange de lignes $L_{i_0} \leftrightarrow L_1$, alors on obtient un système équivalent à $(\mathcal{S})$ où le pivot choisi est le coefficient devant x_1 à la première ligne :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
\boxed{\tilde{a}_{1,1}}\, x_1 & + & \tilde{a}_{1,2} x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & \tilde{a}_{1,p}\, x_p & = & \tilde{b}_1 \\
\tilde{a}_{2,1}\, x_1 & + & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & \tilde{a}_{2,p}\, x_p & = & \tilde{b}_2 \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
\tilde{a}_{n,1}\, x_1 & + & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & \tilde{a}_{n,p}\, x_p & = & \tilde{b}_n .
\end{array}\right.$$

  * On utilise alors la première ligne pour éliminer l'inconnue x_1 dans toutes les autres. Plus précisément, en réalisant les opérations élémentaires suivantes :

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{\tilde{a}_{2,1}}{\tilde{a}_{1,1}} L_1 \quad \ldots \quad L_n \leftarrow L_n - \frac{\tilde{a}_{n,1}}{\tilde{a}_{1,1}} L_1,$$

  on obtient un système équivalent à $(\mathcal{S})$ de la forme ci-dessus :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
\hat{a}_{1,1}\, x_1 & + & \hat{a}_{1,2}\, x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & \hat{a}_{1,p}\, x_p & = & \hat{b}_1 \\
 & & \hat{a}_{2,2}\, x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & \hat{a}_{2,p}\, x_p & = & \hat{b}_2 \\
 & & \vdots & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & \vdots & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & \hat{a}_{n,2}\, x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & + & \hat{a}_{n,p}\, x_p & = & \hat{b}_n .
\end{array}\right.$$

  * Dans le système obtenu, on voit apparaître :
    * ⋆ une équation linéaire :

$$(E) \ : \ \hat{a}_{1,1}\, x_1 + \ \cdots \ \ \cdots \ \ \cdots \ \ \cdots \ + \ \hat{a}_{1,p}\, x_p \ = \ \hat{b}_1 \ ;$$

⋆ un système à $p-1$ inconnues formé par ses $n-1$ dernières lignes :

$$(\widetilde{S})\ :\ \left\{\begin{array}{ccccccc} \hat{a}_{2,2}\,x_2 & + & \cdots & \cdots & + & \hat{a}_{2,p}\,x_p & = & \hat{b}_2 \\ \vdots & & & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots & & \vdots \\ \hat{a}_{n,2}\,x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & \hat{a}_{n,p}\,x_p & = & \hat{b}_n. \end{array}\right.$$

La résolution du système $(\widetilde{S})$ donne alors la résolution du système $(\mathcal{S})$. En effet, une p-liste $(x_1,\ldots,x_p)$ est solution de $(\mathcal{S})$ si, et seulement si, on a à la fois les deux propriétés suivantes :

⋆ $(x_2,\ldots,x_p)$ est solution de $(\widetilde{S})$;

⋆ $(x_1,\ldots,x_p)$ est solution de (E).

Plus précisément, comme $\hat{a}_{1,1}$ est non nul, à chaque solution $(x_2,\ldots,x_p)$ de $(\widetilde{S})$ correspond une unique solution de $(\mathcal{S})$ qui est la p-liste suivante :

$$\Big(\frac{1}{\hat{a}_{1,1}}(\hat{b}_1-\hat{a}_{1,2}\,x_2-\cdots-\hat{a}_{1,p}\,x_p),\ x_2,\ldots,\ x_p\Big). \qquad (*)$$

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est donc l'ensemble des p-listes de la forme $(*)$, avec $(x_2,\ldots,x_p)$ solution de $(\mathcal{S})$.

∗ Il s'agit désormais de résoudre le système $(\widetilde{S})$: pour ce faire, on peut à nouveau appliquer la méthode du pivot précédente.

4 Exemples

Premier exemple

On souhaite résoudre le système :

$$(\mathcal{S})\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} 2x_1+\ \ x_2-2x_3 & = & 1 \\ -2x_1-2x_2+3x_3 & = & 1 \\ 3x_1-\ \ x_2-2x_3 & = & 5. \end{array}\right.$$

Choisissons le coefficient 2 devant x_1 à la première ligne comme pivot. Effectuons les opérations $L_2 \leftarrow L_2+L_1$ et $L_3 \leftarrow 2L_3-3L_1$ afin d'éliminer l'inconnue x_1 dans les deux dernières équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1+x_2-2x_3 & = & 1 \\ -x_2+\ \ x_3 & = & 2 \\ -5x_2+2x_3 & = & 7. \end{array}\right.$$

Remarque Nous avons préféré appliquer l'opération $L_3 \leftarrow 2L_3-3L_1$ plutôt que $L_3 \leftarrow L_3-\frac{3}{2}L_1$ afin d'éviter l'apparition de fractions. En toute rigueur, l'opération $L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1$ n'est pas une opération élémentaire ; elle est obtenue en réalisant successivement les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{3}{2}L_1$ puis $L_3 \leftarrow 2L_3$.

Le sous-système $\begin{cases} -x_2 + x_3 = 2 \\ -5x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$ est de Cramer, car son déterminant vaut $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 3$, et son unique solution est donnée par :

$$x_2 = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_3 = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 1.$$

La première équation du système $(\mathcal{S})$ nous donne alors $x_1 = 2$.
L'unique solution du système $(\mathcal{S})$ est donc le triplet $(2, -1, 1)$.

Deuxième exemple

On souhaite résoudre le système :

$$(\mathcal{S}) \;:\; \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$$

- Afin d'obtenir un pivot plus simple, commençons par échanger les deux premières lignes :

$$(\mathcal{S}) \;:\; \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$$

- Effectuons les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1$ afin d'éliminer l'inconnue x_1 dans les lignes 2 et 3 :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_2 - 5x_3 = -1 \\ 8x_2 - 10x_3 = -2. \end{cases}$$

- La troisième équation étant multiple de la deuxième, le système est équivalent au suivant :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$$

- On remarque alors que pour tout choix de la valeur de x_3, le triplet (x_1, x_2, x_3) est solution de $(\mathcal{S})$ si, et seulement si, le couple (x_1, x_2) est solution du système :
$$(\widetilde{\mathcal{S}}) \ : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & 1 - 2x_3 \\ 4x_2 & = & -1 + 5x_3. \end{array} \right.$$
Le système $(\widetilde{\mathcal{S}})$ est de Cramer, ce qui mène à l'expression de x_1 et x_2 en fonction de x_3 :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{3}{4} - \frac{3}{4} x_3 \\ x_2 & = & -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} x_3. \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions du système est donc :
$$\left\{ \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} x_3, \ -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} x_3, \ x_3 \right) \ ; \ x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Remarque Dans la résolution précédente, lorsque l'on décide d'exprimer les inconnues x_1 et x_2 en fonction de x_3,
- les inconnues x_1 et x_2 sont appelées **inconnues principales** ;
- l'inconnue x_3 est appelée **inconnue secondaire**.

Attention En général, il n'y a pas une unique manière de choisir les inconnues principales et secondaires. Ainsi, dans la résolution précédente, et devant le système :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ 4x_2 - 5x_3 & = & -1, \end{array} \right.$$
on peut choisir de prendre x_2 comme inconnue secondaire, et x_1 et x_3 comme inconnues principales.

p.140 **Exercice 31** Finir la résolution du système précédent en choisissant cette fois-ci x_2 comme inconnue secondaire.

Troisième exemple : système dépendant d'un paramètre

On souhaite résoudre, en discutant suivant la valeur de a, le système suivant :
$$(\mathcal{S}) \ : \left\{ \begin{array}{ccccccc} (a+1)\,x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & (a-2)\,x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & (a-3)\,x_3 & = & 1. \end{array} \right.$$
Tel que le système apparaît, on peut être tenté de choisir le coefficient $(a+1)$ devant x_1 à la première ligne comme pivot. Cela n'est pas très pertinent car

cela exige que $a+1$ soit non nul, et nous contraint à traiter séparément le cas $a=-1$. Nous préférons donc choisir un autre coefficient comme pivot, par exemple le 1 devant x_1 à la dernière ligne. Échangeons les lignes 1 et 3 :

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & (a-3)\,x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & (a-2)\,x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ (a+1)\,x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 2, \end{cases}$$

puis effectuons les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - (a+1)\,L_1$:

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & (a-3)\,x_3 & = & 1 \\ & & (a-1)\,x_2 & + & (a-1)\,x_3 & = & 0 \\ & & -(a-1)\,x_2 & - & (a-1)^2\,x_3 & = & -(a-1). \end{cases}$$

- On remarque que si $a=1$, alors les deux dernières lignes sont simplement $0=0$. Le système est alors équivalent à l'équation :
$$x_1 + x_2 - 2\,x_3 = 1.$$
On constate alors qu'un triplet (x_1,x_2,x_3) est solution si, et seulement si, $x_1 = 1 - x_2 + 2\,x_3$, ce qui signifie que l'ensemble des solutions est :
$$\Big\{(1-x_2+2\,x_3,\ x_2,\ x_3)\ ;\ (x_2,x_3)\in \mathrm{IR}^2\Big\}.$$

- Supposons désormais $a\neq 1$. Alors on peut simplifier l'écriture du système en divisant les deux dernières équations par $(a-1)$:
$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & (a-3)\,x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & (a-1)\,x_3 & = & 1. \end{cases}$$

Notons $(\widetilde{\mathcal{S}})$ le sous-système : $\begin{cases} x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + (a-1)\,x_3 & = & 1. \end{cases}$

Ce système $(\widetilde{S})$ a pour déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix} = a-2$.

  $*$ Si $a\neq 2$, alors $(\widetilde{\mathcal{S}})$ est de Cramer, et son unique solution est le couple (x_2,x_3), avec :
  $$x_2 = \frac{-1}{a-2} \qquad \text{et} \qquad x_3 = \frac{1}{a-2}\cdot$$

  Par suite, la première équation de $(\mathcal{S})$ donne $x_1 = \dfrac{2}{a-2}$, et donc $(\mathcal{S})$

possède comme unique solution le triplet :

$$\left(\frac{2}{a-2}, \frac{-1}{a-2}, \frac{1}{a-2}\right).$$

* Si $a = 2$, alors le système $(\widetilde{\mathcal{S}})$ devient $\left\{\begin{array}{lcl} x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 1 \end{array}\right.$ qui est incompatible. Par suite, le système $(\mathcal{S})$ est également incompatible.

Remarque Concernant le choix du premier pivot, au début de l'algorithme, on constate qu'il n'était effectivement pas pertinent de choisir le coefficient $a+1$, car le cas $a = -1$ ne constitue pas un cas à traiter séparément lors la résolution du système.

Point méthode

Lorsque l'on applique la méthode du pivot à un système dépendant de paramètres, on cherche en priorité des pivots dont on est sûr qu'ils sont non nuls, de manière à retarder le plus possible les distinctions de cas sur les valeurs des paramètres.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 La relation proposée est en général complètement fausse ! Certes dans le développement de $(a_1 + \cdots + a_n)^p$ apparaissent les termes $a_1^p, \ldots, a_n^p$, mais il y en a d'autres (du moins si $p \geqslant 2$). Par exemple, si on a $a_1 = \cdots = a_n = 1$ et $p = 2$, alors l'égalité proposée devient $n = n^2$, qui est fausse dès que $n \geqslant 2$.

Cela ne signifie pas que l'on ne peut pas trouver de familles particulières $(a_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ qui rendent la relation vraie. Par exemple, si tous les termes sont nuls, alors la relation est vérifiée.

Exercice 2

1. Le produit des entiers pairs compris entre 1 et $2n$ s'écrit $A_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)$.

   Les règles de calculs du symbole $\prod$ nous donnent alors :
   $$A_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n\, n!\,.$$

2. On a $B_n = 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par A_n, on voit apparaître :
   - au numérateur, le produit de tous les entiers compris entre 1 et $2n+1$, c'est-à-dire $(2n+1)!$;
   - au dénominateur A_n, c'est-à-dire, d'après la première question, $2^n\, n!$.

   D'où :
   $$B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}\cdot$$

Exercice 3 On note $j = k - p$ et l'on écrit $S = \sum\limits_{j=0}^{q-p} a_{j+p}$.

Exercice 4 L'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$ n'est valable que si $n \geqslant 2$. En effet, pour pouvoir sortir deux termes de la somme, il faut que celle-ci comporte au moins deux termes. Pour $n = 1$, l'égalité considérée devient :
$$\underbrace{\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}}_{=1} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\sum_{k=2}^{1} \frac{1}{k}}_{=0}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 1 = \frac{3}{2},$$
ce qui est évidemment faux.

Remarque Remarquons tout de même que, même si la technique employée nécessite d'avoir $n \geqslant 2$, il est facile de vérifier que la formule obtenue reste vraie pour $n = 1$.

Exercice 5 1. Si $j = p + q - k$ (ou encore $k = p + q - j$), alors lorsque k décrit l'ensemble $[\![p, q]\!]$, j décrit également l'ensemble $[\![p, q]\!]$. Cela donne l'écriture suivante pour S :

$$S = \sum_{j=p}^{q} a_{p+q-j}.$$

2. Si $j = q - k$ (ou encore $k = q - j$), alors lorsque k décrit l'ensemble $[\![p, q]\!]$, j décrit l'ensemble $[\![0, q-p]\!]$. Cela donne l'écriture suivante pour S :

$$S = \sum_{j=0}^{q-p} a_{q-j}.$$

Exercice 6 Notons $S = \sum\limits_{k=1}^{n} k$. En effectuant le changement d'indice $j = n - k + 1$ dans la somme S, on a :

$$S = \sum_{j=1}^{n} (n - j + 1).$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}
2S &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{j=1}^{n} (n - j + 1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n - k + 1) \qquad \text{(on renomme } j \text{ en } k \text{ dans la deuxième somme)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (n+1) \\
&= n\,(n+1) \qquad \text{(c'est une somme constante)},
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu.

Exercice 7 Notons S la somme considérée, et montrons que :

$$2\,S = (n - p + 1)\,(u_p + u_n).$$

On a :

$$\begin{aligned}
2\,S &= \sum_{k=p}^{n} u_k + \sum_{k=p}^{n} u_k \\
&= \sum_{k=p}^{n} u_k + \sum_{j=p}^{n} u_{n+p-j} \qquad (j = n + p - k \text{ dans la deuxième somme}).
\end{aligned}$$

En renommant k l'indice de la deuxième somme, et en regroupant les deux sommes, il vient :

$$2\,S = \sum_{k=p}^{n} (u_k + u_{n+p-k}).$$

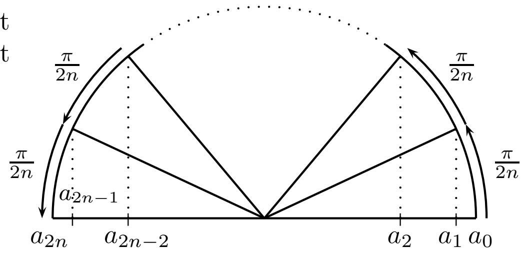
Comme $u_k + u_{n+p-k} = 2\,a + (n+p)\,b = u_p + u_n$, on est devant une somme constante. Cette somme contient $n - p + 1$ termes, ce qui donne :

$$2\,S = (n - p + 1)\,(u_p + u_n).$$

D'où le résultat.

Exercice 8 Afin d'alléger l'écriture, notons $a_k = \cos\left(\dfrac{k\,\pi}{2\,n}\right)\cdot$

Un dessin nous donne l'intuition que les termes de la somme se compensent deux à deux : le terme d'indice k est l'opposé du terme d'indice $2n-k$. En effet, pour $k \in [\![0, 2n]\!]$, on a :



$$\begin{aligned} a_{2n-k} &= \cos\left(\frac{(2n-k)\,\pi}{2\,n}\right) \\ &= \cos\left(\pi - \frac{k\,\pi}{2\,n}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{k\,\pi}{2\,n}\right) = -a_k. \end{aligned}$$

Effectuons le changement d'indice $j = 2n-k$ dans la somme S. Il est clair que lorsque k décrit $[\![0, 2n]\!]$, j décrit le même ensemble. On a donc :

$$S = \sum_{j=0}^{2n} a_{2n-j}.$$

Or, on a vu que pour tout $j \in [\![0, 2n]\!]$, on a $a_{2n-j} = -a_j$. On en déduit que :

$$S = \sum_{j=0}^{2n} (-a_j) = -\sum_{j=0}^{2n} a_j = -S.$$

D'où $S = 0$.

Exercice 9

1. • L'ensemble J_1 est constitué des entiers j vérifiant l'encadrement :

$$1 \leqslant 2j+1 \leqslant n,$$

ou encore :

$$0 \leqslant j \leqslant \frac{n-1}{2}\cdot$$

On en déduit que $J_1 = [\![0, \lfloor (n-1)/2 \rfloor]\!]$.

• De même, l'ensemble J_2 est constitué par les entiers j vérifiant :

$$1 \leqslant 2j \leqslant n,$$

autrement dit :

$$\frac{1}{2} \leqslant j \leqslant \frac{n}{2}\cdot$$

On en déduit que $J_2 = [\![1, \lfloor n/2 \rfloor]\!]$.

Remarque Des détails sur la notation $\lfloor \cdot \rfloor$ (qui désigne la partie entière), sont donnés au chapitre 8, page 397.

2. On a alors :

$$S = \sum_{j \in J_1} a_{2j+1} + \sum_{j \in J_2} a_{2j} = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} a_{2j+1} + \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2j}.$$

Exercice 10 On remarque que tous les termes d'indice impair de la somme sont nuls, car pour k impair on a $\cos\left(\dfrac{k\,\pi}{2}\right) = 0$. On peut donc réécrire la somme en ne sommant que les termes d'indice pair. Plus précisément, si l'on note I l'ensemble des entiers pairs appartenant à l'intervalle $[\![0, 2n]\!]$, on a :

$$S = \sum_{k \in I} 2^k \cos\left(\frac{k\,\pi}{2}\right).$$

En notant alors $k = 2\,j$, la somme S se réécrit :

$$S = \sum_{j=0}^{n} 2^{2j} \cos\left(\frac{2\,j\,\pi}{2}\right) = \sum_{j=0}^{n} 4^j \cos(j\,\pi).$$

Comme $\cos(j\,\pi) = (-1)^j$, cela permet de terminer le calcul, en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique (*cf.* la proposition 3 de la page 104) :

$$S = \sum_{j=0}^{n} (-4)^j = \frac{1 - (-4)^{n+1}}{5}\cdot$$

Exercice 11 La formule proposée est fausse en général. Il y a en fait plus de termes pris en compte dans le produit de droite que dans celui de gauche. En effet :

- dans le produit $\prod\limits_{q=1}^{2n} a_q$, les termes considérés sont :

  $$a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_{2n},$$

  autrement dit tous les termes de la famille $(a_k)_{k \in [\![2,2n]\!]}$;

- dans le produit $\prod\limits_{p=1}^{n} a_{2p}$, les termes considérés sont :

  $$a_2,\ a_4,\ \ldots,\ a_{2n}$$

  autrement dit uniquement les termes d'indices pairs de la famille $(a_k)_{k \in [\![2,2n]\!]}$.

Exercice 12 On a $S = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - \cdots - (2n-1) + 2n$.

En regroupant alors les termes deux à deux, il vient :

$$\begin{aligned} S &= (-1+2) + (-3+4) + (-5+6) + \cdots + (-(2n-1) + 2n) \\ &= \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ termes}} = n. \end{aligned}$$

Remarque Si l'on veut être plus formel et éviter le recours aux points de suspension, alors on peut écrire, en notant $a_k = (-1)^k k$:

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{j=1}^{n} \bigl(a_{2j-1} + a_{2j}\bigr),$$

puis constater que $\forall j \in [\![1, n]\!] \quad a_{2j-1} + a_{2j} = -(2j-1) + 2j = 1$, et conclure que $\sum\limits_{k=1}^{2n} a_k = \sum\limits_{j=1}^{n} \bigl(a_{2j-1} + a_{2j}\bigr) = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$.

Exercice 13 On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln k\big)$.

On reconnaît une somme télescopique qui vaut $\ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$.

Exercice 14

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En réduisant au même dénominateur, on a :
$$\frac{a}{k+1} + \frac{b}{k} = \frac{ka + (k+1)b}{k(k+1)} = \frac{k(a+b)+b}{k(k+1)}\cdot$$
On constate alors que le couple $(a,b) = (-1,1)$ convient, c'est-à-dire que l'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\cdot$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De ce qui précède on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\cdot$

Puis, par télescopage, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}\cdot$

Exercice 15 Le résultat est évidemment vrai pour $n = 0$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la somme $S = \sum\limits_{k=1}^{n} \big((k+1)^4 - k^4\big)$, et calculons S de deux manières différentes.

- D'une part, par télescopage, on a $S = (n+1)^4 - 1$.
- D'autre part, comme $\forall k \in [\![1,n]\!] \quad (k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ (voir la formule du binôme de Newton, page 112), on a :
$$\begin{aligned} S &= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n. \end{aligned}$$

En identifiant les deux expressions obtenues pour S et en simplifiant, on obtient bien :
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\cdot$$

Exercice 16 On écrit $a^{2n+1} + b^{2n+1} = a^{2n+1} - (-b)^{2n+1}$. En appliquant alors la première formule, on a :
$$\begin{aligned} a^{2n+1} + b^{2n+1} &= (a+b) \sum_{k=0}^{2n} a^k\,(-b)^{2n-k} \\ &= (a+b) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n-k}\,a^k\,b^{2n-k} \\ &= (a+b) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{k}\,a^k\,b^{2n-k} \qquad (k \text{ et } 2n-k \text{ ont la même parité}). \end{aligned}$$

Exercice 17 On a $S = \sum\limits_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum\limits_{i\in I}\Big(\sum\limits_{j\in J} b_i\, c_j\Big)$.

Dans la somme interne, b_i est une constante que l'on peut mettre en facteur. On a donc :

$$S = \sum_{i\in I}\Big(b_i \sum_{j\in J} c_j\Big).$$

Mais désormais, dans la somme externe, c'est la quantité $\sum\limits_{j\in J} c_j$ qui apparaît comme une constante, et que l'on peut donc mettre en facteur :

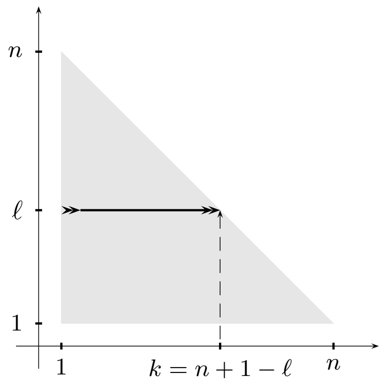
$$S = \Big(\sum_{j\in J} c_j\Big)\Big(\sum_{i\in I} b_i\Big).$$

D'où le résultat.

Exercice 18 On a directement :

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} i\,2^j &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} i\,2^j\\ &= \Big(\sum_{i=0}^{n} i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} 2^j\Big)\\ &= \frac{n\,(n+1)}{2}\,(2^{n+1}-1).\end{aligned}$$

Exercice 19



L'interversion des symboles $\sum$ consiste ici à faire d'abord varier ℓ, et ensuite k. On constate qu'il faut faire varier ℓ de 1 à n, puis k de 1 à $n+1-\ell$. On a donc :

$$S = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n+1-\ell} a_{k,\ell}.$$

Exercice 20 À i fixé, on a $\sum\limits_{j=1}^{i} 2^i = i\,2^i$, ce qui explique que $S = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i} 2^i$.

Attention Ne pas confondre les sommes $\sum\limits_{j=1}^{i} 2^i$ et $\sum\limits_{j=1}^{i} 2^j$. La première est une somme constante, alors que l'autre est la somme des termes d'une suite géométrique.

L'ensemble d'indexation de cette somme est l'ensemble des couples (i,j) vérifiant :

$$1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{et} \quad 1 \leqslant j \leqslant i,$$

que l'on peut aussi voir comme l'ensemble des couples (i,j) vérifiant :

$$1 \leqslant j \leqslant n \quad \text{et} \quad j \leqslant i \leqslant n.$$

L'interversion des deux symboles $\sum$ donne donc $S = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} 2^i$.

D'après la proposition 3 de la page 104, on a $\sum_{i=j}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2^j$. Il en résulte que :

$$S = \sum_{j=1}^{n} (2^{n+1} - 2^j) = \sum_{j=1}^{n} 2^{n+1} - \sum_{j=1}^{n} 2^j = n2^{n+1} - (2^{n+1} - 2) = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Exercice 21 Sous cette forme le calcul paraît difficile, car, à k fixé, nous n'avons pas d'expression simple pour la somme $\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}\cdot$ Intervertissons donc les deux symboles $\sum$:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{j}\cdot$$

Le calcul est alors simple, car à j fixé, on a simplement $\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{j} = 1$. On obtient :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} 1 = n.$$

Exercice 22 Procédons par récurrence. Pour cela, considérons la propriété :

$$H_n \ : \text{« } \forall p \in \mathbb{N} \quad \binom{n}{p} \in \mathbb{N} \text{ »},$$

et montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie.

- **Initialisation.** La propriété H_0 est évidemment vraie, car :
  - ∗ on a $\binom{0}{0} = 1 \in \mathbb{N}$;
  - ∗ pour $p \geqslant 1$, on a $\binom{0}{p} = 0 \in \mathbb{N}$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons H_{n-1} vraie, et montrons que H_n l'est aussi.
  - ∗ on a $\binom{n}{0} = 1 \in \mathbb{N}$;
  - ∗ pour $p \geqslant 1$, la formule de Pascal donne :

$$\binom{n}{p} = \underbrace{\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}}_{\text{somme d'entiers, d'après } H_{n-1}} \in \mathbb{N}.$$

D'où le résultat.

Exercice 23

1. Donnons-nous $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 1$. Après n épreuves de Bernoulli (que l'on peut interpréter intuitivement comme n lancers à pile ou face), il y a deux manières d'obtenir p succès :
   - avoir obtenu p succès après les $n-1$ premières épreuves, et obtenir un échec à la n-ième ; cela offre $a_{n-1,p}$ possibilités ;
   - avoir obtenu $p-1$ succès après les $n-1$ premières épreuves, et obtenir un succès à la n-ième ; cela offre $a_{n-1,p-1}$ possibilités supplémentaires.

   On a donc la relation $a_{n,p} = a_{n-1,p} + a_{n-1,p-1}$ souhaitée.

   On remarque que la relation reste vraie pour $n = 1$ si l'on convient que :
   $$a_{0,0} = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall p \geqslant 1 \quad a_{0,p} = 0,$$
   ce qui est naturel car après 0 épreuves on a forcément observé 0 succès.

2. - **Initialisation.** La propriété H_0 est immédiatement vraie, en ayant convenu que $a_{0,0} = 1$ et que $\forall p \geqslant 1 \quad a_{0,p} = 0$.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons H_{n-1}, et montrons H_n. Nous souhaitons donc montrer que :
   $$\forall p \in [\![0,n]\!] \quad a_{n,p} = \binom{n}{p}.$$
   Pour cela, donnons-nous $p \in [\![0,n]\!]$, et montrons que $a_{n,p} = \binom{n}{p}$.
     * Si $p = 0$, on a directement $a_{n,p} = 1 = \binom{n}{p}$, du fait qu'il y a une et une seule manière de réaliser 0 succès en n épreuves.
     * Si $p \geqslant 1$, alors on a $a_{n,p} = a_{n-1,p} + a_{n-1,p-1}$. Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $a_{n-1,p} = \binom{n-1}{p}$ et $a_{n-1,p-1} = \binom{n-1}{p-1}$. On en déduit que $a_{n,p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$, et donc, d'après la relation de Pascal, $a_{n,p} = \binom{n}{p}$.

   Cela montre l'hérédité, et termine la récurrence.

Proposition 8 Montrons par récurrence que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- La formule est évidemment vraie au rang 0, car $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0$.
- Étant donné $n \in \mathbb{N}$, supposons la formule vraie au rang n, et montrons-la au rang $n+1$.

  On écrit $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$, ce qui permet d'utiliser la formule au rang n. En développant, il vient alors :
  $$(a+b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{p+1} b^{n-p} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p+1}.$$

Un changement d'indice $(q = p+1)$ dans la première somme donne :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{q=1}^{n+1} \binom{n}{q-1} a^q\, b^{n-q+1} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n-p+1} \\
&= \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \left(\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \right)\; a^p\, b^{n-p+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} \\
&= b^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \left(\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \right)\; a^p\, b^{n-p+1} + a^{n+1}.
\end{aligned}$$

Puis, la formule de Pascal et le fait que $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ donnent :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n+1}{p} a^p\, b^{n-p+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} \\
&= \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} a^p\, b^{n-p+1},
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat souhaité.

Exercice 24 En écrivant $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$, la formule du binôme nous dit que cette quantité vaut $(1+1)^n = 2^n$.

1376 **Remarque** Ce résultat s'interprète ainsi : il y a 2^n parties dans un ensemble à n éléments, ce qui sera revu au chapitre sur le dénombrement.

Exercice 25

1. On reconnaît la formule du binôme appliquée à $(1-1)^n$, et l'on a $(1-1)^n = 0$ puisque $n \geqslant 1$.

2. • De la relation précédente on déduit que $\sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}$.

   • D'après l'exercice 24 on sait que $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} + \sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

   Il en résulte que :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}.$$

1381 **Remarque** Nous venons d'obtenir que dans un ensemble à n éléments, il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

Cela sera revu au chapitre sur le dénombrement.

Exercice 26 Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 0$, le résultat est évident car les membres de droite et de gauche de l'inégalité valent tous les deux 1.
- Supposons $n \geqslant 1$. D'après la formule du binôme on a :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + n\,x + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{n} x^k}_{\geqslant 0},$$

d'où le résultat.

Remarque Nous avons traité le cas $n = 0$ séparément afin de rendre licite l'écriture $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + n\,x + \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{k}{n} x^k$ (dans le cas $n \geqslant 1$). Il se trouve que, comme le terme nx est nul si n est nul, cette écriture est valable même dans ce cas.

Proposition 9 Supposons maintenant $\det(\mathcal{S}) = 0$, c'est-à-dire $ad - bc = 0$, et montrons que soit le système est incompatible, soit il possède une infinité de solutions.

Si les coefficients a, b, c, d sont tous nuls, alors il est immédiat de voir que :

- soit $e = f = 0$, et alors tout couple (x, y) est solution de $(\mathcal{S})$;
- soit $(e, f) \neq (0, 0)$, et alors le système est incompatible.

Supposons donc que les coefficients a, b, c, d ne sont pas tous nuls. Quitte à échanger les deux équations et/ou les deux inconnues, on peut supposer $a \neq 0$.

Si un couple (x, y) est solution de $(\mathcal{S})$, on a alors :

$$de - bf = d(ax + by) - b(cx + dy) = (ad - bc)x = 0.$$

Donc, si $de - bf \neq 0$, alors le système est incompatible.
Supposons désormais $de - bf = 0$. On constate alors que l'équation (E_2) s'obtient en multipliant l'équation (E_1) par $\dfrac{c}{a}$. Donc, si (E_1) est vérifiée, alors (E_2) l'est aussi. Le système est donc équivalent à l'équation linéaire :

$$(E_1) \ : \ ax + by = e.$$

Un couple (x, y) est alors solution si, et seulement si, $x = \dfrac{e - by}{a}$. Il y a donc une infinité de solutions, puisque à chaque valeur de y correspond une valeur de x telle que (x, y) soit solution.

Exercice 27 Le déterminant du système vaut $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$. Ce déterminant étant non nul, le système est de Cramer, et les formules de Cramer nous donnent son unique solution $(11, -19)$.

Exercice 28

1. Le déterminant du système vaut $\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 6$.

Le système est donc de Cramer si, et seulement si, $\lambda \neq 6$. L'unique solution est alors le couple (x, y), avec :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ \mu & 1 \end{vmatrix}}{\lambda - 6} = \frac{-2 - 3\mu}{\lambda - 6} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 2 & \mu \end{vmatrix}}{\lambda - 6} = \frac{\lambda\mu + 4}{\lambda - 6}.$$

2. Plaçons-nous dans le cas où $\lambda = 6$. Le système devient alors :

$$\begin{cases} 6x + 3y &= -2 \\ 2x + \;\; y &= \mu. \end{cases}$$

Les deux équations sont alors proportionnelles si, et seulement si, $\mu = -2/3$.

- Si $\mu \neq -2/3$, le système est incompatible.
- Si $\mu = -2/3$, alors le système est équivalent à l'équation $6x + 3y = -2$.
  - $*$ Un couple (x, y) est alors solution si, et seulement si :

$$x = \frac{-2 - 3y}{6} = -\frac{1}{3} - \frac{y}{2}.$$

Dans cette relation, on peut donner à y n'importe quelle valeur, puis en déduire la valeur de x associée. Cela mène au paramétrage suivant de l'ensemble des solutions du système :

$$\left\{\left(-\frac{1}{3} - \frac{y}{2},\, y\right) ;\ y \in \mathbb{R}\right\}.$$

  - $*$ On peut donner un autre paramétrage de l'ensemble des solutions, en disant qu'un couple (x, y) est solution si, et seulement si :

$$y = -\frac{2}{3} - 2x,$$

ce qui mène au paramétrage suivant de l'ensemble des solutions :

$$\left\{\left(x,\, -\frac{2}{3} - 2\,x\right) ;\ x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 29

1. Comme les triplets $(1, 2, 3)$ et $(2, 1, 1)$ sont non proportionnels, les deux équations du système $(\mathcal{S})$ correspondent géométriquement à deux plans non parallèles, dont l'intersection est donc une droite. En notant $M = (x_0, y_0, z_0)$ un point de cette droite et $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ un vecteur directeur, la droite est l'ensemble des points de la forme $M + \lambda\vec{u}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui mène à l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$:

$$\left\{(x_0 + \lambda x_u,\, y_0 + \lambda y_u,\, z_0 + \lambda z_u) ;\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. Pour tout choix de la valeur de z, le triplet (x, y, z) est solution du système $(\mathcal{S})$ si, et seulement si, le couple (x, y) est solution du système :

$$(\widetilde{\mathcal{S}}) \ : \ \begin{cases} x + 2\,y &= 3 - 3\,z \\ 2\,x + y &= 1 - z. \end{cases}$$

Le système $(\widetilde{\mathcal{S}})$ est un système de Cramer, dont l'unique solution est donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-3z & 2 \\ 1-z & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{z-1}{3} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-3z \\ 2 & 1-z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{5(1-z)}{3}.$$

On en déduit qu'un triplet $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est solution du système $(\mathcal{S})$ si, et seulement si, $x = \dfrac{z-1}{3}$ et $y = \dfrac{5(1-z)}{3}$, ce qui nous donne l'ensemble des solutions suivant :

$$\left\{\left(\frac{z-1}{3}, \frac{5(1-z)}{3}, z\right) ;\ z \in \mathbb{R}\right\},$$

qui s'interprète géométriquement comme un paramétrage de la droite passant par le point $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{3}, 0\right)$ et dirigée par le vecteur $\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{5}{3}, 1\right)$.

Exercice 30 Comme les triplets $(1,2,3)$ et $(3,6,9)$ sont proportionnels, les deux équations du système $(\mathcal{S})$ s'interprètent géométriquement comme deux plans parallèles. Ces deux plans sont alors disjoints (c'est-à-dire d'intersection vide) ou confondus.

Pour savoir dans quel cas on se trouve (disjoints ou confondus), il s'agit de regarder si leurs équations sont proportionnelles ou non. On constate que ces deux équations sont proportionnelles si, et seulement si, $\lambda = 9$.

- Si $\lambda \neq 9$, alors le système est incompatible.
- Si $\lambda = 9$, alors le système se réduit à la seule équation :

$$x + 2\,y + 3\,z = 3.$$

  On peut alors présenter l'ensemble des solutions de plusieurs façons :

  * par une équation :

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 3\},$$

  * par paramétrisation, ce qui se fait par exemple en exprimant x en fonction de y et z :

$$\{(3 - 2y - 3z,\ y,\ z) ;\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Proposition 10 Soit $(\omega_1, \ldots, \omega_p)$ une solution de $(\mathcal{S})$.

- Il est clair que si $(h_1, \ldots, h_p)$ est solution du système homogène, alors la p-liste $(\omega_1 + h_1, \ldots, \omega_p + h_p)$ est solution de $(\mathcal{S})$. Cela résulte du caractère linéaire du système $(\mathcal{S})$. En effet, pour $i \in [\![1,n]\!]$, la i-ème équation du système est vérifiée car :

$$\begin{aligned} a_{i,1}(\omega_1 + h_1) + \cdots + a_{i,p}(\omega_p + h_p) &= \big(a_{i,1}\omega_1 + \cdots a_{i,p}\omega_p\big) + \big(a_{i,1}h_1 + \cdots a_{i,p}h_p\big) \\ &= \qquad\qquad b_i \qquad\qquad + \qquad\qquad 0. \end{aligned}$$

- Réciproquement, si $(x_1, \ldots, x_p)$ est une solution de $(\mathcal{S})$, il est facile de voir qu'en notant $(h_1, \ldots, h_p) = (x_1 - \omega_1, \ldots, x_p - \omega_p)$, on a :
  * $(x_1, \ldots, x_p) = (\omega_1 + h_1, \ldots, \omega_p + h_p)$;

* $(h_1, \dots, h_p)$ est solution du système homogène, car pour $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned} a_{i,1}h_1 + \cdots + a_{i,p}h_p &= a_{i,1}(x_1 - \omega_1) + \cdots + a_{i,p}(x_p - \omega_p) \\ &= \big(\underbrace{a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p}_{=b_i}\big) - \big(\underbrace{a_{i,1}\omega_1 + \cdots + a_{i,p}\omega_p}_{=b_i}\big) = 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Proposition 11 Soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire et $(\widetilde{\mathcal{S}})$ un système obtenu à partir de $(\mathcal{S})$ par une opération élémentaire. Montrons que $(\mathcal{S})$ et $(\widetilde{\mathcal{S}})$ ont les mêmes solutions.

- Si l'opération réalisée est un échange de deux lignes, c'est évident.
- Supposons que l'opération réalisée soit du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$).
  * Montrons que toute solution $(x_1, \dots, x_p)$ de $(\mathcal{S})$ est encore solution de $(\widetilde{\mathcal{S}})$. Toutes les équations de $(\widetilde{\mathcal{S}})$ sauf éventuellement la i-ème sont vérifiées (car ce sont les mêmes que celles de $(\mathcal{S})$). Quant à la i-ème équation de $(\widetilde{\mathcal{S}})$, qui est :

    $$\underbrace{a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p}_{=\,b_i} + \lambda\,\underbrace{(a_{j,1}x_1 + \cdots + a_{j,p}x_p)}_{=\,b_j} = b_i + \lambda\, b_j,$$

    elle est également vérifiée.
  * Réciproquement, le point précédent nous donne que toute solution de $(\widetilde{\mathcal{S}})$ est également solution de $(\mathcal{S})$, en remarquant que l'on passe de $(\widetilde{\mathcal{S}})$ à $(\mathcal{S})$ en appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$.
- Le cas où l'opération est du type $L_i \leftarrow \mu L_i$ (avec $\mu \neq 0$) se traite de la même manière que le cas précédent (l'opération permettant de passer de $(\widetilde{\mathcal{S}})$ à $(\mathcal{S})$ étant alors $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\mu} L_i$).

Exercice 31 On obtient l'expression suivante de x_1 et x_3 en fonction de x_2 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& \dfrac{3(1-x_2)}{5} \\ x_3 &=& \dfrac{1+4\,x_2}{5} \end{array}\right.$$

ce qui mène à l'ensemble solution suivant :

$$\Big\{\Big(\frac{3(1-x_2)}{5},\, x_2,\, \frac{1+4\,x_2}{5}\Big)\,;\ x_2 \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Remarque Il n'est pas évident que l'ensemble solution obtenu soit le même que précédemment (même si c'est bien sûr le cas). Cela met en évidence qu'en général, il y a plusieurs façons d'écrire l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

En fait, choisir les inconnues secondaires revient à choisir une façon de paramétrer l'ensemble solution.

S'entraîner et approfondir

2.1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.

2.2 *Une autre méthode pour calculer la somme des n premiers entiers.*

Pour $n \in \mathbb{N}$, en calculant $\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^2 - k^2\right) = \sum_{k=1}^{n} (2k+1)$ de deux manières différentes, retrouver la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k$.

2.3 Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{4n} i^k\, k$.

2.4 Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $S_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \min(i,j)$, où $\min(i,j) = \begin{cases} j \text{ si } j \leqslant i \\ i \text{ sinon.} \end{cases}$

2.5 *Produit de deux expressions polynomiales*

Si on a $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $Q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$, exprimer le produit $R(x) = P(x)\,Q(x)$ sous la forme d'une somme $\sum c_k x^k$.

2.6 Transformation d'Abel

On se donne $n \in \mathbb{N}$ ainsi que deux familles de complexes $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et $(b_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$.

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on note $B_k = \sum_{i=0}^{k} b_i$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_k = a_n\, B_n - \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, B_k.$$

2.7 Quel est le coefficient de $x^4\, y^8$ dans le développement de l'expression $(3x - 7y)^{12}$?

2.8 Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Indication : on sait dériver la fonction $x \mapsto (x+1)^n \dots$

2.9 (Formule de Vandermonde)

On admet dans cet exercice l'unicité des coefficients dans l'écriture d'une fonction polynomiale sous la forme $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. En développant $(1+x)^{m+n}$ de deux manières différentes, montrer que :

$$\forall p \in [\![0, m+n]\!] \quad \binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k}.$$

2.10 Résoudre, en discutant suivant les valeurs de $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, le système suivant :

$$(\mathcal{S}) \ : \ \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1. \end{cases}$$

2.11 Résoudre le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{S}) \ : \ \begin{cases} x - 3y + 2z + t = -2 \\ 2x + 4y + z + 2t = 4 \\ 7x + 9y + 5z + 7t = 10 \\ -4x - 18y + z - 4t = -16. \end{cases}$$

Solution des exercices

2.1 On a $S_n = \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + \dfrac{n\,(n+1)}{2} = \dfrac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}\cdot$

2.2 On a :

- d'une part, $\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\sum_{k=1}^{n} k + n$;
- d'autre part, $\sum_{k=1}^{n}\big((k+1)^2 - k^2\big) = (n+1)^2 - 1$ (somme télescopique).

En identifiant les deux résultats obtenus et en simplifiant, on obtient bien :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\cdot$$

2.3 Écrivons :

$$\begin{aligned}
S &= i - 2 - 3i + 4 + 5i - 6 - 7i + 8 + \cdots + i\,(4n-3) - (4n-2) - i\,(4n-1) + (4n)\\
&= (i - 2 - 3i + 4) + (5i - 6 - 7i + 8) + \cdots + \big(i\,(4n-3) - (4n-2) - i\,(4n-1) + 4n\big)\\
&= (2-2i) + (2-2i) + \cdots + (2-2i).
\end{aligned}$$

On constate qu'en regroupant les termes quatre par quatre, chaque paquet de quatre valant $2-2i$.

Comme il y a en tout n paquets, la somme vaut simplement $(2-2i)\,n$.

2.4 Pour $i \in [\![0,n]\!]$ fixé, on a :

$$\sum_{j=0}^{n}\min(i,j) = \sum_{j=0}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i = \frac{i\,(i+1)}{2} + (n-i)\,i = -\frac{i^2}{2} + \frac{2n+1}{2}\,i.$$

Puis :

$$S_n = -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} i^2 + \frac{2n+1}{2}\sum_{i=0}^{n} i = -\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{12} + \frac{2n+1}{2} \times \frac{n\,(n+1)}{2}\cdot$$

En simplifiant, il vient $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot$

2.5 On a $R(x) = \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j\Big) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j x^{i+j}$.

Dans l'écriture de $R(x)$:

- il est clair que la puissance maximale de x intervenant est $q = 2n$.
- pour $k \in [\![0, 2n]\!]$, le coefficient devant x^k est donné par la somme $\sum\limits_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\\ i+j=k}} a_i b_j$.

On a donc $R(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n}\Big(\sum\limits_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\\ i+j=k}} a_i b_j\Big)x^k$.

Remarque

- Pour alléger l'écriture, on se contente souvent d'écrire $R(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n}\Big(\sum\limits_{i+j=k} a_i b_j\Big)x^k$.
- En convenant que $a_i = 0$ si $i \notin [\![0, n]\!]$ et que $b_j = 0$ si $j \notin [\![0, n]\!]$, on peut aussi écrire $R(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n}\Big(\sum\limits_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\Big)x^k$.

2.6 Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $b_k = B_k - B_{k-1}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_k &= a_0\, b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\,(B_k - B_{k-1})\\
&= a_0\, b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\, B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\, B_{k-1}\\
&= a_0\, b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\, B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}\, B_k.
\end{aligned}$$

En sortant le terme d'indice n de la première somme et le terme d'indice 0 de la seconde, puis en regroupant les deux, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_k &= a_n\, B_n + \underbrace{a_0\, b_0 - a_1\, B_0}_{=(a_0-a_1)\,B_0} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})\, B_k\\
&= a_n\, B_n + \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})\, B_k,
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu.

2.7 La formule du binôme donne $(3x-7y)^{12} = \displaystyle\sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (3x)^k (-7y)^{12-k}$.

Le terme qui nous intéresse est celui correspondant à $k=4$ dans le somme ci-dessus. Le coefficient de $x^4\,y^8$ est donc $3^4\,(-7)^8\,\binom{12}{4}$, ou encore, en simplifiant : $3^6\times 5\times 7^8\times 11$.

2.8 Notons f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=(x+1)^n$.

- Pour $x\in\mathbb{R}$, la formule du binôme donne $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, puis, en dérivant :
$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k.$$
Pour $x=1$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = f'(1)$.
- Mais on peut aussi dériver la fonction f sous sa forme initiale, ce qui donne, pour $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=n(x+1)^{n-1}$. Pour $x=1$, on obtient $f'(1)=n2^{n-1}$.

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

2.9

- D'une part, la formule du binôme donne $(1+x)^{m+n} = \displaystyle\sum_{p=0}^{m+n} \binom{m+n}{p} x^p$.
- D'autre part, on a :
$$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n = \left(\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\right).$$
En utilisant alors la forme donnée lors de la remarque de l'exercice 2.5, on obtient
$$(1+x)^{m+n} = \sum_{p=0}^{m+n}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{p-i}\right)x^p$$

Pour $k\in [\![0,m+n]\!]$ fixé, l'identification des coefficients devant x^k (dans les deux développements obtenus pour $(1+x)^{m+n}$) donne $\displaystyle\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$, ce qui est la formule souhaitée.

Remarque Cette formule sera obtenue par une autre méthode dans le chapitre de dénombrement (*cf.* exercice 25 de la page 1381).

2.10 • Commençons par échanger les lignes 1 et 3 : $\begin{cases} x+by+az=1 \\ x+aby+z=b \\ ax+by+z=1. \end{cases}$

• Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - aL_1$ donnent alors :

$$\begin{cases} x & + & by & + & az & = & 1 \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 \\ & & b(1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 1-a. \end{cases}$$

• Puis, l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne le système suivant :

$$(\widetilde{\mathcal{S}}) \ : \begin{cases} x & + & by & + & az & = & 1 \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 \\ & & & & (a+2)(1-a)z & = & b-a. \end{cases}$$

• Si $b \neq 0$ et $a \notin \{1, -2\}$, alors le système $(\widetilde{\mathcal{S}})$ est triangulaire. Dans ce cas, il possède une unique solution, que l'on obtient en déterminant successivement z, y puis x :

$$\left(\frac{a-b}{(a+2)(a-1)}, \frac{ab+b-2}{b(a+2)(a-1)}, \frac{a-b}{(a+2)(a-1)}\right).$$

• Si $a = 1$, alors le système $(\widetilde{\mathcal{S}})$ devient :

$$\begin{cases} x & + & by & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & b-1 \\ & & & & 0 & = & b-1. \end{cases}$$

Alors, le système est compatible si, et seulement si, $b = 1$, auquel cas on est ramené à la seule équation $x+y+z=1$, qui possède l'ensemble solution suivant :

$$\big\{(1-y-z,\ y,\ z)\,;\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\big\}.$$

• Si $a = -2$, alors le système $(\widetilde{\mathcal{S}})$ devient :

$$\begin{cases} x & + & by & - & 2z & = & 1 \\ & & -3by & + & 3z & = & b-1 \\ & & & & 0 & = & b+2. \end{cases}$$

Alors, le système est compatible si, et seulement si, $b = -2$, auquel cas on est ramené au système $\begin{cases} x & - & 2y & - & 2z & = & 1 \\ & & 6y & + & 3z & = & -3. \end{cases}$ qui possède comme ensemble solution :

$$\left\{\left(z,\ -\frac{z+1}{2},\ z\right);\ z \in \mathbb{R}\right\}.$$

- Considérons pour finir le seul cas non encore traité : $b=0$ et $a \notin \{1,-2\}$.

  Le système $(\widetilde{\mathcal{S}})$ devient :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & az & = & 1 \\ & & (1-a)z & = & -1 \\ & & (a+2)(1-a)z & = & -a. \end{array}\right.$$

  Effectuons l'opération $L_3 \leftarrow L_3-(a+2)L_2$:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & az & = & 1 \\ & & (1-a)z & = & -1 \\ & & 0 & = & 2. \end{array}\right.$$

  Le système est alors incompatible.

2.11 Effectuons les opérations $L_2 \leftarrow L_2-2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3-7L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4+4L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} x & - & 3y & + & 2z & + & t & = & -2 \\ & & 10y & - & 3z & & & = & 8 \\ & & 30y & - & 9z & & & = & 24 \\ & - & 30y & + & 9z & & & = & -24. \end{array}\right.$$

Comme les deux dernières équations sont proportionnelles à la deuxième, elles sont inutiles, et le système est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} x & - & 3y & + & 2z & + & t & = & -2 \\ & & 10y & - & 3z & & & = & 8. \end{array}\right.$$

En prenant z et t comme inconnues secondaires, on obtient l'ensemble solution suivant :

$$\left\{\left(-\frac{11z}{10}-t+\frac{2}{5},\ \frac{3z+8}{10},\ z,\ t\right)\ ;\ (z,t)\in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Chapitre 3 : Nombres complexes

I L'ensemble des nombres complexes 151

1 Définition 151

2 Conjugué d'un nombre complexe 152

3 Module d'un nombre complexe 154

4 Nombres complexes de module 1 156

5 Formule de Moivre 158

6 Formules d'Euler 159

7 Forme trigonométrique, argument 161

8 Exponentielle complexe 163

II Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$ 164

1 Équation du second degré dans $\mathbb{C}$ 164

2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe 168

III Applications géométriques 170

1 Alignement et orthogonalité 170

2 Transformations remarquables du plan 171

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 174

Exercices 189

Nombres complexes 3

Un peu d'histoire Dans son *Ars Magna (1545)* Jérôme Cardan (1501-1576) a donné une formule permettant d'exprimer algébriquement la racine réelle de l'équation $x^3 + p\,x + q = 0$ dans le cas où $-\Delta = 4\,p^3 + 27\,q^2 > 0$, racine qui vaut alors :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} \qquad (\textit{cf.}\text{ exercices 3.27 et 3.28})$$

Bombelli a, par la suite, eu l'audace de vouloir appliquer cette formule à l'équation $x^3 = 15\,x + 4$ pour laquelle on a $\Delta = 121 \times 108$ et il a imaginé un nombre que l'on noterait aujourd'hui $\sqrt{-1}$ dont le carré est égal à -1. Il obtient ainsi :

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}.$$

En utilisant avec ce $\sqrt{-1}$ les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$, il trouve :

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

et donc $x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$, qui est racine de l'équation donnée.

En revanche, l'application systématique des règles usuelles de calcul à $\sqrt{-1}$ peut mener à des incompatibilités telles que :

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

C'est pourquoi Leonhard Euler (1707-1783) a introduit une notation pour représenter un tel nombre dont le carré vaut -1. C'est cette notation, i, que l'on utilise encore de nos jours, puisque les nombres complexes sont maintenant notés $x + i\,y$ avec x et y réels.

I L'ensemble des nombres complexes

1 Définition

La construction de l'ensemble des nombres complexes n'est pas exigible. On admet donc[1] qu'il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$,

- muni d'une addition notée $+$ et d'une multiplication notée $\times$, ou le plus souvent implicitement (c'est-à-dire sans symbole, comme dans $\mathbb{R}$), avec lesquelles on calcule comme dans $\mathbb{R}$,
- possédant un élément noté i dont le carré vaut -1,
- dont tout élément, appelé **nombre complexe** ou **complexe**, s'écrit de manière unique sous la forme $x+i\times y$ ou encore $x+i\,y$, avec x et y réels.

Ainsi :

- pour tout élément z de $\mathbb{C}$, il existe un unique couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $z=x+i\,y$; les réels x et y sont alors respectivement appelés **partie réelle** et **partie imaginaire** du complexe z, et l'on note alors :
$$x=\operatorname{Re} z \qquad \text{et} \qquad y=\operatorname{Im} z\ ;$$
par suite, les réels sont les complexes z pour lesquels $\operatorname{Im} z=0$;
- si $z\in\mathbb{C}$, $z'\in\mathbb{C}$ et si l'on pose $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$, $x'=\operatorname{Re} z'$ ainsi que $y'=\operatorname{Im} z'$, alors (en utilisant les même règles de calcul que dans $\mathbb{R}$) on a :
$$\begin{aligned} z+z' &= (x+x')+i\,(y+y') \\ z\,z' &= (x\,x'-y\,y')+i\,(x\,y'+y\,x')\ ; \end{aligned}$$
- les complexes dont la partie réelle est nulle sont appelés **imaginaires purs** ; z est donc imaginaire pur si, et seulement s'il existe $y\in\mathbb{R}$ tel que $z=i\,y$.

Conséquences

- Il est alors immédiat que l'on a :
$$\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2 \quad \operatorname{Re}(z+z')=\operatorname{Re} z+\operatorname{Re} z' \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z+z')=\operatorname{Im} z+\operatorname{Im} z'.$$
- Le complexe $0+0\,i$ se note simplement 0. Un nombre complexe z est nul s'il est égal à 0, ce qui est encore équivalent à $\operatorname{Re} z=\operatorname{Im} z=0$.
- Tout complexe $z\neq 0$ possède un inverse (pour la multiplication) car, si $x=\operatorname{Re} z$ et $y=\operatorname{Im} z$, alors :
$$z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}\,i \quad \text{vérifie} \quad z\,z^{-1}=z^{-1}\,z=1.$$
On peut trouver z^{-1} en cherchant x' et y' vérifiant le système :
$$x\,x'-y\,y'=1 \qquad \text{et} \qquad x\,y'+y\,x'=0,$$
mais la proposition 4 de la page 155 donnera une méthode plus efficace.

1. On pourra trouver pages 876 et 1144 deux constructions effectives de $\mathbb{C}$.

- On en déduit, comme dans $\mathbb{R}$, que si les nombres complexes z et z' vérifient $z\,z' = 0$, alors on a $z = 0$ ou $z' = 0$.

  Démonstration. Soit z et z' tels que $z\,z' = 0$. Si $z \neq 0$, alors en multipliant l'égalité précédente par z^{-1}, on obtient $0 = z^{-1}\big(z\,z'\big) = \big(z^{-1}\,z\big)\,z' = z'$ et donc $z' = 0$, ce qui prouve le résultat. □

Remarque Contrairement à $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est usuellement muni d'aucune relation d'ordre et nous ne pourrons donc pas dire qu'un complexe est inférieur à un autre ou encore qu'il est positif.

2 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 1

Pour tout complexe z, on appelle **conjugué** de z le complexe $\bar{z}$, défini par :

$$\bar{z} = \operatorname{Re} z - i\,\operatorname{Im} z.$$

Proposition 1

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ $\quad \operatorname{Im} z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ $\quad$ et $\quad \bar{\bar{z}} = z$.

Démonstration. Il suffit de faire le calcul. □

Point méthode

On a donc une caractérisation aisée des réels et des imaginaires purs :

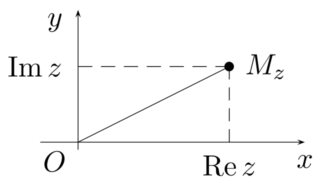
- le complexe z est réel si, et seulement si, $z = \bar{z}$;
- le complexe z est imaginaire pur si, et seulement si, $z = -\,\bar{z}$.

C'est souvent plus efficace que de mettre z sous la forme $x + i\,y$.

Représentation géométrique

Il est indispensable dès maintenant d'utiliser le support du plan usuel. Ce plan étant muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, tout point M est caractérisé par un unique couple de coordonnées (x, y) vérifiant $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$.

- le complexe $z = x + i\,y$ est alors appelé **affixe de M** ;
- le point M est aussi appelé **image de z**.



Dans toute la suite de ce chapitre, **l'image de z est notée M_z**.

Pour tout vecteur $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$, le complexe $z = x + i\,y$ est aussi appelé **affixe du vecteur $\vec{u}$**.

p.174

Exercice 1 *(Représentation géométrique)*

- Représenter sur un même dessin les points M_1, M_{-1}, M_i et M_{-i}.
- Si z est un complexe, que peut-on dire des points M_z et $M_{\bar{z}}$?

Des règles de calcul sur les complexes et sur les composantes des vecteurs du plan, on déduit immédiatement que, pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\overrightarrow{OM}_{z_1} + \overrightarrow{OM}_{z_2} = \overrightarrow{OM}_{z_1+z_2} \quad \text{et} \quad \lambda\,\overrightarrow{OM}_{z_1} = \overrightarrow{OM}_{\lambda z_1}.$$

Proposition 2

Le conjugué d'une somme (respectivement d'un produit, d'un quotient) de nombres complexes est la somme (respectivement le produit, le quotient) des conjugués.

Principe de démonstration.

- Pour la somme et le produit faire le calcul à l'aide des parties réelles et imaginaires.
- Pour le quotient, poser $u = z_1/z_2$ et utiliser le résultat précédent avec $z_1 = u\,z_2$.

Démonstration page 174

Point méthode

Les règles de calcul précédentes permettent de calculer des conjugués souvent bien plus efficacement qu'en utilisant les parties réelle et imaginaire.

p.174

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et la fonction polynomiale P définie, sur $\mathbb{C}$, par $P : z \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, z^k$. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} \quad \overline{P(z)} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, \bar{z}^k = P(\bar{z})$.

p.174

Exercice 3 Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_0, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Lorsque $z \in \mathbb{C}$ et $\sum\limits_{k=0}^{m} b_k\, z^k \neq 0$, on pose $R(z) = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, z^k}{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k\, z^k}$.

Montrer que l'on a alors $\overline{R(z)} = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, \bar{z}^k}{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k\, \bar{z}^k} = R(\bar{z})$.

Attention Dans les exercices ci-dessus, les coefficients a_k et b_k sont réels !

3 Module d'un nombre complexe

D'après ce qui précède, on a $z\,\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$, et donc $z\,\bar{z} \in \mathbb{R}_+$, ce qui permet de valider la définition suivante.

Définition 2

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, le **module** de z est le réel positif noté $|z|$ défini par :

$$|z| = \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Point méthode

Pour calculer $|z|$ ou l'utiliser, ne pas vous ruer systématiquement sur la formule $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$, penser aussi à $|z| = \sqrt{z\,\bar{z}}$.

Compatibilité Lorsque le complexe z est réel, la notation $|z|$ représente aussi bien le module du complexe z que la valeur absolue du réel z.

p.174 **Exercice 4** Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Montrer que $\dfrac{z - i}{1 - i\,z} \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $|z| = 1$.

p.175 **Exercice 5** *(Représentation géométrique)*

1. Si $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$, vérifier que $|z_1 - z_2|$ est la distance des points M_{z_1} et M_{z_2}.
2. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ donnés.
   - Dessiner l'ensemble des points M_z tels que $|\omega - z| = r$.
   - Dessiner l'ensemble des points M_z tels que $|\omega - z| \leqslant r$.

Proposition 3

Pour tout complexe z, on a :

- $|z| = |\bar{z}|$,
- $z = 0$ si, et seulement si, $|z| = 0$,
- $\operatorname{Re} z \leqslant |\operatorname{Re} z| \leqslant |z|$ et $\operatorname{Im} z \leqslant |\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$.

Principe de démonstration. Utiliser $|z| = \sqrt{\operatorname{Re} z^2 + \operatorname{Im} z^2}$. Démonstration page 175

p.175 **Exercice 6** Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\operatorname{Re} z = |z|$ si, et seulement si, $z \in \mathbb{R}_+$.

Proposition 4

Pour tout complexe z non nul, on a $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$, ainsi que :

$$|z| = 1 \text{ si, et seulement si, } \frac{1}{z} = \bar{z}.$$

Principe de démonstration. Toutes ces relations sont des réécritures de l'égalité $z\overline{z} = |z|^2$.

Démonstration page 175

Proposition 5 (Module d'un produit et d'un quotient)

Pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$ et tout $z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

$$|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2| \qquad \text{et, si } z_2 \neq 0, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 176

- Pour la première relation, utiliser $|z|^2 = z\,\bar{z}$.
- Pour la seconde, partir de $z_1 = \frac{z_1}{z_2}\, z_2$, et utiliser le premier point.

Proposition 6 (Inégalité triangulaire)

Pour $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,$$

avec égalité si, et seulement si, $\exists k \in \mathbb{R}_+ \quad z_2 = k\, z_1$ ou $z_1 = k\, z_2$.

Démonstration. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes.

- Si $z_1 = 0$, alors l'inégalité est évidente ainsi que l'équivalence puisque $z_1 = 0 \times z_2$.
- Supposons donc $z_1 \neq 0$ et posons $k = z_2/z_1$.
  * Comme $|z_1| > 0$, l'inégalité à prouver, qui s'écrit aussi :
  $$|z_1|\left|1 + \frac{z_2}{z_1}\right| \leqslant |z_1|\left(1 + \frac{|z_2|}{|z_1|}\right),$$
  est équivalente à $|1 + k| \leqslant 1 + |k|$. Or :
  $$\begin{aligned}\big(1 + |k|\big)^2 - |1 + k|^2 &= 1 + 2|k| + |k|^2 - (1 + k)\,(1 + \overline{k})\\ &= 1 + 2|k| + |k|^2 - \big(1 + |k|^2 + k + \overline{k}\big)\\ &= 2\big(|k| - \operatorname{Re} k\big).\end{aligned}$$
  Comme on a $\operatorname{Re} k \leqslant |k|$, on en déduit $|1 + k|^2 \leqslant \big(1 + |k|\big)^2$ et donc $|1 + k| \leqslant \big|1 + |k|\big|$.
  * Avec les notations précédentes, on a égalité si, et seulement si, $|k| - \operatorname{Re} k = 0$, ce qui équivaut à dire que $k \in \mathbb{R}_+$ (*cf.* exercice 6 de la page ci-contre). □

p.176

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Montrer que $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} z_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} |z_k|$.

Proposition 7 (Seconde inégalité triangulaire)

Pour $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2|,$$

avec égalité si, et seulement si, $\exists k \in \mathbb{R}_+ \quad z_2 = k\, z_1$ ou $z_1 = k\, z_2$.

Principe de démonstration. Analogue à la précédente. Démonstration page 176

p.176

Exercice 8 Donner une autre démonstration de la seconde inégalité triangulaire, en utilisant la première inégalité et l'écriture $z_1 = (z_1 - z_2) + z_2$.

Interprétation géométrique

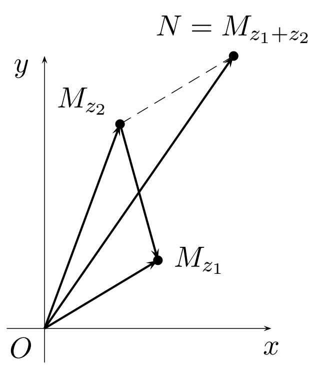
Pour $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$, les deux inégalités précédentes (et leurs conditions d'égalité) se retiennent aisément à l'aide d'un dessin.

- Comme $z_1 - z_2$ est l'affixe de $\overrightarrow{M_{z_2}M_{z_1}}$, la seconde inégalité correspond à :

$$|OM_{z_1} - OM_{z_2}| \leqslant M_{z_2}M_{z_1}.$$

- En posant $N = M_{z_1+z_2}$, alors z_2 est l'affixe de $\overrightarrow{M_{z_1}N}$, et la première inégalité correspond à :

$$ON \leqslant OM_{z_1} + M_{z_1}N = OM_{z_1} + OM_{z_2}.$$



La condition « $z_2 = k\, z_1$ ou $z_1 = k\, z_2$ avec $k \in \mathbb{R}_+$ » des propositions précédentes signifie graphiquement que les vecteurs $\overrightarrow{OM_{z_1}}$ et $\overrightarrow{OM_{z_2}}$ sont colinéaires et de même sens.

Corollaire 8

Pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$ et tout $z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

4 Nombres complexes de module 1

Notation L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.

Les règles de calcul sur les modules des produits et quotients de nombres complexes nous donnent immédiatement les résultats de la proposition suivante.

Proposition 9

- Le produit de deux éléments de $\mathbb{U}$ est élément de $\mathbb{U}$.
- L'inverse de tout élément de $\mathbb{U}$ est élément de $\mathbb{U}$.

Définition 3

Si θ est réel, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Remarque Lorsque $\theta = 0$, alors on a $e^{i0} = 1$; ainsi, cette nouvelle définition est donc compatible avec la valeur que donne en 0 la fonction exponentielle déjà connue sur $\mathbb{R}$.

Les résultats de la proposition 22 de la page 54 concernant le paramétrage du cercle trigonométrique se traduisent alors par la proposition suivante.

Proposition 10

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $|e^{i\theta}| = 1$ et donc $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.
- Réciproquement, pour $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
- Si θ et φ sont deux réels, on a $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$ si, et seulement si, $\theta \equiv \varphi\ [2\pi]$.

Proposition 11

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{i\theta} \times e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)} \qquad e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}} \qquad \text{et} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i(\theta-\varphi)}.$$

Principe de démonstration.

- La première relation est conséquence directe des formules d'addition vues en trigonométrie.
- Les autres découlent immédiatement de la première. Démonstration page 177

p.177 **Exercice 9** *(Représentation géométrique)* Soit θ et φ deux réels donnés.

- Comment définir géométriquement le point U_θ d'affixe $e^{i\theta}$?
- Que peut-on dire des points U_θ, $U_{\pi-\theta}$, $U_{\pi+\theta}$ et $U_{-\theta}$?

  Représenter les points d'affixe $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\pi}$ et $e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
- Comment peut-on construire $U_{\theta+\varphi}$ à partir de U_θ et φ ?

Remarque La formule $e^{i\theta} \times e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$ justifie l'utilisation de la notation exponentielle et se retient aisément.

Point méthode

Si l'on écrit la formule précédente sous la forme :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi),$$

cela permet, en développant et en identifiant parties réelles et imaginaires, de retrouver, de tête, les formules d'addition, et donc de les assurer.

5 Formule de Moivre

Proposition 12 (Formule de Moivre)

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ ou encore, par définition de $e^{i\theta}$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Démonstration. On démontre la relation $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$:

- pour $n \in \mathbb{N}$, par récurrence, en utilisant la proposition précédente ;
- par passage à l'inverse, pour n entier négatif. □

p.177 **Exercice 10** Calcul de $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}$.

Application de la formule de Moivre à la trigonométrie

Point méthode

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la formule de Moivre, sous la forme :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,$$

permet d'exprimer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Mettons cette méthode en œuvre sur quelques exemples.

p.177 **Exercice 11**

1. Développer $(\cos\theta + i\sin\theta)^5$ avec la formule du binôme de Newton.
2. En déduire une expression de $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
3. Exprimer alors $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$.
4. Exprimer aussi $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.

p.178 **Exercice 12**

1. Exprimer $\cos 6\theta$ en fonction de $\cos\theta$.
2. *(plus difficile)* Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de fonction f de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on ait $\sin 6\theta = f(\sin\theta)$.

p.178

Exercice 13 Soit θ un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}\right[$.

1. Exprimer $\tan 5\theta = \dfrac{\sin 5\theta}{\cos 5\theta}$ en fonction de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.
2. En divisant le numérateur et le dénominateur par $\cos^5\theta$, en déduire une expression de $\tan 5\theta$ en fonction de $\tan\theta$.

p.178

Exercice 14 *(Approfondissement)* Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Avec la formule du binôme, développer $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$.
2. En déduire :

$$\cos n\theta = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}\theta \ \sin^{2p}\theta \tag{a}$$

$$\sin n\theta = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p+1} \cos^{n-(2p+1)}\theta \ \sin^{2p+1}\theta. \tag{b}$$

3. En vous inspirant de l'exercice 13, en déduire une expression de $\tan n\theta$ seulement en fonction de $\tan\theta$.

Remarque Comme l'expression de $\cos n\theta$ ci-dessus ne contient que des puissances paires de $\sin\theta$, on peut aussi obtenir $\cos n\theta$ comme un polynôme en $\cos\theta$; il suffit de remplacer $\sin^2\theta$ par $1-\cos^2\theta$.

6 Formules d'Euler

Proposition 13 (Formules d'Euler)

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\quad \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad$ et $\quad \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Point méthode

Ces « formules » sont évidentes par définition de $e^{i\theta}$, et il suffit de visualiser la relation $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ainsi que celle obtenue en changeant θ en $-\theta$ pour les retrouver immédiatement.

Application des formules d'Euler à la trigonométrie, linéarisation

p.179

Exercice 15

1. Développer $\sin^6\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^6$ avec la formule du binôme.
2. En déduire une expression de $\sin^6\theta$ en fonction de $\cos 6\theta$, $\cos 4\theta$ et $\cos 2\theta$.

Étant donné deux entiers naturels m et n, **linéariser** $\boldsymbol{\cos^m\theta\sin^n\theta}$ c'est trouver K, partie finie de $\mathbb{N}$, ainsi que des familles $(A_k)_{k\in K}$ et $(B_k)_{k\in K}$ telles que :

$$\forall\theta\in\mathbb{R}\quad \cos^m\theta\sin^n\theta = \sum_{k\in K}(A_k\cos k\theta + B_k\sin k\,\theta).$$

On dit alors que l'on a exprimé la fonction $\theta\mapsto\cos^m\theta\sin^n\theta$ comme une combinaison linéaire des fonctions $\theta\mapsto\cos k\theta$ et $\theta\mapsto\sin k\theta$.

Point méthode

Les formules d'Euler sont intéressantes pour linéariser les expressions trigonométriques. Cette opération peut être très utile pour trouver une primitive ou des dérivées successives.

Mettons cette méthode en œuvre sur quelques exemples.

p.179

Exercice 16 Linéariser $\cos^5\theta$.

p.180

Exercice 17 Donner deux méthodes pour linéariser $\cos^4\theta$.

p.180

Exercice 18 Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et $z = 1+e^{2i\theta}$.

Mettre $e^{i\theta}$ en facteur dans z et en déduire une expression simple de $\mathrm{Re}(z^{100})$.

Point méthode

En utilisant les formules d'Euler, on peut factoriser une expression de la forme $e^{i\theta_1}\pm e^{i\theta_2}$ en mettant en facteur $e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}$. Cela peut-être utile :

- pour simplifier des puissances ;
- pour factoriser des expressions de la forme $\cos p\pm\cos q$ et $\sin p\pm\sin q$ en les considérant comme les parties réelles ou imaginaires de $e^{ip}\pm e^{iq}$.

p.180

Exercice 19 Soit θ_1 et θ_2 deux réels ainsi que $n \in \mathbb{N}$.
Si $z = e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}$, donner une expression simplifiée de $\mathrm{Re}(z^n)$.

p.180

Exercice 20 Soit $p \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$.

1. En utilisant $\cos p + \cos q = \mathrm{Re}\left(e^{ip} + e^{iq}\right)$, montrer que :
$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$
2. Montrer de même que :
$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).$$
3. Factoriser de même $\sin p - \sin q$ ainsi que $\sin p + \sin q$.

p.181

Exercice 21 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]0, 2\pi[$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos k\,\theta$.

Simplifier $\Sigma_n = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$ et en déduire $S_n = \dfrac{\cos n\frac{\theta}{2}\,\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$.

Pourquoi a-t-on supposé $\theta \neq 0$ et $\theta \neq 2\pi$?

7 Forme trigonométrique, argument

Proposition 14

Soit z un complexe non nul.

1. Il existe $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tels que $z = r_0\, e^{i\theta_0}$.
2. Si $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ sont tels que $z = r\, e^{i\theta}$ alors $r = |z|$.
3. Si $\theta \in \mathbb{R}$ vérifie $z = |z|\, e^{i\theta}$, alors $\theta \equiv \theta_0\ [2\pi]$.

Principe de démonstration.

1. Il suffit de s'intéresser à $\frac{z}{|z|}$, ce que l'on peut écrire car …
2. Le module de $z = r\, e^{i\theta}$ est facile à calculer.
3. Comme $|z| = r_0 \neq 0$ il s'agit en fait de l'égalité de deux exponentielles.

Démonstration page 181

Définition 4 (Forme trigonométrique d'un complexe non nul)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

- Tout réel θ tel que $z = |z|\, e^{i\theta}$ est appelé **un argument** de z.
- On appelle **forme trigonométrique** de z toute écriture de la forme :

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|\, e^{i\theta} \qquad \text{avec} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

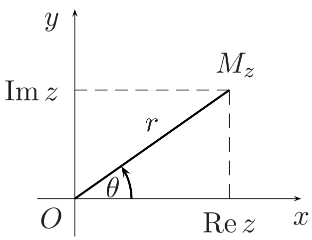
Attention

- Le module d'un nombre complexe est défini de façon unique ; tout complexe, même 0, possède un module.
- En revanche, on ne parle d'argument que pour un complexe non nul, et un tel argument n'est défini que modulo 2π.
- Bien que 0 n'ait pas d'argument, on peut quand-même écrire $0 = r\, e^{i\theta}$, avec $r = 0$ et θ un réel quelconque.

Remarque D'après ce qui précède, tout complexe z non nul admet un unique argument dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On l'appelle **argument principal de** $\boldsymbol{z}$.

Représentation géométrique

Lorsqu'un nombre complexe z est mis sous forme trigonométrique $z = r\, e^{i\theta}$, alors, comme on le voit sur la figure ci-contre, les réels r et θ forment un couple de **coordonnées polaires** de M_z, ce qui signifie que $r = OM_z$ et que θ est une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}_z})$.



p.181

Exercice 22 *(Transformation de $a\cos x + b\sin x$).*

Soit a et b des réels non tous deux nuls. En utilisant la forme trigonométrique du complexe $a + i\,b$, retrouver la factorisation de $a\,\cos x + b\,\sin x$ vue dans l'exercice 63 de la page 60.

Attention Si un complexe z s'écrit $z = a\, e^{i\theta}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors on a $|z| = |a|$ où $|a|$ désigne la valeur absolue du réel a, et donc :

- si $a > 0$, alors $|z| = a$, et un argument de z est θ,
- si $a < 0$, alors $|z| = -a$, et un argument de z est $\theta + \pi$.
- si $a = 0$ alors $|z| = 0$, mais z n'a pas d'argument.

Point méthode

Si $z = e^{i\theta_1} \pm e^{i\theta_2}$, alors la mise en facteur de $e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}$ permet de mettre facilement en évidence le module et un argument de z.

p.182

Exercice 23 Soit $\theta \in [0, \pi]$ et $z = 1 + e^{2i\theta}$.

1. Factoriser z puis en étudier module et argument.
2. Comparer avec une autre méthode.

Calculs usuels Il est aisé de calculer des produits, des quotients et des puissances de nombres complexes non nuls écrits sous forme trigonométrique. En effet, pour $\theta_1 \in \mathbb{R}$ et $\theta_2 \in \mathbb{R}$, si $z_1 = |z_1|\, e^{i\theta_1}$ et $z_2 = |z_2|\, e^{i\theta_2}$, alors :

- on a $z_1\, z_2 = |z_1|\, e^{i\theta_1}\, |z_2|\, e^{i\theta_2} = |z_1|\, |z_2|\, e^{i\theta_1}\, e^{i\theta_2} = |z_1|\, |z_2|\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$;
- on a de même $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\, e^{i(\theta_1-\theta_2)}$;
- pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $z_1^n = |z_1|^n\, e^{in\theta_1}$.

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 15

Soit $z_1 \in \mathbb{C}^*$ et $z_2 \in \mathbb{C}^*$, d'arguments respectifs θ_1 et θ_2. Alors :

- $z_1\, z_2$ est non nul, et le réel $\theta_1 + \theta_2$ est un argument de $z_1\, z_2$;
- $\dfrac{z_1}{z_2}$ est non nul, et le réel $\theta_1 - \theta_2$ est un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$;
- si $n \in \mathbb{Z}$, alors $z_1^n \neq 0$, et le réel $n\,\theta_1$ est un argument de z_1^n.

8 Exponentielle complexe

Dans cette partie, on suppose connues les propriétés de la fonction exponentielle réelle étudiée en Terminale.

Définition 5

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on appelle e^z, ou encore $\exp z$, lire « **exponentielle de** z », le nombre complexe $e^z = e^{\operatorname{Re} z}\, e^{i \operatorname{Im} z}$.

Remarques La fonction $z \mapsto e^z$, ainsi définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:

- prolonge la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$, puisque, si $z \in \mathbb{R}$, alors on a $\operatorname{Im} z = 0$ et donc $e^{i \operatorname{Im} z} = 1$,
- est compatible avec la notation $e^{i\theta}$ puisque, si $z = i\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ alors, on a $\operatorname{Re} z = 0$ et donc $e^{\operatorname{Re} z} = 1$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \in \mathbb{R}_+^*$ et donc $e^z \in \mathbb{C}^*$. Il est alors immédiat que le nombre réel $\operatorname{Im} z$ est un argument de e^z.

Proposition 16

- Si z et z' sont deux complexes, alors on a $e^{z+z'} = e^z\, e^{z'}$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $e^z \neq 0$ et $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.

Principe de démonstration.

- Faire le calcul en introduisant les parties réelles et imaginaires de z et z'.
- Conséquence immédiate du point précédent.

Démonstration page 182

Remarque Le premier des résultats précédents explique et justifie l'utilisation de la notation e^z pour l'exponentielle d'un nombre complexe z.

Proposition 17

Soit a un nombre complexe non nul.

- Il existe (au moins) un complexe z tel que $e^z = a$.
- Si z_0 est un nombre complexe vérifiant $e^{z_0} = a$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $e^z = a$ si, et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = z_0 + 2i\,k\,\pi$.

Principe de démonstration. Écrire a sous forme trigonométrique puis chercher z sous la forme algébrique $z = x + i\,y$.

Démonstration page 182

II Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

1 Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Racines carrées d'un complexe

Définition 6

On appelle **racine carrée** d'un complexe z tout complexe Z tel que $Z^2 = z$.

Rappel :

- On sait que tout réel strictement positif a possède deux racines carrées qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$; rappelons que $\sqrt{a}$ désigne la racine positive de a.
- Le réel 0 ne possède qu'une seule racine carrée qui est 0.

Proposition 18

Tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.

Démonstration page 182

Principe de démonstration. Écrire $z = r\,e^{i\theta}$ et chercher Z sous la forme $Z = \rho\, e^{i\,\varphi}$.

Exemple Si a est un réel strictement négatif, alors c'est un complexe de module $-a$ et d'argument π ; ainsi ses deux racines carrées sont $\pm\sqrt{|a|}\,\exp(i\,\frac{\pi}{2}) = \pm i\,\sqrt{|a|}$.

On peut aussi trouver directement ces deux racines carrées en factorisant :

$$0 = Z^2 - a = Z^2 - i^2|a| = \big(Z - i\,\sqrt{|a|}\big)\big(Z + i\,\sqrt{|a|}\big).$$

Attention On ne sait pas, dans $\mathbb{C}$, privilégier l'une des deux racines d'un complexe z, contrairement à ce qui se passe lorsque $z \in \mathbb{R}_+$ où l'on choisit, parmi les deux racines carrées de z, celle qui est positive que l'on note alors $\sqrt{z}$. Par suite :

- il est impossible d'utiliser la notation $\sqrt{z}$ pour un complexe z quelconque ;
- il faut donc parler d'*une* (article indéfini) racine carrée de z et non pas de *la* (article défini) racine carrée de z.

Méthode algébrique. L'utilisation de formes trigonométriques donne facilement les expressions des racines carrées d'un nombre complexe non nul quelconque mais on a parfois besoin d'exprimer une racine de z sous forme algébrique, *i.e.* sans utilisation de ligne trigonométrique. On a vu ci-dessus comment faire lorsque $z \in \mathbb{R}$. Supposons donc $z \notin \mathbb{R}$ et prenons $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$. Soit $Z = X + i\,Y$ avec $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Z^2 = z$.

- On en déduit :

  * par égalité des parties réelles, $X^2 - Y^2 = x$; $\quad (i)$
  * par égalité des modules, $X^2 + Y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\quad (ii)$
  * par égalité des parties imaginaires, $2\,X\,Y = y$ $\quad (iii)$
    (comme $y \neq 0$, cela entraîne $X \neq 0$ et $Y \neq 0$).

  Par somme et différence de (i) et (ii), on obtient X^2 et Y^2, et donc X et Y au signe près, soit quatre possibilités puisque $X \neq 0$ et $Y \neq 0$.

- D'après (iii) le produit $X\,Y$ est du signe de y et il existe donc seulement deux couples (X, Y) vérifiant ces trois conditions, couples que l'on peut alors exprimer en fonction de x et de y.

- Bien que n'utilisant que des conditions nécessaires (implications), le raisonnement précédent donne toutes les racines de z puisqu'il en donne au plus deux et que l'on sait qu'il en existe exactement deux.

p.183

Exercice 24

1. Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $z = 1 + i$.
2. Les donner sous forme trigonométrique et en déduire des expressions algébriques de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$, *i.e.* n'utilisant que les quatre opérations et des racines carrées.

Résolution de l'équation du second degré

Définition Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$. Mettre le trinôme $a\,z^2 + b\,z + c$ sous **forme canonique**, c'est déterminer deux complexes α et β tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad a\,z^2 + b\,z + c = a\,(z+\alpha)^2 + \beta.$$

Proposition 19

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ ainsi que l'équation :

$$a\,z^2 + b\,z + c = 0. \tag{E}$$

On note $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$ son discriminant.

- Si $\Delta \neq 0$, alors en appelant δ *une* racine carrée de Δ, l'équation (E) admet deux racines distinctes : $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une racine double $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Principe de démonstration. Mettre le trinôme sous forme canonique en utilisant :

$$a\,z^2 + b\,z + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}\,z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \cdots\right)$$

Démonstration page 183

p.184 **Exercice 25** Résoudre l'équation $x^2 - (3+4\,i)\,x - 1 + 5\,i = 0$.

Corollaire 20

Soit a, b et c trois réels, a étant non nul, ainsi que l'équation :

$$a\,z^2 + b\,z + c = 0. \tag{E}$$

On note $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, alors (E) a deux racines réelles distinctes
$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- Si $\Delta = 0$, alors (E) a une racine double réelle $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors (E) a deux racines complexes distinctes conjuguées :
$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1}.$$

Principe de démonstration. Cas particulier de la proposition précédente.

Démonstration page 184

p.184 **Exercice 26** Étant donné un réel θ, résoudre l'équation $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$.

Remarque Comme on l'a vu dans l'exercice précédent, pour une équation à coefficients réels, il est parfois plus intéressant d'utiliser la formule vue pour une équation à coefficients complexes c'est-à-dire d'utiliser une racine δ de Δ plutôt que d'utiliser $\sqrt{\Delta}$, ce dernier pouvant mener à l'introduction de valeurs absolues lorsque l'équation dépend de paramètres !

Relations entre coefficients et racines

Proposition 21

Soit a, b et c trois complexes, avec $a \neq 0$.

Les nombres complexes z_1 et z_2 (éventuellement égaux) vérifient :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad z_1\, z_2 = \frac{c}{a}$$

si, et seulement si, z_1 et z_2 sont les deux racines (éventuellement confondues) de l'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$.

Principe de démonstration.

- Si l'on sait que z_1 et z_2 sont les racines, alors les formules donnant les racines permettent de conclure.
- Pour la réciproque, développer le produit $a\,(z - z_1)\,(z - z_2)$. Démonstration page 184

Point méthode

On utilise la proposition précédente sous plusieurs formes.

- Si l'on sait que z_1 et z_2 sont les racines de l'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$, alors on peut simplifier toute expression symétrique en z_1 et z_2, et l'évaluer en fonction de $z_1 + z_2$ et $z_1\,z_2$, et donc de a, b et c, sans avoir à expliciter z_1 et z_2.
- Si z_1 et z_2 sont les racines de l'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$, et si l'on connaît une de ces racines, alors on peut facilement en déduire l'autre.
- Si l'on connaît deux complexes s et p, et si l'on cherche z_1 et z_2 tels que $z_1 + z_2 = s$ et $z_1\,z_2 = p$, alors une façon élégante et efficace de faire est de dire que z_1 et z_2 sont les racines de l'équation $z^2 - s\,z + p = 0$.

p.185 **Exercice 27** Soit z_1 et z_2 les deux racines de l'équation $z^2 - z + 4 = 0$.

Exprimer $z_1^2 + z_2^2 - z_1\,z_2$ en fonction de $z_1 + z_2$ et de $z_1\,z_2$, et en déduire sa valeur.

p.185

Exercice 28 Dire pourquoi les racines de l'équation $z^2 - 2\,z\,\cos\theta + 1 = 0$ peuvent maintenant être qualifiées de racines évidentes.

p.185

Exercice 29 Résoudre l'équation $z^2 - (1 + a + a^2)\,z + a\,(1 + a^2) = 0$, où $a \in \mathbb{C}$.

2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

Définition 7

- Si $z \in \mathbb{C}$, on appelle **racine n-ième** de z tout $Z \in \mathbb{C}$ tel que $Z^n = z$.
- Les racines n-ièmes de 1 sont encore appelées **racines n-ièmes de l'unité**.

Racines n-ièmes de l'unité

Notation L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

p.185

Exercice 30

1. Vérifier que $\mathbb{U}_n$ est non vide.
2. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathbb{U}_n$ est élément de $\mathbb{U}_n$.
3. Montrer que l'inverse de tout élément de $\mathbb{U}_n$ est élément de $\mathbb{U}_n$.

Proposition 22

Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité, qui sont les complexes :

$$\xi_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = (\xi_1)^k, \quad \text{avec } k \in [\![0, n-1]\!].$$

Démonstration. Comme $|z^n| = |z|^n$ les racines de l'équation $z^n = 1$ sont de module 1.

De plus un complexe $z = e^{i\varphi}$ avec φ réel vérifie $z^n = 1$ si, et seulement si, $n\,\varphi \equiv 0 \ [2\pi]$ ce qui équivaut à :

$$\exists\, k \in \mathbb{Z} \quad n\,\varphi = 2k\,\pi \qquad \text{ou encore à} \qquad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \varphi = \frac{2k\,\pi}{n}.$$

- À tout entier relatif k, associons le complexe $\xi_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

  D'après ce qui précède, l'ensemble des racines n-ièmes de 1 est l'ensemble $\{\xi_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

  Soit k un entier relatif. La division euclidienne de k par n permet de trouver $t \in [\![0, n-1]\!]$ et $q \in \mathbb{Z}$ tels que $k = n\,q + t$. On a alors :

  $$\xi_k = e^{i(\frac{2t\pi}{n} + 2q\,\pi)} = \xi_t.$$

  L'ensemble des racines n-ièmes de 1 est donc l'ensemble $\{\xi_t\,;\ t \in [\![0, n-1]\!]\}$.

- Pour terminer, vérifions qu'il y a exactement n racines n-ièmes, c'est-à-dire que les nombres complexes $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ sont distincts deux à deux.

  Soit k et ℓ deux entiers de $[\![0, n-1]\!]$ tels que $\xi_k = \xi_\ell$; on a alors $\dfrac{2k\,\pi}{n} \equiv \dfrac{2\ell\,\pi}{n}\ [2\pi]$, et il existe donc un entier relatif q tel que $\dfrac{2k\,\pi}{n} = \dfrac{2\ell\,\pi}{n} + 2q\,\pi$, soit encore $k - \ell = n\,q$.

  Comme k et ℓ sont deux entiers de l'intervalle $[\![0, n-1]\!]$, leur différence ne peut être multiple de n que si k et ℓ sont égaux. □

Proposition 23

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

- Si ξ est une racine n-ième de l'unité différente de 1, on a :
$$1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^{n-1} = 0.$$
- La somme des racines n-ièmes de l'unité est égale à 0.

Principe de démonstration. Pour le premier point, remarquer qu'il s'agit d'une somme des termes d'une progression géométrique.

Le second s'en déduit en prenant, pour ξ, le ξ_1 de la proposition précédente.

Démonstration page 185

p.185 **Exercice 31**

- Représenter les images des racines cubiques (racines 3-ièmes) de 1.
- Si $j = \exp(\frac{2i\,\pi}{3})$, que vaut $1 + j + j^2$?

Notation Dans ce contexte, la lettre j représente classiquement le nombre complexe $\exp\left(\frac{2i\,\pi}{3}\right)$. Ne pas confondre avec la physique où il représente i.

p.185 **Exercice 32** On prend ici $n = 6$.

- Montrer qu'il existe un $\xi \in \mathbb{U}_n$, différent de 1, tel que $\mathbb{U}_n \neq \{\xi^k \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$.
- Pour un tel ξ, que vaut $1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^{n-1}$?

p.186 **Exercice 33** Résoudre l'équation $z^2 - z + 1 = 0$.

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Proposition 24

Si Z_0 est une racine n-ième de z, l'ensemble des racines n-ièmes de z est :
$$\{Z_0\,\xi\ ;\ \xi \in \mathbb{U}_n\}.$$

Démonstration page 186

Point méthode

Pour trouver toutes les racines n-ièmes de z, il suffit donc d'en exhiber une et de la multiplier par toutes les racines n-ièmes de l'unité.

p.186 **Exercice 34** Pour $n \in \mathbb{N}$, résoudre l'équation $z^{2n+1} + 1 = 0$.

Corollaire 25

Soit un entier naturel $n \neq 0$ et un complexe $z \neq 0$ de module r et d'argument θ, le complexe z admet n racines n-ièmes qui sont les complexes :

$$Z_k = r^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \text{avec} \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente après avoir remarqué que $z_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$ est une racine n-ième de z. □

p.186 **Exercice 35** Déterminer les racines cinquièmes de $1 + i$.

III Applications géométriques

1 Alignement et orthogonalité

Proposition 26

Soit $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2.

Alors le complexe $\frac{z_2}{z_1}$ a pour argument toute mesure de l'angle $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Par suite :

(i) les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires si, et seulement si, $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$;

(ii) les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\frac{z_2}{z_1} \in i\,\mathbb{R}$.

Démonstration page 186

Corollaire 27

Soit A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts et d'affixes respectives a, b et c. Le complexe $\frac{b-a}{c-a}$ a pour argument toute mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}})$. Par suite :

- les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$;
- les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\frac{b-a}{c-a} \in i\,\mathbb{R}$.

Point méthode

Pour exprimer $\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$ ou $\frac{b-a}{c-a} \in i\,\mathbb{R}$, penser à utiliser le conjugué de cette quantité (*cf.* méthodes page 152 et page 153).

p.186

Exercice 36 Soit A et B deux points distincts du plan, d'affixes respectives a et b. Montrer qu'un point M d'affixe z appartient au cercle Γ de diamètre $[AB]$ si, et seulement si :

$$2\,z\,\bar{z} - (\overline{a} + \overline{b})\,z - (a+b)\,\bar{z} + a\,\overline{b} + \overline{a}\,b = 0.$$

Rappel : $M \in \Gamma$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.

p.187

Exercice 37 Soit A_1, A_2 et A_3 trois points du cercle trigonométrique, deux à deux distincts, d'affixes respectives a_1, a_2 et a_3. Soit H un point quelconque d'affixe h.

1. Montrer que $(A_1H) \perp (A_2A_3)$ si, et seulement si, $(a_1 - h) - \left(\bar{a}_1 - \overline{h}\right) a_2\, a_3 = 0$.
2. Montrer que $H \in (A_2A_3)$ si, et seulement si, $(a_2 - h) + \left(\bar{a}_2 - \overline{h}\right) a_2\, a_3 = 0$.

2 Transformations remarquables du plan

Si F est une application du plan dans lui-même, on peut lui associer une unique application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tous points M et M' d'affixes respectives z et z' on ait $M' = F(M)$ si, et seulement si, $z' = f(z)$.

Réciproquement, la donnée de f caractérise l'application F.

On dit alors que F est **représentée par f dans la plan complexe**.

Translations, homothéties

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

Définition 8

La **translation** de vecteur $\vec{u}$ est l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Proposition 28

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et a son affixe. La translation de vecteur $\vec{u}$ est représentée dans le plan complexe par l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + a. \end{array}$

Démonstration page 187

Soit Ω un point du plan et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Définition 9

L'**homothétie** de centre Ω et de rapport λ est l'application du plan dans lui-même qui, à tout M, associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$.

Proposition 29

L'homothétie de centre Ω, d'affixe ω, et de rapport λ est représentée dans le plan complexe par l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \omega + \lambda(z-\omega). \end{array}$

Démonstration page 187

p.187 **Exercice 38** Donner la représentation complexe de la symétrie par rapport à un point A d'affixe a.

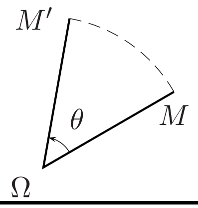
Rotations

Soit Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.

Définition 10

La **rotation** de centre Ω et d'angle θ est l'application du plan dans lui-même qui transforme Ω en Ω, et tout point $M \neq \Omega$ en l'unique point M' tel que :

$$\|\overrightarrow{\Omega M}\| = \|\overrightarrow{\Omega M'}\| \quad \text{et} \quad (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) \equiv \theta \ [2\pi].$$

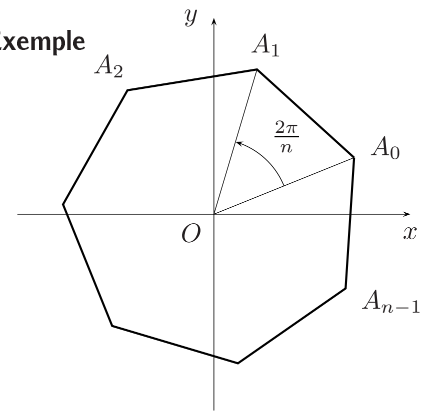


Proposition 30

La rotation r de centre Ω, d'affixe ω, et d'angle θ est représentée dans le plan complexe par l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \omega + e^{i\theta}(z-\omega). \end{array}$

Démonstration page 187

Exemple



Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et z un complexe non nul. En désignant par $(Z_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ les racines n-ièmes de z et par $(A_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ leurs images, on a :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad Z_k = Z_0\, e^{2ik\pi/n}$$

et donc, en posant $Z_n = Z_0$ et $A_n = A_0$:

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad Z_{k+1} = Z_k\, e^{2i\pi/n}.$$

Par suite chaque A_k se déduit du précédent par une rotation de centre O et d'angle $2i\pi/n$, ce qui entraîne que A_0, A_1, …, A_{n-1} sont les sommets d'un polygone régulier centré en O.

Similitudes directes

Définition 11

On appelle **similitude directe** du plan toute application du plan dans lui-même représentée dans le plan complexe par $z \mapsto a\,z+b$, avec $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

339 **Remarques** Comme dans le cas des fonctions réelles, on définit la **composée** de deux applications F et G du plan par $G \circ F\,:\, M \mapsto G\big(F(M)\big)$.

- Il est alors aisé de prouver que la composée des deux similitudes directes est une similitude directe.
- D'après les propositions précédentes, on voit que translations, homothéties et rotations sont des similitudes directes. Par suite il en est de même de toutes leurs composées.

Exemple Une similitude directe conserve les angles et les rapports des distances.
Soit une similitude représentée par $z \mapsto a\,z+b$. Considérons A_1, A_2, A_3 et A_4, des points tels que $A_1 \neq A_2$ et $A_3 \neq A_4$. Notons z_1, z_2, z_3 et z_4 leurs affixes respectives ainsi que z'_1, z'_2, z'_3 et z'_4 les affixes de leurs images A'_1, A'_2, A'_3 et A'_4. On a alors :

$$z'_2 - z'_1 = a\,(z_2 - z_1) \quad \text{et} \quad z'_4 - z'_3 = a\,(z_4 - z_3) \qquad \text{et donc} \quad \frac{z'_4 - z'_3}{z'_2 - z'_1} = \frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

- Par égalité des modules, on déduit $\dfrac{d(A'_3, A'_4)}{d(A'_1, A'_2)} = \dfrac{d(A_3, A_4)}{d(A_1, A_2)}$.
- Par comparaison des arguments, on déduit : $\big(\widehat{\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_3A'_4}}\big) \equiv \big(\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_3A_4}}\big)\ [2\pi]$.

Proposition 31

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et F la similitude du plan représentée par $z \mapsto a\,z+b$.

- Si $a = 1$, alors l'application F est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, alors l'application F admet un unique point invariant Ω, appelé **centre de la similitude**. En désignant par α un argument de a, l'application F s'écrit alors $F = H \circ R = R \circ H$, avec :
  * R la rotation de centre Ω et d'angle α,
  * H l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

  Le réel $|a|$ est appelé **rapport de la similitude** et α une **mesure de l'angle de la similitude**.

Démonstration page 187

Remarque Avec les notations de la proposition précédente :

- si $a \in \mathbb{R}^*$, l'application F est l'homothétie de centre Ω et de rapport a ;
- si $|a| = 1$ et $a \neq 1$, l'application F est la rotation de centre Ω et d'angle α.

Symétries

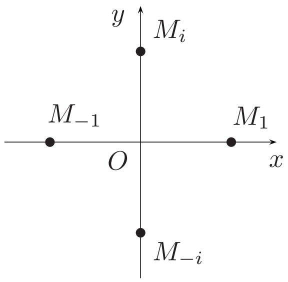
Proposition 32

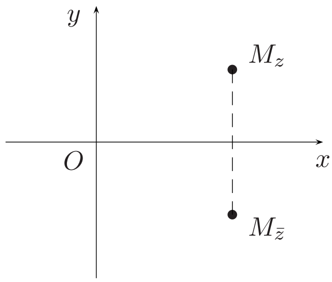
L'application $z \mapsto \bar{z}$ représente la symétrie du plan par rapport à la droite $(O, \vec{\imath})$.

Démonstration page 188

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 Représentations graphiques :





Les points M_z et $M_{\bar{z}}$ sont évidemment symétriques par rapport à l'axe Ox.

Proposition 2

Soit deux complexes $z_1 = x_1 + i\, y_1$ et $z_2 = x_2 + i\, y_2$ avec (x_1, x_2, y_1, y_2) réels.

1. Alors, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{x_1 + x_2 + i\,(y_1 + y_2)} = x_1 + x_2 - i\,(y_1 + y_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
2. De même :

$$\begin{aligned}\overline{z_1\, z_2} &= \overline{x_1\, x_2 - y_1\, y_2 + i\,(x_1\, y_2 + x_2\, y_1)}\\ &= x_1\, x_2 - y_1\, y_2 - i\,(x_1\, y_2 + x_2\, y_1) = \overline{z_1}\,\overline{z_2}.\end{aligned}$$

3. Supposons $z_2 \neq 0$ et posons $u = z_1/z_2$.
   Comme $z_1 = u\, z_2$, en utilisant le résultat précédent, on obtient : $\overline{z_1} = \overline{u}\,\overline{z_2}$.
   Il suffit alors de diviser par $\overline{z_2}$ (non nul) pour avoir $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{u} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Exercice 2 D'après les règles de calcul sur les conjugués, on a :

$$\overline{P(z)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k\, z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\; \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \bar{z}^k = P(\bar{z}).$$

Remarque Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\overline{a_k} = a_k$ car $a_k \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 Dans l'exercice précédent, on a prouvé

$$\overline{\sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \bar{z}^k \quad \text{et} \quad \overline{\sum_{k=0}^{m} b_k\, z^k} = \sum_{k=0}^{m} b_k\, \bar{z}^k$$

Le résultat demandé s'en déduit par quotient de conjugués.

Exercice 4 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Alors $\dfrac{z - i}{1 - i\, z} \in \mathbb{R}$ si, et seulement si :

$$\frac{z - i}{1 - i\, z} = \overline{\left(\frac{z - i}{1 - i\, z}\right)} = \frac{\bar{z} + i}{1 + i\, \bar{z}}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$(z - i)\,(1 + i\,\bar{z}) = (\bar{z} + i)\,(1 - i\,z)$$

ou encore :

$$2i\,(z\,\bar{z} - 1) = 0.$$

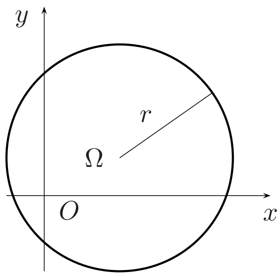
Comme cette dernière condition est équivalente à $|z| = 1$, on a bien établi la propriété demandée.

Exercice 5

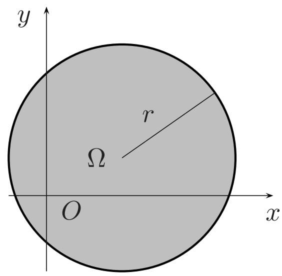
1. Posons $z_1 = x_1 + i\,y_1$ et $z_2 = x_2 + i\,y_2$ avec x_1, y_1, x_2 et y_2 réels. Par définition du module, on a alors :

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d\big(M_{z_1}, M_{z_2}\big).$$

2. Représentations graphiques :



Cercle $\big\{M_z\,;\ |\omega - z| = r\big\}$



Disque $\big\{M_z\,;\ |\omega - z| \leqslant r\big\}$

Proposition 3 En posant $z = x + iy$, avec x et y réels, on a $|z|^2 = x^2 + y^2$. Les deux premiers résultats sont alors évidents, et les deux derniers découlent des inégalités :

$$|\mathrm{Re}\,z| = |x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

$$|\mathrm{Im}\,z| = |y| = \sqrt{y^2} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} = |z|\,.$$

Exercice 6

- Si $z \in \mathbb{R}_+$, on a évidemment $\mathrm{Re}\,z = z = |z|$, et donc $\mathrm{Re}\,z = |z|$.
- Supposons $\mathrm{Re}\,z = |z|$. En posant $x = \mathrm{Re}\,z$ et $y = \mathrm{Im}\,z$, l'égalité $\mathrm{Re}\,z = |z|$ entraîne alors $x^2 + y^2 = x^2$ et donc $y = 0$. On en déduit :

  $$x = \mathrm{Re}\,z = |z| \geqslant 0$$

  Par suite, $z = x$ est élément de $\mathbb{R}_+$.

Proposition 4 Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

- On a alors $\bar{z} \neq 0$ et donc $|z|^2 \neq 0$.

  Par suite la relation $z\overline{z} = |z|^2$ peut s'écrire $z\,\dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$ ce qui donne $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- La relation $|z| = 1$ qui s'écrit encore $1 = |z|^2 = z\overline{z}$ est équivalente à $\dfrac{1}{z} = \bar{z}$.

Proposition 5 Soit $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$.

- On a immédiatement $|z_1\, z_2|^2 = z_1\, z_2\, \overline{z_1 z_2} = z_1\, \overline{z_1} \times z_2\, \overline{z_2} = \big(|z_1|\,|z_2|\big)^2$.
  Comme $|z_1\, z_2|$ et $|z_1|\,|z_2|$ sont des réels positifs on en déduit $|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|$.
- En supposant $z_2 \neq 0$ on a $z_1 = \dfrac{z_1}{z_2}\, z_2$ et donc $|z_1| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|\,|z_2|$.
  On en déduit le résultat en divisant par $|z_2|$ qui est non nul.

Exercice 7 Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$H_n \quad \text{« Pour tout } (z_0, \dots z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}\text{, on a } \left|\sum_{k=0}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |z_k|. \text{ »}$$

- H_0 est évident puisque, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, on a $|z_0| = |z_0|$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit vrai.
  Soit $(z_0, \dots z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+2}$. L'inégalité triangulaire donne :
  $$\left|\sum_{k=0}^{n+1} z_k\right| = \left|\Big(\sum_{k=0}^{n} z_k\Big) + z_{n+1}\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}|,$$
  et l'hypothèse H_n donne alors :
  $$\left|\sum_{k=0}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |z_k| + |z_{n+1}| = \sum_{k=0}^{n+1} |z_k|,$$
  ce qui termine la démonstration.

Proposition 7

- Si $z_1 = 0$, alors l'inégalité est évidente.
  Il en est de même pour l'équivalence puisque $z_1 = 0\, z_2$.
- Supposons donc $z_1 \neq 0$ et posons $k = z_2/z_1$.
  * Comme $|z_1| > 0$, l'inégalité à prouver est équivalente à $\big|1 - |k|\big| \leqslant |1 - k|$. Or :
    $$|1-k|^2 - \big(1 - |k|\big)^2 = (1-k)\,(1-\overline{k}) - (1 - 2|k| + |k|^2) = 2\big(|k| - \operatorname{Re} k\big).$$
    Comme on a $\operatorname{Re} k \leqslant |k|$, on en déduit $\big(1 - |k|\big)^2 \leqslant |1-k|^2$ et donc $\big|1 - |k|\big| \leqslant |1 - k|$.
  * Par suite, avec les notations du point précédent, on a égalité si, et seulement si, $|k| - \operatorname{Re} k = 0$, ce qui équivaut à dire que $k \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 8 En utilisant $z_1 = z_1 - z_2 + z_2$, la première inégalité donne :

$$|z_1| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2| \quad \text{et donc} \quad |z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

En échangeant les rôles de z_1 et z_2, on en déduit :

$$|z_2| - |z_1| \leqslant |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$$

et donc la double inégalité :

$$-\big|z_1 - z_2\big| \leqslant |z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|,$$

ce qui entraîne $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2|$.

Proposition 11 Soit θ et φ deux réels. On a :

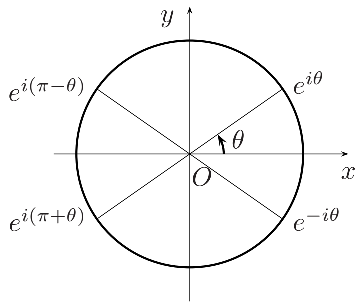
$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\varphi} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) \\ &= \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) = e^{i(\theta+\varphi)}. \end{aligned}$$

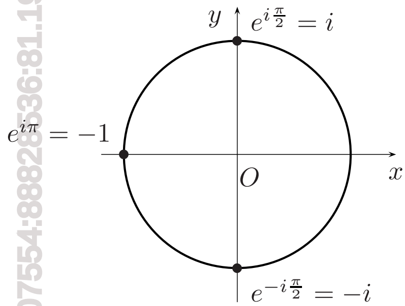
Donc $e^{i\varphi}\,e^{-i\varphi} = e^0 = 1$, ce qui prouve $e^{-i\varphi} = \dfrac{1}{e^{i\varphi}}\cdot$

Enfin, la dernière relation est une conséquence immédiate des deux premières.

Exercice 9

- D'après ce que l'on a vu en trigonométrie, U_θ est le point du cercle trigonométrique tel que $\big(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OU_\theta}}\big) \equiv \theta\ [2\pi]$.
- On en déduit immédiatement les symétries existant entre les divers points U_θ, $U_{\pi-\theta}$, $U_{\pi+\theta}$ et $U_{-\theta}$, comme on le voit, ci-dessous, sur le dessin de gauche.
  Les points d'affixe $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\pi}$, $e^{-i\frac{\pi}{2}}$ sont représentés sur le dessin de droite.





- Le point $U_{\theta+\varphi}$ se déduit de U_θ par une rotation de centre O et d'angle φ.

Exercice 10 En utilisant la formule de Moivre on obtient :

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100} = \left(\exp\frac{i\pi}{3}\right)^{100} = \exp\left(\frac{100i\pi}{3}\right)\cdot$$

Comme $\dfrac{100\pi}{3} = \dfrac{(96+4)\pi}{3} \equiv \dfrac{4\pi}{3}\ [2\pi]$, on a donc :

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100} = \exp\left(\frac{4i\pi}{3}\right) = -\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$$

Remarque Le développement de la puissance 100 avec la formule du binôme de Newton n'est évidemment pas envisageable ici !

Exercice 11

1. La formule du binôme de Newton nous donne :

$$\begin{aligned} (\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos^5\theta + 5\,i\,\cos^4\theta\,\sin\theta - 10\cos^3\theta\,\sin^2\theta \\ - 10\,i\,\cos^2\,\sin^3\theta + 5\cos\theta\,\sin^4\theta + i\,\sin^5\theta. \end{aligned}$$

2. En identifiant les parties réelles, on obtient :
$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\,\sin^2\theta + 5\cos\theta\,\sin^4\theta.$$

3. En remplaçant $\sin^2\theta$ par $1-\cos^2\theta$ dans l'expression de $\cos 5\theta$, on obtient :
$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\,(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta\,(1-\cos^2\theta)^2\\ &= 16\,\cos^5\theta - 20\,\cos^3\theta + 5\,\cos\theta.\end{aligned}$$

4. En identifiant les parties imaginaires de la première relation, on a :
$$\sin 5\theta = 5\cos^4\theta\,\sin\theta - 10\cos^2\,\sin^3\theta + \sin^5\theta$$
ce qui, en remplaçant $\cos^2\theta$ par $(1-\sin^2\theta)$, donne :
$$\sin 5\,\theta = 16\,\sin^5\theta - 20\,\sin^3\theta + 5\,\sin\theta.$$

Exercice 12

1. La formule de Moivre nous donne :
$$\begin{aligned}\cos 6\,\theta &= \mathrm{Re}(\cos\theta + i\,\sin\theta)^6\\ &= \cos^6\theta - 15\,\cos^4\theta\,\sin^2\theta + 15\,\cos^2\theta\,\sin^4\theta - \sin^6\theta\\ &= \cos^6\theta - 15\,\cos^4\theta\,(1-\cos^2\theta) + 15\,\cos^2\theta\,(1-\cos^2\theta)^2 - (1-\cos^2\theta)^3\\ &= 32\,\cos^6\theta - 48\,\cos^4\theta + 18\,\cos^2\theta - 1.\end{aligned}$$

2. Supposons qu'il existe une fonction f telle que $\sin 6\theta = f(\sin\theta)$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$. On a alors :
$$\begin{aligned}f\big(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\big) &= f\big(\sin\big(\tfrac{\pi}{4}\big)\big) = \sin\big(\tfrac{3\,\pi}{2}\big) = -1\\ f\big(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\big) &= f\big(\sin\big(\tfrac{3\,\pi}{4}\big)\big) = \sin\big(\tfrac{9\,\pi}{2}\big) = 1\end{aligned}$$
ce qui est impossible. Par suite, il n'existe pas de telle fonction.

Exercice 13

1. Comme $\theta\in\left]-\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{10}\right[$, on a $5\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; ainsi $\tan\theta$ et $\tan 5\theta$ sont définis et :
$$\tan 5\theta = \frac{\sin 5\theta}{\cos 5\theta} = \frac{5\cos^4\theta\,\sin\theta - 10\cos^2\,\sin^3\theta + \sin^5\theta}{\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\,\sin^2\theta + 5\cos\theta\,\sin^4\theta}\cdot$$

2. En divisant numérateur et dénominateur par $\cos^5\theta$, on obtient :
$$\tan 5\theta = \frac{5\tan\theta - 10\tan^3\theta + \tan^5\theta}{1 - 10\tan^2\theta + 5\tan^4\theta}\cdot$$

Exercice 14

1. En utilisant la formule de Moivre et la formule du binôme, on a :
$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\theta\,(i\sin\theta)^k.$$

2. Les termes réels de cette somme correspondent aux valeurs paires de l'indice, de la forme $k = 2p$, l'entier p vérifiant $p \leqslant \frac{n}{2}$, c'est-à-dire $p \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

   En identifiant les parties réelles de l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$\cos n\theta = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}\theta \, \sin^{2p}\theta. \qquad (a)$$

   Les termes imaginaires de la somme correspondent aux valeurs impaires de l'indice k, de la forme $k = 2p+1$ avec p vérifiant $2p+1 \leqslant n$, c'est-à-dire $p \leqslant \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

   En identifiant les parties imaginaires, on obtient :

$$\sin n\theta = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p+1} \cos^{n-(2p+1)}\theta \, \sin^{2p+1}\theta. \qquad (b)$$

3. En supposant $n\theta \not\equiv \frac{\pi}{2} \, [\pi]$, on peut écrire :

$$\tan n\theta = \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} = \frac{\sum\limits_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p+1} \cos^{n-(2p+1)}\theta \, \sin^{2p+1}\theta}{\sum\limits_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}\theta \, \sin^{2p}\theta}.$$

   Si, de plus, $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2} \, [\pi]$, en divisant numérateur et dénominateur par $\cos^n\theta$, on a :

$$\tan n\theta = \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} = \frac{\sum\limits_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p+1} \tan^{2p+1}\theta}{\sum\limits_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \tan^{2p}\theta}.$$

Exercice 15 1. En utilisant les formules d'Euler, on obtient :

$$\begin{aligned}\sin^6\theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^6 \\ &= -\frac{1}{64}\left(e^{6i\theta} - 6\,e^{4i\theta} + 15\,e^{2i\theta} - 20 + 15\,e^{-2i\theta} - 6\,e^{-4i\theta} + e^{-6i\theta}\right).\end{aligned}$$

En regroupant les termes symétriques en $e^{ik\theta}$ et en $e^{-ik\theta}$, on obtient :

$$\sin^6\theta = -\frac{1}{64}\left(e^{6i\theta} + e^{-6i\theta} - 6\,(e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}) + 15\,(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) - 20\right)$$

et donc :

$$\sin^6\theta = -\frac{1}{32}\,(\cos 6\theta - 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta - 10).$$

Exercice 16
En partant d'une formule d'Euler, la formule du binôme nous donne :

$$\begin{aligned}\cos^5\theta &= \frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^5}{2^5}\\ &= \frac{1}{2^5}\big(e^{5i\theta}+5\,e^{3i\theta}+10\,e^{i\theta}+10\,e^{-i\theta}+5\,e^{-3i\theta}+e^{-5i\theta}\big)\\ &= \frac{1}{32}\,(\cos 5\theta+5\,\cos 3\theta+10\cos\theta).\end{aligned}$$

Exercice 17 On peut utiliser :

- soit la méthode précédente, en développant $\frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^4}{2^4}$,
- soit l'égalité $\cos^4\theta=(\cos^2\theta)^2$ ce qui est, ici, un peu plus rapide.

Comme $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$, on a :

$$\cos^4\theta=\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\big(1+2\,\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\big).$$

En utilisant $\cos^2 2\theta=\dfrac{1+\cos 4\theta}{2}$, on obtient :

$$\cos^4\theta=\frac{1}{8}\,\cos 4\,\theta+\frac{1}{2}\,\cos 2\theta+\frac{3}{8}\cdot$$

Exercice 18 On peut écrire :

$$z=1+e^{2i\theta}=e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}+e^{i\theta}\right)=2\,\cos\theta\,e^{i\theta}.$$

On en déduit $z^{100}=2^{100}\,(\cos\theta)^{100}\,e^{100\,i\theta}$ et donc :

$$\operatorname{Re}(z^{100})=2^{100}\,(\cos\theta)^{100}\,\cos(100\,\theta).$$

Exercice 19
On a :

$$z=e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}\right)=2\,\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\,e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}.$$

et donc :

$$z^n=2^n\left(\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)^n\,e^{n\,i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}.$$

On en déduit $\operatorname{Re}(z^n)=2^n\,\left(\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)^n\,\cos\left(n\,\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\cdot$

Attention Ici, le module de z est $2^n\,\left|\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right|^n$ mais il est inutile d'en parler pour le calcul que nous avons fait ci-dessus.

Exercice 20

1. En mettant en facteur $e^{i\frac{p+q}{2}}$, on obtient :

$$e^{ip}+e^{iq}=e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{i\frac{-p+q}{2}}\right)=2\,e^{i\frac{p+q}{2}}\,\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right)\cdot \qquad (a)$$

   En prenant la partie réelle, on en déduit :

$$\cos p+\cos q=2\,\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right)\cdot$$

2. En mettant en facteur $e^{i\frac{p+q}{2}}$, on obtient :
$$e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{i\frac{-p+q}{2}}\right) = 2\,i\,e^{i\frac{p+q}{2}}\,\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right)\cdot \qquad (b)$$
En prenant la partie réelle, on en déduit :
$$\cos p - \cos q = -2\,\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right)\,\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\cdot$$
3. En prenant la partie imaginaire de (a), on obtient :
$$\sin p + \sin q = 2\,\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\,\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right)$$
et en prenant la partie imaginaire de (b) :
$$\sin p - \sin q = 2\,\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right)\,\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\cdot$$

Exercice 21 Σ_n est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1, et de raison $e^{i\theta} \neq 1$ puisque $\theta \in]0, 2\pi[$. On a donc :
$$\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\cdot$$
Transformons le quotient obtenu :
$$\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}}\;\frac{e^{-i(n+1)\frac{\theta}{2}} - e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} = e^{in\frac{\theta}{2}}\,\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot$$
On en déduit immédiatement :
$$S_n = \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) = \frac{\cos n\frac{\theta}{2}\;\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot$$
Pour $\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi$, on ne peut pas utiliser la méthode précédente puisque $e^{i\theta} = 1$. Dans ce cas on trouve directement $S_n = n+1$

Proposition 14

1. Comme $z \neq 0$ et donc $|z| \neq 0$, on peut donc poser $u = z/|z|$.
On a alors $|u| = 1$, et la proposition 10 de la page 157 nous dit qu'il existe $\theta_0 \in \mathrm{I\!R}$ tel que $u = e^{i\theta_0}$. Le résultat est alors immédiat en prenant $r_0 = |z|$.
2. Si $z = r\,e^{i\theta}$ alors on a $|z| = |r|\,|e^{i\theta}| = |r|$ puisque $|e^{i\theta}| = 1$.
Comme $r \in \mathrm{I\!R}_+$, on a $r = |r| = |z|$.
3. Soit θ tel que $z = |z|\,e^{i\theta} = |z|\,e^{i\theta_0}$.
Comme $|z| \neq 0$, on a alors $e^{i\theta_0} = e^{i\theta}$ et la proposition 10 de la page 157 nous dit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta_0 + 2k\pi$, ou encore $\theta \equiv \theta_0\ [2\pi]$.

Exercice 22 Par hypothèse, le complexe $a+i\,b$ est non nul. En appelant r son module et θ l'un de ses arguments, on peut écrire :
$$a\,\cos x + b\,\sin x = r\,\cos\theta\,\cos x + r\,\sin\theta\,\sin x,$$

ce qui donne :

$$a\,\cos x + b\,\sin x = r\,\cos(x-\theta)$$

ou encore :

$$a\,\cos x + b\,\sin x = r\,\cos(x-\theta) = r\,\sin(x+\theta') \quad \text{avec} \quad \theta' = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Exercice 23

1. On a $z = 1 + e^{2i\theta} = e^{i\theta}\left(e^{-i\theta} + e^{i\theta}\right) = 2\cos\theta\, e^{i\theta}$.

   Si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ alors $\cos\theta > 0$, donc $|z| = 2\cos\theta$ et un argument de z est θ.

   Si $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ alors $\cos\theta < 0$, donc $|z| = -2\cos\theta$ et un argument de z est $\theta + \pi$.

   Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ alors $z = 0$ et il n'a pas d'argument.

2. En utilisant la trigonomérie élémentaire on peut écrire :

$$\begin{aligned} z &= 1 + \cos 2\theta + i\,\sin 2\theta \\ &= 2\cos^2\,\theta + 2i\,\sin\theta\,\cos\theta \\ &= 2\cos\theta\,(\cos\theta + i\,\sin\theta) \end{aligned}$$

   et l'on termine ensuite comme ci-dessus.

Proposition 16

- Si l'on pose $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $x' = \operatorname{Re} z'$ et $y' = \operatorname{Im} z'$, alors on a :

$$\begin{aligned} e^{z+z'} &= e^{(x+x')+i\,(y+y')} \\ &= e^{x+x'}\, e^{i\,(y+y')} && \text{définition de l'exponentielle complexe} \\ &= e^x\, e^{x'}\, e^{iy}\, e^{iy'} && \text{propriétés de l'exponentielle réelle et de } t \mapsto e^{it} \\ &= \left(e^x\, e^{iy}\right)\left(e^{x'}\, e^{iy'}\right) = e^z\, e^{z'}. \end{aligned}$$

- En utilisant le résultat précédent avec $z' = -z$, on obtient $e^z\, e^{-z} = e^0 = 1$; on retrouve ainsi $e^z \neq 0$ et on en déduit $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.

Proposition 17 Écrivons a sous forme trigonométrique $a = \rho\, e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- Soit z vérifiant $e^z = a$, c'est-à-dire $\rho\, e^{i\theta} = e^{\operatorname{Re} z}\, e^{i \operatorname{Im} z}$. On a alors :
  - $*$ $\rho = |a| = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ et donc $\operatorname{Re} z = \ln\rho$;
  - $*$ $e^{i\theta} = e^{i \operatorname{Im} z}$, donc $\theta \equiv \operatorname{Im} z\ [2\pi]$.

  Par suite il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = \ln\rho + i\,\theta + 2i\,k\,\pi$.
- Réciproquement, si $k \in \mathbb{Z}$, alors $e^{\ln\rho + i\,\theta + 2i\,k\,\pi} = e^{\ln\rho}\, e^{i\,\theta + 2i\,k\,\pi} = \rho\, e^{i\theta} = a$.

Ainsi, on a prouvé que $z_0 = \ln\rho + i\,\theta$ est une solution de l'équation $e^z = a$, et que z est solution de cette équation si, et seulement si, $z - z_0 \in 2i\,k\,\pi\,\mathbb{Z}$.

Proposition 18 Soit $z \in \mathbb{C}^*$, de forme trigonométrique $z = r\, e^{i\theta}$. Comme z est non nul, 0 n'est pas une racine carrée de z. Soit donc $Z \in \mathbb{C}^*$, de forme trigonométrique $Z = \rho\, e^{i\,\varphi}$. Alors Z est une racine carrée de z si, et seulement si, $\rho^2\, e^{i\,2\varphi} = r\, e^{i\theta}$.

Comme $\rho^2 > 0$ et $r > 0$, l'équation précédente équivaut à $\rho^2 = r$ et $2\varphi \equiv \theta\ [2\pi]$.

Comme $\rho > 0$, cela équivaut aussi à $\rho = \sqrt{r}$ et $\varphi \equiv \frac{\theta}{2}\ [\pi]$.

Par suite, z admet deux racines opposées $\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $\sqrt{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Exercice 24

1. D'après la méthode précédente, si $(X + iY)^2 = 1 + i$, alors :

$$\begin{cases} X^2 - Y^2 = 1 \\ X^2 + Y^2 = \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad X\,Y \geqslant 0.$$

Par somme et différence des deux équation, on déduit :

$$X^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad Y^2 = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}.$$

Comme $2\,X\,Y = 2 \geqslant 0$, les racines carrées de $1+i$ sont :

$$Z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}} \quad \text{et} \quad Z_2 = -Z_1 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}.$$

2. Comme $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$, les racines carrées de $1+i$ s'écrivent aussi $\pm 2^{1/4}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$. Puisque $\cos\dfrac{\pi}{8} > 0$, on a $Z_1 = 2^{1/4}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$, et donc :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et de même} \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Proposition 19 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} a\,z^2 + b\,z + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}\,z + \frac{c}{a}\right) &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right). \end{aligned}$$

- Supposons $\Delta \neq 0$; en notant δ une racine carrée de Δ, on a :

$$a\,z^2 + b\,z + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right) = a\left(z + \frac{b-\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b+\delta}{2a}\right).$$

L'équation (E) admet donc deux racines distinctes : $\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b-\delta}{2a}$.

- Supposons $\Delta = 0$; alors $a\,z^2 + b\,z + c = a\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ et (E) admet une racine double $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Exercice 25 Le discriminant de l'équation est :

$$\Delta = (3+4\,i)^2 - 4\,(-1+5\,i) = -3+4\,i.$$

La recherche des racines $u+i\,v$ de Δ mène à :

$$u^2 - v^2 = -3, \quad u^2+v^2 = 5 \quad \text{et} \quad 2\,u\,v = 4.$$

Par addition et soustraction, on en déduit $u^2 = 1$ et $v^2 = 4$, et donc :

$$u = \pm 1 \quad \text{et} \quad v = \pm 2.$$

Le signe de $u\,v$ entraîne que les deux racines de Δ sont $\pm(1+2i)$.

Par suite les racines de l'équation donnée sont $\frac{(3+4\,i)\pm(1+2i)}{2}$ c'est-à-dire :

$$2+3\,i \quad \text{et} \quad 1+i.$$

Corollaire 20 Il suffit d'utiliser les résultats précédents et de remarquer que :

- dans le cas $\Delta > 0$, une racine carrée de Δ est $\sqrt{\Delta}$
- dans le cas $\Delta < 0$, une racine carrée de Δ est $i\sqrt{-\Delta}$

Exercice 26 Le discriminant est $\Delta = -4\sin^2\theta$.

- Si $\theta \equiv 0\ [\pi]$, alors $\Delta = 0$ et l'équation admet une racine double :

$$z_0 = 1 \quad \text{si} \quad \theta \equiv 0\ [2\pi] \qquad \text{ou} \qquad z_0 = -1 \quad \text{si} \quad \theta \equiv \pi\ [2\pi].$$

- Si $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, alors $\Delta < 0$ et l'équation admet deux racines distinctes :

$$z_1 = \cos\theta + i\,|\sin\theta| \qquad \text{et} \qquad z_2 = \cos\theta - i\,|\sin\theta|\,.$$

  En fait, dans ce cas, l'ensemble des racines de l'équation peut aussi s'écrire :

$$\{\cos\theta + i\sin\theta, \cos\theta - i\sin\theta\} = \{e^{i\theta}\,,\, e^{-i\theta}\}$$

  ce qui évite l'utilisation d'une valeur absolue.
- Dans le second cas, la méthode générale pour les équations à coefficients complexes est plus efficace. En effet on peut directement exhiber $\delta = 2\,i\sin\theta$ qui est une racine de Δ et dire que les racines sont :

$$\cos\theta \pm i\sin\theta \quad \text{ou encore} \quad e^{\pm i\theta}.$$

Proposition 21

- Si z_1 et z_2 sont les deux racines de l'équation, en utilisant les formules donnant les racines d'une équation du second degré on obtient facilement :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad z_1\,z_2 = \frac{c}{a}\cdot$$

- Réciproquement, si $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1\,z_2 = \dfrac{c}{a}$, alors :

$$a\,(z-z_1)\,(z-z_2) = a\left(z^2 - (z_1+z_2)\,z + z_1\,z_2\right) = a\,z^2 + b\,z + c$$

  et donc l'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ a pour racines z_1 et z_2 (éventuellement égales si $z_1 = z_2$).

Exercice 27 On a :

$$z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2 = (z_1 + z_2)^2 - 3\, z_1 z_2 = 1^2 - 3 \times 4 = -11.$$

Exercice 28 Les racines de l'équation $z^2 - 2\,z\,\cos\theta + 1$ sont les deux nombres complexes dont la somme est $2\cos\theta$ et le produit 1.

D'après les formules d'Euler, on sait que ce sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

Exercice 29 En utilisant somme et produit, on voit que les deux racines de :

$$z^2 - (1 + a + a^2)\, z + a\,(1 + a^2) = 0$$

sont a et $1 + a^2$.

Exercice 30

1. Parmi les racines n-ièmes de l'unité, il y a évidemment 1.
2. Si z_1 et z_2 sont deux éléments de $\mathbb{U}_n$, alors $(z_1\, z_2)^n = z_1^n\, z_2^n = 1$, et donc $z_1 z_2$ est un élément de $\mathbb{U}_n$.
3. Si z est élément de $\mathbb{U}_n$ alors :

$$z \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = 1,$$

ce qui prouve que $\dfrac{1}{z}$ est un élément de $\mathbb{U}_n$.

Proposition 23

- Comme $\xi \neq 1$, on a $1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^{n-1} = \dfrac{1 - \xi^n}{1 - \xi}$, ce qui vaut 0 car $\xi^n = 1$.
- Comme $n \geqslant 2$, on a $\xi_1 \neq 1$ et la somme S des racines n-ième de l'unité s'écrit :

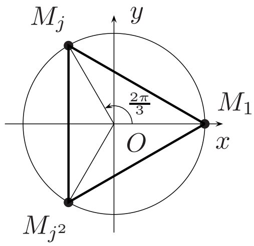
$$S = 1 + \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n-1} = 1 + \xi_1 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_1^{n-1} = 0.$$

Exercice 31

- Comme les racines cubiques de l'unité sont

$$1, \quad j = \exp\left(\frac{2i\,\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad j^2 = \exp\left(\frac{4\,i\,\pi}{3}\right)$$

les images de ces racines, M_1, M_j et M_{j^2}, forment le triangle équilatéral ci-contre.



- Comme j est une racine cubique de l'unité, différente de 1, on a :

$$1 + j + j^2 = 0.$$

Exercice 32

- Le complexe $\xi = \left(\exp(\frac{i\,\pi}{6})\right)^2 = j$ est un élément de $\mathbb{U}_6$.

  Mais l'ensemble de ses puissances, qui est égal à $\{1, j, j^2\}$, est différent de $\mathbb{U}_6$ qui contient 6 éléments.
- Toutefois, la somme $1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^{n-1}$ vaut toujours 0 puisque $\xi \neq 1$.

Exercice 33 Cette équation est obtenue à partir de l'équation $z^2+z+1=0$ en changeant z en $-z$. Ses solutions sont donc $-j$ et $-j^2$ ou encore $-j$ et $-\bar{\jmath}$.

Proposition 24

- Dans le cas où $z=0$, le résultat est évident puisque le nombre complexe 0 a une seule racine n-ième qui est 0, et que $\{Z_0\,\xi\,;\ \xi\in\mathbb{U}_n\}=\{0\}$.
- Supposons donc $z\neq 0$. Comme $Z_0^n=z$, l'équation $Z^n=z$ s'écrit aussi $Z^n=Z_0^n$.

  Étant donné que $Z_0\neq 0$, elle est équivalente à $\left(\dfrac{Z}{Z_0}\right)^n=1$.

  Par suite, on a $Z^n=z$ si, et seulement si :

$$\exists\xi\in\mathbb{U}_n\quad \frac{Z}{Z_0}=\xi\qquad\text{ou encore}\qquad \exists\xi\in\mathbb{U}_n\quad Z=\xi\,Z_0.$$

Exercice 34 On remarque que -1 est une solution évidente. Les solutions sont donc les opposées des racines $(2n+1)$-ièmes de l'unité.

Exercice 35 Comme $1+i=\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}$, l'ensemble des ses racines cinquièmes est :

$$\left\{2^{\frac{1}{10}}\,e^{i\left(\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)}\,;\ k\in[\![0,4]\!]\right\}.$$

Proposition 26 Écrivons sous forme trigonométrique $z_1=\rho_1\,e^{i\theta_1}$ et $z_2=\rho_2\,e^{i\theta_2}$.

- Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on sait que l'on a alors $\theta_1\equiv\widehat{(\vec{\imath},\vec{u}_1)}\ [2\pi]$ et $\theta_2\equiv\widehat{(\vec{\imath},\vec{u}_2)}\ [2\pi]$.
- On en déduit le premier résultat, puisque $\widehat{(\vec{u}_1,\vec{u}_2)}=\widehat{(\vec{\imath},\vec{u}_2)}-\widehat{(\vec{\imath},\vec{u}_1)}\equiv\theta_2-\theta_1\ [2\pi]$ et que le nombre réel $\theta_2-\theta_1$ est un argument de $\frac{z_2}{z_1}$.
- Les résultats (i) et (ii) s'en déduisent immédiatement, puisque :
  - $*$ les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires si, et seulement si, $\widehat{(\vec{\imath},\vec{u}_2)}\equiv\widehat{(\vec{\imath},\vec{u}_1)}\ [\pi]$ c'est-à-dire $\theta_2-\theta_1\equiv 0\ [\pi]$, ce qui signifie que $\frac{z_2}{z_1}$ est un réel (positif ou négatif).
  - $*$ De même $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\widehat{(\vec{\imath},\vec{u}_2)}\equiv\widehat{(\vec{\imath},\vec{u}_1)}+\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ c'est-à-dire $\theta_2-\theta_1\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$, ce qui signifie que $\frac{z_2}{z_1}$ est imaginaire pur.

Exercice 36 Le point M, d'affixe z, appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux, ce qui équivaut à $\frac{z-a}{z-b}\in i\mathbb{R}$, ou encore à :

$$\frac{z-a}{z-b}=-\overline{\left(\frac{z-a}{z-b}\right)}=-\frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{z}-\bar{b}}.$$

Cette dernière condition est équivalente à :

$$(z-a)\,(\bar{z}-\bar{b})+(z-b)\,(\bar{z}-\bar{a})=0$$

ou encore à :

$$2\,z\,\bar{z}-(\bar{a}+\bar{b})\,z-(a+b)\,\bar{z}+a\,\bar{b}+\bar{a}\,b=0.$$

Exercice 37

1. La relation $(HA_1) \perp (A_2A_3)$ se traduit par $\frac{a_1-h}{a_3-a_2} \in i\,\mathrm{IR}$, c'est-à-dire :

$$\frac{a_1 - h}{a_3 - a_2} + \frac{\bar{a}_1 - \overline{h}}{\bar{a}_3 - \bar{a}_2} = 0.$$

Comme A_2 et A_3 sont sur le cercle trigonométrique, on a $|a_2| = |a_3| = 1$, et donc :

$$\bar{a}_3 - \bar{a}_2 = \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} = \frac{a_2 - a_3}{a_2\, a_3}.$$

On en déduit aisément la relation demandée, en simplifiant par $a_2 - a_3$, qui est non nul puisque $A_2 \neq A_3$.

2. La relation $H_1 \in A_2A_3$ se traduit par $\frac{a_2-h}{a_3-a_2} \in \mathrm{IR}$, c'est-à-dire :

$$\frac{a_2 - h}{a_3 - a_2} - \frac{\bar{a}_2 - \bar{h}}{\bar{a}_3 - \bar{a}_2} = 0.$$

On termine comme dans la question précédente.

Proposition 28 La relation $f(z) = z + a$ s'écrit aussi $f(z) - z = a$, qui est la traduction immédiate, avec les affixes, de $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, où M et M' sont les images respectives des complexes z et $f(z)$.

Proposition 29 La relation $f(z) = \omega + \lambda\,(z - \omega)$ s'écrit aussi $f(z) - \omega = \lambda\,(z - \omega)$, qui est la traduction immédiate, avec les affixes, de $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\,\overrightarrow{\Omega M}$.

Exercice 38

- Une telle symétrie est une homothétie de centre a et de rapport -1. Elle est donc représentée par $f : z \mapsto a - (z - a) = 2\,a - z$.
- On peut aussi dire que, si a, z et z' sont les affixes respectives de A, de M et de son symétrique M', on a $a = \frac{1}{2}(z + z')$, soit $z' = 2a - z$.

Proposition 30 Soit M d'affixe z et $r(M) = M'$ d'affixe z'. Par définition de la rotation r, on a :

$$\Omega M' = \Omega M \qquad \text{et} \qquad (\widehat{\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}}) \equiv \theta\ [2\pi]$$

ce qui se traduit, sur les affixes $z' - \omega$ et $z - \omega$ des vecteurs $\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\overrightarrow{\Omega M}$, par :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

Proposition 31

- Lorsque $a = 1$, c'est le résultat de la proposition 28 de la page 171.
- Supposons $a \neq 1$. Un point M d'affixe z est invariant par F si, et seulement si, z vérifie l'équation $z = az + b$, qui a pour unique solution $\dfrac{b}{1-a}$ car $a \neq 1$.

  L'unique point invariant par F est donc le point Ω d'affixe $z_0 = \dfrac{b}{1-a}\cdot$

De plus, pour tout point M d'affixe z, l'affixe z' du point $F(M)$ vérifie :

$$z' - z_0 = az + b - (a\,z_0 + b) = a\,(z - z_0).$$

Soit R la rotation de centre Ω et d'angle α ainsi que H l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$. Vérifions que $F = H \circ R$.

Soit M un point d'affixe z ; soit z_1 l'affixe de $R(M)$ et z_2 l'affixe de $H\big(R(M)\big)$. On a, d'après les propositions 30 et 29, les relations :

$$z_1 - z_0 = e^{i\alpha}(z - z_0) \quad \text{et} \quad z_2 - z_0 = |a|\,(z_1 - z_0)$$

ce qui donne :

$$z_2 - z_0 = |a|\,e^{i\alpha}(z - z_0) = a\,(z - z_0).$$

Le complexe z_2 est donc l'affixe du point $F(M)$, ce qui montre l'égalité $F = H \circ R$. On montre de même l'égalité $F = R \circ H$.

Proposition 32 Si M et M' sont les deux points d'affixes z et $\bar{z}$, on a $\dfrac{M + M'}{2} \in (O, \vec{\imath})$ et $\overrightarrow{MM'}$ colinéaire à $\vec{\jmath}$. Donc M' est le symétrique de M par rapport à $(O, \vec{\imath})$.

S'entraîner et approfondir

3.1 Étant donné un réel θ, déterminer le module et un argument des complexes :

$$A(\theta) = \frac{1 - i\tan\theta}{1 + i\tan\theta} \qquad \text{et} \qquad B(\theta) = 1 + i\tan\theta.$$

3.2 Donnez la partie réelle des nombres complexes :

$$A = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{50} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 + \cos\beta + i\sin\beta}.$$

3.3 Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|z_1| = |z_2| = 1$ et $z_1 z_2 \neq -1$. On pose $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$.

1. Montrer que Z est réel.
2. On désigne respectivement par θ_1 et θ_2 des arguments de ces complexes. Évaluer Z en fonction de θ_1 et de θ_2.

3.4 Soit $z = u + i\,v$ avec $u \in \mathbb{C}$ et $v \in \mathbb{C}$. Montrer que l'on a $|z|^2 = u^2 + v^2$ si, et seulement si, on a $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ou $(u + i\,v = 0)$.

3.5 Étant donné deux complexes z et z', établir :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right).$$

En donner une interprétation géométrique.

⋆ **3.6** Soit $a \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| \leqslant 1$, $|a| \leqslant 1$ et $a \neq z$.

1. Établir $\left|\dfrac{z - a}{\bar{a}\,z - 1}\right| \leqslant 1$.
2. À quelle condition a-t-on $\left|\dfrac{z - a}{\bar{a}\,z - 1}\right| = 1$?

⋆ **3.7** Soit $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$. Si u est une racine carrée du produit $z\,z'$, montrer que :

$$|z| + |z'| = \left|\frac{z + z'}{2} - u\right| + \left|\frac{z + z'}{2} + u\right|$$

3.8 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$
2. $6\,z^2 - (5-i)\,z + 2 - \dfrac{5\,i}{6} = 0$
3. $z^2 + (1-2\,i)\,z - 2\,i = 0$

3.9 Pour $z \in \mathbb{C}^*$, établir que $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $\big(|z| = 1 \text{ ou } z \in \mathbb{R}^*\big)$.

3.10 1. Calculer $\cos 5x$ en fonction de $\cos x$.

2. En déduire la valeur exacte de $\cos \dfrac{\pi}{10}\cdot$

3.11 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} x^3 - 3\,x\,y^2 = 1 \\ 3\,x^2\,y - y^3 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot \end{cases}$

3.12 1. Déterminer les racines complexes du polynôme $P = z^4 - 30\,z^2 + 289$.

2. En déduire une factorisation de P en un produit de polynômes du second degré à coefficients réels.
3. Retrouver directement cette factorisation sans utiliser les complexes.

3.13 Pour $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, résoudre l'équation $\left(\dfrac{1+i\,z}{1-i\,z}\right)^3 = \dfrac{1+i\,\tan\alpha}{1-i\,\tan\alpha}\cdot$

3.14 Résoudre de deux façons différentes l'équation : $(1+i\,z)^5 = (1-i\,z)^5$ et en déduire la valeur de $\tan\frac{\pi}{5}\cdot$

3.15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(z+1)^n = (z-1)^n$; 2. $(z+1)^n = (1-z)^n$.

3.16 En posant $j = \exp(2\,i\,\frac{\pi}{3})$, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + j\,y + j^2\,z = b \\ x + j^2\,y + j\,z = c \end{cases}$$

3.17 *(Calcul des coefficients binomiaux de 3 en 3)* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

1. $S_0 = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{3k} + \cdots$
2. $S_1 = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{3k+1} + \cdots$
3. $S_2 = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \cdots + \binom{n}{3k+2} + \cdots$

Terminer le calcul pour $n = 100$.

3.18 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, simplifier $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\,x)$ et $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\,x)$.

★ **3.19** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :

$$1 - \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{4} x^4 + \cdots + (-1)^p \binom{n}{2p} x^{2p} + \cdots = 0.$$

3.20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le complexe a pour que l'équation $\left(\dfrac{1+i\,x}{1-i\,x}\right)^n = a$ possède n solutions réelles.

3.21 Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier les sommes $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos^2(k\,x)$ et $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\cos(k\,x)}{\cos^k x}\cdot$

★ **3.22** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta = \frac{\pi}{n}\cdot$ Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \cos k\theta$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k \cos k\theta$.

★★ **3.23** Soit $a \in \mathbb{C}$ de module 1 et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| \neq 1$.

Déterminer le maximum de $\left|\dfrac{z-a}{\lambda\,z-a}\right|$ lorsque $|z| = 1$.

3.24 À quelle condition les points d'affixes a, b et c forment-ils :

1. un triangle équilatéral direct ?
2. un triangle équilatéral ?

⋆⋆ **3.25** Soit A, B et C trois points du plan complexe formant un triangle direct. On construit A', B' et C' tels que les triangles BAC', CBA' et ACB' soient équilatéraux directs.

1. Calculer les affixes de A', B' et C' en fonction de celles de A, B et C.
2. Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont même centre de gravité.
3. Montrer que AA', BB' et CC' ont même longueur non nulle. Quels angles ces segments forment ils entre eux ?
4. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

3.26 Soit $M_0, \ldots, M_{n-1}$ un polygone régulier convexe direct de n côtés.

Si $k \in [\![0, n-1]\!]$, exprimer l'affixe de M_k en fonction de celles de M_0 et de M_1.

⋆ **3.27** Dans cet exercice p et q sont deux réels donnés et on s'intéresse à l'équation :

$$x^3 + p\,x + q = 0 \qquad (E_{p,q})$$

1. Montrer que l'équation $E_{-3,9}$ possède une unique racine réelle et en déterminer une valeur approchée.
2. Montrer que l'équation $E_{-15,-4}$ possède exactement trois racines réelles et en déterminer des valeurs approchées.
3. On pose $\Delta = -(4\,p^3 + 27\,q^2)$. Montrer que :
   - si $\Delta > 0$, alors l'équation $E_{p,q}$ possède trois racines réelles ;
   - si $\Delta < 0$, alors l'équation $E_{p,q}$ possède une unique racine réelle.

   Que peut-on dire du cas où $\Delta = 0$?

⋆ **3.28** Dans cet exercice, on utilise les notations du précédent.

1. La méthode dite de Cardan consiste à chercher deux nombres u et v tels que $x = u + v$ soit une racine de $E_{p,q}$.
   - Montrer qu'il suffit d'avoir $u^3 + v^3 = -q$ et $3\,u\,v = -p$.
   - Vérifier que u^3 et v^3 sont alors les racines d'une équation du second degré, notée $\mathcal{E}$, que l'on précisera.
2. Appliquer la méthode précédente pour trouver la solution réelle de $E_{-6,9}$.
3. Dans le cas $\Delta < 0$, exprimer, à l'aide de radicaux, la seule racine réelle de l'équation $E_{p,q}$ (c'est ce que l'on appelle la formule de Cardan).

Solution des exercices

3.1 1. Étant donné $\tan\theta$ est définie pour $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et qu'alors $1 + i\,\tan\theta \neq 0$, l'expression $A(\theta)$ est définie pour $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On a alors :

$$z = \frac{1 - i\tan\theta}{1 + i\tan\theta} = \frac{\exp(-i\theta)}{\exp(i\theta)} = \exp\left(-2\,i\theta\right)$$

et donc $|z| = 1$ et $\arg z \equiv -2\,\theta \quad [2\pi]$.

2. L'expression $B(\theta)$ étant de période π, pour simplifier on peut supposer $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cdot$ Pour un tel θ, on a :

$$B(\theta) = 1 + i\tan\theta = \frac{\exp(i\,\theta)}{\cos\theta}\cdot$$

Comme $\cos\theta > 0$, on a alors $|B(\theta)| = \dfrac{1}{\cos\theta}$ et $\arg B(\theta) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Si l'on ne suppose pas $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ mais seulement $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, cela devient :

- si $\cos\theta > 0$, alors $|B(\theta)| = \frac{1}{\cos\theta}$ et $\arg B(\theta) \equiv \theta\ \ [2\pi]$,
- si $\cos\theta < 0$, alors $|B(\theta)| = -\frac{1}{\cos\theta}$ et $\arg B(\theta) \equiv \theta + \pi\ \ [2\pi]$.

3.2 1. En mettant sous forme trigonométrique, on a :

$$A = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{50} = \left(\frac{2\,e^{\frac{i\,\pi}{3}}}{\sqrt{2}\,e^{-\frac{i\,\pi}{4}}}\right)^{50} = 2^{25}\,e^{\frac{175\,i\,\pi}{6}} = 2^{25}\,e^{\frac{-5\,i\,\pi}{6}}.$$

On en déduit $A = -2^{24}\,\sqrt{3} - 2^{24}\,i$ et donc $\mathrm{Re}\,(z) = -2^{24}\,\sqrt{3}$.

2. Le complexe $B = \dfrac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 + \cos\beta + i\sin\beta} = \dfrac{1 + e^{i\,\alpha}}{1 + e^{i\,\beta}}$ est défini pour $\beta \neq \pi\ \ [2\pi]$, et :

$$B = \frac{1 + e^{i\,\alpha}}{1 + e^{i\,\beta}} = \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}}\left(e^{-\frac{i\alpha}{2}} + e^{\frac{i\alpha}{2}}\right)}{e^{\frac{i\beta}{2}}\left(e^{-\frac{i\beta}{2}} + e^{\frac{i\beta}{2}}\right)} = \frac{\cos(\alpha/2)}{\cos(\beta/2)}e^{\frac{i(\alpha-\beta)}{2}}.$$

Par suite, on a $\mathrm{Re}\,z = \cos\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)\dfrac{\cos(\alpha/2)}{\cos(\beta/2)}\cdot$

3.3 1. Avec les notations, on a :

$$\begin{aligned}
\bar{Z} &= \frac{\bar{z_1} + \bar{z_2}}{1 + \bar{z_1}\bar{z_2}} && \text{règles de calculs des conjugués}\\
&= \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1}\,\frac{1}{z_2}} && \text{car } |z_1| = |z_2| = 1\\
&= Z && \text{en réduisant aux mêmes dénominateurs.}
\end{aligned}$$

Comme $Z = \bar{Z}$, on en déduit que Z est réel.

2. On a $z_1 = e^{i\theta_1}$ et $z_2 = e^{i\theta_2}$ avec $\theta_1 + \theta_2 \neq \pi\ \ [2\pi]$ car $z_1 z_2 \neq -1$. Donc :

$$Z = \frac{e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}}{1 + e^{i(\theta_1+\theta_2)}} = \frac{e^{i\,(\theta_1+\theta_2)/2}}{e^{i\,(\theta_1+\theta_2)/2}}\,\frac{e^{i\,(\theta_1-\theta_2)/2} + e^{i\,(-\theta_1+\theta_2)/2}}{e^{-i\,(\theta_1+\theta_2)/2} + e^{i\,(\theta_1+\theta_2)/2}} = \frac{\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}.$$

3.4 La relation $|z|^2 = u^2 + v^2$ équivaut à :

$$(u + i\,v)\ \overline{(u + i\,v)} = (u + i\,v)\ (u - i\,v)$$

soit encore à :

$$(u + i\,v)\ \big((\bar{u} - i\,\bar{v}) - \ (u - i\,v)\big) = 0$$

qui est équivalent à $(u + i\,v) = 0$ ou à $(\bar{u} - i\,\bar{v}) - \ (u - i\,v) = 0$.
Cette dernière relation, qui s'écrit encore :

$$\underbrace{\bar{u} - u}_{i\,\mathbb{R}} \quad = \quad \underbrace{i\,(\bar{v} - \ v)}_{\mathbb{R}} \quad ,$$

est équivalente à $\bar{u} - u = \bar{v} - \ v = 0$ et donc à $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

3.5
- Partir de la relation $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = (z + z')\ \overline{(z + z')} + (z - z')\ \overline{(z - z')}$ et développer.
- Les points d'affixe 0, z, $z + z'$ et z' forment un parallélogramme, et la relation précédente traduit que, dans ce parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des quatre côtés.

3.6 1. Montrons par l'absurde que la quantité donnée est définie. Supposons $\bar{a}\,z = 1$.
   - On en déduit $1 = |\,\bar{a}.z\,| = |\bar{a}|\ |z|$;
     comme $|z| \leqslant 1$ et $|a| \leqslant 1$, cela entraîne $|z| = 1$ et $|a| = 1$.
   - La relation $\bar{a}\,z = 1$ s'écrit alors $a^{-1}\,z = 1$ et donne $a = z$, ce qui est exclu.

   On a alors : $\left|\dfrac{z - a}{\bar{a}\,z - 1}\right|^2 - 1 = \dfrac{|\ z - a|^2 - |\bar{a}\,z - 1\,|^2}{|\bar{a}\,z - 1\,|^2}$ dont le numérateur vaut :

$$N = (z - a)\,(\bar{z} - \bar{a}) - (\bar{a}.z - 1)\ (a\,\bar{z} - 1) = (z\,\bar{z} - 1)\ (1 - a\,\bar{a})$$

   ce qui est négatif d'après les hypothèses. On en déduit le premier résultat.

2. D'après le calcul précédent, l'égalité demandée équivaut $N = 0$, c'est-à-dire :

$$|z| = 1 \quad \text{ou} \quad |a| = 1.$$

3.7 Soit v une racine carrée de z et v' une racine carrée de z. La racine carrée u dont parle l'énoncé vaut alors $\pm v\,v'$ mais on a quand même :

$$\left|\ \frac{z + z'}{2} - u\ \right| + \left|\ \frac{z + z'}{2} + u\ \right| = \left|\ \frac{v^2 + v'^2}{2} - v\,v'\ \right| + \left|\ \frac{v^2 + v'^2}{2} + v\,v'\ \right|,$$

ce qui s'écrit :

$$\left|\ \frac{v - v'}{2}\ \right|^2 + \left|\ \frac{v + v'}{2}\ \right|^2 = \frac{1}{2}\,(v - v')\ \overline{(v - v')} + \frac{1}{2}\,(v + v')\,\overline{(v + v')}$$

$$= |v|^2 + |v'|^2 = |z| + |z|'.$$

3.8 1. En travaillant sous forme trigonométrique, on obtient $z = \pm\sqrt{2}\ \exp i\,\frac{\pi}{6}$.

2. En calculant une racine du discriminant sous forme algébrique, on obtient :

$$z = \frac{1}{2} + \frac{i}{3} \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{3} - \frac{i}{2}.$$

3. Une racine évidente -1. Avec la somme des racines, on trouve que l'autre est $2i$.

3.9 On a $z+\dfrac{1}{z}\in \mathbb{R}$ si, et seulement si :

$$z+\frac{1}{z}=\overline{z+\frac{1}{z}}=\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}},$$

ce qui équivaut à $(z-\bar{z})\,(z\,\bar{z}-1)=0$. D'où le résultat.

3.10 1. En utilisant la formule de Moivre, pour $x\in\mathbb{R}$, on trouve :

$$\cos 5\,x=16\,\cos^5 x-20\,\cos^3 x+5\,\cos x.$$

2. Comme $5\,\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$, le réel $u=\cos\frac{\pi}{10}$ est racine de l'équation :

$$0=16\,u^5-20\,u^3+5\,u=u\big(16\,u^4-20\,u^2+5\big).$$

Les racines de l'équation précédente sont :

$$0,\ \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\ -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\ \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\ -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Comme $\cos\dfrac{\pi}{10}\in\left]\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right[$, on a donc $\cos\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot$

Remarque Les cinq racines trouvées sont les $\cos\big((2\,k+1)\,\frac{\pi}{5}\big)$ pour $k\in[\![0,4]\!]$.

3.11 En posant $z=x+i\,y$, ce système équivaut à :

$$z^3=(x+i\,y)^3=1+i\,\frac{\sqrt{3}}{3}=1+i\,\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\exp\left(i\,\frac{\pi}{6}\right)\cdot$$

Les solutions de cette équation en z sont :

$$z=x+i\,y=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{3}}\exp\left(i\left(\frac{\pi}{18}+\frac{2\,k\,\pi}{3}\right)\right)\quad \text{avec } k\in\{0,1,2\}$$

ce qui donne pour le système initial :

$$x=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{3}}\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{2\,k\,\pi}{3}\right)\quad \text{et}\quad y=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{3}}\sin\left(\frac{\pi}{18}+\frac{2\,k\,\pi}{3}\right)\quad \text{avec}\quad k\in\{0,1,2\}.$$

3.12 1. En calculant les racines du polynômes $u^2-30\,u+289$, on obtient :

$$P=\big(z^2-15+8\,i\big)\,\big(z^2-15-8\,i\big).$$

En calculant les racines, on a $\big(z^2-15+8\,i\big)=(z-4+i)\,(z+4-i)$
et, par conjugaison, on obtient $\big(z^2-15-8\,i\big)=(z-4-i)\,(z+4+i)$.
D'où l'ensemble des racines du polynôme initial $\{4-i,\ -4+i,\ 4+i,\ -4-i\}$.
On en déduit une factorisation sur $\mathbb{C}$:

$$P=(z-4+i)\,(z+4+i)\,(z-4-i)\,(z+4-i).$$

2. En regroupant les termes conjugués, on obtient :

$$P=\big(z^2-8\,z+17\big)\,\big(z^2+8\,z+17\big).$$

3. On peut aussi obtenir directement la factorisation précédente en écrivant :

$$z^4-30\,z^2+289=\big(z^2+17\big)^2-64\,z^2=\big(z^2+17-8\,z\big)\,\big(z^2+17+8\,z\big).$$

3.13 Dans $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$, l'équation s'écrit : $\left(\dfrac{1+i\,z}{1-i\,z}\right)^3 = \exp(2\,i\,\alpha)$.

Par suite, z en est racine si, et seulement si, l'on peut trouver $k \in \{0,1,2\}$ tel que :

$$\frac{1+i\,z}{1-i\,z} = \exp\left(\frac{2\,i\,\alpha + 2\,i\,k\,\pi}{3}\right).$$

En posant $\theta = \frac{2\,\alpha + 2\,k\,\pi}{3}$, cette dernière équation équivaut à :

$$i\,z\,\left(1+e^{i\theta}\right) = e^{i\theta} - 1,$$

dont il est évident que $-i$ n'est pas solution.

Pour avoir $\theta = \pi\ [2\pi]$, il faudrait avoir $2\,\alpha = \pi\ [2\pi]$, ce qui est exclu par l'énoncé.

Donc on a $\left(1+e^{i\theta}\right) \neq 0$, et les solutions de l'équation donnée sont :

$$z = \frac{e^{i\theta}-1}{i\,\left(1+e^{i\theta}\right)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \tan\left(\frac{\alpha + k\,\pi}{3}\right) \quad \text{avec } k \in \{0,1,2\}.$$

3.14 **Méthode 1 :** en utilisant la méthode de l'exercice précédent, on trouve

$$z = \tan\frac{k\,\pi}{5} \quad \text{avec} \quad k \in [\![0,4]\!].$$

Méthode 2 : en développant et réduisant, l'équation équivaut à :

$$z\,\left(5 - 10\,z^2 + z^4\right) = 0,$$

qui se résout donc facilement. On trouve comme solutions :

$$\left\{-\sqrt{5+2\sqrt{5}},\ -\sqrt{5-2\sqrt{5}},\ 0,\ \sqrt{5-2\sqrt{5}},\ \sqrt{5+2\sqrt{5}}\right\}.$$

Comme $\tan\dfrac{\pi}{5} \in [0,1]$, on a $\tan\dfrac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

3.15 1. Après avoir vérifié que 1 n'est pas solution, on résout l'équation $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$ et on trouve $n-1$ racines qui sont : $z_k = -i\,\frac{\cos\frac{k\,\pi}{n}}{\sin\frac{k\,\pi}{n}}$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Remarquer qu'il est normal de "ne trouver que $n-1$" racines puisque l'équation donnée est de degré $n-1$.

2. Pour cette équation :
   - si n est impair on a n racines $z_k = i\tan\frac{k\,\pi}{n}$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$
   - si n est pair on a $n-1$ racines : $z_k = i\,\tan\frac{k\,\pi}{n}$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $k \neq \frac{n}{2}$.

3.16 Supposons (x,y,z) solution du système.
Comme $1+j+j^2 = 0$, la somme des trois lignes $L_1+L_2+L_3$ donne $x = \frac{1}{3}\,(a+b+c)$.
En réalisant la combinaison $L_1 + j^2\,L_2 + j\,L_3$, on trouve $y = \frac{1}{3}\,\left(a + j^2\,b + j\,c\right)$.
Enfin $L_1 + j\,L_2 + j^2\,L_3$ donne $z = \frac{1}{3}\,\left(a + j\,b + j^2\,c\right)$.

Évidemment, comme on a raisonné par condition nécessaire, il faut vérifier que le triplet trouvé est solution du système d'équations.

3.17 On a :

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{3k} + \binom{n}{3k+1} + \binom{n}{3k+2} + \cdots$$

$$(1+j)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} j + \binom{n}{2} j^2 + \cdots + \binom{n}{3k} + \binom{n}{3k+1} j + \binom{n}{3k+2} j^2 + \cdots$$

$$(1+j^2)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} j^2 + \binom{n}{2} j + \cdots + \binom{n}{3k} + \binom{n}{3k+1} j^2 + \binom{n}{3k+2} j + \cdots$$

En faisant la somme des trois lignes, la relation $1+j+j^2=0$ nous donne :

$$\begin{aligned} S_0 &= \binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{3\,k} + \cdots + \binom{n}{3\,\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \\ &= \frac{1}{3}\Big((1+1)^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n\Big) = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\,\cos\frac{n\pi}{3}\right)\cdot \end{aligned}$$

La combinaison linéaire $L_1 + j\,L_2 + j^2\,L_3$ donne :

$$\begin{aligned} S_1 &= \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{3\,k+1} + \cdots + \binom{n}{3\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor + 1} \\ &= \frac{1}{3}\Big(2^n + j^2\,(1+j)^n + j\,(1+j^2)^n\Big) = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\,\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)\cdot \end{aligned}$$

et $L_1 + j^2\,L_2 + j\,L_3$ donne :

$$\begin{aligned} S_2 &= \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{3k+2} + \cdots + \binom{n}{3\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor + 2} \\ &= \frac{1}{3}\Big((1+1)^n + j\,(1+j)^n + j^2\,(1+j^2)^n\Big) = \frac{1}{3}\left(2^n - 2\,\cos\frac{(n-1)\pi}{3}\right)\cdot \end{aligned}$$

Pour $n=100$, on trouve $S_0 = S_1 = \dfrac{2^{100}-1}{3}$ et $S_2 = \dfrac{2^{100}+2}{3}\cdot$

3.18 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$A_n + i\,B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{k\,i\,x} = \left(1+e^{i\,x}\right)^n = 2^n\,\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\exp\left(n\,i\,\frac{x}{2}\right),$$

et donc $A_n = 2^n\,\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(n\,\frac{x}{2}\right)$ et $B_n = 2^n\,\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(n\,\frac{x}{2}\right)\cdot$

3.19 Pour x réel, on a :

$$1 - \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{4} x^4 + \cdots + (-1)^p \binom{n}{2p} x^{2p} + \cdots = \frac{1}{2}\Big(\,(1+i\,x)^n + (1-i\,x)^n\,\Big).$$

Par suite, l'équation initiale est équivalente à l'équation $(1+i\,x)^n = -\,(1-i\,x)^n$ qui se traite en comme l'exercice 3.15.

3.20 La condition est $|a| = 1$ et $a \neq (-1)^n$.

- Condition nécessaire : soit x_0 une solution réelle de l'équation ; alors :
$$|a| = \left|\frac{1+i\,x_0}{1-i\,x_0}\right|^n = \left(\frac{|1+i\,x_0|}{|1-i\,x_0|}\right)^n = 1.$$
Si $a = (-1)^n$ alors la relation $\left(\frac{1+i\,x}{1-i\,x}\right)^n = (-1)^n$ entraîne : $(1+i\,x)^n = (i\,x-1)^n$. C'est une équation polynomiale de degré $n-1$ qui ne possède donc pas n racines. Donc $a \neq (-1)^n$ est aussi nécessaire.
- Réciproquement, supposons $|a| = 1$ et $a \neq (-1)^n$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $a = e^{i\,\alpha}$, et on doit résoudre :
$$\left(\frac{1+i\,x}{1-i\,x}\right)^n = e^{i\,\alpha}$$
ou encore :
$$i\,x\,(1+e^{i\theta_k}) = (1-e^{i\theta_k}) \quad \text{avec} \quad \theta_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad \text{pour} \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$
La condition $a \neq (-1)^n$ donne $e^{i\theta_k} \neq -1$ et donc :
$$x_k = \frac{1-e^{i\theta_k}}{1+e^{i\theta_k}} = \tan\left(\frac{\theta_k}{2}\right) = \tan\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right).$$
Comme $\frac{2k\pi}{n} \in [0, \frac{(n-1)\pi}{n}] \subset [0, \pi[$ ces n réels x_k sont deux à deux distincts, ce qui termine la démonstration.

3.21 1. On a :
$$A_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1+\cos(2\,k\,x)}{2}\right) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{2\,i\,k\,x}\right).$$
Par suite :
- si $x \not\equiv 0\ [\pi]$, on a $A_n = \dfrac{n+1}{2} + \dfrac{\cos(n\,x)\sin\big((n+1)x\big)}{2\,\sin x}$;
- si $x \equiv 0\ [\pi]$, alors $A_n = n+1$.

2. Pour que B_n ait un sens, on suppose $x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Alors $B_n = \mathrm{Re}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\exp k\,i\,x}{\cos^k x}\right)$.
- Si $x \equiv 0\ [\pi]$, alors $B_n = n+1$.
- Sinon, alors $x \not\equiv 0\ [\pi]$ et par suite, $\frac{\exp\ i\,x}{\cos x} - 1 = \frac{i\,\sin x}{\cos x} \neq 0$.
On en déduit :
$$B_n = \mathrm{Re}\left(\frac{1 - \dfrac{\exp(n+1)\,i\,x}{\cos^{n+1} x}}{1 - \dfrac{\exp\ i\,x}{\cos x}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\cos^n x}\,\frac{\cos^{n+1} x - \exp(n+1)\,i\,x}{-i\,\sin x}\right)$$
$$= \frac{1}{\sin x\,\cos^n x}\,\mathrm{Re}\Big(i\,\left(\cos^{n+1} x - \exp(n+1)\,i\,x\right)\Big) = \frac{\sin(n+1)\,x}{\sin x\,\cos^{n+1} x}.$$

3.22 • Un calcul classique donne :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos k\,\theta = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \exp(k\,i\,\theta)\right) = \cdots = 0$$

• Pour $S = \sum\limits_{k=0}^{n} k \cos k\,\theta$, on peut calculer :

$$f\,(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin kt = \sin\left((n-1)\frac{t}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n\,t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}$$

puis le dériver avant de remplacer t par $\frac{\pi}{n}$. On trouve :

$$f'(t) = \frac{\frac{n-1}{2}\cos\frac{(n-1)t}{2}\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} + \frac{\frac{n}{2}\sin\frac{(n-1)t}{2}\cos\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{(n-1)t}{2}\sin\frac{nt}{2}\cos\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Comme pour $t = \frac{\pi}{n}$, on a $\frac{nt}{2} = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{(n-1)t}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}$, on obtient :

$$f'\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\frac{n-1}{2}\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n})}{\sin\frac{\pi}{2n}} + 0 - \frac{1}{2}\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n})\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin^2\frac{\pi}{2n}} = \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos^2\frac{\pi}{2n}}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}$$

et donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} k\cos\left(k\,\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}\,n - \frac{1}{2\,\sin^2\frac{\pi}{2n}}.$$

3.23 Posons $a = e^{i\,\alpha}$, avec α fixé, et $z = e^{i\,t}$, avec t variant dans $[0, 2\pi]$. Alors :

$$\left|\frac{z-a}{\lambda\,z-a}\right|^2 = \frac{\left|e^{i\,t} - e^{i\,\alpha}\right|^2}{\left|\lambda\,e^{i\,t} - e^{i\,\alpha}\right|^2} = \frac{\left|e^{i\,t} - e^{i\,\alpha}\right|\left|e^{-i\,t} - e^{-i\,\alpha}\right|}{\left|\lambda\,e^{i\,t} - e^{i\,\alpha}\right|\left|\lambda\,e^{-i\,t} - e^{-i\,\alpha}\right|} = \frac{2 - 2\,\cos(t-\alpha)}{\lambda^2 + 1 - 2\,\lambda\,\cos(t-\alpha)}.$$

Comme $|\lambda| \neq 1$, on a $\left|\frac{\lambda^2+1}{2\,\lambda}\right| > 1$. Par suite, la fonction homographique :

$$u \mapsto \frac{2-2\,u}{\lambda^2+1-2\,\lambda\,u}$$

est définie sur $[-1, 1]$ et décroît de $\dfrac{4}{(\lambda+1)^2}$ à 0. Ainsi $\max\limits_{|z|=1}\left|\dfrac{z-a}{\lambda\,z-a}\right| = \dfrac{2}{|\lambda+1|}.$

3.24 1. Le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si, C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\pi/3$, ce qui s'écrit :

$$(c-a) = e^{i\,\pi/3}\,(b-a) = -j^2\,(b-a)$$

ou encore, après réduction, $a\,j + b\,j^2 + c = 0$.

2. La condition donnée s'écrit :

$$a\,j + b\,j^2 + c = 0 \quad \text{ou} \quad a\,j^2 + b\,j + c = 0$$

ou encore $\left(a\,j + b\,j^2 + c\right)\left(a\,j^2 + b\,j + c\right) = 0$ *i.e.* $a^2 + b^2 + c^2 - (b\,c + a\,c + a\,b) = 0$.

3.25 1. Avec les notations évidentes, on calcule $a' = -j\,c - j^2\,b$ et, par permutations circulaires, on obtient :

$$b' = -j\,a - j^2\,c, \quad c' = -j\,b - j^2\,a.$$

2. On en déduit $\dfrac{1}{3}\,(a' + b' + c') = \dfrac{1}{3}\,(a + b + c)$.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{A'A}$ et $\overrightarrow{B'B}$ ont respectivement pour affixes :

$$z_1 = a + j^2 b + j\,c \qquad \text{et} \quad z_2 = b + j^2 c + j\,a.$$

Comme $z_2 = j\,z_1$, ces vecteurs ont même longueur.

Si $a + j^2\,b + j\,c = 0$, alors $a - b + j\,(c - b) = 0$ et le triangle ABC est équilatéral mais rétrograde, ce qui est exclu par l'énoncé. Donc cette longueur est non nulle et, de $z_2 = j\,z_1$, on déduit alors que ces segments font entre eux un angle de $\frac{2\pi}{3}$.

4. Un point H d'affixe u appartient à AA', BB' et CC' si, et seulement si :

$$\frac{a-u}{a + j^2\,b + j\,c}, \; \frac{b-u}{j(a + j^2\,b + j\,c)}, \; \frac{c-u}{j^2(a + j^2\,b + j\,c)}$$

sont trois nombres réels. En posant $D = a + j^2\,b + j\,c$, il est équivalent de dire :

$$\frac{a-u}{D} = \frac{\bar{a} - \bar{u}}{\bar{D}}, \; \frac{b-u}{j\,D} = \frac{\bar{b} - \bar{u}}{j^2 \bar{D}}, \; \frac{c-u}{j^2\,D} = \frac{\bar{c} - \bar{u}}{j\bar{D}}.$$

Ainsi, il est équivalent de dire que u et $\bar{u}$ vérifient le système suivant :

$$u\,\bar{D} - \bar{u}\,D = a\,\bar{D} - \bar{a}\,D$$

$$u\,j^2\,\bar{D} - \bar{u}\,j\,D = b\,j^2\,\bar{D} - \bar{b}\,j\,D$$

$$u\,j\,\bar{D} - \bar{u}\,j^2\,D = c\,j\,\bar{D} - \bar{c}\,j^2\,D$$

Par combinaison linéaire, on trouve (condition nécessaire) :

$$u = \frac{(a + b + c)\,\bar{D} - (\bar{a} + \bar{b}\,j^2 + \bar{c}\,j)\,D}{3\,\bar{D}}.$$

Comme u est invariant par permutation circulaire sur (a, b, c), il suffit alors de vérifier qu'il est solution de la première équation en calculant $u\,\bar{D} - \bar{u}\,D - a\,\bar{D} + \bar{a}\,D$.

3.26 Posons $\alpha = \exp(2\,i\,\pi/n)$.

- Si le polygone a O pour centre, on a $Z_k = \alpha^k\,Z_0$
- Dans le cas général, le centre du polygone a une affixe ω vérifiant :

$$z_1 - \omega = \alpha\,(z_0 - \omega) \quad \text{ou encore} \quad \omega = \frac{z_1 - \alpha\,z_0}{1 - \alpha}.$$

En appliquant la première formule aux complexes $z_k - \omega$, on trouve :

$$z_k = \frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha}\,z_1 - \alpha\,\frac{1 - \alpha^{k-1}}{1 - \alpha}\,z_0.$$

3.27 1. La fonction polynomiale $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^3-3\,x+9\end{array}$ est dérivable et :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=3\,(x^2-1)=3\,(x-1)\,(x+1).$$

On en déduit immédiatement le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	11	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

ce qui montre que f s'annule une fois et une seule et prouve le résultat. On peut obtenir une estimation de cette racine α à l'aide d'un logiciel de calcul numérique. En calculant alors $f(-2{,}56)=-0{,}097216$ et $f(-2{,}55)=0{,}068625$, on en déduit que $-2{,}56<\alpha<-2{,}55$.

2. De même, la fonction $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^3-15\,x-4\end{array}$ est dérivable et :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=3\,(x^2-5).$$

On en déduit immédiatement le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$10\sqrt{5}-4$	$\searrow$	$-10\sqrt{5}-4$	$\nearrow$	$+\infty$

Comme $10\sqrt{5}-4>0$, on en déduit que f s'annule pour trois réels $\alpha<\beta<\gamma$. On voit sur une représentation graphique que 4 est certainement racine, et il est immédiat de le vérifier. Un calcul à la machine donne aussi $:-3.74<\alpha<-3.73$ et $-0.27<\beta<-0.26$.

3. La fonction $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^3+p\,x+q\end{array}$ est dérivable et :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=3\,x^2+p.$$

- Si $p>0$, la fonction f' ne prend que des valeurs strictement positives, et f est donc strictement croissante. Comme $\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$, on en déduit que f s'annule une fois, et une seule. Dans ce cas, on a $\Delta>0$.
- Si $p<0$, la fonction f' s'annule en deux valeurs distinctes opposées x_1 et x_2. Le tableau de variations de f est alors :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

On a alors :

$$\begin{aligned} f(x_1)\,f(x_2) &= (x_1^3+p\,x_1+q)\,(x_2^3+p\,x_2+q)\\ &= \Big(\frac{2}{3}p\,x_1+q\Big)\Big(\frac{2}{3}p\,x_2+q\Big) && \text{car } x_k^3=x_k^2\,x_k=-\frac{p}{3}x_k\\ &= \frac{4}{3}p^2\,x_1\,x_2+\frac{2}{3}p\,q\,(x_1+x_2)+q^2 \end{aligned}$$

En utilisant les formules donnant la somme et le produit des solutions d'une équation du second degré, on en déduit que $f(x_1)\,f(x_2) = \frac{4}{27}p^3 + q^2 = -\Delta$. Par suite,

* si $\Delta < 0$, les réels $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont de même signe, et f s'annule une fois et une seule ;
* si $\Delta > 0$, les réels $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont de signes contraires, et au vu des variations, on a $f(x_1) > 0$ et $f(x_2) < 0$; dans ce cas, f s'annule trois fois.

Si $\Delta = 0$, alors on a $p \leqslant 0$.

- Si $p = 0$, alors $q = 0$ et l'équation $f(x) = 0$ admet 0 comme unique solution.
- Si $p < 0$, alors on a, soit $f(x_1) = 0$, soit $f(x_2) = 0$ (mais pas les deux), et l'équation $f(x) = 0$ admet donc deux racines, dont l'une est x_1 ou x_2.

3.28 1. Cherchons u et v, tels que $x = u + v$ soit une racine de $E_{p,q}$, c'est-à-dire qui vérifient :

$$0 = (u+v)^3 + p\,(u+v) + q = u^3 + v^3 + (3\,u\,v + p)\,(u+v) + q.$$

- Par suite, si l'on choisit u et v vérifiant $u^3 + v^3 = -q$ ainsi que $3\,u\,v + p = 0$, alors le réel $x = u + v$ est solution de l'équation.
- Comme u et v sont supposés réels, la relation $3\,u\,v + p = 0$ est équivalente à $u^3\,v^3 = -\frac{p^3}{27}\cdot$ Il suffit donc que u^3 et v^3 soient les racines de l'équation :

$$T^2 + q\,T - \frac{p^3}{27} = 0. \qquad (\mathcal{E})$$

2. Dans le cas de l'équation $E_{-3,9}$, l'équation $(\mathcal{E})$ s'écrit :

$$0 = T^2 + 9\,T + 1 = \left(T + \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{77}{4}$$

et a donc pour racines $T = -\frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{77}}{2}$. D'après ce qui précède, on en déduit que :

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{9}{2} + \frac{\sqrt{77}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{77}}{2}\right)}$$

est solution de l'équation. Une calculatrice donne alors $x = -2.5541\ldots$

3. Plus généralement, lorsque $\Delta < 0$, l'équation $\mathcal{E}$ possède deux racines réelles :

$$T = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

et l'unique racine réelle de $E_{p,q}$ est donnée par la formule de Cardan :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Chapitre 4 : Fonctions usuelles

I Fonctions logarithmes et exponentielles **204**
1 Fonction logarithme népérien 204
2 Fonction exponentielle 206
3 Représentation graphique des fonctions ln et exp . 206
4 Logarithmes et exponentielles de base quelconque . 207
II Fonctions puissances **208**
1 Définition 208
2 Croissances comparées 211
III Fonctions circulaires réciproques **212**
1 Fonction Arc tangente 212
2 Fonctions Arc sinus et Arc cosinus 214
IV Fonctions hyperboliques **218**
1 Fonctions sinus et cosinus hyperboliques 218
2 Fonction tangente hyperbolique 219
V Fonctions à valeurs complexes **220**
1 Dérivée d'un fonction complexe 220
2 Opérations sur les fonctions dérivables 221
3 Caractérisation des fonctions constantes 222
4 Dérivées successives 222
5 Dérivée de e^{φ} 223
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . **224**
Exercices **233**

Fonctions usuelles 4

I Fonctions logarithmes et exponentielles

1 Fonction logarithme népérien

En Terminale, la fonction exponentielle a été introduite comme solution de l'équation différentielle $y' = y$ (mais sans en prouver l'existence) et la fonction logarithme comme fonction réciproque de la précédente, ce qui a permis de montrer que la dérivée de la fonction logarithme est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}\cdot$

Pour l'instant nous ne pouvons pas encore justifier directement l'existence d'une solution de l'équation différentielle $y' = y$ (ce qui sera fait en seconde année) ; c'est pourquoi, nous allons commencer par introduire la fonction logarithme en tant que primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$, puis en déduire la fonction exp comme fonction réciproque.

Rappel de résultats vus en Terminale Nous admettrons :

- que toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I ;
- que deux primitives sur un intervalle I d'une même fonction (continue) diffèrent d'une constante.

Ces résultats seront démontrés dans le chapitre 11.

On peut alors énoncer la définition suivante.

Définition 1

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1, ce qui s'écrit aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u}\cdot$$

Par suite, cette fonction logarithme est strictement croissante puisque sa dérivée ne prend que des valeurs strictement positives.

Proposition 1

La fonction logarithme vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \qquad \ln(x\,y) = \ln x + \ln y.$$

Principe de démonstration. Fixer $y \in \mathbb{R}_+^*$ et dériver la fonction $u_y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x\,y). \end{array}$

Démonstration page 224

Corollaire 2

1. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y\,.$
2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \ln(x^n) = n \ln x\,.$

Démonstration. Conséquences immédiates de la proposition précédente et de $x = y\,\dfrac{x}{y}\cdot$ □

Remarque En particulier, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x\,.$

p.224 **Exercice 1** Calculer la dérivée de la fonction $f : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\cdot \end{array}$

p.224 **Exercice 2** Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, que peut-on dire de la limite de la suite $\big(\ln(a^n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$?

Indication : distinguer les cas $a < 1$, $a = 1$ et $a > 1$.

Proposition 3

La fonction logarithme népérien est une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty.$$

Démonstration.

- La fonction $\ln$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puisque sa dérivée ne prend que des valeurs strictement positives. Par suite, en $+\infty$ elle admet une limite ℓ finie ou infinie (ce résultat, intuitivement évident, sera justifié au corollaire 34 de la page 507).
  Comme, d'après l'exercice précédent, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln 2^n = +\infty$, on en déduit $\ell = +\infty$.
- Comme $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$, on a (par composition) $\displaystyle\lim_0 \ln = -\infty$.
- Ainsi la fonction logarithme est une bijection strictement croissante de l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ sur l'intervalle $]\lim\limits_{-\infty} \ln, \lim\limits_{+\infty} \ln[$ qui est égal à $\mathbb{R}$. □

Remarque Il existe donc un unique réel, noté e, tel que $\ln e = 1$. Un outil de calcul permet, par exemple, d'obtenir l'encadrement suivant :

$$2{,}718281 \leqslant e \leqslant 2{,}718282.$$

2 Fonction exponentielle

Définition 2

La fonction **exponentielle**, notée $\exp$, est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

Proposition 4

La fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant $\exp 0 = 1$ ainsi que :

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty.$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a $\exp' = \exp$.

Principe de démonstration. Conséquences des propriétés des fonctions réciproques.

Démonstration page 224

Proposition 5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\exp(x+y) = \exp x \, \exp y\,, \quad \exp(x-y) = \frac{\exp x}{\exp y} \quad \text{et} \quad \exp(n\,x) = (\exp x)^n.$$

Principe de démonstration. Utiliser les résultats de la proposition 1 de la page précédente et de son corollaire, en posant $u = \exp x$ et $v = \exp y$.

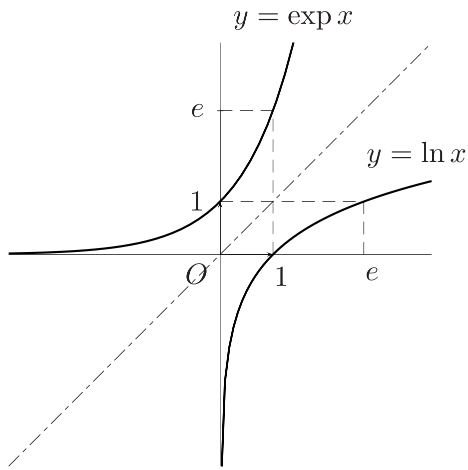
Démonstration page 225

3 Représentation graphique des fonctions ln et exp

De ce qui précède, on déduit les tableaux de variations des fonctions ln et exp ainsi que leurs représentations graphiques.

x	0	1	e	$+\infty$
ln	$-\infty$	0	1	$+\infty$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
exp	0	1	e	$+\infty$



4 Logarithmes et exponentielles de base quelconque

Définition 3

Si a est un réel strictement positif et différent de 1, on appelle **logarithme de base** $\boldsymbol{a}$ la fonction, notée $\log_a$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Exemples

1. Si $a = e$, on retrouve le logarithme népérien.
2. Si $a = 10$, on obtient le **logarithme décimal** que l'on note aussi log et qui, historiquement, a joué un rôle important car il a permis de faire de nombreux calculs avant l'avènement des ordinateurs et des calculatrices. Il est toujours utilisé en physique (décibels) et en chimie (pH).
3. Si $a = 2$, on obtient le **logarithme binaire** utilisé en informatique.

Propriétés Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Des propriétés de la fonction ln, on déduit :

- $\log_a$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\log_a 1 = 0$ et $\log_a a = 1$;
  - ∗ si $a > 1$, alors la fonction $\log_a$ est strictement croissante ;
  - ∗ si $0 < a < 1$, alors la fonction $\log_a$ est strictement décroissante ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\log_a(x\,y) = \log_a x + \log_a y \quad \text{et} \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \ ;$$

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\log_a(x^n) = n \log_a x.$$

p.225

Exercice 3 Soit n est un entier strictement positif. Montrer que le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n en base 10 est égal à la partie entière de $1 + \log n$.

Définition 4

Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \neq 1$, la fonction **exponentielle de base** $\boldsymbol{a}$ est la fonction réciproque de la fonction logarithme de base a.

Propriétés Si a est un réel strictement positif et différent de 1, alors :

- $\exp_a$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\exp_a 0 = 1$ et $\exp_a 1 = a$;
  - $*$ si $a > 1$, alors $\exp_a$ est strictement croissante ;
  - $*$ si $0 < a < 1$, alors $\exp_a$ est strictement décroissante ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, si l'on pose $y = \exp_a x$, alors on a $x = \log_a y = \dfrac{\ln y}{\ln a}$ et donc $\ln y = x \ln a$, ce qui entraîne $\exp_a x = \exp(x \ln a)$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a :
$$\exp_a(x+y) = \exp_a x \exp_a y \quad \text{et} \quad \exp_a(x-y) = \frac{\exp_a x}{\exp_a y} \ ;$$
- pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :
$$\exp_a(n\,x) = (\exp_a x)^n.$$

Notation définitive Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Comme pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $\exp_a n = a^n$, on étend la notation a^x à tout $x \in \mathbb{R}$, en posant :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x = \exp_a x = \exp(x \ln a).$$

- Ainsi, si $a = e$, on a $\exp_a x = \exp x = e^x$.
- Si, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $1^x = 1$, alors on a :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad a^x = \exp(x \ln a).$$

Point méthode

La relation $a^x = \exp(x \ln a)$ se retrouve aisément à l'aide de $\ln(a^x) = x \ln a$.

II Fonctions puissances

1 Définition

Notation Pour $a \in \mathbb{R}$, dans toute la suite de ce chapitre on note :
$$\begin{array}{rccl} \varphi_a : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & x^a = \exp(a \ln x). \end{array}$$

Définition 5

Les fonctions φ_a sont appelées **fonctions puissances**.

Cas particuliers :

- la fonction φ_0 est la fonction constante égale à 1 ;
- la fonction φ_1 est l'identité de $\mathbb{R}_+^*$;

- lorsque $a \in \mathbb{N}$ (respectivement $\mathbb{Z}_-^*$), la fonction $x \mapsto x^a$ est définie sur $\mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{R}^*$), et cela sans utiliser la moindre fonction exponentielle. La fonction φ_a en est alors la restriction à $\mathbb{R}_+^*$.

p.225 **Exercice 4** Suivant le signe de a déterminer les limites de φ_a en 0 et en $+\infty$.

Proposition 6

Pour a et b réels, $x > 0$ et $y > 0$, on a :

$$x^a\, y^a = (x\, y)^a \qquad x^a\, x^b = x^{a+b} \qquad (x^a)^b = x^{ab}$$

$$1^a = 1 \qquad x^0 = 1 \qquad \ln(x^a) = a\, \ln x$$

Principe de démonstration. Conséquences des propriétés de la fonction exponentielle.

Démonstration page 225

Remarque Les résultats de la première ligne ci-dessus confortent le bien fondé de la notation puissance prise page 208, puisque qu'ils généralisent les règles de calcul que l'on connaît déjà sur les puissances entières.

Proposition 7

Pour tout tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction φ_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi_a'(x) = a\, x^{a-1}.$$

Principe de démonstration. Utiliser que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi_a(x) = \exp(a\, \ln x)$.

Démonstration page 225

Prolongement à $\mathbb{R}_+$ dans le cas $a > 0$

Lorsque $a > 0$, on a $\lim\limits_{x \to 0} (a\, \log x) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{0} \varphi_a = 0$; par suite, on peut prolonger la fonction φ_a par continuité en 0, en posant $\varphi_a(0) = 0$.

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{\varphi_a(x)}{x} = \varphi_{a-1}(x)$, on en déduit que :

- si $a > 1$, alors la fonction φ_a est dérivable en 0 et $\varphi_a'(0) = 0$;
- si $0 < a < 1$, alors la fonction φ_a n'est pas dérivable en 0 mais son graphe possède une tangente verticale à l'origine ;
- si $a = 1$, alors φ_a est l'identité, qui est donc dérivable en 0, et $\varphi_a'(0) = 1$.

Représentation graphique des fonctions puissances

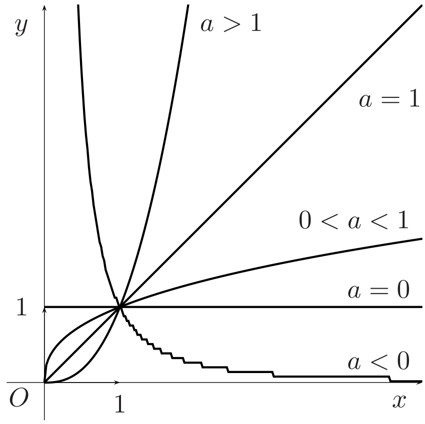
En fonction du signe de a, on en déduit immédiatement les variations de φ_a ainsi que sa courbe représentative :

cas $a > 0$

x	0	1	$+\infty$
φ_a	0 $\nearrow$	1 $\nearrow$	$+\infty$

cas $a < 0$

x	0	1	$+\infty$
φ_a	‖ $+\infty$ $\searrow$	1 $\searrow$	0



Point méthode

Pour se souvenir des différentes formes de courbes ci-dessus, ne pas avoir peur de penser aux cas particuliers connus : le cas $a = 2$ pour $a > 1$, le cas $a = \frac{1}{2}$ pour $0 < a < 1$, et enfin le cas $a = -1$ pour $a < 0$.

p.226 **Exercice 5** *(Approfondissement)* Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, comparer la fonction $\varphi_{\frac{1}{n}}$ avec la fonction $\sqrt[n]{}$ vue dans l'exemple de la page 49.

Point méthode

Soit f définie à l'aide de deux fonctions u et v par $f(x) = u(x)^{v(x)}$.

- Si la fonction v est constante, alors on utilise directement les propriétés des fonctions puissances.
- Sinon, il est indispensable, avant tout, d'écrire $f(x) = \exp\big(v(x)\,\ln u(x)\big)$, ce qui nécessite évidemment (et rappelle donc) la condition $u(x) > 0$.

p.226 **Exercice 6** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ainsi que $u \in \mathbb{R}^I$ et $v \in \mathbb{R}^I$ dérivables, avec $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Calculer la dérivée de $f:\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(x)^{v(x)}. \end{array}$

p.226

Exercice 7 Étudier les variations de $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^x. \end{array}$

On ne demande pas, pour l'instant, d'étudier les limites aux extrémités de l'intervalle.

2 Croissances comparées

Proposition 8

On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x\ln x)=0$.

Principe de démonstration.

- Pour $x \geqslant 1$, on peut majorer $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ par $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ qui s'exprime facilement (sans $\ln$).

  Le théorème d'existence de limite par encadrement donne alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

- Pour la seconde limite, changer x en $\frac{1}{x}$.

Démonstration page 226

p.226

Exercice 8

1. Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & x^x \end{array}$ Montrer que $\lim\limits_0 f = 1$.

2. On prolonge f par continuité, en posant $f(0)=1$. En utilisant $\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1$, vérifier que le graphe de f possède une tangente verticale au point d'abscisse 0.

Corollaire 9 (Propriété de croissances comparées)

Si $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $b\in\mathbb{R}_+^*$, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\ln x)^b}{x^a}\right)=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(x^a|\ln x|^b\right)=0.$

Principe de démonstration. Écrire $\dfrac{(\ln x)^b}{x^a}$ sous la forme $k\left(\dfrac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}\right)^\beta$.

La seconde limite se déduit de la première.

Démonstration page 227

Attention La valeur absolue est indispensable dans la seconde relation car la fonction logarithme est négative sur l'intervalle $]0,1]$.

p.227

Exercice 9 Pourquoi dans les énoncés précédents a-t-on limité a et b à $\mathbb{R}_+^*$?

Proposition 10

Si a et b sont deux réels strictement positifs, on a :
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\exp(a\,x)}{x^b}\right)=+\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(|x|^b\exp(a\,x)\right)=0.$$

Démonstration. Il suffit de remplacer x par $\exp x$ dans les relations précédentes. □

Corollaire 11

En particulier, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\exp x}{x}\right)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x\,\exp x)=0.$

Point méthode

On utilise les résultats précédents pour justifier l'existence de limites dans certains « cas d'indétermination », et quand on y fait appel, on utilise la formulation « par croissances comparées des fonctions … ».

Exemple Détermination de la limite en $+\infty$ de $f: x\mapsto x^{1/x^2}$.
Pour tout $x>0$, on a $f(x)=\exp\left(\frac{1}{x^2}\ln x\right)$ et, par croissances comparées des fonctions puissances et logarithme, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\ln x=0$.

Par composition des limites, on en déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$.

III Fonctions circulaires réciproques

1 Fonction Arc tangente

Définition 6

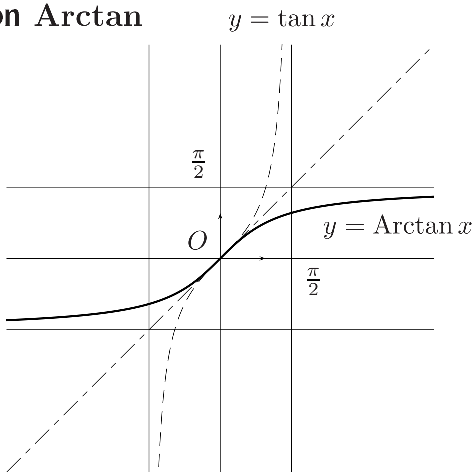
La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; elle définit une bijection de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, dont la réciproque est appelée **Arc tangente** et notée Arctan.

Conséquence La fonction Arc tangente est donc une bijection strictement croissante et continue de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Elle est impaire, puisque c'est la réciproque d'une fonction impaire.

Représentation graphique de la fonction Arctan

Arctan étant la fonction réciproque de la restriction à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tan, on en déduit son tableau de variations et son graphe qui s'obtient en prenant le symétrique du graphe de $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Arctan	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



p.227

Exercice 10 Déterminer $\operatorname{Arctan} 1$, $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\operatorname{Arctan}\left(-\sqrt{3}\right)$ et $\operatorname{Arctan}(\tan \pi)$.

De la définition de la fonction Arc tangente, on déduit le résultat suivant.

Corollaire 12

Pour tout nombre réel x, le réel $\operatorname{Arctan} x$ est l'unique élément de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut x.

Relations fondamentales Par suite, on retrouve très facilement que :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$ puisque la tangente de « l'unique élément de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut x » est évidemment x ;
- pour tout $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\operatorname{Arctan}(\tan \alpha) = \alpha$ puisque « l'unique élément de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut $\tan \alpha$ » est évidemment α.

Bien remarquer la dissymétrie entre les deux points précédents :

- $\tan(\operatorname{Arctan} x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$;
- $\operatorname{Arctan}(\tan \alpha)$ n'est pas défini que pour $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ mais on n'a justifié $\operatorname{Arctan}(\tan \alpha) = \alpha$ que pour $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; par exemple, $\operatorname{Arctan}(\tan \pi) = 0$.

p.227

Exercice 11 Montrer que $\operatorname{Arctan}(\tan \alpha) = \alpha$ si, et seulement si, $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Point méthode

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour justifier $y = \operatorname{Arctan} x$, il suffit de prouver :

$$x = \tan y \qquad \text{et} \qquad y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

p.227

Exercice 12 Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Pour $x > 0$, simplifier $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}\right)$ et en déduire :
$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$
- Que vaut $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ pour $x < 0$?

p.228

Exercice 13 Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(\tan x)$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Vérifier que f est périodique. Qu'en déduit-on pour son graphe ?
3. Vérifier que le graphe de f admet O comme centre de symétrie.
4. En déduire le graphe de f.

p.228

Exercice 14 Soit x un réel quelconque.

- En utilisant la relation classique entre $\cos^2$ et $\tan^2$, simplifier $\cos^2(\operatorname{Arctan} x)$.
- En déduire $\cos(\operatorname{Arctan} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ puis $\sin(\operatorname{Arctan} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Dérivation de la fonction Arctan

Proposition 13

La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Principe de démonstration. Utiliser $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$. Démonstration page 229

p.229

Exercice 15 Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ et retrouver la simplification de cette expression.

Point méthode

Le résultat de l'exercice précédent permet de ramener en 0 l'étude d'une forme indéterminée impliquant la fonction Arc tangente en l'infini.

Exemple La fonction définie par $f(x) = x \operatorname{Arctan} x$ admet, en $+\infty$, une asymptote d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$ puisque pour $x > 0$, on a :

$$f(x) - \frac{\pi}{2}x = x\left(\operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{2}\right) = -x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$$

et que $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{Arctan} u}{u} = \operatorname{Arctan}'(0) = 1$.

2 Fonctions Arc sinus et Arc cosinus

Définition 7

La fonction sinus est continue et elle est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; elle définit une bijection de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur l'intervalle $[-1,1]$, dont la réciproque est appelée **Arc sinus** et notée Arcsin.

Conséquence La fonction Arc sinus est donc une bijection strictement croissante et continue de $[-1,1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Elle est impaire, puisque c'est la réciproque d'une fonction impaire.

p.229

Exercice 16 Simplifier $\operatorname{Arcsin} 1$, $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{Arcsin} -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Arcsin} 2$ et $\operatorname{Arcsin}(\sin \pi)$.

De la définition de la fonction Arc sinus, on déduit le résultat suivant.

Corollaire 14

Pour nombre réel x de l'intervalle $[-1,1]$, le réel $\operatorname{Arcsin} x$ est l'unique élément de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont le sinus vaut x.

Relations fondamentales Par suite, on retrouve très facilement que :

- pour tout $x \in [-1,1]$, on a $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$;
- pour tout $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $\operatorname{Arcsin}(\sin \alpha) = \alpha$. $\qquad (*)$

Bien remarquer la dissymétrie entre les deux points précédents :

- $\sin(\operatorname{Arcsin} x)$ n'est définie que pour $x \in [-1,1]$;
- $\operatorname{Arcsin}(\sin \alpha)$ est défini pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ mais on n'a justifié l'égalité $(*)$ que pour $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; on a par exemple $\operatorname{Arcsin}(\sin \frac{5\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$.

p.229

Exercice 17 Montrer que $\operatorname{Arcsin}(\sin \alpha) = \alpha$ si, et seulement si, $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Point méthode

Soit $x \in [-1,1]$. Alors, pour prouver $y = \operatorname{Arcsin} x$, il suffit de montrer :

$$x = \sin y \quad \text{et} \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

p.229

Exercice 18 Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x)$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Vérifier que f est périodique. Qu'en déduit-on pour son graphe Γ_f ?
3. Quelle autre propriété permet de réduire l'étude de f à $[0,\pi]$?
4. Vérifier que Γ_f admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie.
5. En déduire le graphe de f.

Définition 8

La fonction cosinus est continue et elle est strictement décroissante sur $[0,\pi]$; elle définit une bijection de l'intervalle $[0,\pi]$ sur l'intervalle $[-1,1]$, dont la réciproque est appelée **Arc cosinus** et notée Arccos.

Conséquence La fonction Arc cosinus est donc une bijection strictement décroissante et continue de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$.

p.230 **Exercice 19** Simplifier $\operatorname{Arccos} 1$, $\operatorname{Arccos} \frac{1}{2}$, $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\operatorname{Arccos}(\cos 2\pi)$.

Comme pour la fonction Arc sinus, on a immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 15

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1,1]$, le réel $\operatorname{Arccos} x$ est l'unique élément de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut x.

Relations fondamentales Comme pour Arc sinus, on prouve que :

- pour tout $x \in [-1,1]$, on a $\cos(\operatorname{Arccos} x) = x$;
- pour tout $\alpha \in [0,\pi]$, on a $\operatorname{Arccos}(\cos\alpha) = \alpha$.

On a toujours la même dissymétrie entre les deux points puisque :

- $\cos(\operatorname{Arccos} x)$ n'est définie que pour $x \in [-1,1]$;
- $\operatorname{Arccos}(\cos\alpha)$ est défini pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ mais l'égalité $\operatorname{Arccos}(\cos\alpha) = \alpha$ est vraie si, et seulement si, $\alpha \in [0,\pi]$.

Point méthode

Soit $x \in [-1,1]$. Alors, pour prouver $y = \operatorname{Arccos} x$, il suffit de montrer :

$$x = \cos y \quad \text{et} \quad y \in [0,\pi].$$

p.230 **Exercice 20** Pour x dans $[-1,1]$, simplifier $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x\right)$ et en déduire :

$$\forall x \in [-1,1] \quad \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}.$$

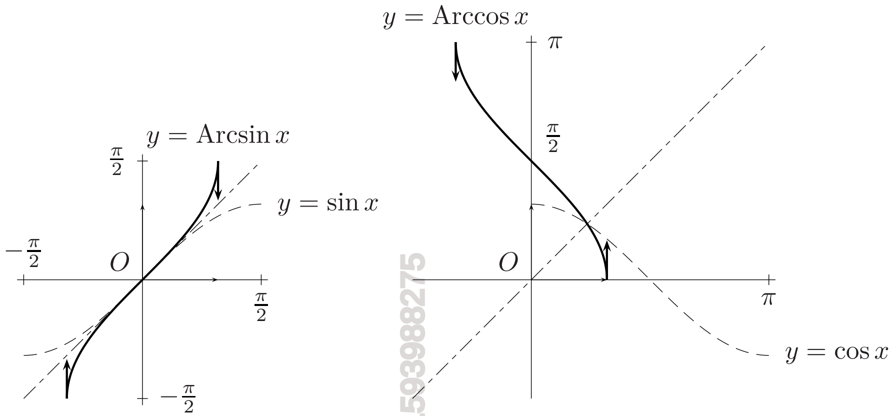
p.230 **Exercice 21** En vous inspirant de ce qui a été fait pour la courbe d'équation $y = \operatorname{Arcsin}(\sin x)$, représenter la courbe d'équation $y = \operatorname{Arccos}(\cos x)$.

Quelle simplification peut-on donner de $\operatorname{Arccos}(\cos x)$ lorsque $x \in [-\pi,\pi]$?

Représentation graphique des fonctions Arcsin et Arccos

On peut maintenant tracer les représentations graphiques de ces fonctions.

- Le graphe Γ_s de Arcsin est le symétrique, par rapport à la première bissectrice, du graphe γ_s de la fonction $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$. Comme γ_s possède des tangentes horizontales en ses extrémités, le graphe Γ_s possède des tangentes verticales en ses extrémités, ce qui signifie que la fonction Arcsin n'est pas dérivable en ± 1.
- En symétrisant le graphe γ_c de la fonction $\cos_{|[0,\pi]}$, on obtient le graphe Γ_c de Arccos qui possède des tangentes verticales aux points d'abscisses ± 1.



Tableaux de variations (qui se lisent aussi sur les graphes précédents)

x	-1	0	$+1$
Arcsin	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$

x	-1	0	$+1$
Arccos	π ↘	$\frac{\pi}{2}$ ↘	0

p.230

Exercice 22

1. Quelle symétrie voit-on entre les graphes des fonctions $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ et $\cos_{|[0,\pi]}$? Justifier cette propriété.
2. Retrouver la relation classique entre Arcsin et Arccos.

Dérivation des fonctions Arcsin et Arccos

p.230

Exercice 23 Pour $x \in [-1,1]$, montrer que $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$.

p.231

Exercice 24 Pour $x \in [-1,1]$, simplifier de même $\sin(\operatorname{Arccos} x)$.

Proposition 16

Les fonctions Arcsin et Arccos sont dérivables sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in\,]-1,1[\quad \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Principe de démonstration. Utiliser le théorème de dérivation d'une fonction réciproque.

Démonstration page 231

Remarque La fonction Arcsin (resp. Arccos) n'est pas dérivable en ± 1, puisque la dérivée de sa fonction réciproque s'annule en $\pm\frac{\pi}{2}$ (resp. en 0 et π).

Point méthode

La non-dérivabilité des fonctions Arcsin et Arccos en ± 1 se « voit » immédiatement sur les représentations graphiques.

IV Fonctions hyperboliques

1 Fonctions sinus et cosinus hyperboliques

Définition 9

Les deux fonctions **sinus hyperbolique**, notée sh (ou sinh), et **cosinus hyperbolique**, notée ch (ou cosh), sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

On en déduit immédiatement les résultats de la proposition suivante.

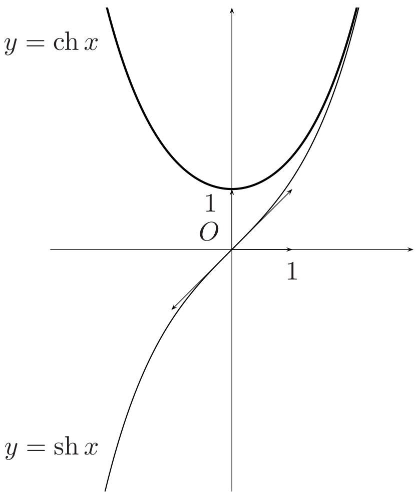
Proposition 17

La fonction sinus hyperbolique est impaire, la fonction cosinus hyperbolique est paire. Elles sont toutes deux dérivables, avec $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.

Représentation graphique des fonctions sh et ch

La fonction cosinus hyperbolique étant strictement positive, on en déduit d'abord les variations de sinus hyperbolique, puis celles de cosinus hyperbolique.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
sh	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$
ch	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$



La continuité de ces fonctions ainsi que leurs variations montrent que :

- la fonction sinus hyperbolique est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$;
- la fonction cosinus hyperbolique définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

Formules de base de la trigonométrie hyperbolique

Proposition 18

Pour tout réel t, on a :

$$\exp t = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t, \quad \exp(-t) = \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

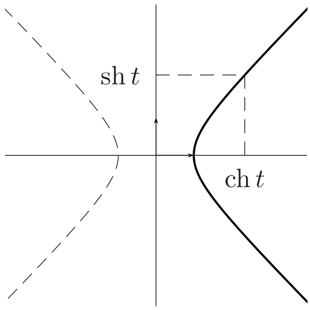
Démonstration. Les deux premières relations sont évidentes, et la dernière en découle puisque :

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t)(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t) = \exp(-t)\, \exp t = 1. \qquad \square$$

Remarques

- La relation $\exp t = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t$, ainsi que les propriétés de parité des fonctions sinus et cosinus hyperboliques, permettent de dire que ces fonctions sont respectivement la partie paire et la partie impaire de la fonction exponentielle (voir éventuellement exercice 17 de la page 325).
- *(Culture générale)* De même que les fonctions sinus et cosinus permettent de paramétrer un cercle, la relation $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ peut s'interpréter géométriquement en considérant l'hyperbole équilatère H d'équation :

$$x^2 - y^2 = 1.$$



Comme la fonction sinus hyperbolique réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout point (x, y) de H d'abscisse positive, il existe un unique réel t tel $y = \operatorname{sh} t$. On a alors $x = \operatorname{ch} t$. Donc la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) \end{array}$$

est un paramétrage de la partie **de droite** de l'hyperbole H, l'autre branche étant paramétrée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (-\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t). \end{array}$$

2 Fonction tangente hyperbolique

Définition 10

La fonction **tangente hyperbolique**, notée th (ou tanh), est définie, pour tout réel x, par $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

Remarque Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch} x > 0$, ce qui prouve que cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Proposition 19

La fonction tangente hyperbolique est impaire ; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x.$$

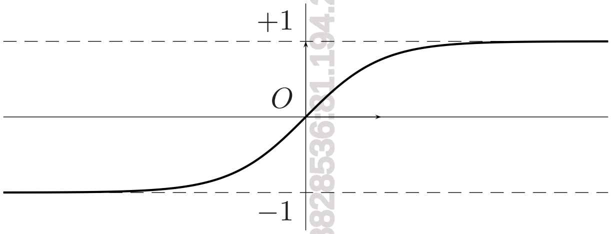
Principe de démonstration. Pour dériver, faire le calcul de deux manières : quotient, produit.

Démonstration page 231

Représentation graphique de la fonction th

On en déduit le taleau de variations et la représentation graphique.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
th	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$



V Fonctions à valeurs complexes

1 Dérivée d'un fonction complexe

La dérivation des fonctions à valeurs complexes sera étudiée en détail au chapitre 10, mais nous allons ici en donner quelques propriétés dont nous aurons besoin, dans le chapitre suivant, pour le calcul de primitives et la résolution des équations différentielles.

Dans toute la suite, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{C}$ désigne une fonction définie sur I et à valeurs complexes c'est-à-dire une fonction qui, à tout réel $t \in I$, associe son image $f(t) \in \mathbb{C}$.

Notations Pour une telle fonction f, on définit alors les fonctions :

- **partie réelle de f**, notée $\operatorname{Re} f$, définie par $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \operatorname{Re}\big(f(t)\big) \end{array}$;
- **partie imaginaire de f**, notée $\operatorname{Im} f$, définie par $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \operatorname{Im}\big(f(t)\big) \end{array}$;
- **module de f**, notée $|f|$, définie par $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & |f(t)| \end{array}$;
- **conjuguée de f**, notée $\bar{f}$, définie par $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \overline{f(t)}. \end{array}$

En définissant les opérations comme pour les fonctions à valeurs réelles, on a :

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f \qquad \text{et} \qquad |f|^2 = (\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2 = f\,\bar{f}.$$

Définition 11

Une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est **dérivable** sur I si ses parties réelle et imaginaire sont dérivables sur I.

La **dérivée** de $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ est alors $f' = (\operatorname{Re} f)' + i\,(\operatorname{Im} f)'$.

Exemples

- Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors la fonction $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array}$ est dérivable.
- Toute fonction constante est dérivable, et sa dérivée est nulle.

p.231 **Exercice 25** Soit $f : I \mapsto \mathbb{C}$ dérivable. Montrer que $\bar{f}$ est dérivable.

2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 20

Soit f et g deux fonctions à valeurs complexes, définies et dérivables sur I ainsi que λ et μ deux complexes. Alors :

1. la fonction $\lambda\, f + \mu\, g$ est dérivable sur I et $(\lambda\, f + \mu\, g)' = \lambda\, f' + \mu\, g'$; cette propriété s'appelle **linéarité de la dérivation** ;
2. la fonction $f\,g$ est dérivable sur I et $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$.

Principe de démonstration. Regarder les parties réelles et imaginaires.

Démonstration page 231

Exemples

- Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable. On prouve aisément, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que la fonction f^n est dérivable sur I et que $(f^n)' = n\, f'\, f^{n-1}$.
- Considérons $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]} \in \mathbb{C}^{n+1}$. La fonction polynomiale $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, t^k \end{array}$

  est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est telle que : $\forall t \in \mathbb{R} \quad p'(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\, a_k\, t^{k-1}$.

Proposition 21

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I. Si g ne s'annule pas sur I, alors la fonction f/g est définie et dérivable sur I, et l'on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 232

Écrire f sous la forme $\dfrac{f}{g} = f \times \overline{g} \times \dfrac{1}{g\overline{g}}$ et remarquer que la fonction $g\overline{g}$ est à valeurs réelles.

Exemples

1. Soit f une fonction dérivable sur I, et qui ne s'annule pas sur I. Si $n \in \mathbb{Z}$, alors la fonction f^n est dérivable sur I est sa dérivée est $nf'f^{n-1}$. On a déjà vu cette propriété lorsque $n \in \mathbb{N}$, et on la justifie par passage à l'inverse lorsque $n \in \mathbb{Z}_-^*$.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et a un complexe *non réel*.

   La fonction $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & (t-a)^n \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_n'(t) = n\,(t-a)^{n-1}.$$

Proposition 22

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, soit f une fonction dérivable de I dans J, et g une fonction dérivable de J dans $\mathbb{C}$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f'.$$

Principe de démonstration. Appliquer la propriété correspondante aux parties réelle et imaginaire de la fonction g. Démonstration page 232

Attention Dans la proposition précédente, f est à valeurs réelles !

3 Caractérisation des fonctions constantes

Proposition 23

Soit f une fonction dérivable de l'intervalle I dans $\mathbb{C}$.

La fonction f est constante si, et seulement si : $\forall t \in I \quad f'(t) = 0$.

Principe de démonstration. Appliquer la propriété correspondante aux parties réelle et imaginaire de la fonction f. Démonstration page 232

4 Dérivées successives

Définition 12

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{C}$. On pose $f^{(0)} = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit, par récurrence, la fonction dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}$, comme la dérivée, si elle existe, de $f^{(n-1)}$ qui est la dérivée $(n-1)$-ième.

Remarque La fonction complexe f admet une dérivée n-ième sur I si, et seulement si, ses parties réelle et imaginaire admettent une dérivée n-ième sur l'intervalle I et alors :

$$\mathrm{Re}\left(f^{(n)}\right) = \left(\mathrm{Re}\, f\right)^{(n)} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(f^{(n)}\right) = \left(\mathrm{Im}\, f\right)^{(n)}.$$

Proposition 24

Soit f et g deux fonctions complexes n fois dérivables sur I. Si λ et μ sont deux complexes, alors $(\lambda f + \mu g)$ est n fois dérivable sur I, et l'on a :

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

Démonstration. Immédiat par récurrence. □

p.232 **Exercice 26** Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t-a} \end{array}.$

Pour $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de sa dérivée n-ième.

5 Dérivée de e^{φ}

Proposition 25

Soit φ une fonction dérivable de I dans $\mathbb{C}$.

Alors la fonction $e^{\varphi} : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{\varphi(t)} \end{array}$ est dérivable sur I, et $(e^{\varphi})' = \varphi' \, e^{\varphi}$.

Principe de démonstration. On ne peut pas ici appliquer la proposition 22 de la page ci-contre, il faut s'intéresser aux parties réelle et imaginaire de e^{φ}. Démonstration page 232

Exemple Si ρ et θ sont deux fonctions réelles dérivables sur I, alors la fonction f définie sur I par $f(t) = \rho(t)\, e^{i\theta(t)}$ est dérivable, et elle a pour dérivée :

$$f'(t) = \rho'(t)\, e^{i\theta(t)} + i\,\rho(t)\,\theta'(t)\, e^{i\theta(t)}.$$

Le calcul précédent permet, en physique ou en SI, d'obtenir les composantes du vecteur vitesse en coordonnées polaires.

Corollaire 26

Si $a \in \mathbb{C}$, la fonction $\varphi_a : t \mapsto e^{at}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\varphi_a' = a\,\varphi_a$.

p.232 **Exercice 27** Soit $r \in \mathbb{C}$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{r\,t}$.

Exprimer les dérivées successives de f.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 1 Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, la fonction $u_y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & \ln(xy) \end{array}$ est dérivable d'après les théorèmes généraux ; en dérivant comme une fonction composée, on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad u_y'(x) = \frac{y}{x\,y} = \frac{1}{x}\cdot$$

Les fonctions u_y et $\ln$ ayant même dérivée sur l'intervalle $]0,+\infty[$, leur différence $u_y - \ln$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme, $(u_y - \ln)(1) = \ln y$, on en déduit :

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad \ln(x\,y) = \ln x + \ln y.$$

Exercice 1 Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x),$$

et donc :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2}.$$

Remarque Dériver f comme la fonction composée de la fonction $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ et de la fonction logarithme aurait été bien moins efficace !

Exercice 2 La fonction $\ln$ étant strictement croissante, on a :

$$\ln a < \ln 1 = 0 \quad \text{si } a < 1 \qquad \text{et} \qquad \ln a > \ln 1 = 0 \quad \text{si } a > 1.$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\ln a^n = n \ln a$, on en déduit immédiatement :

- si $a < 1$ (et donc $\ln a < 0$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln a^n = -\infty$;
- si $a > 1$ (et donc $\ln a > 0$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln a^n = +\infty$;
- si $a = 1$, alors tous les termes sont nuls, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln a^n = 0$.

Proposition 4

- La fonction exponentielle est la réciproque de la fonction logarithme népérien qui est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Par suite, c'est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Elle est croissante et, comme son image est $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty.$$

- La fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée ne s'annule pas. Sa fonction réciproque, l'exponentielle, est donc dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$ avec :

$$\exp' x = \frac{1}{\ln'(\exp x)} = \exp x.$$

Proposition 5 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Posons $u = \exp x$ et $v = \exp y$. On a alors :

$$\exp(x+y) = \exp(\ln u + \ln v) = \exp\big(\ln(u\,v)\big) = u\,v = \exp x\,\exp y.$$

On en déduit $\exp(x-y)\exp y = \exp x$; comme $\exp y \neq 0$, on a donc :

$$\exp(x-y) = \frac{\exp x}{\exp y}\cdot$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a aussi :

$$\exp(n\,x) = \exp\big(n\,\ln u\big) = \exp\big(\ln(u^n)\big) = u^n = (\exp x)^n.$$

Exercice 3 Supposons que l'entier n s'écrive avec $p+1$ chiffres en base 10.

On a alors $n = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k\,10^k$ avec $a_p \in [\![1,9]\!]$ et $a_k \in [\![0,9]\!]$ pour tout $k \in [\![0,p-1]\!]$.

On en déduit alors :

$$10^p \leqslant a_p\,10^p \leqslant n \leqslant \sum_{k=0}^{p} 9\times 10^k = 9\,\frac{1-10^{p+1}}{1-10} = 10^{p+1}-1 < 10^{p+1}.$$

La stricte croissance de $\log$ nous donne alors $p \leqslant \log n < p+1$ et donc :

$$p = \lfloor \log n \rfloor \quad \text{ou encore} \quad p+1 = 1 + \lfloor \log n \rfloor = \lfloor 1 + \log n \rfloor.$$

Exercice 4

- Si $a > 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(a\,\ln x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}(a\,\ln x) = -\infty$. On en déduit alors :
  - $*$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp(a\,\ln x) = +\infty$, ce qui s'écrit aussi $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_a(x) = +\infty$.
  - $*$ $\lim\limits_{x\to 0}\exp(a\,\ln x) = 0$, ce qui s'écrit aussi $\lim\limits_{x\to 0}\varphi_a(x) = 0$.
- Si $a < 0$, on démontre de façon analogue :

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi_a(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\varphi_a(x) = +\infty.$$

- Si $a = 0$, alors $\varphi_a = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_a(x) = \lim\limits_{x\to 0}\varphi_a(x) = 1$.

Proposition 6 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$x^a\,y^a = \exp(a\,\ln x)\,\exp(a\,\ln y) = \exp\big(a\,(\ln x + \ln y)\big) = \exp\big(a\,\ln(x\,y)\big) = (x\,y)^a.$$

De même, si b est un réel, on a :

$$x^a\,x^b = \exp(a\,\ln x)\,\exp(b\,\ln x) = \exp\big((a+b)\,\ln x\big) = x^{a+b}.$$

Démonstrations analogues pour les autres relations.

Proposition 7 La fonction $\varphi_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(a\,\ln x) \end{array}$ est dérivable d'après les théorèmes généraux et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\varphi_a'(x) = \exp(a\,\ln x)\frac{a}{x} = a\,x^{a-1}$.

Par suite, on a $\varphi_a' = a\,\varphi_{a-1}$.

Exercice 5 Avec la définition donnée dans cet exemple, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, le réel $y = \sqrt[n]{x}$ est caractérisé par $y > 0$ et $y^n = x$.

On en déduit immédiatement $\ln y = \frac{1}{n} \ln x$ et donc :

$$y = \exp(\ln y) = \exp\left(\frac{1}{n} \ln x\right) = \varphi_{\frac{1}{n}}(x).$$

Ainsi, $\varphi_{1/n}$, qui est définie sur $\mathbb{R}_+$ après prolongement par continuité en 0, est :

- égale à $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ lorsque n est pair,
- la restriction à $\mathbb{R}_+$ de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ qui est définie sur $\mathbb{R}$ lorsque n est impair.

Exercice 6 Avant tout, il est indispensable d'écrire :

$$\forall x \in I \quad f(x) = \exp\big(v(x) \ln u(x)\big).$$

Par suite, f est dérivable d'après les théorèmes généraux, et la formule de dérivation d'une fonction composée donne alors :

$$\forall x \in I \quad f'(x) = f(x) \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right).$$

Exercice 7 La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^x = \exp(x \ln x) \end{array}$ est dérivable d'après les théorèmes généraux, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f'(x) = f(x)(1 + \ln x).$$

On en déduit le tableau de variations :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f	‖	$\searrow$	$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	

Proposition 8

- Commençons par prouver $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$.

  Pour $t \geqslant 1$, on a $t \geqslant \sqrt{t}$; pour $x \geqslant 1$, on en déduit :

$$0 \leqslant \ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{x} - 2 \leqslant 2\sqrt{x},$$

  et entraîne $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$.

- En remplaçant x par $1/x$ et en faisant tendre x vers 0, on a donc $\lim\limits_{x \to 0} (x \ln x) = 0$.

Exercice 8

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) = \exp(x \ln x)$.

   Comme $\lim\limits_{x \to 0} (x \ln x) = 0$, on en déduit (par composition) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

2. Pour connaître la tangente au point d'abscisse 0, étudions :
$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\exp(x\,\ln x)-1}{x}=\ln x\,\frac{\exp(x\,\ln x)-1}{x\,\ln x}\cdot$$
Comme le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 vaut 1, on a :
$$\lim_{u\to0}\frac{e^u-1}{u}=1\quad\text{et donc}\quad\lim_{x\to0}\frac{\exp(x\,\ln x)-1}{x\,\ln x}=1.$$
Par suite, le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ tend vers $-\infty$ en 0, et le graphe de f possède donc une tangente verticale en ce point.

Corollaire 9

- Pour a et b strictement positifs quelconques et $x>1$, on peut écrire :
$$\frac{(\ln x)^b}{x^a}=\left(\frac{\ln x}{x^{a/b}}\right)^b=\left(\frac{b}{a}\right)^b\left(\frac{\ln(x^{a/b})}{x^{a/b}}\right)^b.$$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{a}{b}}=+\infty$, on a :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{a/b})}{x^{a/b}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln(u)}{u}=0$$
et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^b}{x^a}=0$.
- En remplaçant x par $1/x$ et en faisant tendre x vers 0, on a donc :
$$\lim_{x\to0}\left(x^a|\ln x|^b\right)=0.$$

Exercice 9 Le corollaire précédent ne traite que des cas $a>0$ et $b>0$, car :
- on s'y ramène facilement par passage à l'inverse si $a<0$ et $b<0$,
- dans les autres cas, comme par exemple $a<0$ et $b>0$, les théorèmes généraux donnent directement la limite en 0 ou en $+\infty$.

Exercice 10 En utilisant les valeurs de la fonction tangente et la définition de la fonction Arctan, on obtient immédiatement :
$$\operatorname{Arctan}1=\frac{\pi}{4},\quad \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)=\frac{\pi}{6},\quad \operatorname{Arctan}\left(-\sqrt3\right)=-\frac{\pi}{3},$$
et $\operatorname{Arctan}(\tan\pi)=\operatorname{Arctan}0=0$.

Exercice 11
- Si $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, alors on a $\operatorname{Arctan}(\tan\alpha)=\alpha$ puisque l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut $\tan\alpha$ est évidemment α.
- Réciproquement, supposons $\alpha=\operatorname{Arctan}(\tan\alpha)$. Comme la fonction Arctan prend ses valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\cdot$

Exercice 12
- Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. On a alors :
  - $*$ d'une part, $\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\frac1x\right)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ car $\operatorname{Arctan}\frac1x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$,
  - $*$ d'autre part, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\frac1x\right)=\frac{1}{\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac1x\right)}=\frac{1}{1/x}=x$,

ce qui entraîne :

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \operatorname{Arctan} x.$$

- Comme les fonctions Arctan et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont impaires, la fonction :

$$x \mapsto \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x},$$

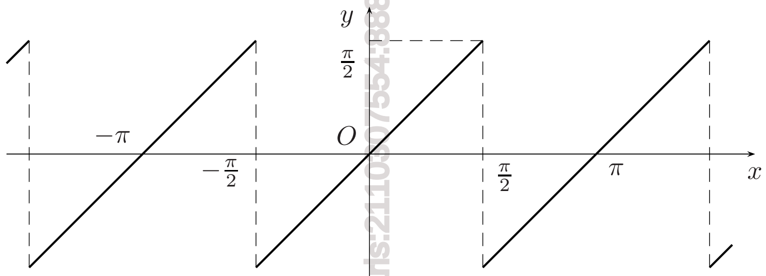
qui est définie sur $\mathbb{R}^*$, est impaire. Du premier point, on déduit alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}\cdot$$

Exercice 13

1. Comme la fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$, le réel $f(x)$ est défini dès que $\tan x$ est défini, c'est-à-dire pour $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$.
2. Comme la fonction tan est de période π, il en est de même de f. Par suite, son graphe est invariant par des translations de vecteur $k\,\pi\,\vec{\imath}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. Les fonction tan et Arctan étant impaires, il en est de même de f, leur composée. Ainsi, O est bien centre de symétrie de son graphe.
4. Par définition de la fonction Arctan, on a : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad f(x) = x$;

   il est alors facile de tracer le graphe de f.



Exercice 14

- Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant l'égalité $\dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$, on obtient :

$$\cos^2(\operatorname{Arctan} x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\operatorname{Arctan} x)} = \frac{1}{1+x^2}\cdot$$

- Comme $\operatorname{Arctan} x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on sait que son cosinus est positif, ce qui entraîne :

$$\cos(\operatorname{Arctan} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot$$

On en déduit :

$$\sin(\operatorname{Arctan} x) = \tan(\operatorname{Arctan} x)\,\cos(\operatorname{Arctan} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot$$

Proposition 13 La restriction à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction $\tan$ est dérivable et :

$$\forall x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\quad \tan' x = 1 + \tan^2 x \neq 0\cdot$$

Sa fonction réciproque Arctan est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et l'on a :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \operatorname{Arctan}' y = \frac{1}{1 + \tan^2(\operatorname{Arctan} y)} = \frac{1}{1 + y^2}\cdot$$

Exercice 15 La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \end{array}$ est dérivable d'après les théorèmes généraux, et pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 0.$$

Par suite, cette fonction est constante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = f(1) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad f(x) = f(-1) = -\frac{\pi}{2}\cdot$$

Exercice 16 Par définition de la fonction Arcsin, on a :

$$\operatorname{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}\cdot$$

$\operatorname{Arcsin} 2$ n'est évidemment pas défini. Enfin on a $\operatorname{Arcsin}(\sin \pi) = \operatorname{Arcsin} 0 = 0$.

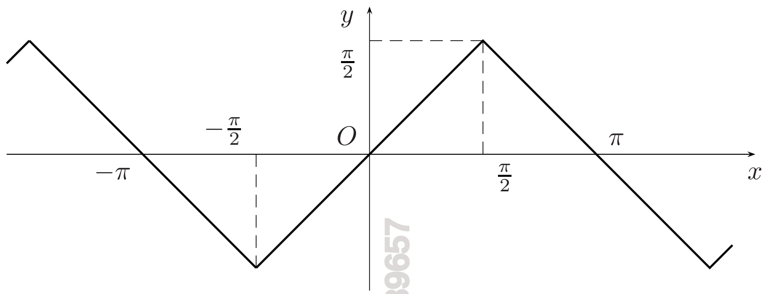
Exercice 17

- Si $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors on a $\operatorname{Arcsin}(\sin \alpha) = \alpha$ puisque l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont le sinus vaut $\sin \alpha$ est évidemment α.
- Réciproquement, supposons $\alpha = \operatorname{Arcsin}(\sin \alpha)$. Comme la fonction Arcsin est à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\cdot$

Exercice 18

1. Étant donné que $\sin$ prend ses valeurs dans $[-1, 1]$ et que la fonction Arcsin est définie sur cet intervalle, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est de période 2π puisque $\sin$ est aussi 2π-périodique. Par suite, son graphe Γ_f est invariant par des translations de vecteurs $2k\pi\vec{\imath}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et l'on peut limiter l'étude de f à un intervalle de longueur 2π.
3. Comme f est la composée de deux fonctions impaires, elle est impaire. Ainsi Γ_f est symétrique par rapport à O. On choisit donc, comme intervalle de longueur 2π, l'intervalle $]-\pi, \pi[$, que l'on restreint à $[0, \pi]$.
4. Comme : $\forall x \in [0, \pi] \quad f(x) = f(\pi - x)$, la courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$, et l'on peut limiter l'étude à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]\cdot$

Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $f(x) = x$, et il est alors aisé de tracer la courbe.



Exercice 19 On a $\operatorname{Arccos} 1 = 0$, $\operatorname{Arccos} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\,\pi}{6}$ et enfin :

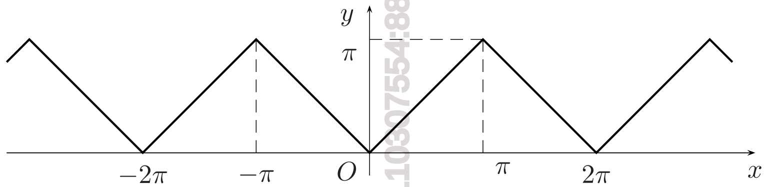
$$\operatorname{Arccos}(\cos 2\pi) = \operatorname{Arccos} 1 = 0.$$

Exercice 20 Soit $x \in [-1,1]$. Comme :

- d'une part $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x\right) = \sin\left(\operatorname{Arcsin} x\right) = x$,
- d'autre part $0 \leqslant \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x\right) \leqslant \pi$,

on en déduit $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos} x$, qui est une autre écriture du résultat à prouver.

Exercice 21 Dans ce cas, la fonction est 2π-périodique, paire et elle est égale à l'identité sur l'intervalle $[0,\pi]$. On obtient le graphe suivant :



Il est alors évident que $\forall x \in [-\pi,\pi] \quad \operatorname{Arccos}(\cos x) = |x|$.

Exercice 22

1. La représentation de ces deux graphes laisse penser qu'ils sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$; on le justifie à l'aide de la relation :

$$\forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \quad \sin x = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) \cdot$$

2. Par suite, les graphes des fonctions réciproques Arcsin et Arccos, symétriques des précédents par rapport à la première bissectrice, sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \frac{\pi}{4}\cdot$

   On en déduit $\forall x \in [-1,1] \quad \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \dfrac{\pi}{2}\cdot$

Exercice 23 Soit $x \in [-1,1]$. La relation $\cos^2 = 1 - \sin^2$ donne :

$$\cos^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1 - \sin^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1 - x^2.$$

Comme $\operatorname{Arcsin} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(\operatorname{Arcsin} x) \geqslant 0$ et donc $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Exercice 24 Soit $x \in [-1,1]$. La relation $\sin^2 = 1 - \cos^2$ donne :

$$\sin^2(\operatorname{Arccos} x) = 1 - \cos^2(\operatorname{Arccos} x) = 1 - x^2.$$

Comme $\operatorname{Arccos} \in [0,\pi]$, on a $\sin(\operatorname{Arccos} x) \geqslant 0$ et donc $\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$.

Remarque Des quantités telles que $\cos(\operatorname{Arcsin} x)$ ou $\sin(\operatorname{Arccos} x)$ doivent toujours être automatiquement simplifiées.

Proposition 16

- La restriction à $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ de la fonction $\sin$ est dérivable et :

$$\forall x \in [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}] \quad \sin'(x) = \cos x.$$

  Sa fonction réciproque Arcsin est donc dérivable en toute valeur $y = \sin x$ pour laquelle $\cos x \neq 0$, c'est-à-dire pour tout $y \in \,]-1,1[$, et l'on a :

$$\operatorname{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin} y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

- Démonstration similaire pour la seconde relation, mais on peut aussi utiliser la relation :

$$\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x.$$

Proposition 19

- La fonction tangente hyperbolique est le quotient d'une fonction impaire, sh, par une fonction paire, ch ; elle est donc impaire.
- En dérivant $\operatorname{th} = \operatorname{sh} \dfrac{1}{\operatorname{ch}}$ comme un produit, on trouve : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th}' x = 1 - \operatorname{th}^2 x$.

  En dérivant $\operatorname{th} = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$ comme un quotient, et en utilisant la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique, on trouve : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th}' x = \dfrac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

Exercice 25 Par définition de $\bar{f}$, on a $\operatorname{Re} \bar{f} = \operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} \bar{f} = -\operatorname{Im} f$.

Comme f est dérivable, on en déduit que $\operatorname{Re} \bar{f}$ et $\operatorname{Im} \bar{f}$ sont dérivables et donc que $\bar{f}$ est dérivable ; on en déduit aussi que $\left(\overline{f}\right)' = \overline{f'}$.

Proposition 20

1. Évident en revenant à la définition.
2. Si on pose $f_1 = \operatorname{Re} f$, $f_2 = \operatorname{Im} f$, $g_1 = \operatorname{Re} g$, $g_2 = \operatorname{Im} g$, on a

$$f\,g = (f_1\,g_1 - f_2\,g_2) + i\,(f_1\,g_2 + f_2\,g_1),$$

   ce qui prouve la dérivabilité de $f\,g$ en utilisant les propriétés des fonctions réelles.
   De plus :

$$\operatorname{Re}\big((f\,g)'\big) = (f_1'\,g_1 + f_1\,g_1' - f_2'\,g_2 - f_2\,g_2') = \operatorname{Re}(f'g + fg')$$

   et de même $\operatorname{Im}\big((f\,g)'\big) = \operatorname{Im}(f'g + fg')$. On a donc prouvé $(f\,g)' = f'g + fg'$.
3. Cas particulier du précédent, avec la fonction constante $g = \lambda$.

Proposition 21 On peut écrire $\dfrac{f}{g} = f \times \overline{g} \times \dfrac{1}{g\overline{g}}$.

La fonction $g\overline{g}$ est dérivable sur I en tant que produit de deux fonctions dérivables. Comme c'est une fonction réelle qui ne s'annule pas, son inverse est dérivable.

La fonction $h = \dfrac{f}{g} = f \times \overline{g} \times \dfrac{1}{g\overline{g}}$, étant alors produit de trois fonctions dérivables sur I, est donc dérivable sur I. On a alors $f = gh$ et donc $f' = g'\,h + g\,h'$, ce qui donne :

$$h' = \frac{f'}{g} - \frac{g'\,h}{g} = \frac{f'\,g - g'\,f}{g^2}.$$

Proposition 22 On a :

$$\operatorname{Re}(g \circ f) = (\operatorname{Re} g) \circ f \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(g \circ f) = (\operatorname{Im} g) \circ f$$

ce qui prouve le résultat en utilisant les résultats correspondants pour les fonctions réelles.

Proposition 23 La fonction f est constante si, et seulement si, ses parties réelle et imaginaire sont constantes. Comme ces deux fonctions à valeurs réelles sont définies sur un intervalle, elles sont constantes si, et seulement si, leurs dérivées sont nulles c'est-à-dire si, et seulement si, la dérivée de f est nulle.

Exercice 26 Avec l'hypothèse $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ la fonction f est bien définie sur tout $\mathbb{R}$ puisque $t \mapsto t - a$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En appliquant la règle de dérivation d'une puissance, on prouve par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{(t-a)^{n+1}}.$$

Proposition 25 Si $g = \operatorname{Re}\varphi$ et $h = \operatorname{Im}\varphi$, alors $\operatorname{Re}(e^{\varphi}) = e^g \cos h$ et $\operatorname{Im}(e^{\varphi}) = e^g \sin h$.

En utilisant les propriétés des fonctions dérivables à valeurs réelles, on obtient la dérivabilité de e^{φ} et :

$$\begin{aligned}
\big(e^{\varphi}\big)' &= (g'e^g \cos h - h'e^g \sin h) + i(g'e^g \sin h + h'e^g \cos h) \\
&= e^g\big((g' + ih')(\cos h + i \sin h)\big) \\
&= e^g\,\varphi'\,e^{ih} \\
&= \varphi'\,e^{\varphi}.
\end{aligned}$$

Exercice 27 En appliquant le résultat précédent, on trouve facilement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I \quad f^{(n)}(t) = r^n\,e^{r\,t}.$$

S'entraîner et approfondir

4.1 Simplifier les expressions suivantes :

1. $x^{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$
2. $\operatorname{Arccos}\left(\cos \dfrac{2\pi}{3}\right)$, $\quad \operatorname{Arccos}\left(-\cos \dfrac{2\pi}{3}\right)$, $\quad \operatorname{Arccos}(\cos 4\pi)$
3. $\tan(\operatorname{Arcsin} x)$
4. $\cos(5 \operatorname{Arctan} x)$, $\sin(4 \operatorname{Arctan} x)$ et $\tan(6 \operatorname{Arctan} x)$
5. $\dfrac{\operatorname{ch}(\ln x) + \operatorname{sh}(\ln x)}{x}$

4.2 Résoudre le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ \ln x - \ln y = \ln 2 \end{cases}$.

4.3 Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln|x| + \ln|x+1| = 0$;
2. $2\sin 2x - \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)(\cos x - \sin x) = 2 + \sqrt{3}$;
3. $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4}\cdot$

4.4 Courbes représentatives des fonctions définie par les relations suivantes :

1. $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$;
2. $f(x) = \operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$;
3. $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right)$;
4. $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) + \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)\cdot$

4.5 Établir $\dfrac{\pi}{4} = 5 \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{7} + 2 \operatorname{Arctan} \dfrac{3}{79}\cdot$

⋆ **4.6** Que pensez vous de la relation $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \dfrac{x+y}{1-xy}$?

4.7 Résoudre les équations

1. $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(x+1) = \pi/2$;
2. $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = 2\operatorname{Arctan} x$.

4.8 Simplifier : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(x+k\,y)$ et $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(x+k\,y)$.

⋆ **4.9** Étant donné a, b et c des paramètres réels, résoudre l'équation :

$$a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$$

4.10 Simplifier :

1. $\ln\sqrt{\dfrac{1+\tanh x}{1-\tanh x}}$;
2. $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(x+k\,y)$ et $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(x+k\,y)$.

⋆ **4.11** Étant donné a, b et c des paramètres réels, résoudre l'équation :

$$a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$$

4.12 Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ il existe un unique $y \in [0, \pi/2[$ tel que

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos y}$$

Vérifier alors $\operatorname{sh} x = \tan y$ et $\tanh(\frac{x}{2}) = \tan(y/2)$.

Solution des exercices

4.1 1. La quantité donnée est définie par : $x^{u(x)} = e^{u(x)\ \ln x}$. Or :

- la définition de $\ln x$ exige $x > 0$;
- la définition de $\ln(\ln x)$ exige $\ln x > 0$ et donc $x > 1$; pour ces valeurs de x, la quantité $\ln x$ est différente de 0 et le quotient $\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$ est donc défini.

Par suite la quantité donnée est définie pour $x \in]1, +\infty[$, et alors :

$$x^{u(x)} = e^{u(x)\ \ln x} = e^{\ln(\ln x)} = \ln x.$$

Ainsi on a :

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad x^{u(x)} = \ln x.$$

2. On trouve : $\operatorname{Arccos}\Big(\cos\dfrac{2\,\pi}{3}\Big) = \dfrac{2\,\pi}{3}$ et $\operatorname{Arccos}\Big(-\cos\dfrac{2\,\pi}{3}\Big) = \dfrac{\pi}{3}$ ainsi que :

$$\operatorname{Arccos}(\cos 4\pi) = 0.$$

3. Cette quantité est définie dès que :

- $\operatorname{Arcsin} x$ est défini c'est-à-dire pour $x \in [-1, 1]$,
- et que $\operatorname{Arcsin} x \neq \pm\frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Elle est donc définie pour $x \in]-1, 1[$, et l'on a alors :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \tan(\operatorname{Arcsin} x) = \frac{\sin(\operatorname{Arcsin} x)}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\cdot$$

4. • La fonction $x \mapsto \cos(5\operatorname{Arctan} x)$ est évidemment définie sur $\mathbb{R}$.
Pour $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\cos 5u &= \operatorname{Re}(\cos u + i\sin u)^5\\ &= \cos^5 u - 10\cos^3 u\ \sin^2 u + 5\cos u\ \sin^4 u\\ &= \cos^5 u\Big(1 - 10\ \tan^2 u + 5\ \tan^4 u\Big).\end{aligned}$$

En remplaçant u par $\operatorname{Arctan} x$, et en utilisant :

$$\cos(\operatorname{Arctan} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\quad \text{ainsi que}\quad \tan(\operatorname{Arctan} x) = x$$

on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}\quad \cos(5\operatorname{Arctan} x) = \frac{1 - 10\,x^2 + 5\,x^4}{(1 + x^2)^{5/2}}\cdot$$

• La fonction $x \mapsto \sin(4\operatorname{Arctan} x)$ est évidemment définie sur $\mathbb{R}$, et pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(4\operatorname{Arctan} x) = 2\ \sin(2\operatorname{Arctan} x)\ \cos(2\operatorname{Arctan} x)\ \ ;$$

en utilisant alors les formules donnant le sin et le cos en fonction de la tangente de l'arc moitié on obtient :

$$\sin(4\operatorname{Arctan} x) = 2\,\frac{2\,x}{1 + x^2}\,\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\cdot$$

Donc :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(4\operatorname{Arctan} x) = \frac{-4\,x\left(x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^2}\cdot$$

- La quantité $\operatorname{Arctan} x$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ mais $\tan(6\operatorname{Arctan} x)$ n'est définie que lorsque $6\operatorname{Arctan} x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ou encore $\operatorname{Arctan} x \neq \frac{\pi}{12}\ \left[\frac{\pi}{6}\right]\cdot$
  Pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right[$ on a $\tan 6\theta = \frac{\sin 6\theta}{\cos 6\theta}$ et, en exprimant $\sin 6\theta$ et $\cos 6\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$, pour tout réel $x \in \left]-\tan\frac{\pi}{12}, \tan\frac{\pi}{12}\right[$, on obtient :
$$\tan(6\operatorname{Arctan} x) = -2\,\frac{x\left(3-10\,x^2+3\,x^4\right)}{-1+15\,x^2-15\,x^4+x^6}\cdot$$

5. Cette expression est définie pour $x > 0$ et alors :
$$\frac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x} = \frac{\exp(\ln x)}{x} = 1.$$

4.2 L'ensemble de définition de ce système est $\left\{(x,y) \mid x>0 \text{ et } y>0\right\}$.

- Condition nécessaire : la seconde équation entraîne $x/y = 2$.
  En reportant dans la première, on trouve $3\,y^2 = 12$ et donc $y = 2$ (car $y > 0$), on en déduit $x = 4$.
- Réciproquement, le couple $(4,2)$ est évidemment solution.

4.3 1. L'ensemble de définition de cette équation $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.
Sur cet ensemble, elle est équivalente à : $|x|\,|x+1| = 1$, soit encore a :
$$x\,(x+1) = 1 \quad \text{ou} \quad x\,(x+1) = -1.$$

- La seconde équation n'a aucune racine réelle.
- La première équation a pour racines $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ qui sont bien dans l'ensemble de définition et qui sont donc les racines de l'équation donnée.

2. Comme pour tout x réel, on a :
$$\sin 2\,x = 2\,\sin x\,\cos x = -(\cos x - \sin x)^2 + 1,$$
le réel x est solution de l'équation donné si, et seulement si, le réel $u = (\cos x - \sin x)$ est solution de l'équation :
$$2\,u^2 + \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)u + \sqrt{3} = 0.$$
Comme cette dernière équation a pour racines $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\sqrt{\frac{3}{2}}$, on en déduit que x est solution de l'équation donnée si, et seulement si :
$$\cos - \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad \cos - \sin x = -\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot$$
Comme $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, la condition précédente s'écrit encore :
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\,\pi}{3}\right) \quad \text{ou} \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{5\,\pi}{6}\right)\cdot$$

En résolvant ces équations trigonométriques, on trouve que l'ensemble des solutions de l'équation donnée dans $[0, 2\pi]$ est :

$$S = \left\{ \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12} \right\}.$$

3. L'équation $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4}$ est définie sur $[-1, 1]$ et, sur cet intervalle, l'application :

$$u : x \mapsto \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} \frac{x}{2}$$

est continue, strictement croissant (somme de deux fonctions strictement croissantes) ; elle réalise donc une bijection $[-1, 1]$ sur $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$.

Par suite, l'équation proposée possède une unique solution, qui est d'ailleurs positive puisque $u(0) = 0 < \frac{\pi}{4}$.

Supposons x solution (donc positive) de l'équation donnée. Alors, on a :

$$\sin\left(\operatorname{Arcsin} \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{Arcsin} x\right)$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin \operatorname{Arcsin} x - \cos \operatorname{Arcsin} x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right)$$

ou encore :

$$\sqrt{1-x^2} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x.$$

En élevant au carré on en déduit $x = \pm\sqrt{\frac{2}{5+2\sqrt{2}}}$ et, comme $x \geqslant 0$ on a

$$x = \sqrt{\frac{2}{5+2\sqrt{2}}}\,.$$

Remarque : il est inutile de faire une réciproque puisque l'on a, dès le début, prouvé que l'équation possédait une racine unique.

4.4 1. • **Méthode de simplification directe**

Étant donné que $1+x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et que $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leqslant 1$, cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est paire ; donc on peut en restreindre l'étude à $\mathbb{R}_+$.

En posant $x = \tan t$ avec $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ou, ce qui est équivalent, $t = \operatorname{Arctan} x$ on obtient :

$$f(\tan t) = \operatorname{Arccos}(\cos 2\,t)\,.$$

Pour $x \geqslant 0$ on a alors $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et donc $2t \in]0, \pi[$; on en déduit $f(\tan t) = 2\,t$, ce qui entraîne :

$$f(x) = 2\operatorname{Arctan} x.$$

Par parité, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2\operatorname{Arctan}|x|\,.$$

• **Méthode utilisant la dérivée**

Étant donné que $1+x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et que $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leqslant 1$ cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable pour $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \neq 1$ c'est-à-dire pour $x \neq 0$.

Elle est paire, et on peut donc en restreindre l'étude à $\mathbb{R}_+$.

Pour $x > 0$ on a :

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \frac{-4\,x}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{|x|} \frac{2\,x}{1+x^2} = \frac{2\,x}{1+x^2}.$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto f(x) - 2\,\mathrm{Arctan}\,x$, est est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, et sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$; on en déduit qu'elle est constante sur $\mathbb{R}_+$. Comme elle est nulle en 0, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\,x.$$

Par parité, on obtient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\,|x|\,.$$

2. • La fonction est définie pour $\cos x \neq -1$ car alors $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \geqslant 0$.
   • Elle est continue sur son ensemble de définition d'après les théorèmes généraux.
   • Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\lim\limits_{x \to (2k+1)\,\pi} f(x) = \lim\limits_{u \to +\infty} \mathrm{Arctan}\,u = \frac{\pi}{2}$, et on peut donc la prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $f\big((2k+1)\,\pi\big) = \frac{\pi}{2}\cdot$
   • La fonction f est périodique de période $2\,\pi$ et paire ; on peut donc en restreindre l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.
   • Pour tout $x \not\equiv 0\ [\pi]$, on a :

$$f(\pi - x) = \mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \frac{\pi}{2} - f(x)$$

   car pour $u > 0$, on a $\mathrm{Arctan}\,u + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{u} = \frac{\pi}{2}\cdot$

   Comme on peut vérifier directement que cette relation reste vraie pour les autres valeurs de x, on pourra donc limiter l'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$ puis compléter le graphe par une symétrie par rapport au point $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)\cdot$

Méthode de simplification directe Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$f(x) = \mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \mathrm{Arctan}\left(\tan \frac{x}{2}\right) \quad \text{car } \tan \frac{x}{2} \geqslant 0$$

Comme $\frac{x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit $f(x) = \dfrac{x}{2}\cdot$

Méthode utilisant la dérivée D'après les théorèmes généraux, la fonction f est dérivable en tout réel x tel que $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} > 0$ ou encore tel que $\cos x \neq 1$.

Elle est donc dérivable au moins sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \frac{2\,\sin x}{(1+\cos x)^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\sqrt{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \frac{\sin x}{2\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{1}{2} \qquad \text{car } \sin x > 0. \end{aligned}$$

Comme la fonction $x \mapsto f(x) - \frac{x}{2}$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$, elle y est constante. Par continuité, elle est constante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Avec $f(0) = 0$, on a :

$$\forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \quad f(x) = \tfrac{x}{2}\cdot$$

On complète alors le graphe à l'aide des symétries trouvées au début.

3. La fonction est définie sur :
$$D =]-\infty, -1-\sqrt{2}[\cup]-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}[\cup]-1+\sqrt{2}, +\infty[.$$
Sur chacun des intervalles précédents, la fonction est dérivable et :
$$\forall x \in D \quad f'(x) = \frac{2}{1+x^2}\cdot$$
Sur chaque intervalle, la fonction $x \mapsto f(x) - 2 \operatorname{Arctan} x$ est donc constante et :

   - pour $x \in]-\infty, -1-\sqrt{2}[$, en utilisant la limite en $-\infty$, on trouve :
$$f(x) = 2 \operatorname{Arctan} x + \frac{5\pi}{4}\,;$$
   - pour $x \in]-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}[$, en utilisant la valeur en 0 on trouve :
$$f(x) = 2 \operatorname{Arctan} x + \frac{\pi}{4}\,;$$
   - pour $x \in]-1+\sqrt{2}, +\infty[$, en utilisant la limite en $+\infty$, on trouve :
$$f(x) = 2 \operatorname{Arctan} x - \frac{3\pi}{4}\cdot$$

4. Comme, pour x réel, on a :
$$-1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \frac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1$$
la fonction est définie sur tout $\mathbb{R}$; de plus elle est dérivable en tout réel x vérifiant :
$$-1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1 \quad \text{et} \quad -1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} < 1$$
c'est-à-dire pour $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Après simplifications, on trouve :

$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x$
$f'(x) = -\frac{4}{x^2+1}$	$f'(x) = 0$	$f'(x) = \frac{4}{x^2+1}$	$f'(x) = 0$

Donc :
   - avec la limite en $-\infty$, on trouve $\forall x \in]-\infty, -1] \quad f(x) = -4 \operatorname{Arctan} x - \pi$;
   - avec la valeur en 0, on trouve $\forall x \in [-1, 0] \quad f(x) = 0$;
   - avec la valeur en 0, on trouve $\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = 4 \operatorname{Arctan} x$;
   - avec la limite en $+\infty$, on trouve $\forall x \in [1, +\infty[\quad f(x) = \pi$.

4.5 • Commençons par prouver $\tan\left(5 \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{Arctan} \frac{3}{79}\right) = 1\cdot$

La formule de Moivre permet d'obtenir :
$$\tan 5t = \frac{\sin 5t}{\cos 5t} = \frac{5 \tan t - 10 \tan t^3 + \tan t^5}{1 - 10 \tan t^2 + 5 \tan t^4}$$
En remplaçant t par $\operatorname{Arctan}(1/7)$, on obtient $\tan(5 \operatorname{Arctan} \frac{1}{7}) = \frac{2879}{3353}\cdot$
On trouve de même $\tan(2 \operatorname{Arctan} \frac{3}{79}) = \frac{237}{3116}$ et donc :
$$\tan\left(5 \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{Arctan} \frac{3}{79}\right) = \frac{\frac{2879}{3353} + \frac{237}{3116}}{1 - \frac{2879}{3353}\frac{237}{3116}} = 1.$$

- Vérifions maintenant $0 < 5\operatorname{Arctan}\frac{1}{7} + 2\operatorname{Arctan}\frac{3}{79} < \frac{3\pi}{4}\cdot$

  C'est une conséquence de :

$$0 \leqslant \operatorname{Arctan}\frac{3}{79} \leqslant \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} \leqslant \operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

  et de :

$$0 \leqslant 5\operatorname{Arctan}\frac{1}{7} + 2\operatorname{Arctan}\frac{3}{79} \leqslant \frac{7\pi}{6} < \frac{3\pi}{4}\cdot$$

On en déduit alors l'égalité demandée.

4.6 Cette relation ne peut avoir de sens que si $x\,y \neq 1$.
Sous cette condition, on a $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y \neq \frac{\pi}{2}$ et :

$$\tan(\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y) = \frac{x+y}{1-x\,y}\cdot \qquad (a)$$

- Si $|x| < 1$ et $|y| < 1$, alors :

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y < \frac{\pi}{2}$$

  et cet encadrement ainsi que (a) montrent que l'égalité proposée est vraie.
- Si $x = 0$ ou $y = 0$ l'égalité proposée est évidemment vraie.
- Supposons $x \neq 0$ et, par exemple, $x > 0$.
  - si $y \leqslant 0$, alors les relations :

$$0 < \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan} y \leqslant 0$$

    entraînent :

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y < \frac{\pi}{2}$$

    et (a) permet alors de conclure l'égalité proposée est vraie.
  - si $y > 0$, alors on a :

$$0 \leqslant \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y$$

    et la relation donnée est vraie si, et seulement si :

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y < \frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

    soit encore :

$$\operatorname{Arctan} y < \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x. \qquad (b)$$

    Étant donné que la fonction $\tan$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, et que :

$$0 \leqslant \operatorname{Arctan} y < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{2}$$

    la relation (b) est équivalente à :

$$y < \tan\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right) = \frac{1}{\tan(\operatorname{Arctan} x)} = \frac{1}{x}\cdot$$

Pour $x > 0$, la relation donnée est donc vraie si, et seulement si, $x\,y < 1$.

- Supposons $x < 0$. La relation :

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \frac{x+y}{1-x\,y}$$

est vraie si, et seulement si :

$$\operatorname{Arctan}(-x) + \operatorname{Arctan}(-y) = \operatorname{Arctan} \frac{(-x)+(-y)}{1-(-x)(-y)}$$

c'est-à-dire si, et seulement si :

$$(-x)(-y) = x\,y < 1.$$

En conclusion la relation proposée est vraie si, et seulement si, $x\,y < 1$.

Si $x\,y > 1$, on peut prouver

- si $x > 0$ (et $y > 0$) alors $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \pi + \operatorname{Arctan} \dfrac{x+y}{1-x\,y}$,
- si $x < 0$ (et $y < 0$) alors $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = -\pi + \operatorname{Arctan} \dfrac{x+y}{1-x\,y}$.

4.7 1. • Prouvons que l'équation possède une unique solution. La fonction :

$$u : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(x+1)$$

est continue et strictement croissante (somme de trois applications strictement croissantes) et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim\limits_{-\infty} u, \lim\limits_{+\infty} u[\; = \;]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

L'équation donnée possède donc une unique racine.
On peut même préciser que cette racine est positive car $u(0) = 0$.

• Déterminons cette racine. L'équation donnée s'écrit encore

$$\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x.$$

Soit x une solution de cette équation. On a :

$$0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x < \pi$$

et comme 0 n'est évidemment pas solution, on peut appliquer la fonction tangente à chacun des membres, ce qui donne :

$$\tan\big(\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1)\big) = \tan(\pi/2 - \operatorname{Arctan} x) = \frac{1}{x}$$

soit encore $\frac{2\,x}{2-x^2} = \frac{1}{x}$ et donc $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Comme la racine cherchée est positive, on en déduit $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$; il est inutile de faire une réciproque puisque l'on a prouvé que l'équation donnée possède une unique racine.

2. L'ensemble de définition de l'équation est évidemment $\mathbb{R}$.
   - Comme :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \leqslant \frac{\pi}{2},$$
   toute solution x de l'équation donnée doit vérifier :
   $$-\frac{\pi}{2} \leqslant 2 \operatorname{Arctan} x \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{et donc} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$
   - Réciproquement, soit $x \in [-1,1]$ et $t = \operatorname{Arctan} x$. Alors $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ et :
   $$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2\,x}{1+x^2}\right) &= \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2\,\tan t}{1+\tan^2 t}\right) = \operatorname{Arcsin}(\sin 2t) \\ &= 2\,t \qquad\qquad \text{car } 2\,t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ &= 2\,\operatorname{Arctan} x. \end{aligned}$$

   L'ensemble solution de l'équation est donc le segment $[-1,1]$.

4.8 Pour $y \neq 0$, on a :
$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{k=0}^{n} \exp(x+k\,y) = \exp x \left(\sum_{k=0}^{n} \exp k\,y\right) = (\exp x)\left(\frac{1-\exp(n+1)y}{1-\exp y}\right) \\ &= \exp x\ \exp(\tfrac{n+1}{2}y)\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)\,y}{2}}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}\right) = \exp\left(x+\tfrac{n+1}{2}y\right)\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)\,y}{2}}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}\right). \end{aligned}$$

En prenant les parties impaire et paire, on trouve :
$$S_n = \operatorname{sh}\left(x+\tfrac{n+1}{2}y\right)\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)\,y}{2}}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}\right) \quad \text{et} \quad C_n = \operatorname{ch}\left(x+\tfrac{n+1}{2}y\right)\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)\,y}{2}}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}\right).$$
Pour $y=0$, on a $S_n = 0$ et $C_n = n+1$.

4.9 Si $a=b=0$, l'équation n'est guère intéressante. Supposons donc $(a,b) \neq (0,0)$.
En utilisant l'exponentielle, l'équation donnée est équivalente à :
$$(a+b)\,e^{2\,x} - 2\,c\,e^{x} + (a-b) = 0.$$

- Si $a+b=0$, elle s'écrit :
$$-2\,c\,e^{x} + (a-b) = 0$$
et possède donc une racine (qui est alors unique) si, et seulement si, $c\,(a-b) > 0$.
- Si $a+b \neq 0$, il s'agit de discuter du nombre de racines positives de l'équation du second degré :
$$(a+b)\,u^2 - 2\,c\,u + (a-b) = 0. \qquad (a)$$
Pour cela on utilise :
  * le discriminant de cette équation qui est $\Delta = 4\,(c^2+b^2-a^2)$,
  * le produit de ses racines qui est du signe de a^2-b^2,
  * la somme de ses racines qui est du signe de $c\,(a+b)$.

On en déduit :

* Si $c^2+b^2-a^2<0$ l'équation (a) ne possède aucune racine réelle ; il en est de même de l'équation donnée.
* Si $c^2+b^2-a^2>0$ l'équation (a) possède deux racines réelles ;
  * si $a^2-b^2<0$, l'une de ces racines est strictement négative et l'autre est strictement positive ; par suite l'équation donnée possède une racine unique ;
  * si $a^2-b^2>0$, les deux racines ont le même signe ;
    * si $c\,(a+b)>0$ leur somme est positive et les deux racines sont strictement positives ; par suite l'équation donnée possède deux racines ;
    * si $c\,(a+b)<0$ leur somme est négative et les deux racines sont strictement négatives ; par suite l'équation donnée ne possède aucune racine.
  * si $a^2-b^2=0$ l'une des racines est nulle, et l'équation donnée possède une racine si, et seulement si, la somme $c\,(a+b)$ est strictement positive.

4.10 1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la quantité $\dfrac{1+\tanh x}{1-\tanh x}$ est définie et positive. De plus on a :

$$\ln\sqrt{\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}}=\ln\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x}}=\ln e^{2x}=2\,x.$$

2. Pour $y\neq 0$, on a :

$$E_n=\sum_{k=0}^{n}\exp(x+k\,y)=\exp x\left(\sum_{k=0}^{n}\exp k\,y\right)=(\exp x)\left(\frac{1-\exp(n+1)y}{1-\exp y}\right)$$

$$=\exp x\,\exp(\tfrac{n+1}{2}y)\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)\,y}{2}}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}\right)=\exp\left(x+\tfrac{n+1}{2}y\right)\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)\,y}{2}}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}\right).$$

En prenant les parties impaire et paire, on trouve :

$$S_n=\operatorname{sh}\left(x+\tfrac{n+1}{2}y\right)\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)\,y}{2}}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}\right)\quad\text{et}\quad C_n=\operatorname{ch}\left(x+\tfrac{n+1}{2}y\right)\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)\,y}{2}}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}\right).$$

Pour $y=0$, on a $S_n=0$ et $C_n=n+1$.

4.11 Si $a=b=0$, l'équation n'est guère intéressante. Supposons donc $(a,b)\neq(0,0)$.
En utilisant l'exponentielle, l'équation donnée est équivalente à :

$$(a+b)\,e^{2\,x}-2\,c\,e^{x}+(a-b)=0.$$

* Si $a+b=0$, elle s'écrit :
$$-2\,c\,e^{x}+(a-b)=0$$
et possède donc une racine (qui est alors unique) si, et seulement si, $c\,(a-b)>0$.
* Si $a+b\neq 0$, il s'agit de discuter du nombre de racines positives de l'équation du second degré :
$$(a+b)\,u^2-2\,c\,u+(a-b)=0. \qquad (a)$$
Pour cela on utilise :
  * le discriminant de cette équation qui est $\Delta=4\,(c^2+b^2-a^2)$,

* le produit de ses racines qui est du signe de $a^2 - b^2$,
* la somme de ses racines qui est du signe de $c\,(a+b)$.

On en déduit :

* Si $c^2 + b^2 - a^2 < 0$ l'équation (a) ne possède aucune racine réelle ; il en est de même de l'équation donnée.
* Si $c^2 + b^2 - a^2 > 0$ l'équation (a) possède deux racines réelles ;
  - ⋆ si $a^2 - b^2 < 0$, l'une de ces racines est strictement négative et l'autre est strictement positive ; par suite l'équation donnée possède une racine unique ;
  - ⋆ si $a^2 - b^2 > 0$, les deux racines ont le même signe ;
    * si $c\,(a+b) > 0$ leur somme est positive et les deux racines sont strictement positives ; par suite l'équation donnée possède deux racines ;
    * si $c\,(a+b) < 0$ leur somme est négative et les deux racines sont strictement négatives ; par suite l'équation donnée ne possède aucune racine.
  - ⋆ si $a^2 - b^2 = 0$ l'une des racine est nulle, et l'équation donnée possède une racine si, et seulement si, la somme $c\,(a+b)$ est strictement positive.

4.12 • Comme $\operatorname{ch} x \geqslant 1$, on a $0 < \frac{1}{\operatorname{ch} x} \leqslant 1$;

par suite, il existe donc un unique $y \in [0, \pi/2[$ tel que $\cos y = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\cdot$

• Comme $x \geqslant 0$, on a $\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 y} - 1} = \sqrt{\tan^2 y}$.

Étant donné que $y \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\tan y \geqslant 0$ et donc $\sqrt{\tan^2 y} = \tan y$.

• On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{y}{2}\right) &= \frac{1-\cos y}{\sin y} = \frac{\frac{1}{\cos y} - 1}{\tan y} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{e^x - e^{-x}} \\ &= \frac{(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2}{(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})} = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} = \tanh\frac{x}{2}\cdot\end{aligned}$$

Chapitre 5 : Primitives et équations différentielles linéaires

I Primitives **246**

1 Généralités 246

2 Existence de primitives 253

3 Recherche de primitives et calcul d'intégrales . . . 254

II Équations différentielles linéaires du premier ordre **259**

1 Structure de l'ensemble des solutions 260

2 Résolution 261

3 Illustration en sciences physiques et industrielles . 265

III Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants **268**

1 Structure de l'ensemble des solutions 268

2 Résolution de l'équation homogène 269

3 Solution particulière 270

4 Existence de solutions. Problème de Cauchy 271

5 Illustration en sciences physiques et industrielles . 272

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . **274**

Exercices **291**

Primitives et équations différentielles linéaires

5

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, c'est-à-dire contenant au moins deux points. Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des nombres réels ou celui des nombres complexes.

I Primitives

1 Généralités

Définition 1

Soit f une fonction définie sur I. On appelle primitive de f sur I toute fonction dérivable sur I et dont la dérivée est égale à f.

Remarque La définition concernant la dérivée d'une fonction à valeurs complexes implique que, si F_1 est une primitive de $\operatorname{Re} f$ et si F_2 est une primitive de $\operatorname{Im} f$, alors $F_1 + iF_2$ est une primitive de f. Pour trouver une primitive d'une fonction à valeurs complexes, il suffit donc de trouver une primitive de sa partie réelle et une primitive de sa partie imaginaire.

Proposition 1

Soit f une fonction définie sur I. Si F est une primitive de f sur I, alors l'ensemble des primitives de f est :

$$\{F + C\,;\ C \in \mathbb{K}\}$$

c'est-à-dire qu'une fonction G est une primitive de f si, et seulement si :

$$\exists C \in \mathbb{K} \quad \forall x \in I \quad G(x) = F(x) + C.$$

Principe de démonstration. Utiliser le corollaire 14 de la page 45.

Démonstration page 274

Point méthode

Pour déterminer les primitives d'une fonction, il suffit donc d'en déterminer une. Toutes les autres s'en déduisent à une constante additive près.

Remarque Par la suite, lorsque l'on cherchera l'ensemble des primitives d'une fonction f définie sur l'intervalle I, on se contentera d'en donner une.

Exemple La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto x$ donc les primitives sur $\mathbb{R}$ de f sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{2} + C \end{array} \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$

p.274

Exercice 1 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $b \in \mathbb{R}$. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x+b). \end{array}$

2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(ax). \end{array}$

Point méthode

D'après l'exercice précédent, si une fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et si $a \neq 0$, alors, la fonction $g : \begin{array}{rcl} J & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(ax+b) \end{array}$ admet pour primitive la fonction $G : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{a}F(ax+b). \end{array}$

Les résultats obtenus dans le chapitre 1. sur la dérivation permettent d'obtenir les primitives usuelles du tableau ci-dessous.

f	Une primitive de f	Intervalle
$x \mapsto x^n \,;\, n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n} \,;\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$x \mapsto \dfrac{1}{(-n+1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\|x\|$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto x^\alpha \;;\; \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto x\ln x - x$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \operatorname{ch} x$	$x \mapsto \operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \operatorname{sh} x$	$x \mapsto \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto -\ln\|\cos x\|$	$\left]\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\;;\; k \in \mathbb{Z}$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$	$]-1, 1[$
$x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \operatorname{Arccos} x$	$]-1, 1[$
$x \mapsto e^{\lambda x} \,;\, \lambda \in \mathbb{C}^*$	$x \mapsto \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}$	$\mathbb{R}$

Point méthode

Les résultats de ce tableau sont à connaître mais, en cas de doute, il est facile de les vérifier car ils découlent de ceux connus sur la dérivation.

Remarque Même si l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ dépend de la valeur de α, on peut toujours chercher une primitive de la forme $x \mapsto Cx^{\alpha+1}$. Á l'exception du cas où $\alpha = -1$, on obtiendra comme primitive la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. Pour $\alpha = -1$, une primitive est $x \mapsto \ln x$.

p.274 **Exercice 2** Déterminer les primitives sur $\left]-\frac{2}{3},+\infty\right[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3x+2}}$.

Exemple Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminons les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto e^{\lambda x}\cos x$.

- Une première méthode consiste à remarquer que f est la partie réelle de la fonction $x \mapsto e^{(i+\lambda)x}$. On en déduit qu'une primitive de f est donnée par :
$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Re}\left(\dfrac{e^{(i+\lambda)x}}{i+\lambda}\right) = \operatorname{Re}\left(\dfrac{(\lambda-i)e^{(i+\lambda)x}}{1+\lambda^2}\right) \end{array}$$
c'est-à-dire :
$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(\dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}\cos x + \dfrac{1}{1+\lambda^2}\sin x\right)e^{\lambda x}. \end{array}$$

- La méthode précédente prouve que l'on aurait pu chercher une primitive de f « du même type » que f, c'est-à-dire sous la forme :
$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (A\cos x + B\sin x)\,e^{\lambda x} \end{array} \qquad \text{avec} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$
Comme la dérivée de cette fonction est donnée par :
$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (-A\sin x + B\cos x)\,e^{\lambda x} + \lambda\,(A\cos x + B\sin x)\,e^{\lambda x}, \end{array}$$
il suffit que le couple (A,B) vérifie le système suivant :
$$\begin{cases} \lambda A + B = 1 \\ -A + \lambda B = 0\,. \end{cases}$$
Si ce système admet une solution alors $A = \lambda B$ et $\lambda^2 B + B = 1$ donc
$$(A,B) = \left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}, \frac{1}{1+\lambda^2}\right).$$
Réciproquement, on vérifie que ce couple est solution. On retrouve qu'une primitive de f est donnée par :
$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(\dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}\cos x + \dfrac{1}{1+\lambda^2}\sin x\right)e^{\lambda x}. \end{array}$$

Le résultat suivant permet d'obtenir les primitives des fonctions que l'on peut décomposer comme combinaison linéaire de fonctions usuelles.

Proposition 2

Soit f et g deux fonctions continues sur I et F (respectivement G) une primitive de f (respectivement de g) sur I. Alors pour tout couple $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $\lambda F + \mu G$ est une primitive sur I de la fonction $\lambda f + \mu g$.

Démonstration. Découle de la proposition 10 de la page 42 . □

Remarque Ce résultat permet de trouver les primitives de toute fonction polynomiale. Plus précisément, la fonction polynomiale :

$$f\ :\ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$$

admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $F\ :\ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\, x^{k+1}$.

p.274

Exercice 3 Soit α et β deux réels distincts et I un intervalle ne contenant ni α ni β. On considère la fonction $f\ :\ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} \end{array}$.

1. Déterminer des constantes A et B telles que :
$$\forall x \in I \quad f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}\cdot$$
2. Donner une primitive de f sur I.

Grâce à la proposition 11 de la page 43 sur la dérivée de la composée de deux fonctions, on obtient le résultat suivant :

Proposition 3

Soit u une fonction dérivable sur I et à valeurs dans J et φ une fonction dérivable sur J. Alors la fonction $x \mapsto u'(x)\,\varphi'\big(u(x)\big)$ admet la fonction $x \mapsto \varphi\big(u(x)\big)$ comme primitive sur I.

Démonstration.
La fonction $x \mapsto \varphi\big(u(x)\big)$ est dérivable sur I et de dérivée $x \mapsto u'(x)\,\varphi'\big(u(x)\big)$. □

Remarque En particulier, soit u une fonction dérivable sur I.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, une primitive de $x \mapsto u'(x)u(x)^n$ sur I est $x \mapsto \dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1}\cdot$
- Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, si la fonction u ne s'annule pas sur I, alors une primitive de $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)^n}$ sur I est $x \mapsto \dfrac{1}{(1-n)u(x)^{n-1}}\cdot$
- Si la fonction u est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, alors une primitive de $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur I est $x \mapsto \ln|u(x)|$. Plus précisément, comme u est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle I, elle est de signe constant (*cf.* la proposition 40 de la page 511).
  - $*$ Si u est strictement positive sur I, alors la fonction $x \mapsto \ln\big(u(x)\big)$ est bien définie sur I et de dérivée $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}\cdot$
  - $*$ Si u est strictement négative sur I, alors la fonction $x \mapsto \ln\big(-u(x)\big)$ est bien définie sur I et de dérivée $x \mapsto \dfrac{-u'(x)}{-u(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}\cdot$

p.274

Exercice 4 Déterminer les primitives des fonctions :

1. $f : x \mapsto \tan x$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *(sans utiliser le résultat donné dans le tableau)*;
2. $g : x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ sur $\mathbb{R}$;
3. $h : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

p.275

Exercice 5 Calcul d'une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \cos^3 x$.

1. Trouver une primitive de f à l'aide d'une linéarisation (*cf.* le point méthode de la page 160).
2. Trouver une primitive de f en remarquant que $\cos^3 = (1 - \sin^2)\cos$.
3. Retrouver la linéarisation $\sin^3$.

Point méthode

Lorsque l'on cherche une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^k x$ et plus généralement de tout polynôme en $\cos x$ et $\sin x$, on peut :

- soit essayer de se ramener à la dérivée d'une composée ;
- soit linéariser la fonction en utilisant les formules trigonométriques.

Exemple Pour trouver les primitives de la fonction $f : x \mapsto \cos^{2k+1} x$, on peut écrire la fonction $x \mapsto \cos^{2k} x = \left(1 - \sin^2(x)\right)^k$ comme un polynôme en sin c'est-à-dire $x \mapsto P(\sin x)$. Une primitive de f est alors donnée par $x \mapsto Q(\sin x)$ où Q est une primitive de P.
C'est ce qui a été fait dans l'exercice 5.

p.275

Exercice 6 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos(2x)\sin(3x)$.

Un exemple important

Il faut savoir calculer les primitives de fonctions de type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$.
Nous allons voir comment procéder sous forme d'exercices.

p.275

Exercice 7 Soit α un réel n'appartenant pas à l'intervalle I. Trouver une primitive sur I de la fonction :

$$f : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{(x-\alpha)^2}. \end{array}$$

p.276

Exercice 8

1. Soit $\gamma \in \mathbb{R}^*$. Montrer qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+\gamma^2}$ est donnée par
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\gamma}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{\gamma}\right). \end{array}$$

2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\beta \neq 0$. Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}. \end{array}$$

Point méthode

En s'inspirant de ces trois exercices, on peut déterminer les primitives de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et a non nul.

Pour cela, on distingue trois cas en fonction du nombre de racines réelles du polynôme $P = aX^2 + bX + c$ (ou du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$) :

- si le polynôme P a deux racines réelles distinctes ($\Delta > 0$), alors on utilise la technique vue dans à l'exercice 3 ;
- si le polynôme P a une unique racine racine réelle ($\Delta = 0$), alors on utilise la technique vue dans l'exercice 7 ;
- si le polynôme P n'a pas de racine racine réelle ($\Delta < 0$), alors on met le dénominateur sous forme canonique $a\left((X-\alpha)^2+\beta^2\right)$ puis on utilise la technique vue dans l'exercice 8.

p.276

Exercice 9

1. Déterminer les primitives de $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2}$.
2. Déterminer les primitives de $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-4x+4}$.
3. Déterminer les primitives de $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

Remarque La méthode précédente sera généralisée dans le chapitre 18 sur les fractions rationnelles lorsque l'on disposera de la décomposition en éléments simples.

2 Existence de primitives

Le théorème fondamental suivant permet :

- d'une part, d'assurer l'existence de primitives pour une fonction continue sur un intervalle ;
- d'autre part, de ramener la recherche de primitives à un calcul d'intégrale.

Il est admis à ce stade, mais sera démontré dans le chapitre 12, où sera définie rigoureusement l'intégrale d'une fonction continue.

Pour l'instant, nous utiliserons les connaissances vues dans le secondaire en généralisant au cas des fonctions à valeurs complexes de la façon suivante : si f est une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ et si $(a,b) \in I^2$, alors l'intégrale de f entre a et b est définie par :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \big(\operatorname{Re} f(t)\big)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \big(\operatorname{Im} f(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 4

Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$ alors la fonction :

$$\begin{array}{rccl} F\ : & I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction f.

Plus précisément, F est l'unique primitive de f s'annulant en a.

On retrouve la proposition suivante qui a été vue en terminale (pour les fonctions à valeurs réelles) et qui permet de calculer l'intégrale d'une fonction f entre a et b pour peu que l'on connaisse une primitive de F sur $[a,b]$.

Proposition 5

Soit f une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I alors :

$$\forall (a,b) \in I^2 \qquad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

La quantité $F(b) - F(a)$ est notée $[F]_a^b$ ou $\big[F(t)\big]_a^b$.

Principe de démonstration. Utiliser le théorème précédent et la proposition 1 de la page 246.

Démonstration page 277

Remarques

- Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C \end{array} \qquad \text{avec} \quad C \in \mathbb{K}.$$

- Cela justifie *a posteriori* la définition du logarithme comme l'unique primitive s'annulant en 1 de la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$.

Lorsque f est dérivable sur I, alors f est une primitive de f'. Pour pouvoir utiliser la proposition 5 et donc avoir, pour tout $(a,x) \in I^2$:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

on a besoin que la dérivée f' soit continue ce qui amène à la définition suivante.

Définition 2

On dit qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si elle est dérivable sur I et si sa dérivée est continue sur I.

Remarque Le produit et la somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

La proposition 5 de la page précédente se réécrit alors :

Corollaire 6

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Cela découle de la proposition 5 de la page précédente car la fonction f est, sous ces conditions, une primitive sur I de sa dérivée f' qui est continue. □

3 Recherche de primitives et calcul d'intégrales

Maintenant que le lien entre recherche de primitives et calcul d'intégrale a été rappelé, nous allons donner deux méthodes permettant de simplifier le calcul d'intégrale et donc la recherche de primitives : l'intégration par parties et le changement de variables. Elles s'appuient sur les résultats énoncés dans le chapitre 1.

Intégration par parties

Étant donné deux fonctions u et v dérivables sur I, leur produit uv est dérivable sur I et de dérivée $u'v + uv'$.
Donc, si l'on connaît une primitive H de la fonction $u'v$, alors une primitive de la fonction uv' est $uv - H$.
Pour pouvoir traduire ce résultat à l'aide d'intégrales, il faut s'assurer que les fonctions que l'on intègre soient continues. C'est pourquoi le résultat suivant se limite à des fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Proposition 7 (Intégration par parties)

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On a :

$$\forall (a,b) \in I^2 \qquad \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t,$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$\forall (a,b) \in I^2 \qquad \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u\,v]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Principe de démonstration. La fonction uv est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités a et b et sa dérivée est $u'v + uv'$.

Démonstration page 277

Remarque La formule d'intégration par parties est en général utilisée pour éliminer une fonction dont la dérivée est plus simple. Par exemple, pour les fonctions $\ln$, Arcsin, $\mathrm{Arctan}\ldots$

Exemple Le tableau nous donne une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $\ln$. Pour s'en convaincre, il suffit de dériver l'expression proposée. Mais si l'on a oublié l'expression de cette primitive, une intégration par parties permet de la retrouver rapidement. En effet, une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$, est :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Les fonctions :

$$u \,:\, t \mapsto \ln t \qquad \text{et} \qquad v \,:\, t \mapsto t$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t = \int_1^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t &= [u\,v]_1^x - \int_1^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [t\,\ln t]_1^x - \int_1^x \mathrm{d}t = x\,\ln x - x + 1\,. \end{aligned}$$

Par suite, une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $\ln$ est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln x - x + 1. \end{array}$$

Une fonction constante étant de dérivée nulle, on retiendra qu'une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $\ln$ est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln x - x. \end{array}$$

p.277 **Exercice 10** Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction Arctan.

p.277

Exercice 11 A l'aide de deux intégrations par parties, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^2\, e^x$.

Remarque L'utilisation d'intégrations par parties permet, plus généralement, de calculer une primitive d'une fonction s'écrivant comme le produit d'un polynôme et d'une fonction exponentielle : on dérive le polynôme et on intègre la fonction exponentielle jusqu'à obtenir une fonction exponentielle.

p.278

Exercice 12 Déterminer les primitives sur $]-1,1[$ de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$.

p.278

Exercice 13 *(Approfondissement)*

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré n et $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer, par récurrence sur n que la fonction $f : x \mapsto P(x)e^{\lambda x}$ admet une primitive sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$ où Q est un polynôme de degré n si $\lambda \neq 0$ et $n+1$ sinon.

Changement de variable

Proposition 8

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieurs non vides, f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de J dans I. Alors :

$$\forall (\alpha,\beta) \in J^2 \quad \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\, \varphi'(u)\, \mathrm{d}u = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Principe de démonstration. Si F est une primitive de f sur I, alors la fonction $F \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et sa dérivée est $\varphi' \times (f \circ \varphi)$. Démonstration page 279

Remarques

- On peut utiliser la formule de changement de variable quand on reconnaît sous une intégrale une forme $(f \circ \varphi)\, \varphi'$.
- Attention de ne pas oublier de changer les bornes.

Exemples

1. La fonction $\varphi : u \mapsto \sin u$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 u \cos u\, \mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \varphi^2(u)\, \varphi'(u)\, \mathrm{d}u = \int_0^1 t^2\, \mathrm{d}t = \frac{1}{3}\cdot$$

2. La fonction $\varphi : u \mapsto u^2$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-2,2[$, on a :

$$\int_{-1}^{2} u\sqrt{4-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2}\sqrt{4-\varphi(u)}\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{1}^{4}\sqrt{4-t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(4-t)^{3/2}\right]_1^4 = \sqrt{3}.$$

Dans les exemples précédents, on aurait, bien sûr, pu se passer de changement de variables et écrire :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 u\,\cos u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{\sin^3 u}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\cdot$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{2} u\sqrt{4-u^2}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{3}(4-u^2)^{3/2}\right]_{-1}^{2} = \sqrt{3}.$

En effet, la formule de dérivation d'une fonction composée permet d'obtenir :

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \left[F\left(\varphi(u)\right)\right]_\alpha^\beta$$

où F est une primitive de f.
Autrement dit, ce n'est pas l'utilisation de la formule de changement de variable dans ce sens qui est la plus intéressante.

Remarques La formule de changement de variable est surtout utilisée dans l'autre sens pour rendre une intégrale plus facile à calculer.

- Si l'on souhaite, pour calculer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, faire le changement de variable $t = \varphi(u)$, il faut s'assurer que a et b sont des éléments de l'image de φ c'est-à-dire qu'il existe α et β tels que $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$, puis que φ est de classe $\mathcal{C}^1$. On aura alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

  Il faudra donc être capable de trouver des antécédents par φ (pas nécessairement uniques) de a et b. De plus, cette transformation n'est intéressante que si l'intégrale de droite est plus simple à calculer.

- Si l'on souhaite trouver une primitive de f sur I et si $a \in I$, on calcule, pour tout $x \in I$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Si l'on veut effectuer le changement de variable $t = \varphi(u)$, il faut s'assurer que tout réel x de I appartient à l'image de φ et savoir en déterminer un antécédent par φ. Un cas particulièrement favorable est celui où φ est bijective, c'est l'objet du corollaire suivant.

Corollaire 9

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieurs non vides, f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et φ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de J dans I. Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2 \qquad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\left(\varphi(u)\right)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Remarque Quand on utilise la formule précédente, on dit que l'on effectue le changement de variable $t = \varphi(u)$. On remplace alors formellement t par $\varphi(u)$ et $\mathrm{d}t$ par $\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$, ce qui rend la transformation assez naturelle.

Exemple Pour calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1/2} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$, on peut poser $t = \sin u$.

- Des antécédents par la fonction $u \mapsto \sin u$ de -1 et $1/2$ sont respectivement $-\pi/2$ et $\pi/6$. La fonction sin étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi/2, \pi/6]$, le changement de variable $t = \sin u$ donne donc :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1/2} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/6} \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,\mathrm{d}u &= \int_{-\pi/2}^{\pi/6} \sqrt{\cos^2 u}\cos u\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/6} |\cos u|\,\cos u\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

  Comme la fonction cos est positive sur $[-\pi/2, \pi/2]$, on est ramené à une intégrale que l'on sait calculer en linéarisant :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1/2} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/6} \cos^2 u\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/6} (1+\cos 2u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\left[u + \frac{\sin 2u}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/6} = \frac{1}{8}\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

- Si l'on avait choisi $3\pi/2$ et $\pi/6$ comme antécédents de -1 et $1/2$ par la fonction $u \mapsto \sin u$, on aurait eu :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1/2} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{3\pi/2}^{\pi/6} |\cos u|\,\cos u\,\mathrm{d}u = -\int_{\pi/6}^{3\pi/2} |\cos u|\,\cos u\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_{\pi/6}^{\pi/2} |\cos u|\,\cos u\,\mathrm{d}u - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\cos u|\,\cos u\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 u\,\mathrm{d}u + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2 u\,\mathrm{d}u \\ &= -\left[u + \frac{\sin 2u}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/2} + \left[u + \frac{\sin 2u}{2}\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{1}{8}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\pi.\end{aligned}$$

Le résultat est le même mais le calcul nécessite de découper l'intervalle $[\pi/6, 3\pi/2]$ en deux intervalles sur lesquels la fonction cos est de signe constant.

p.279

Exercice 14 Déterminer une primitive sur $[-1,1]$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

p.280

Exercice 15

1. Déterminer les primitives sur $]0,\pi[$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$ en utilisant le changement de variable $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
2. En déduire les primitives sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}\cdot$

II Équations différentielles linéaires du premier ordre

Soit a et b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. Quand on cherche toutes les fonctions f dérivables sur I vérifiant :

$$\forall x \in I \quad f'(x) + a(x)\, f(x) = b(x)$$

on dit que l'on résout l'**équation différentielle linéaire du premier ordre** que l'on note :

$$y' + a(x)\, y = b(x). \qquad (E)$$

Remarques

- Lorsque a est la fonction nulle, le problème se ramène à la recherche des primitives de b. Nous allons voir comment, dans le cas général, ramener la résolution de l'équation (E) à une recherche de primitives.

- Il arrive que l'on ait à résoudre des équations différentielles de la forme :

$$\alpha(x) y' + \beta(x) y = \gamma(x)$$

  où les fonctions α, β et γ sont continues sur I. Dans ce cas, on se place sur un intervalle I' inclus dans I sur lequel la fonction α ne s'annule pas, et l'on se ramène à une équation du type (E), avec $a = \dfrac{\beta}{\alpha}$ et $b = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ qui sont continues sur I'.

1 Structure de l'ensemble des solutions

Définition 3

- On appelle **solution** sur I de l'équation différentielle (E) toute fonction f de I dans $\mathbb{K}$, dérivable, telle que :
$$\forall x \in I \quad f'(x) + a(x)\, f(x) = b(x).$$
- La fonction b est appelée **second membre** de l'équation différentielle.

  Si b est la fonction nulle, l'équation différentielle est dite **homogène**.
- On appelle **équation homogène associée** à (E) (ou **équation sans second membre**), l'équation :
$$y' + a(x)\, y = 0. \tag{E_0}$$

Proposition 10

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène (E_0) contient la fonction nulle et est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire qu'il vérifie :
$$\forall (f_1, f_2) \in {\mathcal{S}_0}^2 \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2 \quad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \mathcal{S}_0.$$

Remarque Nous verrons que cette proposition traduit le fait que $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur I.

Proposition 11

Si f_1 est une solution particulière de l'équation (E) et si $\mathcal{S}_0$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation (E_0), alors l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\mathcal{S} = \{f_1 + g\,;\ g \in \mathcal{S}_0\}$.

Démonstration.

- Si la fonction f est solution de (E), alors la fonction $f - f_1$ est solution de l'équation homogène (E_0). En effet :
$$\forall x \in I \quad (f - f_1)'(x) + a(x)(f - f_1)(x) = f'(x) + a(x)f(x) - \big(f_1'(x) + a(x)f_1(x)\big) = 0\cdot$$
  L'écriture $f = f_1 + (f - f_1)$ nous assure alors que $f \in \{f_1 + g\,;\ g \in \mathcal{S}_0\}$.
- Réciproquement, si $f \in \{f_1 + g\,;\ g \in \mathcal{S}_0\}$, alors il existe $g \in \mathcal{S}_0$ tel que $f = f_1 + g$, et donc :
$$\forall x \in I \quad f'(x) + a(x)(f(x) = f_1'(x) + a(x)f_1(x) + \big(g'(x) + a(x)g(x)\big) = b(x)\cdot$$
  Ainsi, la fonction f est solution de (E). □

Remarques

- Comme $\mathcal{S}$ est non vide (d'après la proposition 14 de la page 265), la proposition 11 traduit le fait que $\mathcal{S}$ possède une structure de sous-espace affine de direction $\mathcal{S}_0$.
- L'ensemble $\{f_1 + g\,;\ g \in \mathcal{S}_0\}$ est souvent noté $f_1 + \mathcal{S}_0$.
- Si f_2 est une autre solution de l'équation (E) alors :
$$f_1 + \mathcal{S}_0 = \mathcal{S} = f_2 + \mathcal{S}_0.$$
  Ainsi, l'ensemble $f_1 + \mathcal{S}_0$ ne dépend pas de la solution f_1 choisie.

- D'après la proposition précédente, pour résoudre (E), il nous suffit de :
  - résoudre l'équation homogène (E_0),
  - trouver une solution particulière.

  Nous allons voir comment résoudre l'équation homogène (E_0) et comment trouver une solution particulière.

2 Résolution

Première étape : résolution de l'équation homogène

La fonction nulle est, bien sûr, solution de l'équation homogène ; le résultat suivant montre que pour obtenir les solutions de l'équation homogène (E_0), il suffit d'en connaître une solution non nulle. Il utilise la fonction exponentielle qui a été définie au chapitre 4.

Proposition 12

- Il existe une solution non nulle de l'équation homogène :

$$(E_0) \ : \ y' + a(x)\, y = 0.$$

- Si f_0 est une solution non nulle de l'équation (E_0), alors elle ne s'annule pas sur I et :

$$\mathcal{S}_0 = \{\lambda f_0 \,;\ \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Principe de démonstration.

On cherche une solution sous la forme $x \mapsto e^{\varphi(x)}$.

Démonstration page 281

Exemple Si $a \in \mathbb{K}$, alors l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' = ay$ est :

$$\mathcal{S}_0 = \{t \mapsto \lambda e^{at} \,;\ \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Remarque Nous verrons que la proposition précédente traduit le fait que l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0) est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension 1 (une **droite vectorielle**) admettant pour base toute solution non nulle de l'équation homogène.

Point méthode

Pour déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0), il suffit donc de trouver une solution f_0 non nulle. Pour cela :

- soit on trouve une solution évidente ;
- soit on cherche une solution sous la forme $x \mapsto e^{\varphi(x)}$ avec φ dérivable sur I. D'après ce qui précède, si A est une primitive de a alors la fonction $x \mapsto e^{-A(x)}$ convient.

p.282

Exercice 16 Résoudre les équations homogènes suivantes :

1. $y' - \dfrac{2}{x} y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$,
2. $y' + \dfrac{1}{1+x^2} y = 0$ sur $\mathbb{R}$,
3. $y' + \cos x \; y = 0$ sur $\mathbb{R}$,
4. $y' + \dfrac{x}{1+x^2} y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Deuxième étape : recherche d'une solution particulière

Maintenant que l'on dispose d'une méthode pour résoudre l'équation homogène (E_0), il reste à trouver une solution particulière de l'équation initiale (E).

Commençons par un cas classique à connaître.

p.282

Exercice 17 Soit $(a, \lambda) \in \mathbb{K}^2$. On considère l'équation différentielle :

$$y' + a\,y = e^{\lambda x}. \tag{E}$$

1. Si $\lambda \neq -a$, montrer qu'il existe une solution de (E) de la forme $x \mapsto Ce^{\lambda x}$.
2. Si $\lambda = -a$, montrer qu'il existe une solution de (E) de la forme $x \mapsto Cxe^{\lambda x}$.

Remarque Plus généralement, lorsque le second membre est le produit d'une fonction polynomiale et d'une fonction exponentielle c'est-à-dire de la forme :

$$x \mapsto P(x)e^{\lambda x},$$

on peut chercher une solution de même type que le second membre, c'est-à-dire de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$ avec Q une fonction polynomiale.

Dans les cas où l'on ne voit aucune solution évidente, on peut avoir recours au **principe de superposition** et/ou à la méthode de la **variation de la constante**.

Proposition 13 (Principe de superposition)

Soit f_1 une solution de l'équation $y' + a(x)y = b_1(x)$ et f_2 une solution de l'équation $y' + a(x)y = b_2(x)$. Alors la fonction $f_1 + f_2$ est solution de l'équation $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

Démonstration page 283

Point méthode

Pour pouvoir utiliser *le principe de superposition*, on découpe le second membre b en somme de termes pour lesquels l'on peut trouver une solution particulière.

p.283 **Exercice 18** Résoudre l'équation différentielle $y' + y = \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque Dans l'exercice précédent, pour trouver une solution particulière, on aurait aussi pu remarquer que la fonction $x \mapsto \cos x$ est la partie réelle de la fonction $x \mapsto e^{ix}$, trouver une solution g de l'équation $y' + y = e^{ix}$ et en déduire que la partie réelle de g était solution de l'équation $y' + y = \cos x$.

p.283 **Exercice 19** *(Approfondissement)* Soit $(a, \lambda) \in \mathbb{K}^2$ et P un polynôme de degré n. On considère l'équation différentielle :

$$y' + a\,y = P(x)e^{\lambda x}. \tag{E}$$

1. Montrer qu'il existe une solution de (E) de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$, où Q est un polynôme :
   - de degré n si $\lambda + a \neq 0$,
   - de degré $n+1$ sinon.

   Indication : on pourra montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, $z : x \mapsto y(x)e^{-ax}$ est solution d'une équation (E') que l'on déterminera puis utiliser l'exercice 13 de la page 256.
2. Montrer que si $\lambda = -a$, il existe une solution de (E) de la forme $x \mapsto R(x)e^{-ax}$ où R est un polynôme de degré $n+1$ sans terme constant.

L'exercice précédent n'est pas un résultat au programme, mais il peut être utile de le connaître. Il permet de trouver une solution particulière quand le second membre est le produit d'une fonction polynomiale et d'une fonction exponentielle. Il traduit une idée plus générale : si le second membre a une certaine forme, il est naturel (mais pas forcément fructueux) de chercher une solution particulière de la même forme.

Point méthode

Lorsque l'on ne trouve pas de solution évidente même en utilisant le principe de superposition, on peut appliquer la méthode de la variation de la constante décrite ci-dessous.

Méthode de la variation de la constante

Cette méthode consiste à chercher une solution particulière sous la forme $y = \lambda\, y_0$, où y_0 est une solution non nulle de (E_0) et λ est une fonction dérivable sur I. Pour tout $x \in I$, on a alors :

$$\begin{aligned} y'(x) + a(x)\, y(x) &= \lambda'(x)\, y_0(x) + \lambda(x)\, y_0'(x) + a(x)\lambda(x)\, y_0(x) \\ &= \lambda'(x)\, y_0(x) + \lambda(x)\, \underbrace{\big(y_0'(x) + a(x)\, y_0(x)\big)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathcal{S}_0} \\ &= \lambda'(x)\, y_0(x). \end{aligned}$$

D'après la proposition 12 de la page 261, la solution y_0 ne s'annule pas sur I. Ainsi, la fonction y est solution de (E) si, et seulement si, la fonction λ vérifie :

$$\forall x \in I \quad \lambda'(x) = \frac{b(x)}{y_0(x)}.$$

Il suffit donc que la fonction λ soit une primitive sur I de la fonction b/y_0. Une telle primitive existe d'après le théorème 4 de la page 253 car la fonction b/y_0 est continue sur l'intervalle I comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Remarque On parle de variation de la constante car la constante qui apparait dans les solutions de l'équation homogène a été remplacée par une fonction dérivable que l'on fait « varier ».

p.284

Exercice 20 Résoudre l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{x} y = \dfrac{x}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$.

Point méthode

Pour déterminer l'ensemble des solutions de (E), il faut donc :

- déterminer une solution f_0 non nulle de l'équation homogène. Pour cela :
  * soit on trouve une solution « évidente » ;
  * soit on la cherche sous la forme $x \mapsto e^{\varphi(x)}$ et l'on se ramène à un calcul de primitive.
- déterminer une solution particulière f_1. Pour cela :
  * soit on en trouve une solution « évidente » ;
  * soit on utilise le principe de superposition ;
  * soit on utilise la méthode de la variation de la constante.

L'ensemble des solutions est alors $\mathcal{S} = \{f_1 + \lambda f_0\,;\ \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Problème de Cauchy

La méthode de variation de la constante permet d'assurer l'existence de solutions de l'équation (E). Le résultat suivant affirme que la solution est unique si l'on impose une condition initiale. C'est un problème que l'on rencontre en général en Physique, Chimie ou Sciences Industrielles : une équation différentielle décrit l'évolution d'un système en fonction du temps et, souvent, la condition initiale en précise son état au temps $t = 0$.

Proposition 14 (Problème de Cauchy)

Pour toute donnée initiale $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution f de l'équation (E) : $y' + a(x)\,y = b(x)$, telle que $f(x_0) = y_0$.

Démonstration page 284

Remarque Cela justifie *a posteriori* la définition du chapitre 1 des fonctions cos et sin comme fonctions vérifiant :

$$\sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin, \quad \sin(0) = 0 \quad \text{et} \quad \cos(0) = 1.$$

En effet, la fonction $\cos + i \sin$ est l'unique solution de l'équation $z' = iz$ valant 1 en 0.

p.284

Exercice 21 Déterminer l'unique solution sur $]0,\pi[$ de l'équation différentielle $y' + \dfrac{\cos x}{\sin x} y = 1$ s'annulant en $\pi/2$.

p.285

Exercice 22 Soit a et b des fonctions continues et T-périodiques sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + a(x)y = b(x)$.

1. Montrer que si y est solution de l'équation différentielle (E), alors la fonction $z : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & y(x+T) \end{array}$ est aussi solution.
2. Montrer qu'une solution y de l'équation différentielle est T-périodique si, et seulement si, $y(0) = y(T)$.

3 Illustration en sciences physiques et industrielles

L'équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on rencontre le plus fréquemment en sciences physiques ou industrielles est l'équation à coefficients constants suivante :

$$y' + \frac{1}{\tau} y = \frac{A(t)}{\tau}. \qquad (*)$$

Elle régit l'évolution d'une grandeur y au cours du temps. La constante τ a la dimension d'un temps et représente le temps caractéristique d'évolution du phénomène qui est modélisé. Le second membre, qui peut être interprété comme l'action de l'extérieur sur le système (aussi appelé **consigne**), est généralement constant ou sinusoïdal. On parle de **régime libre** lorsque $A = 0$ et de **régime forcé** sinon. Cette équation apparaît dans de multiples situations.

Échange thermique

On note T la température (que l'on suppose homogène) d'un système placé au contact d'un dispositif dont la température est constante à T_0 (thermostat). On admet qu'à chaque instant t, la variation de température du système est proportionnelle à la différence $T - T_0$. Ceci conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_0) \qquad \text{avec} \qquad K < 0.$$

Cette équation différentielle est bien sous la forme $(*)$ avec $\tau = -1/K$ et $A = T_0$.

Charge/décharge d'un condensateur à travers une résistance

Dans un circuit RC, la charge q du condensateur évolue selon l'équation suivante :

$$U = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt}.$$

Celle-ci peut se mettre sous la forme $(*)$ avec $\tau = RC$ et $A = CU$. Une équation similaire peut être obtenue si l'on cherche à modéliser l'établissement du courant dans un circuit comportant une bobine, une résistance et un générateur de tension.

Chute libre d'un corps

On s'intéresse à la vitesse v (projetée sur un axe vertical) d'un corps de masse m en chute libre verticale dans un champ de pesanteur d'intensité g. On suppose que le corps est soumis à une force de frottement de l'air qui est proportionnelle à sa vitesse : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. L'équation qui régit l'évolution de v est alors :

$$m\frac{dv}{dt} = -\alpha v - g.$$

Cette équation se ramène à nouveau à l'équation $(*)$ avec $\tau = m/\alpha$ et $A = -g/\alpha$.

Réaction chimique

On considère une réaction chimique transformant un réactif α en un produit β dont la vitesse dépend linéairement de la concentration de α. Alors la concentration du réactif α notée C_α vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dC_\alpha}{dt} = -kC_\alpha.$$

Cette équation se ramène à nouveau à l'équation $(*)$ avec $\tau = 1/k$ et $A = 0$.

Cas d'une consigne de type « échelon »

Lorsque A est une constante, alors les solutions sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation $(*)$ sont les fonctions

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & A + \lambda e^{-t/\tau} \end{array} \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver la solution dans un cas particulier, il suffit donc de déterminer la constante λ à l'aide des conditions initiales du problème.

On remarque que le comportement de la solution est toujours le même.

- La grandeur tend vers la constante A lorsque t tend vers l'infini. Autrement dit, le système tend à rejoindre un état d'équilibre dans lequel la grandeur ne varie plus.
- Cet état est atteint d'autant plus vite que le temps τ caractéristique d'évolution du système est petit.

Cas d'une consigne de type sinusoïdal

Lorsque A est de la forme $t \mapsto A_0 \cos(\omega t)$ avec $(A_0, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, on détermine une solution particulière en considérant la partie réelle d'une solution particulière de l'équation :

$$y' + \frac{1}{\tau} y = \frac{A_0}{\tau} e^{i\omega t}.$$

Les solutions de l'équation $(*)$ sont alors les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{A_0}{1+\omega^2\tau^2}\left(\cos(\omega t) + \omega\tau \sin(\omega t)\right) + \lambda e^{-t/\tau} \end{array} \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La solution particulière $t \mapsto \dfrac{A_0}{1+\omega^2\tau^2}\left(\cos(\omega t) + \omega\tau \sin(\omega t)\right)$ peut aussi se voir sous la forme d'un cosinus déphasé c'est-à-dire :

$$t \mapsto \frac{A_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \cos(\omega t - \varphi) \quad \text{avec} \quad \varphi = \operatorname{Arctan}(\omega\tau)\cdot$$

Remarque Comme $\omega\tau > 0$, l'angle $\varphi = \operatorname{Arctan}(\omega\tau)$ appartient à $[0, \pi/2]$. Les formules trigonométriques :

$$\cos^2 = \frac{1}{1+\tan^2} = 1 - \sin^2$$

conduisent donc à :

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sin\varphi = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \geqslant 0.$$

Pour trouver la solution dans un cas particulier, il suffit donc de déterminer la constante λ à l'aide des conditions initiales du problème.

On remarque que le comportement de la solution est toujours le même.

- La grandeur tend, lorsque t tend vers l'infini, vers un régime sinusoïdal de même fréquence que la consigne mais avec un déphasage d'autant plus petit que la constante $\omega\tau$ est petite. C'est ce que l'on appelle le **régime permanent**.
- Cet état est atteint d'autant plus vite que le temps caractéristique d'évolution du système, τ, est petit. La période pendant laquelle le régime permanent n'est pas encore « atteint » s'appelle le **régime transitoire**.

III Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Soit a et b deux complexes et c une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$. On considère l'**équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** :

$$y'' + a\,y' + b\,y = c(x). \tag{E}$$

1 Structure de l'ensemble des solutions

Les démonstrations de cette partie sont similaires à celles données dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1. Elles sont basées sur la caractère linéaire de l'équation. Nous laissons donc le lecteur les adapter.

Définition 4

- On appelle **solution** sur I de l'équation différentielle (E) toute fonction f deux fois dérivable de I dans $\mathbb{K}$ telle que :
$$\forall x \in I \quad f''(x) + a\,f'(x) + b\,f(x) = c(x).$$
- La fonction c est appelée **second membre** de l'équation différentielle. Lorsque c est la fonction nulle, l'équation différentielle est dite **homogène**.
- On appelle **équation homogène associée** à (E) (ou **équation sans second membre**), l'équation :
$$y'' + a\,y' + b\,y = 0. \tag{E_0}$$

Proposition 15

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène (E_0) contient la fonction nulle et est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire qu'il vérifie :

$$\forall (f_1, f_2) \in {\mathcal{S}_0}^2 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \alpha f_1 + \beta f_2 \in \mathcal{S}_0.$$

Remarque Nous verrons que $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables de I dans $\mathbb{K}$.

Proposition 16

Si f_1 est une solution particulière de l'équation (E) et si $\mathcal{S}_0$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation (E_0), l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\mathcal{S} = \{f_1 + f_0\,;\ f_0 \in \mathcal{S}_0\}$.

Remarques

- Comme $\mathcal{S}_0$ est non vide (ce qui découlera du théorème de Cauchy), nous dirons que $\mathcal{S}$ possède une structure de sous-espace affine de direction $\mathcal{S}_0$.
- Comme dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre un, résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre revient donc à résoudre l'équation homogène associée et à trouver une solution particulière.

2 Résolution de l'équation homogène

Proposition 17

Soit $r \in \mathbb{C}$. La fonction $\varphi_r : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{r\,x} \end{array}$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation homogène $y'' + a\,y' + b\,y = 0$. si, et seulement si, $r^2 + a\,r + b = 0$.

L'équation $r^2 + a\,r + b = 0$ est appelée **équation caractéristique** de (E_0).

Démonstration page 285

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Proposition 18

- Si l'équation caractéristique $r^2 + a\,r + b = 0$ a deux racines distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de (E_0) dans $\mathbb{C}$ sont les fonctions :
$$x \mapsto \lambda_1\, e^{r_1 x} + \lambda_2\, e^{r_2 x} \qquad \text{avec} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$
- Si l'équation caractéristique $r^2 + a\,r + b = 0$ a une racine double r_0, alors les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$$x \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2\, x) e^{r_0 x} \qquad \text{avec} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Principe de démonstration. Étudier l'équation vérifiée par $z : x \mapsto y(x)e^{-rx}$ où r est une racine de l'équation caractéristique.

Démonstration page 285

Remarque Dans les deux cas, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_0) est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension 2 puisque ses éléments sont les combinaisons linéaires de deux solutions non proportionnelles. On dit que l'ensemble des solutions de l'équation homogène forme un plan vectoriel.

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Proposition 19

Supposons a et b réels.

- Si l'équation caractéristique $r^2 + a\,r + b = 0$ a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, les solutions de (E_0) dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions :
$$x \mapsto \lambda_1\, e^{r_1\, x} + \lambda_2\, e^{r_2\, x} \qquad \text{avec} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$
- Si l'équation caractéristique $r^2 + a\,r + b = 0$ a une racine double r_0 (nécessairement réelle), les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$$x \mapsto e^{r_0\, x}(\lambda_1 + \lambda_2\, x) \qquad \text{avec} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$
- Si l'équation caractéristique $r^2 + a\,r + b = 0$ a deux racines complexes conjuguées non réelles $\alpha \pm i\beta$, les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$$x \mapsto \lambda_1\, e^{\alpha x} \cos \beta x + \lambda_2\, e^{\alpha x} \sin \beta x \qquad \text{avec} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Démonstration page 286

p.287 **Exercice 23** Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' - 5y = 0$.

p.287 **Exercice 24** Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$.

p.287 **Exercice 25** Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2\,y' + 2\,y = 0$.

3 Solution particulière

Maintenant que l'on dispose d'une méthode pour résoudre l'équation homogène (E_0), il reste à trouver une solution particulière de l'équation (E). Si le second membre a une certaine forme, il est naturel (mais pas forcément fructueux) de chercher une solution particulière de la même forme.

Proposition 20

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'équation différentielle :
$$y'' + a\,y' + b\,y = e^{\lambda x} \tag{E}$$
possède comme solution particulière, une fonction de la forme :

- $x \mapsto Ce^{\lambda x}$ si λ n'est pas racine de l'équation $r^2 + a\,r + b = 0$,
- $x \mapsto Cxe^{\lambda x}$ si λ est racine simple de l'équation $r^2 + a\,r + b = 0$,
- $x \mapsto Cx^2e^{\lambda x}$ si λ est racine double de l'équation $r^2 + a\,r + b = 0$.

Démonstration page 287

p.288 **Exercice 26** Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 3y = e^{-x}$;
2. $y'' - 4y' + 3y = e^{x}$;
3. $y'' - 2y' + y = e^{x}$.

Remarques

- Plus généralement, lorsque le second membre est le produit d'une fonction polynomiale et d'une fonction exponentielle, *i. e.* de la forme $x \mapsto P(x)e^{\lambda x}$; on peut chercher une solution particulière de même type c'est-à-dire de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$ avec Q une fonction polynomiale.
- Cette idée ainsi que le principe de superposition permettent de trouver une solution particulière lorsque le second membre est le produit d'une fonction polynomiale et d'une fonction cosinus ou sinus.

Proposition 21 (Principe de superposition)

Soit f_1 une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c_1(x)$ et f_2 une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c_2(x)$, alors la fonction $f_1 + f_2$ est solution de l'équation $y'' + ay' + by = c_1(x) + c_2(x)$.

p.288

Exercice 27 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4\,y' + 3\,y = \operatorname{sh} x$.
2. $y'' + y = \sin^3 x$.

4 Existence de solutions. Problème de Cauchy

Théorème 22

Soit a et b deux scalaires et c une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$. Alors l'équation :

$$y'' + a\,y' + b\,y = c(x) \qquad (E)$$

admet des solutions.

Démonstration. La démonstration est hors-programme mais est proposée dans l'exercice suivant lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. □

p.289

Exercice 28 *(Approfondissement)* Soit r une racine de l'équation caractéristique.

1. Soit y une fonction deux fois dérivable sur I et la fonction z définie sur I par $z:\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{-rx} f(x). \end{array}$

   Montrer que la fonction y est solution de l'équation (E) si, et seulement si, la fonction z' est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
2. En déduire que l'équation (E) admet des solutions.

Remarque On retiendra que pour résoudre une équation différentielle (E) linéaire du second ordre dont on connaît une solution y_0 de l'équation homogène associée non nulle (et donc ne s'annulant pas), on peut chercher les solutions de (E) sous la forme $z\,y_0$ où z est une fonction deux fois dérivable sur I. Cela conduit à une équation différentielle linéaire du premier ordre en z', équation que l'on sait donc résoudre. Un calcul de primitive permet alors de déterminer z et donc y.

Proposition 23 (Problème de Cauchy)

Pour toute donnée initiale $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K}^2$, il existe une unique solution f de l'équation (E) telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$.

Démonstration page 289

5 Illustration en sciences physiques et industrielles

En sciences physiques et industrielles, on rencontre couramment des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants de la forme générale suivante :

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2\, y = f(t).$$

De manière générale :

- le coefficient d'amortissement $\lambda \geqslant 0$ modélise des phénomènes qui dissipent de l'énergie (frottements en mécanique, effet Joule en électricité) ; il a la dimension de l'inverse d'un temps ;
- la constante $\omega_0 > 0$ est appelée pulsation propre ; sa dimension est aussi l'inverse d'un temps ;
- le second membre f est une fonction qui représente l'action de l'extérieur sur le système (forçage).

Voici une liste non exhaustive de situations où une telle équation intervient.

Petites oscillations d'un pendule libre

Un pendule pesant de longueur ℓ est placé dans un champ de pesanteur d'intensité g. On suppose que l'angle θ qu'il forme avec la verticale reste à chaque instant petit de sorte que l'approximation $\sin\theta \approx \theta$ soit raisonnable. L'équation d'évolution de θ s'écrit :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0.$$

Ici, il n'y a pas de frottements ($\lambda = 0$) ni de forçage ($f = 0$).
On obtient le même type d'équation si l'on s'intéresse aux oscillations d'une masse reliée à un ressort.

Charge d'un condensateur avec une résistance et une inductance

Si l'on considère un circuit RLC en série, alors l'équation d'évolution de la charge q du condensateur est :

$$U = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2}.$$

Dans cet exemple, le coefficient d'amortissement vaut $\lambda = R/2L$ et la pulsation propre vaut $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Solutions de l'équation homogène : régime libre

Le comportement des solutions de l'équation :

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = 0$$

dépend du rapport entre les deux constantes de temps du système ($1/\lambda$ et $1/\omega_0$). On dit que le régime est :

- **pseudo–périodique** si $\lambda < \omega_0$. Dans ce cas, l'équation caractéristique possède deux racines non réelles distinctes et les solutions sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-\lambda x}\left(A\cos(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,x)+B\sin(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,x)\right) \end{array}$$

  avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

  On observe donc des oscillations autour de la position d'équilibre $y=0$. Dans le cas où le terme d'amortissement est présent ($\lambda>0$), l'amplitude de ces oscillations décroît de sorte que $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$ d'autant plus vite que λ est grand. La quantité $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$ est appelée **pseudo-pulsation**.

- **critique** si $\lambda=\omega_0$. Dans ce cas, l'équation caractéristique admet une racine réelle double. L'ensemble des solutions est :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-\lambda x}(A+Bx) \end{array} \qquad \text{avec} \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

- **apériodique** si $\lambda>\omega_0$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-\lambda x}\left(Ae^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,x}+Be^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,x}\right) \end{array} \qquad \text{avec} \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2$$

Remarquons que dans tous les cas, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$.

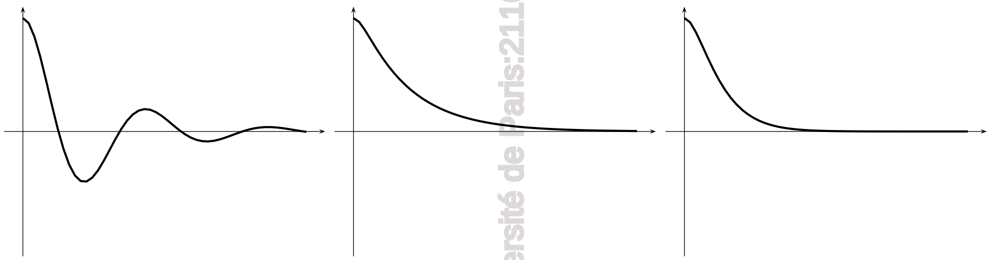


FIGURE 5.1 – Régimes pseudo-périodique, apériodique et critique

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 1 Si F est une primitive de f sur I alors pour toute constante $C \in \mathbb{K}$, la fonction $F+C$ est aussi évidemment une primitive de f sur I.

Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors la fonction $F-G$ est de dérivée nulle sur l'intervalle I ; elle est donc constante d'après la proposition 23 de la page 222.

Exercice 1 D'après le théorème de dérivation des fonctions composées :

1. la fonction $G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & F(x+b) \end{array}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de g ;
2. la fonction $H : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{a}F(ax) \end{array}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de h.

Exercice 2 On cherche une primitive sous la forme $x \mapsto C(3x+2)^{-1/2+1} = C\sqrt{3x+2}$ avec $C \in \mathbb{K}$. La dérivée de cette fonction étant la fonction $x \mapsto \frac{3C}{2\sqrt{3x+2}}$, on en déduit qu'une primitive est la fonction $\begin{array}{ccc} \left]-\dfrac{2}{3},+\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2}{3}\sqrt{3x+2}. \end{array}$

Exercice 3

1. En réduisant au même dénominateur, on obtient :
$$A = -B = \frac{1}{\alpha-\beta}\cdot$$
2. Une primitive de f sur I est donc :
$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\alpha-\beta}\big(\ln|x-\alpha| - \ln|x-\beta|\big) = \dfrac{1}{\alpha-\beta}\ln\left|\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}\right|\cdot \end{array}$$

Exercice 4

1. On remarque que :
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\cos' x}{\cos x}\cdot$$
Par suite, la fonction cos étant positive sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, une primitive de f sur cet intervalle est :
$$\begin{array}{ccc} \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\ln(\cos x). \end{array}$$
2. On remarque que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{u'(x)}{u(x)^2},$$
où u est la fonction $x \mapsto 1+x^2$. Par conséquent, une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{-1}{2(1+x^2)}\cdot \end{array}$$

3. On remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\ln x}{x} = \ln'(x)\ln x.$$

Par conséquent, une primitive de h sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}(\ln x)^2. \end{array}$$

Exercice 5

1. Une linéarisation donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^3 x = \frac{\cos(3x)}{4} + \frac{3\cos(x)}{4}\cdot$$

Par suite, une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos^3 x$ est :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin(3x)}{12} + \frac{3\sin(x)}{4}\cdot \end{array}$$

2. Comme on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^3(x) = \cos(x)\,\left(1 - \sin^2(x)\right) = \sin'(x)\,\left(1 - \sin^2(x)\right),$$

une primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}\cdot \end{array}$$

3. On en déduit qu'il existe une constante C telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{\sin(3x)}{12} + \frac{3\sin(x)}{4} = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + C.$$

En évaluant en 0, on trouve $C = 0$ et donc la formule de linéarisation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin^3(x) = -\frac{\sin(3x)}{4} + \frac{3\sin(x)}{4}\cdot$$

Exercice 6 En utilisant les formules trigonométriques, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(2x)\sin(3x) = \frac{1}{2}\left(\sin(5x) + \sin x\right).$$

Par conséquent, une primitive de $x \mapsto \cos(2x)\sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\frac{\cos(5x)}{10} - \frac{\cos x}{2}\cdot \end{array}$$

Exercice 7 Une primitive de f sur I est $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{-1}{x-\alpha}\cdot \end{array}$

Exercice 8

1. La fonction $F : x \mapsto \dfrac{1}{\gamma} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{\gamma}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{(x/\gamma)^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + \gamma^2} = f(x).$$

   Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Compte tenu de la question précédente, on trouve qu'une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\beta} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right) \cdot \end{array}$$

Exercice 9

1. On remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\} \quad \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

   Une primitive de f_1 sur $I =]-\infty, 1[$, sur $I =]1,2[$ ou sur $I =]2, +\infty[$ est donc donnée par :

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right| \cdot \end{array}$$

2. On remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad \frac{1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

   Une primitive de f_2 sur $I =]-\infty, 2[$ ou sur $I =]2, +\infty[$ est donc donnée par :

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{-1}{x-2} \cdot \end{array}$$

3. On remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

   Donc le résultat de l'exercice 8 nous dit qu'une primitive de f_3 sur $\mathbb{R}$ est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \end{array}$$

Proposition 5 Soit $(a,b) \in I^2$. D'après le théorème précédent et la proposition 1 de la page 246, il existe une constante $C \in \mathbb{K}$ telle que :

$$\forall x \in I \quad F(x) = C + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En particulier :

$$F(b) - F(a) = C + \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - C - \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 7 Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités a et b, il en est de même de la fonction $u\,v$, et la proposition précédente permet d'écrire :

$$\begin{aligned} u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) &= \int_a^b (u\,v)'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Exercice 10 Pour calculer une primitive de la fonction Arctan sur $\mathbb{R}$, on calcule, pour tout réel x, l'intégrale

$$\int_0^x \operatorname{Arctan} t\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions :

$$u : t \mapsto \operatorname{Arctan} t \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto t$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^x \operatorname{Arctan} t\,\mathrm{d}t = \int_0^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t &= [u\,v]_0^x - \int_0^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [t \operatorname{Arctan} t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2). \end{aligned}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction Arctan est donc :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \operatorname{Arctan} x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2). \end{array}$$

Exercice 11 Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons $\displaystyle\int_0^x t^2 e^t\,\mathrm{d}t$. Les fonctions :

$$u : t \mapsto t^2 \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto e^t$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 e^t\,\mathrm{d}t = \int_0^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t &= [u\,v]_0^x - \int_0^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t^2 e^t\right]_0^x - \int_0^x 2te^t\,\mathrm{d}t = x^2 e^x - \int_0^x 2te^t\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Les fonctions :

$$u\ :\ t\mapsto 2t\qquad\text{et}\qquad v\ :\ t\mapsto e^t$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Une nouvelle intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int_0^x t^2e^t\,\mathrm{d}t &= x^2e^x-\int_0^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = x^2e^x-[u\,v]_0^x+\int_0^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t\\ &= x^2e^x-\left[2te^t\right]_0^x+\int_0^x 2e^t\,\mathrm{d}t = x^2e^x-2xe^x+\left[2e^t\right]_0^x\\ &= x^2e^x-2xe^x+2e^x-2.\end{aligned}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto x^2\,e^x$ est donc :

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^2e^x-2xe^x+2e^x.\end{array}$$

Exercice 12 Soit $x\in\,]-1,1[$. Calculons $\displaystyle\int_0^x \operatorname{Arcsin} t\,\mathrm{d}t$. Les fonctions :

$$u\ :\ t\mapsto \operatorname{Arcsin} t\qquad\text{et}\qquad v\ :\ t\mapsto t$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int_0^x \operatorname{Arcsin} t\,\mathrm{d}t &= \int_0^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u\,v]_0^x-\int_0^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t\\ &= [t\operatorname{Arcsin} t]_0^x-\int_0^x\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = x\operatorname{Arcsin} x-\int_0^x\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On reconnaît l'intégrale d'une fonction de la forme $x\mapsto\dfrac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}$ avec $u\ :\ t\mapsto 1-t^2$.

Par conséquent :

$$\int_0^x \operatorname{Arcsin} t\,\mathrm{d}t = x\operatorname{Arcsin} x+\left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^x = x\operatorname{Arcsin} x+\sqrt{1-x^2}-1.$$

Une primitive sur $]-1,1[$ de la fonction $x\mapsto\operatorname{Arcsin} x$ est donc :

$$\begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x\operatorname{Arcsin} x+\sqrt{1-x^2}.\end{array}$$

Remarque La fonction Arcsin étant continue sur $[-1,1]$, elle admet une primitive sur $[-1,1]$ mais la technique de calcul utilisée (qui exige un changement de variable $\mathcal{C}^1$) ne nous a permis d'en faire le calcul que sur $]-1,1[$.

La fonction obtenue est prolongeable par continuité sur $[-1,1]$. Il resterait à prouver que le prolongement obtenu est une primitive de la fonction Arcsin sur $[-1,1]$.

Exercice 13 Si $\lambda=0$ alors la fonction f est polynomiale donc elle admet une primitive polynomiale de degré $n+1$.

On suppose désormais que $\lambda \neq 0$. On va montrer le résultat par récurrence. Pour tout entier n, on pose $H(n)$:

« Si P est un polynôme de degré n, alors la fonction $f : x \mapsto P(x)e^{\lambda x}$ admet une primitive sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$ où Q est un polynôme de degré n ».

Initialisation : si le degré de P est nul alors il existe une constante C telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = Ce^{\lambda x}.$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc $x \mapsto \dfrac{C}{\lambda}e^{\lambda x}$.

Hérédité : supposons le résultat vérifié pour les polynômes d'un certain degré $n \in \mathbb{N}$ et considérons un polynôme P de degré $n+1$. Comme P' est de degré n, la fonction $g : x \mapsto \dfrac{P'(x)}{\lambda}e^{\lambda x}$ admet une primitive de la forme $x \mapsto R(x)e^{\lambda x}$ où R est un polynôme de degré n. Par suite, la fonction $x \mapsto \dfrac{P(x)}{\lambda}e^{\lambda x} - R(x)e^{\lambda x}$ est un primitive de f.

Le polynôme $Q = \dfrac{P}{\lambda} - R$ étant de degré $n+1$, l'assertion $H(n+1)$ est vraie.

Le résultat est donc prouvé par récurrence.

Proposition 8 Comme f est continue sur I, elle possède une primitive F. La fonction $F \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et sa dérivée est $\varphi' \times (f \circ \varphi)$. La proposition 6 de la page 254 donne donc :

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 14 Soit $x \in [-1,1]$, calculons l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Pour cela, on fait le changement de variable $t = \sin u$.

La fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} [-\pi/2, \pi/2] & \longrightarrow & [-1,1] \\ u & \longmapsto & \sin u \end{array}$ étant une bijection de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\operatorname{Arcsin} x} \cos u\,\sqrt{1-\sin^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\operatorname{Arcsin} x} \cos u\,|\cos u|\,\mathrm{d}u$$

Comme la fonction cos est positive sur $[-\pi/2, \pi/6]$, on est ramené à une intégrale que l'on sait calculer en linéarisant :

$$\begin{aligned}\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\operatorname{Arcsin} x} \cos^2 u\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{Arcsin} x} (1+\cos 2u)\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\operatorname{Arcsin} x}\\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x + \frac{1}{4}\sin(2\operatorname{Arcsin} x)\\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x + \frac{1}{2}\sin(\operatorname{Arcsin} x)\,\cos(\operatorname{Arcsin} x)\end{aligned}$$

Or, $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$, $\cos^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1 - \sin^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1 - x^2$.
Comme $\operatorname{Arcsin} x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\cos(\operatorname{Arcsin} x) \geqslant 0$ donc :

$$\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Par suite :

$$\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.$$

Ainsi, une primitive sur $[-1,1]$ de la fonction $\sqrt{1-x^2}$ est :

$$\begin{array}{rcl}[-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x + \dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.\end{array}$$

Remarque Bien qu'étant la somme de deux fonctions non dérivables en 1 et -1, la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $[-1,1]$ comme primitive sur cet intervalle de la fonction continue $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

Exercice 15

1. Soit $x \in \left]0,\pi\right[$. Calculons $\displaystyle\int_{\pi/2}^x \frac{1}{\sin u}\,\mathrm{d}u$. Pour cela, on fait le changement de variable $t = \tan\left(\dfrac{u}{2}\right)$ soit $u = 2\operatorname{Arctan} t$ et on utilise l'égalité :

$$\forall u \in \left]0,\pi\right[\quad \sin u = \frac{2\tan\left(\frac{u}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{u}{2}\right)}.$$

La fonction $\varphi : \begin{array}{rcl}\left]0,+\infty\right[& \longrightarrow & \left]0,\pi\right[\\ t & \longmapsto & 2\operatorname{Arctan} t\end{array}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. On a donc :

$$\int_{\pi/2}^x \frac{1}{\sin u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\tan(x/2)} \frac{1+t^2}{2t}\,\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\tan(x/2)} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot$$

Ainsi, une primitive de f sur $]0,\pi[$ est $\begin{array}{rcl}]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) \end{array}$.

On aurait pu avoir ce résultat directement si l'on avait remarqué que :

$$\forall x \in]0,\pi[\quad \frac{1}{\sin x} = \frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{avec} \quad u : \begin{array}{rcl}]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan\left(\dfrac{x}{2}\right). \end{array}$$

2. Soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Calculons $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t$. Pour cela, on fait le changement de variable $u = t + \pi/2$. On a donc :

$$\int_0^x \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{x+\pi/2} \frac{1}{\sin u}\,\mathrm{d}u = \left[\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]_{\pi/2}^{x+\pi/2} = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Ainsi, une primitive de g sur $]0,\pi[$ est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right). \end{array}$$

Proposition 12 On va prouver un résultat plus précis : si A est une primitive de la fonction a sur I, alors les solutions de l'équation homogène (E_0) sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{-A(t)} \end{array} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

- Soit φ une fonction dérivable sur I. La fonction $\Phi : x \mapsto e^{\varphi(x)}$ est alors dérivable sur I et :

$$\forall x \in I \quad \Phi'(x) + a(x)\,\Phi(x) = e^{\varphi(x)}\left(\varphi'(x) + a(x)\right)$$

donc Φ est solution de l'équation homogène si, et seulement si, φ est une primitive de la fonction $-a$. Comme la fonction a est continue sur l'intervalle I, elle admet une primitive A. Les fonctions de la forme :

$$\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & e^{-A(x)+C} \end{array} \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{K}.$$

c'est-à-dire les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda e^{-A(x)} \end{array} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

sont donc solutions de l'équation homogène.

- Réciproquement, soit $f \in \mathcal{S}_0$. Alors la fonction g définie sur I par $x \mapsto f(x)e^{A(x)}$ est dérivable sur I et vérifie :

$$\forall x \in I \quad g'(x) = \underbrace{\left(f'(x) + a(x)\,f(x)\right)}_{=0 \text{ car } f \in \mathcal{S}_0} e^{A(x)} = 0.$$

Donc la fonction g est constante sur l'intervalle I et l'on a bien l'existence d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall x \in I \quad f(x) = \lambda e^{-A(x)}.$$

En particulier :

- la fonction $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-A(x)} \end{array}$ est une solution non nulle de l'équation homogène et $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des fonctions qui lui sont proportionnelles ;
- si f_0 est une solution non nulle de l'équation homogène, alors il existe un scalaire non nul $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall x \in I \quad f_0(x) = \lambda_0 e^{-A(x)};$$

  par conséquent, la fonction f_0 ne s'annule pas sur I et l'ensemble des fonctions qui lui sont proportionnelles est aussi $\mathcal{S}_0$ c'est-à-dire $\mathcal{S}_0 = \{\lambda f_0\,;\ \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Exercice 16

1. On remarque que la fonction $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est une solution ; donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda x^2 \end{array} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

2. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$; donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda \exp\left(-\operatorname{Arctan} x\right) \end{array} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

3. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos x$ est $x \mapsto \sin x$; donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda \exp\left(-\sin x\right) \end{array} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

4. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est :

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right);$$

donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}} \end{array} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Exercice 17

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\lambda+a}e^{\lambda x}$ convient.
2. La fonction $x \mapsto xe^{\lambda x}$ convient.

Proposition 13 Pour tout $x \in I$, on a :

$$f_1'(x) + a(x)f_1(x) = b_1(x) \qquad \text{et} \qquad f_2'(x) + a(x)f_2(x) = b_2(x).$$

Par conséquent, pour tout $x \in I$, on a :

$$(f_1 + f_2)'(x) + a(x)(f_1 + f_2)(x) = b_1(x) + b_2(x),$$

ce qui prouve que $f_1 + f_2$ est solution de l'équation $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

Exercice 18 Une solution de l'équation homogène est la fonction $x \mapsto e^{-x}$. Comme

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

on cherche une solution de l'équation $y' + y = e^{ix}$ (respectivement de $y' + y = e^{-ix}$) sous la forme $x \mapsto Ce^{ix}$ (respectivement sous la forme $x \mapsto C'e^{-ix}$) et on obtient $C = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2}$ (respectivement $C' = \dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1+i}{2}$).

En utilisant le principe de superposition, on en déduit qu'une solution est :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1-i}{4}e^{ix} + \dfrac{1+i}{4}e^{-ix} = \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}\sin x. \end{array}$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}\sin x + \lambda e^{-x} \end{array} \qquad \text{avec} \qquad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Exercice 19

1. Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors y est solution de (E) si, et seulement si, la fonction définie par $z : x \mapsto y(x)e^{-ax}$ est solution de l'équation différentielle :

$$z'(x) = P(x)e^{(\lambda+a)x}. \qquad (E')$$

   D'après l'exercice 13 de la page 256, l'équation (E') admet une solution de la forme $z : x \mapsto Q(x)e^{(\lambda+a)x}$ où Q est un polynôme :

   - de degré n si $\lambda + a \neq 0$,
   - de degré $n + 1$ sinon.

   Par suite, l'équation (E) admet comme solution la fonction $y : x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$; ce qui prouve le résultat.

2. Si $\lambda = -a$, on sait qu'il existe un polynôme Q de degré $n + 1$ tel que la fonction $x \mapsto Q(x)e^{-ax}$ soit solution de l'équation (E). Comme la fonction $x \mapsto e^{-ax}$ est une solution de l'équation homogène associée, on en déduit que la fonction $x \mapsto \big(Q(x) - Q(0)\big)e^{-ax}$ est solution de l'équation (E). Le polynôme $R = Q - Q(0)$ convient donc.

Exercice 20 Une solution de l'équation homogène est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}\cdot$

Cherchons une solution particulière de la forme :

$$\begin{array}{rccl} f_1 : &]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\lambda(x)}{x} \end{array}$$

où λ est une fonction dérivable sur $]1,+\infty[$.

On trouve que la fonction f_1 est solution si, et seulement si, λ est une primitive sur $]1,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{(x+1)(x-1)+1}{x-1} = x+1+\dfrac{1}{x-1}\cdot$

Par conséquent, une solution particulière est $\begin{array}{rccl} f_1 : &]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{2}+1+\dfrac{\ln(x-1)}{x}\cdot \end{array}$

Ainsi, les solutions de l'équation sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{2}+1+\dfrac{\ln(x-1)}{x}+\dfrac{\lambda}{x} \end{array} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Proposition 14 Soit f_1 une solution particulière de (E) et f_0 une solution non nulle de l'équation homogène associée. Alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $f_1 + \lambda f_0$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

La condition $f(x_0) = y_0$ est donc équivalente à :

$$\lambda\, f_0(x_0) = y_0 - f_1(x_0).$$

Comme la fonction f_0 ne s'annule pas sur I (d'après la proposition 12 de la page 261), $f_0(x_0) \neq 0$ donc il y a une solution et une seule vérifiant $f(x_0) = y_0$, la fonction :

$$f_1 + \frac{y_0 - f_1(x_0)}{f_0(x_0)}\, f_0.$$

Exercice 21 Une solution non nulle de l'équation homogène est $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}\cdot$

Pour trouver une solution particulière, on la cherche sous la forme :

$$\begin{array}{rccl} f_1 : &]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\lambda(x)}{\sin x} \end{array}$$

où λ est une fonction dérivable sur $]0,\pi[$.

On trouve que la fonction f_1 est solution si, et seulement si, λ est une primitive sur $]0,\pi[$ de la fonction $\sin$. Par conséquent, les solutions de l'équation sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl}]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{C-\cos x}{\sin x} \end{array} \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{K}.$$

L'unique solution s'annulant en $\pi/2$ est donc :

$$\begin{array}{rcl}]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & -\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot \end{array}$$

Exercice 22

1. Soit y une solution de l'équation différentielle (E).
   Alors la fonction $z : x \mapsto y(x+T)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned} z'(x)+a(x)z(x) &= y'(x+T)+a(x)y(x+T) \\ &= y'(x+T)+a(x+T)y(x+T) && \text{car } a \text{ est } T\text{-périodique} \\ &= b(x+T) && \text{car } y \text{ est solution de } (E) \\ &= b(x) && \text{car } b \text{ est } T\text{-périodique.} \end{aligned}$$
   La fonction z est donc solution de l'équation différentielle (E).
2. Soit y une solution de l'équation différentielle (E). La fonction y est T-périodique si, et seulement si, les fonctions y et z coïncident. D'après le théorème de Cauchy, les fonctions y et z sont égales si, et seulement si, elles coïncident en un point. Par suite, la fonction y est T-périodique si, et seulement si, $y(0)=z(0)$ c'est-à-dire si, et seulement si, $y(0)=y(T)$.

Proposition 17 Cette équivalence provient de la relation :
$$\forall x \in I \quad \varphi_r''(x)+a\,\varphi_r'(x)+b\,\varphi_r(x)=(r^2+a\,r+b)\,\varphi_r(x)$$
et du fait que la fonction φ_r n'est pas la fonction nulle.

Proposition 18

- Soit r une racine de l'équation caractéristique et f une fonction deux fois dérivable sur I. La fonction z définie sur I par $z : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & e^{-rx} f(x) \end{array}$ est deux fois dérivable sur I et vérifie, pour tout $x \in I$:
  $$\begin{aligned} f(x) &= z(x)\,e^{rx}; \\ f'(x) &= \big(z'(x)+r\,z(x)\big)\,e^{rx}; \\ f''(x) &= \big(z''(x)+2\,r\,z'(x)+r^2 z(x)\big)\,e^{rx}. \end{aligned}$$
  Pour $x \in I$, on a donc :
  $$\begin{aligned} f''(x)+a\,f'(x)+b\,f(x) &= \big(z''(x)+(2\,r+a)\,z'(t)+(ar^2+a\,r+b)z(x)\big)\,e^{rx} \\ &= e^{rx}\big(z''(x)+(2\,r+a)\,z'(x)\big). \qquad (*) \end{aligned}$$
  Par conséquent, la fonction f est solution de (E_0) si, et seulement si, la fonction z' est solution d'un équation différentielle linéaire homogène du premier ordre :
  $$y'+(2\,r+a)y=0. \qquad (E_0')$$
- Nous avons deux cas suivant que le complexe $2r+a$ soit nul ou pas, c'est-à-dire suivant que l'équation caractéristique ait une racine double ou pas.
  * Si l'équation caractéristique $r^2+a\,r+b=0$ a deux racines distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de l'équation (E_0') sont les fonctions :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \lambda\, e^{-(2r_1+a)x} \end{array} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ainsi, la fonction f est solution de (E_0) si, et seulement s'il existe des constantes λ_1 et λ_2 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad z(x) = \lambda_1 + \lambda_2 e^{-(2r_1+a)x}$$

c'est-à-dire si, et seulement s'il existe des constantes λ_1 et λ_2 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{-(r_1+a)x}.$$

En remarquant que $r_1 + r_2 = -a$, on obtient le résultat annoncé.

* Si l'équation caractéristique $r^2 + a\,r + b = 0$ a une racine double r_0, alors $2a + r_0 = 0$ donc les solutions de l'équation (E_0') sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \lambda \end{array} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ainsi, la fonction f est solution de (E_0) si, et seulement s'il existe des constantes λ_1 et λ_2 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad z(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x$$

c'est-à-dire si, et seulement s'il existe des constantes λ_1 et λ_2 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \lambda_1 e^{r_0 x} + \lambda_2 x e^{r_0 x}.$$

On obtient donc le résultat annoncé.

Proposition 19

- Les deux premiers cas se traitent comme dans le cas complexe.
- Supposons que l'équation caractéristique $r^2 + a\,r + b = 0$ ait deux racines conjuguées $\alpha \pm i\beta$ avec $\beta \neq 0$.

  D'après la proposition 18 de la page 269, les fonctions :

$$\gamma_{\alpha,\beta} \;:\; x \mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x) = \frac{1}{2}\left(e^{(\alpha+i\beta)\,x} + e^{(\alpha-i\beta)\,x}\right)$$

  et :

$$\sigma_{a,\beta} \;:\; x \mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x) = \frac{1}{2i}\left(e^{(\alpha+i\beta)\,x} - e^{(\alpha-i\beta)\,x}\right)$$

  sont solutions de (E_0), et par conséquent il en est de même de toute fonction de la forme $\lambda_1\gamma_{\alpha,\beta} + \lambda_2\sigma_{a,\beta}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, d'après la proposition 15 de la page 268.

  Réciproquement, si f est une solution réelle de (E_0), alors, d'après la proposition 18 de la page 269, on peut trouver deux complexes μ_1 et μ_2 tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \mu_1\, e^{(\alpha+i\beta)\,x} + \mu_2\, e^{(\alpha-i\beta)\,x}.$$

  Comme f est réelle, elle est égale à sa partie réelle. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$\begin{aligned} f(x) - \overline{f(x)} = 0 &= \mu_1\, e^{(\alpha+i\beta)\,x} + \mu_2\, e^{(\alpha-i\beta)\,x} - \overline{\mu_1\, e^{(\alpha+i\beta)\,x} + \mu_2\, e^{(\alpha-i\beta)\,x}} \\ &= (\mu_1 - \overline{\mu_2})\, e^{(\alpha+i\beta)\,x} + (\mu_2 - \overline{\mu_1})\, e^{(\alpha-i\beta)\,x} \end{aligned}$$

  c'est-à-dire :

$$(\mu_1 - \overline{\mu_2})\,(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) + (\mu_2 - \overline{\mu_1})\,(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)) = 0.$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient $\mu_1 - \overline{\mu_2} = \overline{\mu_1} - \mu_2$. En évaluant en $x = \frac{\pi}{2\beta}$ (ce qui est possible car $\beta \neq 0$), on obtient $\mu_1 - \overline{\mu_2} = \mu_2 - \overline{\mu_1}$, donc $\mu_1 = \overline{\mu_2}$. Si l'on pose $\mu_1 = A + iB$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2\,\mathrm{Re}(\mu_1\, e^{(\alpha+i\beta)\,x}) = 2(A\gamma_{\alpha,\beta}(x) - B\sigma_{a,\beta}(x)).$$

Exercice 23 L'équation caractéristique $r^2 + 4r - 5 = 0$ admet comme racines 1 et -5 donc les solutions à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-5x} \end{array} \qquad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

Exercice 24 L'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$ admet 1 comme racine double, donc les solutions à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^x \end{array} \qquad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

Exercice 25 L'équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$ admet comme racines $-1 + i$ et $-1 - i$, donc les solutions complexes sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \lambda_1 e^{-x+ix} + \lambda_2 e^{-x-ix} \end{array} \qquad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$$

et les solutions réelles sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x)e^{-x} \end{array} \qquad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Proposition 20

- La fonction $f : x \mapsto e^{\lambda x}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) + a\,f'(x) + b\,f(x) = \big(\lambda^2 + a\lambda + b\big)\,e^{\lambda x}.$$

  Ainsi, si λ n'est pas racine de l'équation $r^2 + a\,r + b = 0$, alors la fonction :

  $$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\lambda^2 + a\lambda + b} e^{\lambda x} \end{array}$$

  est solution de l'équation différentielle (E).

- La fonction $f : x \mapsto xe^{\lambda x}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) + a\,f'(x) + b\,f(x) = \big((\lambda^2 + a\lambda + b)x + 2\lambda + a\big)\,e^{\lambda x}.$$

  Ainsi, si λ est racine simple de l'équation $r^2 + a\,r + b = 0$, alors $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ et $\lambda \neq -\dfrac{a}{2}$ donc la fonction :

  $$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2\lambda + a} x e^{\lambda x} \end{array}$$

  est solution de l'équation différentielle (E).

- La fonction $f : x \mapsto x^2 e^{\lambda x}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) + a\, f'(x) + b\, f(x) = \big((\lambda^2 + a\lambda + b)x^2 + (4\lambda + 2a)x + 2\big)\, e^{\lambda x}.$$
Ainsi, si λ est racine double de l'équation $r^2 + a\, r + b = 0$, alors $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ et $\lambda = -\dfrac{a}{2}$. Donc la fonction :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}x^2 e^{\lambda x} \end{array}$$
est solution de l'équation différentielle (E).

Exercice 26

1. Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution de la forme $x \mapsto C\, e^{-x}$ et l'on trouve $x \mapsto \dfrac{1}{8}\, e^{-x}$. Les solutions sont donc les fonctions :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{8}\, e^{-x} + \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{3x} \end{array} \qquad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

2. Comme 1 est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $x \mapsto Cx\, e^x$ et l'on trouve $x \mapsto -\dfrac{x}{2}\, e^x$. Les solutions sont donc les fonctions :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & -\dfrac{x}{2}\, e^x + \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{3x} \end{array} \qquad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

3. Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $x \mapsto Cx^2\, e^x$ et l'on trouve $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2\, e^x$. Les solutions sont donc les fonctions :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \left(\dfrac{1}{2}x^2 + \lambda_1 + \lambda_2 x\right)\, e^x \end{array} \qquad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

Exercice 27

1. En utilisant le principe de superposition et les solutions de l'exercice précédent, on obtient la solution particulière suivante :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & -\dfrac{1}{16}\, e^{-x} - \dfrac{x}{4} e^x. \end{array}$$
Les solutions sont donc les fonctions :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & -\dfrac{1}{16}\, e^{-x} - \dfrac{x}{4} e^x + \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{3x} \end{array} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

2. Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions :

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2. \end{array}$$

On linéarise le second membre :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin^3 x = -\frac{1}{4} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x$$

et l'on utilise le principe de superposition. On est ainsi amené à déterminer une solution f_1 de $y'' + y = \sin 3x$ et une solution f_2 de $y'' + y = \sin x$.

Comme la fonction $x \mapsto \sin 3x$ est combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto e^{3ix}$ et $x \mapsto e^{-3ix}$, et que $\pm 3i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut chercher f_1 comme combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto e^{3ix}$ et $x \mapsto e^{-3ix}$, c'est-à-dire sous la forme $x \mapsto a \cos 3x + b \sin 3x$. On trouve :

$$f_1 \,:\, x \mapsto -\frac{\sin 3x}{8}.$$

De même on cherche la solution f_2 de la forme :

$$x \mapsto a\, x \cos x + c\, x \sin x,$$

ce qui donne $f_2 \,:\, x \mapsto -\dfrac{1}{2} x \cos x$. Les solutions sont donc les fonctions :

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin 3x}{32} + \left(\lambda_1 - \dfrac{3x}{8}\right) \cos x + \lambda_2 \sin x \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2. \end{array}$$

Exercice 28

1. La fonction z est deux fois dérivable sur I et vérifie, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f''(x) + a\, f'(x) + b\, f(x) &= \big(z''(x) + (2\,r + a)\, z'(t) + (ar^2 + a\,r + b) z(x)\big)\, e^{rx} \\ &= e^{rx} \big(z''(x) + (2\,r + a)\, z'(x)\big). \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction z' est solution de l'équation différentielle :

$$y' + (2r + a)\, y = c(x) e^{-rx}. \qquad (E')$$

2. D'après l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre 1, l'équation (E') possède une solution g qui est dérivable sur I, donc continue sur I ; ce qui assure l'existence d'une primitive G sur I. La fonction $x \mapsto G(x) e^{rx}$ est alors une solution de l'équation (E)

Proposition 23 On sait que les solutions de l'équation homogène (E_0) sont combinaisons linéaires de deux solutions non proportionnelles u et v.

- Si l'équation caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2, on a :

$$u \,:\, x \mapsto e^{r_1 x} \qquad \text{et} \qquad v \,:\, x \mapsto e^{r_2 x}.$$

- Si l'équation caractéristique a une racine double r, on a :

$$u \,:\, x \mapsto e^{rx} \qquad \text{et} \qquad v \,:\, x \mapsto x\, e^{rx}.$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si l'équation caractéristique a deux racines non réelles $\alpha \pm i\,\beta$, on a :

$$u \,:\, x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\beta\, x) \qquad \text{et} \qquad v \,:\, x \mapsto e^{\alpha x} \sin(\beta\, x).$$

D'après le théorème précédent, il existe une solution particulière f_1. La solution générale de (E) s'écrit donc :

$$f\ :\ x \mapsto f_1(x) + \lambda_1\, u(x) + \lambda_2\, v(x) \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

La fonction f vérifie $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} \lambda_1\, u\,(x_0) + \lambda_2\, v\,(x_0) = y_0 - f_1(x_0) \\ \lambda_1\, u'(x_0) + \lambda_2\, v'(x_0) = y_1 - f_1'(x_0). \end{cases}$$

Si ce système admet une solution alors en multipliant la première ligne du système par $v'(x_0)$ (respectivement $u'(x_0)$) et en lui soustrayant la deuxième multipliée par $v(x_0)$ (respectivement $u(x_0)$), alors, en posant $\Delta = u(x_0)\, v'(x_0) - u'(x_0)\, v(x_0)$, on obtient :

$$\begin{cases} \Delta\lambda_1 = (y_0 - f_1(x_0))\, v'(x_0) - (y_1 - f_1'(x_0))\, v(x_0) \\[2ex] -\Delta\lambda_2 = (y_0 - f_1(x_0))\, u'(x_0) - (y_1 - f_1'(x_0))\, u(x_0). \end{cases}$$

Dans tous les cas, on vérifie que $\Delta \neq 0$ donc le système admet au plus une solution. Réciproquement, on vérifie que ce couple est solution. Il y a donc exactement une solution au problème de Cauchy.

S'entraîner et approfondir

⋆ **5.1** Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles sur lesquels la fonction en facteur de y' ne s'annule pas :

1. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$,
2. $(x \ln x)\, y' - y = -\dfrac{1}{x}(\ln x + 1)$,
3. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$,
4. $(1-x)y' + y = \dfrac{x-1}{x}$,
5. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$,
6. $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$,
7. $2xy' + y = x^n$, où n est un entier.

5.2 Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique dirigé suivant l'axe Oz est régi par un système différentiel de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} x'' = \omega\, y' \\ y'' = -\omega\, x' \\ z'' = 0 \end{array}\right.$$

où ω est une constante dépendant de la masse et de la charge de la particule ainsi que du champ magnétique. En utilisant la fonction $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

⋆⋆ **5.3** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ (c'est-à-dire deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée seconde est continue sur $\mathbb{R}$).

1. Montrer qu'il existe une unique application g de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \int_0^x (x-t)g(t)\,\mathrm{d}t + f(x). \qquad (E)$$

2. Trouver la fonction g dans le cas où $f = \cos$.

5.4 Résoudre les équations suivantes :

1. $y'' + 3y' + 2y = e^x$,
2. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$,
3. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$,
4. $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$,
5. $y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x} \cos x + 7e^{-x} \sin x - 4e^x \sin 2x$.

⋆⋆ **5.5** Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ et (E) l'équation différentielle :

$$y'' + a\,y' + b\,y = P(x)e^{\lambda x}$$

1. Soit f une fonction deux fois dérivable sur I et z la fonction définie sur I par $z:\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & e^{-rx}f(x) \end{array}$ où r vérifie $r^2+ar+b=0$.

   Montrer que la fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction z' est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre un.
2. En utilisant les exercices 19 de la page 263 et 13 de la page 256, montrer que l'équation (E) admet une solution particulière de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$ où Q est un polynôme :
   - de degré n si λ n'est pas racine de l'équation $r^2+a\,r+b=0$,
   - de degré $n+1$ si λ est racine simple de l'équation $r^2+a\,r+b=0$,
   - de degré $n+2$ si λ est racine double de l'équation $r^2+a\,r+b=0$.
3. Résoudre les équations suivantes :

   (a) $y''+4y'+4y=(16x^2+16x-14)e^{2x}$;

   (b) $y''-3y'+2y=(-3x^2+10x-7)e^{x}$;

   (c) $y''-4y'+4y=x\,\mathrm{ch}\,2x$.

⋆ **5.6** Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y''+y'-6y=1-8x-30x^2$,
2. $y''+y'=3+2x$,
3. $y''+4y=4+2x-8x^2-4x^3$.

On pourra utiliser l'exercice précédent.

⋆ **5.7** Résoudre l'équation différentielle suivante sur tout intervalle ne contenant pas -1 :

$$(1+x)^2y''+(1+x)y'-2=0. \qquad (E)$$

⋆⋆ **5.8** On considère l'équation :

$$(1-x^2)y''-xy'+y=0. \qquad (E)$$

Résoudre cette équation sur $I=\left]-1,1\right[$ en considérant la fonction $z\ :\ t\mapsto y(\sin t)$.

⋆ **5.9** Soit (E) l'équation différentielle :

$$xy''+2(x+1)y'+(x+2)y=0.$$

En considérant la fonction $z\ :\ x\mapsto x\,y(x)$, résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$.

⋆ **5.10** Soit (E) l'équation différentielle :

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0 \quad \text{avec} \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2.$$

1. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $I = \mathbb{R}_+^*$. Montrer que y est solution de (E) sur I si, et seulement si, la fonction $z\ :\ t \mapsto y(e^t)$ est solution d'une équation du second ordre à coefficients constants que l'on donnera.
2. Résoudre l'équation :
$$x^2y'' - xy' + y = 0$$
sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

⋆ **5.11** Trouver toutes les applications f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x)f(y). \tag{$*$}$$

⋆⋆ **5.12** Trouver toutes les applications f non nulles et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y). \tag{$*$}$$

Parmi ces applications, déterminer celles qui sont à valeurs réelles.

⋆ **5.13** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(\lambda - x). \tag{$*$}$$

1. Montrer que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions vérifiant $(*)$.

⋆⋆ **5.14** Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right). \tag{$*$}$$

1. Montrer que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions vérifiant $(*)$.
(On pourra utiliser l'exercice 5.10)

Solution des exercices

5.1 1. Une solution de l'équation homogène est la fonction $x \mapsto e^{-2x}$. Le second membre étant polynomial, on cherche une solution particulière Q polynomiale. On souhaite que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Q'(x) + 2Q(x) = x^2 - 2x + 3.$$

Afin que $x \mapsto Q'(x) + 2Q(x)$ soit de degré 2, on cherche donc Q de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$. Ainsi, Q est solution si, et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2 - 2x + 3.$$

ce qui est vrai si, et seulement si, (a, b, c) est solution du système :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = -2 \\ b + 2c = 3 \end{cases}$$

On obtient une unique solution : $(1/2, -3/2, 9/4)$.

Les solutions sont donc les fonctions $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda e^{-2x} + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{4} \end{array}$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

2. On se place sur l'intervalle $I =]0,1[$ ou sur $I =]1,+\infty[$. Sur l'intervalle I, l'équation différentielle se réécrit :

$$y' - \frac{1}{x \ln x} y = -\frac{\ln x + 1}{x^2 \ln x}\cdot$$

Comme

$$\forall x \in I \quad \frac{1}{x \ln x} = \frac{\ln'(x)}{\ln(x)},$$

une solution de l'équation homogène est la fonction $x \mapsto \ln x$.

On cherche une solution de la forme $x \mapsto \lambda(x) \ln x$ avec λ une fonction dérivable sur I. On est alors ramené à trouver une primitive sur I de la fonction $x \mapsto -\dfrac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}\cdot$ On remarque que :

$$\forall x \in I \quad \frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x} = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

où u est la fonction $x \mapsto x \ln x$. Par conséquent, une primitive sur I de la fonction $x \mapsto -\dfrac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}\cdot$

Les solutions sur I sont donc les fonctions $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} + \lambda \ln x \end{array}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

On aurait, bien sûr, pu remarquer que la fonction $x \mapsto 1/x$ était une solution particulière.

3. On se place sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$. Sur l'intervalle I, l'équation différentielle se réécrit :
$$y' + \frac{1}{1+x}y = \frac{1+\ln(1+x)}{1+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x}\cdot$$
Une solution de l'équation homogène est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est une solution particulière. Les solutions sur I sont donc les fonctions :
$$\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x) + \dfrac{\lambda}{1+x} \end{array} \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

4. On se place sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_-^*$, sur $I =]0,1[$ ou sur $I =]1, +\infty[$. Sur l'intervalle I, l'équation différentielle se réécrit :
$$y' + \frac{1}{1-x}y = -\frac{1}{x}\cdot$$
Une solution de l'équation homogène est la fonction $x \mapsto x-1$. On cherche une solution de la forme $x \mapsto \lambda(x)(x-1)$ avec λ une fonction dérivable sur I. On est alors ramené à trouver une primitive sur I de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x(1-x)}$. On écrit :
$$\forall x \in I \quad \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\cdot$$
Par suite, une solution particulière est donnée par :
$$\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x-1)\ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right|. \end{array}$$
Les solutions sur I sont donc les fonctions :
$$\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \left(\ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right| + \lambda\right)(x-1) \end{array} \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

5. Une solution de l'équation homogène est la fonction $x \mapsto e^{-x}$. On cherche une solution de la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{-x}$ avec λ une fonction dérivable sur I. On est alors ramené à trouver une primitive sur I de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}\cdot$

On remarque que :
$$\forall x \in I \quad \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$
où u est la fonction $x \mapsto 1+e^x$. Par conséquent, une primitive sur I de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$ est donnée par $x \mapsto \ln(1+e^x)$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & e^{-x}\ln(1+e^x) + \lambda e^{-x} \end{array}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

6. On se place sur un intervalle $I_n =]n\pi, (n+1)\pi[$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Une solution de l'équation homogène est la fonction $x \mapsto \sin x$. On remarque d'autre part que la fonction $x \mapsto \cos x$ est une solution particulière de l'équation. Les solutions sur I_n sont donc les fonctions $\begin{array}{ccc} I_n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \cos x + \lambda \sin x \end{array}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

7. On se place sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$. Une solution de l'équation homogène est donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}\cdot$

   En cherchant une solution particulière sous la forme $x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{\sqrt{|x|}}$ avec λ une fonction dérivable sur I, on obtient la solution $x \mapsto \dfrac{x^n}{2n+1}\cdot$ Les solutions sur I sont donc les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^n}{2n+1} + \dfrac{\lambda}{\sqrt{|x|}} \end{array} \qquad \text{avec} \qquad \lambda \in \mathbb{K}.$$

5.2 Les solutions de l'équation $z'' = 0$ sont les fonctions affines.

Soit x et y deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Le couple (x, y) vérifie le système différentiel :

$$\begin{cases} x'' = \omega\, y' \\ y'' = -\omega\, x' \end{cases}$$

si, et seulement si, la fonction $u = x' + iy'$ est solution de l'équation $u' = -i\omega u$ dont les solutions sont les fonctions :

$$u \,:\, t \mapsto u(0)e^{-i\omega t} = (x'(0)\cos\omega t + y'(0)\sin\omega t) + i(-x'(0)\sin\omega t + y'(0)\cos\omega t).$$

Par suite, le couple (x, y) est solution si, et seulement si, pour tout réel t, on a :

$$x'(t) = x'(0)\cos\omega t + y'(0)\sin\omega t \qquad \text{et} \qquad y'(t) = -x'(0)\sin\omega t + y'(0)\cos\omega t$$

c'est-à-dire :

$$x(t) = \frac{x'(0)}{\omega}\sin\omega t - \frac{y'(0)}{\omega}\cos\omega t + x(0) + \frac{y'(0)}{\omega}$$

et

$$y(t) = \frac{x'(0)}{\omega}\cos\omega t + \frac{y'(0)}{\omega}\sin\omega t + y(0) - \frac{x'(0)}{\omega}\cdot$$

5.3 1. Raisonnons par analyse-synthèse.

- Si une application g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ convient, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = x\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t + f(x)$$

donc, en dérivant la relation (ce qui est possible du fait de la régularité des fonctions f et g), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + xg(x) - xg(x) + f'(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + f'(x)$$

puis, en redérivant (ce qui est toujours possible du fait de la régularité des fonctions f et g), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g''(x) = g(x) + f''(x).$$

Ainsi, g est solution de l'équation différentielle $g'' - g = f''$. De plus, $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$. D'après le théorème de Cauchy, il existe une unique solution vérifiant ces hypothèses. Par suite, si une telle fonction g existe, alors elle est unique.

- Soit g l'unique solution de l'équation différentielle $g'' - g = f''$ vérifiant les conditions initiales $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$, alors les fonctions g et $h : x \mapsto \int_0^x (x-t)g(t)\,\mathrm{d}t + f(x)$ vérifient $g'' = h''$, $g(0) = h(0)$ et $g'(0) = h'(0)$. Elles coïncident donc sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, il existe une unique fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant (E), il s'agit de l'unique solution de l'équation différentielle $g'' - g = f''$ vérifiant les conditions initiales $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$.

2. Étudions l'équation différentielle $y'' - y = -\cos x$. Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x} \end{array} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$$

Une solution particulière est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\cos x$. Par conséquent, les solutions de l'équation différentielle $y'' - y = -\cos x$ sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\cos x \end{array} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

L'unique solution vérifiant les conditions initiales :

$$g(0) = f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad g'(0) = f'(0) = 0$$

est donc la fonction $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right) + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x + \cos x). \end{array}$

5.4 1. L'équation caractéristique est $r^2 + 3r + 2 = 0$ qui a deux racines -2 et -1. On cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto \lambda e^x$. Les solutions sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{6}e^x + \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 e^{-x} \end{array} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

2. L'équation caractéristique est $r^2+3r+2=0$ qui a deux racines -2 et -1. On cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto \lambda x e^{-x}$. Les solutions sont les fonctions :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & xe^{-x}+\lambda_1 e^{-2x}+\lambda_2 e^{-x} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2. \end{array}$$

3. L'équation caractéristique est $r^2+2r+1=0$ qui une racine double -1. On cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto Cx^2e^{-x}$. Les solutions sont les fonctions :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & x^2e^{-x}+\lambda_1 e^{-x}+\lambda_2 xe^{-x} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2. \end{array}$$

4. L'équation caractéristique est $r^2+r-2=0$ dont les racines sont 1 et -2. On cherche une solution particulière de l'équation sous la forme $x \mapsto \lambda\sin(2x)+\mu\cos(2x)$. Les solutions sont les fonctions :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda_1 e^{x}+\lambda_2 e^{-2x}-\dfrac{6}{5}\sin 2x-\dfrac{2}{5}\cos 2x \quad \text{avec} \quad (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2. \end{array}$$

5. L'équation caractéristique est $r^2-2r+5=0$ dont les solutions sont $1-2i$ et $1+2i$. On cherche une solution particulière de l'équation différentielle :
$$y''-2y'+5y=-4e^{-x}\cos x+7e^{-x}\sin x$$
sous la forme $x \mapsto \alpha e^{-x}\sin x+\beta e^{-x}\cos x$. On trouve la fonction $f_1 : x \mapsto e^{-x}\sin x$. On cherche une solution particulière de l'équation différentielle :
$$y''-2y'+5y=-4e^{x}\sin 2x=\operatorname{Im}(-4e^{(1+2i)x})$$
sous la forme $x \mapsto \alpha xe^{x}\sin 2x+\beta xe^{x}\cos 2x$. On trouve la fonction $f_2 : x \mapsto xe^{x}\cos 2x$. Les solutions sont donc les fonctions :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f_1(x)+f_2(x)+\lambda_1 e^{x}\cos 2x+\lambda_2 e^{x}\sin 2x \quad \text{avec} \quad (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2. \end{array}$$

5.5 1. Soit r une racine de l'équation caractéristique et f une fonction deux fois dérivable sur I. La fonction z définie sur I par $z : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & e^{-rx}f(x) \end{array}$ est deux fois dérivable sur I et vérifie, pour tout $x\in I$:
$$f(x)=z(x)\,e^{rx};$$
$$f'(x)=\big(z'(x)+r\,z(x)\big)\,e^{rx};$$
$$f''(x)=\big(z''(x)+2\,r\,z'(x)+r^2z(x)\big)\,e^{rx}.$$
Pour $x\in I$, on a donc :
$$\begin{aligned} f''(x)+a\,f'(x)+b\,f(x) &= \big(z''(x)+(2\,r+a)\,z'(x)+(r^2+a\,r+b)z(x)\big)\,e^{rx} \\ &= e^{rx}\big(z''(x)+(2\,r+a)\,z'(x)\big). \qquad (*) \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction z' est solution de l'équation différentielle :

$$y' + (2r+a)y = P(x)e^{(\lambda-r)x}. \qquad (E')$$

2. D'après l'exercice 19 de la page 263, cette équation possède une solution particulière de la forme $x \mapsto R(x)e^{(\lambda-r)x}$ où R est un polynôme :
   - de degré n si $\lambda + r + a \neq 0$,
   - de degré $n+1$ sinon.

   D'après l'exercice 13 de la page 256, il existe une primitive de la fonction $x \mapsto R(x)e^{(\lambda-r)x}$ de la forme $x \mapsto Q(x)e^{(\lambda-r)x}$ où Q est un polynôme :
   - de degré $\deg R + 1$ si $\lambda - r \neq 0$,
   - de même degré que R sinon.

   Par suite, la fonction $x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$ est solution de l'équation (E) où Q est un polynôme :
   - de degré n si $\lambda \neq r$ et $\lambda \neq -a-r$;
   - de degré $n+1$ si $\lambda = r$ ou $\lambda = -a-r$;
   - de degré $n+2$ si $\lambda = r = -a-r$;

   Comme la deuxième racine de l'équation caractéristique est égale à $-a-r$, on en déduit le résultat annoncé.

3. (a) L'équation caractéristique est $r^2+4r+4=0$ qui une racine double -2.
   On cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto P(x)e^{2x}$ avec P de degré 2. Les solutions sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & (x^2-1)e^{2x} + \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 x e^{-2x} \end{array} \qquad \text{avec} \quad (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

   (b) L'équation caractéristique est $r^2-3r+2=0$ qui a deux racines 1 et 2.
   On cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto P(x)e^{x}$ avec P de degré 3 sans coefficient constant. Les solutions sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & (x^3-2x^2+3x)e^{x} + \lambda_1 e^{x} + \lambda_2 e^{2x} \end{array} \qquad \text{avec} \quad (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

   (c) L'équation caractéristique est $r^2-4r+4=0$ qui a une racine double 2.
   On cherche une solution particulière de $y''-4y'+4y = \dfrac{x}{2}e^{2x}$ sous la forme $x \mapsto \lambda x^3 e^{2x}$ et de $y''-4y'+4y = \dfrac{x}{2}e^{-2x}$ sous la forme $x \mapsto \lambda P(x)e^{2x}$ avec P de degré 1 puis l'on applique le principe de superposition des solutions. Les solutions sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^3e^{2x}}{12} + \dfrac{xe^{-2x}}{32} + \dfrac{e^{-2x}}{64} + (\lambda_1+\lambda_2 x)\, e^{2x} \end{array} \qquad \text{avec} \quad (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

5.6 1. L'équation caractéristique est $r^2+r-6=0$ qui a deux racines 2 et -3.
On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2 : on

trouve la fonction $x \mapsto 2+3x+5x^2$. Les solutions sont donc les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & 2+3x+5x^2+\lambda_1 e^{2x}+\lambda_2 e^{-3x} \end{array} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2.$$

2. L'équation caractéristique est $r^2+r=0$ qui a deux racines 0 et -1.
   On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2 sans terme constant (car les fonctions constantes sont solutions de l'équation homogène). On trouve la fonction $x \mapsto x+x^2$. Les solutions sont donc les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & x+x^2+\lambda_1+\lambda_2 e^{-x} \end{array} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2.$$

3. L'équation caractéristique est $r^2+4=0$ qui a deux racines $2i$ et $-2i$.
   On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3. On trouve la fonction $x \mapsto 2+2x-2x^2-x^3$. Les solutions réelles sont donc les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2+2x-2x^2-x^3+\lambda_1\cos 2x+\lambda_2\sin 2x \end{array} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2.$$

   et les solutions complexes sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & 2+2x-2x^2-x^3+\lambda_1 e^{2ix}+\lambda_2 e^{-2ix} \end{array} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2.$$

5.7 On se place sur un intervalle I ne contenant pas -1. Une fonction y deux fois dérivable sur I est solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si, la fonction $z=y'$ est solution sur I de l'équation différentielle :

$$z'+\frac{1}{(1+x)}z=\frac{2}{(1+x)^2}. \qquad (E')$$

Une solution de l'équation homogène associée à (E') est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}\cdot$
Une solution particulière obtenue par la méthode de variation de la constante est la fonction $x \mapsto 2\dfrac{\ln|1+x|}{1+x}\cdot$

Les solutions de l'équation (E') sont donc les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2\ln|1+x|}{1+x}+\dfrac{\lambda}{1+x} \end{array} \quad \text{avec} \quad \lambda\in\mathbb{K}.$$

Par conséquent, les solutions de l'équation (E) sur I sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & (\ln|1+x|)^2+\lambda_1\ln|1+x|+\lambda_2 \end{array} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2.$$

5.8 Comme y est deux fois dérivable sur I, et par définition de z, il est clair que z est deux fois dérivable sur $J = \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. La relation :

$$\forall x \in I \quad y(x) = z\left(\operatorname{Arcsin} x\right).$$

nous donne alors :

$$\forall x \in I \quad y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} z'\left(\operatorname{Arcsin} x\right)$$

et :

$$\forall x \in I \quad y''(x) = \frac{1}{1-x^2} z''\left(\operatorname{Arcsin} x\right) + \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} z'\left(\operatorname{Arcsin} x\right).$$

Ainsi, pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned}(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) &= z''\left(\operatorname{Arcsin} x\right) + \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}} z'\left(\operatorname{Arcsin} x\right)\\ &\quad - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} z'\left(\operatorname{Arcsin} x\right) + z\left(\operatorname{Arcsin} x\right)\\ &= z''\left(\operatorname{Arcsin} x\right) + z\left(\operatorname{Arcsin} x\right)\end{aligned}$$

Comme la fonction Arcsin établit une bijection de I dans J, la fonction y est solution de l'équation différentielle (E) sur I si, et seulement si, la fonction z est solution sur J de l'équation :

$$z'' + z = 0,$$

c'est-à-dire si, et seulement s'il existe des constantes A et B telles que :

$$\forall t \in J \quad z(t) = A \sin t + B \cos t,$$

c'est-à-dire si, et seulement s'il existe des constantes A et B telles que :

$$\forall x \in I \quad y(x) = A \sin(\operatorname{Arcsin} x) + B \cos(\operatorname{Arcsin} x) = Ax + B\sqrt{1-x^2}.$$

5.9 Soit y une fonction deux fois dérivable sur $I = \mathbb{R}_+^*$. On définit la fonction z sur I par $z : x \mapsto xy(x)$. On a alors :

$$\forall x \in I \quad y(x) = \frac{z(x)}{x}\cdot$$

La fonction z est deux fois dérivable sur I et l'on a :

$$\forall x \in I \quad y'(x) = \frac{z'(x)}{x} - \frac{z(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad y''(x) = \frac{z''(x)}{x} - 2\frac{z'(x)}{x^2} + 2\frac{z(x)}{x^3}\cdot$$

Ainsi, la fonction y est solution de l'équation différentielle (E) sur I si, et seulement si, la fonction z est solution sur I de l'équation :

$$z'' + 2z' + z = 0 \qquad (E')$$

donc si, et seulement s'il existe des constantes A et B telles que :

$$\forall x \in I \quad z(x) = Axe^{-x} + Be^{-x}$$

c'est-à-dire si, et seulement s'il existe des constantes A et B telles que :

$$\forall x \in I \quad y(x) = Ae^{-x} + B\frac{e^{-x}}{x}\cdot$$

5.10 1. Soit y une fonction deux fois dérivable sur I. On définit la fonction z sur $\mathbb{R}$ par $z : t \mapsto y(e^t)$. On a alors :

$$\forall x \in I \quad y(x) = z(\ln x).$$

La fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\forall x \in I \quad y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln x) \quad \text{et} \quad y''(x) = \frac{1}{x^2} z''(\ln x) - \frac{1}{x^2} z'(\ln x).$$

Ainsi, la fonction y est solution de l'équation différentielle (E) sur I si, et seulement si, la fonction z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation du second ordre à coefficients constants :

$$az'' + (b-a)z' + cz = 0. \tag{E'}$$

2. On en déduit, suivant les racines de l'équation caractéristique de (E'), la forme des solutions de (E') sur $\mathbb{R}$ et donc de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, les solutions de (E) sont les fonctions :

$$\begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda_1 x^{r_1} + \lambda_2 x^{r_2} \end{array} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

- Si l'équation caractéristique admet une racine double r_0, les solutions de (E) sont les fonctions :

$$\begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda_1 x^{r_0} + \lambda_2 x^{r_0} \ln x \end{array} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

- Si l'équation admet deux racines complexes non réelles conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, alors les solutions de (E) sont les fonctions :

$$\begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda_1 x^{\alpha} \cos(\beta \ln x) + \lambda_2 x^{\alpha} \sin(\beta \ln x) \end{array} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

Pour trouver les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ de (E), on remarque que la fonction y est solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ si, et seulement si, la fonction $z : x \mapsto y(-x)$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation (E).

3. Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions :

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda_1 x + \lambda_2 x \ln x \end{array} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions :

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}_-^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda_1 x + \lambda_2 x \ln(-x) \end{array} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

5.11 Raisonnons par analyse synthèse.

- Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$. On a alors :

$$f(0) = f(0)^2.$$

Si $f(0) = 0$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x)f(0) = 0$$

donc f est la fonction nulle.

Sinon, $f(0)=1$. En fixant y et en dérivant par rapport à x, on obtient :

$$\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2 \quad f'(x+y)=f'(x)f(y).$$

En particulier :

$$\forall x\in \mathbb{R} \quad f'(x)=f'(0)f(x)$$

donc f est solution de $y'=f'(0)y$. En posant $\lambda=f'(0)$, on a alors :

$$\forall x\in \mathbb{R} \quad f(x)=f(0)e^{\lambda x}=e^{\lambda x}.$$

- Réciproquement, les fonctions $x\mapsto e^{\lambda x}$ avec $\lambda\in\mathbb{C}$ vérifient $(*)$.

Les solutions sont donc la fonction nulle et :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & e^{\lambda x} \end{array} \quad \text{avec} \quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

5.12 Raisonnons par analyse synthèse.

- Soit f une fonction non nulle deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$.
  On a alors : $f(0)=f(0)^2$.
  * Si $f(0)=0$, alors :
  $$\forall x\in\mathbb{R} \quad 2f(x)=2f(0)f(x)=0$$
  donc f est la fonction nulle ce qui est exclu.
  * Donc, $f(0)=1$. On en déduit que :
  $$\forall y\in\mathbb{R} \quad f(y)+f(-y)=2f(y)$$
  c'est-à-dire que la fonction f est paire.
  * En fixant y et en dérivant par rapport à x, on obtient :
  $$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f'(x+y)+f'(x-y)=2f'(x)f(y)$$
  puis en redérivant, on a :
  $$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f''(x+y)+f''(x-y)=2f''(x)f(y). \tag{1}$$
  * En fixant x et en dérivant deux fois par rapport à y, on obtient :
  $$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f''(x+y)+f''(x-y)=2f(x)f''(y). \tag{2}$$
  Des relations (1) et (2), on obtient :
  $$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f''(x)f(y)=f(x)f''(y).$$
  En particulier, en prenant $y=0$, comme $f(0)=1$, on en déduit que :
  $$\forall x\in\mathbb{R} \quad f''(x)=f''(0)f(x).$$
  * Soit $\omega\in\mathbb{C}$ tel que $\omega^2=f''(0)$. Alors, comme f' est impaire, f est l'unique solution du problème de Cauchy suivant :
  $$\begin{cases} y''-\omega^2 y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0. \end{cases}$$
  Par suite, on a $f:\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^{\omega x}+e^{-\omega x}}{2}. \end{array}$

- Réciproquement, pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{\omega x} + e^{-\omega x}}{2}$ vérifie $(*)$.

Les solutions sont donc les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^{\omega x} + e^{-\omega x}}{2} \end{array} \qquad \text{avec} \quad \omega \in \mathbb{C}.$$

Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ alors la fonction $f\,:\, x \mapsto e^{(A+iB)x} + e^{-(A+iB)x}$ est à valeurs réelles si, et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{Ax}\sin(Bx) - e^{-Ax}\sin(Bx) = \sin(Bx) 2\,\mathrm{sh}(Ax) = 0$$

Si B est nul, alors la fonction f est à valeurs réelles ; sinon, en considérant le réel $\frac{\pi}{2B}$, on obtient que la fonction f est à valeurs réelles si, et seulement si, A est nul.

Les solutions réelles sont donc les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos \omega x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{ch}\,\omega x \end{array} \qquad \text{avec} \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

5.13 1. La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(\lambda - x)$ l'est aussi. La relation $(*)$ implique alors que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Il est donc équivalent de chercher les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$.

2. Raisonnons par analyse synthèse :
   - Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$. Alors :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = -f'(\lambda - x) = -f(x)$$
   donc f est solution de l'équation $y'' + y = 0$. Il existe donc des constantes A et φ telles que :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = A\cos(x + \varphi).$$
   Si $A \neq 0$, alors la condition $(*)$ donne :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\sin(x + \varphi) = \cos(\lambda - x + \varphi)$$
   soit :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x + \varphi + \pi/2) = \cos(\lambda - x + \varphi).$$
   Par suite, on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x + \varphi + \pi/2 \equiv \lambda - x + \varphi\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x + \varphi + \pi/2 \equiv -(\lambda - x + \varphi)\,[2\pi] \end{cases}$$
   c'est-à-dire :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} 2x \equiv \lambda - \pi/2\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ 2\varphi \equiv -\lambda - \pi/2\,[2\pi]. \end{cases}$$
   En prenant x tel que $2x \not\equiv \lambda - \pi/2\,[2\pi]$, on a donc :
   $$\varphi \equiv -\frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\,[\pi].$$

Par suite, il existe un entier k tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = A\cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} + k\pi\right).$$

Si k est pair alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = A\cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

sinon :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -A\cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Dans tous les cas, il existe une constante C telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = C\cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

- Réciproquement, les fonctions $x \mapsto C\cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ avec $C \in \mathbb{C}$ vérifient $(*)$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos\left(\lambda - x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Les solutions sont donc les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & C\cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{array} \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{C}.$$

5.14 1. La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto f(1/x)$ l'est aussi. La relation $(*)$ implique alors que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Il est donc équivalent de chercher les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $(*)$.

2. - Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $(*)$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} f(x).$$

En raisonnant comme dans l'exercice 5.10, on se ramène à la résolution de l'équation différentielle à coefficients constants :

$$z'' - z' + z = 0,$$

dont les solutions sont de la forme :

$$\begin{array}{rrcl} z : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & t & \longmapsto & e^{t/2}\left(\lambda_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) \end{array} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

Ainsi, la fonction f est de la forme :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x}\left(\lambda_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right) \end{array} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

- Réciproquement, supposons f de la forme :

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x}\left(\lambda_1 \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) + \lambda_2 \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right) \end{array} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\lambda_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) - \lambda_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right)$$

et

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left((\lambda_1 + \sqrt{3}\lambda_2)\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) + (\lambda_2 - \sqrt{3}\lambda_1)\sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right).$$

Ainsi,

$$f(1) = \lambda_1 \qquad \text{et} \qquad f'(1) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \sqrt{3}\lambda_2).$$

$*$ Si f est solution de l'équation différentielle $(*)$, alors on a $\lambda_1 = \sqrt{3}\lambda_2$.
$*$ Réciproquement, si $\lambda_1 = \sqrt{3}\lambda_2$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{3}\lambda_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) - \lambda_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right)$$

et

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left((\sqrt{3}\lambda_2 + \sqrt{3}\lambda_2)\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) + (\lambda_2 - 3\lambda_2)\sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right)$$

donc f est solution de l'équation différentielle $(*)$

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $(*)$ si, et seulement si, $\lambda_1 = \sqrt{3}\lambda_2$.

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions :

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda\sqrt{x}\left(\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right) \end{array} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

c'est-à-dire les fonctions :

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \mu\sqrt{x}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}\ln x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) \end{array} \quad \text{avec} \quad \mu \in \mathbb{K}.$$

Chapitre 6 : Raisonnement, opérations sur les ensembles

I Implication et équivalence 310

1 Implication 310

2 Négation de l'implication 312

3 Équivalence 313

4 Contraposée, implication réciproque 314

II Opérations sur les ensembles 315

1 Inclusion, égalité d'ensembles 315

2 Sous-ensemble défini par un prédicat 316

3 Intersection, réunion, différence, complémentaire . 317

4 Ensemble des parties d'un ensemble 318

5 Règles de calcul sur les parties d'un ensemble . . . 319

6 Couple, produit cartésien 319

III Pratique de la démonstration 321

1 Grands types de démonstrations 321

2 Comment engager une recherche 323

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 327

Raisonnement, opérations sur les ensembles

6

Dans le premier chapitre de ce livre, nous avons vu comment assertions, prédicats et quantificateurs permettent d'écrire des propriétés mathématiques de façon précise et très utile pour les nier facilement.

Nous allons ici introduire les symboles permettant de transcrire en langage mathématique les schémas « si ... , alors ... » ainsi que « ... si, et seulement si, ... » qui sont les bases du raisonnement.

I Implication et équivalence

1 Implication

Imaginons quelqu'un disant « s'il pleut, alors je ne sors pas ».

- Dans le cas où il énonce une vérité, alors :
  - ∗ s'il pleut, on est certain de ne pas le voir dehors ;
  - ∗ mais, s'il ne pleut pas, on peut le voir dehors, ou non.
- Toutefois, lorsque qu'un locuteur énonce cette phrase, ou qu'on la voit écrite dans un journal ou sur l'internet, rien ne dit qu'elle soit vraie !

Il en est de même en Mathématiques. Supposons que x désigne un réel donné, et que l'on affirme : « si $x \geqslant 3$, alors $x^2 \geqslant 9$ ». Cette affirmation, qui est vraie, nous dit donc que :

- si $x \geqslant 3$ est vrai, alors on est sûr que $x^2 \geqslant 9$ est vrai ;
- si $x^2 \geqslant 9$ est faux, alors on est sûr que $x \geqslant 3$ est faux ;

Mais rien ne dit que l'affirmation $x \geqslant 3$ soit vraie. Si elle est fausse, alors on ne peut rien dire de l'affirmation $x^2 \geqslant 9$ qui, par exemple, est vraie si $x = -4$ et fausse si $x = 0$.

Si, à partir d'une assertion P et d'une assertion Q, on construit l'assertion (NON P) OU Q, alors, par définition du connecteur OU :

- lorsque P est fausse, alors l'assertion (NON P) OU Q est vraie ;
- lorsque l'assertion (NON P) OU Q est vraie et que P est vraie, alors l'assertion Q est forcément vraie.

Ainsi, (NON P) OU Q est une bonne formalisation du « si ... alors ... ».

Définition 1 (Définition de l'implication)

Si P et Q sont deux assertions, alors (NON P) OU Q se note $P \Rightarrow Q$.

Le connecteur « $\Rightarrow$ » est appelé **implication**, et l'assertion $P \Rightarrow Q$ se lit alors « P implique Q ».

Remarques

- Par définition du OU , il est alors immédiat que l'assertion $P \Rightarrow Q$ est fausse lorsque P est vraie et Q fausse, et uniquement dans ce cas ; donc :
  * si P est fausse alors $P \Rightarrow Q$ est vraie ;
  * si $P \Rightarrow Q$ est vraie et si P est vraie, alors Q est vraie.
- Ainsi l'assertion $P \Rightarrow Q$ peut donc être vraie même lorsque Q est fausse. Cela peut paraître bizarre à première vue, surtout si l'on a la mauvaise habitude d'utiliser ce symbole « $\Rightarrow$ » comme une abréviation sténographique permettant d'éviter d'écrire quelques mots de rédaction. *Il est maintenant évident qu'une telle pratique est à proscrire et que l'utilisation du symbole « $\Rightarrow$ » doit impérativement être réservée aux assertions mathématiques.*

Condition nécessaire – Condition suffisante Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie,

- on dit : « Q est une condition nécessaire de P » ou encore : « pour que P soit vraie il faut que Q soit vraie » ;
- mais on dit aussi : « P est une condition suffisante de Q » ou encore : « pour que Q soit vraie il suffit que P soit vraie ».

Point méthode (pour démontrer une conclusion du type $P \Rightarrow Q$)

Soit P et Q deux assertions. Pour démontrer $P \Rightarrow Q$:

- si P est fausse, alors il n'y a rien à faire ;
- si P est vraie, alors on est dans l'obligation de prouver que Q est vraie.

Par suite, la méthode que vous avez utilisée jusqu'à présent pour prouver une telle implication, qui consiste à supposer P vraie puis à en déduire que Q est vraie, est totalement licite et reste tout à fait d'actualité. Ouf !

Exemple Soit $x \in [-2, +\infty[$. Alors l'implication « $x = \sqrt{x+2} \Rightarrow x^2 = x+2$ » est vraie puisque, si deux réels sont égaux, alors leurs carrés sont égaux.

Point méthode (pour une conclusion du type $\forall x \in E \quad P(x) \Rightarrow Q(x)$)

Soit P et Q deux prédicats de la variable x. Pour démontrer l'assertion « $\forall x \in E \quad P(x) \Rightarrow Q(x)$ », qui commence par « $\forall$ », il suffit de prendre un élément x quelconque de E puis de prouver l'implication $P(x) \Rightarrow Q(x)$, ce qui amène à supposer que $P(x)$ est vraie. C'est pourquoi le début d'une telle démonstration doit être : « *Soit $x \in E$ tel que $P(x)$* ».

Exemple Prouvons l'assertion « $\forall x \in [-2, +\infty[\quad x = \sqrt{x+2} \Rightarrow x^2 = x+2$ ».
Soit $x \in [-2, +\infty[$ vérifiant $x = \sqrt{x+2}$. En élevant cette dernière égalité au carré, on en déduit $x^2 = x+2$, ce qui termine la démonstration.

Point méthode (quand on a une hypothèse du type $P \Rightarrow Q$)

Soit P et Q deux assertions. Si l'on suppose $P \Rightarrow Q$, alors :

- si l'on sait que P est vraie, alors on peut en déduire que Q est vraie ;
- si l'on n'a aucune information sur P ou si l'on sait que P est fausse, alors on ne peut rien déduire sur Q.

2 Négation de l'implication

En utilisant la définition de l'implication et la règle de négation d'un OU, on a immédiatement le résultat suivant, très utile pour nier automatiquement une implication.

Proposition 1 (Négation d'une implication)

Si P et Q sont deux assertions, la négation de $P \Rightarrow Q$ s'écrit P ET (NON Q).

En utilisant la règle de négation d'une assertion commençant par un « $\forall$ », on en déduit la proposition suivante.

Proposition 2

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux prédicats de la variable x définis sur un ensemble E.

La négation de l'assertion « $\forall x \in E \quad P(x) \Rightarrow Q(x)$ » est :

$$\exists x \in E \quad P(x) \text{ ET } (\text{NON } Q(x)).$$

Démonstration page 327

Remarque Indépendamment de la démonstration, le résultat précédent correspond bien à l'usage courant. L'assertion $\forall x \in E \quad P(x) \Rightarrow Q(x)$ signifiant

« dès que $P(x)$ est vraie alors $Q(x)$ est vraie », il est naturel que sa négation corresponde à « il existe un x tel que $P(x)$ est vrai, alors que $Q(x)$ est faux ».

Exemples

1. L'assertion « $\forall x \in [-2, +\infty[\quad x^2 = x + 2 \Rightarrow x = \sqrt{x+2}$ » est fausse.

   Pour le justifier, on peut envisager deux rédactions différentes :

   - exhiber un contre exemple, c'est-à-dire ici, donner une valeur de x pour laquelle l'implication est fausse. C'est le cas pour $x = -1$, puisque $x^2 = x + 2$ est alors vraie, tandis que $x = \sqrt{x+2}$ est fausse.
   - montrer sa négation « $\exists x \in [-2, +\infty[\quad x^2 = x + 2 \text{ ET } x \neq \sqrt{x+2}$ » ; on le prouve aussi en prenant $x = 1$.

2. Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, considérons les prédicats $C(f)$: « f est continue » et $D(f)$: « f est dérivable ».

   - L'assertion, fausse, « toute fonction continue est dérivable » s'écrit aussi :

   $$\forall f \in E \quad C(f) \Rightarrow D(f).$$

   - Sa négation « $\exists f \in E \quad C(f) \text{ ET } (\text{NON}\, D(f))$ », qui est vraie, affirme : « il existe (au moins) une fonction $f \in E$ continue et non dérivable ».

3 Équivalence

Définition 2 (Définition de l'équivalence)

Si P et Q sont deux assertions, l'assertion $P \Leftrightarrow Q$ est l'abréviation de :

$$(P \Rightarrow Q) \text{ ET } (Q \Rightarrow P).$$

Le connecteur « $\Leftrightarrow$ » est appelé **équivalence**, et l'assertion $P \Leftrightarrow Q$ se lit « P équivaut à Q » ou encore « P est équivalente à Q ».

Condition nécessaire et suffisante Lorsque l'assertion $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on dit que « P est une condition nécessaire et suffisante de Q » ou encore que « P est vraie si, et seulement si, Q est vraie ».

Point méthode

Soit P et Q deux assertions. L'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ étant la connexion par ET de l'implication $P \Rightarrow Q$ et de l'implication $Q \Rightarrow P$, alors :

- si l'on sait que $P \Leftrightarrow Q$ est vraie (hypothèse), alors on sait que l'implication $P \Rightarrow Q$ et l'implication $Q \Rightarrow P$ sont vraies ;
- pour justifier que $P \Leftrightarrow Q$ est vraie (conclusion), alors on a besoin de prouver que l'implication $P \Rightarrow Q$ et l'implication $Q \Rightarrow P$ sont vraies.

Exemples D'après l'exemple précédent :

- l'assertion « $\forall x \in [-2, +\infty[\quad x = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow x^2 = x+2$ » est fausse ;
- mais l'assertion « $\forall x \in [-2, +\infty[\quad x = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow (x^2 = x+2 \text{ ET } x \geqslant 0)$ » est vraie car, pour tout $x \in [-2, +\infty[$, on a :
  - $*$ si $x = \sqrt{x+2}$, alors x est positif et $x^2 = (\sqrt{x+2})^2 = x+2$;
  - $*$ réciproquement, l'hypothèse $x^2 = x+2$ entraîne $x = \pm\sqrt{x+2}$;

    sachant $x \geqslant 0$, on en déduit $x = \sqrt{x+2}$.

4 Contraposée, implication réciproque

Définition 3

- $(\text{NON } Q) \Rightarrow (\text{NON } P)$ est la **contraposée** de l'implication $P \Rightarrow Q$.
- $Q \Rightarrow P$ est l'**implication réciproque** de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Proposition 3

L'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie si, et seulement si, sa contraposée est vraie.

Démonstration. Par définition, $(\text{NON } Q) \Rightarrow (\text{NON } P)$ s'écrit $(\text{NON } (\text{NON } Q)) \text{ OU } (\text{NON } P)$ ou encore $Q \text{ OU } (\text{NON } P)$, ce qui est équivalent à $\text{NON } P \text{ OU } Q$, et donc à $P \Rightarrow Q$. □

Remarque Ce dernier résultat correspond bien au sens commun : dire que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, signifie que, si l'on sait que l'assertion P est vraie, alors on est sûr que l'assertion Q est vraie ;

- dire que sa contraposée est vraie, signifie que, si l'on sait que Q est fausse, on est sûr que P est fausse, ce qui est bien équivalent à l'énoncé précédent ;
- dire que sa négation est vraie, et donc que $P \Rightarrow Q$ est fausse, signifie que l'on sait que P est vraie alors que Q est fausse.

p.327

Exercice 1

1. Montrer l'assertion $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad (x+1 = \sqrt{x}) \Rightarrow (x^2 + x + 1 = 0)$.
2. En déduire l'assertion $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad (x^2 + x + 1 \neq 0) \Rightarrow (x + 1 \neq \sqrt{x})$.
3. Prouver que l'assertion $\exists x \in \mathbb{R}_+ \quad x + 1 = \sqrt{x}$ est fausse.

II Opérations sur les ensembles

1 Inclusion, égalité d'ensembles

Définition 4 (Relation d'inclusion)

Soient E et F deux ensembles. L'assertion (vraie ou fausse)

$$\forall x \in F \quad x \in E \tag{$*$}$$

se lit « F est inclus dans E » ou « F est une partie de E », et se note $F \subset E$.

Remarque Dans $(*)$, la variable x est muette, ce qui est cohérent avec sa disparition dans la notation $F \subset E$. Cela se traduit aussi en français ; lorsque cette relation est vraie, on dit : « F est inclus dans E », sans le moindre x !

p.327

Exercice 2 Soit E et F deux ensembles. Écrire une assertion mathématique n'utilisant que le symbole « $\notin$ » et traduisant que F n'est pas inclus dans E.

Ensemble vide

- On admet qu'il existe un unique ensemble, appelé **ensemble vide** et noté $\varnothing$, qui ne contient aucun élément et qui est donc tel que, pour tout prédicat $P(x)$ de la variable x, l'assertion « $\exists x \in \varnothing \quad P(x)$ » est fausse.
- En appliquant l'item précédent à NON P, on déduit que, pour tout prédicat $P(x)$ de la variable x, l'assertion « $\forall x \in \varnothing \quad P(x)$ » est vraie.

Proposition 4

Pour tout ensemble E, on a $\varnothing \subset E$.

Démonstration. D'après le second item ci-dessus, l'assertion :

$$\forall x \in \varnothing \quad x \in E$$

est vraie, ce qui entraîne que $\varnothing \subset E$. □

Point méthode

Soit E et F deux ensembles. Pour prouver $F \subset E$, la première méthode à laquelle penser est de démontrer la relation $(*)$. La rédaction doit alors impérativement commencer par : « *Soit x un élément de F* ».

Remarque Cela est correct même si F est vide puisque, d'après ce qui précède, il est alors inclus dans tout ensemble.

Égalité d'ensembles Par convention, deux ensembles E et F sont égaux si, et seulement si, tout élément de l'un est élément de l'autre, ou encore :

$$(\forall x \in E \quad x \in F) \text{ ET } (\forall x \in F \quad x \in E).$$

En termes d'inclusion, cette équivalence devient :

$$E = F \Leftrightarrow (E \subset F \text{ ET } F \subset E).$$

p.327 **Exercice 3** Écrire une assertion permettant d'exprimer que $E \neq F$.

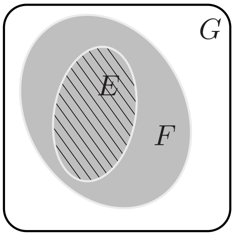
Point méthode (égalité d'ensembles par double inclusion)

La principale méthode pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux est d'établir la double inclusion $E \subset F$ et $F \subset E$.

Proposition 5

Soit E, F et G des ensembles. Si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.

Ce résultat, que vous avez certainement déjà vu, et que vous pourrez dorénavant utiliser dans un raisonnement, apparaît totalement évident sur un dessin tel que celui représenté ci-contre ; il ne faut donc pas se priver d'un tel support qui permet de comprendre, d'assimiler et de retenir le résultat. En revanche un dessin n'est pas une démonstration et si l'on vous demande une démonstration, il faut pouvoir en écrire une !



Démonstration. Supposons $E \subset F$ et $F \subset G$.

Pour prouver $E \subset G$ montrons $\forall x \in E \quad x \in G$. Soit donc $x \in E$.

- Comme $E \subset F$, on sait que $x \in F$.
- Comme $F \subset G$, on en déduit que $x \in G$.

Par suite on a prouvé $\forall x \in E \quad x \in G$, et donc $E \subset G$. □

2 Sous-ensemble défini par un prédicat

- Si E est un ensemble et F une partie de E, alors $x \in F$ est un prédicat dépendant de la variable x et défini sur E.
- Réciproquement, on admet que si $P(x)$ est un prédicat dépendant de x, et défini sur E, alors il existe une unique partie F de E telle que :

$$\forall x \in E \quad (P(x) \Leftrightarrow x \in F).$$

Notation Avec les notations ci-dessus, on note alors $F = \{x \in E \mid P(x)\}$.

Solutions d'une équation Si f est une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors *résoudre l'équation* $f(x) = 0$ c'est décrire autrement, et le plus simplement possible, l'ensemble $S = \{x \in D \mid f(x) = 0\}$.

Exemple Dire que les solutions d'une telle équation sont les réels x_1 et x_2 signifie que $S = \{x_1, x_2\}$. Le plus souvent, on le prouve par double inclusion, ou encore, par double implication. Il s'agit alors de montrer :

- que, si $f(x) = 0$, alors $x = x_1$ ou $x = x_2$;
- que x_1 et x_2 sont solutions de cette équation.

Attention Bien distinguer les phrases :

- « x_1 et x_2 sont solutions de l'équation », ce qui équivaut à « x_1 et x_2 sont *des* solutions de l'équation », et il peut alors y en avoir d'autres ;
- « x_1 et x_2 sont *les* solutions de l'équation », ce qui signifie que ces nombres sont solutions de l'équation, et que ce sont les seules solutions.

Point méthode

Dans certains cas particuliers (équations du premier ou du second degré, systèmes linéaires,...), on dispose de méthodes permettant de résoudre par équivalence, mais pour la plupart des autres cas, il est préférable de procéder par double implication.

p.328 **Exercice 4** Déterminer l'ensemble S des solutions de l'équation $x = \sqrt{x+2}$.
Indication : commencer par prouver $S \subset \{-1, 2\}$.

On peut, de manière analogue, chercher les solutions d'une inéquation.

p.328 **Exercice 5** Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 4\}$.

p.328 **Exercice 6** Résoudre l'inéquation $\sqrt{x+1} \leqslant 2\,(x-2)$.

3 Intersection, réunion, différence, complémentaire

Définition 5

Soit E et F deux ensembles.

- La **réunion** de E et F est l'ensemble, noté $E \cup F$ (lire « E union F »), des éléments qui sont dans E ou dans F ; on a donc :

$$x \in E \cup F \iff (x \in E \text{ OU } x \in F).$$

- L'**intersection** de E et F est l'ensemble, noté $E \cap F$ (lire « E inter F »), des éléments qui sont à la fois dans E et dans F ; on a donc :

$$x \in E \cap F \iff (x \in E \text{ ET } x \in F).$$

p.328

Exercice 7 Écrire à l'aide d'intervalles l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geqslant 4\}$.

Définition 6

Soit E et F deux ensembles.

- On appelle **différence ensembliste** E moins F, l'ensemble, noté $E \setminus F$ (lire « E privé de F »), des éléments qui sont dans E mais pas dans F ; on a donc :
$$x \in E \setminus F \iff (x \in E \text{ ET } x \notin F).$$
- Lorsque $F \subset E$, l'ensemble $E \setminus F$ s'appelle **complémentaire** de F dans E, et il se note alors $\complement_E F$.

Remarque Si F est une partie de l'ensemble E, alors $\complement_E(\complement_E F) = F$ est conséquence immédiate de l'équivalence NON (NON P) $\Leftrightarrow P$.

4 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 7

Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E se note $\mathcal{P}(E)$, et vérifie :
$$F \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow F \subset E.$$

Exemple Si $E = \{1,2\}$, alors on a $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.
Pour être sûr de n'oublier aucun élément de $\mathcal{P}(E)$, ou ce qui est équivalent aucune partie de E, classons-les en fonction de leur nombre d'éléments :

- les parties à 0 élément ; en fait il n'y en a qu'une : $\varnothing$;
- les parties à 1 élément, encore appelées *singletons* ; il y en a deux : $\{1\}$ et $\{2\}$;
- les parties à 2 éléments ; ici il n'y en a qu'une : $E = \{1,2\}$.

Attention Prendre garde au double niveau d'accolades dans la description précédente : on a décrit $\mathcal{P}(E)$ en donnant l'ensemble de ses éléments, or tout élément de $\mathcal{P}(E)$ est une partie de E, ce qui fait que l'on a :
$$\{1\} \subset E \quad \text{ou encore} \quad \{1\} \in \mathcal{P}(E)$$
alors que la relation $1 \in \mathcal{P}(E)$ est fausse car 1 n'est pas une partie de E !

p.328

Exercice 8 Décrire $\mathcal{P}(E)$ lorsque $E = \{1,2,3\}$.

Remarque Comme annoncé dans les remarques de la page 4, la définition précédente confirme que les notions d'ensemble et d'élément ne sont pas absolues puisque tout ensemble est lui-même élément de l'ensemble de ses parties.

5 Règles de calcul sur les parties d'un ensemble

Les relations de la page suivante, qui permettent de « calculer » sur les parties d'un ensemble à l'aide des opérateurs $\cap$, $\cup$ et $\complement$, doivent pouvoir être utilisées sans la moindre hésitation, en particulier dans les exercices de probabilités.

- Elles peuvent toutes se démontrer rigoureusement mais nous ne justifierons que les relations ㉓ et ㉖ respectivement dans les exercices 15 de la page 324 et 18 de la page 326.
- En revanche, elles sont évidentes sur un dessin, encore appelé diagramme de Venn, qui peut être effectivement réalisé (ce qui peut vous rassurer dans un premier temps) ou seulement imaginé mentalement (ce qui est certainement plus efficace pour l'avenir). Prendre garde toutefois de ne pas alors représenter de cas trop particulier !

p.329 **Exercice 9** Réaliser quelques dessins illustrant ces règles de calcul.

p.329 **Exercice 10** Pour $A \subset E$ et $B \subset E$, on pose $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

En utilisant essentiellement ⑭, montrer que $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Point méthode

L'utilisation de ces règles de calcul sur les parties d'un ensemble permet aussi de prouver des inclusions ou des égalités d'ensembles sans « descendre au niveau des éléments ».

6 Couple, produit cartésien

Notations

- À partir de deux éléments x et y, on peut construire le **couple** (x, y) avec, si x_1, x_2, y_1 et y_2 sont des éléments, la propriété fondamentale :
$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Longleftrightarrow (x_1 = x_2 \text{ ET } y_1 = y_2).$$
- Soit E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien de E et F**, l'ensemble, noté $E \times F$, des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. On a donc :
$$E \times F = \{z \mid \exists x \in E \quad \exists y \in F \quad z = (x, y)\}.$$

Remarques

- Avec ces notations, on écrit souvent : $E \times F = \{(x, y)\,;\ x \in E \text{ ET } y \in F\}$.
- On utilise couramment un produit cartésien quand on travaille dans le plan usuel rapporté à un repère et que l'on identifie chaque point du plan avec le couple de ses coordonnées.

Règles de calcul sur les parties d'un ensemble

A, B et C désignant des parties d'un ensemble E, on a les relations suivantes :

- d'abord deux inclusions :

① $A \subset A \cup B$ ② $A \cap B \subset A$

- ensuite des relations d'égalité utilisant $\cup$ et $\cap$:

③ $A \cup A = A$ ④ $A \cap A = A$

⑤ $A \cup E = E$ ⑥ $A \cap \varnothing = \varnothing$

⑦ $A \cup \varnothing = A$ ⑧ $A \cap E = A$

⑨ $A \cup B = B \cup A$ ⑩ $A \cap B = B \cap A$

⑪ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ⑫ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

⑬ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ⑭ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- puis quelques égalités concernant les complémentaires :

⑮ $\complement_E E = \varnothing$ ⑯ $\complement_E \varnothing = E$

⑰ $A \cup \complement_E A = E$ ⑱ $A \cap \complement_E A = \varnothing$

⑲ $\complement_E (A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$ ⑳ $\complement_E (A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$

- ensuite des implications :

㉑ $E \subset A \Rightarrow A = E$ ㉒ $A \subset \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$

㉓ $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C$ ㉔ $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$

- enfin trois équivalences :

㉕ $A \subset B \Leftrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$

㉖ $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

㉗ $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Lorsque l'ensemble E est fixé, $\complement_E A$ se note aussi $\complement A$ ou encore $\bar{A}$.

p.329 **Exercice 11** Décrire $E \times F$ lorsque $E = \{1,2\}$ et $F = \{1,2,3\}$.

Attention Le couple (x, y) s'écrit avec des parenthèses, pas des accolades !

- Avec accolades, $\{x, y\}$ désigne un ensemble et, si $x = y$, alors $\{x, y\} = \{x\}$.
- Si $x \neq y$, alors $(x, y) \neq (y, x)$ mais $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Généralisation

- De même, à partir de trois éléments x, y et z, on peut construire le triplet (x, y, z). Les triplets possèdent la propriété fondamentale :
$$(x, y, z) = (x', y', z') \Leftrightarrow (x = x' \text{ ET } y = y' \text{ ET } z = z').$$
- Étant donné trois ensembles E, F et G, on peut construire leur produit cartésien, noté $E \times F \times G$, défini par :
$$E \times F \times G = \{(x, y, z)\,;\; x \in E \text{ ET } y \in F \text{ ET } z \in G\}.$$

III Pratique de la démonstration

Cette dernière partie peut se garder pour une lecture ultérieure et pourrait certainement, avec profit, être relue plusieurs fois dans l'année en fonction de la progression du cours et des problèmes rencontrés.

1 Grands types de démonstrations

Une théorie mathématique se compose d'énoncés (assertions, relations) parmi lesquels on veut déterminer ceux qui sont vrais et ceux qui sont faux.

- Dans la plupart des cas on choisit un certain nombre d'énoncés que l'on pose comme vrais *a priori* : on les appelle **axiomes**, ou **postulats**, de la théorie.
- On appelle alors théorème, proposition, lemme ou corollaire (*cf.* page 2) toute assertion Q pour laquelle il existe une assertion P vraie dans cette théorie telle que l'implication $P \Rightarrow Q$ soit vraie.

Un peu d'histoire Dans ses éléments, écrits vers -300, Euclide a cherché à modéliser la géométrie du plan, c'est-à-dire à justifier rigoureusement des propriétés qui apparaissaient sur les figures qu'il pouvait dessiner.

- Pour cela il a posé un certain nombre (minimum) d'axiomes, correspondant aux propriétés qu'il considérait comme évidentes et/ou non discutables.
- Ensuite, à partir de là, il a *démontré* les théorèmes usuels de la géométrie du plan prouvant ainsi que les propriétés trouvées sur les dessins qu'il réalisait n'étaient pas le fruit du hasard ou de cas particuliers.

Le lecteur pourra se référer au site *Chronomath* pour voir une très agréable présentation de sa démarche ainsi qu'une présentation des géométries non euclidiennes construites à la suite de vaines démarches pour infirmer ou confirmer l'utilité de certains des axiomes d'Euclide.

Pour établir un résultat vous pourrez utiliser les quatre méthodes suivantes, que vous avez déjà dû rencontrer dans les démonstrations que vous avez étudiées.
Dans la suite P, Q et R sont des assertions quelconques.

- **Méthode par déductions successives**

  La définition même d'une assertion vraie dans une théorie fournit la première méthode de démonstration : *par transitivité*. Quand on sait que P est vraie et que les implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ sont vraies, alors on en déduit que R est vraie.

- **Méthode par disjonction des cas**

  Si l'on sait que l'assertion P OU Q est vraie, et que :

  * en supposant que P est vraie on sait prouver que R est vraie,
  * en supposant que Q est vraie on sait prouver que R est vraie,

  alors on peut en déduire que R est vraie.

  C'est aussi cette méthode que l'on utilise, avec $Q = \text{NON}\,\mathrm{P}$, lorsque l'on rédige un raisonnement de la forme : « Si P, alors ..., sinon, alors ... ».

- **Démonstration de la contraposée**

  Pour prouver une implication du type $P \Rightarrow Q$, il peut être intéressant de prouver sa *contraposée*, l'implication $\text{NON}\, Q \Rightarrow \text{NON}\, P$, qui lui est équivalente. Cela n'est évidemment pertinent que si cette contraposée est plus facile à prouver !

p.329

Exercice 12 Soit a, b, c et d quatre réels donnés. Montrer que si le système

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = 0 \\ c\,x + d\,y = 0 \end{cases}$$

possède un couple solution différent de $(0,0)$ alors on a $a\,d - b\,c = 0$.

- **Démonstration par l'absurde**

  Si, en supposant que $\text{NON}\,\mathrm{P}$ est vraie, on peut exhiber une assertion Q telle que Q ainsi que $\text{NON}\, Q$ soient vraies, alors on en déduit que P est vraie.

p.329

Exercice 13 Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Indication : Commencer par supposer que $\sqrt{2}$ est un rationnel, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers r et s, que l'on peut supposer non tous les deux pairs, tels que $\sqrt{2} = r/s$.

p.330

Exercice 14 Si $z \in \mathbb{C}$, montrer, par l'absurde, que l'on a $|z-1| \geqslant 1$ ou $|z+1| \geqslant 1$.

Indication : faire un dessin et penser à utiliser l'inégalité triangulaire.

2 Comment engager une recherche

Type d'une conclusion

La conclusion, dès qu'elle est correctement écrite sous forme d'assertion mathématique, *donne* la plupart du temps un *plan de bataille* permettant d'attaquer et de dégrossir la démonstration. Ce serait dommage de ne pas en profiter ! En effet, d'après le début de ce chapitre, une assertion complexe est obtenue,

- en quantifiant la variable d'un prédicat avec « $\forall$ » ou de « $\exists$ » ˜ ; nous dirons alors :
  - $*$ elle de type « $\forall$ » si elle peut s'écrire sous la forme : $\forall x \in E \quad P(x)$,
  - $*$ elle de type « $\exists$ » si elle peut s'écrire sous la forme : $\exists x \in E \quad P(x)$,

  où $P(x)$ est un prédicat de la variable x défini sur un ensemble E ;
- en reliant deux assertions par « $\Rightarrow$ », « ET » voire « OU » ; nous dirons alors :
  - $*$ elle est de type « $\Rightarrow$ » si elle peut s'écrire sous la forme : $P \Rightarrow Q$,
  - $*$ elle est de type « ET » si elle peut s'écrire sous la forme P ET Q,
  - $*$ elle est de type « OU » si elle peut s'écrire sous la forme P OU Q,

  où P ainsi que Q sont des assertions (moins complexes que la première).

Exemples

1. Étant donné un ensemble E ainsi que $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(E)$, l'assertion :
$$\big(\forall x \in E \quad x \in A \Rightarrow x \in B\big) \text{ ET } \big(\forall x \in E \quad x \in B \Rightarrow x \in A\big)$$
est de type « ET » car elle s'écrit P ET Q avec :
   - P l'assertion « $\forall x \in E \quad x \in A \Rightarrow x \in B$ »,
   - Q l'assertion « $\forall x \in E \quad x \in B \Rightarrow x \in A$ ».
2. Étant donné un ensemble E ainsi que $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(E)$, l'assertion :
$$\forall x \in E \quad x \in A \Rightarrow x \in B$$
est de type « $\forall$ » car elle s'écrit $\forall x \in E \quad P(x)$ en prenant pour $P(x)$ l'assertion « $x \in A \Rightarrow x \in B$ ».
3. Étant donné une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'assertion :
$$\big(\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2\big) \Rightarrow \big(\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2\,x\big)$$
est de type « $\Rightarrow$ » car elle s'écrit $P \Rightarrow Q$ avec
   - P l'assertion « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$ »
   - Q l'assertion :« $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2\,x$ ».
4. Vous trouverez d'autres exemples dans les exercices d'application de la fin de cette partie, sur lesquels vous pourrez vous entraîner.

Stratégies

Le premier travail à faire est d'écrire la conclusion sous forme d'assertion puis de l'analyser pour voir quel est son type : comme on a vu sur les exemples précédents, c'est une analyse que l'on fait *de l'extérieur* sans descendre tous les niveaux de complexité.

En partant de l'énumération précédente, on peut donc dire qu'il existe cinq grands types d'assertions mathématiques à démontrer : « $\forall$ », « $\exists$ », « $\Rightarrow$ », « ET », « OU ».
Pour chacun on peut donner *une* méthode permettant d'engager une démonstration.

Vous pourrez mettre cela en œuvre dans les exercices se trouvant à la suite.

- **Pour démontrer une assertion du genre $P \Rightarrow Q$**

  Il suffit de supposer que P est vraie puis, avec cette nouvelle hypothèse, de démontrer que Q est vraie. Il n'est pas utile de considérer le cas où P est fausse puisque l'on sait alors, par définition de l'implication, que l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie.

p.330 **Exercice 15** Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que

$$A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C.$$ (23)

Indication : il faut prouver une implication ; en supposant le membre de gauche vrai, il reste alors à prouver une inclusion, c'est-à-dire une assertion du type « $\forall$ ».

- **Pour démontrer une assertion du genre $\forall x \in E \quad P(x)$**

  * La façon la plus élémentaire de procéder est de prendre un élément x quelconque mais fixé dans E puis de démontrer que $P(x)$ est vraie.
    Pour une telle démonstration, le début doit donc être « *Soit* $x \in E$ ».
  * La démonstration d'une assertion du genre :

    $$\forall x \in E \quad P(x) \Rightarrow Q(x)$$

    commence donc, la plupart du temps, par « *Soit* $x \in E$ *tel que* $P(x)$ », le but étant alors de prouver $Q(x)$.
  * Dans le cas particulier où $E = \mathbb{N}$, pour prouver une assertion du genre :

    $$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n),$$

    on peut évidemment penser à utiliser une démonstration par récurrence, mais ce n'est pas une obligation !

- **Pour démontrer une assertion du genre** $\exists x \in E \quad P(x)$

  * La façon la plus élémentaire de procéder est de trouver, d'exhiber, de construire un élément x appartenant à E tel que $P(x)$ soit vrai.
  * Si un tel élément x ne vous saute pas aux yeux, il peut être bon, *lors de la recherche de solution*, de commencer par une phase d'analyse.
    ⋆ Dans la phase **d'analyse**, on suppose connaître un x tel que $P(x)$, et l'on cherche des propriétés intéressantes de cet x. Dès que l'on pense avoir trouvé suffisamment de propriétés permettant de construire un tel x, on passe à la démonstration proprement dite, aussi appelée **synthèse**, la seule partie que l'on verra vraiment dans la rédaction de la solution.
    ⋆ La phase de **rédaction** doit commencer par la construction d'un élément x, que l'on peut « sortir du chapeau » grâce à ce que l'on a fait avant. Ensuite, il faut prouver $P(x)$, mais évidemment sans utiliser les résultats de la phase d'analyse qui supposait $P(x)$ vraie.

p.330

Exercice 16 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad (x \neq y \text{ et } x \neq z) \Rightarrow \left(\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{f(x)-f(z)}{x-z}\right).$$

Montrer l'assertion $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\,x + b$.

Approche : il faut prouver une existence et donc construire un a et un b. Mais vous avez déjà rencontré suffisamment de fonctions affines (cf. conclusion) ainsi que leurs graphes, cela doit vous aider à construire ces réels.

Dans une question où il faut prouver l'existence et l'unicité d'un élément vérifiant une propriété, il est souvent préférable de commencer par la partie unicité, surtout lorsque l'on peut la faire sous forme d'analyse.

p.331

Exercice 17 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique couple (f_1, f_2) tel que l'on ait $f = f_1 + f_2$ avec f_1 (resp. f_2) fonction impaire (resp. paire) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Indication : commencer par l'unicité, ou mieux par une phase d'analyse supposant le problème résolu, et donnant alors la seule expression possible de f_1 et f_2 en fonction de f. Ensuite, prouver l'existence.

- **Pour démontrer une assertion du genre P et Q voire $P \Leftrightarrow Q$**

  * Pour démontrer une assertion du genre P ET Q, il suffit de démontrer l'une puis l'autre des deux assertions.
  * En particulier, pour prouver une équivalence de genre $P \Leftrightarrow Q$, commencer par essayer de prouver chacune des deux implications.

p.331

Exercice 18 Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que :

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B. \qquad (26)$$

Approche : il faut prouver une équivalence et donc deux implications.

Remarque Il y a certains cas où l'on peut écrire une suite d'assertions équivalentes dont la première est P, et la dernière Q ; on fait alors ce que l'on appelle un *raisonnement par équivalence.* Mais, contrairement à ce qui se passe dans le secondaire, ces cas sont rares dans le supérieur : *ce n'est donc pas une bonne stratégie de rechercher, a priori, un tel type de démonstration d'une équivalence.*

- **Pour démontrer une assertion du genre P ou Q**

Il suffit de démontrer l'une ou l'autre des deux assertions, mais il n'est pas toujours aisé de savoir laquelle est vraie en fonction du contexte. La méthode la plus courante consiste alors à supposer que l'une est fausse, puis, avec cette nouvelle hypothèse, à démontrer l'autre.

Cette façon de procéder peut se justifier :

∗ soit en disant que l'on raisonne par disjonction des cas :

⋆ cas 1 : si P est vraie alors on sait que P OU Q est vraie.
⋆ cas 2 : si P est fausse, en prouvant Q on a prouvé que P OU Q est vraie.

Ainsi, par disjonction des cas, on a prouvé que P OU Q est vraie.

∗ soit en considérant que P OU Q peut aussi s'écrire NON $P \Rightarrow Q$ et en se référant alors à la méthode élémentaire de démonstration d'une implication.

Remarque Le choix de l'assertion supposée fausse n'est pas toujours anodin et peut simplifier ou compliquer la démonstration de l'autre assertion : c'est alors une affaire de flair, et cela sort évidemment du cadre de cet exposé.

p.331

Exercice 19 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}$ un vecteur du plan usuel. Montrer :

$$\lambda \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow (\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \vec{0})$$

Indication : en supposant $\lambda \neq 0$, on peut utiliser λ^{-1}.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 2 L'assertion donnée s'écrit $\forall x \in E \quad R(x)$, avec $R(x) : P(x) \Rightarrow Q(x)$.

En appliquant les règles précédentes, on obtient que sa négation est :

$$\exists x \in E \quad \text{NON}\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$$

et donc :

$$\exists x \in E \quad P(x) \text{ ET NON}\big(Q(x)\big).$$

Exercice 1

1. Soit x un réel donné (positif) tel que $x+1=\sqrt{x}$.

   En élevant cette égalité au carré, on en déduit $(x+1)^2 = x$ et donc $x^2+x+1=0$, ce qui termine la démonstration.
2. Comme $(x^2+x+1 \neq 0) \Rightarrow (x+1 \neq \sqrt{x})$ est la contraposée de l'implication $(x+1=\sqrt{x}) \Rightarrow (x^2+x+1=0)$, le résultat demandé est une conséquence directe du premier.
3. La négation de l'assertion donnée est :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad x+1 \neq \sqrt{x}. \qquad (*)$$

   Montrons qu'elle est vraie. Soit donc $x \in \mathbb{R}_+$.

   D'après le point précédent, on a $(x^2+x+1 \neq 0) \Rightarrow (x+1 \neq \sqrt{x})$.

   Comme $x \in \mathbb{R}_+$, on a $x^2+x+1 \geqslant 1 > 0$ et donc $x^2+x+1 \neq 0$.

   De l'implication précédente, on déduit $x+1 \neq \sqrt{x}$, ce qui termine la démonstration de $(*)$, et montre que le résultat.

   Remarque On peut aussi faire un raisonnement par l'absurde.

   Supposons que l'assertion donnée soit vraie. Soit donc $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x+1=\sqrt{x}$. En élevant cette égalité au carré, on en déduit $x^2+x+1=0$, ce qui est impossible (*cf.* point précédent), et prouve le résultat.

Exercice 2 Pour éviter de raconter n'importe quoi, la bonne technique consiste à nier la forme développée de l'assertion $F \subset E$.

Comme $F \subset E$ s'écrit $\forall x \in F \quad x \in E$, sa négation est donc $\exists x \in F \quad x \notin E$.

Exercice 3 Pour exprimer $E \neq F$ il suffit de nier la relation $E = F$, qui s'écrit :

$$\big(\forall x \in E \quad x \in F\big) \quad \text{et} \quad \big(\forall x \in F \quad x \in E\big).$$

- La règle de négation du « et » nous dit que la négation de ce qui précède est :

$$\Big(\text{non}\big(\forall x \in E \quad x \in F\big)\Big) \quad \text{ou} \quad \Big(\text{non}\big(\forall x \in F \quad x \in E\big)\Big)$$

- En appliquant la règle de négation du quantificateur « $\forall$ » , cela devient :

$$\big(\exists x \in E \quad x \notin F\big) \quad \text{ou} \quad \big(\exists x \in F \quad x \notin E\big).$$

Exercice 4

- Soit x un réel, forcément dans $[-2,+\infty[$, solution de l'équation donnée.

  On a alors $x=\sqrt{x+2}$.

  En élevant cette égalité au carré, on en déduit $x^2=x+2$, ou encore :

  $$0=x^2-x-2=(x+1)\,(x-2),$$

  ce qui entraîne $x=-1$ ou $x=2$. Comme le réel x vérifie $x=\sqrt{x+2}$, on a $x\geqslant 0$ et donc $x=2$. On en déduit $S\subset\{2\}$.
- Réciproquement $x=2$ est évidemment solution de l'équation donnée.

Par suite, l'ensemble des solutions est $S=\{2\}$.

Exercice 5 Pour $x\in\mathbb{R}$, on a évidemment $x^2\leqslant 4\Leftrightarrow -2\leqslant x\leqslant 2$.

On en déduit immédiatement $E=[-2,2]$.

Exercice 6

- Soit x un réel, forcément de l'intervalle $[-1,+\infty[$ solution de l'inéquation. On a alors $\sqrt{x+1}\leqslant 2\,(x-2)$.
  * Cette inégalité entraîne $x\geqslant 2$.
  * Comme les deux membres sont positifs, par élévation au carré, on en déduit $x+1\leqslant 4\,(x-2)^2$ et donc :

  $$0\leqslant 4\,x^2-17\,x+15=(x-3)\,(4\,x-5).$$

  * Comme $(x-3)\,(4\,x-5)\geqslant 0$ équivaut à $x\leqslant\frac{5}{4}$ ou $x\geqslant 3$, on déduit de ce qui précède que l'on a $x\geqslant 3$.
- Réciproquement, supposons $x\geqslant 3$. On a alors :

  $$4\,x^2-17\,x+15=(x-3)\,(4\,x-5)\geqslant 0\quad\text{et donc}\quad x+1\leqslant 4\,(x-2)^2.$$

  Comme $\sqrt{x+1}\geqslant 0$ et $2\,(x-2)\geqslant 0$, on en déduit $\sqrt{x+1}\leqslant 2\,(x-2)$.

Par suite l'ensemble des solutions de l'inéquation donnée est $S=[3,+\infty[$.

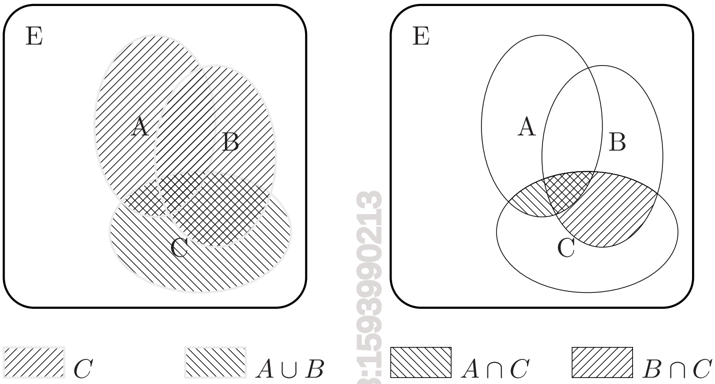
Exercice 7 Pour $x\in\mathbb{R}$, on a évidemment $x^2\geqslant 4\Leftrightarrow (x\leqslant -2)\,\text{ou}\,(x\geqslant 2)$.

On en déduit $x=\,]-\infty,-2]\cup[2,\infty[$.

Exercice 8 En classant les parties en fonction de leur cardinal, on obtient :

$$\mathcal{P}(E)=\big\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\big\}.$$

Exercice 9 Dessins illustrant la relation : $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.



Exercice 10 Pour utiliser les règles de calcul, écrivons $(A \setminus B)$ et $(B \setminus A)$ à l'aide de l'opération complémentaire, ce qui donne :

$$A \,\Delta\, B = (A \cap \complement_E B) \cup (B \cap \complement_E A).$$

En utilisant ⑭ (distributivité de $\cup$ sur $\cap$) on obtient :

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \cap (A \cup \complement_E A) \cap (\complement_E B \cup B) \cap (\complement_E B \cup \complement_E A)$$

Comme $A \cup \complement_E A = \complement_E B \cup B = E$ on en déduit :

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \cap (\complement_E B \cup \complement_E A)$$

Enfin l'utilisation de $\complement_E B \cup \complement_E A = \complement_E (B \cap A)$ donne :

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \cap \complement_E (B \cap A)$$

et donc

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Exercice 11 Lorsque $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$ on a :

$$E \times F = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}.$$

C'est donc un ensemble de 6 éléments. Ne pas oublier que $(1,2)$ et $(2,1)$ sont deux éléments distincts (*cf.* propriété fondamentale du couple).

Exercice 12 Montrons la contraposée de l'implication demandée.

Supposons donc $a\,d - b\,c \neq 0$. On a vu dans le chapitre 2 que, dans ce cas, le système ne possède qu'une solution, qui est donc ici la solution triviale $(0, 0)$, ce qui termine la démonstration.

Exercice 13

Montrons, par l'absurde, l'assertion P : « $\sqrt{2}$ est irrationnel ».

Supposons donc NON P, c'est-à-dire que « $\sqrt{2}$ est rationnel »

- Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$.

  Quitte à simplifier par une puissance de 2, on peut les supposer non tous deux pairs.

- En élevant au carré l'égalité précédente, on obtient :
$$2\,s^2 = r^2.$$
Par suite, l'entier r^2 est pair et il en est donc de même de r. On peut ainsi trouver $r_1 \in \mathbb{N}$ tel que $r = 2\,r_1$. En remplaçant dans l'égalité $2\,s^2 = r^2$, on obtient $2\,s^2 = 4\,r_1^2$ et donc :
$$s^2 = 2\,r_1^2$$
ce qui permet de prouver que s^2 et donc s sont pairs.
- Ainsi, les entiers r et s admettent 2 comme diviseur commun, ce qui est incompatible avec l'hypothèse faite sur r et s et termine la démonstration.

Remarque Comme dans beaucoup de raisonnements par l'absurde, l'assertion Q n'a pas été explicitée : ici, il s'agit de « r et s ne sont pas tous deux pairs ».

Exercice 14 Supposons la négation de la conclusion, à savoir :
$$|z-1| < 1 \quad \text{et} \quad |z+1| < 1.$$
En utilisant l'inégalité triangulaire, on a :
$$2 = |(1-z) + (1+z)| \leqslant |1-z| + |1+z| < 2,$$
ce qui est impossible. On en déduit le résultat demandé.

Exercice 15 Supposons donc $A \subset B$ et prouvons $A \cap C \subset B \cap C$ ou encore :
$$\forall x \in A \cap C \quad x \in B \cap C.$$
Soit donc x un élément de $A \cap C$; alors on a :
- x appartient à A, donc à B d'après l'hypothèse $A \subset B$;
- x appartient à C ;

par suite, on a $x \in B \cap C$, ce qui prouve l'inclusion $A \cap C \subset B \cap C$, et termine la démonstration.

Exercice 16
- **Analyse.** Si le couple (a, b) répond au problème, alors on a :
$$b = f(0) \quad \text{et} \quad a = f(1) - f(0).$$

  Remarque Au vu de la question posée, qui ne concerne que l'existence et pas l'unicité, il est ici inutile de recopier cette analyse.

- **Démonstration.** Posons $b = f(0)$ et $a = f(1) - f(0)$. En utilisant l'hypothèse avec $x = 0$ et $y = 1$, on obtient :
$$\forall z \in \mathbb{R} \quad (z \neq 0 \text{ et } z \neq 1) \Longrightarrow a = \frac{f(z) - b}{z}\cdot$$
et donc :
$$\forall z \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \quad f(z) = a\,z + b.$$
Comme, par construction de a et b, l'égalité $f(z) = a\,z + b$ est aussi vraie pour 0 et 1, on en déduit :
$$\forall z \in \mathbb{R} \quad f(z) = a\,z + b,$$
ce qui est bien la même chose que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\,x + b$.

Exercice 17 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- **Analyse.** Supposons qu'il existe $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, impaire, et $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, paire, telles que $f = f_1 + f_2$ c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

  On en déduit immédiatement :

  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = -f_1(x) + f_2(x),$$

  ce qui, par somme et différence, donne :

  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

  Par suite il existe au plus un couple (f_1, f_2) répondant au problème.

- **Existence.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons :

  $$f_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

  Il est alors immédiat de vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

  $$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad f_1(-x) = -f_1(x) \quad \text{et} \quad f_2(-x) = f_2(x),$$

  ce qui prouve que le couple (f_1, f_2) répond au problème.

Exercice 18

Démontrons $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$ en prouvant deux implications.

- Commençons pas l'implication $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$. Supposons donc $A \subset B$.
  - ∗ D'après la relation (24) de la page 320, on a $A \cup B \subset B \cup B$;
  - ∗ comme $B \cup B = B$, on en déduit $A \cup B \subset B$.

  Comme $B \subset A \cup B$ est vraie d'après (1) de la même page, on en déduit $A \cup B = B$.
  Par suite on a prouvé l'implication $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$.

- Démontrons ensuite $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$. Supposons donc $A \cup B = B$.
  Comme $A \subset A \cup B$, on en déduit $A \subset B$.
  Par suite on a prouvé l'implication $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$.

Exercice 19 Pour prouver cette implication, supposons $\lambda \vec{u} = \vec{0}$. Montrons alors :

$$\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \vec{0}.$$

Supposons λ non nul. Alors il possède un inverse λ^{-1} et, en multipliant $\lambda \vec{u} = \vec{0}$ par λ^{-1}, on en déduit :

$$\lambda^{-1} (\lambda \vec{u}) = \lambda^{-1} \vec{0} = \vec{0}.$$

Comme $\lambda^{-1} (\lambda \vec{u}) = (\lambda^{-1} \lambda) \vec{u} = \vec{u}$, il s'ensuit $\vec{u} = 0$.
Par suite on a prouvé $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

Chapitre 7 : Applications, relations, entiers naturels

I Applications, fonctions **334**
- 1 Définitions 334
- 2 Injectivité, surjectivité, bijectivité 337
- 3 Composition d'applications 339
- 4 Application réciproque 341
- 5 Images directes, images réciproques 343
- 6 Fonction indicatrice (ou caractéristique) 344
- 7 Familles indexées 345

II Relations binaires **347**
- 1 Relations d'équivalence 347
- 2 Premier exemple : l'ensemble des vecteurs du plan 349
- 3 Deuxième exemple : l'ensemble des nombres rationnels 351
- 4 Relations d'ordre 352

III L'ensemble des entiers naturels **356**
- 1 L'ensemble $\mathbb{N}$ 357
- 2 Raisonnement par récurrence 358

IV Notions sur les ensembles finis **362**
- 1 Définition 362
- 2 Sous-ensembles d'un ensemble fini 363
- 3 Applications entre ensembles finis 364

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . **366**

Exercices **381**

Applications, relations, entiers naturels

7

Dans tout le chapitre E, F, G et H désignent des ensembles quelconques.

I Applications, fonctions

Dans le chapitre 1 nous avons utilisé des fonctions réelles d'une variable réelle.

- On a alors défini une telle fonction $u : D_u \to \mathbb{R}$ en donnant, pour chaque réel $x \in D_u$, un moyen de calculer son image $u(x)$, ce qui n'est pas généralisable pour définir la notion d'application entre deux ensembles quelconques.
- Pour une telle fonction $u : D_u \to \mathbb{R}$ on a défini son graphe :
$$\Gamma_u = \big\{\big(x, u(x)\big)\,;\ x \in D_u\big\}\ ;$$
c'est un sous-ensemble du produit $D_u \times \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D_u$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ vérifiant $(x, y) \in \Gamma_u$.

C'est par le biais du graphe que nous allons pouvoir généraliser et définir rigoureusement la notion d'application.

1 Définitions

Dans toute la suite de ce chapitre, on appelle **graphe** de E vers F une partie quelconque du produit cartésien $E \times F$.

Définition 1

Une **application**, ou **fonction**, est un triplet $u = (E, F, \Gamma)$ où Γ est un graphe de E vers F tel que pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ vérifiant $(x, y) \in \Gamma$, ce qui s'écrit encore :
$$\forall x \in E \quad \exists\,!\, y \in F \quad (x, y) \in \Gamma. \tag{$*$}$$
On dit aussi que u est une application de E dans F ou de E vers F.

Exemples Si $E = F = \mathbb{R}$ alors $E \times F = \mathbb{R}^2$ est usuellement représenté par le plan usuel rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et il est géométriquement évident que :

- une droite D non parallèle à l'axe $(O, \vec{\jmath})$ est une partie de $E \times F$ vérifiant la propriété $(*)$; elle permet donc de définir une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;

- l'ensemble Γ d'équation $0 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, qui est la réunion des droites d'équation $x - y = 0$ et $x + y = 0$, ne vérifie pas la propriété $(*)$; en effet pour $x = 1$, il existe deux valeurs de $y = \pm 1$ telles que $(x, y) \in \Gamma$.

p.366 **Exercice 1** Si $\Gamma = \big\{(t^2, t)\,;\ t \in \mathbb{R}\big\}$, le triplet $(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R},\ \Gamma)$ est-il une application ?

p.366 **Exercice 2** Si $\Gamma = \big\{(t^2, t)\,;\ t \in \mathbb{R}_+\big\}$, le triplet $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \Gamma)$ est-il une application ?

Avec les notations de la définition précédente :

- E est appelé l'**ensemble de départ** ou **ensemble de définition** de u ;
- F est l'**ensemble d'arrivée** de u ;
- pour $x \in E$, l'unique élément $y \in F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$ s'appelle **image de x par u** et se note $u(x)$;
- quand on a $y = u(x)$, on dit aussi que x est un **antécédent** de y ;
- l'ensemble :
$$\{\, y \in F \mid \exists x \in E \quad y = u(x)\} = \{\, u(x)\,;\ x \in E\}$$
est l'**ensemble image** de u, c'est un sous-ensemble de F ;
- Γ, le graphe de u, est égal à $\{(x, u(x))\,;\ x \in E\}$;
- l'application u se note $E \xrightarrow{u} F$, $u : E \to F$ ou $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x). \end{array}$

Exemples

1. L'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ est appelée **identité de E**, et notée Id_E.
2. Si $\Gamma = \big\{(t, t^2)\,;\ t \in \mathbb{R}\big\}$, alors $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \Gamma)$ est l'application notée $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^2. \end{array}$
3. Si $\Gamma = \big\{(t^2, t)\,;\ t \in \mathbb{R}_+\big\}$, alors $(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}_+,\ \Gamma)$ est une application de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$; cette application se note usuellement $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array}$.

Égalité d'applications Comme conséquence de la définition, on déduit que l'égalité de deux applications u et v signifie :

(i) l'égalité des ensembles de départ de u et de v,

(ii) l'égalité des ensembles d'arrivée de u et de v,

(iii) l'égalité $u(x) = v(x)$ pour tout x de l'ensemble de départ commun.

Ne pas oublier de vérifier les conditions (i) et (ii).

Remarque La plupart du temps, on dispose d'un processus permettant, pour chaque $x \in E$, de définir l'expression de son image $u(x) \in F$, ce qui évite de faire appel au moindre graphe.

Exemples

1. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on peut définir l'application $u_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A. \end{array}$

2. Pour les fonctions réelles d'une variable réelle, il faut souvent commencer par déterminer un ensemble sur lequel la relation $y = u(x)$ définit une application.

   - La relation $y = \dfrac{1}{x-1}$ définit une application de $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
   - La relation $y = \sin x$ définit une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais elle peut aussi définir une application de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$. *A priori* ces deux applications ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble d'arrivée. Même s'il arrive souvent de les confondre, nous verrons que, dans certains cas (*cf.* exemples des pages 337 à 338), il est indispensable de bien les distinguer.

Notation L'ensemble des applications, ou des fonctions, de E dans F se note $\mathcal{F}(E, F)$ ou encore F^E. Cette dernière notation est justifiée par le fait que, pour E et F finis, on a $\operatorname{card}(F^E) = (\operatorname{card} F)^{\operatorname{card} E}$ (*cf.* page 1375).

Définition 2

Soit u une application de E dans F.

- Si E' est une partie de E, la **restriction** de u à E', notée $u_{|E'}$, est l'application de E' dans F définie par : $\forall x \in E' \quad u_{|E'}(x) = u(x)$.
- On appelle **prolongement** de u toute application v définie sur un ensemble E_1 contenant E, et vérifiant : $\forall x \in E \quad v(x) = u(x)$.

Remarque Soit $u : E \to F$ et $v : E_1 \to F$. Alors u est une restriction de v si, et seulement si, v est un prolongement de u.

Diagrammes sagittaux

Pour illustrer certaines propriétés des applications entre ensembles finis, il peut être intéressant de représenter une application par un **diagramme sagittal**. Par exemple, si $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{A, B, C, D\}$ le diagramme ci-contre représente l'application u définie par $u(a) = A$, $u(b) = B$ et $u(c) = D$.

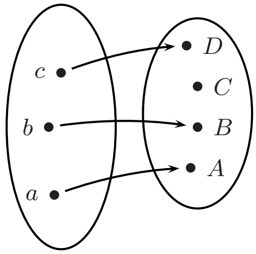


Fig 1

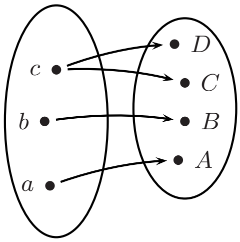


Fig 2

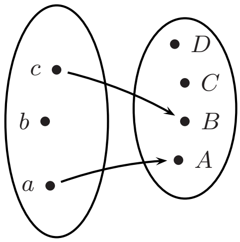


Fig 3

En revanche les diagrammes ci-contre ne peuvent pas représenter une application puisque :

- dans le cas de la figure 2, l'élément c aurait deux images ;
- dans le cas de la figure 3, l'élément b n'aurait pas d'image.

2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 3

Soit $u \in \mathcal{F}(E, F)$. On dit qu'elle est **injective**, ou que c'est une **injection**, si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes.

(i) Tout élément de F a au plus un antécédent par u.

(ii) Pour tout $y \in F$, l'équation $u(x) = y$ possède au plus une solution.

(iii) On a : $\forall x_1 \in E \quad \forall x_2 \in E \quad u(x_1) = u(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Exemples

- L'identité de E est évidemment injective.
- Si X est une partie quelconque de $\mathbb{R}$ et si $u : X \to \mathbb{R}$ est strictement croissante, alors elle est injective. En effet si $x \neq y$ alors on a par exemple $x < y$, et la stricte croissance de f nous donne $u(x) < u(y)$ et donc $u(x) \neq u(y)$.
  Il en est de même si f est strictement décroissante.

p.366 **Exercice 3** Écrire la négation de (iii).

Point méthode

- En général, c'est (iii) que l'on utilise pour prouver l'injectivité.
- Pour $u : X \to \mathbb{R}$, fonction réelle d'une variable réelle, l'injectivité se justifie souvent en prouvant que u est strictement monotone.
- Pour prouver que u n'est pas injective, il suffit (*cf.* exercice précédent) d'exhiber $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ tels que $x_1 \neq x_2$ et $u(x_1) = u(x_2)$.

Exemple La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas injective car $\sin 0 = \sin 2\pi$.

p.366 **Exercice 4** Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $u_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A. \end{array}$

Montrer que si $A \neq E$, alors l'application u_A n'est pas injective.

Définition 4

Soit $u \in \mathcal{F}(E,F)$. On dit qu'elle est **surjective**, ou que c'est une **surjection**, si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes.

(i) Tout élément de F a au moins un antécédent par u.

(ii) Pour tout $y \in F$, l'équation $u(x) = y$ possède au moins une solution.

(iii) On a : $\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = u(x)$.

Exemples

- L'identité de E est évidemment surjective.
- La fonction $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ est surjective car, pour tout $y \in [-1,1]$, il existe (au moins) un $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = \sin x$.

Point méthode

Pour prouver que u n'est pas surjective, on utilise, la négation des propriétés précédente : il suffit donc d'exhiber un $y \in F$ qui n'a pas d'antécédent.

Exemple La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective car 2 n'a pas d'antécédent.

p.366

Exercice 5 L'application $t \mapsto t^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ est-elle surjective ? injective ?

p.366

Exercice 6 Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $u_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A. \end{array}$

Montrer que l'application u_A est surjective si, et seulement si, $A = E$.

Définition 5

Soit $u \in \mathcal{F}(E,F)$. On dit qu'elle est **bijective**, ou que c'est une **bijection**, si elle vérifie l'une des quatre propriétés équivalentes suivantes :

(i) L'application u est injective et surjective.

(ii) Tout élément de F a un et un seul antécédent par u.

(iii) Pour tout $y \in F$, l'équation $u(x) = y$ possède une unique solution.

(iv) On a : $\forall y \in F \quad \exists!\, x \in E \quad y = u(x)$.

Exemple Aucune des fonctions sinus des exemples précédents :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

n'est bijective mais la fonction $\begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ est bijective.

p.366

Exercice 7 L'application $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+\\ t & \longmapsto & t^2\end{array}$ est-elle bijective ?

Point méthode

Pour prouver qu'une application est bijective, le plus élémentaire est de prouver qu'elle est injective et qu'elle est surjective.

Notation Une application bijective de E sur E est appelée **permutation** de E ; l'ensemble des permutations de E est habituellement noté $\mathfrak{S}(E)$.

Exemple L'identité de E est une permutation de E.

Traduction à l'aide de diagrammes sagittaux Dans le cas fini, les propriétés d'injectivité, surjectivité et bijectivité peuvent aussi s'illustrer à l'aide de diagrammes sagittaux.

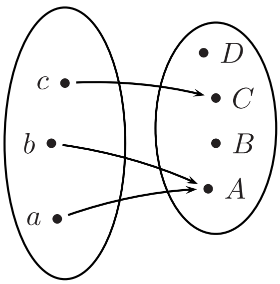


Fig. 4

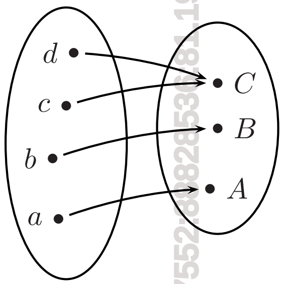


Fig. 5

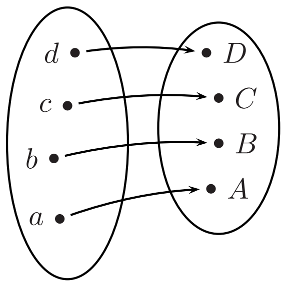


Fig. 6

- Dans le cas de la figure 4, l'application n'est pas injective car a et b ont même image ; elle n'est pas surjective car B n'a pas d'antécédent.
- Dans le cas de la figure 5, l'application est surjective mais pas injective.
- Dans le cas de la figure 6, l'application est bijective.
- La figure 1 de la page 336 correspondait à une application injective mais pas surjective.

3 Composition d'applications

Définition 6

Si $u \in \mathcal{F}(E,F)$ et $v \in \mathcal{F}(F,G)$, l'application $x \mapsto v(u(x))$, de E dans G est appelée **composée des applications** v et u ; on la note $v \circ u$.

p.366

Exercice 8 Soit $u : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^2\end{array}$ et $v : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}.\\ x & \longmapsto & x+1\end{array}$ Expliciter $v \circ u$ et $u \circ v$.

Attention En général (*cf.* exercice précédent), on n'a pas $v \circ u = u \circ v$!

p.366 **Exercice 9** Soit $u \in F^E$ et $v \in E^F$ deux applications telles que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que cela entraîne $E = F$.

Proposition 1

Soit trois applications $u \in \mathcal{F}(E,F)$, $v \in \mathcal{F}(F,G)$ et $w \in \mathcal{F}(G,H)$. Alors les applications $w \circ (v \circ u)$ et $(w \circ v) \circ u$ sont égales.

Principe de démonstration. Que signifie l'égalité de deux applications ?

Démonstration page 366

Remarque On se réfère couramment à la propriété précédente en parlant de l'**associativité de la composition** des applications.

865 **Remarque** Nous verrons dans le chapitre 16 que, sur l'ensemble E^E, la composition des applications est une loi de composition interne ;

- la proposition précédente permet de dire qu'elle est associative ;
- elle n'est pas commutative dès que E contient au moins deux éléments :

p.367 **Exercice 10** Soit E un ensemble contenant au moins deux éléments. Construire deux applications $u \in E^E$ et $v \in E^E$ tels que $u \circ v \neq v \circ u$.

Indication : utiliser a et b deux éléments distincts de E.

Proposition 2

Soit $u \in \mathcal{F}(E,F)$ et $v \in \mathcal{F}(F,G)$.

1. Si u et v sont injectives, alors $v \circ u$ est injective.
2. Si u et v sont surjectives, alors $v \circ u$ est surjective.
3. Si u et v sont bijectives, alors $v \circ u$ est bijective.

Démonstration page 367

Abus de langage Pratiquement on peut utiliser la composition des applications dans un cadre un peu plus large que celui de la définition 6 de la page précédente. Si u et v sont deux applications définies respectivement sur E et F, alors il est possible de parler de $v \circ u$ dès que l'on a : $\forall x \in E \;\; u(x) \in F$.

Exemple Étant donné $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ et $v : \begin{array}{rcl} [-2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{2+x} \end{array}$

alors on peut très bien noter $v \circ u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{2+\sin x}. \end{array}$

En revanche, dans un tel cas, il faut être très prudent car, comme on peut le voir sur l'exemple précédent, le résultat sur les composées d'applications surjectives ne peut alors plus s'appliquer.

4 Application réciproque

Définition 7

Soit u une application bijective de E dans F. Alors l'application de F dans E qui, à tout $y \in F$, associe l'unique $x \in E$ tel que $y = u(x)$, s'appelle **application réciproque** de u et se note u^{-1}.

Exemples

1. La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ t & \mapsto & t^2 \end{array}$ est bijective et sa fonction réciproque est notée $\sqrt{}$.

2. L'application $\begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ t & \longmapsto & \sin t \end{array}$ est bijective, et son application réciproque est notée Arcsin.

Point méthode (pour montrer que u est bijective et donner u^{-1})
Soit $u : E \to F$. Si, pour tout $y \in F$, on peut montrer que l'équation $u(x) = y$ possède une unique solution et en donner l'expression en fonction de y, alors cette expression nous donne l'application réciproque u^{-1}.

Exemple Soit l'application $u : \begin{array}{ccc} [-2, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+2}. \end{array}$

Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'équation $\sqrt{x+2} = y$ possède une unique solution, $x = y^2 - 2$. Par suite, l'application u est bijective, et $u^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [-2, +\infty[\\ y & \longmapsto & y^2 - 2. \end{array}$

Proposition 3

Si u est une application bijective de E dans F, alors on a :

$$u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_F\,.$$

Principe de démonstration. Il s'agit (deux fois) de vérifier l'égalité de deux applications

Démonstration page 367

Attention Si u est une application bijective de E sur F, on ne peut pas, en général, écrire $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u$ puisque $u \circ u^{-1} \in F^F$ alors que $u^{-1} \circ u \in E^E$ (*cf.* exercice 9 de la page précédente).

Proposition 4

Si $u \in F^E$ et $v \in E^F$ vérifient $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ et $v \circ u = \mathrm{Id}_E$, alors elles sont toutes deux bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Principe de démonstration. Pour commencer, la relation $v \circ u = \mathrm{Id}_E$ permet de prouver que u est injective, et la relation $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ permet de prouver que u est surjective.

Démonstration page 367

Attention On peut très bien avoir l'une des égalités $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ ou $v \circ u = \mathrm{Id}_E$ sans que les applications u et v soient bijectives (*cf.* exercice suivant).

p.367 **Exercice 11** Si u est la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, construire une fonction $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telle que $v \circ u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. La fonction u est-elle bijective ?

Point méthode (pour montrer que u est bijective et donner u^{-1})

Soit $u : E \to F$.

- Si l'on exhibe une application $v : F \to E$ telle que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ et $v \circ u = \mathrm{Id}_E$, alors on prouve que u est bijective et que $u^{-1} = v$.
- Souvent, la démonstration de la surjectivité de u mène à expliciter une solution de l'équation $u(x) = y$, de la forme $x = v(y)$. Une méthode efficace de rédaction consiste alors à exhiber directement v puis à prouver $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ et $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.

p.368 **Exercice 12** Soit E un ensemble et A une partie de E. On pose $B = \complement_E A$.

Montrer que $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$ est bijective.

Corollaire 5

1. Si $u \in F^E$ est bijective, alors u^{-1} est bijective et $\left(u^{-1}\right)^{-1} = u$.
2. Si $u \in F^E$ et $v \in G^F$ sont deux applications bijectives, alors $v \circ u$ est une application bijective et $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.

Principe de démonstration. C'est un corollaire, donc ... Démonstration page 369

Remarque

- Soit u une application de E dans E. On dit qu'elle est **involutive**, ou que c'est une d'**involution** si elle vérifie $u \circ u = \mathrm{Id}_E$.
- D'après la proposition précédente, une application involutive est bijective, et elle est sa propre réciproque.

Exemples

- Toute symétrie centrale est une application involutive et donc bijective.
- L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & \complement_E X \end{array}$ est involutive et donc bijective.

5 Images directes, images réciproques

Définition 8

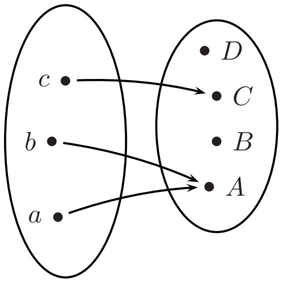
Soit $u \in F^E$. Si $A \subset E$ et $B \subset F$, on appelle :

- **image (directe)** de A par u, l'ensemble :
$$u(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A \quad y = u(x)\} = \{u(x)\,;\ x \in A\},$$
- **image réciproque** de B par u, l'ensemble :
$$u^{-1}(B) = \{x \in E \mid u(x) \in B\}.$$

Exemple Pour u, représentée sur le diagramme ci-dessous, on a :

$$u(\{a\}) = \{A\} \qquad u(\{a,b\}) = \{A\} \qquad u(\{a,b,c\}) = \{A,C\}$$

$$u^{-1}(\{A,D\}) = \{a,b\} \qquad u^{-1}(\{A\}) = \{a,b\} \qquad u^{-1}(\{A,B,C\}) = \{a,b,c\} \qquad u^{-1}(\{B\}) = \varnothing$$



Remarques

- L'application $u \in \mathcal{F}(E,F)$ est surjective si et seulement si $u(E) = F$.
- L'application $u \in \mathcal{F}(E,F)$ est :
  - ∗ injective si, et seulement si, pour tout $y \in F$, l'ensemble $u^{-1}(\{y\})$ a au plus un élément ;
  - ∗ surjective si, et seulement si, pour tout $y \in F$, l'ensemble $u^{-1}(\{y\})$ a au moins un élément ;
  - ∗ bijective si, et seulement si, pour tout $y \in F$, l'ensemble $u^{-1}(\{y\})$ a exactement un élément.

p.369 **Exercice 13** Étant donné l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ déterminer :

- d'abord $f\big([-2,2]\big)$ et $f\big([-1,2]\big)$,
- puis $f^{-1}\big([0,4]\big)$, $f^{-1}\big([-2,4]\big)$ et $f^{-1}\big([-2,-1]\big)$.

p.369 **Exercice 14** Si $u \in \mathcal{F}(E,F)$, déterminer $u^{-1}(\varnothing)$, $u(\varnothing)$ et $u^{-1}(F)$.

Attention

- L'utilisation de la notation $u^{-1}(B)$ ne suppose pas que u soit bijective.
- En revanche, lorsque u est bijective, $u^{-1}(B)$ représente aussi bien l'image directe de B par l'application u^{-1} que l'image réciproque de B par u.

p.369 **Exercice 15** Démontrer l'affirmation précédente.

Proposition 6

Si $u \in \mathcal{F}(E,F)$, $B \subset F$ et $B' \subset F$, alors on a :

1. $B \subset B' \Longrightarrow u^{-1}(B) \subset u^{-1}(B')$,
2. $u^{-1}(B \cup B') = u^{-1}(B) \cup u^{-1}(B')$,
3. $u^{-1}(B \cap B') = u^{-1}(B) \cap u^{-1}(B')$,
4. $u^{-1}\left(\complement_F B\right) = \complement_E\, u^{-1}(B)$.

Principe de démonstration. Démonstration page 369

Travailler par double inclusion, mais sans toujours « descendre au niveau des éléments ».

Il existe des résultats analogues *(mais pas identiques)* pour les images directes. Ces résultats, qui ne sont pas au programme, font l'objet de l'exercice suivant.

p.370

Exercice 16 Soit $u \in \mathcal{F}(E,F)$ ainsi que $A \subset E$ et $A' \subset E$.

1. Montrer que l'on a :
$$A \subset A' \Longrightarrow u(A) \subset u(A') \quad \text{et} \quad u(A \cup A') = u(A) \cup u(A').$$
2. Établir $u(A \cap A') \subset u(A) \cap u(A')$.
3. On prend ici $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array}$

   Exhiber $A \subset \mathbb{R}$ et $A' \subset \mathbb{R}$ tels que $u(A \cap A') \neq u(A) \cap u(A')$.

6 Fonction indicatrice (ou caractéristique)

Définition 9

Soit $A \subset E$. La **fonction indicatrice** de A, ou encore **fonction caractéristique** de A, est la fonction de E dans $\{0,1\}$, notée $\mathbb{1}_A$ et définie par :
$$\mathbb{1}_A(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in A \qquad \text{et} \qquad \mathbb{1}_A(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin A.$$

Proposition 7

Si A et B sont deux parties de E, on a :

1. pour l'intersection : $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$,
2. pour la réunion : $\mathbb{1}_{A\cup B} = \sup(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$,
3. pour le complémentaire : $\mathbb{1}_{\complement A} = 1 - \mathbb{1}_A$.

Démonstration. Les relations (1.) et (3.), ainsi que la première égalité de (2.) sont évidentes. Comme $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$, on en déduit :
$$\mathbb{1}_{A\cup B} = 1 - \mathbb{1}_{\complement_E(A\cup B)} = 1 - \mathbb{1}_{\complement_E A \cap \complement_E B} = 1 - \mathbb{1}_{\complement_E A} \times \mathbb{1}_{\complement_E B}.$$

En transformant $\mathbb{1}_{\complement_E A}$ et $\mathbb{1}_{\complement_E B}$, on obtient :

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = 1-(1-\mathbb{1}_A)\times(1-\mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_{A\cap B},$$

ce qui prouve la dernière égalité. □

Remarque Si E ne possède qu'un nombre fini d'éléments, alors $\sum\limits_{x\in E}\mathbb{1}_A(x)$ est égal au nombre d'éléments de A, noté $\operatorname{card}(A)$ ou $\operatorname{card} A$ (*cf.* chapitre 28).

p.370

Exercice 17 Soit A_1, A_2 et A_3 trois parties de E. On pose $A = A_1\cup A_2\cup A_3$.

1. Montrer que $1-\mathbb{1}_A = (1-\mathbb{1}_{A_1})(1-\mathbb{1}_{A_2})(1-\mathbb{1}_{A_3})$.
2. En déduire :

$$\begin{aligned}\operatorname{card} A =&\operatorname{card} A_1+\operatorname{card} A_2+\operatorname{card} A_3\\ &-\operatorname{card} A_2\cap A_3-\operatorname{card} A_1\cap A_3-\operatorname{card} A_1\cap A_2\\ &+\operatorname{card} A_1\cap A_2\cap A_3\end{aligned}$$

Proposition 8

L'application $A\mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur l'ensemble $\mathcal{F}(E,\{0,1\})$.

Principe de démonstration. Exhiber « l'application réciproque ». Démonstration page 371

7 Familles indexées

Définition 10

Si I est un ensemble quelconque, une application de I dans E est aussi appelée **famille d'éléments** de E indexée par I.

Remarque Une famille d'éléments de E indexée par I est donc un élément de E^I, mais l'utilisation du terme famille sous-entend que l'on utilise la notation indexée $(x_i)_{i\in I}$ au lieu de la notation fonctionnelle $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E\\ i & \longmapsto & x(i).\end{array}$

Exemple Une famille d'éléments de E indexée par $\mathbb{N}$, ou une partie de $\mathbb{N}$ de la forme $\{n\in\mathbb{N}\mid n\geqslant n_0\}$, est appelée suite d'éléments de E.

Familles finies, familles quelconques

Une famille est dite finie lorsque l'ensemble I est fini.

- Lorsque I est de cardinal $p\in\mathbb{N}^*$, on prend le plus souvent $I=[\![1,p]\!]$ et une telle famille est aussi appelée ***p*-liste** ou ***p*-uplet**.
- La famille $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ se note alors couramment $(x_1,\dots,x_p)$, et l'ensemble $\mathbb{R}^I=\mathbb{R}^{[\![1,p]\!]}$ se note plus simplement $\mathbb{R}^p$.

Exemples de familles quelconques

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on peut définir $f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x-a|. \end{array}$

   La famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille de fonctions (d'éléments de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) indexée par $\mathbb{R}$.
2. Si $u \in F^E$ et $A \subset E$, l'ensemble $u(A) = \{u(x)\,;\ x \in A\}$ peut aussi être vu comme une famille d'éléments de F indexée par A, à savoir $\big(u(x)\big)_{x\in A}$.
3. Lorsque $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée par un ensemble I infini, on ne peut définir algébriquement $\sum\limits_{i\in I} x_i$ que lorsque $\{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ est fini.

   Une telle famille est infinie bien que l'ensemble $\{x_i\,;\ i \in I\}$ soit fini.

Familles de parties Pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E, c'est-à-dire toute famille d'éléments de $\mathcal{P}(E)$, on généralise les notions d'intersection et de réunion en posant :

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I \ \ x \in A_i\} \quad \text{et} \quad \bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I \ \ x \in A_i\}.$$

p.371 **Exercice 18** Pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $J_h =]-h, +h[$. Montrer que :

$$\bigcap_{h\in\mathbb{R}_+^*} J_h = \{0\} \quad \text{et} \quad \bigcup_{h\in\mathbb{R}_+^*} J_h = \mathbb{R}.$$

Résultats Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E ainsi que I_1 et I_2 deux parties de I. Avec ces définitions d'intersections et de réunions, on a :

$$\Big(\bigcap_{i\in I_1} A_i\Big) \cap \Big(\bigcap_{i\in I_2} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I_1\cup I_2} A_i \quad \text{et} \quad \Big(\bigcup_{i\in I_1} A_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i\in I_2} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I_1\cup I_2} A_i$$

ainsi que :

$$\complement_E\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} \complement_E A_i \qquad \text{et} \qquad \complement_E\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} \complement_E A_i.$$

De même, si $u \in F^E$ et si $(B_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de F, on a :

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{et} \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

Sous-famille

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille indexée par un ensemble I, et soit J une partie de I. La famille $(x_i)_{i\in J}$ est appelée **sous-famille** de $(x_i)_{i\in I}$. Une sous-famille de $(a_i)_{i\in I}$ n'est donc pas autre chose qu'une restriction de l'application $i \mapsto a_i$.

Exemple Dans l'exemple 1 ci-dessus, on peut considérer la sous-famille $(f_a)_{a\in\mathbb{Z}}$.

Abus de notation Dans le cas d'une famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$, les sous-familles sont représentées comme des listes. Ainsi, $(2,3,5,7)$ est la sous-famille constituée des nombres premiers de la famille $(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$.

II Relations binaires

Dans toute cette partie, E désigne un ensemble quelconque.

Définition 11

On appelle **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur un ensemble E tout prédicat à deux variables défini sur l'ensemble produit E^2.

Exemples

- Dans $\mathbb{R}$, on a rencontré la relation $x \leqslant y$ ou la relation $x = y$.
- Dans $\mathcal{P}(E)$ on a déjà utilisé l'inclusion $X \subset Y$.

1 Relations d'équivalence

Définition

Définition 12

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une **relation d'équivalence** sur E si :

elle est **réflexive** : $\forall x \in E \quad x \,\mathcal{R}\, x$,
elle est **symétrique** : $\forall (x,y) \in E^2 \quad x \,\mathcal{R}\, y \Rightarrow y \,\mathcal{R}\, x$,
elle est **transitive** : $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad (x \,\mathcal{R}\, y \quad \text{et} \quad y \,\mathcal{R}\, z) \Rightarrow x \,\mathcal{R}\, z$.

Exemples

1. Sur tout ensemble E, l'égalité est évidemment une relation d'équivalence.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, alors la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par :
$$x \,\mathcal{R}\, y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad x - y = k\,n,$$
est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$, appelée **congruence modulo n**.

   Si x et y sont deux éléments de $\mathbb{Z}$ en relation pour la congruence modulo n, on dit que x est congru à y modulo n et l'on écrit $x \equiv y \quad [n]$.
3. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$x \,\mathcal{R}\, y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad x - y = k\,\alpha,$$
est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ appelée **congruence modulo α**.

   Si x et y sont deux réels en relation pour la congruence modulo α, on dit que x est congru à y modulo α, et l'on écrit $x \equiv y \quad [\alpha]$.

   En trigonométrie, on a vu que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on a :
$$\big(\cos x = \cos y \quad \text{et} \quad \sin x = \sin y\big) \Longleftrightarrow x \equiv y \quad [2\,\pi].$$

Classes d'équivalence

Définition 13

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.

- Pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{y \in E \mid x \,\mathcal{R}\, y\}$ est appelé **classe d'équivalence de x** pour $\mathcal{R}$; cet ensemble est noté $cl(x)$ voire $\bar{x}$ ou $\dot{x}$.
- Une partie X de E est une **classe d'équivalence** s'il existe un $x \in E$ tel que $X = cl(x)$; un tel x est alors appelé *un* **représentant de X**.

Remarque Pour tout élément x de E, on a $x \in cl(x)$.

Exemples

1. Pour la congruence modulo 2 sur $\mathbb{Z}$, il y a deux classes d'équivalence :
   - la classe de 0 qui est l'ensemble des nombres pairs,
   - la classe de 1 qui est l'ensemble de nombres impairs.
2. Pour la relation de congruence modulo 5 sur $\mathbb{Z}$, il y a 5 classes d'équivalence qui sont : $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ et $\bar{4}$; pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\bar{x} = \{x + 5k \,;\, k \in \mathbb{Z}\}$.

p.372

Exercice 19 Soit E et F deux ensembles et $u \in \mathcal{F}(E, F)$.

Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur E par :

$$x \,\mathcal{R}\, y \Longleftrightarrow u(x) = u(y),$$

est une relation d'équivalence et que, pour tout $x \in E$, on a $cl(x) = u^{-1}\big(\{u(x)\}\big)$.

Proposition 9

Étant donné une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un ensemble E, ainsi que deux éléments x et y de E, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $x \,\mathcal{R}\, y$ $\qquad$ (ii) $y \in cl(x)$ $\qquad$ (iii) $cl(x) = cl(y)$.

Principe de démonstration. Deux de ces propriétés sont évidemment équivalentes.

Démonstration page 372

Définition 14

Une **partition** d'un ensemble E est un ensemble de parties de E, toutes non vides, disjointes deux à deux, et dont la réunion est égale à E ; autrement dit, c'est une partie $\mathcal{U}$ de $\mathcal{P}(E)$ telle que :

- $\forall A \in \mathcal{U} \quad A \neq \varnothing$;
- $\forall A \in \mathcal{U} \quad \forall B \in \mathcal{U} \quad A \neq B \Longrightarrow A \cap B = \varnothing$;
- $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{U}} A = E$.

Exemples

1. Si $E = [\![1,7]\!]$, alors $\{\{1,3\},\{2,6,7\},\{4,5\}\}$ est une partition de E.
2. Si $E = [\![1,7]\!]$, alors $\{\{1,3,4\},\{2,6,7\},\{4,5\}\}$ n'est pas une partition de E.
3. L'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs forment une partition de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

Proposition 10

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur un ensemble E, alors ses classes d'équivalence forment une partition de E.

Principe de démonstration. Conséquence de de la proposition précédente.

Démonstration page 372

p.372

Exercice 20 Soit $\mathcal{U}$ une partition de E. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad x \,\mathcal{R}\, y \Longleftrightarrow \left(\exists A \in \mathcal{U} \quad x \in A \quad \text{et} \quad y \in A\right)$$

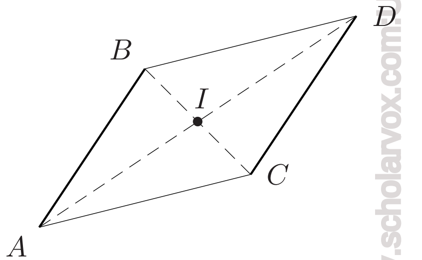
est une relation d'équivalence dont les classes sont les éléments de $\mathcal{U}$.

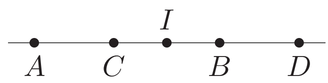
2 Premier exemple : l'ensemble des vecteurs du plan

En Physique, vous avez déjà manipulé des vecteurs du plan pour représenter des forces, des vitesses, voire des accélérations. Précisons cette notion à l'aide des relations d'équivalence.

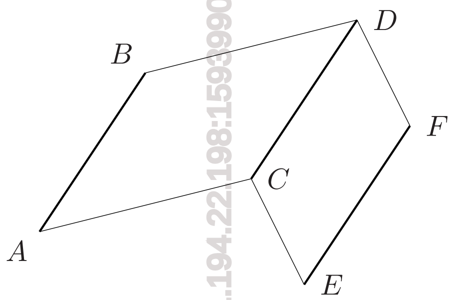
Dans cette partie, on désigne par $\mathcal{P}$ le plan usuel.

- On appelle **bipoint** de $\mathcal{P}$ tout couple (A,B) de points de $\mathcal{P}$. À un tel bipoint (A,B) on associe le segment $[AB]$ qui permet de le représenter.
- Lorsque $ABDC$ est un parallélogramme, on dit aussi que (A,B) est **équipollent** à (C,D). D'après les propriétés des parallélogrammes, cela équivaut au fait que les segments $[AD]$ et $[BC]$ aient même milieu.
- Plus généralement, lorsque (A,B) et (C,D) sont deux bipoints quelconques de $\mathcal{P}$, on dit que (A,B) est **équipollent** à (C,D), et l'on note alors $(A,B)\ \mathrm{Eq}\ (C,D)$, si les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu. Graphiquement, on a donc l'une des représentations suivantes :





- Si A, B et C sont donnés, alors il est géométriquement évident d'après les figures précédentes qu'il existe un unique point D tel que l'n ait (A, B) Eq (C, D).
- Cette relation d'équipollence est manifestement réflexive et symétrique. Des considérations de géométrie élémentaire permettent de justifier qu'elle est transitive (*cf.* figure ci-dessous dans le cas de parallélogrammes non aplatis).



On appelle alors **vecteur du plan** toute classe d'équivalence de bipoints du plan pour la relation d'équipollence.

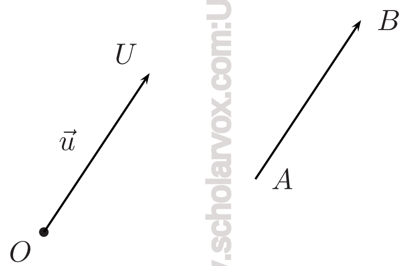
- Lorsque (A, B) est un bipoint de $\mathcal{P}$, alors sa classe pour la relation d'équipollence se note $\overrightarrow{AB}$, que l'on lit « vecteur AB ». Ainsi :

$$(A, B) \text{ Eq } (C, D) \quad \text{devient} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

- Lorsque l'on introduit *a priori* un vecteur, on le désigne en général par une lettre minuscule la plupart du temps surmontée d'une flèche $\vec{u}$ et, pour dire que le bipoint (A, B) appartient à la classe d'équivalence $\vec{u}$, on écrit :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}.$$

Si l'on privilégie dans le plan un point O que l'on nomme **origine**, alors pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan défini par l'un de ses représentants $\overrightarrow{AB}$, il existe un unique point $U \in \mathcal{P}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OU}$



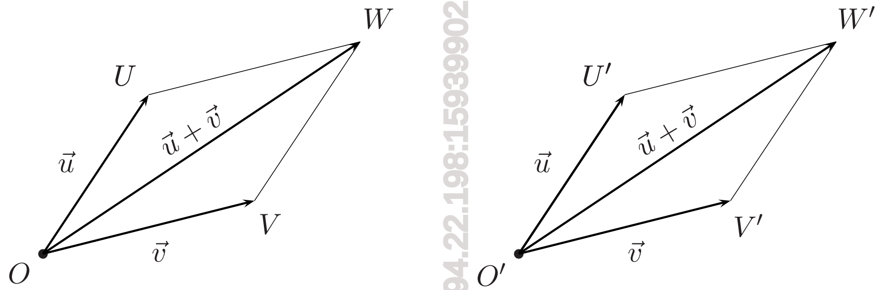
On peut maintenant définir la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Après avoir choisi une origine O, on considère les points U et V tels que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{OU} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \overrightarrow{OV}$$

et l'on pose :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OW}$$

où W est le quatrième point du parallélogramme $OUWV$ (*cf.* figure ci-dessous).



Le dessin ci-dessus permet de se convaincre géométriquement que le vecteur $\vec{u}+\vec{w}$ ainsi défini ne dépend pas de l'origine choisie, ce qui légitime la définition de cette somme de deux vecteurs. On peut dès lors écrire :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{UW} = \overrightarrow{OW}.$$

On définit de la même manière le produit d'un vecteur par un scalaire.

Remarque On peut faire une construction analogue dans l'espace usuel.

3 Deuxième exemple : l'ensemble des nombres rationnels

Quand on utilise un nombre rationnel x, on l'écrit sous forme d'une « fraction » $\frac{p}{q}$ avec avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ mais souvent, pour des besoins de calculs, on remplace cette fraction par n'importe quelle fraction $\frac{kp}{kq}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$ et, plus généralement, par toute fraction de la forme $\frac{p'}{q'}$ avec $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{Z}^*$ à condition évidemment d'avoir :

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \quad \text{ou encore} \quad p\,q' = p'\,q.$$

Dès le primaire, on vous a fait comprendre cela à l'aide d'exemples de partage de tartes : que l'on reçoive une moitié d'une tarte coupée en deux parties égales ou deux morceaux d'une tarte coupée en quatre parties égales, on a (aux miettes près) la même quantité de gâteau.

Cette approche intuitive des nombres rationnels est évidemment la bonne façon de comprendre et d'appréhender ces nombres, et il ne faut pas s'en priver. Mais, maintenant que nous connaissons les relations d'équivalence, nous pouvons en donner une définition plus formelle.

L'idée est de représenter un nombre rationnel x par un couple $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ mais aussi par tout couple $(p',q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ vérifiant $p\,q' = p'\,q$.
Sur l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on considère donc la relation :

$$(p,q)\ \mathcal{R}\ (p',q') \iff p\,q' = p'\,q.$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence, et l'on définit alors un rationnel comme une classe d'équivalence pour cette relation. En particulier, si (p,q) est un représentant de x, alors, pour tout entier relatif $k \in \mathbb{Z}^*$, le couple $(k\,p, k\,q)$ est aussi un représentant de x.

Au lieu d'écrire $x = cl(p,q)$ on écrit $x = \dfrac{p}{q}$, ce qui est bien adapté aux « simplifications » du type : $\forall k \in \mathbb{Z}^* \quad x = \dfrac{p}{q} = \dfrac{k\,p}{k\,q}$.

Parmi tous les représentants d'un rationnel x, on privilégie les **représentants irréductibles**, pour lesquels p et q sont premiers entre eux, c'est-à-dire n'ont pas d'autre diviseur commun que ± 1. Il existe un unique représentant irréductible dont le dénominateur est dans $\mathbb{N}^*$ (voir la proposition 18 de la page 836).

4 Relations d'ordre

Définition

Définition 15

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une **relation d'ordre** sur E si elle est :

réflexive	:	$\forall x \in E \quad x\,\mathcal{R}\,x,$
antisymétrique	:	$\forall (x,y) \in E^2 \quad (x\,\mathcal{R}\,y \quad \text{et} \quad y\,\mathcal{R}\,x) \Longrightarrow x = y,$
transitive	:	$\forall (x,y,z) \in E^3 \quad (x\,\mathcal{R}\,y \quad \text{et} \quad y\,\mathcal{R}\,z) \Longrightarrow x\,\mathcal{R}\,z.$

Le couple $(E,\mathcal{R})$ est alors appelé **ensemble ordonné**.

Exemples

1. Les relations d'ordre usuelles sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ notées $\leqslant$ ou $\geqslant$.
2. La relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$.

p.373 **Exercice 21** Montrer que la relation de divisibilité définie dans $\mathbb{N}$ par :

$$x \mid y \iff \exists k \in \mathbb{N} \quad y = k\,x$$

est une relation d'ordre.

p.373 **Exercice 22** Que pensez-vous de la relation de divisibilité définie dans $\mathbb{Z}$ par :

$$x \mid y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad y = k\,x\ ?$$

p.373

Exercice 23 Montrer que la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(a, b) \leqslant (a', b') \iff \big(a < a' \quad \text{ou} \quad (a = a' \quad \text{et} \quad b \leqslant b')\big)$$

est une relation d'ordre (appelée **ordre lexicographique**).

Remarque On note souvent une relation d'ordre par le symbole $\leqslant$, qui se lit « inférieur ou égal », ce qui ne signifie absolument pas que l'on travaille sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ muni de leur relation d'ordre usuelle. Si $x \leqslant y$ est vérifié, on dit aussi que « x est plus petit que y » ou que « y est plus grand que x », d'où l'intérêt d'utiliser un symbole dissymétrique.

Attention La relation $<$ utilisée habituellement sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ n'est pas une relation d'ordre : elle est antisymétrique et transitive, mais elle n'est pas réflexive. Et pourtant on l'appelle souvent « relation d'ordre stricte » !

Ordre total – Ordre partiel

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On dit que deux éléments x et y de E sont **comparables** pour la relation $\leqslant$ si l'on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Exemple

- Dans $\mathbb{R}$ muni de son ordre usuel deux éléments quelconques sont comparables.
- Dans $\mathbb{N}$ muni de la divisibilité, les éléments 2 et 3 ne sont pas comparables.

Définition 16

La relation d'ordre $\leqslant$ définit un **ordre total** sur E si deux éléments quelconques de E sont comparables pour $\leqslant$, c'est-à-dire si :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (x \leqslant y \quad \text{ou} \quad y \leqslant x).$$

Dans le cas contraire on dit que c'est un **ordre partiel**.

Exemples d'ordre total

1. La relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$, et donc sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.
2. L'ordre lexicographique de l'exercice 23.
   En effet, soit (a, b) et (a', b') deux éléments de $\mathbb{R}^2$.
   - Si $a < a'$, alors on a $(a, b) \leqslant (a', b')$. Si $a' < a$, alors on a $(a', b') \leqslant (a, b)$.
   - Sinon, alors on a $a = a'$. Dans ce cas :
     * si $b \leqslant b'$, alors on a $(a, b) \leqslant (a', b')$;
     * sinon, on a $b' \leqslant b$, et donc $(a', b') \leqslant (a, b)$.

   Ainsi (a, b) et (a', b') sont comparables, ce qui prouve que l'ordre est total.
3. Plus généralement, l'ordre alphabétique dans un dictionnaire.

Exemples d'ordre partiel

1. La relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$ (car 3 et 2 ne sont pas comparables).
2. La relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$, lorsque $\operatorname{card} E \geqslant 2$, puisque si $a \neq b$ alors $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables : en effet, on n'a ni $\{a\} \subset \{b\}$ ni $\{b\} \subset \{a\}$.

p.373

Exercice 24 Montrer que sur $\mathbb{R}^2$, la relation $(a,c) \leqslant (b,d) \iff (a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d)$ définit un ordre partiel.

Au sujet des nombres complexes D'après ce qui précède, on peut donc définir des relations d'ordre sur $\mathbb{R}^2$ et donc sur $\mathbb{C}$. Mais, en général, on ne les utilise pas car elles ne sont pas compatibles avec la structure de corps de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'aucune ne vérifie, pour tout z_1, z_2, z_3 les deux propriétés suivantes :

$$z_1 \leqslant z_2 \Longrightarrow z_1 + z \leqslant z_2 + z \quad \text{et} \quad (z_1 \leqslant z_2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant z_3) \Longrightarrow z_1\, z_3 \leqslant z_2\, z_3.$$

C'est pourquoi nous bannirons l'utilisation de relations d'ordre sur $\mathbb{C}$ *!*

Attention Certaines réactions que l'on peut avoir pour nier une inégalité, et qui nous viennent de $(\mathbb{R}, \leqslant)$ ne s'appliquent qu'à un ordre total !

- Si x et y sont deux éléments de $\mathbb{R}$, alors la négation de $x \leqslant y$ est $x > y$.
- De même, sur un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ quelconque, on peut définir une inégalité stricte (notée $<$) en posant :

$$x < y \iff (x \leqslant y \quad \text{et} \quad x \neq y).$$

  Toutefois, ne pas dire hâtivement que $\text{non}(x \leqslant y)$ équivaut alors à $y < x$. Par exemple, on a vu que $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un ensemble ordonné ; mais si l'ensemble E possède au moins deux éléments, alors, pour X et Y dans $\mathcal{P}(E)$, la négation de $X \subset Y$ n'a aucune raison d'être $Y \subset X$ et $Y \neq X$.

p.373

Exercice 25 Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné et $(x,y) \in E^2$. Montrer que la négation de $x \leqslant y$ est équivalente à $y < x$.

Plus grand élément – Plus petit élément

Définition 17

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, A une partie de E et a un élément de A.

- On dit que a est le **plus grand élément de A** si : $\forall x \in A \quad x \leqslant a$. Quand il existe, le plus grand élément de A se note $\max(A)$.
- On dit que a est le **plus petit élément de A** si : $\forall x \in A \quad a \leqslant x$. Quand il existe, le plus petit élément de A se note $\min(A)$.

Remarque L'utilisation de l'article défini « le » dans la définition précédente exige une démonstration d'unicité. Supposons que a et b soient deux plus grands éléments de A ; on a alors $a \leqslant b$ car b est plus grand élément, ainsi que $b \leqslant a$ car a est plus grand élément. Par antisymétrie, on en déduit $a = b$. $\square$

Exemples

1. L'intervalle réel $[0,1]$ muni de l'ordre usuel possède un plus grand élément qui est 1 et un plus petit élément qui est 0.
2. L'ensemble $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément qui est 0.

p.374

Exercice 26 $(\mathcal{P}(E),\subset)$ possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?

p.374

Exercice 27 Montrer que l'ensemble ordonné $(\mathbb{N},\,|\,)$ possède un plus petit élément et un plus grand élément.

p.374

Exercice 28 Soit $(E,\leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

1. Écrire une assertion énonçant que A possède un plus grand élément.
2. En déduire une assertion énonçant que A ne possède pas de plus grand élément.

Exemples

1. Si E est égal à $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel, alors E ne possède pas de plus grand élément puisque, pour tout $x\in E$, on a $x+1\in E$ et $x<x+1$.
2. Muni de l'ordre usuel, l'intervalle réel $I=[0,1[$ ne possède pas de plus grand élément car pour tout $x\in I$, on a $\frac{1+x}{2}\in I$ et $x<\frac{1+x}{2}$.

p.374

Exercice 29 Soit E un ensemble possédant au moins deux éléments.
Montrer que $\mathcal{P}(E)\setminus\{E\}$ ne possède pas de plus grand élément pour l'inclusion.

Majorants – Minorants

Définition 18

Soit A une partie d'un ensemble ordonné $(E,\leqslant)$. Un élément $a\in E$ est :

- un **majorant** de A si : $\forall x\in A\quad x\leqslant a$,
- un **minorant** de A si : $\forall x\in A\quad a\leqslant x$.

Exemple Dans $(\mathbb{R},\leqslant)$ muni de son ordre usuel :

- l'intervalle $[0,1]$ a pour majorant chacun des éléments de $[1,+\infty[$;
- l'intervalle $[0,1[$ a pour majorant chacun des éléments de $[1,+\infty[$.

Remarque Le plus grand élément de A, s'il existe, est l'unique majorant de A appartenant à A.

p.374 **Exercice 30** Soit X et Y deux éléments de $\mathcal{P}(E)$.

Dans $(\mathcal{P}(E),\subset)$, quels sont les majorants de la partie $\{X,Y\}$?

L'ensemble de ces majorants possède-t-il un plus petit élément ?

p.374 **Exercice 31** Dans $(\mathbb{N},|)$, quels sont les majorants de $\{8,9,12\}$?

p.374 **Exercice 32** Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ on considère la relation :

$$f \leqslant g \iff \big(\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant g(x)\big).$$

1. Vérifier que c'est une relation d'ordre.
2. Est-ce un ordre total ? Que signifie $f > 0$?
3. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On pose $A = \{f,g\}$.
   - À quelle condition peut-on parler de $\max A$?
   - Dans le cas général, montrer que $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \max\{f(x),g(x)\} \end{array}$

     est un majorant de A, puis que c'est le plus petit des majorants de A.

Remarque linguistique

- Dans les ouvrages et les articles en langue anglaise, « *greater than* », « *superior* », « *less than* » *et* « *inferior* » correspondent aux inégalités strictes. Si l'on veut parler d'inégalités larges, alors on ajoutera systématiquement « *or equal* ». Les conventions sont similaires avec la langue allemande.
- En revanche, en français, les locutions « inférieur », « plus petit que », ... correspondent à des inégalités larges ; pour des inégalités strictes, il est indispensable de préciser « strictement ».

III L'ensemble des entiers naturels

- Les nombres entiers naturels, et leur ensemble $\mathbb{N}$, sont à la base de toutes les mathématiques, la première activité mathématiques des humains ayant certainement été de compter. C'est pourquoi la plupart des propriétés de $\mathbb{N}$ paraissent si naturelles et n'ont, jusqu'à une période relativement récente, soulevé aucune question, même parmi les plus grands mathématiciens.
- Il a fallu attendre le XIX$^{\text{e}}$ siècle pour que le problème de la construction de $\mathbb{N}$ soit abordé. Une construction rigoureuse de l'ensemble des entiers sort du cadre de ce cours et nous ferons comme le mathématicien Kronecker qui disait : « Dieu nous a donné les entiers et l'homme a fait le reste ».

Il est toutefois indispensable dans cet ouvrage de donner une liste exhaustive des propriétés admises qui nous permettront de construire la suite.

1 L'ensemble $\mathbb{N}$

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est un ensemble non vide, muni d'une relation d'ordre total ainsi que d'une addition et d'une multiplication compatibles avec cette relation d'ordre, *i.e.* vérifiant :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \quad x \leqslant y \implies (x+z \leqslant y+z \quad \text{et} \quad x\,z \leqslant y\,z).$$

De plus :

- toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément ;
- toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément ;
- $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

Dans certains cas on peut définir la différence de 2 entiers naturels : si n et m sont deux entiers tels que $n \leqslant m$ alors il existe un unique élément $p \in \mathbb{N}$ tel que $m = n + p$ et on note alors $p = m - n$.

Conséquences immédiates

- $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément, noté 0 ; on pose $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors l'ensemble des entiers strictement plus grands que n est non vide (sinon n est un majorant de $\mathbb{N}$) ; son plus petit élément est appelé successeur de n ;
  * on note 1 le successeur de 0 ;
  * le successeur de n est aussi égal à $n+1$ et on a donc :
  $$\forall m \in \mathbb{N} \quad m > n \Rightarrow m \geqslant n+1.$$
- De même, si $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'ensemble des entiers strictement plus petits que n est non vide (il contient 0) et majoré par n ; son plus grand élément, appelé prédécesseur de n, est égal à $n-1$, et l'on a :
  $$\forall m \in \mathbb{N} \quad m < n \Rightarrow m \leqslant n-1.$$

Comme application de la définition de $\mathbb{N}$, donnons le théorème suivant.

Théorème 11 (Division euclidienne des entiers naturels)

Si $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, alors il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$a = b\,q + r \quad \text{avec} \quad r < b. \qquad (*)$$

- q est appelé le quotient de la division euclidienne de a par b,
- r est appelé le reste de la division euclidienne de a par b.

Principe de démonstration. Démonstration page 375

Pour l'existence, considérer le plus grand élément de $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n\,b \leqslant a\}$.

2 Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence

Une application importante des propriétés de $\mathbb{N}$ que nous avons listées ci-dessus est le **principe de récurrence** qui affirme :

« *Si A est une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \in A \Rightarrow (n+1) \in A$$

alors A est égale à $\mathbb{N}$. »

On utilise le plus souvent ce principe par le biais du théorème suivant qui permet de faire des **raisonnements par récurrence**.

Théorème 12

Soit P un prédicat défini sur $\mathbb{N}$. Si $P(0)$ est vraie et si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Rightarrow P(n+1), \qquad (*)$$

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Démonstration page 375

Point méthode

Une démonstration par récurrence comprend trois temps :

1. **l'explicitation** de la propriété $P(n)$ à prouver par récurrence,
2. **l'initialisation** : montrer que $P(0)$ est vraie,
3. la preuve de **l'hérédité** : montrer que si $P(n)$ est vraie pour un certain entier n, alors $P(n+1)$ est aussi vrai.

Attention En « oubliant » de vérifier $P(0)$, on peut « montrer » que tous les entiers naturels sont égaux puisque le prédicat $P(n)$: $n = n+1$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Rightarrow P(n+1).$$

Remarque On peut préférer une notation indicée, en appelant P_n plutôt que $P(n)$ la propriété à établir par récurrence.

p.376

Exercice 33 Soit f une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) \geqslant n$.

Remarque Pour démontrer une propriété $P(n)$ par récurrence, on doit commencer par établir $P(0)$ mais, ensuite :

- soit on suppose $P(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ et on démontre $P(n+1)$;
- soit on suppose $P(n-1)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ et on démontre $P(n)$.

Un bon choix permet parfois des économies d'écriture (*cf.* exercice suivant).

p.376 **Exercice 34** Démontrer par récurrence l'identité :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

Exemple On peut aussi montrer par récurrence les identités classiques :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

C'est un exercice facile laissé au lecteur.

Remarque Dans ce qui précède, la récurrence sert à démontrer des formules déjà connues, mais ne permet pas de découvrir ces formules. Pour cela, voir les méthodes développées pour le calcul de ces sommes au chapitre 2 (page 99 et suivantes).

Point méthode

- Lorsque l'on ne vous donne pas le prédicat $P(n)$, il est souvent intéressant d'étudier les premiers cas, à la main ou à l'aide d'un outil informatique.
- L'étude des premiers cas à la main permet aussi souvent de comprendre comment « passer de n à $n+1$ » et donc de faciliter la découverte de la démonstration d'hérédité.

p.376 **Exercice 35** Pour tout entier naturel n, comparer $(n+1)!$ et 2^n.

p.377 **Exercice 36** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, expliciter la dérivée n-ième de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}\cdot$

Récurrence à partir d'un entier n_0 Si P est défini sur $[\![n_0, +\infty[\![$ avec :

$$P(n_0) \text{ vraie} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad P(n) \Rightarrow P(n+1),$$

alors, le théorème 12 de la page précédente appliqué à $P(n_0+n)$ nous donne :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad P(n).$$

p.377 **Exercice 37** Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a $n! \geqslant 2^{n+1}$.

Indication : rien n'empêche d'utiliser une calculatrice pour trouver un n_0.

Attention Ce n'est pas parce qu'une propriété dépend d'un entier n que l'on doit forcément la démontrer par récurrence.

p.377 **Exercice 38** Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad (1+h)^n \geqslant 1+n\,h$.

p.377 **Exercice 39** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n \in \mathbb{N}$.

Diverses variantes

Si P est un prédicat défini sur $\mathbb{N}$, il arrive parfois que la justification de $P(n)$ nécessite l'utilisation de $P(n-1)$ et de $P(n-2)$. On fait alors ce que l'on appelle une **récurrence d'ordre 2**, ou encore **récurrence à deux pas**, qui est fondée sur le résultat suivant.

Corollaire 13 (Récurrence d'ordre 2)

Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N}$ avec $P(0)$ et $P(1)$ vraies ainsi que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big(P(n) \text{ et } P(n+1)\big) \Rightarrow P(n+2).$$

Alors, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 12 à la propriété $\big(P(n) \text{ et } P(n+1)\big)$. □

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

On peut déterminer les premières valeurs prises par la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	2	3	5	9	17	33	65

Ce tableau nous suggère que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1$. Soit P la propriété définie par :

$$P(n):\ u_n = 2^n + 1.$$

- $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies d'après les deux premières colonnes du tableau ci–dessus.
- Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $P(n)$ et $P(n+1)$. Alors d'après la définition de la suite :

$$u_{n+2} = 3 \times (2^{n+1}+1) - 2 \times (2^n + 1) = 2^{n+2} + 1.$$

Donc $P(n+2)$ est vraie, ce qui montre : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1$.

Attention Dans le cas d'utilisation de cette forme de récurrence, il ne faut surtout pas oublier de procéder à la double initialisation $P(0)$ et $P(1)$.

p.378 **Exercice 40** On note $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\Psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. Établir : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi^n \quad$ et $\quad \Psi^{n+2} = \Psi^{n+1} + \Psi^n$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $\Phi^n + \Psi^n \in \mathbb{N}$.

Si P est un prédicat défini sur $\mathbb{N}$, il arrive parfois que la justification de $P(n)$ nécessite l'utilisation de tous les $P(k)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. On fait alors ce que l'on appelle une **récurrence forte** qui est fondée sur le résultat suivant.

Corollaire 14 (Récurrence forte)

Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N}$ avec $P(0)$ vraie ainsi que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (P(0) \text{ et } P(1) \ldots \text{ et } P(n-1)) \Longrightarrow P(n).$$

Alors, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 12 à $\big(P(0) \text{ et } P(1) \ldots \text{ et } P(n)\big)$. □

Remarque Comme précédemment, si n_0 est un entier donné et si l'on a :

$$P(n_0) \text{ vraie} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant n0+1 \quad (P(n_0) \text{ et } \ldots \text{ et } P(n-1)) \Longrightarrow P(n),$$

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exemple Démontrons par récurrence que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède (au moins) un diviseur premier. Soit, pour $n \geqslant 2$, la propriété $P(n)$:

« L'entier n possède un diviseur premier. ».

- La propriété $P(2)$ est vraie, puisque 2 est premier.
- Soit n un entier supérieur ou égal à 3 ; supposons $P(2)$, $P(3)$ ..., $P(n-1)$. Il y a alors deux cas possibles pour l'entier n.
  - ∗ Soit n est premier. Alors n est un diviseur premier de n.
  - ∗ Soit n n'est pas premier. Il existe alors deux entiers a et b, strictement compris entre 1 et n, tels que $n = a\,b$. Puisque $a \in [\![2, n-1]\!]$, on sait d'après l'hypothèse de récurrence que $P(a)$ est vraie. Ainsi, a possède un diviseur premier qui est aussi un diviseur premier de n.

  Dans chacun des cas, l'entier n possède un diviseur premier, ce qui signifie que $P(n)$ est vraie et termine la démonstration par récurrence.

Autres types de récurrence

Proposition 15 (Récurrence finie)

Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et P un prédicat défini sur $[\![0, n_0]\!]$ avec $P(0)$ vraie ainsi que :

$$\forall n \in [\![0, n_0[\![\quad P(n) \Rightarrow P(n+1). \qquad (*)$$

Alors, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![0, n_0]\!]$.

Démonstration. Faisons un raisonnement par l'absurde en supposant qu'il existe $n \in [\![0, n_0]\!]$ tel que $P(n)$ soit faux et appelons r le plus petit d'entre eux.

- Par construction, et comme $P(0)$ est vrai, on a $0 < r \leqslant n_0$ et donc $0 \leqslant r-1 < n_0 - 1$.
- Comme r est le plus petit des n tels que $P(n)$ soit faux, on a $P(r-1)$ vrai.

L'hypothèse $(*)$ nous permet alors de conclure que $P(r)$ est vrai, ce qui est impossible et termine la démonstration par l'absurde.

Remarque L'existence du plus petit entier utilisé ci-dessus découle de la propriété fondamentale : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément. □

p.378

Exercice 41 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x^2-1)^n. \end{array}$

Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $f^{(k)}(1) = 0$.

Indication : comme la connaissance du seul $f^{(k)}(1)$ ne nous donne aucune information sur $f^{(k+1)}(1)$, il faut ici introduire une propriété H_k que l'on pourra prouver par récurrence et qui nous donnera ensuite directement le résultat attendu.

Point méthode

La preuve de la proposition précédente nous montre une méthode de rédaction intéressante. Au lieu de prouver une propriété $P(n)$ avec une « bête » démonstration par récurrence, il peut être plus efficace de faire une démonstration par l'absurde en utilisant le plus petit entier n tel que $P(n)$ est faux pour aboutir à une contradiction.

Remarque De la proposition précédente, on déduit le résultat suivant concernant les **récurrences descendantes** : si n_0 et n_1 sont deux entiers vérifiant $n_0 < n_1$ et si P est un prédicat défini sur $[\![n_0, n_1]\!]$ avec $P(n_1)$ vraie et :

$$\forall n \in [\![n_0+1,\, n_1]\!] \quad P(n) \Rightarrow P(n-1),$$

alors la proposition précédente utilisée avec

$$Q(n) : P(n_1 - n + n_0)$$

nous donne directement que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![n_0, n_1]\!]$.

IV Notions sur les ensembles finis

1 Définition

Définition 19

Un ensemble E est **fini** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E. Nous admettrons qu'un tel entier n est alors unique. Cet entier n est appelé **cardinal** de E, ou encore **nombre d'éléments** de E. On le note le plus souvent $\operatorname{card}(E)$, mais aussi $|E|$ ou encore $\#E$.

Remarques

1. Lorsque $n = 0$, l'intervalle $[\![1, n]\!]$ est vide, et il en est donc de même de E. Ainsi, l'ensemble vide est le seul ensemble de cardinal 0.

2. Si E est un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$, alors une bijection $i \longmapsto a_i$ de $[\![1,n]\!]$ sur E permet de numéroter les éléments de E et d'écrire :
$$E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$
3. L'ensemble vide est le seul ensemble de cardinal nul.
4. On appelle **singleton**, tout ensemble de cardinal 1.
5. Un ensemble est dit **infini** s'il n'est pas fini.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $[\![1,n]\!]$ est fini de cardinal n car l'application identité est une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$.

p.379

Exercice 42 Soit (m,n) un couple d'entiers relatifs tel que $m \leqslant n$.
Montrer que $[\![m,n]\!]$ est fini et déterminer son cardinal.

p.379

Exercice 43 Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$ et u une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur E. Si a est un élément de E, construire une bijection v de $[\![1,n]\!]$ sur E telle que $v(n) = a$ et en déduire que $E \setminus \{a\}$ est fini et de cardinal $n-1$.

Proposition 16

Si E est un ensemble fini de cardinal n et si F est un ensemble qui peut être mis en bijection avec E, alors F est aussi fini de cardinal n.

Démonstration page 379

p.379

Exercice 44 Montrer que si E est un ensemble infini et si F peut être mis en bijection avec E, alors F est infini.

2 Sous-ensembles d'un ensemble fini

Nous admettrons pour l'instant le résultat suivant qui est très intuitif et souvent utilisé mais dont la démonstration, technique, sera faite dans le chapitre 28.

Proposition 17 (Admis pour l'instant)

Soit E un ensemble fini.

- Si F est un sous-ensemble de E, alors F est fini et $\operatorname{card} F \leqslant \operatorname{card} E$.
- On a $\operatorname{card} F = \operatorname{card} E$ si, et seulement si, $F = E$.

Point méthode

Pour démontrer l'égalité entre deux ensembles finis, il suffit de montrer une inclusion et l'égalité des cardinaux.

Un exemple d'ensemble infini On peut montrer par l'absurde que l'ensemble $\mathbb{N}$ est infini. Supposons-le fini et appelons n son cardinal. Comme $[\![1, n+1]\!] \subset \mathbb{N}$, d'après la proposition précédente, on a $n+1 \leqslant n$, ce qui est impossible. Ainsi $\mathbb{N}$ est infini.

p.379

Exercice 45 Soit E un ensemble.

1. Montrer que si E contient un ensemble infini, alors E est infini.
2. En déduire que si E contient une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts, alors E est infini.

p.379

Exercice 46

1. Soit E un ensemble totalement ordonné non vide.

   Montrer que toute partie finie de E est majorée.
2. En déduire qu'une partie de $\mathbb{N}$ est finie si, et seulement si, elle est majorée.

3 Applications entre ensembles finis

Proposition 18

Soit E un ensemble fini non vide, F un ensemble quelconque et $u \in F^E$

1. L'ensemble $u(E)$ est fini et $\operatorname{card} u(E) \leqslant \operatorname{card}(E)$
2. On a $\operatorname{card} u(E) = \operatorname{card}(E)$ si, et seulement si, u est injective.

Principe de démonstration.

Commencer par prouver que si u est injective, alors $\operatorname{card} u(E) = \operatorname{card}(E)$.

Puis prouver le reste par récurrence sur $n = \operatorname{card} E$.

Démonstration page 380

Remarques De cette proposition, on déduit les résultats suivants.

1. S'il existe une application u surjective d'un ensemble fini E dans un ensemble fini F, alors on a $\operatorname{card} F \leqslant \operatorname{card} E$ puisqu'alors $F = u(E)$.

   Par suite, si E et F sont des ensembles finis tels que $\operatorname{card} E < \operatorname{card} F$, alors il ne peut pas exister d'application surjective de E dans F.

2. S'il existe une application injective u d'un ensemble fini E dans un ensemble fini F, on a alors $\operatorname{card} E \leqslant \operatorname{card} F$. En effet, dans ce cas,

   $$\operatorname{card} E = \operatorname{card} u(E) \leqslant \operatorname{card} F.$$

   Par suite, si E et F sont des ensembles finis tels que $\operatorname{card} E > \operatorname{card} F$, alors il ne peut pas exister d'application injective de E dans F.

Théorème 19

Soit E et F deux ensembles finis non vides, *de même cardinal*, ainsi que u une application de E dans F. Il y équivalence entre :

(i) u est injective ; (ii) u est surjective ; (iii) u est bijective.

Principe de démonstration. C'est une conséquence des propositions 17 et 18.

Démonstration page 380

Corollaire 20

Si E est un ensemble fini et u une application de E dans E, alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) u est injective ; (ii) u est surjective ; (iii) u est bijective.

p.380

Exercice 47 Exhiber

- une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective mais non surjective ;
- une application $v : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjective mais non injective.

Que peut-on ainsi retrouver comme résultat ?

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 Si $\Gamma = \{(t^2, t)\,;\ t \in \mathbb{R}\}$, alors $(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R},\ \Gamma)$ n'est pas une application car, pour $x = 1$, il existe deux $y \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y) \in \Gamma$, à savoir $y = \pm 1$.

Exercice 2 Si $\Gamma = \{(t^2, t)\,;\ t \in \mathbb{R}_+\}$, alors $(\mathbb{R},\ \mathbb{R}_+, \Gamma)$ n'est pas une application car, pour un $x = -1$, il n'existe aucun y tel que $(x, y) \in \Gamma$.

Exercice 3 D'après les règles de négation d'une assertion mathématique (en particulier pour une implication), la négation de (iii) s'écrit :

$$\exists x_1 \in E \quad \exists x_2 \in E \quad u(x_1) = u(x_2) \quad \text{et} \quad x_1 \neq x_2.$$

D'où une méthode pour prouver que u n'est pas injective.

Exercice 4
Supposons $A \neq E$. Comme $u_A(A) = A = u_A(E)$, il appert que u_A n'est pas injective.

Exercice 5 L'application $t \mapsto t^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$:

- est surjective car tout élément de $\mathbb{R}_+$ possède au moins un antécédent,
- n'est pas injective car -1 et 1 ont même image.

Exercice 6

- Supposons $A = E$. Alors u_A est l'identité de $\mathcal{P}(E)$; elle est donc surjective.
- Supposons $A \neq E$. Alors, pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, on a $u(X) \subset A$ et donc $u(X) \neq E$. Ainsi E n'a pas d'antécédent par u_A, et cette application n'est pas surjective.

Exercice 7 L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array}$ est bijective car tout élément de $\mathbb{R}_+$ possède un unique antécédent qui est sa racine carrée.

Exercice 8 En prenant $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$, on a alors :

$$v \circ u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array} \qquad \text{et} \quad u \circ v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x+1)^2 \end{array}$$

Ces deux applications ne sont manifestement pas égales !

Exercice 9 Avec les hypothèses, on a $v \circ u \in E^E$ et $u \circ v \in F^F$. Si ces applications sont égales, alors elles ont même ensemble de départ (ou d'arrivée) et donc $E = F$.

Proposition 1 Les deux applications :

$$w \circ (v \circ u) : E \xrightarrow{v \circ u} G \xrightarrow{w} H \qquad \text{et} \qquad (w \circ v) \circ u : E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{w \circ v} H$$

ont même ensemble de départ, E, même ensemble d'arrivée, H ; et pour $x \in E$, on a :

$$\big(w \circ (v \circ u)\big)(x) = w\big((v \circ u)(x)\big) = w\big(v(u(x))\big) = (w \circ v)\big(u(x)\big) = \big((w \circ v) \circ u\big)(x).$$

Par suite, ces applications sont égales.

Exercice 10 Considérons les applications u et v de E vers E, définies par :

$$\forall x \in E \quad u(x) = a \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E \quad v(x) = b$$

On a $(v \circ u)(a) = b$ et $(u \circ v)(a) = a$, ce qui prouve $v \circ u \neq u \circ v$.

Proposition 2

1. Supposons u et v injectives. Soit $x \in E$ et $x' \in E$ tels que $v\big(u(x)\big) = v\big(u(x')\big)$.
   Grâce à l'injectivité de v on a $u(x) = u(x')$; l'injectivité de u donne alors $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de $v \circ u$.
2. Supposons u et v surjectives. Soit z est un élément de G.
   Grâce à la surjectivité de v on sait qu'il existe $y \in F$ tel que $z = v(y)$.
   Comme u est surjective, on peut aussi considérer un $x \in E$ tel que $y = u(x)$.
   On a alors $z = v(u(x)) = (v \circ u)(x)$, ce qui prouve la surjectivité de $v \circ u$.
3. Conséquence immédiate des précédents.

Proposition 3

- Il est clair que $u^{-1} \circ u$ est une application de E dans E.
  De plus, pour tout $x \in E$, on a $u^{-1}\big(u(x)\big) = x$ car $u(x)$ possède, par u, un unique antécédent qui est évidemment x. On en déduit $u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}_E$.
- De même $u \circ u^{-1} \in F^F$ et, pour tout $y \in F$, on a $u\big(u^{-1}(y)\big) = y$ car $u^{-1}(y)$ est par définition l'antécédent de y. On a donc $u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

Proposition 4

- Supposons qu'il existe une application $v \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$, et montrons que u est injective. Soit donc x et x' deux éléments de E tels que $u(x) = u(x')$; alors on a $v(u(x)) = v(u(x'))$ et donc $(v \circ u)(x) = (v \circ u)(x')$; comme $v \circ u = \mathrm{Id}_E$, on en déduit $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de u.
- L'existence d'une application $v \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ entraîne que u est surjective. En effet, pour tout $y \in F$, si l'on pose $x = v(y)$, alors on a $u(x) = y$ car $u \circ v = \mathrm{Id}_F$, ce qui prouve que u est surjective.

Par suite, l'application u est bijective. On peut alors écrire :

$$v = \mathrm{Id}_E \circ v = u^{-1} \circ u \circ v = u^{-1} \circ \mathrm{Id}_F = u^{-1}.$$

Par symétrie, on en déduit que v est bijective, et que $v^{-1} = u$.

Exercice 11 La fonction $v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases} \end{array}$.

vérifie : $\forall x \in \mathbb{R} \quad v(u(x)) = v(\exp x) = \ln(\exp x) = x$; on a donc $v \circ u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

En revanche, la fonction u n'est pas bijective puisque son image, $\mathbb{R}_+^*$, n'est pas égale à $\mathbb{R}$. Cela n'a rien de contradictoire avec la proposition précédente qui nécessite les deux hypothèses $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ *et* $v \circ u = \mathrm{Id}_E$

Exercice 12

- **Méthode élémentaire**

  $*$ **Injectivité de u**

  Soit donc $X_1 \subset E$ et $X_2 \subset E$ tels que $u(X_1) = u(X_2)$, ce qui s'écrit :
  $$X_1 \cap A = X_2 \cap A \quad \text{et} \quad X_1 \cap B = X_2 \cap B. \qquad (*)$$
  Comme $A \cup B = E$, on a :
  $$X_1 = X_1 \cap E = X_1 \cap (A \cup B) = (X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B),$$
  et la relation $(*)$ nous donne :
  $$X_1 = (X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B) = X_2 \cap (A \cup B) = X_2 \cap E = X_2,$$
  ce qui prouve l'injectivité de u.

  $*$ **Surjectivité de u**

  Analyse. Si $(Y,Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ vérifie $(Y,Z) = u(X)$ avec $X \in \mathcal{P}(E)$, alors un petit dessin montre que $X = Y \cup Z$.

  Démonstration. Soit $(Y,Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. Posons $X = Y \cup Z$. Alors :
  $$X \cap A = (Y \cup Z) \cap A = (Y \cap A) \cup (Z \cap A).$$
  - $\star$ Comme $Z \subset B$, on a $Z \cap A \subset (B \cap A) = \varnothing$.
  - $\star$ Comme $Y \subset A$, on a $Y \cap A = Y$.

  On en déduit que l'on a $X \cap A = Y$. On prouve de même $X \cap B = Z$, ce qui donne $u(X) = (Y,Z)$ et prouve la surjectivité de u.

  Par suite, on a prouvé que u est bijective.

  Remarque Dans ce qui précède, la construction de $X = Y \cup Z$ nous donne en fait l'application réciproque de u, ce qui mène à une autre démonstration.

- **Seconde méthode** Considérons $v : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (Y,Z) & \longmapsto & Y \cup Z. \end{array}$

  $*$ Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, on a :
  $$v\big(u(X)\big) = v(X \cap A, X \cap B\big) = (X \cap A) \cup (X \cap B\big) = X \cap (A \cup B) = X.$$
  Comme $v \circ u$ est une application de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même, on a donc $v \circ u = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.

  $*$ Montrons $u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)}$ c'est-à-dire :
  $$\forall (Y,Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \quad u\big(v(Y,Z)\big) = (Y,Z).$$
  Soit donc $(Y,Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. On a alors :
  $$v(Y,Z) \cap A = (Y \cup Z) \cap A = (Y \cap A) \cup (Z \cap A).$$
  - $\star$ Comme $Z \subset B$, on a $Z \cap A \subset (B \cap A) = \varnothing$.
  - $\star$ Comme $Y \subset A$, on a $Y \cap A = Y$.

  Ainsi $v(Y,Z) \cap A = Y$. On prouve de même $v(Y,Z) \cap B = Z$, ce qui donne :
  $$u\big(v(Y,Z)\big) = \big(v(Y,Z) \cap A\,,\, v(Y,Z) \cap B\,\big) = (Y,Z).$$
  Comme $u \circ v$ est une application de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ dans lui-même, on en déduit $u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)}$.

  Par suite u est bijective, et v est son application réciproque.

Corollaire 5

1. Conséquence de la proposition précédente puisque u et u^{-1} vérifient :
$$u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_F\,.$$
2. L'associativité de la composition nous donne :
$$\left(u^{-1} \circ v^{-1}\right) \circ (v \circ u) = u^{-1} \circ \left(v^{-1} \circ v\right) \circ u = u^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ u = u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}_E,$$
$$(v \circ u) \circ \left(u^{-1} \circ v^{-1}\right) = v \circ \left(u \circ u^{-1}\right) \circ v^{-1} = v \circ \mathrm{Id}_F \circ v^{-1} = v \circ v^{-1} = \mathrm{Id}_G\,.$$
La proposition précédente nous permet alors de conclure.

Exercice 13

- Une représentation graphique nous montre :
$$f\big([-2,2]\big) = \{x^2\,;\, x \in [-2,2]\} = [0,4],$$
$$f\big([-1,2]\big) = \{x^2\,;\, x \in [-1,2]\} = [0,4],$$
ce que l'on justifie avec le tableau de variations de la fonction $x \mapsto x^2$.
- Par simple résolution d'inéquations, on trouve :
$$f^{-1}\big([0,4]\big) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [0,4]\} = [-2,2]$$
$$f^{-1}\big([-2,4]\big) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [-2,4]\} = [-2,2]$$
$$f^{-1}\big([-2,-1]\big) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [-2,-1]\} = \varnothing$$

Exercice 14 On a $u^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $u(\varnothing) = \varnothing$ et $u^{-1}(F) = E$.

Exercice 15 Supposons u bijective et posons :
$$A = \{x \in E \mid u(x) \in B\}, \text{ image réciproque de } B \text{ par } u,$$
$$A' = \{u^{-1}(y)\,;\, y \in B\}, \text{ image de } B \text{ par l'application } u^{-1}.$$

- Montrons que $A \subset A'$. Soit donc $x \in A$.
On a alors $u(x) \in B$. Si l'on pose $y = u(x)$, alors y est un élément de B tel que $x = u^{-1}(y)$, ce qui prouve $x \in A'$.
- Montrons que $A' \subset A$. Soit donc $x \in A'$.
Il existe alors $y \in B$ tel que $x = u^{-1}(y)$. On a alors $u(x) = u\big(u^{-1}(y)\big) = y$ et donc $u(x) \in B$, ce qui prouve $x \in A$.

Par suite, on a démontré $A = A'$, ce qui justifie la cohérence des deux notations.

Proposition 6

1. Supposons $B \subset B'$ et prouvons $u^{-1}(B) \subset u^{-1}(B')$. Soit donc $x \in u^{-1}(B)$.
Alors, on a $u(x) \in B$ et donc $u(x) \in B'$, ce qui prouve $x \in u^{-1}(B')$.
2. Établissons $u^{-1}(B \cup B') \subset u^{-1}(B) \cup u^{-1}(B')$ par double inclusion.
   - Supposons $x \in u^{-1}(B \cup B')$. On a donc $u(x) \in B \cup B'$.
     * Si $u(x) \in B$, alors $x \in u^{-1}(B)$ et donc $x \in u^{-1}(B) \cup u^{-1}(B')$.
     * Si $u(x) \in B'$, alors $x \in u^{-1}(B')$ et donc $x \in u^{-1}(B) \cup u^{-1}(B')$.

On en déduit $x \in u^{-1}(B) \cup u^{-1}(B')$ et donc $u^{-1}(B \cup B') \subset u^{-1}(B) \cup u^{-1}(B')$.

- Réciproquement, on a $B \subset B \cup B'$ et donc $u^{-1}(B) \subset u^{-1}(B \cup B')$ d'après (1.) ; on a de même $u^{-1}(B') \subset u^{-1}(B \cup B')$, et donc : $u^{-1}(B) \cup u^{-1}(B') \subset u^{-1}(B \cup B')$.

3. Démonstration par double inclusion de $u^{-1}(B \cap B') = u^{-1}(B) \cap u^{-1}(B')$.
   - Supposons $x \in u^{-1}(B) \cap u^{-1}(B')$. On a donc $x \in u^{-1}(B)$ et $x \in u^{-1}(B')$, ce qui entraîne $u(x) \in B$ et $u(x) \in B'$, et donc $u(x) \in B \cap B'$ et $x \in u^{-1}(B \cap B')$. On a donc prouvé $u^{-1}(B) \cap u^{-1}(B') \subset u^{-1}(B \cap B')$.
   - Réciproquement, on a $B \cap B' \subset B$ donc, d'après (1.), on a $u^{-1}(B \cap B') \subset u^{-1}(B)$;
     on a de même $u^{-1}(B \cap B') \subset u^{-1}(B')$; donc $u^{-1}(B \cap B') \subset u^{-1}(B) \cap u^{-1}(B')$.
4. Démonstration similaire par double inclusion pour $u^{-1}\left(\complement_F B\right) = \complement_E u^{-1}(B)$.

Exercice 16

1. Supposons $A \subset A'$ et montrons $u(A) \subset u(A)'$.

   Soit donc $y \in u(A)$. On peut alors trouver $x \in A$ tel que $y = u(x)$.

   Comme $A \subset A'$ on en déduit $x \in A'$ et donc $y \in u(A')$. On en déduit $u(A) \subset u(A)'$.

   Montrons $u(A \cup A') = u(A) \cup u(A')$.
   - Comme $A \subset A \cup A'$, la question précédente prouve $u(A) \subset u(A \cup A')$.
     On a de même $u(A') \subset u(A \cup A')$; on en déduit $u(A) \cup u(A') \subset u(A \cup A')$.
   - Pour prouver $u(A \cup A') \subset u(A) \cup u(A')$, prenons $y \in u(A \cup A')$. On peut alors trouver $x \in A \cup A'$ tel que $y = u(x)$.
     * Si $x \in A$, alors $y \in u(A) \subset u(A) \cup u(A')$.
     * Si $x \in A'$, alors $y \in u(A') \subset u(A) \cup u(A')$.

     Par suite, on a $y \in u(A) \cup u(A')$, ce qui prouve l'inclusion souhaitée.

   On en déduit l'égalité par double inclusion.
2. Comme $A \cap A' \subset A$ et $A \cap A' \subset A'$, la première question nous donne :
   $$u(A \cap A') \subset u(A) \quad \text{et} \quad u(A \cap A') \subset u(A') \;;$$
   on en déduit $u(A \cap A') \subset u(A) \cap u(A')$.
3. Posons $A = \mathbb{R}_+^*$ et $A' = \mathbb{R}_-^*$. On a alors :
   - $u(A \cap A') = u(\varnothing) = \varnothing$,
   - $u(A) = \mathbb{R}_+^* = u(A')$ et donc $u(A) \cap u(A') = \mathbb{R}_+^* \neq u(A \cap A')$.

   Ce contre-exemple montre que, dans le cas général, on ne peut pas améliorer l'inclusion de la question précédente.

Exercice 17

1. D'après les règles de calcul sur $\mathcal{P}(E)$, on a :
   $$\complement_E A = \complement_E A_1 \cap \complement_E A_2 \cap \complement_E A_3\,,$$
   et le (1.) de la proposition précédente nous donne :
   $$\mathbb{1}_{\complement_E A} = \mathbb{1}_{(\complement_E A_1 \cap \complement_E A_2)}\, \mathbb{1}_{\complement_E A_3} = \mathbb{1}_{\complement_E A_1}\, \mathbb{1}_{\complement_E A_2}\, \mathbb{1}_{\complement_E A_3}.$$

En remplaçant $\mathbb{1}_{\complement_E X}$ par $1-\mathbb{1}_X$, on obtient directement :

$$1-\mathbb{1}_A=(1-\mathbb{1}_{A_1})\,(1-\mathbb{1}_{A_2})\,(1-\mathbb{1}_{A_3}).$$

2. En développant l'égalité précédente, on a :

$$\mathbb{1}_A=\mathbb{1}_{A_1}+\mathbb{1}_{A_2}+\mathbb{1}_{A_3}-\mathbb{1}_{A_2}\,\mathbb{1}_{A_3}-\mathbb{1}_{A_1}\,\mathbb{1}_{A_3}-\mathbb{1}_{A_1}\,\mathbb{1}_{A_2}+\mathbb{1}_{A_1}\,\mathbb{1}_{A_2}\mathbb{1}_{A_3},$$

et le (1.) de la proposition précédente donne alors :

$$\mathbb{1}_A=\mathbb{1}_{A_1}+\mathbb{1}_{A_2}+\mathbb{1}_{A_3}-\mathbb{1}_{A_2\cap A_3}-\mathbb{1}_{A_1\cap A_3}-\mathbb{1}_{A_1\cap A_2}+\mathbb{1}_{A_1\cap A_2\cap A_3}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{x\in E}\mathbb{1}_A(x)=\sum_{x\in E}\mathbb{1}_{A_1}(x)+\sum_{x\in E}\mathbb{1}_{A_2}(x)+\sum_{x\in E}\mathbb{1}_{A_3}(x)+\sum_{x\in E}\mathbb{1}_{A_1\cap A_2\cap A_3}(x)\\ -\sum_{x\in E}\mathbb{1}_{A_2\cap A_3}(x)-\sum_{x\in E}\mathbb{1}_{A_1\cap A_3}(x)-\sum_{x\in E}\mathbb{1}_{A_1\cap A_2}(x)\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\operatorname{card} A=&\operatorname{card} A_1+\operatorname{card} A_2+\operatorname{card} A_3+\operatorname{card} A_1\cap A_2\cap A_3\\ &-\operatorname{card} A_2\cap A_3-\operatorname{card} A_1\cap A_3-\operatorname{card} A_1\cap A_2.\end{aligned}$$

Proposition 8

Soit $u:\begin{array}{ccc}\mathcal{P}(E)&\longrightarrow&\mathcal{F}\big(E,\{0,1\}\big)\\ A&\longmapsto&\mathbb{1}_A\end{array}$ et $v:\begin{array}{ccc}\mathcal{F}\big(E,\{0,1\}\big)&\longrightarrow&\mathcal{P}(E)\\ f&\longmapsto&f^{-1}\big(\{1\}\big).\end{array}$

- Par construction, on a : $\forall A\in\mathcal{P}(E)\quad (v\circ u)(A)=v(\mathbb{1}_A)=\mathbb{1}_A^{-1}\big(\{1\}\big)=A.$

  On en déduit $v\circ u=\mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.
- Soit $f\in\mathcal{F}\big(E,\{0,1\}\big)$. Posons $A=v(f)=f^{-1}\big(\{1\}\big)$. Alors :

  $$\forall x\in E\quad f(x)=1\Longleftrightarrow x\in A.$$

  Comme f ne prend que deux valeurs, on en déduit $u(A)=f$, et donc $u\circ v=\mathrm{Id}_{\mathcal{F}(E\{0,1\})}$.

Les deux relations $v\circ u=\mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$ et $u\circ v=\mathrm{Id}_{\mathcal{F}(E\{0,1\})}$, entraînent que u et bijective (*cf.* proposition 4 de la page 341).

Exercice 18

- Montrons que $\bigcap\limits_{h\in\mathbb{R}_+^*}J_h=\{0\}$.
  - $*$ Il est évident que l'on a $\forall h\in\mathbb{R}_+^*\quad 0\in J_h$, et donc $0\in\bigcap\limits_{h\in\mathbb{R}_+^*}J_h$.
  - $*$ Réciproquement, si $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, alors $x\notin J_{\frac{|x|}{2}}$ et donc $x\notin\bigcap\limits_{h\in\mathbb{R}_+^*}J_h$.
- Montrons $\bigcup\limits_{h\in\mathbb{R}_+^*}J_h=\mathbb{R}$.
  - $*$ Il est évident que l'on a $\bigcup\limits_{h\in\mathbb{R}_+^*}J_h\subset\mathbb{R}$.
  - $*$ Réciproquement, si $x\in\mathbb{R}$, alors $x\in J_{|x|+1}$ et donc $x\in\bigcup\limits_{h\in\mathbb{R}_+^*}J_h$.

Exercice 19

- Comme $x \mathcal{R} y$ équivaut à $u(x) = u(y)$, les propriétés de réflexivité, de symétrie et de transitivité de $\mathcal{R}$ découlent des propriétés correspondantes de l'égalité.
- Soit $x \in E$. Pour $y \in E$, on a $y \in cl(x)$ si, et seulement si, $u(y) = u(x)$ ou encore $u(y) \in \{u(x)\}$, ce qui équivaut à $y \in u^{-1}\big(\{u(x)\}\big)$.

Proposition 9

- Par définition des classes d'équivalence, les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes.
- Supposons (i) et prouvons (iii).
  * Soit $z \in cl(x)$; alors on a $x \mathcal{R} z$ et, comme $x \mathcal{R} y$, par symétrie et transitivité, on en déduit $z \mathcal{R} y$; par suite, on a $cl(x) \subset cl(y)$.
  * Comme x et y jouent des rôles symétriques, on a aussi $cl(y) \subset cl(x)$.

  On en déduit $cl(y) = cl(x)$.
- Réciproquement, supposons (iii) c'est-à-dire $cl(x) = cl(y)$. Alors, comme $y \in cl(y)$, on a $y \in cl(x)$, ce qui montre (ii).

Proposition 10 Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.

- Étant donné que, pour tout $x \in E$, on a $x \in cl(x)$, on en déduit qu'aucune classe d'équivalence n'est vide et que la réunion de toutes ces classes est égale à E.
- Si A et B sont deux classes d'équivalence telles que $A \cap B \neq \varnothing$ alors on peut trouver $x \in E$ tel que $x \in A$ et $x \in B$; la proposition 9 de la page 348 nous donne alors $A = cl(x) = B$. Par contraposée, on en déduit : $A \neq B \Rightarrow A \cap B = \varnothing$.

Par suite, les classes d'équivalence forment une partition de E.

Exercice 20 $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence puisqu'elle est :

- réflexive : en effet, si $x \in E$, alors, comme $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{U}} A = E$, il existe $A \in \mathcal{U}$ telle que $x \in A$, ce qui entraîne $x \mathcal{R} x$;
- évidemment symétrique ;
- transitive : en effet soit $x \in E$, $y \in E$ et $z \in E$ tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$; par définition de $\mathcal{R}$, on peut trouver $A \in \mathcal{U}$ et $B \in \mathcal{U}$ telles que d'une part $x \in A$ et $y \in A$, et d'autre part $y \in B$ et $z \in B$; ainsi $A \cap B \neq \varnothing$ et le second point de la définition d'une partition entraîne $A = B$ et donc $x \mathcal{R} z$.

Montrons que $\mathcal{U}$ est l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.

- Soit $x \in A$ avec $A \in \mathcal{U}$. Montrons $cl(x) = A$.
  * Par définition de $\mathcal{R}$, tout élément de A appartient à $cl(x)$ et donc $A \subset cl(x)$.
  * Réciproquement, soit $y \in cl(x)$. Il existe donc $A' \in \mathcal{U}$ tel que $x \in A'$ et $y \in A'$. Étant donné que $x \in A \cap A'$ et que $\mathcal{U}$ est une partition de E, on a $A = A'$ et donc $y \in A$. On en déduit $cl(x) \subset A$.

  Par suite, on a $cl(x) = A$.
- Soit $x \in E$. Comme $\mathcal{U}$ est une partition de E, il existe $A \in \mathcal{U}$ tel que $x \in A$ et le point précédent entraîne $cl(x) = A$. Ainsi, toute classe est élément de $\mathcal{U}$.
- Réciproquement, soit $A \in \mathcal{U}$. Comme $\mathcal{U}$ est une partition de E, la partie A n'est pas vide et il existe donc $x \in A$; comme précédemment, on en déduit $A = cl(x)$, ce qui prouve que tout élément de $\mathcal{U}$ est une classe d'équivalence.

Exercice 21 Cette relation est :

- réflexive car, pour tout x, l'entier $k=1$ vérifie la relation $x = k\,x$;
- antisymétrique car, si $y \mid x$ et $x \mid y$, alors on peut trouver k et k' tels que :

$$x = k\,y \quad \text{et} \quad y = k'\,x\ ;$$

  par substitution, on en déduit $x = k\,k'\,x$;
  - si $x=0$ alors la relation $y = k'\,x$ entraîne $y = 0 = x$,
  - sinon, en simplifiant par x, on en déduit $k\,k' = 1$; comme on travaille dans $\mathbb{N}$, on a donc $k = k' = 1$ et par suite $x = y$;
- transitive car, si $x \mid y$ et $y \mid z$, alors on peut trouver k et k' tels que :

$$y = k\,x \quad \text{et} \quad z = k'\,y\ ;$$

  on en déduit immédiatement $z = k'\,k\,x$ et donc $x \mid z$.

Exercice 22 Cette relation n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas antisymétrique : en effet on a $-1 \mid 1$ et $1 \mid -1$.

Exercice 23 Pour une rédaction plus efficace, commençons par remarquer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (a',b') \in \mathbb{R}^2 \quad (a,b) \leqslant (a',b') \Longrightarrow a \leqslant a'. \qquad (*)$$

La relation donnée est :

- réflexive, car pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $(a = a$ et $b \leqslant b)$, et donc $(a,b) \leqslant (a,b)$;
- antisymétrique : en effet supposons $(a,b) \leqslant (a',b')$ et $(a',b') \leqslant (a,b)$;
  - d'après la relation $(*)$, on a $a \leqslant a'$ et $a' \leqslant a$, et donc $a = a'$;
  - on en déduit $b \leqslant b'$ et $b' \leqslant b$, et donc $b = b'$;

  par conséquent, on a $(a,b) = (a',b')$, ce qui prouve l'antisymétrie ;
- transitive : en effet, supposons $(a,b) \leqslant (a',b')$ et $(a',b') \leqslant (a'',b'')$; alors, d'après la relation $(*)$, on a $a \leqslant a' \leqslant a''$;
  - si $a < a''$, alors on a $(a,b) \leqslant (a'',b'')$;
  - sinon, on a $a = a''$ et donc $a = a' = a''$; comme on a alors $b \leqslant b'$ et $b' \leqslant b''$, on en déduit $b \leqslant b''$ et donc $(a,b) \leqslant (a'',b'')$;

  par disjonction, on a donc $(a,b) \leqslant (a'',b'')$, ce qui prouve la transitivité.

Exercice 24

- Il est facile de prouver que cette relation est réflexive, antisymétrique et transitive. C'est donc bien une relation d'ordre.
- On n'a ni $(1,2) \leqslant (2,1)$, ni $(2,1) \leqslant (1,2)$. Ainsi, ce n'est pas un ordre total puisque $(1,2)$ et $(2,1)$ ne sont pas comparables par cette relation.

Exercice 25

- Supposons que $x \leqslant y$ soit faux.
  - La réflexivité de $\leqslant$ nous dit alors que $x \neq y$ est vrai.
  - Comme $(x \leqslant y$ ou $y \leqslant x)$ est vrai, on en déduit que $y \leqslant x$ est vrai.

Par suite, $y < x$ est vrai.

- Supposons $y < x$ vrai. On a alors $y \leqslant x$ et $y \neq x$. Si $x \leqslant y$ est vrai, alors l'antisymétrie nous donne $x = y$ ce qui est impossible. Ainsi, $x \leqslant y$ est faux.

On en déduit l'équivalence demandée.

Exercice 26 Pour l'inclusion, $\mathcal{P}(E)$ possède un plus grand élément, qui est E, et un plus petit élément, qui est $\varnothing$ puisque $\forall X \in \mathcal{P}(E) \quad \varnothing \subset X \subset E$.

Exercice 27

- 1 est le plus petit élément de $(\mathbb{N}, |)$ car il divise tous les autres.
- 0 est le plus grand élément de $(\mathbb{N}, |)$ car il est multiple de tous les autres.

Exercice 28

1. L'énoncé « A possède un plus grand élément » peut se caractériser par :
$$\exists a \in A \quad \forall x \in A \quad x \leqslant a.$$
Attention : ne pas oublier de quantifier le a !
2. Il suffit de nier la relation précédente, ce qui donne :
$$\forall a \in A \quad \exists x \in A \quad \text{non}(x \leqslant a).$$
Remarque : dans $\mathbb{R}$, la relation $\text{non}(x \leqslant a)$ peut se remplacer par $x > a$.

Exercice 29 Pour prouver que $\mathcal{P}(E) \setminus \{E\}$ ne possède pas de plus grand élément pour l'inclusion, montrons qu'aucun X ne peut être plus grand élément, c'est-à-dire :
$$\forall X \in \mathcal{P}(E) \setminus \{E\} \quad \exists Y \in \mathcal{P}(E) \setminus \{E\} \quad \text{non}(Y \subset X).$$
Soit $X \in \mathcal{P}(E) \setminus \{E\}$. Comme $X \neq E$, il existe $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin X$.
Posons $Y = \{x_0\}$. Comme $\operatorname{card} E > 1$, on a $Y \in \mathcal{P}(E) \setminus \{E\}$; de plus, Y n'est évidemment pas inclus dans X, ce qui termine la démonstration.

Exercice 30

- Dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$, l'élément Z est un majorant de la partie $\{X, Y\}$ si, et seulement si, $X \subset Z$ et $Y \subset Z$, ce qui équivaut à $X \cup Y \subset Z$.
- $X \cup Y$ est l'un de ces majorants et il est plus petit que tous les autres majorants. Par suite, c'est le plus petit élément de l'ensemble des majorants.

Exercice 31 Dans $(\mathbb{N}, |)$, les majorants de $\{8, 9, 12\}$ sont les multiples de 8, de 9 et de 12 ; il s'agit donc des multiples de leur PPCM, qui est 72.

Exercice 32

1. La relation donnée est une relation d'ordre car :
   - pour tout $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on a évidemment $f \leqslant f$;
   - si f et g sont deux fonctions vérifiant $f \leqslant g$ et $g \leqslant f$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \leqslant g(x)$ et $g(x) \leqslant f(x)$, et donc $f(x) = g(x)$; on en déduit $f = g$;
   - on prouve de même la transitivité.

2. Ce n'est pas un ordre total car la fonction $f : x \mapsto x$ et la fonction nulle ne sont pas comparables ; en effet :
   - on n'a pas $f \leqslant 0$ puisque $f(1) > 0$,
   - on n'a pas $0 \leqslant f$ puisque $f(-1) < 0$.

   Comme pour toute relation d'ordre, le propriété $f > 0$ signifie $f \geqslant 0$ et $f \neq 0$, ce qui s'écrit encore :

   $$(\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant 0) \quad \text{et} \quad (\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0).$$

   Remarque Comme on risque de confondre $f > 0$ avec $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$, ou de prendre l'un pour l'autre, il est totalement déconseillé d'utiliser la notation $f > 0$.

3. - Si $\max(\{f, g\})$ existe alors c'est l'un des deux éléments de $\{f, g\}$. Si c'est f, alors on a $g \leqslant f$, sinon c'est g et l'on a $f \leqslant g$. La réciproque étant évidente, $\max(\{f, g\})$ existe si, et seulement si, f et g sont comparables.
   - La fonction h est bien définie car, pour chaque valeur de x, les images $f(x)$ et $g(x)$ sont deux nombres réels, et l'ensemble $\{f(x), g(x)\}$ possède donc un plus grand élément dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$.
     La fonction h est un majorant de A : en effet, on a $f \leqslant h$ et $g \leqslant h$ puisque :

     $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant h(x) \quad \text{et} \quad g(x) \leqslant h(x).$$

     Si u est un majorant de A, alors on a $f \leqslant u$ et $g \leqslant u$, et donc :

     $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant u(x) \quad \text{et} \quad g(x) \leqslant u(x) \ ;$$

     on en déduit $\forall x \in \mathbb{R} \quad \max\{f(x), g(x)\} \leqslant u(x)$ c'est-à-dire $h \leqslant u$, ce qui prouve que h est le plus petit majorant de A.

Théorème 11

- **Unicité :** Soit $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$. Alors on a $bq \leqslant a$ et :

  $$a = bq + r < bq + b = b(q+1).$$

  On en déduit que pour tout $n \geqslant (q+1)$, on a $bn \geqslant b(q+1) > a$, ce qui prouve que q est le plus grand élément de :

  $$A = \left\{n \in \mathbb{N} \mid nb \leqslant a\right\}.$$

  On en déduit l'unicité de q ainsi que celle de $r = a - bq$
- **Existence :** Soit $A = \left\{n \in \mathbb{N} \mid nb \leqslant a\right\}$.
  A est une partie de $\mathbb{N}$, non vide puisque $0 \in A$.
  De plus A est majorée par a puisque si $n \in A$, alors $n \leqslant nb \leqslant a$ (b est non nul).
  Par suite, A admet un plus grand élément q, qui vérifie donc :
  * $qb \leqslant a$ puisque $q \in A$
  * $(q+1)b > a$ puisque $q + 1 \notin A$.

  En posant $r = a - bq$, on a alors $a = bq + r$ et $r < (q+1)b - bq = b$.

Théorème 12 Raisonnons par l'absurde en supposant que P n'est pas vérifié sur tout $\mathbb{N}$.

- L'ensemble A des entiers n pour lesquels $P(n)$ est faux est alors une partie non vide de $\mathbb{N}$, qui admet donc un plus petit élément α.

- Comme $P(0)$ est vraie, on a $0 \notin A$ et donc $\alpha \neq 0$; étant donné que α est le plus petit élément de A, l'entier $\alpha - 1$ n'appartient pas à A.
- Par suite $P(\alpha-1)$ est vraie ; la relation $(*)$ entraîne alors que $P(\alpha)$ est vraie, ce qui contredit l'appartenance de α à A.

L'hypothèse que P n'est pas vérifié sur tout $\mathbb{N}$ est donc absurde, ce qui prouve que, pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie.

Exercice 33 Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété : $f(n) \geqslant n$.

- $P(0)$ est vrai puisque, par hypothèse, on a $f(0) \in \mathbb{N}$ et donc $f(0) \geqslant 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vrai. On a donc $f(n) \geqslant n$.

  Comme f est strictement croissante, on a $f(n+1) > f(n) \geqslant n$.

  Étant donné que $f(n+1) \in \mathbb{N}$, on en déduit $f(n+1) \geqslant n+1$, ce qui prouve $P(n+1)$ et termine la démonstration par récurrence.

Exercice 34 Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la relation : $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.

- La propriété $P(0)$ est vraie de façon évidente.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n-1)$ vraie. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + n^2 \\
&= \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} + n^2 && \text{d'après } P(n-1) \\
&= \frac{n}{6}\Big((n-1)\,(2\,n-1) + 6\,n\Big) \\
&= \frac{n\,(2\,n^2+3\,n+1)}{6} \\
&= \frac{n\,(n+1)(2\,n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

  Ainsi $P(n)$ est vraie, ce qui termine la démonstration de la récurrence.

Exercice 35

Étudions les premières valeurs :

n	0	1	2	3	4	5
2^n	1	2	4	8	16	32
$(n+1)!$	1	2	6	24	120	720

On remarque que $(n+1)! \geqslant 2^n$ pour ces premières valeurs de n. D'autre part, on passe d'une valeur de n à la suivante en multipliant par 2 dans un cas et par $n+1 \geqslant 2$ dans l'autre.

Soit donc, pour tout entier naturel n, la propriété P_n : $(n+1)! \geqslant 2^n$.

Montrons que P_n est vraie pour tout n en raisonnant par récurrence sur n.

- P_0 est vraie puisque $1! = 2^0$.

- Supposons P_{n-1} vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$; ainsi on a $n! \geqslant 2^{n-1}$.
  Comme $n \geqslant 1$, on a $n+1 \geqslant 2$, et par produit d'inégalités entre nombres positifs :
  $$(n+1)! = (n+1)\, n! \geqslant 2 \times 2^{n-1} = 2^n.$$
  Ainsi la propriété P_n est initialisée et héréditaire, ce qui, d'après le principe de récurrence, prouve qu'elle est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 36 L'étude des premières dérivées de f laisse penser que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}.$$
Cette formule se démontre aisément par récurrence en écrivant :
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}} = (-1)^n\, n!\, x^{-(n+1)}.$$

Exercice 37

- En calculant, on voit que 5 est le premier entier n pour lequel on a $n! \geqslant 2^{n+1}$.
- Montrons par récurrence que pour $n \geqslant 5$, on a : $n! \geqslant 2^{n+1}$.
  Soit $P(n)$ la propriété : $n! \geqslant 2^{n+1}$.
  * On a vu que $P(5)$ est vraie.
  * Supposons $P(n)$ vraie à un certain rang $n \geqslant 5$; ainsi on a $n! \geqslant 2^{n+1}$.
    Comme on a $n+1 \geqslant 6 \geqslant 2$, par produit par des nombres positifs, on a :
    $$(n+1)n! \geqslant 2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2}.$$
    Ainsi $P(n+1)$ est vraie, ce qui conclut le raisonnement par récurrence : on a donc prouvé que $P(n)$ est vraie à partir du rang $n = 5$.

Exercice 38 La propriété est évidemment vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Supposons $n \geqslant 2$. En utilisant la formule du binôme, on a :
$$(1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k = 1 + n\,h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k \qquad (\text{ car } n \geqslant 2).$$
Comme $\sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k$ est une somme de réels positifs, on en déduit l'inégalité demandée.

Exercice 39 En utilisant la formule du binôme, on a :
$$\left(1+\sqrt{2}\,\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\,\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sqrt{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\sqrt{2}\right)^k$$
Comme $\left(-\sqrt{2}\right)^k = (-1)^k \left(\sqrt{2}\right)^k$, il ne reste que les termes d'indices pairs et :
$$\left(1+\sqrt{2}\,\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\,\right)^n = \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2\ell} 2^\ell$$
où $\lfloor n/2 \rfloor$ représente la partie entière de $n/2$. Le résultat est alors évident.

Exercice 40

1. On a $\Phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = 1 + \Phi$.

   En multipliant cette égalité par Φ^n, avec $n \in \mathbb{N}$, on trouve $\Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi^n$.
   On trouve de même $\Psi^2 = 1 + \Psi$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N} \quad \Psi^{n+2} = \Psi^{n+1} + \Psi^n$.

   Remarque On peut, sans calcul, trouver directement les deux relations $\Phi^2 = 1 + \Phi$ et $\Psi^2 = 1 + \Psi$ en voyant que $\Phi + \Psi = 1$ et $\Phi\,\Psi = -1$ et donc (*cf.* la proposition 21 de la page 167) que Φ et Ψ sont les racines de :
   $$x^2 - x - 1 = 0.$$

2. Soit P_n la propriété : « $\Phi^n + \Psi^n \in \mathbb{N}$ ». Montrons P_n par récurrence d'ordre 2.
   - P_0 et P_1 sont vraies puisque $\Phi^0 + \Psi^0 = 2$ et $\Phi + \Psi = 1$.
   - Supposons P_n et P_{n+1} vraies pour un certain $n \geqslant 1$. Alors on a :
     $$\Phi^{n+2} + \Psi^{n+2} = \underbrace{\Phi^{n+1} + \Psi^{n+1}}_{(1)} + \underbrace{\Phi^n + \Psi^n}_{(2)}.$$
     Or, les termes (1) et (2) sont entiers naturels d'après P_{n+1} et P_n, donc leur somme $\Phi^{n+2} + \Psi^{n+2}$ aussi. Cela montre P_{n+2}.

   Ainsi, d'après le principe de récurrence double, la propriété P_n est vérifiée pour tout entier naturel n, ce qui conclut.

Exercice 41 L'étude des premières valeurs de k laisse penser que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, on peut mettre $(x-1)^{n-k}$ en facteur dans $f^{(k)}(x)$. Montrons-le par récurrence finie.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, désignons par H_k la propriété :
« il existe une fonction polynomiale g_k telle que $\forall x \in \mathbb{R} \; f^{(k)}(x) = (x-1)^{n-k}\, g_k(x)$. »

- H_0 est évidemment vraie : il suffit de prendre $g_0 : x \mapsto (x+1)^n$.
- Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que H_k soit vraie. On peut donc trouver une fonction polynomiale g_k telle que :
  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(k)}(x) = (x-1)^{n-k}\, g_k(x).$$
  Étant donné que g_k est polynomiale, donc dérivable, et que $n - k \geqslant 1$, on en déduit par dérivation :
  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(k+1)}(x) = (x-1)^{n-k-1}\Big((n-k)\, g_k(x) + (x-1)\, g_k'(x)\Big).$$
  Si l'on pose alors :
  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad g_{k+1}(x) = (n-k)\, g_k(x) + (x-1)\, g_k'(x),$$
  on définit une fonction polynomiale g_{k+1} vérifiant :
  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(k+1)}(x) = (x-1)^{n-k-1}\, g_{k+1}(x),$$
  ce qui prouve H_{k+1} et termine la démonstration par récurrence.

D'après ce qui précède, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(k)}(x) = (x-1)^{n-k}\, g_k(x).$$
Comme $n - k \geqslant 1$, on en déduit $f^{(k)}(1) = 0$.

Remarque La notion de racine multiple d'un polynôme permettra d'avoir une démonstration plus efficace du résultat précédent.

Exercice 42 Le cardinal de $[\![m,n]\!]$ est $n-m+1$, car l'application $k \mapsto k+m-1$ réalise une bijection de $[\![1,n-m+1]\!]$ sur $[\![m,n]\!]$.

Exercice 43 E étant de cardinal n, on peut trouver une bijection u de $[\![1,n]\!]$ sur E.

- Si $n=1$, on a $E=\{u(1)\}=\{a\}$. Ainsi $E\setminus\{a\}=\varnothing$ et $\operatorname{card}(E\setminus\{a\})=0=1-1$.
- Supposons $n \geqslant 2$.
  - ∗ Si $u(n)=a$, alors u étant bijective, $u([\![1,n-1]\!])=u([\![1,n]\!])\setminus\{u(n)\}=E\setminus\{a\}$. Par suite, l'application $v: \begin{array}{ccc} [\![1,n-1]\!] & \longrightarrow & E\setminus\{a\} \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$ est surjective.
    Elle est aussi injective, comme restriction d'une injection.
    Ainsi v est bijective et $E\setminus\{a\}$ est un ensemble fini de cardinal $n-1$.
  - ∗ Si $u(n)\neq a$, considérons l'application τ définie par :

    $$\tau(a)=u(n), \quad \tau(u(n))=a \quad \text{et} \quad \forall x\in E\setminus\{a,u(n)\} \quad \tau(x)=x.$$

    C'est une permutation involutive de E puisque $\tau\circ\tau=\mathrm{Id}_E$. Par suite $v=\tau\circ u$ est une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur E, car composée de deux bijections, vérifiant $v(n)=\tau(v(n))=a$. D'après le premier cas, on en déduit $\operatorname{card}(E\setminus\{a\})=n-1$.

Proposition 16

Comme $\operatorname{card} E=n$, il existe une bijection u de $[\![1,n]\!]$ sur E. Par hypothèse, il existe une bijection v de E sur F. La composée $v\circ u$ est alors une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur F, ce qui prouve le résultat.

Exercice 44 Si F est fini, alors la proposition précédente, nous dit que E est fini, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse E fini. Ansi F est infini.

Exercice 45

1. C'est la contraposée du premier point du théorème précédent puisque si E est fini, alors toute partie de E est finie.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E deux à deux distincts. Alors, l'application $n\mapsto u_n$ est injective et donc induit une bijection de $\mathbb{N}$ sur son image qui est alors une partie infinie F de E. Par suite, E est infini.

Exercice 46

1. Soit $(E,\leqslant)$ un ensemble totalement ordonné. Montrons par récurrence sur l'entier $n=\operatorname{card} F$ que toute partie finie F de E est majorée.
   - Si $n=0$, alors $F=\varnothing$, et la partie vide est majorée par tout élément de E. Ainsi, la propriété est vraie pour $n=0$.
   - Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie au rang n. Considérons une partie F de E de cardinal $n+1$. Soit $a\in F$ et $F'=F\setminus\{a\}$.
     Alors F' est fini de cardinal n. Par hypothèse de récurrence, F' est majoré. Soit M' un majorant de F'. Comme E est totalement ordonné, on peut alors poser $M=\max(a,M')$, et M est évidemment un majorant de F.
     Par suite, F est majoré et la propriété est vraie au rang $n+1$.

   Par suite, la propriété est vraie pour toute partie finie de E.

2. Soit X une partie de $\mathbb{N}$.
   - Si X est majorée, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X \subset [\![0, n]\!]$.
     Par suite, X est finie comme sous-ensemble d'un ensemble fini.
   - Si X est finie, alors la question précédente nous dit qu'elle est majorée.

   On en déduit l'équivalence.

Proposition 18

- Supposons u injective. Alors, l'application $v : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & u(E) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$ est bijective car
  * injective comme restriction d'une injection,
  * surjective puisque l'on a restreint l'ensemble d'arrivée à l'image.

  Par suite, si u est injective, alors l'ensemble $u(E)$ est fini et $\operatorname{card} u(E) = \operatorname{card} E$.
- Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la propriété H_n :
  « si E est un ensemble de cardinal n et u une application définie sur E, alors $u(E)$ est fini et $\operatorname{card} u(E) \leqslant \operatorname{card} E$; et s'il y égalité, alors u est injective ».
  * Si $n = 1$, alors il existe a tel que $E = \{a\}$. On alors $u(E) = \{u(a)\}$, donc $\operatorname{card} u(E) = 1 = \operatorname{card} E$ et u est injective, ce qui prouve que H_1 est vraie.
  * Soit $n \geqslant 2$ tel que H_{n-1} soit vraie. Considérons un ensemble E de cardinal n.
    ⋆ Si u est injective, alors d'après le premier point, on a $\operatorname{card} u(E) = \operatorname{card} E$.
    ⋆ Si u n'est pas injective, alors il existe deux éléments a et b de E distincts tels que $u(a) = u(b)$.
    Ainsi, on a $u(E) = u(E\setminus\{b\})$ avec $\operatorname{card}(E\setminus\{b\}) = n-1$. D'après l'hypothèse de récurrence, $u(E \setminus \{b\})$ est fini et $\operatorname{card} u(E \setminus \{b\}) \leqslant n-1$. Ainsi $u(E)$ est fini et $\operatorname{card} u(E) \leqslant n - 1 < \operatorname{card} E$.

    On a donc $\operatorname{card} u(E) \leqslant \operatorname{card} E$, avec égalité si, et seulement si, u est injective.
    La propriété est vraie au rang n, ce qui termine la démonstration par récurrence.

Théorème 19 Il est clair que $(iii) \Rightarrow (i)$ et $(iii) \Rightarrow (ii)$.

- Montrons $(i) \Rightarrow (iii)$. Supposons u injective. D'après la proposition 18, on a $\operatorname{card}(u(E)) = \operatorname{card}(E)$ et donc $\operatorname{card}(u(E)) = \operatorname{card}(F)$. Comme $u(E) \subset F$, d'après la proposition 17 de la page 363, on a $u(E) = F$ et l'application u est donc surjective.
- Montrons $(ii) \Rightarrow (iii)$. Supposons u surjective. Alors on a $\operatorname{card}(u(E)) = \operatorname{card} F$ et donc $\operatorname{card}(u(E)) = \operatorname{card}(E)$. D'après la proposition 18, cela implique que u est injective.

Exercice 47

- Comme application injective mais non surjective, on peut prendre :
$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$$
- Comme application surjective mais non injective, on peut prendre :
$$v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases} \end{array}$$

  Attention : $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n-1 \end{array}$ n'est pas une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$!

Chacun des deux exemples u et v précédents prouve que $\mathbb{N}$ n'est pas fini.

S'entraîner et approfondir

7.1 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x\,y). \end{array}$

1. Est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $(X,Y) \in f(\mathbb{R}^2)$ si, et seulement si, $X^2 - 4Y \geqslant 0$.
3. Déterminer l'image réciproque d'une droite parallèle à Oy, puis l'image réciproque d'une droite parallèle à Ox.

7.2 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^2+z+1. \end{array}$

1. Déterminer $f(\mathbb{C})$, $f(\mathbb{C}^*)$, $f(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{C})$, $f^{-1}(\mathbb{C}^*)$, $f^{-1}(\mathbb{R})$.

7.3 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + \dfrac{1}{z}. \end{array}$

1. Est-elle injective ?
2. Quelle est son image ?
3. Déterminer l'image par f de $\mathbb{R}^*$, de $\mathbb{U} = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = 1\right\}$.

7.4 Étant donné $u \in \mathcal{F}(E,F)$ et $v \in \mathcal{F}(F,G)$, établir :

1. si $v \circ u$ est injective alors u est injective.
2. si $v \circ u$ est surjective alors v est surjective.

7.5 Soit E, F, G trois ensembles, $u \in \mathcal{F}(E,F)$ et $v \in \mathcal{F}(F,G)$.
En posant $w = v \circ u$, établir :

1. si w est surjective et v injective alors u est surjective.
2. si w est injective et u surjective alors v est injective.

7.6 Soit E, F, G, H quatre ensembles, $u \in \mathcal{F}(E,F)$, $v \in \mathcal{F}(F,G)$ et $w \in \mathcal{F}(G,H)$. Montrer que si $v \circ u$ et $w \circ v$ sont bijectives, alors les applications u, v, w sont bijectives.

7.7 Si la composée $u \circ v$ de deux applications est bijective, peut-on en déduire que l'une d'elles est bijective ? injective ? surjective ?

7.8 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Établir la bijectivité de l'application :

$$u : \begin{array}{ccc} [\![0, p-1]\!] \times [\![0, q-1]\!] & \longrightarrow & [\![0, p\,q-1]\!] \\ (x,y) & \longmapsto & x + p\,y. \end{array}$$

7.9 Peut on trouver $f\ :\ [-1,1] \longrightarrow \mathrm{I\!R}$ telle que $\forall \theta \in \mathrm{I\!R} \quad \cos\theta = f(\sin\theta)$?

⋆⋆ **7.10** Soit E un ensemble et A une partie de E. On définit

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A \end{array} \qquad \text{et} \qquad g_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cup A \end{array}$$

1. Décrire $f_A\big(\mathcal{P}(E)\big)$ et $g_A\big(\mathcal{P}(E)\big)$ lorsque $E = \{1,2,3,4,5\}$ et $A = \{1,2\}$.
2. Dans le cas général, établir $f_A\big(\mathcal{P}(E)\big) = \mathcal{P}\,(A)$ et :
$$g_A\big(\mathcal{P}(E)\big) = \big\{A \cup X\,;\ X \in \mathcal{P}\left(\complement A\right)\big\} = \{Y \in \mathcal{P}(E) \mid A \subset Y \subset E\}.$$
Lorsque E est fini, déterminer le nombre d'éléments de $g_A\big(\mathcal{P}(E)\big)$.
3. Pour $Y \in \mathcal{P}(E)$ déterminer $f_A^{-1}(\{Y\})$ et $g_A^{-1}(\{Y\})$.

7.11 Soit $u \in \mathcal{F}(E,F)$.

1. Pour $X \subset E$, montrer que $X \subset u^{-1}(u(X))$. A-t-on $X = u^{-1}(u(X))$?
2. Pour $Y \subset F$, comparer de même Y et $u(u^{-1}(Y))$.

⋆ **7.12** Soit $u \in \mathcal{F}(E,F)$.

1. Montrer que u est injective si et seulement si : $\forall X \subset E \quad u^{-1}(u(X)) = X$.
2. Énoncer une condition analogue concernant la surjectivité de u.

⋆ **7.13** Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, $B \in \mathcal{P}(E)$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A\,,\, X \cap B). \end{array}$

1. Conditions pour que f soit injective, surjective.
Pour se faire une idée des conditions à trouver, commencer par étudier des cas particuliers, comme : ($A = E$ et $B = \varnothing$), ($A = E$ et $B = E$), ...
2. Lorsque f est bijective donner f^{-1}.

7.14 Soit $u \in \mathcal{F}(E,F)$, $A \in \mathcal{P}(F)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$. Comparer :

$$u^{-1}(A \mathbin{\triangle} B) \quad \text{et} \quad u^{-1}(A) \mathbin{\triangle} u^{-1}(B).$$

Rappel : $A \mathbin{\triangle} B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ *où* $\overline{A} = \complement_F A$ *et* $\overline{B} = \complement_F B$

7.15 Soit $u \in \mathcal{F}(E,F)$.

1. Montrer que si l'on suppose u injective, on a :
$$\forall (A, A') \in \mathcal{P}(E)^2 \quad u(A \cap A') = u(A) \cap u(A')$$
2. Étudier la réciproque de l'implication précédente.

7.16 Sur $\mathrm{I\!R}$ la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3\,(x - y)$$

est-elle une relation d'équivalence ? Dans l'affirmative, pour tout $x \in \mathrm{I\!R}$, déterminer le nombre d'éléments de la classe de x.

Solution des exercices

7.1 1. L'application f
- n'est pas injective car $f\,(1,2) = f\,(2,1)$ et $(1,2) \neq (2,1)$.
- n'est pas surjective car on peut vérifier que le couple $(1,1)$ n'a pas d'antécédent.

2. Un point (X,Y) est dans l'image de cette fonction f si, et seulement si, l'on peut trouver $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$X = x + y \quad \text{et} \quad Y = x\,y,$$
ou encore si, et seulement si, l'équation $T^2 - X\,T + Y = 0$ possède deux solutions réelles (distinctes ou confondues) ; cela équivaut à $X^2 - 4\,Y \geqslant 0$. L'image est donc l'ensemble des points situés en dessous de la parabole d'équation $Y = \frac{1}{4}\,X^2$.

3. Soit D une droite parallèle à Oy, d'équation $X = a$. Alors :
$$u^{-1}(D) = \{(x,y) \mid x + y = a\}.$$
Donc $u^{-1}(D)$ est la droite d'équation $x + y = a$.
Soit Δ une droite parallèle à Ox, d'équation $Y = a$. Alors :
$$u^{-1}(\Delta) = \{(x,y) \mid x\,y = a\} \;;$$
par suite, il s'agit donc de l'hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x}$ si $a \neq 0$, et de la réunion des deux axes du repère si $a = 0$.

7.2 1.
- Comme f est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et que, pour tout $Z \in \mathbb{C}$, l'équation du second degré $f(z) = Z$ possède au moins une racine complexe z, l'application f est surjective. Par suite $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
- Pour tout $Z \in \mathbb{C}$, l'équation du second degré $z^2 + z + 1 = Z$ possède au moins une racine non nulle puisque la somme de ses racines vaut -1 ; par suite, on a $\mathbb{C} \subset f(\mathbb{C}^*)$. Comme $f(\mathbb{C}^*) \subset \mathbb{C}$ est évident, on en déduit $f(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}$.
- Comme $f(\mathbb{R}) = \left\{x^2 + x + 1 \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$
on en déduit que $f(\mathbb{R})$ est l'intervalle $[\frac{3}{4}, +\infty[$ de l'axe réel.

2.
- Comme $\mathbb{C}$ est l'ensemble d'arrivée de f, alors $f^{-1}(\mathbb{C})$ en est l'ensemble de départ, et on a donc $f^{-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
- On a $f^{-1}(\mathbb{C}^*) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \neq 0\} = \mathbb{C} \setminus \{j\,,\, j^2\}$
- Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $z \in f^{-1}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $f(z) = \overline{f(z)}$, soit :
$$(z - \overline{z})\,(z + \overline{z} + 1) = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad (z = \overline{z} \text{ ou } z + \overline{z} = -1).$$
Ainsi, l'ensemble $f^{-1}(\mathbb{R})$ est la réunion de l'axe des réels $(z = \overline{z})$ et de la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ puisque $(z + \overline{z} = 2\ \mathrm{Re}\, z = 2\,x)$.

7.3 1. L'application f n'est pas injective car $f(2) = f(1/2)$.

2. On a $f(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}$: en effet, pour tout complexe Z, l'équation du second degré :
$$z^2 - Z\,z + 1 = 0$$
possède une solution non nulle z (en fait, toutes ses solutions sont non nulles puisque leur produit vaut 1), et il est alors immédiat de vérifier que l'on $f(z) = Z$.

3. • Par définition, on a $f(\mathbb{R}^*) = \left\{x + \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}^*\right\}$. C'est une partie de l'axe réel symétrique par rapport à 0, et une étude de variations montre que :
$$f(\mathbb{R}^*) =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[.$$
• Comme $\mathbb{U} = \left\{e^{i\,t} \mid t \in [0, 2\,\pi]\right\}$, on a :
$$f(\mathbb{U}) = \left\{e^{i\,t} + e^{-i\,t} \mid t \in [0, 2\,\pi]\right\} = \left\{2\,\cos t \mid t \in [0, 2\,\pi]\right\} = [-2, 2].$$

7.4 1. Supposons $v \circ u$ injective et montrons que u est injective.
Soit donc x et x' deux éléments de E tels que $u(x) = u(x')$. En transformant par v, on en déduit $v\big(u(x)\big) = v\big(u(x')\big)$ et donc $(v \circ u)(x) = (v \circ u)(x')$.
Comme $v \circ u$ est injective, cela entraîne $x = x'$, ce qui termine la démonstration.
2. Supposons $v \circ u$ surjective et montrons que v est surjective. Soit $z \in G$.
Comme $v \circ u$ est surjective, on peut trouver un $x \in E$ tel que $z = (v \circ u)(x)$.
En posant $y = u(x)$, on a alors $z = v(y)$, ce qui prouve que v est surjective.

7.5 1. Supposons w surjective et v injective ; prouvons :
$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = u\,(x)\,.$$
Soit $y \in F$. Comme w est surjective, on peut trouver un $x \in E$ tel que $w\,(x) = v(y)$. On a alors :
$$v(y) = (v \circ u)\,(x) = v\,(u\,(x))\,.$$
Comme v est injective, on en déduit que x vérifie $y = u\,(x)$.
Cela prouve que u est surjective.
2. Supposons w injective et u surjective ; prouvons :
$$\forall y_1 \in F \quad \forall y_2 \in F \quad v(y_1) = v(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2.$$
Soit $y_1 \in F$ et $y_2 \in F$ tels que $v(y_1) = v(y_2)$.
Comme u est surjective, on peut trouver $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ tels que $y_1 = u\,(x_1)$ et $y_2 = u\,(x_2)$. La relation $v(y_1) = v(y_2)$ s'écrit alors $w\,(x_1) = w\,(x_2)$ et, comme w est injective, cela entraîne $x_1 = x_2$; par suite v est injective.

7.6 En utilisant le résultat de l'exercice 7.4 (ou un raisonnement identique), on prouve que v est surjective car $v \circ u$ est surjective, et que v est injective car $w \circ v$ est injective. Donc v est bijective.

En écrivant $u = v^{-1} \circ (v \circ u)$, on en déduit alors que u, composée d'applications bijectives, est une application bijective.

Raisonnement analogue au précédent pour prouver que w est bijective.

7.7 Il est possible qu'aucune des deux ne soit bijective, comme par exemple :
$$v: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \quad \text{et} \quad u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array}$$
En revanche, on peut justifier (*cf.* exercice 7.4) que v est injective et que u est surjective.

7.8 Avec $(x, y) \in [\![0, p-1]\!] \times [\![0, q-1]\!]$, on a évidemment $x + p\,y \geqslant 0$ et :
$$x + p\,y \leqslant p - 1 + p\,(q-1) = p\,q - 1.$$
Donc on a bien une application de $[\![0, p-1]\!] \times [\![0, q-1]\!]$ dans $[\![0, p\,q-1]\!]$.

- Si $z = x + p\,y$, avec $(x,y) \in [\![0,p-1]\!] \times [\![0,q-1]\!]$, alors le couple (x,y) est unique d'après le théorème de division euclidienne ; on en déduit l'injectivité de u.
- Pour tout $z \in [\![0,p\,q-1]\!]$, le théorème de division euclidienne nous assure l'existence d'un couple $(x,y) \in [\![0,p-1]\!] \times \mathbb{N}$, tel que $z = x + p\,y$. Comme $z \leqslant pq-1$, on en déduit $y \in [\![0,q-1]\!]$, ce qui prouve la surjectivité de u.

D'où la bijectivité de u.

7.9 La réponse est non. Montrons-le par l'absurde.

Supposons qu'il existe une telle fonction f :

- en remplaçant θ par 0, on doit avoir : $1 = f(0)$,
- en remplaçant θ par π, on doit avoir : $-1 = f(0)$,

ce qui est contradictoire et prouve qu'il n'existe pas de telle fonction f.

7.10 1. On a $f_A\big(\mathcal{P}(E)\big) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$$g_A\big(\mathcal{P}(E)\big) = \left\{ \begin{array}{r} \{1,2\}\,\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \\ \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, E \end{array} \right\}.$$

2. Démontrons $f_A\big(\mathcal{P}(E)\big) = \mathcal{P}(A)$ par double inclusion.
   - Première inclusion $f_A\big(\mathcal{P}(E)\big) \subset \mathcal{P}(A)$: si $Y \in f_A\big(\mathcal{P}(E)\big)$, on peut trouver $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $Y = X \cap A$ et donc $Y \subset A$ ou encore $Y \in \mathcal{P}(A)$.
   - Seconde inclusion $\mathcal{P}(A) \subset f_A\big(\mathcal{P}(E)\big)$: si $Y \in \mathcal{P}(A)$, alors $Y = Y \cap A = f_A(Y)$ et donc $Y \in f_A\big(\mathcal{P}(E)\big)$.

   Démontrons $g_A\big(\mathcal{P}(E)\big) = \big\{A \cup X \mid X \in \mathcal{P}(\complement A)\big\} = \{Y \mid A \subset Y \subset E\}$.
   - Par définition, on a : $g_A\big(\mathcal{P}(E)\big) = \{A \cup X \mid X \in \mathcal{P}(E)\}$.
     Comme $\mathcal{P}(\complement A) \subset \mathcal{P}(E)$, on en déduit $g_A\big(\mathcal{P}(E)\big) \supset \big\{A \cup X \mid X \in \mathcal{P}(\complement A)\big\}$.
   - D'autre part, si $Y \in g_A\big(\mathcal{P}(E)\big)$, on peut trouver $X \subset E$ tel que $Y = A \cup X$ et alors $A \subset Y \subset E$, ce qui prouve
     $$\{Y \mid A \subset Y \subset E\} \supset \operatorname{Im} g_A$$
   - Il reste donc à prouver $\{Y \mid A \subset Y \subset E\} \subset \big\{A \cup X \mid X \in \mathcal{P}(\complement A)\big\}$.
     Soit Y tel que $A \subset Y \subset E$. En posant $X = Y \cap \complement A$, on a $X \in \mathcal{P}(\complement A)$ et :
     $$A \cup X = A \cup \big(Y \cap \complement A\big) = \underbrace{(A \cup Y)}_{Y} \cap \underbrace{(A \cup \complement A)}_{E} = Y$$
     ce qui prouve que Y est élément de $\big\{A \cup X \mid X \in \mathcal{P}(\complement A)\big\}$.

   Après avoir démontré que $g_A : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(\complement_E A) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cup A \end{array}$ est une bijection, on peut alors en déduire que $\operatorname{card}\Big(g_A\big(\mathcal{P}(E)\big)\Big) = 2^{\operatorname{card}(\complement_E A)}$.

3. - On a $f_A^{-1}(\{Y\}) = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid X \cap A = Y\}$; donc
     * si Y n'est pas inclus dans A, l'équation $X \cap A = Y$ n'a aucune solution et
     $$f_A^{-1}(\{Y\}) = \varnothing.$$

  * si $Y \subset A$, l'équation $X \cap A = Y$ possède comme solution toutes les parties de la forme $Y \cup X_1$ où X_1 est un élément quelconque de $\mathcal{P}\left(\complement A\right)$

$$f_A^{-1}(\{Y\}) = \left\{Y \cup X_1 \mid X_1 \subset \complement A\right\}.$$

- On a $g_A^{-1}(\{Y\}) = \{\, X \in \mathcal{P}\,(E) \mid X \cup A = Y\}$; donc
  * si A n'est pas inclus dans Y, l'équation $X \cup A = Y$ n'a aucune solution et

$$g_A^{-1}(\{Y\}) = \varnothing.$$

  * si $A \subset Y$, l'équation $X \cup A = Y$ possède comme solution toutes les parties de la forme $(Y \setminus A) \cup X_1$ où X_1 est un élément quelconque de $\mathcal{P}\,(A)$

$$g_A^{-1}(\{Y\}) = \{\,(Y \setminus A) \cup X_1 \mid X_1 \subset A\}.$$

7.11 1. Soit $X \subset E$. Considérons $x \in X$. On a alors $u(x) \in u(X)$ et donc $x \in u^{-1}(u(X))$. On en déduit l'inclusion demandée.
On ne peut pas faire mieux que cette inclusion comme le prouve l'exemple de :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{et} \qquad X = [0,1]$$

pour lequel $u^{-1}(u(X)) = [-1,1]$ contient strictement X.

2. Soit $Y \subset F$. Montrons que $u(u^{-1}(Y)) \subset Y$. Soit $y \in u(u^{-1}(Y))$. On peut alors trouver $y_0 \in u^{-1}(Y)$ tel que $y = u(y_0)$. Comme $y_0 \in u^{-1}(Y)$, on a $y = u(y_0) \in Y$, ce qui prouve l'inclusion. On ne peut pas faire mieux que l'inclusion précédente comme le prouve l'exemple de $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$
pour lequel $u(u^{-1}(Y)) = [0,1]$ est strictement inclus dans Y.

7.12 1. Montrons l'équivalence.
- Supposons u injective, et montrons : $\forall X \subset E \quad u^{-1}(u(X)) = X$.
D'après l'exercice précédent, il suffit de montrer : $\forall X \subset E \quad u^{-1}(u(X)) \subset X$.
Soit donc $X \subset E$. Prouvons $u^{-1}(u(X)) \subset X$. Soit alors $x \in u^{-1}(u(X))$.
On a alors $u(x) \in u(X)$, et il existe donc $x' \in X$ tel que $u(x) = u(x')$.
Comme u est injective, on en déduit $x = x'$, ce qui prouve $x \in X$ et termine la démonstration d'inclusion.
- Supposons : $\forall X \subset E \quad u^{-1}(u(X)) = X$; montrons que u est injective.
Soit x et y deux éléments de E tels que $u(x) = u(y)$. Posons $X = \{x\}$.
L'égalité $u(x) = u(y)$ nous dit que $y \in u^{-1}(u(X))$. Comme, par hypothèse :

$$u^{-1}(u(X)) = X = \{x\},$$

on en déduit $y = x$, ce qui prouve l'injectivité de u.

2. La condition correspondante est : $\forall Y \subset F \quad u(u^{-1}(Y)) = Y$.
- Supposons u surjective, et montrons : $\forall Y \subset F \quad u(u^{-1}(Y)) = Y$. Soit $Y \subset F$.
D'après l'exercice précédent, on sait que $u(u^{-1}(Y)) \subset Y$.
Montrons que $Y \subset u(u^{-1}(Y))$. Soit $y \in Y$. Comme u est surjective, on peut trouver $x \in E$ tel que $y = u(x)$.
Étant donné que $u(x) = y \in Y$, on a $x \in u^{-1}(Y)$ et donc :

$$y = u(x) \in u(u^{-1}(Y)) \qquad \text{ce qui prouve} \qquad Y \subset u(u^{-1}(Y)).$$

- Supposons : $\forall Y \subset F \quad u(u^{-1}(Y)) = Y$; et montrons que u est surjective.
  Soit donc $y \in F$. Posons $Y = \{y\}$. Comme alors $y \in Y = u(u^{-1}(Y))$, on en déduit que y possède un antécédent, ce qui termine la démonstration de la surjectivité de u.

7.13 1. Montrons que f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$.

- Supposons f injective.
  Comme on a $f(A \cup B) = (A, B) = f(E)$ on en déduit $A \cup B = E$.
- Supposons $A \cup B = E$ et soit X_1 et X_2 tels que $f(X_1) = f(X_2)$ *i.e.* :
$$X_1 \cap A = X_2 \cap A \quad \text{et} \quad X_1 \cap B = X_2 \cap B.$$
  On a alors
$$\begin{aligned} X_1 = X_1 \cap E &= X_1 \cap (A \cup B) \\ &= (X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) \\ &= (X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B) = X_2, \end{aligned}$$
  ce qui prouve l'injectivité de f.

Montrons que f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \varnothing$.

- Supposons f surjective.
  On peut donc trouver une partie $X \subset E$ telle que :
$$(\varnothing, A \cap B) = f(X) = (X \cap A, X \cap B).$$
  On en déduit $\varnothing = X \cap A$ ainsi que $A \cap B = X \cap B$ et donc :
$$\varnothing = (X \cap A) \cap B = (X \cap B) \cap A = (A \cap B) \cap A = A \cap B,$$
  ce qui prouve l'égalité $A \cap B = \varnothing$.
- Supposons $A \cap B = \varnothing$ et montrons que f est surjective.
  Soit donc $(Y_1, Y_2) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. Posons $X = Y_1 \cup Y_2$, alors :
$$X \cap A = (Y_1 \cup Y_2) \cap A = (Y_1 \cap A) \cup (Y_2 \cap A).$$
  * Comme $Y_1 \subset A$, on a $Y_1 \cap A = Y_1$.
  * Comme $Y_2 \subset B$ et $A \cap B = \varnothing$, on a $Y_2 \cap A = \varnothing$.

  On en déduit $X \cap A = Y_1$. On prouve de même $X \cap B = Y_2$.
  On en déduit $(Y_1, Y_2) = f(X)$ ce qui prouve la surjectivité de f.

2. L'application f est bijective si, et seulement si, $A = \complement_E B$ et dans ce cas f^{-1} est l'application :
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (Y_1, Y_2) & \longmapsto & Y_1 \cup Y_2 \end{array}$$

7.14 Comme $A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$, en utilisant le relations entre images réciproques, intersections et réunions, on peut écrire :
$$\begin{aligned} u^{-1}(A \triangle B) &= u^{-1}\Big((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\Big) \\ &= u^{-1}(A \cap \overline{B}) \cup u^{-1}(\overline{A} \cap B) \\ &= \Big(u^{-1}(A) \cap u^{-1}(\overline{B})\Big) \cup \Big(u^{-1}(\overline{A}) \cap u^{-1}(B)\Big) \\ &= \Big(u^{-1}(A) \cap \overline{u^{-1}(B)}\Big) \cup \Big(\overline{u^{-1}(A)} \cap u^{-1}(B)\Big) \\ &= u^{-1}(A) \triangle u^{-1}(B). \end{aligned}$$

7.15 1. Soit A et A' deux parties de E. On a vu dans l'exercice 16 de la page 344 que, sans supposer u injective, on a :

$$u(A \cap A') \subset u(A) \cap u(A').$$

Supposons u injective et prouvons : $u(A) \cap u(A') \subset u(A \cap A')$.
Soit donc $y \in u(A) \cap u(A')$.

- Comme $y \in u(A)$, on peut trouver $x \in A$ tel que $y = u(x)$.
- Comme $y \in u(A')$, on peut trouver $x' \in A'$ tel que $y = u(x')$.

L'injectivité de u entraîne $x = x'$ et donc $y \in u(A) \cap u(A')$, ce qui termine la démonstration d'inclusion.

2. Montrons que la propriété donnée entraîne l'injectivité. Supposons donc :

$$\forall (A, A') \in \mathcal{P}(E)^2 \quad u(A \cap A') = u(A) \cap u(A')$$

et montrons que u est injective. Soit donc $x \in E$ et $x' \in E$ tels que $u(x) = u(x')$.
Posons $A = \{x\}$ et $A' = \{x'\}$. D'après l'hypothèse, on a :

$$\{u(x)\} = u(A) \cap u(A') = u(A \cap A').$$

Par suite, $\{x\} \cap \{x'\} = A \cap A'$ est non vide et on a donc $x = x'$, ce qui termine la démonstration d'injectivité de u.

7.16 Soit $\mathcal{R}$ définie par : $x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3\,(x - y)$.

- Il est évident que c'est une relation d'équivalence (sans la moindre factorisation).
- Classe d'un élément $a \in \mathbb{R}$, notée dans la suite $cl(a)$.
  On a $x \,\mathcal{R}\, a$ si, et seulement si, :

$$(x - a)\left(x^2 + a\,x + a^2 - 3\right) = 0$$

et donc si, et seulement si,

  * soit $x = a$;
  * soit $x^2 + a\,x + a^2 - 3 = 0$.

Étudions la seconde équation. Son discriminant Δ vaut :

$$\Delta = a^2 - 4\left(a^2 - 3\right) = 3\left(4 - a^2\right). \qquad (*)$$

Par suite

  * si $|a| > 2$, on a $cl(a) = \{a\}$ et donc $\operatorname{card} cl(a) = 1$.
  * si $|a| = 2$, alors l'équation $(*)$ possède une racine double $x = -\frac{a}{2}$ et donc $cl(a) = \{a, -\frac{a}{2}\}$; comme $a \neq 0$, on a donc $\operatorname{card} cl(a) = 2$.
  * si $|a| < 2|$, alors l'équation $(*)$ possède deux racines distinctes x_1 et x_2.
    Le réel a est l'une de ces racines si, et seulement si, $3\,a^2 - 3 = 0$ soit $a = \pm 1$.
    Donc si $|a| < 2$ et $|a| \neq 1$, alors $\operatorname{card} cl(a) = 3$;
    Lorsque $|a| = 1$, on peut vérifier que $cl(a)$ possède deux éléments.

Partie III

Analyse

Chapitre 8 : Nombres réels, suites numériques

I	**L'ensemble des nombres réels**	**393**
1	Propriété de la borne supérieure	393
2	Droite numérique achevée	396
3	Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$	396
4	Partie entière	397
5	Approximation par des nombres décimaux	399
6	Parties denses dans $\mathbb{R}$	399
II	**Généralités sur les suites réelles**	**400**
1	Définitions liées à la relation d'ordre	401
2	Suites extraites	402
3	À partir d'un certain rang	403
III	**Limite d'une suite réelle**	**403**
1	Suites convergentes	403
2	Propriétés des suites convergentes	406
3	Suites tendant vers l'infini	407
4	Limites et suites extraites	408
5	Caractère asymptotique de la notion de limite	409
IV	**Opérations sur les limites**	**409**
1	Produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0	409
2	Opérations sur les suites convergentes	410
3	Cas des limites infinies	410
4	Inverse et quotient	411
5	Passage à la limite dans les inégalités	413
6	Existence de limite par encadrement	413
V	**Résultats d'existence de limites**	**414**
1	Limites des suites monotones	414
2	Suites adjacentes, segments emboîtés	415
3	Théorème de Bolzano–Weierstrass	416
VI	**Intermède : comment démontrer la convergence d'une suite ?**	**417**
VII	**Traduction séquentielle de certaines propriétés**	**418**
1	Parties denses de $\mathbb{R}$	418
2	Caractérisation de la borne supérieure	418
3	Point adhérent	419

VIII Suites complexes **420**
1 Suites bornées 420
2 Suites convergentes 421
3 Suites extraites 422
4 Opérations sur les suites convergentes 423
5 En guise de conclusion 423
IX Suites récurrentes **424**
1 Cas particuliers 424
2 Suites récurrentes réelles $u_{n+1} = f(u_n)$ 425
3 Récurrence linéaire homogène d'ordre 2 427
X Relations de comparaison sur les suites **429**
1 Suites réelles équivalentes 429
2 Obtention d'équivalentes par composition de limites 431
3 Suite négligeable, suite dominée 433
4 Extension aux suites à valeurs complexes 437
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . **438**
Exercices **468**

Nombres réels, suites numériques

8

I L'ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels a été introduit au chapitre 1.

1 Propriété de la borne supérieure

Borne supérieure, borne inférieure

Définition 1

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- La **borne supérieure** de A est, s'il existe, le plus petit des majorants de A. Elle se note $\sup(A)$ ou $\sup A$.
- La **borne inférieure** de A est, s'il existe, le plus grand des minorants de A. Elle se note $\inf(A)$ ou $\inf A$.

Remarque

- L'unicité de la borne supérieure, lorsque celle-ci existe, est une conséquence de l'unicité du plus petit élément d'un ensemble (*cf.* page 354).
- De même, l'unicité de la borne inférieure, lorsque celle-ci existe, découle de l'unicité du plus grand élément d'un ensemble.

p.438

Exercice 1 Que pensez-vous de la borne supérieure des ensembles suivants :

$$A = \mathbb{R}_-^*, \quad B = [0,1], \quad C = [0,1[, \quad D = [0,1] \cup [2,3] \quad ?$$

p.438

Exercice 2 Soit A une partie de $\mathbb{R}$ qui admet un plus grand élément a.
Montrer que a est aussi la borne supérieure de A.

Attention Ne pas confondre plus grand élément et de borne supérieure :

- si une partie possède un plus grand élément, alors d'après l'exercice précédent, ce plus grand élément est également sa borne supérieure ;

- en revanche, un partie peut admettre une borne supérieure sans avoir de plus grand élément, comme c'est le cas de l'ensemble $[0,1[$, qui admet 1 comme borne supérieure, mais qui ne possède pas de plus grand élément.

Remarque Des considérations analogues à celles ci-dessus peuvent être faites à propos de la borne inférieure et du plus petit élément.

Nous admettons que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels possède la **propriété de la borne supérieure**, c'est-à-dire :

Théorème 1 (Propriété de la borne supérieure)

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

p.438

Exercice 3 *(Approfondissement)* Montrer que dans le théorème précédent, le deuxième point est une conséquence du premier.

p.438

Exercice 4 *(Existence d'au moins un irrationnel)*
Le but de l'exercice est d'utiliser la propriété de la borne supérieure pour montrer qu'il existe un nombre réel dont le carré vaut 2. D'après l'exercice 13 de la page 322, on sait alors qu'un tel nombre est irrationnel.

Soit $X = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x^2 \leqslant 2\right\}$.

1. Montrer que X possède une borne supérieure, notée a dans la suite.
2. Supposons $a^2 < 2$.
   (a) Vérifier que $\forall h \in [0,1] \quad (a+h)^2 \leqslant a^2 + 2a\,h + h$.
   (b) En déduire qu'en posant $h = \min\left(1, \dfrac{2-a^2}{2a+1}\right)$, on a $a + h \in X$.
   (c) Expliquer pourquoi on aboutit à une contradiction.
3. Supposons $a^2 > 2$.
   (a) Vérifier que $\forall h \in \mathbb{R} \quad (a-h)^2 \geqslant a^2 - 2a\,h$.
   (b) En posant $h = \min\left(a, \dfrac{a^2-2}{2a}\right)$, aboutir à une contradiction.
4. Conclure.

p.439

Exercice 5 *($\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure)*
On sait désormais que toute partie de $\mathbb{Q}$ non vide et majorée possède, en tant que partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Exhiber une partie non vide et majorée de $\mathbb{Q}$ dont la borne supérieure n'est pas dans $\mathbb{Q}$.

Proposition 2 (Caractérisation de la borne supérieure)

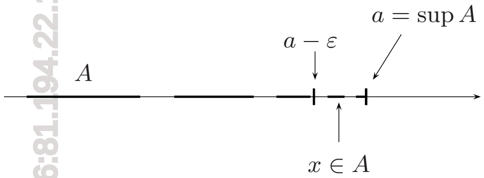
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors on a $a = \sup A$ si, et seulement si :

- a est un majorant de A, ce qui se traduit par : $\forall x \in A \quad x \leqslant a$;
- a est le plus petit majorant de A, ce qui se traduit ainsi :
$$\forall b < a \quad \exists x \in A \quad b < x,$$
ou encore ainsi :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad a - \varepsilon < x.$$

Démonstration. La seconde puce exprime le fait qu’un nombre strictement plus petit que a n’est pas majorant de A ; si l’on prend en compte la première puce, cela exprime bien le fait que a est le plus petit des majorants de A. □

Remarque

Le dessin suivant illustre le fait que, quel que soit ε strictement positif, on peut trouver un élément de A compris entre $a - \varepsilon$ et $\sup A$. D’autre part, il met en évidence qu’il peut exister des éléments n’appartenant pas à A et compris entre $a - \varepsilon$ et a.



p.439 **Exercice 6** *(Caractérisation de la borne inférieure)*
Donner une version de la proposition 2 pour la borne inférieure.

p.439 **Exercice 7** *(Résultat souvent utilisé en analyse)*

1. Quelle est la borne inférieure de $\mathbb{R}_+^*$?
2. En déduire que si un réel a vérifie $\forall \varepsilon > 0 \quad |a| \leqslant \varepsilon$, alors on a $a = 0$.

p.440 **Exercice 8** Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathbb{R}^X$, on pose (lorsque cela existe) :
$$\sup f = \sup f(X) = \sup\{f(x)\,;\; x \in X\}.$$

1. Pour $f \in \mathbb{R}^X$ et $g \in \mathbb{R}^X$ telles que $\sup f$ et $\sup g$ existent, établir :
$$\sup(f+g) \leqslant \sup f + \sup g.$$
2. Justifier qu’en général, on n’a pas : $\sup(f+g) = \sup f + \sup g$.

p.440 **Exercice 9** Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
On définit l’ensemble $A + B$ par :
$$A + B = \{x + y\,;\; x \in A,\; y \in B\}.$$
Montrer que l’ensemble $A + B$ est majoré et que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

2 Droite numérique achevée

Afin d'unifier certains énoncés, il est parfois pratique de disposer d'un ensemble qui contient non seulement tous les réels, mais également $-\infty$ et $+\infty$.

Définition 2

On appelle **droite numérique achevée** l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

On prolonge la relation d'ordre $\leqslant$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en convenant que :

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \quad x \leqslant +\infty \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \quad x \geqslant -\infty.$$

On prolonge partiellement à $\overline{\mathbb{R}}$ les opérations de $\mathbb{R}$, selon les tables suivantes :

$+$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x+y$	$+\infty$
$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$

$\times$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$x\,y$	0	$x\,y$	$-\infty$
0		0	0	0	
$x \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	$x\,y$	0	$x\,y$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$

où les cases vides correspondent à des cas où l'opération n'est pas définie.

3 Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

La propriété de la borne supérieure nous permet de démontrer la caractérisation suivante des intervalles de $\mathbb{R}$ (ceux-ci ont été décrits à la page 23).

Proposition 3

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties I de $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in I \quad \forall y \in I \quad [x,y] \subset I. \qquad (\star)$$

Principe de démonstration. Démonstration page 440

Il s'agit essentiellement de justifier que si une partie I de $\mathbb{R}$ vérifie la propriété $(\star)$, alors I est un intervalle, c'est-à-dire qu'en notant a et b les bornes de I (avec la possibilité que $a = -\infty$ et $b = +\infty$), alors I est de la forme (a,b), les parenthèses représentant une borne, ouverte ou fermée.

Remarque La propriété $(\star)$ signifie qu'étant donné deux points quelconques de I, le segment reliant ces deux points est inclus dans I.

4 Partie entière

Propriété d'Archimède

Proposition 4

L'ensemble $\mathbb{R}$ est **archimédien**, ce qui signifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n\,x \geqslant y.$$

Principe de démonstration. Raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'ensemble $\{nx\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ soit majoré.

Démonstration page 441

Corollaire 5

Étant donné deux réels x et y avec $x > 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \geqslant y$.

Principe de démonstration.

Démonstration page 441

Pour $x > 1$, écrire $x = 1+h$ avec $h > 0$, et utiliser la formule du binôme pour minorer $(1+h)^n$.

Partie entière

Proposition 6

Étant donné $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif n tel que :

$$n \leqslant x < n+1.$$

Cet unique entier relatif, appelé **partie entière de x**, est noté $\lfloor x \rfloor$.

Démonstration page 441

Notation

- Il peut arriver de croiser les notations $E(x)$ et $[x]$ pour désigner la partie entière de x. Ce sont d'anciennes notations, que nous n'utiliserons donc pas.
- On définit également la **partie entière par excès** de x, que l'on note $\lceil x \rceil$: c'est l'unique entier n vérifiant l'encadrement $n-1 < x \leqslant n$.
- Pour éviter les risques de confusion, la partie entière $\lfloor x \rfloor$ s'appelle parfois la **partie entière par défaut** de x.

p.442 **Exercice 10** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

Remarques

1. Dans la démonstration de la proposition 6 :
   - la partie « existence » s'appuie sur le fait que la partie entière de x n'est rien d'autre que le plus grand des nombres entiers qui lui sont inférieurs ;

- dans la partie « unicité », l'encadrement $n \leqslant x < n+1$ a été écrit sous la forme parfois utile suivante $x-1 < n \leqslant x$, qui mène à une autre caractérisation de la partie entière de x : c'est l'unique entier appartenant à l'intervalle $]x-1, x]$.

2. On dispose encore d'une autre caractérisation de la partie entière de x : c'est l'unique nombre entier n tel que x s'écrive $x = n+y$ avec $y \in [0,1[$.

3. En Python et Scilab, les fonctions `floor` et `ceil` désignent respectivement les fonctions partie entière par défaut et partie entière par excès.

p.442 **Exercice 11** Montrer que la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

p.442 **Exercice 12** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall p \in \mathbb{Z} \quad \lfloor x+p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.

p.442 **Exercice 13** Étant donné deux réels x et y, a-t-on toujours $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

Congruence modulo un réel

Proposition 7

Étant donné $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique entier relatif n tel que :

$$na \leqslant x < (n+1)a,$$

c'est-à-dire tel que $x = na + y$ avec $0 \leqslant y < a$.

Démonstration. Comme $a \in \mathbb{R}_+^*$, l'inégalité $na \leqslant x < (n+1)a$ s'écrit aussi :

$$n \leqslant \frac{x}{a} < n+1.$$

Il est alors clair que l'unique entier n qui convient est la partie entière de $\frac{x}{a}$. □

Remarque On rappelle (*cf.* page 55) que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la relation de congruence modulo a est la relation d'équivalence (*cf.* page 347) définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \equiv y\ [a] \iff (\exists n \in \mathbb{Z} \quad y = x + n\,a).$$

La proposition précédente signifie que pour tout réel x, il existe un unique réel $y \in [0,a[$ tel que $x \equiv y\ [a]$, ou encore que la classe d'équivalence de x possède un unique représentant dans l'intervalle $[0,a[$.

5 Approximation par des nombres décimaux

Proposition 8

Étant donné $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, le nombre décimal $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ vérifie :

$$r_n \leqslant x < r_n + \frac{1}{10^n}.$$

Ce nombre décimal r_n est appelé **approximation décimale par défaut** de x à la précision 10^{-n}.

Démonstration page 442

Remarque Avec les notations de la définition précédente, le nombre $r_n + \dfrac{1}{10^n}$ est appelé **approximation décimale par excès** de x à la précision 10^{-n}.

Exemple Voici un tableau donnant, pour quelques constantes usuelles, les valeurs décimales approchées à 10^{-3} près par défaut et par excès :

	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	π	e	$\ln(2)$
par défaut à 10^{-3} près	1,000	1,414	1,732	3,141	2,718	0,693
par excès à 10^{-3} près	1,001	1,415	1,733	3,142	2,719	0,694

6 Parties denses dans IR

Proposition 9

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout réel x et pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver au moins un élément de A dans l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$;

(ii) entre deux réels distincts il existe au moins un élément de A.

On dit alors que A est **dense** dans $\mathbb{R}$.

Démonstration page 442

Remarque De manière informelle, la caractère dense d'une partie A de $\mathbb{R}$ signifie qu'on peut approcher ou encadrer tout nombre réel par des éléments de A, de manière aussi précise que l'on veut.

Théorème 10

Les ensembles $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Principe de démonstration. On commence par montrer la densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$, en utilisant l'approximation par des décimaux. On en déduit ensuite celle de $\mathbb{Q}$, puis on montre celle de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en utilisant le fait que si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Démonstration page 443

Remarque Les propriétés de densité des ensembles $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ justifient donc le fait que :

- entre deux réels distincts on peut toujours trouver, au choix, au moins un décimal, un rationnel ou un irrationnel ;
- étant donné un réel x, on peut toujours trouver, au choix, un décimal, un rationnel ou un irrationnel, aussi proche que l'on veut de x.

p.443

Exercice 14 Montrer qu'étant donné deux réels distincts x et y, il existe, compris entre x et y :

- une infinité de décimaux ;
- une infinité de rationnels ;
- une infinité d'irrationnels.

II Généralités sur les suites réelles

Rappelons qu'une **suite à termes réels**, ou **suite réelle**, est une famille de nombres réels indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

- Traditionnellement, si u est une suite on utilise plutôt la notation indexée u_n à la place de $u(n)$ pour désigner l'image par u de l'entier n. La suite u est alors notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Le terme u_n est appelé **terme général** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque Pour des raisons d'économie d'écriture, il arrive parfois d'utiliser la notation (u_n) pour désigner la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il faut alors bien comprendre l'importance des parenthèses qui évitent la confusion entre la suite et son terme d'indice n. Nous éviterons au maximum cet abus de notation.
Par extension, nous appellerons aussi suite réelle une famille de réels indexée par $\mathbb{N}^*$, voire plus généralement par un intervalle d'entiers du type $[\![n_0, +\infty[\![$. Une suite u indexée par $[\![n_0, +\infty[\![$ sera notée $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Définition 3

On dit qu'une suite u est :

- **constante** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n$;
- **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang, *i.e.* :
$$\exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant p \quad u_{n+1} = u_n.$$

Opérations sur les suites

Les opérations sur les fonctions à valeurs réelles (*cf.* page 35) s'appliquent naturellement aux suites réelles. Ainsi, étant donné deux suites réelles u et v ainsi qu'un réel λ, on note $u+v$ (**somme** des suites u et v), λu (**multiplication** par le scalaire λ de la suite u) et uv (**produit** des suites u et v), les suites dont les termes généraux valent respectivement :

$$u_n + v_n, \quad \lambda u_n \quad \text{et} \quad u_n v_n.$$

1 Définitions liées à la relation d'ordre

Définition 4

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$,
- **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$,
- **bornée** si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant M$.

Remarques

1. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, elle est majorée et minorée.
3. Dans la définition d'une suite majorée, le « $\exists M \in \mathbb{R}$ » peut-être remplacé, au choix, par « $\exists M \in \mathbb{R}_+$ » ou « $\exists M > 0$ », sans changer le sens de la définition.

   En effet, si la propriété « $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$ » est vraie pour une valeur de M, alors elle est évidemment vraie pour toute valeur supérieure de M.

p.443

Exercice 15 Écrire en langage formel le fait qu'une suite u ne soit pas bornée.

p.443

Exercice 16

1. Montrer que la somme de deux suites majorées (respectivement minorées) est une suite majorée (respectivement minorée).
2. Montrer que le produit de deux suites bornées est une suite bornée.

Définition 5

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}$;
- **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leqslant u_n$;
- **strictement croissante** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1}$;
- **strictement décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$.

On dit qu'une suite est **monotone** si elle est croissante ou si elle est décroissante, et l'on dit qu'elle est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou si elle est strictement décroissante.

Exemples

1. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = 1/n$ est strictement décroissante.
2. L'opposée d'une suite croissante est une suite décroissante.
3. Les suites constantes sont les seules suites qui soient croissantes et décroissantes.
4. Si $a \in \mathbb{R}_+$, la suite définie par $u_n = a^n$ est monotone.
5. La suite de terme général $(-1)^n$ n'est pas monotone.
6. La somme de deux suites croissantes (respectivement le produit de deux suites croissantes positives) est une suite croissante.

p.444

Exercice 17 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = f(n)$.

1. Montrer que si f est monotone, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est également, et a même sens de monotonie que f.
2. La réciproque est-elle vraie ?

p.444

Exercice 18 Montrer que la suite de terme général $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ est croissante, mais qu'elle n'est pas strictement croissante.

p.444

Exercice 19 Une suite étant une application (en général de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$), on peut considérer une autre définition pour la croissance d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (*cf.* chapitre 1), à savoir :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad p \leqslant q \Longrightarrow u_p \leqslant u_q.$$

Vérifier la cohérence de ces deux définitions, *i.e.* qu'elles donnent les mêmes suites croissantes.

2 Suites extraites

Définition 6

Une suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **suite extraite** ou **sous-suite** d'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante* telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Exemples

1. La suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on les appelle respectivement **sous-suite des termes d'indices pairs** et **sous-suite des termes d'indices impairs**.

Remarque L'application φ de la définition précédente étant strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, une récurrence immédiate montre qu'elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) \geqslant n.$$

3 À partir d'un certain rang

La définition 3 de la page 400 a fait usage de la locution « à partir d'un certain rang » pour définir la notion de suite stationnaire. Cette locution est en fait utilisée dans de nombreuses situations : on dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une propriété à partir d'un certain rang s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ vérifie cette propriété.

Exemples

1. Dire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang signifie que :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \geqslant 0.$$
2. Dire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang signifie que :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant u_{n+1}.$$
3. Étant donné deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang pour signifier que :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant v_n.$$

p.445

Exercice 20 Montrer que si une suite est majorée à partir d'un certain rang, alors elle est tout simplement majorée.

III Limite d'une suite réelle

1 Suites convergentes

Définition 7

Étant donné une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers ℓ**, ou encore **converge vers ℓ**, si :

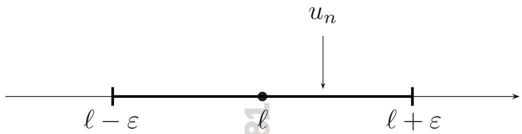
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Notation On écrit $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ pour dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le fait que c'est la variable n qui tend vers $+\infty$, on se permet d'utiliser la notation plus légère $u_n \to \ell$.

Remarque Il est important de bien comprendre la définition 7, et en particulier la phrase formelle définissant la convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ.

Décortiquons-la en partant de la fin.

- L'assertion $(|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$ signifie : « u_n est à une distance de ℓ inférieure ou égale à ε », ou encore $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$.



- L'assertion $(\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$ signifie : « à partir du rang n_0, tous les termes de la suite u sont à une distance de ℓ inférieure à ε ».
- L'assertion $(\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$ signifie : « il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite u sont à une distance de ℓ inférieure à ε », ou encore : « à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite u sont à une distance de ℓ inférieure à ε ».
- L'assertion complète $(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$ signifie donc : « pour toute valeur strictement positive ε, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont à une distance de ℓ inférieure à ε ».

  Une autre formulation, moins formelle, est la suivante : « en prenant n suffisamment grand, on peut rendre u_n aussi proche que l'on veut de ℓ ».

Exemples

1. La convergence vers 0 de la suite $u = (1/n)_{n \geqslant 1}$ est une conséquence de la propriété d'Archimède. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_0 tel que $n_0 \varepsilon \geqslant 1$, ou encore $\dfrac{1}{n_0} \leqslant \varepsilon$. Pour $n \geqslant n_0$, on a alors :
$$|u_n| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} \leqslant \varepsilon.$$
2. Si $|a| < 1$, la suite géométrique $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. En effet :
   - si $a = 0$, c'est évident puisque la suite est nulle à partir du rang 1,
   - si $a \neq 0$, on a $\dfrac{1}{|a|} > 1$ et, pour $\varepsilon > 0$ fixé, le corollaire 5 de la page 397 assure l'existence d'un entier n_0 tel que $\left(\dfrac{1}{|a|}\right)^{n_0} \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ et alors : $\forall n \geqslant n_0 \quad |a^n| \leqslant \varepsilon$.

Remarque Il découle de la définition 7 de la page précédente qu'étant donné une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un réel ℓ, il est équivalent de dire

- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ ;
- la suite de terme général $|u_n - \ell|$ tend vers 0.

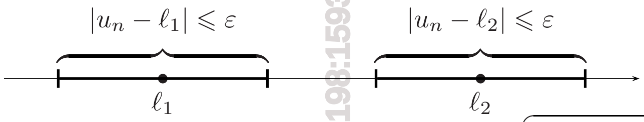
p.445

Exercice 21 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0.
Montrer qu'à partir d'un certain rang on a $|u_n^2| \leqslant |u_n|$.

Proposition 11 (Unicité de la limite)

Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux réels tels que $u_n \to \ell_1$ et $u_n \to \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Principe de démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant $\ell_1 \neq \ell_2$.
En prenant $\varepsilon = |\ell_1 - \ell_2|/3$, on constate que u_n ne peut pas être à la fois à une distance de ℓ_1 inférieure à ε et à une distance de ℓ_2 inférieure à ε :



Démonstration page 445

Étant donné une suite convergente $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la proposition précédente permet de parler de *la* limite d'une suite u.

Notation La limite de la suite u est notée $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, ou encore $\lim u$.

Définition 8

On dit qu'une suite réelle est **convergente** si elle admet une limite réelle. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est **divergente**.

Remarque Dire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente s'écrit donc :

$$\exists \ell \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Exemple

- Toute suite stationnaire est convergente, et sa limite est la valeur constante qu'elle prend à partir d'un certain rang.
- En revanche, la réciproque est fausse. Une suite peut être convergente sans être stationnaire, comme par exemple la suite de terme général $\dfrac{1}{n}$ qui converge (vers 0) mais qui n'est pas stationnaire.

p.445

Exercice 22 Montrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente.
Raisonner par l'absurde en la supposant convergente.

Proposition 12

Soit u une suite réelle et ℓ un réel. S'il existe une suite v convergeant vers 0 telle que $|u_n - \ell| \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors u converge vers ℓ.

Démonstration page 446

Point méthode

Pour démontrer qu'une suite u converge vers un réel ℓ, on peut donc commencer par considérer la quantité $|u_n - \ell|$ et essayer de la majorer par une suite qui tend vers 0.

Par exemple, la majoration $||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell|$ prouve le résultat suivant :

Proposition 13

Si une suite u converge vers ℓ, alors la suite $|u| = (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$.

p.446 **Exercice 23** Montrer que la réciproque du résultat précédent est fausse.

2 Propriétés des suites convergentes

Proposition 14

Toute suite convergente est bornée.

Principe de démonstration. Utiliser la définition de la convergence avec $\varepsilon = 1$.

Démonstration page 446

Exemples

1. La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente, car elle n'est pas bornée (du fait du caractère archimédien de $\mathbb{R}$).
2. La réciproque de la proposition précédente est fausse : par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ est bornée mais est non convergente.

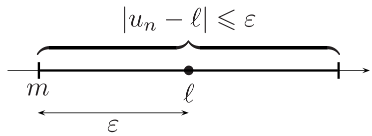
Proposition 15

Soit u est une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Si m est un réel vérifiant $m < \ell$, alors la suite u est minorée par m à partir d'un certain rang.

Principe de démonstration.

Démonstration page 446

En prenant n suffisamment grand, on peut rendre les termes de la suite aussi proches de ℓ qu'on veut, et en particulier à une distance inférieure à $\varepsilon = \ell - m$.



Attention Bien s'assurer, pour appliquer le résultat précédent, que l'inégalité $\ell > m$ soit stricte.

Corollaire 16

Si u est une suite convergeant vers une limite $\ell > 0$, alors il existe un réel $m > 0$ tel que la suite u soit minorée par m à partir d'un certain rang.

Démonstration page 446

Corollaire 17

Si u est une suite convergeant vers une limite $\ell \neq 0$, alors la suite $|u|$ est minorée, à partir d'un certain rang, par un réel strictement positif.

Démonstration page 446

Remarque Le résultat précédent assure que si une suite u converge vers une limite non nulle, alors, à partir d'un certain rang, elle ne s'annule plus. Cela permet alors, en notant n_0 un tel rang, de considérer la suite $(1/u_n)_{n \geqslant n_0}$. Ceci sera en particulier utilisé dans la proposition 26 de la page 411.

3 Suites tendant vers l'infini

Définition 9

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- **tend vers** $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \geqslant A\ ;$$

- **tend vers** $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant A.$$

De manière moins formelle, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si, en prenant n suffisamment grand, on peut rendre u_n aussi grand que l'on veut.

Remarque Il est facile de voir, d'après la définition, que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), alors :
- elle ne tend pas vers $-\infty$ (respectivement$+\infty$) ;
- elle n'est pas bornée, donc elle est non convergente.

La propriété d'unicité de la limite, déjà énoncée pour des limites réelles, s'étend donc aux limites infinies. D'où la notation suivante :

Notation Les notations déjà vues pour les suites convergentes s'utilisent également dans le cas des limites infinies :
- **cas** $+\infty$ **:** $\lim u = +\infty, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou encore $u_n \to +\infty$;
- **cas** $-\infty$ **:** $\lim u = -\infty, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou encore $u_n \to -\infty$.

Exemples
1. La suite de terme général $u_n = n$ tend vers $+\infty$ (prendre $n_0 = \lfloor A \rfloor + 1$).
2. Si $a > 1$, la suite $u_n = a^n$ tend vers $+\infty$. En effet le corollaire 5 de la page 397 permet d'affirmer que pour A fixé, il existe un entier n_0 tel que $a^{n_0} \geqslant A$. On a alors de façon évidente :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad a^n \geqslant a^{n_0} \geqslant A.$$

Remarque

Pour insister sur le fait qu'une suite tendant vers $+\infty$ (ou $-\infty$) n'est pas convergente, on préfère parfois dire qu'elle **diverge** vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$).

p.446

Exercice 24 En s'inspirant de la démonstration de la proposition 14 de la page 406, montrer que toute suite qui diverge vers $+\infty$ est minorée.

Remarques

- Une suite u tend vers $+\infty$ si, et seulement si, la suite $-u$ tend vers $-\infty$.
- Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ ou si elle tend vers $-\infty$, alors la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, mais la réciproque de ce résultat est fausse, comme le prouve l'exemple de la suite u de terme général $u_n = (-n)^n$.

4 Limites et suites extraites

Proposition 18 (Suite extraite d'une suite admettant une limite)

Si u est une suite tendant vers une limite, finie ou infinie, alors toute suite extraite de u tend vers la même limite.

Principe de démonstration. Démonstration page 446

Distinguer les cas, suivant que $\lim u \in \mathbb{R}$, $\lim u = +\infty$ ou $\lim u = -\infty$.

Penser à utiliser que, si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) \geqslant n$.

Remarque Le résultat précédent entraîne que toute suite extraite d'une suite convergente est convergente. Ainsi, pour montrer qu'une suite est divergente, il suffit d'en exhiber une sous-suite divergente.

Point méthode

La proposition précédente s'utilise également pour montrer qu'une suite n'admet pas de limite (finie ou infinie) : il suffit pour cela d'en exhiber deux sous-suites tendant vers des limites différentes.

Exemples

1. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite, car :
   - la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1, donc converge vers 1 ;
   - la sous-suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à -1, donc converge vers -1.
2. La suite définie par $u_n = \cos(n\pi/4)$ diverge puisque la sous-suite $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ a pour terme général $(-1)^n$ et donc est divergente.

Proposition 19

Si u est une suite telle que les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers une même limite (finie ou infinie), alors la suite u tend vers cette limite commune.

Principe de démonstration. Démonstration page 447

On se ramène à la définition, en distinguant les cas suivant que la limite est finie ou infinie.

5 Caractère asymptotique de la notion de limite

Rappelons (*cf.* page 403) que deux suites u et v sont égales à partir d'un certain rang si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n = v_n.$$

Proposition 20

Soit u et v deux suites égales à partir d'un certain rang. Si l'une des deux tend vers une limite ℓ, finie ou infinie, alors l'autre tend aussi vers ℓ.

Ce résultat, évident d'après les définitions, traduit ce que l'on appelle le *caractère asymptotique* de la notion de limite. Ainsi :

- savoir si une suite converge ou non ne donne aucune information sur les valeurs de ses premiers termes ;
- on peut modifier un nombre fini de termes d'une suite sans changer sa limite éventuelle ; c'est pourquoi, dans la suite de ce chapitre, la plupart des résultats énoncés s'appuieront sur des propriétés vraies à partir d'un certain rang ; c'était d'ailleurs déjà le cas de la proposition 12 de la page 405.

IV Opérations sur les limites

Cette section regroupe des résultats permettant de prouver l'existence de la limite d'une suite et/ou de déterminer sa limite *sans avoir besoin de revenir à la définition de la limite* (techniquement plus difficile à manipuler).

1 Produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0

Proposition 21

Le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0 est une suite qui tend vers 0.

Principe de démonstration. Commencer par exhiber un majorant M de $|v|$, puis pour $\varepsilon > 0$, utiliser la définition 7 de la page 403 avec $\dfrac{\varepsilon}{M}\cdot$ Démonstration page 447

2 Opérations sur les suites convergentes

Lemme 22

Si deux suites qui convergent vers 0, alors leur somme converge aussi vers 0.

Principe de démonstration. On majore $|u_n + v_n|$ avec l'inégalité triangulaire, et on rend $|u_n|$ et $|v_n|$ inférieurs à $\frac{\varepsilon}{2}\cdot$

Démonstration page 448

Proposition 23

Soit u et v deux suites convergeant respectivement vers des réels ℓ_1 et ℓ_2. Si λ et μ sont deux réels, alors les suites $\lambda\, u + \mu\, v$ et $u\, v$ convergent respectivement vers $\lambda\, \ell_1 + \mu\, \ell_2$ et $\ell_1\, \ell_2$.

Démonstration page 448

p.448 **Exercice 25** Soit u une suite convergente. Montrer que $u_{n+1} - u_n \to 0$.

Attention La proposition précédente ne traite que de la situation où les deux suites u et v sont convergentes.

p.448 **Exercice 26** Montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.

p.448 **Exercice 27** Trouver deux suites divergentes dont la somme est une suite convergente et dont le produit est une suite convergente.

3 Cas des limites infinies

Proposition 24

Soit u une suite tendant vers $+\infty$.

1. Si v est une suite minorée, alors la suite $u + v$ tend vers $+\infty$.
2. Si v est une suite minorée à partir d'un certain rang par un nombre strictement positif, alors la suite $u\, v$ tend vers $+\infty$.

Principe de démonstration. Revenir à la définition.

Démonstration page 449

La proposition suivante utilise l'extension à $\overline{\mathbb{R}}$ des opérations usuelles sur $\mathbb{R}$, faite page 396.

Proposition 25

Soient u et v deux suites réelles admettant des limites ℓ_1 et ℓ_2 dans $\overline{\mathbb{R}}$.

- Si $\ell_1 + \ell_2$ est défini dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors on a $\lim(u+v) = \ell_1 + \ell_2$.
- Si $\ell_1\,\ell_2$ est défini dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors on a $\lim(u\,v) = \ell_1\,\ell_2$.

Démonstration page 449

p.449 **Exercice 28** Déterminer la limite de la suite u de terme général $\left(\frac{1}{n} - 1\right) n^2$.

p.450 **Exercice 29** Déterminer la limite de la suite u de terme général $\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2$.

Attention Les résultats précédents ne disent rien :

- de la somme de deux suites qui tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$;
- du produit d'une suite tendant vers $+\infty$ et d'une suite convergeant vers 0.

En fait, dans ces situations, il se peut qu'il y ait une limite, finie ou infinie, mais il se peut aussi qu'il n'y en ait pas.

p.450 **Exercice 30** Dans chacun des cas suivants, déterminer des suites u et v vérifiant la propriété souhaitée :

1. $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $u+v$ converge ;
2. $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $u+v$ diverge ;
3. $\lim u = +\infty$, $\lim v = 0$ et $u\,v$ converge ;
4. $\lim u = +\infty$, $\lim v = 0$ et $u\,v$ diverge.

4 Inverse et quotient

Proposition 26

Soit u une suite convergeant vers une limite $\ell \neq 0$. Alors à partir d'un certain rang n_0 tous les u_n sont non nuls, et la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geqslant n_0}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

Principe de démonstration. Pour la convergence, on écrit $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|\ell|\,|u_n|}$, que l'on majore en majorant le numérateur et en minorant le dénominateur. Démonstration page 450

Proposition 27

Soit u une suite divergeant vers $+\infty$. Alors à partir d'un certain rang n_0 tous les u_n sont strictement positifs, et la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0.

Principe de démonstration. Revenir à la définition de la convergence d'une suite vers 0.

Démonstration page 450

Proposition 28

Soit u une suite convergeant vers 0 dont *tous les termes sont strictement positifs* à partir d'un certain rang n_0. Alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ tend vers $+\infty$.

Principe de démonstration. Revenir à la définition de la divergence d'une suite vers $+\infty$.

Démonstration page 450

Remarque Étant donné une suite u, en appliquant les résultats précédents à la suite $-u$, on obtient :

- si u diverge vers $-\infty$, alors à partir d'un rang n_0 tous les u_n sont strictement négatifs, et la suite $(1/u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0 ;
- si u converge vers 0 et si tous les termes u_n sont strictement négatifs à partir d'un certain rang n_0, alors la suite $(1/u_n)_{n\geqslant n_0}$ tend vers $-\infty$.

Attention

- L'inverse d'une suite à termes non nuls convergeant vers 0 peut très bien ne tendre ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$, comme le prouve l'exemple de la suite de terme général $(-1)^n/n$.
- En revanche, si $\lim u = 0$ et si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq 0$, alors $|u|$ est une suite à termes strictement positifs qui converge vers 0, et donc $\lim 1/|u| = +\infty$.

Point méthode

Pour étudier la convergence d'une suite dont le terme général est un quotient de la forme $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, en écrivant $u_n = a_n \times \dfrac{1}{b_n}$, on se ramène à utiliser les résultats sur l'inverse et le produit.

p.451 **Exercice 31** Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \dfrac{2n^2 - \sin n}{\cos n - 3n^2}\cdot$

5 Passage à la limite dans les inégalités

Proposition 29

Soit u une suite positive à partir d'un certain rang.
Si u converge, alors on a $\lim u \geqslant 0$.

Principe de démonstration. On utilise le fait que $u_n = |u_n|$ à partir d'un certain rang.

Démonstration page 451

Corollaire 30 (Passage à la limite dans une inégalité)

Soit u et v deux suites *convergentes* telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors on a $\lim u \leqslant \lim v$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la suite $w = v - u$. □

Attention On ne peut pas affiner le résultat précédent en utilisant des inégalité stricte. Par exemple, la suite de terme général $1/n$ est à termes strictement positifs, elle converge, mais sa limite n'est pas strictement positive.

Remarques

- Si u est une suite convergente dont on souhaite montrer que la limite est strictement positive, alors, d'après le corollaire 30, il suffit de chercher un réel $m > 0$ tel que $u_n \geqslant m$ à partir d'un certain rang.
- Si u est une suite croissante convergente dont au moins un terme est strictement positif, alors sa limite est strictement positive.
  En effet, si $n_0 \in \mathbb{N}$ est tel que $u_{n_0} > 0$, alors on a :
  $$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n \geqslant u_{n_0}.$$
  En passant à la limite (*cf.* corollaire 30), on obtient alors $\lim u \geqslant u_{n_0} > 0$.

6 Existence de limite par encadrement

Théorème 31 (Théorème d'encadrement)

Soit u et w deux suites convergeant vers une limite commune ℓ. Si v est une suite vérifiant l'encadrement $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang, alors v converge et sa limite vaut ℓ.

Principe de démonstration. On écrit $v = u + (v - u)$ et on montre que $v - u$ tend vers 0.

Démonstration page 451

Remarque Il faut bien comprendre la différence de nature qu'il y a entre le théorème 31 et le corollaire 30 :

- lors d'un passage à la limite dans une inégalité (corollaire 30), toutes les suites intervenant sont déjà supposées convergentes ;

- dans une convergence par encadrement (théorème 31 de la page précédente), la suite que l'on encadre n'est pas supposée convergente, et c'est dans la conclusion du théorème qu'on obtient sa convergence.

p.451 **Exercice 32** Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}$ converge, et déterminer sa limite.

La proposition suivante est la version « limites infinies » du théorème 31. Pour conclure, il suffit alors de disposer d'une minoration ou une majoration. Cette proposition s'obtient immédiatement en revenant aux définitions.

Proposition 32

Soit u et v deux suites vérifiant $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

1. Si $\lim u = +\infty$, alors $\lim v = +\infty$.
2. Si $\lim v = -\infty$, alors $\lim u = -\infty$.

V Résultats d'existence de limites

1 Limites des suites monotones

Théorème 33 (Théorème de la limite monotone)

Soit u une suite croissante.

1. Si elle est majorée, alors elle converge vers $\ell = \sup\{u_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si elle n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

Principe de démonstration. Pour le premier point, se ramener à la définition de la convergence, et utiliser la caractérisation de la borne supérieure. Démonstration page 452

Remarques

- Toute suite croissante admet donc une limite (finie ou égale à $+\infty$).
- Lorsque l'on a majoré une suite croissante, on a non seulement montré sa convergence, mais aussi trouvé un majorant de sa limite, puisque celle-ci est le plus petit de ses majorants.
- Si l'on sait qu'une suite croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors on peut affirmer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant \ell$.

p.452

Exercice 33 Soit u la suite de terme général $u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$.

1. Montrer que $\forall p \geqslant 1 \quad \frac{1}{p!} \leqslant \frac{1}{2^{p-1}}$.
2. En déduire que u est majorée par 3 et qu'elle converge vers une limite $\ell \leqslant 3$.

En appliquant le théorème de la limite monotone à la suite $-u$, on obtient le résultat suivant concernant les suites décroissantes :

Corollaire 34

Soit u une suite décroissante.

1. Si elle est minorée, elle converge vers $\ell = \inf \{u_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si elle n'est pas minorée, elle tend vers $-\infty$.

2 Suites adjacentes, segments emboîtés

Définition 10

On dit que deux suites sont **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si leur différence tend vers 0.

Théorème 35 (Théorème des suites adjacentes)

Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent vers une limite commune.

Principe de démonstration. En supposant u croissante et v décroissante, commencer par prouver que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n$.

Démonstration page 452

Remarque D'après la démonstration du théorème précédent, si u et v sont deux suites adjacentes, u étant croissante et v décroissante, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n.$$

De plus, si ℓ désigne la limite commune des deux suites, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

p.453

Exercice 34 Montrer que les deux suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

sont adjacentes, et donc convergentes.

p.453 **Exercice 35** On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p+1}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la suite u est convergente.

Remarque Quand on obtient la convergence d'une suite en montrant que les deux sous-suites $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, on a de façon naturelle un encadrement de la limite par deux termes consécutifs de la suite. Ainsi, dans l'exercice précédent, on peut affirmer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{2n+1} \leqslant \ell \leqslant u_{2n}.$$

Corollaire 36 (Théorème des segments emboîtés)

Si $\left([a_n, b_n]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de segments non vides dont les longueurs tendent vers 0, alors l'ensemble $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ est un singleton (c'est-à-dire un ensemble contenant un seul élément).

Remarque. La décroissance au sens de l'inclusion de la suite $\left([a_n, b_n]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n].$$

Principe de démonstration. Démonstration page 453

Commencer par constater que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Remarque La limite commune ℓ de deux suites adjacentes u et v, respectivement croissante et décroissante, est donc l'unique élément de $\mathbb{R}$ appartenant à $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [u_n, v_n]$, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

3 Théorème de Bolzano–Weierstrass

Théorème 37

Toute suite bornée possède au moins une sous-suite convergente.

Démonstration (non exigible) page 454

Remarque Le résultat précédent permet par exemple de dire qu'une suite comme la suite de terme général $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ possède au moins une sous-suite convergente. En revanche il ne donne aucune méthode pratique pour trouver une telle sous-suite ou sa limite ; il sert surtout dans des démonstrations théoriques.

VI Intermède : comment démontrer la convergence d'une suite ?

Pratiquement, comment faire ?

- Tout d'abord, on peut essayer d'utiliser les théorèmes généraux concernant les opérations (somme, produit, quotient). Lorsque cela est possible, on obtient la convergence ainsi que la limite de la suite (voir par exemple, les exercices 28, 29 et 31 page 411 et suivantes).

- Sinon, si la question est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ donné à l'avance, ou que l'on peut deviner, alors on essaie de majorer $|u_n - \ell|$:

  * par une suite qui tend vers 0 si l'on peut, pour pouvoir appliquer la proposition 12 de la page 405,
  * ou, en dernier recours, pour revenir à la définition et montrer :

  $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

  Remarque Le lecteur attentif, aura remarqué que nous n'avons pas traité d'exemple où l'on revient à la définition de la limite. En fait, il est rare dans un exercice que l'on soit confronté à ce genre de cas, qui sont les plus difficiles (voir les exercices 8.21 et 8.20)

- Lorsque l'on veut seulement démontrer que la suite converge, sans avoir à déterminer sa limite et/ou sans avoir d'idée de la valeur de cette limite, alors on peut utiliser les théorèmes d'existence de limite : théorèmes de la limite monotone et des suites adjacentes (voir par exemple les exercices 33, 34 et 35 page 415 et suivantes).

  On verra dans le chapitre sur les séries numériques une autre méthode permettant de montrer la convergence d'une suite (*cf.* la proposition 4 de la page 781).

Point méthode

La première question à se poser est donc : doit-on démontrer :

- « que la suite converge vers … »,
- ou « que la suite est convergente » ?

Si, dans le deuxième cas, on arrive à « deviner » la limite (et les moyens informatiques peuvent parfois nous aider grâce à une simulation numérique), alors on se ramène au premier cas.

VII Traduction séquentielle de certaines propriétés

1 Parties denses de $\mathbb{R}$

La notion de partie dense a été définie à la proposition 9 de la page 399.

Proposition 38

Une partie de A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout réel x, on peut trouver une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Démonstration page 454

On a vu que les ensembles $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. D'après la proposition 38 cela signifie que, pour tout réel x, on peut trouver :

- une suite de nombres rationnels qui converge vers x ;
- une suite de nombre décimaux qui converge vers x ;
- une suite de nombres irrationnels qui converge vers x.

Remarque Étant donné un réel x, on peut construire de manière explicite deux suites de nombres décimaux qui convergent vers x. En effet, si u et v sont les suites définies par :

- $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n\, x \rfloor}{10^n}$ (la valeur décimale approchée à 10^{-n} près par défaut de x),
- $v_n = u_n + \dfrac{1}{10^n}$ (la valeur décimale approchée à 10^{-n} près par excès de x),

alors les suites u et v sont adjacentes et convergent vers x.

p.455 **Exercice 36** Démontrer le résultat annoncé par la remarque précédente.

2 Caractérisation de la borne supérieure

On dispose d'une caractérisation séquentielle de la borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$. Celle-ci se révèle utile dans la pratique, car souvent plus simple à manipuler que la caractérisation donnée par la proposition 2 de la page 395.

Proposition 39

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie majorée ainsi que s un majorant de A.
On a $s = \sup A$ si, et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers s.

Démonstration page 455

Exemple Étant donné une fonction f définie sur une partie non vide X de $\mathbb{R}$, si f est majorée, alors on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \sup f.$$

- En effet, $\sup f$ est par définition la borne supérieure de l'ensemble $f(X)$. Par caractérisation de la borne supérieure, on peut donc trouver une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $f(X)$ qui converge vers $\sup f$.
- Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $y_n \in f(X)$, on peut trouver $x_n \in X$ tel que $y_n = f(x_n)$, et ainsi construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convient.

3 Point adhérent

Définition 11

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et x un réel. On dit que x est **adhérent** à A s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

p.456 **Exercice 37** Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et x un réel. Montrer que x est adhérent à A si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad |a - x| < \varepsilon.$$

De manière intuitive, un réel x est adhérent à un ensemble A si l'on peut approcher x d'aussi près que l'on veut par des éléments de A, c'est-à-dire trouver des éléments de A aussi proches qu'on veut de x.

Remarque Tout point a d'une partie A est évidemment adhérent à A, car il suffit de considérer la suite constante égale à a.

Exemple Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on obtient que tout nombre réel est adhérent à $\mathbb{Q}$. De même, tout réel est adhérent à $\mathbb{D}$ et à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

p.456 **Exercice 38** Déterminer l'ensemble des points adhérents à $A =]0,1[\cup]1,2[$.

p.456 **Exercice 39** *(Résultat souvent utilisé en analyse)*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et a un point de I.
Montrer que a est adhérent à $I \setminus \{a\}$.

VIII Suites complexes

On appelle **suite à termes complexes** ou **suite complexe** toute famille de nombres complexes indexée par $\mathbb{N}$, c'est à dire toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 12

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe, on définit :

- la **partie réelle** de u, notée $\operatorname{Re} u$, la suite de terme général $\operatorname{Re} u_n$;
- la **partie imaginaire** de u, notée $\operatorname{Im} u$, la suite de terme général $\operatorname{Im} u_n$;
- la suite **conjuguée de u**, notée $\overline{u}$, la suite de terme général $\overline{u_n}$;
- la suite **module de u**, notée $|u|$, la suite de terme général $|u_n|$.

Remarque De même que pour les suites réelles, si u et v sont deux suites complexes et λ un nombre complexe, on note $u+v$, λu et uv les suites de termes généraux :

$$u_n + v_n, \quad \lambda u_n \quad \text{et} \quad u_n v_n.$$

1 Suites bornées

Définition 13

On dit qu'une suite complexe $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si la suite réelle $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, c'est-à-dire si :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant M.$$

Remarque On peut parler d'une suite complexe bornée. En revanche, la notion de suite complexe majorée (ou minorée) n'a pas de sens, du fait de l'absence de relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{C}$.

Proposition 40

Étant donné une suite complexe $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est équivalent de dire que la suite u est bornée ou que les suites $\operatorname{Re} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont bornées.

Démonstration page 456

Proposition 41

1. La somme de deux suites bornées est une suite bornée.
2. Le produit de deux suites bornées est une suite bornée
3. Le produit d'une suite bornée par une constante est une suite bornée

Principe de démonstration. On se ramène aux résultats correspondants sur les suites à valeurs réelles (*cf.* exercice 16 de la page 401). Démonstration page 456

2 Suites convergentes

La définition de la convergence d'une suite complexe s'écrit comme celle d'une suite réelle, en remplaçant, naturellement, les valeurs absolues par des modules.

Définition 14

Étant donné une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un nombre complexe λ, on dit que u **converge** vers λ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque Ainsi, la suite complexe u converge vers λ si, et seulement si, la suite réelle $(|u_n - \lambda|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition 42 (Unicité de la limite)

Si la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ et vers λ', alors $\lambda = \lambda'$.

Démonstration. L'inégalité triangulaire permet, pour tout n, d'écrire :

$$0 \leqslant \left|\lambda - \lambda'\right| \leqslant |\lambda - u_n| + \left|u_n - \lambda'\right|.$$

Par passage à la limite (sur des suites à termes réels), on déduit alors $0 \leqslant |\lambda - \lambda'| \leqslant 0$, et donc $\lambda = \lambda'$. □

Définition 15

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

- Lorsqu'il existe un complexe λ vers lequel la suite u converge, on dit que u est une suite **convergente**. Ce complexe (unique) s'appelle alors la **limite** de u et se note $\lim u$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
- Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Remarque Vu l'absence de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$, on ne définit pas, pour les suites complexes, de notion de limite infinie.

p.457 **Exercice 40** Montrer que la suite définie par $u_n = \dfrac{(1+i)^n}{2^n}$ converge vers 0.

La proposition suivante permet de ramener l'étude de la convergence d'une suite complexe à l'étude de celle de ses parties réelle et imaginaire :

Proposition 43

Étant donné u une suite et λ un nombre complexe, il est équivalent de dire :

(i) la suite u converge vers λ ;

(ii) les suites $\operatorname{Re} u$ et $\operatorname{Im} u$ convergent respectivement vers $\operatorname{Re}\lambda$ et $\operatorname{Im}\lambda$.

Démonstration page 457

p.457

Exercice 41 Établir la convergence de la suite définie par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \left(2 + \frac{1}{n}\right) i.$$

p.457

Exercice 42 Étudier la convergence de la suite définie par $u_n = 1 + n\,i$.

Proposition 44

Si u est une suite convergeant vers λ, alors la suite $|u|$ converge vers $|\lambda|$.

Démonstration. Evident en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$0 \leqslant \Big| |u_n| - |\lambda| \Big| \leqslant |u_n - \lambda|$$

et le théorème de convergence par encadrement (théorème 31 de la page 413). □

Corollaire 45

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit u une suite convergeant vers λ. D'après la proposition précédente, la suite réelle $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\lambda|$; elle est donc bornée, ce qui est équivalent à dire que la suite u est bornée. □

p.457

Exercice 43 Soit $k \in \mathbb{C}$ tel que $|k| \neq 1$.

Étudier la convergence de la suite géométrique $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 46

Si u est une suite convergeant vers λ, alors la suite $\overline{u}$ converge vers $\overline{\lambda}$.

Démonstration. Évident car $|\overline{u_n} - \overline{\lambda}| = |u_n - \lambda|$. □

3 Suites extraites

Définition 16

Une suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **suite extraite**, ou **sous-suite**, d'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une applications φ, strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Proposition 47

Si v est extraite d'une suite u convergeant vers λ, alors v converge vers λ.

Démonstration page 457

Remarque Comme pour les suites à termes réels, on utilise surtout le résultat précédent pour démontrer qu'une suite à termes complexes n'est pas convergente en exhibant deux sous-suites convergeant vers des limites différentes.

p.457

Exercice 44 Montrer que la suite donnée par $u_n = \exp\left(n\,i\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ne converge pas.

Proposition 48 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

Toute suite bornée possède au moins une sous-suite convergente.

Démonstration (non exigible) page 457

4 Opérations sur les suites convergentes

Proposition 49

Soit u et v deux suites convergentes de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et k une constante complexe.

1. La suite $u+v$ converge vers $\lim u + \lim v$.
2. La suite $u\,v$ converge vers $\lim u \times \lim v$.
3. La suite $k\,u$ converge vers $k \times \lim u$.

Démonstration page 458

p.458

Exercice 45 Soit $k \neq 1$ un nombre complexe de module 1.
Montrer par l'absurde que la suite de terme général $u_n = k^n$ est divergente.

p.458

Exercice 46 Étant donné $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos k\theta}{2^k}\cdot$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et en déterminer la limite.

Proposition 50

Si u est une suite convergeant vers une limite non nulle, alors :

1. à partir d'un certain rang n_0, tous les u_n sont non nuls ;
2. on a $\lim \left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant n_0} = \dfrac{1}{\lim u}\cdot$

Principe de démonstration.

Démonstration page 458

Pour le second point, exprimer $\dfrac{1}{u_n}$ à l'aide de $\overline{u_n}$ et $|u_n|^2$.

5 En guise de conclusion

Pour résumer, on peut garder à l'esprit qu'une bonne partie des notions et propriétés valables sur les suites réelles se généralisent aux suites complexes, sauf celles qui font intervenir la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, à propos d'une suite complexe, on n'utilisera surtout pas :

- la notion de suite monotone ;
- la notion de suite majorée et/ou minorée ;
- la notion de suite divergeant vers $+\infty$ ou $-\infty$;
- le théorème d'encadrement ;
- les suites adjacentes.

IX Suites récurrentes

1 Cas particuliers

Les exercices suivants concernent les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques. Les suites considérées ici sont à valeurs complexes.

p.459

Exercice 47 Soit $r \in \mathbb{C}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

Une telle suite est dite **suite arithmétique de raison $\boldsymbol{r}$**.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de u_n en fonction de u_0, r et n.
2. Discuter, suivant les valeurs de r, la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

p.459

Exercice 48 Soit $a \in \mathbb{C}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = a\, u_n.$$

Une telle suite est dite **suite géométrique de raison $\boldsymbol{a}$.**

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de u_n en fonction de u_0, a et n.
2. Discuter, suivant les valeurs du premier terme u_0 et de a, la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

p.460

Exercice 49 Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq 1$, ainsi que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

Une telle suite est dite **suite arithmético-géométrique.**

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il n'y a qu'une seule limite possible ℓ (dont on donnera l'expression en fonction de a et b).
2. Montrer que la suite de terme général $u_n - \ell$ est géométrique ; en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Donner l'expression de u_n en fonction de u_0, a, b et n.

Point méthode

Pour étudier une suite arithmético-géométrique, on commence par chercher l'unique scalaire ℓ vérifiant $\ell = a\ell + b$, puis on étudie la suite de terme général $u_n - \ell$ (qui est facile à étudier car elle est géométrique).

2 Suites récurrentes réelles $u_{n+1} = f(u_n)$

Nous introduisons ici les suites récurrentes d'ordre 1. La convergence de ces suites sera étudiée en détail aux chapitres 9 et 10 (pages 492 et 568 respectivement).

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **récurrente d'ordre 1** si elle vérifie une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

où f est une fonction réelle d'une variable réelle. Une telle suite est donc définie par la fonction f ainsi que son premier terme u_0. On obtient alors les termes de la suites en prenant les images successives de u_0 par f :

$$u_1 = f(u_0), \quad u_2 = f(u_1) = f(f(u_0)) = (f \circ f)(u_0), \ldots$$

Remarque Pour qu'une telle suite soit bien définie, il est nécessaire que tous ses termes appartiennent à l'ensemble de définition de la fonction f.

Distinguons deux situations :

- *première situation :* lors de l'étude d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on montre qu'il existe une fonction f vérifiant $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$; la suite étudiée est alors récurrente d'ordre 1 ;
- *seconde situation :* étant donné une fonction f et un réel a, on souhaite considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

Autant la première situation ne soulève pas de difficulté particulière, autant la seconde en soulève : est-on assuré de l'existence et de l'unicité d'une telle suite ? Pour répondre à ce problème, nous nous en remettons à la proposition suivante (que nous admettons) :

Proposition 51

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et $X \subset D$ une partie **stable** par f, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall x \in X \quad f(x) \in X.$$

Si $a \in X$, alors il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_0 = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Point méthode

Pour démontrer l'existence et l'unicité d'une suite récurrente d'ordre 1, on utilise la proposition précédente. Cela revient concrètement à trouver un ensemble stable par f contenant le premier terme de la suite.

p.460 **Exercice 50** Justifier l'existence et l'unicité d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \ln(1 + u_n).$$

p.460 **Exercice 51** Est-il correct de définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \ln u_n \ ?$$

Cas où la fonction f est monotone

Dans le cas où la fonction f est monotone, on peut en déduire des informations de monotonie sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est l'objet de l'exercice suivant.

p.460 **Exercice 52** Soit $f : X \to X$ une fonction. Pour $a \in X$, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que si f est croissante, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
2. Montrer que si f est décroissante, alors les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de sens de monotonie opposés.

Construction graphique

Disposant du graphe de la fonction f ainsi que du premier terme u_0 reporté sur l'axe des abscisses, c'est-à-dire le point de coordonnées $(u_0, 0)$, il est possible de construire graphiquement les différents termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour construire par exemple le point $(u_1, 0)$, on peut procéder ainsi :

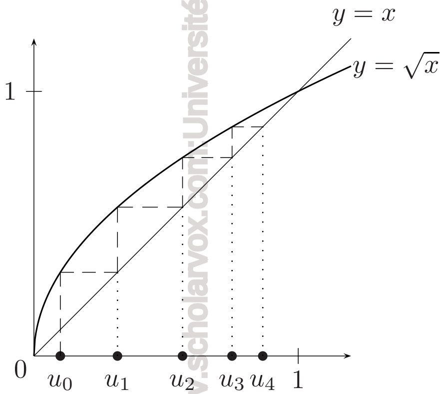
- on construit le point $(u_0, u_1) = \big(u_0, f(u_0)\big)$, comme intersection de la droite d'équation $x = u_0$ avec la courbe de f ;
- on construit le point (u_1, u_1), comme intersection de la droite d'équation $y = u_1$ avec la première bissectrice ;
- le point $(u_1, 0)$ s'obtient alors comme intersection de la droite d'équation $x = u_1$ avec l'axe des abscisses.

En réitérant le processus, on peut construire le point $(u_2, 0)$, etc.

Exemple Si l'on met en oeuvre ce qui précède dans le cas de la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{10} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n},$$

on obtient la construction suivante :



Une telle construction est souvent utile car elle permet de prédire le comportement de la suite (en particulier, ses propriétés de monotonie et de convergence). Évidemment, un dessin n'étant pas une preuve, il reste alors à prouver ce qu'on l'on a observé.

3 Récurrence linéaire homogène d'ordre 2

On appelle **suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants** une suite, réelle ou complexe, vérifiant une relation de récurrence de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n, \tag{$\star$}$$

où a et b sont des constantes (réelles ou complexes), avec $b \neq 0$.

p.461 **Exercice 53** Montrer que si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites vérifiant la relation $(\star)$ et si λ et μ sont deux complexes, alors la suite de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ vérifie également la relation $(\star)$.

p.461 **Exercice 54** Montrer que si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites vérifiant la relation $(\star)$ et telles que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$, alors on a $u = v$.

D'après l'exercice précédent, une suite vérifiant la relation $(\star)$ est entièrement déterminée par ses deux premiers termes. En fait, nous savons décrire de manière explicite quelles sont les suites vérifiant $(\star)$, et c'est l'objet de ce qui suit.

p.461 **Exercice 55** Étant donné $r \in \mathbb{C}^*$, donner une condition nécessaire et suffisante sur r pour que la suite géométrique $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation $(\star)$.

L'équation suivante est appelée **équation caractéristique** de la relation $(\star)$:

$$(E_c) \; : \; x^2 - a\,x - b = 0.$$

Remarques

1. L'hypothèse $b \neq 0$ assure que 0 n'est pas solution de (E_c).
2. L'exercice 55 nous indique un lien direct entre l'équation caractéristique et les suites vérifiant la relation $(\star)$: la suite géométrique de terme général r^n vérifiant $(\star)$ si, et seulement si, r est solution de (E_c).

Proposition 52 (Cas complexe)

On distingue deux cas.

(*i*) Si l'équation caractéristique possède deux solutions distinctes r_1 et r_2, alors les suites complexes vérifiant la relation $(\star)$ sont les suites de terme général :
$$\lambda_1\, r_1^n + \lambda_2\, r_2^n \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

(*ii*) Sinon, alors l'équation caractéristique possède une solution double r ; les suites complexes vérifiant la relation $(\star)$ sont alors les suites de terme général :
$$\lambda_1\, r^n + \lambda_2\, n\, r^n \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Principe de démonstration. On vérifie que les suites proposées conviennent. Ensuite, pour montrer qu'il n'y en a pas d'autres, penser à utiliser le fait qu'une suite vérifiant $(\star)$ est caractérisée par ses deux premiers termes (*cf.* exercice 54). Démonstration page 461

Dans le cas où a et b sont des nombres réels, il est légitime de ne pas chercher toutes les suites complexes vérifiant $(\star)$, mais de rechercher seulement les suites réelles. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 53 (Cas réel)

On suppose ici que a et b sont réels. On distingue trois cas, suivant le nombre de solutions réelles de l'équation caractéristique.

(*i*) Si l'équation caractéristique possède deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors les suites réelles vérifiant la relation $(\star)$ sont les suites de terme général :
$$\lambda_1\, r_1^n + \lambda_2\, r_2^n \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

(*ii*) Si l'équation caractéristique possède une solution double r, alors les suites réelles vérifiant la relation $(\star)$ sont les suites de terme général :
$$\lambda_1\, r^n + \lambda_2\, n\, r^n \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

(*iii*) Si l'équation caractéristique ne possède pas de solution dans $\mathbb{R}$, alors, en notant $r = \rho\, e^{i\theta}$ l'une de ses deux solutions complexes conjuguées, les suites réelles vérifiant la relation $(\star)$ sont les suites de terme général :
$$\rho^n \big(\lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta)\big) \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,$$

Principe de démonstration. Démonstration page 462

Dans chacun des cas, les suites réelles vérifiant la relation $(\star)$ sont à chercher parmi les suites complexes vérifiant cette relation (que l'on connait grâce à la proposition 52).

p.463 **Exercice 56** Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, ainsi que la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

X Relations de comparaison sur les suites

Cette partie a pour objectif d'introduire les relations de comparaison sur les suites ; celles-ci sont destinées à faciliter l'étude du comportement asymptotique d'une suite. Nous nous limitons dans un premier temps aux suites réelles, et généralisons dans un second temps aux suites complexes.

1 Suites réelles équivalentes

Toutes les suites considérées dans cette partie sont à valeurs réelles.

Définitions, caractérisations

Définition 17

Étant donné deux suites u et v qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, on dit que u est **équivalente** à v si $\lim \dfrac{u}{v} = 1$. On note alors $u \sim v$.

Notation On emploie également la notation $u_n \sim v_n$. Bien que cette notation soit abusive, du fait qu'elle peut induire une confusion entre la suite et son terme d'indice n, elle est souvent utilisée dans les calculs.

Exemples

1. Comme $\dfrac{n}{n+1} \to 1$, on a $n \sim n+1$.
2. Si u est une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, alors on a $u \sim u$.

p.463 **Exercice 57** Soit u une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

A-t-on $u_{n+1} \sim u_n$?

p.463 **Exercice 58** Soit u admettant une limite finie ℓ. Peut-on affirmer $u_n \sim \ell$?

p.463 **Exercice 59** Soit v une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

Montrer que si u est une suite telle que $\dfrac{u}{v} \to 1$, alors u ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Remarque Pour montrer que deux suites u et v sont équivalentes, il suffit, d'après l'exercice précédent, de montrer que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang et que $\dfrac{u}{v} \to 1$.

Proposition 54

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

Principe de démonstration. Il faut montrer trois propriétés. Démonstration page 463

Remarque La symétrie de la relation $\sim$ justifie le fait qu'en général, on préfère dire « u et v sont équivalentes » plutôt que « u est équivalente à v ».

Proposition 55

Soit u et v deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.
On a $u \sim v$ si, et seulement s'il existe une suite w tendant vers 1 telle que $u = v \times w$ à partir d'un certain rang.

Principe de démonstration. Poser $w = \dfrac{u}{v}\cdot$ Démonstration page 464

Résultats fondamentaux

Proposition 56

Soit u une suite admettant une limite (finie ou infinie). Si v est une suite équivalente à u, alors v tend vers la même limite que u.

Principe de démonstration. Utiliser la proposition 55. Démonstration page 464

Proposition 57

Soit u et v deux suites réelles ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. Si $u \sim v$, alors, à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.

Principe de démonstration. Utiliser la proposition 55. Démonstration page 464

Opérations sur les suites équivalentes

Proposition 58

Soit u, v, u' et v' des suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

1. Si $u \sim v$ et $u' \sim v'$, alors on a $u \times u' \sim v \times v'$.
2. Si $u \sim v$ et $u' \sim v'$, alors on a $\dfrac{u}{u'} \sim \dfrac{v}{v'}\cdot$
3. Si $u \sim v$ alors, pour tout entier relatif p, on a $u^p \sim v^p$.

Principe de démonstration. Faire appel aux résultats sur la limite d'un produit et sur la limite d'un quotient. Démonstration page 464

Remarques

1. Le premier point de la proposition précédente donne en particulier que si u et u' sont deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, et si u converge vers une limite ℓ *non nulle*, alors on a $u \times u' \sim \ell \times u'$.
2. Par récurrence immédiate, il découle du premier point de la proposition précédente que si, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de n équivalents :
$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad u_k \sim v_k,$$
alors on a $\prod_{k=1}^{n} u_k \sim \prod_{k=1}^{n} v_k$.

Exemple On a $\binom{n}{6} \sim \frac{n^6}{720}$ car, pour tout entier naturel fixé j, on a $n - j \sim n$, et par conséquent :
$$\binom{n}{6} = \frac{1}{6!} \prod_{j=0}^{5} (n-j) \sim \frac{1}{6!} \prod_{j=0}^{5} n = \frac{n^6}{720}.$$

Attention Lorsque l'on effectue un produit d'équivalents, le nombre d'équivalents considérés doit être fixe (et ne doit donc pas dépendre de la variable). De même, lors d'une mise à la puissance d'un équivalent, l'exposant doit être constant. Ainsi, la limite classique $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$ (*cf.* exercice 62 de la page suivante) nous dit que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim e$, alors qu'une mise à la puissance peu scupuleuse de l'équivalent $1 + \frac{1}{n} \sim 1$ aboutirait à un résultat faux.

Attention Il n'y a pas de résultat général pour une somme (ni une différence) d'équivalents, comme le montre l'exercice suivant.

p.464

Exercice 60 On considère les suites u, v et w de termes généraux :
$$u_n = -\frac{1}{n}, \qquad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}.$$

1. Montrer que les suites v et w sont équivalentes.
2. Qu'en est-il des suites $u + v$ et $u + w$?

2 Obtention d'équivalentes par composition de limites

Commençons par énoncer le résultat de composition de limites suivant. Il est admis à ce stade, et sera démontré au chapitre suivant (*cf.* proposition 7 de la page 491).

Proposition 59

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point a telle que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$. Alors, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans I qui tend vers a, on a $f(x_n) \to \ell$.

Ce résultat de composition des limites permet d'obtenir de nombreux équivalents. En particulier, son application à des taux d'accroissements mène au résultat suivant :

Proposition 60

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ ainsi que $a \in I$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $I \setminus \{a\}$. Si f est dérivable en a et si de plus $f'(a) \neq 0$, alors on a :

$$f(u_n) - f(a) \sim f'(a)\,(u_n - a).$$

Démonstration page 465

Exemples

1. La fonction sin et dérivable en 0 et $\sin' 0 = 1 \neq 0$. Pour toute suite (u_n) à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ tendant vers 0, on a donc $\sin u_n \sim u_n$. Ainsi, on a par exemple :
$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}\ ; \quad \sin\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}\ ; \quad \sin\left(2^{-n}\right) \sim 2^{-n}.$$
2. La fonction exp est dérivable en 0 et $\exp'(0) = 1$. Pour toute suite (u_n) à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ tendant vers 0, on a donc :
$$\exp(u_n) - 1 \sim u_n.$$

p.465

Exercice 61 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $]-1,0[\,\cup\,]0,+\infty[$ et tendant vers 0. Justifier que $\ln(1+u_n) \sim u_n$.

Remarque L'équivalent obtenu à l'exercice précédent est parfois présenté et utilisé sous la forme suivante : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ tendant vers 1, alors on a :

$$\ln u_n \sim u_n - 1,$$

qui s'obtient en utilisant le résultat de l'exercice précédent avec la suite de terme général $v_n = u_n - 1$.

p.465

Exercice 62 Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Déduire de l'exercice précédent que $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \to e^a$.

Remarque Le résultat de l'exercice précédent est, de manière évidente, également vrai pour $a = 0$.

p.465

Exercice 63 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ tendant vers 0.

1. La proposition 60 appliquée à la fonction cos permet-elle d'obtenir un équivalent simple de $\cos(u_n) - 1$?
2. En utilisant la formule trigonométrique $\cos(2x) - 1 = 2\sin^2 x$, montrer que :
$$\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}.$$

3 Suite négligeable, suite dominée

Toutes les suites considérées ici sont réelles.

Définitions, caractérisations

Définition 18

Soit u et v deux suites. Supposons que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang ; notons $n_0 \in \mathbb{N}$ un tel rang.

- On dit que u est **dominée** par v si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geqslant n_0}$ est bornée.

  On note alors $u = \mathrm{O}(v)$ (lire « grand O de v »).

- On dit que u est **négligeable** devant v si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geqslant n_0}$ tend vers 0.

  On note alors $u = \mathrm{o}(v)$ (lire « petit o de v »).

Notation On emploie également les notations $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $u_n = \mathrm{o}(v_n)$.

Remarques

- La définition précédente ne dépend pas du rang n_0 choisi à partir duquel la suite v ne s'annule pas. En effet, concernant la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geqslant n_0}$, son caractère bornée et le fait qu'elle tende ou non vers 0 ne dépendent pas du rang n_0.
- Toute suite convergente étant bornée, on a $u = \mathrm{o}(v) \Longrightarrow u = \mathrm{O}(v)$.

Exemples

1. On a $n = \mathrm{o}(n^2)$ car $\lim \frac{n}{n^2} = 0$.
2. On a $\frac{1}{n^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, car $\frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n} \to 0$.
3. Comme la fonction sin est bornée, on a $\frac{\sin(n)}{n} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Attention Le symbole « = » apparaissant dans les notations $u = \mathrm{O}(v)$ et $u = \mathrm{o}(v)$ ne doit pas être confondu avec un symbole d'égalité d'expressions algébriques.
Ainsi, trois suites u, u' et v peuvent vérifier $u = \mathrm{o}(v)$ et $u' = \mathrm{o}(v)$ sans pour autant que les suites u et u' soient égales : elles sont simplement négligeables devant une même suite v, tout comme, par exemple, les suites de termes généraux n et n^2 sont toutes deux négligeables devant la suite de terme général n^3.

Remarques

1. Une suite u est bornée si, et seulement si, elle est dominée par la suite constante égale à 1, c'est-à-dire si, et seulement si, $u_n = \mathrm{O}(1)$.
2. Une suite u tend vers 0 si, et seulement si, elle est négligeable devant la suite constante égale à 1, c'est-à-dire si, et seulement si, $u_n = \mathrm{o}(1)$.

p.465

Exercice 64 Soit α et β deux réels.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour avoir $n^\alpha = \mathrm{o}(n^\beta)$.

Proposition 61

Soit u et v deux suites. Supposons que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

- La suite u est dominée par v si, et seulement s'il existe une suite bornée w telle que $u = v \times w$ à partir d'un certain rang.
- La suite u est négligeable devant v si, et seulement s'il existe une suite w tendant vers 0 et telle que $u = v \times w$ à partir d'un certain rang.

Principe de démonstration. Poser $w = \dfrac{u}{v}\cdot$ Démonstration page 466

p.466

Exercice 65 Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Posons $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$. Montrer l'existence d'un entier naturel n_0 tel que :
$$\forall k \geqslant n_0 \quad \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} \leqslant \frac{1}{2}\cdot$$
2. Montrer alors que $u_n \to 0$, c'est-à-dire que $a^n = \mathrm{o}\big(n!\big)$.

Reformulation des résultats de croissances comparées

Rappelons les résultats de croissances comparées déjà énoncées dans le cadre des fonctions (*cf.* page 211) : pour $a > 0$ et $b > 0$, on a, d'une part :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x^a |\ln x|^b = 0,$$

et d'autre part :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(ax)}{x^b} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} |x|^b \exp(ax) = 0.$$

Ces résultats de croissances comparées mènent, par composition de limites, aux résultats suivants :

Proposition 62

Soit a et b deux réels strictement positifs.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite tendant vers $+\infty$, alors :
$$\big(\ln u_n\big)^b = \mathrm{o}\big((u_n)^a\big).$$
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ tendant vers 0, alors :
$$\big|\ln u_n\big|^b = \mathrm{o}\big((u_n)^{-a}\big).$$
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite tendant vers $+\infty$, alors :
$$(u_n)^b = \mathrm{o}\big(\exp(au_n)\big).$$
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite tendant vers $-\infty$, alors :
$$\exp(au_n) = \mathrm{o}\big(|u_n|^{-b}\big).$$

Principe de démonstration. On revient à la définition 18 de la page 433 en appliquant, aux limites données par les croissances comparées, le résultat de composition des limites énoncé précédemment (proposition 59 de la page 431). Démonstration page 466

Exemples Par croissances comparées, on peut affirmer, sans autre justification, que :
$$\ln n = \mathrm{o}(n), \quad \ln n = \mathrm{o}\big(\sqrt{n}\big) \quad \text{ou encore} \quad n = \mathrm{o}(2^n).$$

Liens entre les relations de comparaison

Règles de calcul : Les résultats suivants, qui ne sont que des traductions de résultats connus sur les suites bornées et les suites tendant vers 0, doivent pouvoir être retrouvés rapidement :

$$\begin{array}{rcrcl}
 & & a_n = \mathrm{o}(u_n) & \Longrightarrow & a_n = \mathrm{O}(u_n)\\
a_n = \mathrm{O}(u_n) & \text{et} & b_n = \mathrm{O}(v_n) & \Longrightarrow & a_nb_n = \mathrm{O}(u_nv_n)\\
a_n = \mathrm{o}(u_n) & \text{et} & b_n = \mathrm{O}(v_n) & \Longrightarrow & a_nb_n = \mathrm{o}(u_nv_n)\\
a_n = \mathrm{o}(u_n) & \text{et} & b_n = \mathrm{o}(v_n) & \Longrightarrow & a_nb_n = \mathrm{o}(u_nv_n)\\
a_n = \mathrm{O}(u_n) & \text{et} & b_n = \mathrm{O}(u_n) & \Longrightarrow & a_n+b_n = \mathrm{O}(u_n)\\
a_n = \mathrm{o}(u_n) & \text{et} & b_n = \mathrm{o}(u_n) & \Longrightarrow & a_n+b_n = \mathrm{o}(u_n)\\
a_n = \mathrm{O}(u_n) & \text{et} & u_n = \mathrm{O}(v_n) & \Longrightarrow & a_n = \mathrm{O}(v_n)\\
a_n = \mathrm{o}(u_n) & \text{et} & u_n = \mathrm{O}(v_n) & \Longrightarrow & a_n = \mathrm{o}(v_n)\\
a_n = \mathrm{O}(u_n) & \text{et} & u_n = \mathrm{o}(v_n) & \Longrightarrow & a_n = \mathrm{o}(v_n)\\
a_n = \mathrm{o}(u_n) & \text{et} & u_n = \mathrm{o}(v_n) & \Longrightarrow & a_n = \mathrm{o}(v_n)
\end{array}$$

p.467

Exercice 66 Soit u une suite réelle. En utilisant les règles de calculs énoncées précédemment, justifier que :

1. si u est dominée par une suite bornée, alors u est bornée ;
2. si u est dominée par une suite qui tend vers 0, alors u tend vers 0 ;
3. si u est négligeable devant une suite bornée, alors u tend vers 0.

Proposition 63

Soit u et v deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. Alors on a :

$$u \sim v \iff u - v = \mathrm{o}(v).$$

Démonstration page 467

Remarque Contrairement aux apparences, la relation $u - v = \mathrm{o}(v)$ est donc symétrique en u et v.

Corollaire 64

Soit u et v deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. Si $v = \mathrm{o}(u)$, alors on a $u + v \sim u$.

Démonstration. Supposons que $v = \mathrm{o}(u)$. On a alors $(u+v) - u = v = \mathrm{o}(u)$. La proposition 63 appliquée aux suites $u + v$ et u assure alors que $u + v \sim u$. □

p.467

Exercice 67 Donner un équivalent simple de la suite de terme général :

$$u_n = \left(n^2 + \frac{1}{n}\right)(n+1)\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right).$$

Point méthode

Lorsque l'on cherche un équivalent pour une suite, on essaie systématiquement de donner l'équivalent le plus simple possible. Le corollaire 64 ainsi que la transitivité de la relation $\sim$ assurent que si l'on dispose d'un équivalent de la forme $u \sim v + w$ avec $w = \mathrm{o}(v)$, alors on a, plus simplement, $u \sim v$.
À titre d'exemple, si l'on a $u_n \sim n^2 + n$, alors, comme $n = \mathrm{o}(n^2)$, on a, plus simplement, $u_n \sim n^2$.

Attention Il est faux de penser que l'équivalent $u_n \sim n^2 + n$ donne plus d'informations que l'équivalent $u_n \sim n^2$. Plus précisément, comme $n^2 + n \sim n^2$, on a :

$$u_n \sim n^2 + n \iff u_n \sim n^2.$$

Dans un calcul, on a donc toujours intérêt à garder la version la plus simple, en l'occurrence ici $u_n \sim n^2$.

4 Extension aux suites à valeurs complexes

Les trois types de relations de comparaison $\sim$, o et O, s'étendent aux suites à valeurs complexes en reprenant simplement les définitions données dans le cas réel (*cf.* définitions 17 et 18 des pages 429 et 433).

La majorité des résultats obtenus pour les suites réelles s'étendent aux suites complexes. Par souci de concision, contentons-nous de signaler ceux qui, pour des raisons évidentes, ne s'étendent pas aux suites complexes :

- la proposition 57 de la page 430, qui fait intervenir le signe ;
- l'obtention d'équivalents par utilisation de fonctions dérivables, puisque la notion de dérivabilité s'adresse à des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$;
- l'utilisation des croissances comparées (*cf.* proposition 62 de la page 435).

Symboles o et O : on peut se ramener au cas réel

La manipulation des symboles o et O dans le cas complexe se ramène aisément au cas réel car si u et v sont deux suites complexes avec v ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, alors on a :

$$u = \mathrm{o}(v) \Longleftrightarrow |u| = \mathrm{o}(|v|).$$

En effet, dès que l'un des deux quotients $\dfrac{u_n}{v_n}$ ou $\dfrac{|u_n|}{|v_n|}$ est borné ou tend vers 0, alors l'autre aussi.

Manipulation des équivalents avec des suites complexes

- Les considérations précédentes ne s'appliquent pas pour les équivalents : si le quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ tend vers 1, alors $\dfrac{|u_n|}{|v_n|}$ aussi, mais la réciproque est fausse. On dispose donc seulement l'implication suivante :
$$u_n \sim v_n \Longrightarrow |u_n| \sim |v_n|.$$
- Contrairement à la convergence d'une suite qui se traduit par la convergence de ses parties réelle et imaginaire, il n'en est pas de même pour l'équivalence de deux suites complexes ; par exemple, si $u_n = n + i$ et $v_n = n + 2i$, alors on a $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$, et donc $u_n \sim v_n$, mais il est clair que les suites $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} v$, constantes égales respectivement à i et $2i$, ne sont pas équivalentes.

p.467 **Exercice 68** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ne s'annulant pas à partir d'un certain rang et tendant vers 0. Montrer que $e^{ix_n} - 1 \sim ix_n$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

- L'ensemble $A = \mathbb{R}_-^*$ possède une borne supérieure qui est égale à 0 et qui n'est pas élément de A. En effet :
  - $*$ 0 est un majorant de $\mathbb{R}_-^*$;
  - $*$ si $a < 0$, alors a ne majore pas $\mathbb{R}_-^*$ car $\dfrac{a}{2} \in \mathbb{R}_-^*$ vérifie $a < \dfrac{a}{2}\cdot$
- On a $\sup B = \sup C = 1$. On peut noter que 1 est le plus grand élément de B, alors qu'il n'appartient pas à C.
- On a $\sup D = 3$.

Exercice 2

- Comme a est le plus grand élément de A, on a $\forall x \in A \quad x \leqslant a$.
  Donc a est un majorant de A.
- Si b un majorant de A, alors on a $\forall x \in A \quad x \leqslant b$. Comme on a $a \in A$, il en résulte que $a \leqslant b$.

Par suite, a est le plus petit des majorants de A, c'est-à-dire sa borne supérieure.

Exercice 3 Supposons que le premier point est vrai et montrons le second. Soit X une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée. Posons $\widetilde{X} = -X$, c'est-à-dire :

$$\widetilde{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in X\}.$$

- Le fait que X soit non vide entraîne que $\widetilde{X}$ est également non vide.
- D'autre part, on constate que les minorants de X sont les opposés des majorants de $\widetilde{X}$. Comme X est minorée, alors $\widetilde{X}$ est majorée.

On en déduit que $\widetilde{X}$ possède une borne supérieure s.
Le fait s soit le plus petit des majorants de $\widetilde{X}$ entraîne alors que $-s$ est le plus grand des minorants de X. On a donc montré que X possède $-s$ comme borne inférieure.

Exercice 4

1. L'ensemble X est une partie de $\mathbb{R}$:
   - non vide, car elle contient 1 ;
   - majorée, par exemple par 2, car, pour $x > 2$, on a $x^2 > 4$, donc $x \notin X$.

   Donc X admet une borne supérieure.
2. (a) Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a $(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$. Si de plus $h \in [0,1]$, alors $h^2 \leqslant h$, ce qui donne $(a+h)^2 \leqslant a^2 + 2ah + h$.

   (b) Posons $h = \min\left(1, \dfrac{2-a^2}{2a+1}\right)$.

   Comme 1 et $\dfrac{2-a^2}{2a+1}$ sont strictement positifs, il en est de même pour h. Comme de plus $h \leqslant 1$, on a $h \in [0,1]$.

On a alors :

$$\begin{aligned}(a+h)^2 &\leqslant a^2+(2a+1)h && \text{(d'après la question précédente)}\\ &\leqslant \underbrace{a^2+(2a+1)\,\frac{2-a^2}{2a+1}}_{=2} && \left(\text{car } 0\leqslant 2a+1 \quad\text{et}\quad 0\leqslant h\leqslant \frac{2-a^2}{2a+1}\right)\end{aligned}$$

Comme on a de plus $a+h\geqslant 0$, il en résulte que $a+h\in X$.

(c) L'élément $a+h$ de la question précédente est un élément de X strictement supérieur à a, ce qui contredit le fait que a soit un majorant de X.
L'hypothèse $a^2<2$ est donc fausse. On peut donc affirmer que $a^2\geqslant 2$.

3. (a) Pour $h\in \mathbb{R}$, on a $(a-h)^2=a^2-2ah+h^2\geqslant a^2-2ah$.

(b) Posons $h=\min\left(a,\ \dfrac{a^2-2}{2a}\right)$. Comme a et $\dfrac{a^2-2}{2a}$ sont strictement positifs, il en est de même pour h. On a :

$$\begin{aligned}(a-h)^2 &\geqslant a^2-2ah && \text{(d'après la question précédente)}\\ &\geqslant \underbrace{a^2-2a\frac{a^2-2}{2a}}_{=2} && \left(\text{car } 0\leqslant 2a \quad\text{et}\quad 0\leqslant h\leqslant \frac{a^2-2}{2a}\right).\end{aligned}$$

Par suite, pour tout élément $x\in X$, on a $x^2\leqslant 2\leqslant (a-h)^2$, et donc, comme $x\geqslant 0$ et $a-h\geqslant 0$, on a $x\leqslant a-h$. Cela signifie que $a-h$ est un majorant de X strictement inférieur à a, et contredit donc le fait que a soit le plus petit majorant de X.
L'hypothèse $a^2>2$ est donc fausse. On a donc $a^2\leqslant 2$.

4. D'après les questions précédentes, on a $a^2\geqslant 2$ et $a^2\leqslant 2$. Il en résulte que $a^2=2$, ce que l'on voulait montrer.

Exercice 5 On peut s'inspirer de l'exercice précédent, en considérant l'ensemble :

$$X=\left\{x\in\mathbb{Q}\ \middle|\ x\geqslant 0 \quad\text{et}\quad x^2\leqslant 2\right\}.$$

En reprenant le même raisonnement avec des rationnels, on montre que si X possèdait une borne supérieure a dans $\mathbb{Q}$, alors on aurait $a^2=2$. Mais on sait qu'il n'existe aucun rationnel vérifiant cela.

Exercice 6 Soit $A\subset\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$. On a $a=\inf A$ si, et seulement si :

- a est un minorant de A, ce qui s'écrit $\forall x\in A\quad x\geqslant a$;
- a est le plus grand des minorants, ce qui se traduit ainsi :

$$\forall b>a\quad \exists x\in A\quad x<b,$$

ou encore ainsi :

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*\quad\exists x\in A\quad x<a+\varepsilon.$$

Exercice 7

1. La borne inférieure de $\mathbb{R}_+^*$ est évidemment 0. En effet :
   - c'est un minorant de $\mathbb{R}_+^*$;
   - c'est le plus petit des minorants, car si $x>0$, alors l'élément $\dfrac{x}{2}$, qui appartient à $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie $\dfrac{x}{2}<x$, montre que x ne minore pas $\mathbb{R}_+^*$.

2. Si un réel a vérifie $\forall \varepsilon > 0 \quad |a| \leqslant \varepsilon$, alors $|a|$ est un minorant de $\mathbb{R}_+^*$. La borne inférieure d'un ensemble étant le plus grand de ses minorants, on peut conclure que $|a| \leqslant 0$, ce qui donne $|a| = 0$, c'est-à-dire $a = 0$.

Exercice 8 On remarque que la quantité $\sup f$ est définie si, et seulement si, l'ensemble $f(X) = \{f(x)\,;\ x \in X\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, ce qui a lieu si, et seulement si, X est non vide et f est majorée.

1. Pour $x \in X$, on a $f(x) \leqslant \sup f$ ainsi que $g(x) \leqslant \sup g$. On en déduit que :
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leqslant \sup f + \sup g.$$
Il en résulte que $\sup f + \sup g$ est un majorant de $(f+g)(X)$.
La borne supérieure étant le plus petit des majorants, on a donc :
$$\sup(f+g) \leqslant \sup f + \sup g.$$

2. Il suffit de trouver deux fonctions pour lesquelles l'égalité n'a pas lieu. Par exemple, si f et g sont définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x$ et $g(x) = -x$, alors on a :
$$\underbrace{\sup(f+g)}_{=0} \neq \underbrace{\sup f}_{=1} + \underbrace{\sup g}_{=0}.$$

Exercice 9 Comme la partie A (resp. B) est non vide et majorée, elle possède une borne supérieure que nous notons α (resp. β).

- Comme A et B sont non vides, il en est de même pour $A+B$.
De plus, étant donné $z \in A+B$, on peut trouver $x \in A$ et $y \in B$ tels que $z = x+y$, ce qui assure que $z \leqslant \alpha + \beta$. La partie $A+B$ est donc majorée par $\alpha+\beta$.
La partie $A+B$, étant non vide et majorée par $\alpha+\beta$, possède donc une borne supérieure vérifiant :
$$\sup(A+B) \leqslant \alpha + \beta.$$

- Montrons que $\alpha+\beta$ est la borne supérieure de $A+B$. Comme on a déjà obtenu que c'est un majorant, il reste à montrer que :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in A+B \quad \alpha + \beta - \varepsilon < z.$$
Soit donc $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure,
  * on peut trouver $x \in A$ tel que $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < x$;
  * on peut trouver $y \in B$ tel que $\beta - \frac{\varepsilon}{2} < y$.

  Le réel $z = x+y$ vérifie alors :
$$\alpha + \beta - \varepsilon < z,$$
ce qui prouve le résultat.

Proposition 3 Tout intervalle vérifie évidemment la propriété $(\star)$.
Montrons la réciproque. Donnons-nous I une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété $(\star)$.
Si I est vide, alors c'est, par définition, un intervalle.
Supposons donc I non vide et définissons a et b de la manière suivante :
$$a = \begin{cases} \inf I & \text{si } I \text{ est minoré} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad b = \begin{cases} \sup I & \text{si } I \text{ est majoré} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons les résultats résumés dans le tableau ci-dessous :

	$b \in I$	$b \in \mathbb{R} \setminus I$	$b = +\infty$
$a \in I$	$I = [a, b]$	$I = [a, b[$	$I = [a, +\infty[$
$a \in \mathbb{R} \setminus I$	$I =]a, b]$	$I =]a, b[$	$I =]a, +\infty[$
$a = -\infty$	$I =]-\infty, b]$	$I =]-\infty, b[$	$I =]-\infty, +\infty[$

- Par définition de a et b, on obtient facilement que, dans chaque cas, l'ensemble I est inclus dans l'intervalle indiqué.
- Pour la réciproque, il suffit de montrer l'inclusion $]a, b[\subset I$ puisqu'alors on aura :
$$I =]a, b[\ , \quad I =]a, b]\ , \quad I = [a, b[\quad \text{ou} \quad I = [a, b]\,,$$
en fonction de l'appartenance de a et b à I.
Soit $z \in]a, b[$. Montrons que $z \in I$. Le réel z n'est pas un majorant de I, car :
  * si $b = +\infty$, alors I n'est tout simplement pas majoré ;
  * si $b \in \mathbb{R}$, alors, comme b est la borne supérieure de I (et donc le plus petit de ses majorants), le fait que $z < b$ assure que z ne majore pas I.

  On peut donc trouver $y \in I$ tel que $z < y$. De même, on montre que z n'est pas un minorant de I, donc on peut trouver $x \in I$ tel que $x < z$.
  On a ainsi $z \in [x, y]$. Or, d'après la propriété $(\star)$, comme $x \in I$ et $y \in I$, on a $[x, y] \subset I$. On en déduit que $z \in I$.

Proposition 4 Raisonnons par l'absurde en supposant que l'on puisse trouver $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n\,x < y.$$
L'ensemble $A = \{nx\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ est alors une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, qui possède donc une borne supérieure, que l'on note a. On a alors :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n\,x < a. \qquad (\star)$$
Pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $(\star)$ appliquée avec $n+1$ nous donne que $(n+1)x \leqslant a$, autrement dit $nx \leqslant a - x$. Il en résulte que $a - x$ est un majorant de A. Comme $a - x < a$, ceci contredit le fait que a est le plus petit des majorants de A. D'où le résultat.

Corollaire 5 Comme $x > 1$, on peut écrire $x = 1 + h$ avec $h > 0$. Pour n un entier naturel au moins égal à 2, la formule du binôme de Newton donne :
$$(1+h)^n = 1 + n\,h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k \geqslant 1 + n\,h.$$
D'après la propriété d'Archimède on peut trouver n tel que $n\,h \geqslant y - 1$ et on a alors $x^n \geqslant y$.

Proposition 6

- **Unicité.** Soient n_1 et n_2 deux entiers relatifs vérifiant :
$$n_1 \leqslant x < n_1 + 1 \qquad \text{et} \qquad n_2 \leqslant x \leqslant n_2 + 1.$$

On a alors :

$$x - 1 < n_1 \leqslant x \qquad \text{et} \qquad x - 1 < n_2 \leqslant x,$$

ou encore :

$$x - 1 < n_1 \leqslant x \qquad \text{et} \qquad -x \leqslant -n_2 < 1 - x.$$

En sommant ces deux encadrements, on obtient :

$$-1 < n_1 - n_2 < 1.$$

Comme n_1 et n_2 sont des entiers, cela donne $n_1 - n_2 = 0$, c'est-à-dire $n_1 = n_2$.

- **Existence.** Considérons l'ensemble $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant x\}$.
Il est clair que A est une partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée, et donc possède un plus grand élément. En notant n ce plus grand élément, on a $n \leqslant x$ (car $x \in A$) et $n + 1 > x$ (car $n + 1 \notin A$). Autrement dit, n vérifie la condition souhaitée.

Exercice 10 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a par définition :

$$\lfloor -x \rfloor \leqslant -x < \lfloor -x \rfloor + 1,$$

ce qui donne :

$$-\lfloor -x \rfloor - 1 < x \leqslant -\lfloor -x \rfloor.$$

Comme $-\lfloor -x \rfloor$ est un entier, cela montre que $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

Exercice 11 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leqslant y$. On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant y$, donc $\lfloor x \rfloor$ est un nombre entier inférieur à y. Comme, par définition, $\lfloor y \rfloor$ est le plus grand des entiers inférieurs à y, on a $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \lfloor$.

Exercice 12 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Par définition de la partie entière, on a :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

En ajoutant p à chaque terme, cela donne :

$$\lfloor x \rfloor + p \leqslant x + p < (\lfloor x \rfloor + p) + 1.$$

Comme $\lfloor x \rfloor + p$ est entier, on en déduit que $\lfloor x \rfloor + p$ est la partie entière de $x + p$.

Exercice 13 En général, on n'a pas $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
Par exemple, si $x = y = 3/2$, alors on a $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor = 1$ et $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor 3 \rfloor = 3$.

Proposition 8 Par définition de la partie entière, on a :

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1.$$

Il suffit alors de diviser cet encadrement par 10^n :

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leqslant x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

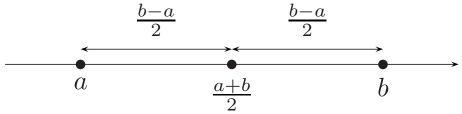
Proposition 9

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Supposons que (i) soit vraie, et montrons (ii).
Soit a et b deux réels distincts. Quitte à échanger a et b, on peut supposer $a < b$.

Il est clair qu'en appliquant la propriété (i) avec :

$$x = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{b-a}{2},$$

on obtient qu'il existe au moins un élément de A dans l'intervalle $]a, b[$.



$(ii) \Longrightarrow (i)$. Supposons que (ii) soit vraie, et montrons (i).

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. En appliquant la propriété (ii) avec $a = x - \varepsilon/2$ et $b = x + \varepsilon/2$, on peut affirmer qu'il existe au moins un élément de A dans l'intervalle $[x - \varepsilon/2, x + \varepsilon/2]$, et donc *a fortiori* dans l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.

Théorème 10

- **Densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$.** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe au moins un nombre décimal dans l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.

  Pour cela, donnons-nous $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^n > 1/\varepsilon$ (un tel entier n existe d'après le corollaire 5 de la page 397), et considérons r_n l'approximation décimale par défaut de x à la précision 10^{-n}. On a alors $|r_n - x| \leqslant 10^{-n} < \varepsilon$, et donc $r_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. D'où le résultat.
- **Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.** Elle découle immédiatement de la densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$ et du fait que $\mathbb{Q}$ contient $\mathbb{D}$.
- **Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.** Soit deux réels x et y tels que $x < y$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver un nombre rationnel r appartenant à l'intervalle $]x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2}[$. Le nombre $r + \sqrt{2}$ est alors irrationnel et appartient à $]x, y[$.

Exercice 14 Donnons-nous deux réels distincts x et y. Quitte à les renommer, on peut supposer $x < y$.

Notons A l'ensemble des décimaux, des rationnels ou des irrationnels, et montrons qu'il existe une infinité d'éléments de A compris entre x et y.

Raisonnons par l'absurde en supposant que l'intervalle $]x, y[$ ne contienne qu'un nombre fini d'éléments de A. Notons z le plus grand de ces éléments.

Alors, comme $z < y$, et par densité de A dans $\mathbb{R}$, on peut trouver au moins un élément de A appartenant à l'intervalle $]z, y[$. Cela contredit la définition de z, et donne le résultat souhaité.

Exercice 15 Il suffit de nier l'assertion donnée à la définition précédente pour le caractère borné : une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée si, et seulement si :

$$\forall M \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad |u_n| > M.$$

Exercice 16

1. • Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites majorées. On peut trouver deux réels M_1 et M_2 tels que :

   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M_1 \quad \text{et} \quad v_n \leqslant M_2.$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $u_n + v_n \leqslant M_1 + M_2$, ce qui montre que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

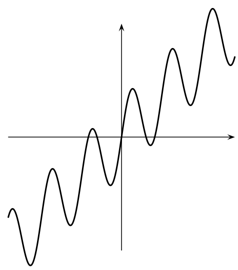
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont minorées, alors les suites de termes généraux $-u_n$ et $-v_n$ sont majorées. D'après le point précédent la suite de terme général $-(u_n+v_n)$ est alors majorée, et donc la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites bornées. Soit M_1 et M_2 deux réels tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant M_1 \quad \text{et} \quad |v_n| \leqslant M_2.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $|u_n v_n| \leqslant M_1 M_2$, donc la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Exercice 17

1. Si f est monotone, par exemple croissante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est également, car pour $n \in \mathbb{N}$, la croissance de f donne $f(n) \leqslant f(n+1)$, c'est-à-dire $u_n \leqslant u_{n+1}$.
2. La réciproque est fausse. En effet, il est possible de construire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) \leqslant f(n+1)$, sans pour autant être croissante.

Par exemple, la fonction :
$$f \ : \ x \mapsto x + \sin(2\pi x)$$
n'est pas croissante, mais comme elle vérifie $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n$, alors la suite de terme général $f(n)$ est croissante (et même strictement croissante).



Exercice 18 Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$.

- La croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ découle de la croissance de la fonction $x \mapsto \left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor$ (qui est croissante comme composée des deux fonctions croissantes $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ et $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ (*cf.* exercice 11 de la page 398).
- En revanche, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas strictement croissance, car, par exemple, on a $u_0 = u_1 = 0$.

Remarque Plus généralement, pour tout entier n pair, on a $u_n = u_{n+1} = \dfrac{n}{2}$.

Exercice 19

- Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad p \leqslant q \Longrightarrow u_p \leqslant u_q$, alors, de manière immédiate, elle vérifie également $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Réciproquement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}$, montrons que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad p \leqslant q \Longrightarrow u_p \leqslant u_q$, ce qui s'écrit aussi :
$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall q \geqslant p \quad u_p \leqslant u_q.$$
Soit $p \in \mathbb{N}$. En notant H_q la propriété « $u_p \leqslant u_q$ », on obtient facilement par récurrence que H_q est vraie pour tout $q \geqslant p$, ce qui montre le résultat souhaité.

Exercice 20 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite majorée à partir d'un certain rang ; soit $n_0 \in \mathbb{N}$ un rang tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ soit majorée, et soit $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant M.$$

Il est alors immédiat que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par le réel :

$$\max(u_0, \ldots, u_{n_0}, M).$$

Remarque On a le même résultat en remplaçant « majorée » par « minorée » ou encore par « bornée ».

Exercice 21 Comme $u_n \to 0$, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_1 \Longrightarrow |u_n| \leqslant 1. \tag{1}$$

Il est alors clair que pour $n \geqslant n_1$ on a $|u_n^2| \leqslant |u_n|$.

Proposition 11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers ℓ_1 et vers ℓ_2. Montrons que $\ell_1 = \ell_2$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell_1 \neq \ell_2$; posons $\varepsilon = \dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}\cdot$

D'après la définition 8 de la page 405, on peut trouver deux rangs n_1 et n_2 tels que :

$$\forall n \geqslant n_1 \quad |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant n_2 \quad |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon.$$

Posons alors $n = \max\{n_1, n_2\}$. D'après ce qui précède, on a :

$$|\ell_1 - \ell_2| = \big|(\ell_1 - u_n) + (u_n - \ell_2)\big| \leqslant |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| \leqslant 2\varepsilon.$$

Il en résulte que :

$$|\ell_1 - \ell_2| \leqslant \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|,$$

ce qui, comme $|\ell_1 - \ell_2| > 0$, mène à une contradiction.

Exercice 22 Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente ; notons ℓ sa limite. En prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, le fait que $u_n \to \ell$ assure l'existence d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\cdot$$

En appliquant ceci avec un entier pair et un entier impair supérieurs à n_0, on obtient :

$$|1 - \ell| \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad |-1 - \ell| = |1 + \ell| \leqslant \frac{1}{2}\cdot$$

L'inégalité triangulaire mène alors à une contradiction, et montre le résultat souhaité :

$$2 = \big|(1 - \ell) + (1 + \ell)\big| \leqslant |1 - \ell| + |1 + \ell| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Remarque Pour montrer la divergence de la suite de terme général $(-1)^n$, nous verrons une méthode plus efficace utilisant les suites extraites (*cf.* page 408).

Proposition 12 Notons $n_1 \in \mathbb{N}$ un rang tel que $\forall n \geqslant n_1 \quad |u_n - \ell| \leqslant v_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite v tend vers 0, on peut trouver un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_2 \Longrightarrow |v_n| \leqslant \varepsilon.$$

En notant alors $n_0 = \max(n_1, n_2)$, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, on a $|u_n - \ell| \leqslant v_n \leqslant \varepsilon$, ce qui montre que $u_n \to \ell$.

Exercice 23 La suite u de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente, alors que la suite de terme général $|u_n|$ est convergente, car constante égale à 1.

Proposition 14 Soit u une suite convergeant vers un réel ℓ. La définition de la convergence, appliquée par exemple avec $\varepsilon = 1$, nous permet de fixer un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1.$$

On constate alors que la suite u est majorée par le réel $M = \max\{u_0, \ldots, u_{n_0-1}, \ell + 1\}$ et minorée par le réel $m = \min\{u_0, \ldots, u_{n_0-1}, \ell - 1\}$. Ainsi u est bornée.

Proposition 15 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\ell > m$. Il s'agit de montrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \geqslant m$.

Comme $\ell - m > 0$, on peut appliquer la définition de la convergence de u vers ℓ avec $\varepsilon = \ell - m$. On trouve alors un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad |u_n - \ell| \leqslant \ell - m.$$

Pour $n \geqslant n_0$, on a alors $m - \ell \leqslant u_n - \ell \leqslant \ell - m$, ce qui donne en particulier $u_n \geqslant m$.

Corollaire 16 Il suffit d'appliquer la proposition précédente avec $m = \dfrac{\ell}{2}$.

Corollaire 17 Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite $|u|$ qui converge vers $|\ell| > 0$.

Exercice 24 Soit u une suite qui diverge vers $+\infty$. D'après la définition 9, on peut trouver un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad u_n \geqslant 0$. Mais alors, il est clair que la suite u est minorée par le réel $\min\{u_0, \ldots, u_{n_0-1}, 0\}$.

Proposition 18 Soit u une suite telle que $\lim u = \ell$ et $v = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de u.

- Supposons $\ell \in \mathbb{R}$, et montrons que v converge vers ℓ, ce qui s'écrit :

  $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

  Soit $\varepsilon > 0$. Comme u converge vers ℓ, on peut trouver un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

  $$\forall n \geqslant n_0 \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

  Pour $n \geqslant n_0$, on a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$ (*cf.* remarque de la page 403), et donc :

  $$|v_n - \ell| = |u_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

  D'où la convergence de la suite v vers ℓ.

- Supposons $\ell = +\infty$ et montrons que v diverge vers $+\infty$, ce qui s'écrit :
$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow v_n \geqslant A.$$
Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme u diverge vers $+\infty$, on peut trouver un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n \geqslant A.$$
Pour $n \geqslant n_0$, on a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$ (*cf.* remarque de la page 403), et donc :
$$v_n = u_{\varphi(n)} \geqslant A.$$
Cela montre la divergence de la suite v vers $+\infty$.
- Le cas $\ell = -\infty$ se traite en appliquant le résultat précédent à la suite $-u$.

Proposition 19 Supposons que les deux sous-suites $\left(u_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers une même limite ℓ, et montrons que u tend également vers ℓ.

- Supposons $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence vers ℓ des deux sous-suites considérées, on peut trouver deux rangs n_1 et n_2 tels que :
$$\forall p \geqslant n_1 \quad |u_{2p} - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall p \geqslant n_2 \quad |u_{2p+1} - \ell| \leqslant \varepsilon. \tag{$\star$}$$
En posant $n_0 = \max(2n_1,\, 2n_2 + 1)$, alors tout entier $n \geqslant n_0$ est :
  - $*$ soit pair de la forme $n = 2p$ avec $p \geqslant n_1$;
  - $*$ soit impair de la forme $n = 2p + 1$ avec $p \geqslant n_2$;

  dans chaque cas, d'après $(\star)$, on a $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
  Cela prouve la convergence de u vers ℓ.
- Supposons $\ell = +\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme $\left(u_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$, on peut trouver deux rangs n_1 et n_2 tels que :
$$\forall p \geqslant n_1 \quad u_{2p} \geqslant A \qquad \text{et} \qquad \forall p \geqslant n_2 \quad u_{2p+1} \geqslant A.$$
Comme dans le cas précédent, en posant $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$, on a :
$$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n \geqslant A,$$
ce qui prouve la divergence de u vers $+\infty$.
- Le cas $\ell = -\infty$ se traite en appliquant le résultat précédent à la suite $-u$.

Proposition 21 Étant donné une suite u bornée et une suite v tendant vers 0, prouvons que $u\,v$ tend vers 0. Nous souhaitons donc montrer que :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad |u_n v_n| \leqslant \varepsilon.$$
Soit $\varepsilon > 0$. La suite u étant bornée, on peut trouver un réel $M > 0$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant M.$$
Étant donné que la suite v tend vers 0 et que ε / M est un réel strictement positif, on peut trouver un rang n_0 tel que :
$$\forall n \geqslant n_0 \quad |v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}.$$
Pour tout $n \geqslant n_0$, on a alors $|u_n v_n| \leqslant \varepsilon$, ce qui montre le résultat souhaité.

Lemme 22 Soit u et v deux suites qui convergente vers 0. Montrons que $u+v$ converge vers 0, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n + v_n| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\varepsilon/2 > 0$ et comme les suites u et v tendent vers 0, on peut trouver deux rangs $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_1 \Longrightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon/2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_2 \Longrightarrow |v_n| \leqslant \varepsilon/2.$$

En posant $n_0 = \max(n_1, n_2)$, et en utilisant l'inégalité triangulaire, on a, pour $n \geqslant n_0$:

$$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

d'où le résultat.

Proposition 23

- Montrer que la suite $\lambda\, u + \mu\, v$ tend vers $\lambda\, \ell_1 + \mu\, \ell_2$ revient à montrer que la suite de terme général $(\lambda\, u_n + \mu\, v_n) - (\lambda\, \ell_1 + \mu\, \ell_2)$ tend vers 0.
  Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
  $$(\lambda\, u_n + \mu\, v_n) - (\lambda\, \ell_1 + \mu\, \ell_2) = \lambda\,(u_n - \ell_1) + \mu\,(v_n - \ell_2).$$
  Les suites $(u_n - \ell_1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n - \ell_2)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0, donc, d'après la proposition 21 de la page 409 (où λ et μ sont vues comme des suites constantes donc bornées), les suites de termes généraux $\lambda\,(u_n - \ell_1)$ et $\mu\,(v_n - \ell_2)$ tendent aussi vers 0. Le lemme 22 de la page 410 permet alors de conclure.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :
  $$u_n\, v_n - \ell_1\, \ell_2 = u_n(v_n - \ell_2) + \ell_2(u_n - \ell_1). \qquad (\star)$$
  * La suite u est bornée car convergente, et la suite de terme général $v_n - \ell_2$ tend vers 0, donc, d'après la proposition 21 de la page 409, on a $u_n(v_n - \ell_2) \to 0$.
  * De même on a $\ell_2(u_n - \ell_1) \to 0$.

  Le lemme 22 de la page 410 permet alors d'affirmer que :
  $$u_n(v_n - \ell_2) + \ell_2(u_n - \ell_1) \to 0\ ;$$
  autrement dit, d'après la relation $(\star)$, on a $u_n\, v_n \to \ell_1\, \ell_2$.

Exercice 25 Notons ℓ la limite de la suite u. Comme $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de u, on a $u_{n+1} \to \ell$ (*cf.* proposition 18 de la page 408). Par opération sur les suites convergentes (*cf.* proposition 23 de la page 410), on a alors :

$$u_{n+1} - u_n \to \ell - \ell = 0.$$

Exercice 26 Soit u une suite convergente et v une suite divergente. Si la suite $w = u + v$ était convergente, alors, d'après la proposition précédente, la suite $v = w - u$ le serait également, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

Exercice 27 On peut par exemple considérer les suites u et v définies par :

$$u_n = (-1)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = -(-1)^n.$$

Ces deux suites sont divergentes. Pourtant, $u+v$ est la suite nulle (donc convergente) et $u\,v$ est la suite constante égale à -1 (donc convergente).

Proposition 24

1. Soit $A \in \mathbb{R}$.

   Comme v est minorée on peut trouver $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \geqslant m$. La suite u tendant vers $+\infty$, on peut trouver un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad u_n \geqslant A - m$.

   Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, on a alors $u_n + v_n \geqslant A$. Cela prouve que $u_n + v_n \to +\infty$.

2. Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Comme v est minorée à partir d'un certain rang par un nombre strictement positif, on peut trouver un réel $m > 0$ et un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geqslant n_1 \quad v_n \geqslant m.$$

   La suite u tendant vers $+\infty$, on peut trouver un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_2 \quad u_n \geqslant A/m.$$

   Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$, on a alors :

$$v_n \geqslant m \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad u_n \geqslant \frac{A}{m} \geqslant 0,$$

   et donc $u_n v_n \geqslant A$. Cela prouve que $u_n v_n \to +\infty$.

Remarque Comme cela a été fait dans cette démonstration, lorsque l'on veut montrer une proposition du type :

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \big[(\cdots) \Longrightarrow (\cdots \geqslant A)\big],$$

on peut se limiter au cas où $A \geqslant 0$. En effet, si le prédicat entre crochets est vrai pour un certain A, alors il est encore vrai pour tous ceux qui sont inférieurs.

Proposition 25

- Si ℓ_1 et ℓ_2 sont réels, alors les résultats découlent de la proposition 23 de la page 410.
- *Pour la somme.*
  - Si $\ell_1 = +\infty$ et $\ell_2 \neq -\infty$, alors soit v est convergente donc bornée, soit elle tend vers $+\infty$ et alors elle est minorée (*cf.* exercice 24 de la page 408). Dans les deux cas, on a la somme d'une suite tendant vers $+\infty$ et d'une suite minorée, somme qui tend donc vers $+\infty$, c'est-à-dire vers $\ell_1 + \ell_2$.
  - Le cas $\ell_1 = -\infty$ et $\ell_2 \neq +\infty$ s'obtient alors en appliquant ce qui précède aux suites $-u$ et $-v$. On obtient en effet que la suite $-(u+v)$ diverge vers $+\infty$, et donc que $u + v$ diverge vers $-\infty$, c'est-à-dire vers $\ell_1 + \ell_2$.
- *Pour le produit.*
  - Si $\ell_1 = +\infty$ alors pour $\ell_2 \in \mathbb{R}_+^*$, la suite v est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif (d'après le corollaire 16 de la page 406) et pour $\ell_2 = +\infty$ la définition nous dit que v est minorée à partir d'un certain rang par 1 (par exemple). Dans les deux cas, la proposition 24 de la page 410 permet d'affirmer que $\lim(u\,v) = +\infty$.
  - Les autres cas s'obtiennent de la même manière.

Exercice 28 On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} - 1\right) = -1 < 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$. La proposition 25 de la page 411 permet donc de conclure que u diverge vers $-\infty$.

Exercice 29 La proposition 25 de la page 411 ne s'applique pas directement.
En revanche, l'écriture :

$$u_n = n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2}$$

permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Exercice 30 De nombreux choix sont possibles. On peut prendre :

1. $u_n = n$ et $v_n = -n$;
2. $u_n = n$ et $v_n = -n + (-1)^n$;
3. $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$ (pour $n \geqslant 1$) ;
4. $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ (pour $n \geqslant 1$).

Proposition 26 Soit u une suite convergeant vers une limite $\ell \neq 0$. D'après le corollaire 17 de la page 407, on peut trouver un entier n_0 et un réel $m > 0$ tels que :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad |u_n| \geqslant m.$$

La suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ est alors bien définie, et pour $n \geqslant n_0$ on peut écrire :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|\ell|\,|u_n|} \leqslant \frac{1}{|\ell|m}\,|u_n - \ell|.$$

Par opération sur les limites finies, la suite $\left(\dfrac{1}{|\ell|m}\,|u_n - \ell|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

On en déduit (*cf.* proposition 12 de la page 405) que $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ converge vers $\dfrac{1}{\ell}\cdot$

Proposition 27

- Comme u diverge vers $+\infty$, on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad u_n \geqslant 1$. Donc, à partir du rang n_0, tous les termes de la suite sont strictement positifs. La suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ est donc bien définie.
- Soit $\varepsilon > 0$. Comme u diverge vers $+\infty$, on peut trouver $n_1 \geqslant n_0$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_1 \quad u_n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}\cdot$$

  Pour $n \geqslant n_1$, on a alors $0 \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant \varepsilon$, ce qui donne $\left|\dfrac{1}{u_n}\right| \leqslant \varepsilon$. Cela montre que la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0.

Proposition 28 Montrons que la suite u diverge vers $+\infty$, autrement dit :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_1 \quad \frac{1}{u_n} \geqslant A.$$

Soit donc $A > 0$. Comme le réel $1/A$ est strictement positif et que u converge vers 0, on peut trouver un entier $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_1 \quad |u_n| \leqslant \frac{1}{A}\cdot$$

Posons $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Pour $n \geqslant n_2$ on a alors $0 < u_n \leqslant 1/A$, ce qui donne $1/u_n \geqslant A$.

D'où la divergence de $(1/u_n)_{n \geqslant n_0}$ vers $+\infty$.

Exercice 31 Le terme général apparaît comme le produit de deux quantités qui divergent, donc on ne peut pas conclure directement.

Cependant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \left(2 - \frac{\sin n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{\frac{\cos n}{n^2} - 3}\right)\cdot$$

Comme produits d'une suite bornée et d'une suite tendant vers 0, on a :

$$\frac{\sin n}{n^2} = \sin n \times \frac{1}{n^2} \to 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\cos n}{n^2} = \cos n \times \frac{1}{n^2} \to 0.$$

On en déduit que $2 - \dfrac{\sin n}{n^2} \to 2$ et $\dfrac{\cos n}{n^2} - 3 \to -3$, et enfin que $u_n \to -\dfrac{2}{3}\cdot$

Proposition 29 Supposons que u converge et notons ℓ sa limite. Comme u est positive à partir d'un certain rang, on a $u = |u|$ à partir d'un certain rang. Comme $|u|$ converge vers $|\ell|$, et par unicité de la limite, on en déduit que $\ell = |\ell|$, c'est-à-dire $\ell \geqslant 0$.

Théorème 31 D'après les hypothèses on a, à partir d'un certain rang :

$$0 \leqslant v_n - u_n \leqslant w_n - u_n.$$

- Puisque $\lim(w - u) = 0$, la proposition 12 de la page 405 permet d'affirmer que la suite $v - u$ converge vers 0.
- Comme $v = u + (v - u)$, on en déduit, par opérations sur les limites, que v converge et que $\lim v = \lim u$.

Exercice 32 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \frac{n}{\sqrt{n^4 + n}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}}\cdot$$

En sommant ces n encadrements, on obtient :

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4 + n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + 1}}\cdot$$

Comme :

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4 + n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}}} \to 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^4}}} \to 1,$$

le théorème d'encadrement assure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Théorème 33

1. Supposons la suite u majorée. Alors l'ensemble $\{u_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majoré. Il possède donc une borne supérieure ℓ. Montrons que u converge vers ℓ, c'est-à-dire :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \ell - \varepsilon < u_n \leqslant \ell + \varepsilon.$$
Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure (voir la proposition 2 de la page 395), on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant \ell$. Comme u est croissante et majorée par ℓ, on a alors :
$$\forall n \geqslant n_0 \quad \ell - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant \ell \leqslant \ell + \varepsilon,$$
ce qui termine la démonstration.
2. Supposons u non majorée et montrons qu'elle tend vers $+\infty$.
Soit M un réel quelconque. Il ne majore pas la suite u, donc on peut trouver un entier n_0 tel que $M \leqslant u_{n_0}$. Par croissance de la suite u, on a alors :
$$\forall n \geqslant n_0 \quad M \leqslant u_{n_0} \leqslant u_n,$$
ce qui prouve que $\lim u = +\infty$.

Exercice 33

1. • Le résultat est évidemment vrai pour $p = 1$.
   • Donnons-nous $p \geqslant 1$, supposons le résultat vrai au rang p, et montrons-le au rang $p+1$. On a :
$$\begin{aligned} \frac{1}{(p+1)!} = \frac{1}{p+1}\frac{1}{p!} &\leqslant \frac{1}{p+1}\,\frac{1}{2^{p-1}} && \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ &\leqslant \frac{1}{2^p} && \text{(car } p+1 \geqslant 2\text{).} \end{aligned}$$
   D'où le résultat.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la question précédente, on peut majorer u_n :
$$u_n = 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} \leqslant 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2^{p-1}} = 1 + 2\Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 3.$$
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3. Comme d'autre part elle est croissante, elle converge vers une limite $\ell \leqslant 3$.

Théorème 35 Soit u et v des suites adjacentes. Supposons u croissante et v décroissante. Comme u est croissante et v décroissante, la suite $u - v$ est croissante. Comme de plus elle tend vers 0, elle est à valeurs négatives, ce qui donne :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n.$$

- On en déduit que la suite u est majorée par v_0 puisque $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.
- Comme u est croissante, le théorème des suites monotones assure alors qu'elle converge.

Enfin, l'écriture $v = u + (v - u)$ permet de prouver que v converge et nous donne :
$$\lim v = \lim u + \underbrace{\lim (v - u)}_{=0}.$$

D'où le résultat.

Exercice 34

- La suite u est évidemment croissante.
- Un calcul élémentaire donne, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1-n}{(n+1)!} \leqslant 0,$$

donc la suite v est décroissante.

- On a $v_n - u_n = \dfrac{1}{n!}$, donc la suite $u - v$ tend vers 0.

Il en résulte que les suites u et v sont adjacentes, donc convergentes (vers la même limite).

Exercice 35 Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+2} - u_n = (-1)^{n+2}\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{(-1)^{n+3}}{(n+2)(n+3)}$$

ce qui prouve que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Comme $u_{2n+1} - u_{2n} = \dfrac{-1}{2n+2}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} - u_{2n} = 0$.

Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. On en déduit, d'après le théorème des suites adjacentes, que ces deux suites extraites de u convergent vers une limite commune, et donc que la suite u converge vers cette limite (*cf.* proposition 19 de la page 409).

Corollaire 36 Les suites a et b sont adjacentes, car :

- la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$$

nous assure que la suite a est croissante et que la suite b est décroissante ;

- le fait que les longueurs tendent vers 0 signifie que la suite $b - a$ tend vers 0.

Notons ℓ désigne leur limite commune. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant \ell \leqslant b_n.$$

Le réel ℓ appartient donc à chacun des segments $[a_n, b_n]$, et donc à leur intersection. Cela prouve l'inclusion :

$$\{\ell\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n].$$

Réciproquement, si un réel x appartient à $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$, alors on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant x \leqslant b_n$.

Donc, par passage à la limite, on obtient :

$$\ell = \lim a \leqslant x \leqslant \lim b = \ell,$$

Cela donne $x = \ell$, et montre la deuxième inclusion.

Il en résulte que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\ell\}$.

Théorème 37 Soit u une suite bornée. Désignons par m un minorant de la suite, et par M un majorant.

- Nous allons construire par récurrence une suite de segments emboîtés $I_n = [a_n, b_n]$ tels que, pour tout n, le segment I_n contiennent une infinité de termes de la suite (ou, plus précisément, que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$ soit infini).
  - ∗ Pour cela on commence par poser $I_0 = [m, M]$. Le segment I_0 vérifie bien la propriété souhaitée, car il contient tous les termes de la suite.
  - ∗ Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons construit un segment $I_n = [a_n, b_n]$ contenant une infinité de termes de la suite. Définissons alors I_{n+1} comme étant égal à $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ ou $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ de telle sorte que I_{n+1} contienne une infinité de termes de la suite (cela est possible car, parmi les deux segments $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ et $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$, il y en a au moins un qui contient une infinité de termes de la suite).

  On construit ainsi une suite de segments emboîtés dont les longueurs tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (on voit facilement que I_n a pour longueur $\frac{M-m}{2^n}$).

  D'après le théorème des segments emboîtés, l'intersection de tous les segments I_n contient donc un unique point, que nous notons ℓ. Nous allons maintenant extraire une sous-suite de u convergeant vers ℓ.
- Construisons par récurrence une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{\varphi(n)} \in I_n$; cela assurera la convergence la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
  - ∗ On pose $\varphi(0) = 0$. On a évidemment $u_{\varphi(0)} \in I_0$.
  - ∗ Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons avoir défini $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n-1)$ vérifiant :

  $$\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n-1) \qquad \text{et} \qquad \forall p \leqslant n-1 \quad u_{\varphi(p)} \in I_p.$$

  Comme l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$ est infini, il n'est pas majoré et donc contient des éléments strictement supérieurs à $\varphi(n-1)$. Choisissons l'un de ces éléments comme valeur de $\varphi(n)$. On a alors :

  $$\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n-1) < \varphi(n) \qquad \text{et} \qquad \forall p \leqslant n \quad u_{\varphi(p)} \in I_p.$$

  On a ainsi défini une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant :

  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{\varphi(n)} \in I_n.$$

  Pour $n \in \mathbb{N}$, les réels $u_{\varphi(n)}$ et ℓ appartiennent tous deux à I_n. Comme la longueur de I_n tend vers 0, on déduit que $u_{\varphi(n)} - \ell \to 0$, ce qui prouve la convergence de la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ.

Proposition 38

- Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on puisse trouver une suite d'éléments de A qui converge vers x, et montrons que A est dense dans $\mathbb{R}$. Pour cela, donnons-nous $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, et montrons qu'il existe au moins un élément de A tel que $|x - a| < \varepsilon$.

  Par hypothèse, on peut considérer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers x. Alors, à partir d'un certain rang, on a $|u_n - x| < \varepsilon$. D'où le résultat.

- Réciproquement, supposons que A soit dense dans $\mathbb{R}$, donnons-nous $x \in \mathbb{R}$, et montrons qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la densité de A dans $\mathbb{R}$ nous assure qu'on peut trouver au moins un élément a de A vérifiant $|a-x| < \frac{1}{n}$, ce qui nous permet de choisir un tel élément et de l'appeler u_n.

  On construit ainsi une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de A qui vérifie :
  $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n - x| < \frac{1}{n},$$
  donc qui converge vers x.

Exercice 36 Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $p_n = \lfloor 10^n x \rfloor$. Par définition de la partie entière, on a alors $p_n \leqslant 10^n x \leqslant p_n + 1$, ce qui donne, d'une part :
$$u_n \leqslant x < v_n.$$
et d'autre part :
$$10\, p_n \leqslant 10^{n+1} x < 10\, p_n + 10.$$

- Comme $p_{n+1} = \lfloor 10^{n+1} x \rfloor$, c'est le plus grand entier inférieur ou égal à $10^{n+1} x$. On en déduit que $10\, p_n \leqslant p_{n+1}$, ce qui donne $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite u est donc croissante.
- De même $1 + p_{n+1}$ est le plus petit entier strictement supérieur à $10^{n+1} x$. On en déduit que $1 + p_{n+1} \leqslant 10\, p_n + 10$, puis que $v_{n+1} \leqslant v_n$. La suite v est donc décroissante.
- Comme $v_n - u_n = 10^{-n}$, la suite $v - u$ converge vers 0.

Les suites u et v sont donc adjacentes, et convergent vers l'unique réel ℓ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$. Comme x vérifie cette propriété, on a $\ell = x$.

Proposition 39 Soit s un majorant de A.

- Supposons qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers s, et montrons que $s = \sup A$. Pour cela, utilisons la caractérisation donnée à la proposition 2 de la page 395 : donnons-nous $\varepsilon > 0$ et montrons qu'il existe $a \in A$ vérifiant $s - \varepsilon \leqslant a \leqslant s$.

  Par convergence de la suite u, on a, pour n assez grand, $|u_n - s| \leqslant \varepsilon$. Étant donné que s majore A, on a alors $s - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant s$, ce qui, comme $u_n \in A$, montre le résultat.
- Réciproquement, supposons que $s = \sup A$ et montrons qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers s.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le fait que $s = \sup A$ nous assure que l'on peut trouver au moins un élément a de A vérifiant $s - \frac{1}{n} \leqslant a \leqslant s$, et donc d'en choisir un et de le noter u_n.

  On construit ainsi une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $s - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant s$, ce qui donne $|u_n - x| < \frac{1}{n}\cdot$

  La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge donc vers x.

Exercice 37 Le raisonnement à faire est très similaire à la démonstration de la proposition 38 de la page 418.

Exercice 38 On obtient le segment $[0,2]$. En effet :

- il est clair que tout point de A est adhérent à A ;
- on peut construire des suites d'éléments de A convergeant vers 0, 1 et 2 :
  - pour 0, prenons la suite de terme général $1/n$ pour $n \geqslant 2$;
  - pour 1, prenons la suite de terme général $1+1/n$ pour $n \geqslant 2$;
  - pour 2, prenons la suite de terme général $2-1/n$ pour $n \geqslant 2$;
- si $x<0$, alors pour tout $a \in A$ on a $|a-x| \geqslant |x| > 0$, donc aucune suite d'éléments de A ne peut converger vers x ;
- si $x>2$, alors pour tout $a \in A$ on a $|a-x| \geqslant |x-2| > 0$, donc aucune suite d'élements de A ne peut converger vers x.

Exercice 39 Comme I n'est pas réduit à un point, on peut considérer b un point de I qui n'est pas égal à a.

- Supposons $a<b$.
  Comme I est un intervalle, on a $[a,b] \subset I$, et par suite $]a,b] \subset I \setminus \{a\}$.
  Il reste à construire une suite d'éléments de $]a,b]$ qui converge vers a : la suite de terme général $a + \dfrac{b-a}{n}$ pour $n \geqslant 1$ convient.
- Dans le cas où $a>b$, la suite de terme général $a+\dfrac{b-a}{n}$ est à nouveau une suite d'éléments de I qui converge vers a.

Proposition 40

- Si la suite u est bornée, alors on prouve que les suites $\operatorname{Re} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont bornées grâce aux inégalités :
$$0 \leqslant |\operatorname{Re} u_n| \leqslant |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant |\operatorname{Im} u_n| \leqslant |u_n|$$
- Réciproquement si $\operatorname{Re} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont bornées, alors l'inégalité :
$$|u_n| \leqslant \bigl|\operatorname{Re} u_n\bigr| + \bigl|\operatorname{Im} u_n\bigr|$$
  assure que la suite u est bornée.

Proposition 41

1. D'après l'inégalité triangulaire, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \bigl|u_n + v_n\bigr| \leqslant |u_n| + |v_n|.$$
   Comme les suites réelles $\bigl(|u_n|\bigr)$ et $\bigl(|v_n|\bigr)$ sont majorées, leur somme l'est aussi, ce qui montre que la suite $u+v$ est bornée.
2. Il suffit d'écrire $|u_n v_n| = |u_n| \times |v_n|$, et de savoir qu'un produit de deux suites réelles bornées est bornée (*cf.* exercice 16 de la page 401).
3. C'est un cas particulier de la propriété précédente.

Exercice 40 La suite définie par $u_n = \dfrac{(1+i)^n}{2^n}$ converge vers 0 car on a $|u_n| = \dfrac{1}{\sqrt{2^n}}$ et il est évident d'après les résultats sur les suites réelles que $\lim |u_n| = 0$.

Proposition 43

- L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est une conséquence des inégalités :
$$0 \leqslant |\mathrm{Re}\, u_n - \mathrm{Re}\, \lambda| \leqslant |u_n - \lambda| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant |\mathrm{Im}\, u_n - \mathrm{Im} \lambda| \leqslant |u_n - \lambda|$$
et du théorème de convergence par encadrement (théorème 31 de la page 413).
- L'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ est une conséquence de l'inégalité :
$$|u_n - \lambda| \leqslant |\mathrm{Re}\, u_n - \mathrm{Re}\, \lambda| + |\mathrm{Im}\, u_n - \mathrm{Im}\, \lambda|\,.$$
En effet, si l'on suppose (ii), alors l'inégalité précédente donne, par théorème d'encadrement, que $|u_n - \lambda| \to 0$, ce qui permet d'affirmer que $u_n \to \lambda$.

Exercice 41 La suite définie par $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right) + \left(2 + \dfrac{1}{n}\right) i$ converge vers $1 + 2i$ car les suites réelles $\mathrm{Re}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ convergent respectivement vers 1 et 2.

Exercice 42 La suite définie par $u_n = 1 + n\,i$ ne converge pas car la suite réelle $\mathrm{Im}\, u$ ne converge pas.

Exercice 43

- Si $|k| < 1$, la suite géométrique $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 car $\lim |k|^n = 0$.
- Si $|k| > 1$, la suite géométrique $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge car elle n'est pas bornée étant donné que $\lim |k|^n = +\infty$.

Proposition 47 Soit u une suite tendant vers λ et $v = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de u.

La suite réelle $|v - \lambda| = \left(\left|u_{\varphi(n)} - \lambda\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite à valeurs réelle $(|u_n - \lambda|)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 ; elle converge donc vers 0.

Donc la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est égale à λ.

Exercice 44 La suite considérée ne converge pas puisque :

- la sous-suite $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 donc converge vers 1,
- la sous-suite $(u_{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à i donc converge vers i.

Proposition 48 Soit u une suite complexe bornée.

La suite $\mathrm{Re}\, u$ est bornée, donc on peut trouver une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que la suite $\left(\mathrm{Re}\, u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

La suite $v = \left(\mathrm{Im}\, u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et l'on peut donc trouver une fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que la suite $\left(v_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

La suite $\left(\mathrm{Im}\, u_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors convergente par construction, et la suite $\left(\mathrm{Re}\, u_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente comme suite extraite de la suite convergente $\left(\mathrm{Re}\, u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Donc, d'après la proposition 43 de la page 421, la suite $\left(u_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Proposition 49 Soit u et v deux suites convergeant respectivement vers λ et μ.

1. Les suites réelles $\operatorname{Re} u$, $\operatorname{Im} u$, $\operatorname{Re} v$ et $\operatorname{Im} v$ convergent respectivement vers :
$$\operatorname{Re}\lambda,\ \operatorname{Im}\lambda,\ \operatorname{Re}\mu \text{ et } \operatorname{Im}\mu.$$
Par conséquent les suites $\operatorname{Re}(u+v)$ et $\operatorname{Im}(u+v)$ convergent respectivement vers :
$$\operatorname{Re}\lambda + \operatorname{Re}\mu = \operatorname{Re}(\lambda+\mu) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}\lambda + \operatorname{Im}\mu = \operatorname{Im}(\lambda+\mu).$$
Donc la suite $u+v$ converge vers $\operatorname{Re}(\lambda+\mu) + i\operatorname{Im}(\lambda+\mu)$, c'est-à-dire $\lambda+\mu$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :
$$\begin{aligned} 0 \leqslant |u_n v_n - \lambda\mu| &= \big|u_n(v_n-\mu) + \mu(u_n-\lambda)\big| \\ &\leqslant |u_n|\,|v_n-\mu| + |\mu|\,|u_n-\lambda|. \end{aligned}$$
De cet encadrement on déduit $\lim \big|u_n v_n - \lambda\mu\big| = 0$, et donc :
$$\lim(u_n v_n) = \lambda\mu.$$
3. Cas particulier du point précédent, en voyant k comme la suite constante égale à k.

Exercice 45 Supposons que la suite converge vers ℓ.

- Comme $|u_n| = 1$, on trouve $|\ell| = \lim |u_n| = 1$.
- Un passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = k\,u_n$ donne $\ell = k\,\ell$ et donc $\ell = 0$ (puisque $k \neq 1$).

D'où la contradiction.

Exercice 46 On a :
$$u_n = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{2^k}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1 - \frac{e^{i(n+1)\theta}}{2^{n+1}}}{1 - \frac{e^{i\theta}}{2}}\right).$$
La suite de terme général $\dfrac{e^{i(n+1)\theta}}{2^{n+1}}$ tend vers 0, comme produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0. En utilisant les résultats précédents, on obtient :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{e^{i(n+1)\theta}}{2^{n+1}}}{1 - \frac{e^{i\theta}}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{e^{i\theta}}{2}}.$$
On en déduit que u converge et que $\lim u = \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{1 - \frac{e^{i\theta}}{2}}\right)$. En simplifiant, on a :
$$\lim u = \frac{4 - 2\cos\theta}{5 - 4\cos\theta}.$$

Proposition 50

1. On applique à la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ le résultat correspondant sur les suites réelles.
2. Pour $n \geqslant n_0$, on peut écrire $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{\overline{u_n}}{|u_n|^2}$.
   - Comme u converge vers λ, la suite $\overline{u} = (\overline{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overline{\lambda}$.

- De même la suite réelle de terme général $|u_n|$ converge vers $|\lambda|$ et les résultats sur les suites à termes réels permettent de dire que la suite de terme général $\dfrac{1}{|u_n|^2}$ converge vers $\dfrac{1}{|\lambda|^2}$.

Par produit de suites convergentes, on en déduit que la suite de terme général $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{\overline{u_n}}{|u_n|^2}$ converge vers $\dfrac{\overline{\lambda}}{|\lambda|^2} = \dfrac{1}{\lambda}$.

Exercice 47

1. On montre, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + n\,r$.
2. On utilise l'expression du terme général u_n obtenue précédemment.
   - Il est clair que si la raison r est nulle, alors la suite est constante égale à u_0.
   - Supposons $r \neq 0$. Alors, comme la quantité $u_{n+1} - u_n$ est constante égale à r et ne tend donc pas vers 0, la suite n'est pas convergente.
     Dans le cas où $u_0 \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$, alors la suite est à valeurs réelles, et donc on peut s'intéresser à une éventuelle limite infinie ; plus précisément :
     - $*$ si $r < 0$, alors la suite diverge vers $-\infty$;
     - $*$ si $r > 0$, alors la suite diverge vers $+\infty$.

Exercice 48

1. On montre, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0\, a^n$.
2. On utilise l'expression du terme général u_n obtenue précédemment.
   Si $u_0 = 0$, alors la suite est la suite nulle. Supposons désormais $u_0 \neq 0$.
   - Si $|a| < 1$, alors la suite converge vers 0.
   - Si $a = 1$, alors la suite est constante égale à u_0.
   - Montrons que si $a \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, alors la suite est bornée mais divergente.
     Supposons $a \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Comme $|a| = 1$, la suite est évidemment bornée car :
     $$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| = |u_0| \times |a|^n = |u_0|.$$
     Prouvons par l'absurde que la suite u diverge : supposons qu'elle converge ; notons ℓ sa limite. Alors, en passant à la limite dans la relation :
     $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = a u_n,$$
     on obtient $\ell = a \times \ell$. Comme $a \neq 1$, il en résulte que $\ell = 0$, ce qui est contradictoire avec le fait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| = |u_0| > 0$.

     Remarque Si $a = -1$, alors on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n u_0$; les deux sous-suites $\big(u_{2n}\big)$ et $\big(u_{2n+1}\big)$ sont alors constantes, égales respectivement à u_0 et $-u_0$.

   - Si $|a| > 1$, alors on a $|u_n| \to +\infty$, donc la suite diverge.
     Dans le cas où $u_0 \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, on peut être plus précis :
     - $*$ si $a > 1$, alors la suite diverge vers $+\infty$ si $u_0 > 0$, et vers $-\infty$ si $u_0 < 0$;
     - $*$ si $a < -1$, alors :
       - $\star$ si $u_0 > 0$, alors $u_{2n} \to +\infty$ et $u_{2n+1} \to -\infty$;
       - $\star$ si $u_0 < 0$, alors $u_{2n} \to -\infty$ et $u_{2n+1} \to +\infty$.

Exercice 49

1. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente ; notons ℓ sa limite.
   Un passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = au_n + b$ donne alors $\ell = a\ell + b$, et donc, comme $a \neq 1$: $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.
2. • Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$u_{n+1} = au_n + b \qquad \text{et} \qquad \ell = a\ell + b,$$
   et donc, par différence des deux égalités :
   $$u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell).$$
   La suite de terme général $u_n - \ell$ est donc géométrique de raison a.
   • Comme $a \neq 1$ on en déduit (*cf.* exercice 48) que la suite converge si, et seulement si, $u_0 = \ell$ ou $|a| < 1$.
3. L'expression du terme général d'une suite géométrique donne, pour $n \in \mathbb{N}$:
   $$u_n - \ell = (u_0 - \ell)\, a^n,$$
   et donc finalement :
   $$u_n = \ell + (u_0 - \ell)\, a^n = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n.$$

Exercice 50 D'après la proposition 51 de la page 425, il suffit de trouver un ensemble contenant 2 et stable par la fonction :
$$f \ : \ x \mapsto \ln(1+x).$$
On constate que l'ensemble $\mathbb{R}_+$ convient ; en effet :
- on a $2 \in \mathbb{R}_+$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $1 + x \geqslant 1$, et donc, par croissance de la fonction $\ln$ et comme $\ln 1 = 0$, on a $f(x) \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 51 La proposition 51 de la page 425 ne permet pas de justifier l'existence d'une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, car il n'existe pas d'ensemble stable par la fonction $\ln$ et contenant 2.
Plus précisément, il n'existe pas de suite vérifiant la propriété souhaitée. En effet, si une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existait, alors on aurait $u_1 = \ln 2 < 1$, puis, par stricte croissance de la fonction $\ln$:
$$u_2 = \ln(\ln 2) < \ln 1 = 0,$$
ce qui rend impossible la relation $u_3 = \ln u_2$.

Exercice 52

1. Supposons f croissante, et montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
   • Si $u_0 \leqslant u_1$, alors on montre par récurrence que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}.$$
   En effet, l'initialisation est vérifiée par hypothèse, et si, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant u_{n+1}$, alors, en composant par f (et comme f est croissante), on obtient $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
   • Sinon, alors $u_0 > u_1$ et on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant u_{n+1}$.

Dans chacun des deux cas, la suite est monotone.

2. Supposons f décroissante. On constate que, si l'on note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'une des deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = f\big(f(v_n)\big) = (f \circ f)(v_n).$$

La fonction f étant décroissante, la fonction $f \circ f$ est croissante. D'après la première question, il en résulte que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Il reste à justifier que les sens de monotonie de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont opposés.

- Supposons $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$. Par décroissance de la fonction f, cela donne $f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2n+2})$, autrement dit $u_{2n+1} \geqslant u_{2n+3} = u_{2(n+1)+1}$. La suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.
- De manière analogue, si l'on suppose $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, on montre que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 53 C'est une simple vérification.
En notant $w_n = \lambda u_n + \mu v_n$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} w_{n+2} = \lambda\, u_{n+2} + \mu\, v_{n+2} &= \lambda\big(a\, u_{n+1} + b\, u_n\big) + \mu\big(a\, v_{n+1} + b\, v_n\big) \\ &= a\big(\lambda\, u_{n+1} + \mu\, v_{n+1}\big) + b\big(\lambda\, u_n + \mu\, v_n\big) = a\, w_{n+1} + b\, w_n. \end{aligned}$$

Exercice 54 On considère la propriété :

$$H_n \ : \ « \ u_n = v_n \ »$$

et on montre, par une récurrence à deux pas, que H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 55 Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$r^{n+2} - ar^{n+1} - br^n = (r^2 - ar - b)\, r^n.$$

Comme r est non nul, on en déduit que la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation étudiée si, et seulement si :

$$r^2 - ar - b = 0.$$

Proposition 52 Il faut dans un premier temps vérifier que, dans chacun des deux cas, les suites annoncées vérifient bien la relation $(\star)$. D'après l'exercice 53, il suffit de le vérifier :

- dans le cas (i), pour les suites $\big(r_1^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(r_2^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$: c'est évident, du fait que r_1 et r_2 sont solutions de l'équation caractéristique (*cf.* exercice 55) ;
- dans le cas (ii), pour les suites $\big(r^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(nr^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$; c'est évident pour la première car r est solution de l'équation caractéristique, et cela est également vrai pour la seconde car r est solution double de l'équation caractéristique ; on a en effet :

$$(n+2)r^{n+2} - a(n+1)r^{n+1} - bnr^n = nr^n \underbrace{(r^2 - ar - b)}_{=0} + r^{n+1} \underbrace{(2r - a)}_{=0}.$$

Il s'agit désormais de montrer la réciproque. Pour cela, comme nous avons vu (*cf.* exercice 54) qu'une suite vérifiant $(\star)$ est entièrement déterminée par ses deux premiers termes, il suffit de montrer que pour $(\omega_0, \omega_1) \in \mathbb{C}^2$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme annoncée telle que $u_0 = \omega_0$ et $u_1 = \omega_1$.

- **Cas** (i)**.** Pour une suite de la forme $u_n = \lambda_1\, r_1^n + \lambda_2\, r_2^n$, on a :
$$u_0 = \lambda_1 + \lambda_2 \qquad \text{et} \qquad u_1 = \lambda_1\, r_1 + \lambda_2\, r_2.$$
On a donc :
$$\begin{cases} u_0 = \omega_0 \\ u_1 = \omega_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & \omega_0 \\ r_1\,\lambda_1 & + & r_2\,\lambda_2 & = & \omega_1. \end{cases}$$
Comme $r_1 \neq r_2$, le système obtenu est de Cramer (son déterminant vaut $r_2 - r_1 \neq 0$) et donc possède une (unique) solution.
- **Cas** (ii)**.** Pour une suite de la forme $u_n = \lambda_1\, r^n + \lambda_2\, n\, r_2^n$, on a :
$$u_0 = \lambda_1 \qquad \text{et} \qquad u_1 = \lambda_1\, r + \lambda_2\, r.$$
On a donc :
$$\begin{cases} u_0 = \omega_0 \\ u_1 = \omega_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 & & & = & \omega_0 \\ r\,\lambda_1 & + & r\,\lambda_2 & = & \omega_1. \end{cases}$$
Comme r est non nul (du fait que r est solution double de l'équation caractéristique et que b est non nul), le système obtenu est de Cramer (son déterminant vaut $r \neq 0$) et donc possède une (unique) solution.

Proposition 53

- Les deux premiers cas se déduisent facilement du cas complexe. En effet, les suites réelles vérifiant la relation $(\star)$ sont à chercher parmi les suites complexes vérifiant cette même relation.
  - Dans le cas (i), il s'agit de montrer que la suite de terme général $\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$ est à termes réels si, et seulement si, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Un sens est évident, et l'autre s'obtient en résolvant le système obtenu lors dans la démonstration du cas (i) dans le cas complexe.
  - Même principe dans le cas (ii).
- Cas (iii).
  - Il est clair que les suites de la forme annoncée conviennent.
    En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} \rho^n\big(\lambda_1\, \cos(n\theta) + \lambda_2\, \sin(n\theta)\big) &= \rho^n\Big(\lambda_1\, \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} + \lambda_2\, \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}\Big) \\ &= \frac{\lambda_1 - i\lambda_2}{2}\, r^n + \frac{\lambda + i\lambda_2}{2}\, \overline{r}^n, \end{aligned}$$
    qui est une forme prévue par le cas (i) de la proposition 52 de la page 428.
  - Réciproquement, on montre que, pour tout $(\omega_0, \omega_1) \in \mathbb{R}^2$, il existe une suite de la forme souhaitée dont les deux premiers termes valent respectivement ω_0 et ω_1.

En effet, pour une suite de la forme $u_n = \rho^n\big(\lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta)\big)$, on a :

$$u_0 = \lambda_1 \qquad \text{et} \qquad u_1 = \rho\lambda_1 \cos\theta + \rho\lambda_2 \sin\theta.$$

On a donc :

$$\begin{cases} u_0 = \omega_0 \\ u_1 = \omega_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 & & & = & \omega_0 \\ (\rho\cos\theta)\,\lambda_1 & + & (\rho\sin\theta)\,\lambda_2 & = & \omega_1. \end{cases}$$

Comme $\rho\sin\theta$ est non nul (car on est dans le cas où $r = \rho e^{i\theta}$ est non réel), ce dernier système est de Cramer et donc possède une (unique) solution.

Exercice 56 L'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ a pour solutions :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Le terme général de la suite u est donc de la forme :

$$u_n = \lambda_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

La résolution du système $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases}$ nous donne $\lambda_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ et $\lambda_2 = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\cdot$

On peut donner la forme finale suivante pour u_n :

$$u_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Exercice 57 Cela est faux en général. Par exemple, si $u_n = (-1)^n$, alors le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant égal à -1, donc ne converge pas vers 1.

Exercice 58 Si la limite ℓ est non nulle, alors la suite u ne s'annule pas à partir d'un certain rang et, par opérations sur les limites, on a $\dfrac{u_n}{\ell} \to 1$, c'est-à-dire $u_n \sim \ell$.

En revanche, si $\ell = 0$, la relation $u_n \sim \ell$ n'a pas de sens (car la suite nulle ne rentre pas dans le cadre de la définition 17 de la page 429).

Exercice 59 Si u vérifie $\dfrac{u}{v} \to 1$, alors, comme toute suite admettant une limite non nulle, la suite $\dfrac{u}{v}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, et donc u non plus.

Proposition 54 Soit u, v et w trois suites réelles ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

Réflexivité : on a $\dfrac{u}{u} \to 1$, donc $u \sim u$.

Symétrie : si $u \sim v$ alors $\dfrac{u}{v}$ tend vers 1, et donc $\dfrac{v}{u} = \left(\dfrac{u}{v}\right)^{-1}$ aussi, d'où $v \sim u$.

Transitivité : si $u \sim v$ et $v \sim w$ alors on a $u \sim w$, car :

$$\frac{u}{w} = \underbrace{\frac{u}{v}}_{\to 1} \times \underbrace{\frac{v}{w}}_{\to 1} \to 1.$$

Proposition 55

- Supposons $u \sim v$. Soit n_0 un rang à partir duquel ces suites ne s'annulent pas. Pour $n \geqslant n_0$, posons $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}\cdot$
  Alors, la suite $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ ainsi définie tend vers 1 et vérifie :
  $$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n = v_n \times w_n.$$
- Réciproquement, supposons que w soit une suite tendant vers 1 et telle que $u = v\times w$ à partir d'un certain rang n_1. En notant n_2 un rang à partir duquel v ne s'annule pas, on a alors :
  $$\forall n \geqslant \max\{n_1, n_2\} \quad \frac{u_n}{v_n} = w_n.$$
  Comme $w \to 1$, cela montre que $\dfrac{u}{v} \to 1$, c'est-à-dire $u \sim v$.

Proposition 56 Supposons $v \sim u$. Alors, d'après la proposition 55 de la page 430, il existe une suite w tendant vers 1 telle que $v = u\times w$ à partir d'un certain rang. Comme $w \to 1$, on obtient, par opérations sur les limites, que v tend vers la même limite que u.

Proposition 57 Comme $u \sim v$, on peut écrire $v = u \times w$ à partir d'un certain rang, où w est une suite que tend vers 1. Comme elle tend vers 1, la suite w est strictement positive à partir d'un certain rang : u_n et v_n sont alors de même signe.

Proposition 58

1. Si $u \sim v$ et $u' \sim v'$, alors les quotients $\dfrac{u}{v}$ et $\dfrac{u'}{v'}$ tendent vers 1, donc leur produit $\dfrac{u}{v} \times \dfrac{u'}{v'} = \dfrac{u \times u'}{v \times v'}$ aussi.
2. Si $u \sim v$ et $u' \sim v'$, alors, de même, le quotient $\dfrac{u/u'}{v/v'} = \dfrac{u}{v} \times \dfrac{v'}{u'}$ tend vers 1.
3. Soit p un entier relatif. Si $u \sim v$, alors on a $u^p \sim v^p$, du fait que :
   $$\frac{u^p}{v^p} = \Big(\underbrace{\frac{u}{v}}_{\to 1}\Big)^p \to 1.$$

Exercice 60

1. Les suites v et w ne s'annulent pas, et pour tout $n \geqslant 1$, on a :
   $$\frac{v_n}{w_n} = \frac{1+1/n}{1+2/n} \to 1.$$
   On a donc $v \sim w$.
2. Pour $n \geqslant 1$, on a $u_n + v_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $u_n + w_n = \dfrac{2}{n^2} = 2\big(u_n + v_n\big)$.
   Ainsi, les suites $u+v$ et $u+w$ ne sont pas équivalentes.

Proposition 60 Si f dérivable en a, alors on a :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a).$$

Si de plus $f'(a) \neq 0$, alors la limite précédente se réécrit :

$$\frac{f(x)-f(a)}{f'(a)\,(x-a)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1.$$

Comme $u_n \to a$, on a alors, par composition de limites (*cf.* proposition 59 de la page 431) :

$$\frac{f(u_n)-f(a)}{f'(a)\,(u_n-a)} \to 1,$$

ce qui donne l'équivalent souhaité : $f(u_n)-f(a) \sim f'(a)\,(u_n-a)$.

Exercice 61 La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur $]-1,+\infty[$, dérivable en 1, et on a $f'(1) = 1 \neq 0$. Donc, d'après la proposition 60 de la page 432 :

$$f(u_n) - f(0) \sim f'(0)\,(u_n - 0),$$

c'est-à-dire :

$$\ln(1+u_n) \sim u_n.$$

Exercice 62 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right). \qquad (\star)$$

En appliquant le résultat de l'exercice précédent avec $u_n = \dfrac{a}{n}$, on a $\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right) \sim \dfrac{a}{n}$, et donc $n\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right) \to a$.

Le résultat souhaité s'obtient alors grâce à la relation $(\star)$, par composition de limites.

Exercice 63

1. La proposition 60 de la page 432 ne s'applique pas ici, car on a $\cos'(0) = 0$. D'ailleurs, si on l'appliquait sans prendre garde, alors on obtiendrait $\cos u_n \sim 0$, ce qui est incorrect (on rappelle que la suite nulle ne fait pas partie des suites considérées lors d'équivalents ; *cf.* définition 17 de la page 429).
2. La formule trigonométrique indiquée par l'énoncé donne :

$$\cos(u_n) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{u_n^2}{2}\right) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{u_n}{2}\right).$$

Comme $\dfrac{u_n}{2} \to 0$, on a $\sin\left(\dfrac{u_n}{2}\right) \sim \dfrac{u_n}{2}$, ce qui, par produit d'équivalents, donne le résultat souhaité.

Exercice 64 Les suites de termes généraux n^α et n^β sont bien définies à partir du rang 1 et ne s'annulent pas. Pour $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha-\beta}.$$

On a donc $n^\alpha = \mathrm{o}(n^\beta)$ si, et seulement si, $\alpha - \beta < 0$, c'est-à-dire $\alpha < \beta$.

Proposition 61 Par hypothèse, la suite v ne s'annule pas à partir d'un certain rang ; notons n_0 un tel rang.

- $*$ Supposons u dominée par v. En posant, pour $n \geqslant n_0$, $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$, on définit une suite $(w_n)_{n \geqslant n_0}$ qui est bornée du fait que $u = \mathrm{O}(v)$ et qui vérifie :
$$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n = v_n \times w_n.$$
  $*$ Réciproquement, supposons qu'il existe une suite bornée w telle que $u = v \times w$ à partir d'un certain rang $n_1 >$. On a alors :
$$\forall n \geqslant \max\{n_0, n_1\} \quad \frac{u_n}{v_n} = w_n.$$
  Comme w est bornée, cela montre que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n \geqslant n_2}$ est bornée à partir du rang $\max\{n_0, n_1\}$, et donc est bornée. On a donc $u = \mathrm{O}(v)$.
- Le second point se démontre par le même raisonnement que précédemment en remplaçant « borné » par « tend vers 0 » et « dominé » par « négligeable ».

Exercice 65

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{|a|^n} = \dfrac{|a|}{n+1} \to 0$, donc il existe bien un rang n_0 tel que :
$$\forall n \geqslant n_0 \quad \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant \frac{1}{2}.$$
2. Soit $n \geqslant n_0$. D'après la question précédente, on a :
$$\forall k \in [\![n_0, n-1]\!] \quad 0 \leqslant \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} \leqslant \frac{1}{2}.$$
   En faisant le produit de ces $n - n_0$ encadrements, on obtient :
$$\prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} \leqslant \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2},$$
   ce qui donne, par télescopage, $|u_n| \leqslant \dfrac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}$.
   Il en résulte que u converge vers 0 ce qui prouve que $a^n = \mathrm{o}\big(n!\big)$.

Proposition 62 Les quatre résultats s'obtenant par la même démarche, contentons-nous de montrer le premier. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ tendant vers $+\infty$. Par composition de limites, le résultat de croissances comparées :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\big(\ln x\big)^b}{x^a} = 0$$
nous donne la limite suivante :
$$\lim \frac{\big(\ln u_n\big)^b}{(u_n)^a} = 0,$$
ce qui signifie précisément que $\big(\ln u_n\big)^b = \mathrm{o}\big((u_n)^a\big)$.

Exercice 66

1. Si u est dominée par une suite bornée v, alors on a $u = \mathrm{O}(v)$ et $v = \mathrm{O}(1)$, et donc $u = \mathrm{O}(1)$, ce qui signifie que u est bornée.
2. Si u est dominée par une suite v qui tend vers 0, alors on a $u = \mathrm{O}(v)$ et $v = \mathrm{o}(1)$, et donc $u = \mathrm{o}(1)$, ce qui signifie que u tend vers 0.
3. Si u est négligeable devant une suite bornée v, alors on a $u = \mathrm{o}(v)$ et $v = \mathrm{O}(1)$, et donc $u = \mathrm{o}(1)$, ce qui signifie que u tend vers 0.

Proposition 63 Soit n_0 un rang à partir duquel les suites u et v ne s'annulent pas.
Pour $n \geqslant n_0$, on a :

$$\frac{u_n - v_n}{v_n} = \frac{u_n}{v_n} - 1.$$

On a donc $\dfrac{u_n - v_n}{v_n} \to 0$ si, et seulement si, $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$.
Ainsi, on a $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$ si, et seulement si, $u_n \sim v_n$.

Exercice 67

- Comme $\dfrac{1}{n} = \mathrm{o}(n^2)$, on a $n^2 + \dfrac{1}{n} \sim n^2$.
- Comme $1 = \mathrm{o}(n)$, on a $n + 1 \sim n$.
- Comme $\dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n^2} = \mathrm{o}(1)$, on a $1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n^2} \sim 1$.

Par produit d'équivalents, il en résulte que $u_n \sim n^3$.

Exercice 68 Pour $n \in \mathbb{N}$, un calcul classique donne :

$$e^{ix_n} - 1 = e^{i\frac{x_n}{2}}\left(e^{i\frac{x_n}{2}} - e^{-i\frac{x_n}{2}}\right) = e^{i\frac{x_n}{2}}\, 2\, i \sin\left(\frac{x_n}{2}\right)\cdot \qquad (\star)$$

Rappelons que $e^{i\frac{x_n}{2}} = \cos\left(\dfrac{x_n}{2}\right) + i \sin\left(\dfrac{x_n}{2}\right)$. Comme $x_n \to 0$, on a :

$$e^{i\frac{x_n}{2}} \to 1 \quad \text{i.e.} \quad e^{i\frac{x_n}{2}} \sim 1 \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{x_n}{2}\right) \sim \frac{x_n}{2}\cdot$$

Par produit d'équivalents, la relation $(\star)$ donne donc $e^{ix_n} - 1 \sim ix_n$.

S'entraîner et approfondir

8.1 Montrer que la partie A définie par :

$$A = \left\{ x \in [0,1] \mid \exists k \in [\![0, 2^n]\!] \quad x = \frac{k}{2^n} \right\}$$

est dense dans $[0,1]$.

8.2 Le produit de deux suites réelles minorées est-elle encore une suite minorée ?

8.3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$

est monotone et a la même monotonie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8.4 Montrer si une suite réelle est croissante à partir d'un certain rang, alors elle est minorée.

8.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Parmi les suites ci-dessous, trouver celles qui sont extraites d'une autre :

$$(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{3\times 2^n})_{n\in\mathbb{N}}$$
$$(u_{3\times 2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}.$$

8.6 Soit u une suite réelle et v une suite extraite de u. Montrer que toute suite extraite de v est également une suite extraite de u.

8.7 Étudier les limites des suites définies par :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n}$;
2. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ $(a > 0$ et $b > 0)$;
3. $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos n + \frac{1}{n^2}}$;
4. $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$.

8.8 Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. On considère les suites de termes généraux :

$$u_n = \min\{a_n, b_n\} \qquad \text{et} \qquad v_n = \max\{a_n, b_n\}.$$

Montrer que ces deux suites convergent respectivement vers :

$$\min\{\ell, \ell'\} \qquad \text{et} \qquad \max\{\ell, \ell'\}.$$

8.9 1. Soit u une suite réelle croissante admettant une sous-suite majorée.
Montrer que u converge.

2. Soit u une suite réelle croissante vérifiant :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad |u_{2^{p+1}} - u_{2^p}| \leqslant \frac{1}{2^p}\cdot$$

Montrer que la suite u est convergente.

8.10 On considère deux suites positives $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}\cdot$$

Montrer que ces deux suites convergent vers une limite commune.

8.11 On considère une suite réelle positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N} \mid u_n > 10^{-k}\right\}$ est fini. Montrer que la suite converge vers 0.

8.12 On considère la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\cdot$

Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}\cdot$

En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

8.13 Étudier la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{p} & \text{si } n = 2p \\ 1 - \frac{1}{p^2} & \text{si } n = 2p+1. \end{cases}$

8.14 Montrer que de toute suite non majorée on peut extraire une sous-suite qui diverge vers $+\infty$.

8.15 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle dont tous les termes sont des entiers relatifs.
Montrer que si cette suite est convergente, alors elle est stationnaire.

★ **8.16** On considère les deux suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}\cdot$$

1. Montrer que les deux suites u et v sont adjacentes.
2. Montrer que leur limite commune est un nombre irrationnel.
On supposera que leur limite commune est rationnelle et on montrera que c'est impossible en exploitant le fait que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n < \ell < v_n$ *.*
3. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, déterminer en fonction de ℓ la limite de la suite de terme général :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{ak+b}{k!}\cdot$$

8.17 Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{5n^2 + \sin n}{3(n+2)^2 \cos \frac{n\pi}{5}}$ est divergente.

8.18 Étudier la convergence de la suite u de terme général :

$$u_n = \left(5\sin\frac{1}{n^2} + \frac{1}{5}\cos n\right)^n.$$

8.19 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit monotone. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

⋆ **8.20** Soit u une suite telle qu'il existe une suite $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 vérifiant :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad |u_n| \leqslant \alpha_p + \frac{p}{n+1}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

⋆ **8.21** *Théorème de Cesàro*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. On souhaite montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers 0. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$:
   $$\left|\frac{u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
   Dans la suite, n_0 désigne un tel rang.
   (b) Montrer qu'il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$:
   $$\left|\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_0-1}}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
   Dans la suite, n_1 désigne un tel rang.
   (c) En déduire alors le résultat annoncé.
2. En déduire que, plus généralement, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est aussi et a même limite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que la réciproque est fausse.

⋆⋆ **8.22** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$v_n = \frac{u_1 + 2\,u_2 + \cdots + n\,u_n}{n^2}.$$

Montrer que si la suite u est convergente, alors la suite v l'est aussi.
On s'inspirera de la méthode utilisée dans l'exercice 8.21, et on pourra commencer par regarder le cas où la suite est constante.

8.23 On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de u_0 ainsi que la relation de récurrence :

$$u_{n+1} - (n+1)u_n = 2^n(n+1)!\,.$$

Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
On pourra poser $v_n = \dfrac{u_n}{n!}$.

⋆ **8.24** On considère deux suites u et v qui divergent vers $+\infty$, avec de plus :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0.$$

On fixe $\varepsilon>0$, et on considère un rang n_0 à partir duquel $|u_{n+1}-u_n|\leqslant\varepsilon$.

1. Montrer que pour tout réel x tel que $x\geqslant u_{n_0}$, il existe un terme u_p de la suite tel que $|u_p-x|\leqslant\varepsilon$.
2. En utilisant le fait que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, montrer que pour tout réel x, il existe $(p,m)\in\mathbb{N}^2$ tels que $|(u_p-v_m)-x|\leqslant\varepsilon$.
3. En déduire que l'ensemble $\{u_p-v_m\,;\,(p,m)\in\mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Relations de comparaisons

8.25 La proposition suivante est-elle vraie ?

Soit u et v deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang et équivalentes ; si v est monotone à partir d'un certain rang, alors u est monotone à partir d'un certain rang.

8.26 Trouver un équivalent simple des suites définies par :

1. $u_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$;
2. $v_n=e^{1/n}-e^{1/(n+1)}$;
3. $w_n=\sqrt{1+\dfrac{1}{\ln(n+1)}}-1$.

8.27 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0>0$ et $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n}\cdot$

En considérant $\dfrac{1}{u_n}$, montrer que $u_n\sim\dfrac{1}{n}\cdot$

8.28 1. Montrer que :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*\quad \frac{1}{2\sqrt{k+1}}\leqslant\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{k}}\cdot$$

2. En déduire un équivalent simple de $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot$

8.29 Comparer, à l'aide du symbole o, les quatre suites définies par :

$$u_n=n^{(\ln n)^2},\quad v_n=(n^2)^{\ln n},\quad w_n=(\ln n)^{n\ln n}\quad\text{et}\quad z_n=(n\ln n)^n.$$

⋆ **8.30** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k!\sim n!$

Solution des exercices

8.1 On a bien $A \subset [0,1]$. Soit x et y dans $[0,1]$ vérifiant $x < y$. Donnons-nous $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\frac{1}{2^{n_0}} \leqslant y - x,$$

et posons $k_0 = \max\left\{k \in \mathbb{N} \mid \dfrac{k}{2^{n_0}} \leqslant x\right\}$ (un tel k_0 est bien défini car l'ensemble considéré est non vide et fini). On a alors $x \leqslant \dfrac{k_0+1}{2^{n_0}} \leqslant y$.

8.2 Le produit de deux suites réelles minorées n'est pas nécessairement une suite minorée, comme le prouve l'exemple des suites de termes généraux $u_n = n$ et $v_n = -1$.

8.3
- Supposons la suite u croissante, et montrons que la suite v l'est aussi. Pour cela, fixons $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons que $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$, ou, de manière équivalente, que $n(n+1)(v_{n+1} - v_n) \geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= n(u_1 + \cdots + u_{n+1}) - (n+1)(u_1 + \cdots + u_n) \\ &= nu_{n+1} - (u_1 + \cdots + u_n) \\ &= \underbrace{(u_{n+1} - u_1)}_{\geqslant 0 \text{ (croissance de } u)} + \cdots + \underbrace{(u_{n+1} - u_n)}_{\geqslant 0 \text{ (croissance de } u)}, \end{aligned}$$

  ce qui donne le résultat souhaité.
- Si la suite u est décroissante, alors, en appliquant le point précédent à la suite $-u$, on montre que la suite $-v$ est croissante, donc que v est décroissante.

8.4 Notons u la suite considérée. Soit n_0 un rang à partir duquel la suite est croissante. On a alors en particulier :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n \geqslant u_{n_0}.$$

La suite est donc minorée par le réel $\min\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}, u_{n_0}\}$.

8.5
- $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$.
- $(u_{2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$.
- $(u_{3\times 2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$.
- $(u_{3\times 2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3\times 2^n})_{n\in\mathbb{N}}$.

8.6 Soit w une suite extraite de v. Montrons que w est une suite extraite de u, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_{\psi(n)}. \qquad (\star)$$

Comme v est une suite extraite de u, il existe une fonction $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ stritement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{\varphi_1(n)}.$$

De même, comme w est une suite extraite de v, il existe une fonction $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ stritement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = v_{\varphi_2(n)}.$$

On constate alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n = v_{\varphi_2(n)} = u_{\varphi_1(\varphi_2(n))}$. La fonction $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ vérifie donc bien la propriété $(\star)$. Cela donne le résultat souhaité puisque, comme φ_1 et φ_2 sont strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, ψ l'est aussi.

8.7 1. Écrivons $u_n = \sin(n^2) \times \dfrac{1}{n}$ (pour $n > 0$). La suite considérée tend vers 0, comme produit d'une suite bornée et d'une suite tendant vers 0.

2. Comme $a > 0$ et $b > 0$, u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$; on est dans un des trois cas suivants :
   - Si $a = b$, alors la suite considérée est la suite nulle.
   - Si $b > a$, alors, en écrivant $u_n = \dfrac{(\frac{a}{b})^n - 1}{(\frac{a}{b})^n + 1}$, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -1$.
   - Si $a > b$, alors, en écrivant $u_n = \dfrac{1 - (\frac{b}{a})^n}{1 + (\frac{b}{a})^n}$, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

3. Il est facile de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $5n^3 + \cos\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \neq 0$; cela assure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{1 + \frac{5}{n^2}}{5 + \frac{\cos n}{n^3} + \frac{1}{n^5}}$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{1}{5}\cdot$

4. Il est facile de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $5n + (-1)^{n+1} \neq 0$; cela assure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{2 + \frac{(-1)^n}{n}}{5 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}}$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{2}{5}\cdot$

8.8 On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{a_n + b_n - |a_n - b_n|}{2} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{a_n + b_n + |a_n - b_n|}{2}.$$

On peut donc conclure, par opérations sur les limites, que les suites u et v tendent respectivement vers $\dfrac{\ell + \ell' - |\ell - \ell'|}{2}$ et $\dfrac{\ell + \ell' + |\ell - \ell'|}{2}$, c'est-à-dire vers $\min\{\ell, \ell'\}$ et $\max\{\ell, \ell'\}$ respectivement.

8.9 1. Raisonnons par l'absurde : supposons que u diverge. Comme u est croissante, cela signifie que $u \to +\infty$, et donc il en est de même pour tout sous-suite de u. Cela contredit l'existence d'une sous-suite majorée.

2. Montrons que la suite extraite $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Cela donnera le résultat souhaité grâce à la question 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, par télescopage :

$$u_{2^n} = u_1 + \sum_{k=0}^{n-1} \bigl(u_{2^{k+1}} - u_{2^k}\bigr),$$

   ce qui donne le fait que la suite $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée :

$$u_{2^n} \leqslant u_1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = u_1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \leqslant u_1 + 2.$$

8.10 • Pour $n \geqslant 1$, on a $2(v_n - u_n) = \left(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}}\right)^2 \geqslant 0$, ce qui prouve que $v_n \geqslant u_n$.

• On montre alors que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ décroissante. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0$$

et

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - \sqrt{u_n}^2 = \sqrt{u_n}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right) \geqslant 0.$$

• Comme la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée (par v_1), elle converge vers un réel ℓ. De même, la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ étant décroissante et minorée (par u_1), elle converge vers un réel ℓ'.

• En passant à la limite dans la relation $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ on a alors $\ell' = \dfrac{\ell + \ell'}{2}$, ce qui donne finalement $\ell = \ell'$.

8.11 Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon. \tag{$\star$}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $10^{-k} \leqslant \varepsilon$. L'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N} \mid u_n > 10^{-k}\right\}$ est fini, donc admet un plus grand élément m. L'entier $n_0 = m + 1$ vérifie alors la propriété $(\star)$.

Donc la suite converge vers 0.

8.12 On trouve $a = c = \dfrac{1}{2}$ et $b = -1$. On écrit ensuite :

$$\begin{aligned} v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right)\right). \end{aligned}$$

En simplifiant, on obtient $v_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n+2}$, d'où une convergence vers $\dfrac{1}{4}\cdot$

8.13 Les deux suites extraites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ convergent vers 1, donc, d'après la proposition 19 de la page 409, la suite converge vers 1.

8.14 Construisons par récurrence un fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{\varphi(n)} \geqslant n.$$

La sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tendra alors vers $+\infty$, ce qui prouvera le résultat souhaité.

- Comme la suite u est non majorée, elle n'est pas majorée par 0.
  On peut fixer $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $u_{\varphi(0)} \geqslant 0$.
- Supposons construits $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n)$ tels que :

  $$\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n) \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0,n]\!] \quad u_{\varphi(k)} \geqslant k,$$

  et construisons $\varphi(n+1)$.

  Comme la suite u n'est pas majorée, la suite $(u_m)_{m\geqslant\varphi(n)+1}$ ne l'est pas non plus, et donc n'est pas majorée par $n+1$. Il existe donc $p > \varphi(n)$ tel que $u_p \geqslant n+1$. Fixons $\varphi(n+1)$ à une telle valeur de p. On vérifie alors facilement que l'on a :

  $$\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n) < \varphi(n+1) \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0,n+1]\!] \quad u_{\varphi(k)} \geqslant k.$$

8.15 Supposons que la suite u converge ; notons ℓ sa limite. Alors, la sous-suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ, et donc on a $u_{n+1} - u_n \to 0$. Il existe donc un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Comme la suite u est à valeurs entières, on a alors :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad u_{n+1} = u_n,$$

ce qui montre que la suite u est stationnaire.

8.16 1. Il est clair que :

- u est croissante ;
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n$;
- $v_n - u_n \to 0$.

Pour montrer que u et v sont adjacentes, il reste donc à montrer que la suite v est décroissante. Cela s'obtient sans difficulté, car, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n\,n!}\\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!}\\
&= \Big(n(n+1) + n - (n+1)^2\Big)\frac{1}{n(n+1)(n+1)!}\\
&= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} \leqslant 0.
\end{aligned}$$

2. Supposons que ℓ soit rationnel ; écrivons $\ell = \dfrac{p}{q}$, avec $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

   On montre facilement que la croissance de u et la décroissance de v sont strictes. Il en résulte que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < \dfrac{p}{q} < v_n$, ce qui donne en particulier :

$$u_q < \frac{p}{q} < v_q = u_q + \frac{1}{q \times q!}.$$

   En multipliant par $q!$, on obtient :

$$u_q\, q! < p\,(q-1)! < u_q\, q! + \frac{1}{q}.$$

   Étant donné que $q \in \mathbb{N}^*$, cela implique l'encadrement suivant :

$$u_q\, q! < p\,(q-1)! < u_q\, q! + 1.$$

   Mais, comme $u_q\, q!$ et $p\,(q-1)!$ sont deux nombres entiers, cet encadrement ne peut avoir lieu. On aboutit donc à une contradiction, ce qui montre que ℓ est un nombre irrationnel.

   Remarque Il sera vu plus tard dans le cours d'analyse que cette limite vaut e.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{ak+b}{k!} = a(1+u_{n-1}) + bu_n.$$

   Par opérations sur les limites, la suite converge donc vers $a(1+\ell)+b\ell$.

8.17 Tout d'abord on vérifie que la suite est bien définie, ce qui est le cas car pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\cos \dfrac{n\pi}{5} \neq 0$. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos \frac{x\pi}{5} = 0 \iff \frac{x\pi}{5} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff x \equiv \frac{5}{2}\ [5],$$

ce qui n'est vérifié par aucun nombre entier.

Une manière efficace d'obtenir la divergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de remarquer que :

- la sous-suite $(u_{10n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\dfrac{5}{3}$;
- la sous-suite $(u_{10n+5})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\dfrac{5}{3}$.

8.18 La suite de terme général $5\sin\dfrac{1}{n^2}$ tend vers 0, donc on peut fixer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \left|5\sin\frac{1}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{5}.$$

Pour $n \geqslant n_0$, on a alors $\left|5\sin\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{5}\cos n\right| \leqslant \dfrac{2}{5}$, et donc $|u_n| \leqslant \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

Il en résulte que la suite u converge vers 0.

8.19 Quitte à considérer la suite $-u$, on peut supposer que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Distinguons deux cas :

- si $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n\leqslant 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, et donc converge;
- si $\exists n_0\in\mathbb{N}\quad u_{n_0+1}-u_{n_0}>0$, alors, la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, on a, en considérant un tel rang n_0 :
$$\forall n\geqslant n_0\quad u_{n+1}-u_n\geqslant u_{n_0+1}-u_{n_0}>0.$$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors croissante à partir du rang n_0, et donc, comme elle est majorée, elle converge.

8.20 Revenons à la définition pour montrer que la suite u tend vers 0.
Fixons $\varepsilon>0$, et montrons que :
$$\exists n_0\in\mathbb{N}\quad\forall n\geqslant n_0\quad |u_n|\leqslant\varepsilon.$$

- Comme la suite (α_p) tend vers 0, on peut fixer $p_0\in\mathbb{N}$ tel que $|\alpha_{p_0}|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.
- Puis, comme la suite de terme général $\dfrac{p_0}{n+1}$ tend vers 0, on peut fixer un rang $n_0\in\mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n\geqslant n_0\quad\left|\frac{p_0}{n+1}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

On obtient alors le résultat souhaité, car, pour $n\geqslant n_0$, on a :
$$|u_n|\leqslant|\alpha_{p_0}|+\left|\frac{p_0}{n+1}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

8.21 1. (a) Comme la suite u vers 0, on peut considérer un rang $n_0\in\mathbb{N}$ tel que :
$$n\geqslant n_0\Longrightarrow|u_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$
On a alors, pour $n\geqslant n_0$:
$$\left|\frac{u_{n_0}+u_{n_0+1}+\cdots+u_n}{n}\right|\leqslant\frac{|u_{n_0}|+|u_{n_0+1}|+\cdots+|u_n|}{n}\leqslant\frac{n-n_0+1}{n}\times\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

(b) L'existence du rang n_1 vérifiant la condition souhaitée provient simplement de la limite suivante (l'entier n_0 ayant été fixé) :
$$\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{n_0-1}}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

(c) Pour $n\geqslant\max\{n_0,n_1\}$, on a :
$$|v_n|\leqslant\left|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{n_0-1}}{n}\right|+\left|\frac{u_{n_0}+u_{n_0+1}+\cdots+u_n}{n}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$
D'après la définition de la convergence d'une suite, cela montre que $v_n\to 0$.

2. • Il suffit d'appliquer la résultat précédent à la suite de terme général $u_n - \ell$ (où ℓ est la limite de la suite). En effet, en écrivant :

$$v_n - \ell = \frac{(u_1 - \ell) + (u_2 - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)}{n},$$

on obtient que $v_n - \ell \to 0$, c'est-à-dire $v_n \to \ell$.

• La réciproque est fausse : si $u_n = (-1)^n$, alors la suite (u_n) est divergente, alors que la suite (v_n) converge vers 0.

8.22 Supposons que la suite u converge ; notons ℓ sa limite. On a :

$$v_n - \frac{n+1}{2n} \times \ell = v_n - \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} \times \ell = \frac{(u_1 - \ell) + 2(u_2 - \ell) + \cdots + n(u_n - \ell)}{n^2}.$$

On montre alors, de la même manière que lors de l'exercice précédent, que la suite de terme général $v_n - \dfrac{n+1}{2n} \times \ell$ converge vers 0.

Il en résulte que la suite v converge vers $\dfrac{\ell}{2}$.

8.23 Comme suggéré par l'énoncé, posons $v_n = \dfrac{u_n}{n!}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{(n+1)!} - \frac{u_n}{n!} = 2^n,$$

ce qui donne :

$$v_{n+1} - v_n = 2^n.$$

On a donc :

$$v_n = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = v_0 + 2^n - 1.$$

On en déduit l'expression suivante pour u_n :

$$u_n = (u_0 + 2^n - 1)\, n!.$$

8.24 1. Soit $p = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > n_0 \quad \text{et} \quad u_k > x\}$ (l'ensemble considéré est une partie non vide de $\mathbb{N}$, car la suite u diverge vers $+\infty$).

On a alors $u_p > x$, et, comme $p - 1 \geqslant n_0$, on a $|u_p - u_{p-1}| \leqslant \varepsilon$. Montrons que $u_{p-1} \leqslant x$, ce qui nous donnera l'encadrement $u_{p-1} \leqslant x < u_p$, et donc $|u_p - x| \leqslant \varepsilon$.

Distinguons deux cas :

• si $p = n_0 + 1$, alors $p - 1 = n_0$, et donc, par hypothèse sur x, on a $u_{p-1} \leqslant x$,

• si $p > n_0 + 1$, alors $p - 1 > n_0$. Or, par définition de p, l'entier $p - 1$ n'appartient pas à l'ensemble considéré ci-dessus, et donc nécessairement $u_{p-1} \leqslant x$.

2. Soit x un réel quelconque. Comme (v_n) diverge vers $+\infty$, il existe m tel que :

$$x + v_m \geqslant u_{n_0}.$$

Il suffit alors d'utiliser le résultat de la question précédente avec $\tilde{x} = x + v_m$.

3. La densité de l'ensemble considéré découle directement de la question précédente.

8.25 La proposition est fausse. Par exemple, on a $n + (-1)^n \sim n$, mais la suite de terme général n est croissante tandis que la suite de terme général $n + (-1)^n$ n'est pas monotone à partir d'un certain rang.

8.26 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, en multipliant en haut et en bas par la quantité conjuguée :

$$u_n = \frac{(n+2)-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}.$$

On a alors (pour $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$u_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} \times \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}.$$

Comme $\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to 1$, on en déduit que $u_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$v_n = e^{\frac{1}{n+1}}\left(e^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}} - 1\right) = e^{\frac{1}{n+1}}\left(e^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right).$$

Comme $\dfrac{1}{n(n+1)} \to 0$, on a :

$$e^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1 \sim \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Comme de plus on a $e^{\frac{1}{n+1}} \to 1$ et donc $e^{\frac{1}{n+1}} \sim 1$, on obtient :

$$v_n \sim \frac{1}{n^2}.$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient, en multipliant en haut et en bas par la quantité conjuguée :

$$w_n = \frac{1}{\ln(n+1)} \times \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\ln(n+1)}}+1}. \qquad (\star)$$

- D'une part, on a, pour $n \geqslant 2$, $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \to 1$, et donc :

$$\ln(n+1) \sim \ln n.$$

- D'autre part, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\ln(n+1)}}+1} \to \frac{1}{2} \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\ln(n+1)}}+1} \sim \frac{1}{2}.$$

D'après $(\star)$, et par quotient d'équivalents, on a donc $w_n \sim \dfrac{1}{2\ln n}$.

8.27 Le fait que l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ soit stable par la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ assure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et l'on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1+u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + 1,$$

ce qui donne, par récurrence immédiate :

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_0} + n.$$

On a donc $\dfrac{1}{u_n} \sim n$, puis $u_n \sim \dfrac{1}{n}\cdot$

8.28 1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}\cdot$$

L'encadrement souhaité s'obtient alors en composant par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ l'encadrement :

$$0 < 2\sqrt{k} \leqslant \sqrt{k+1} + \sqrt{k} \leqslant 2\sqrt{k+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall k \in [\![2, n]\!] \quad \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}} \leqslant \sqrt{k} - \sqrt{k-1}\cdot$$

En sommant ces $n-1$ encadrements, il vient :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \frac{u_n - 1}{2} \leqslant \sqrt{n} - 1,$$

ce qui se transforme en :

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}} - \sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{u_n}{2\sqrt{n}} \leqslant 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot$$

On est alors en mesure d'appliquer le théorème d'encadrement pour affirmer que $\dfrac{u_n}{2\sqrt{n}} \to 1$, et donc $u_n \sim 2\sqrt{n}$.

8.29 Montrons que l'on a :

$$v_n = \mathrm{o}(u_n), \quad u_n = \mathrm{o}(z_n) \quad \text{et} \quad z_n = \mathrm{o}(w_n).$$

Commençons par transformer les expressions de u_n, v_n, w_n et z_n en utilisant l'exponentielle. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \exp\left((\ln n)^3\right), \quad v_n = \exp\left(2(\ln n)^2\right),$$

$$w_n = \exp\left(n(\ln n)\ln(\ln n)\right) \quad \text{et} \quad z_n = \exp\left(n\ln n + n\ln(\ln n)\right) z_n = \exp\left(n\ln(n\ln n)\right).$$

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{v_n}{u_n} = \exp\left(2(\ln n)^2 - (\ln n)^3\right) = \exp\Big(\underbrace{(\ln n)^2(2 - \ln n)}_{\to -\infty}\Big).$$

Par composition de limites, on a donc $\dfrac{v_n}{u_n} \to 0$, c'est-à-dire $v_n = \mathrm{o}(u_n)$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{u_n}{z_n} = \exp\big((\ln n)^3 - n(\ln(n\ln n))\big) = \exp\left(n\left(\frac{(\ln n)^3}{n} - \ln(n\ln n)\right)\right). \qquad (\star)$$

Par croissances comparées, on a $\dfrac{(\ln n)^3}{n} \to 0$. On obtient alors que :

$$n\left(\frac{(\ln n)^3}{n} - (\ln n)\ln(\ln n)\right) \to -\infty.$$

Donc, d'après $(\star)$ et par composition de limites, on a $\dfrac{u_n}{z_n} \to 0$, ce qui prouve que $u_n = \mathrm{o}(z_n)$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{z_n}{w_n} &= \exp\big(n\ln n + n\ln(\ln n) - n(\ln n)\ln(\ln n)\big)\\ &= \exp\left(\underbrace{n(\ln n)\ln(\ln n)}_{\to+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{\ln(\ln n)} + \frac{1}{\ln n} - 1\right)}_{\to -1}\right).\end{aligned}$$

On obtient finalement $\dfrac{z_n}{w_n} \to 0$, c'est-à-dire $z_n = \mathrm{o}(w_n)$.

8.30 Montrons que $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \to 1$. Pour $n \geqslant 2$, on a :

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2} k!$$

Il s'agit donc de montrer que $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} k! \to 0$. Écrivons :

$$\forall k \in [\![1, n-2]\!] \quad 0 \leqslant k! \leqslant (n-2)!$$

On obtient :

$$0 \leqslant \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2} k! \leqslant \frac{(n-2)(n-2)!}{n!} = \frac{n-2}{n(n-1)}.$$

Le théorème d'encadrement permet alors de conclure.

Chapitre 9 : Limites et continuité

I L'aspect ponctuel : limites, continuité 484
1 Au voisinage. 484
2 Définitions, premières propriétés 485
3 Utilisation des suites 491
4 Application aux suites récurrentes 492
5 Opérations sur les limites 494
6 Propriétés liées à l'ordre 498
7 Démontrer l'existence ou la non existence de limites 500
8 Limites et continuité à droite, à gauche 503
9 Prolongement par continuité 505
10 Limite monotone 507
II L'aspect global : fonctions continues sur un intervalle 508
1 L'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ 508
2 Théorème des valeurs intermédiaires 511
3 Fonctions définies sur un segment 514
4 Théorème de la bijection 515
5 Continuité uniforme 517
III Extension aux fonctions à valeurs complexes . . . 519
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 522
Exercices 540

Limites et continuité

9

Dans ce chapitre nous allons étendre aux fonctions la notion de limite vue pour les suites. Cette notion a déjà été abordée de manière plus ou moins formelle dans le secondaire et vous l'avez utilisée aux chapitres 4 et 5 ; nous allons ici la formaliser rigoureusement.
Tout au long de ce chapitre, I est un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et :

- soit a est un réel intérieur à I,
- soit a est une des extrémités de I avec :
  - $*$ a réel (il appartient alors ou non à I)
  - $*$ ou $a = \pm\infty$.

Sauf mention expresse du contraire, toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

I L'aspect ponctuel : limites, continuité

1 Au voisinage...

Considérons une assertion $\mathcal{P}$ susceptible d'être vérifiée ou non par une fonction. Par exemple, la propriété $\mathcal{P}$ peut être « f est croissante », ou encore « f est à valeurs strictement positives ».

Définition 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et J un intervalle d'intérieur non vide inclus dans I.
On dit que **f vérifie $\mathcal{P}$ sur J** si la restriction $f_{|J}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

p.522

Exercice 1 Considérons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$.

La fonction f est-elle monotone sur $]0,+\infty[$? sur son domaine de définition ?

Définition 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a vérifiant les hypothèses de la page précédente.

- Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que f **vérifie la propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de a** s'il existe un réel $r > 0$ tel que f vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap [a-r, a+r]$.
- Si $+\infty$ est l'extrémité supérieure de I, on dit que f **vérifie la propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de $+\infty$** s'il existe un réel M tel que f vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap]M, +\infty[$.
- Si $-\infty$ est l'extrémité inférieure de I, on dit que f **vérifie la propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de $-\infty$** s'il existe un réel M tel que f vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap]-\infty, M[$.

Remarque La locution « au voisinage de x » joue souvent pour les fonctions un rôle analogue à celui de la locution « à partir d'un certain rang » pour les suites.

Exemple Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^2$.
- La fonction f est bornée au voisinage de tout point a de $\mathbb{R}$.
- La fonction est croissante au voisinage de $+\infty$, mais elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}$.
- La fonction f n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$.

p.522

Exercice 2 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f vérifie la propriété $\mathcal{P}_1$ au voisinage de a et qu'elle vérifie la propriété $\mathcal{P}_2$ au voisinage de a.

Montrer que f vérifie « $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ » au voisinage de a.

Remarque Dire qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ vérifie une propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de a, implique que la restriction f à un certain intervalle $J \subset I$ vérifie la propriété, où J est un intervalle vérifiant les hypothèses de la page ci-contre, en particulier d'intérieur non vide (et donc infini).

2 Définitions, premières propriétés

La définition de la limite vue pour les suites conduit naturellement à des généralisations aux fonctions. Ces généralisations se distinguent selon que l'on se place en un point « fini » ou pas et que la limite est finie au pas.
Nous nous intéressons d'abords aux limites finies. Pour une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, nous avons vu au chapitre 8 que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ signifie : pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité $|a_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ est vérifiée à partir d'un certain rang. Pour définir $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, on est conduit tout naturellement à remplacer la locution « à partir d'un certain rang » par « au voisinage de ... ». Nous précisons cela ci-dessous.

Limites finies

Définition 3 (Limite finie à l'infini)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R}$.

- Supposons I non majoré.

  On dit que **$f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$**, si :
  $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad \Big(x \geqslant M \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\Big).$$

- Supposons I non minoré.

  On dit que **$f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$**, si :
  $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad \Big(x \leqslant M \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Lorsque $a \in \mathbb{R}$, rappelons qu'il y a trois cas de figure : a est intérieur à I, a est une borne de I qui appartient à I et a est une borne de I n'appartenant pas à I. La définition suivante regroupe ces trois cas.

Définition 4 (Limite finie en un réel)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R}$. Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que **$f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a**, si :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad \Big(|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Considérons le cas particulier où a apprtient à I.

Proposition 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. Si f admet une limite ℓ en a, alors $\ell = f(a)$. On dit alors que **f est continue en a**.

Dans le cas contraire, on dit que f est **discontinue** en a.

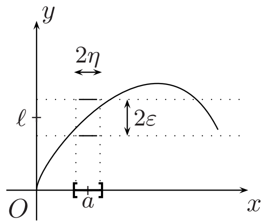
Principe de démonstration. On montre $\forall \varepsilon > 0 \quad \big|f(a) - \ell\big| \leqslant \varepsilon$. Démonstration page 522

Remarques

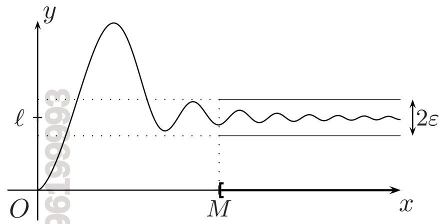
- La continuité n'est donc qu'un cas particulier (important !) de limite.
- Par extension, il arrive, lorsque a est un point intérieur à I, que l'on cherche la limite d'une fonction définie seulement sur $I \setminus \{a\}$ (voir par exemple la définition de la dérivabilité page 40).

  Nous étudierons ce cas de figure d'une fonction définie sur un « intervalle épointé » à la page 505.

- Dans tous les cas de figure, on peut traduire « $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a » par : « pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité $\mathcal{P}_\varepsilon : |f-\ell| \leqslant \varepsilon$ est vérifiée au voisinage de a ».



Limite (continuité) en $a \in \mathbb{R}$



Limite en $+\infty$

Notation La propriété : « $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a » se note $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Remarques Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- La locution « $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a » se dit aussi « f tend vers ℓ en a ».
- On a $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ si, et seulement si, $|f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
- Soit ℓ un réel. Alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ si, et seulement si, $|f(x)-\ell| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$. En particulier, si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, alors pour tout réel λ, on a $f(x)+\lambda \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell+\lambda$. De même, toujours si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, alors on a $-f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\ell$.

Exemples

1. Une fonction constante est continue en tout point.
2. L'application identité de $\mathbb{R}$ est continue en tout point. Dans la définition, il suffit de prendre $\eta = \varepsilon$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x^n \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ et x réel vérifiant $|x| \leqslant \min\{\varepsilon, 1\}$, on a les inégalités :
$$|x^n| \leqslant |x| \leqslant \varepsilon.$$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a de même $\dfrac{1}{x^n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
5. La fonction valeur absolue :
$$\begin{array}{rccc} f : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & |x| \end{array}$$
est continue en tout point. En effet, soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$, l'inégalité triangulaire donne $\big||x|-|a|\big| \leqslant |x-a|$, et l'on conclut comme dans l'exemple 2.

p.522

Exercice 3 L'ordre des quantificateurs est évidemment crucial.

Étant donné un réel ℓ, quelles sont les fonctions vérifiant :

$$\exists \eta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad \Big(|x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon\Big)?$$

p.522

Exercice 4 Il est important de noter que ε et η sont strictement positifs.

1. Quelles sont les fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall \varepsilon \geqslant 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(|x| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x)\big| \leqslant \varepsilon\Big)?$$

2. Quelles sont les fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(|x| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x)\big| \leqslant \varepsilon\Big)?$$

Proposition 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et ℓ. Si $f(x) \to \ell$, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration. L'inégalité $|f(x) - \ell| \leqslant 1$ est vérifiée au voisinage de a.

Puisque $|f(x)| \leqslant \big|f(x) - \ell\big| + |\ell|$, l'inégalité $|f(x)| \leqslant |\ell| + 1$ est vérifiée au voisinage de a, ce qui démontre que f est bornée au voisinage de a. □

Unicité de la limite finie

Théorème 3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction ainsi que ℓ_1 et ℓ_2 deux réels.

Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Le réel $\ell_1 = \ell_2$ est **la limite de f en a**.

Principe de démonstration. Raisonner par l'absurde, en choisissant en fonction de ℓ_1 et ℓ_2 un ε *ad hoc*.

Démonstration page 523

Notation

Lorsque f admet une limite en a existe, on la désigne par $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{a} f$.

Remarque Il faut faire très attention à n'utiliser l'écriture $\lim\limits_{a} f$ qu'après avoir justifié l'existence de la limite ou, éventuellement, supposé son existence pour aboutir à une contradiction. En aucun cas, on ne peut utiliser cette notation pour démontrer directement l'existence d'une limite.

Une méthode importante pour montrer que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$

Proposition 4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et ℓ un réel. S'il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$|f-\ell| \leqslant g \qquad \text{et} \qquad g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0,$$

alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration page 523

Proposition 5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, avec ℓ réel, alors $|f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} |\ell|$.

Principe de démonstration. Utiliser l'inégalité triangulaire $\big||f(x)| - |\ell|\big| \leqslant |f(x)-\ell|$.

Démonstration page 523

p.523 **Exercice 5** Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor = 1$.

Point méthode

Comme à l'exercice précédent, on demande souvent de trouver la limite d'une *expression* dépendant d'une variable. On précisera alors un intervalle sur lequel l'expression définit une fonction.

Limites infinies

Définition 5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a une extrémité de I.

- Lorsque $a \in \mathbb{R}$, on dit que **$f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a**, si :
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad \big(|x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant M\big).$$
- Lorsque $a = +\infty$, on dit que **$f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$**, si :
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad \big(x \geqslant N \Longrightarrow f(x) \geqslant M\big).$$
- Lorsque $a = -\infty$, on dit que **$f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$**, si :
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad (x \leqslant N \Longrightarrow f(x) \geqslant M).$$

Remarques

- On peut traduire « $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a » par : « pour tout $M \in \mathbb{R}$, l'inégalité $\mathcal{P}_M : f \geqslant M$ est vérifiée au voisinage de a ».
- On dit également : « la limite de f en a est $+\infty$ » ou « la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est $+\infty$ ».

Définition 6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a une extrémité de I. On dit que $\boldsymbol{f(x)}$ **tend vers** $\boldsymbol{-\infty}$ **lorsque** $\boldsymbol{x}$ **tend vers** $\boldsymbol{a}$ si $-f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.

Notation La propriété : « $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a » est notée $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$.

p.523 **Exercice 6** À l'aide de quantificateurs, traduire dans chacun des trois cas, la propriété : « $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$ ».

Exemples

1. On a $x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x^n \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$. En effet, pour tout réel M, on a, pour tout x réel vérifiant $x \geqslant \max\{|M|, 1\}$, les inégalités :
$$|x^n| \geqslant |x| \geqslant x \geqslant |M| \geqslant M.$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a de même $\dfrac{1}{x^{2n}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$.

Théorème 6 (Unicité de la limite)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction ainsi que $(\ell_1, \ell_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.

L'élément $\ell_1 = \ell_2$ de $\overline{\mathbb{R}}$ est **la limite de** $\boldsymbol{f}$ **en** $\boldsymbol{a}$.

Principe de démonstration. Distinguer selon que ℓ_1 et ℓ_2 sont réels ou pas.

Démonstration page 524

Notation

On note, lorsqu'elle existe, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{a} f$ la limite de f en a.

3 Utilisation des suites

Bon nombre de propriétés des limites de fonctions peuvent être obtenues à partir des propriétés des limites de suites vues au chapitre 8.

Théorème 7 (Composition des limites : cas des suites)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$. Alors, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans I et tendant vers a, on a $f(x_n) \longrightarrow \ell$.

Démonstration page 524

p.524 **Exercice 7** Utiliser la proposition précédente pour redémontrer l'unicité de la limite (*cf.* le théorème 6 de la page précédente).

Point méthode

- Le théorème 7 est particulièrement utile pour démontrer qu'une fonction *n'admet pas de limite finie en un point*. Il joue un rôle analogue aux suites extraites (*cf.* la proposition 18 de la page 408). Il suffit en effet, pour démontrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point a, d'exhiber deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ayant toutes les deux pour limite a et telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n)$ existent et soient différentes.
- En particulier, pour démontrer qu'une fonction n'est pas continue en a, il suffit d'exhiber une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a et telle que $\big(f(x_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(a)$.

Exemple La fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.
En effet $\lim\limits_{n \to +\infty} n\pi = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi = +\infty$, alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin(n\pi) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin\left(\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 1$.

p.525 **Exercice 8** Montrer que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ indicatrice de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{R}$ n'admet de limite en aucun point.
On utilisera les densités de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (cf. page 399).

Caractérisation séquentielle

Le théorème suivant complète le théorème de composition des limites dans le cas des suites, en en donnant une réciproque.

Théorème 8 (Caractérisation séquentielle)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la fonction f a pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a ;

(ii) pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I de limite a, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ.

Principe de démonstration. Démonstration page 525

Seul $(ii) \Rightarrow (i)$ reste à montrer. On raisonne par l'absurde, en construisant une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et telle que $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ait pas ℓ pour limite.

4 Application aux suites récurrentes

On s'intéresse dans cette partie aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 \in I$ et, pour tout entier naturel n, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction.

Nous supposons de plus que I est stable, à savoir $f(I) \subset I$. Rappelons qu'avec cette hypothèse, pour $x \in I$, il existe bien une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = x$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n, et que cette suite est à valeurs dans I.

Théorème 9 (Suite récurrente et point fixe)

Soit $f : I \to I$ une fonction et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in I$ et, pour tout entier naturel n, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Si :

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente,
- sa limite ℓ appartient à I,
- la fonction f est continue en ℓ,

alors ℓ est un **point fixe** de f, *i.e.* $f(\ell) = \ell$.

Principe de démonstration. Passer à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démonstration page 525

Remarques

- Lorsque l'on sait que la suite récurrente est convergente, par exemple via le théorème des suites monotones, le théorème précédent permet souvent de trouver sa limite.

- Bien noter que le théorème précédent ne donne qu'une condition *nécessaire* pour qu'un réel $\ell \in I$ soit la limite d'une suite récurrente, et non suffisante.
- Il faut faire attention au fait qu'une suite récurrente peut converger vers ℓ, sans que ℓ soit dans I. Considérerons par exemple la suite géométrique $u = (1/2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. En posant $I =]0,1]$, elle vérifie $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & x/2 \end{array}$; sa limite est nulle et n'appartient pas à I.

  Ce phénomène ne peut se produire que si I n'est pas un intervalle fermé comme le montre le résultat suivant. On rappelle que les intervalles fermés non vides de $\mathbb{R}$ sont les intervalles $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$ et $[a, b]$, avec a et b deux réels vérifiant $a < b$.

Corollaire 10

Avec les notations du théorème précédent, si :
- I est un intervalle *fermé*,
- la fonction f est continue en tout point,
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente,

alors la limite ℓ appartient à I et vérifie $f(\ell) = \ell$.

Démonstration. La différence avec l'énoncé du théorème précédent est bien entendu que l'on ne suppose plus $\ell \in I$. En distinguant les cas $I =]-\infty, a]$, $I = [a, b]$, $I = [a, +\infty[$ et $I = \mathbb{R}$, on obtient par passage à la limite dans les inégalités, que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nécessairement dans I. □

Rappelons quelques points vus au chapitre 8.

Point méthode

- Pour justifier l'existence et l'unicité d'une suite récurrente du type « $u_{n+1} = f(u_n)$ », on exhibe une partie de I (en général un intervalle) stable par f et contenant le premier terme.
- Dans la phase de recherche, pour appréhender le comportement de la suite (monotonie éventuelle, convergence, etc.) il est souvent très utile de faire une construction graphique des premiers termes.

Précisons maintenant quelques points pour l'étude de la limite.

Point méthode

Pour étudier la limite d'une suite du type « $u_{n+1} = f(u_n)$ », on peut :

(i) exhiber un intervalle fermé I stable par f et contenant u_0 ;

(ii) chercher les points fixes de f sur I ;

(iii) démontrer que la suite converge ou non vers l'un de ces points fixes.

p.525

Exercice 9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Étudier la monotonie de la suite et préciser sa limite dans le cas où elle converge.
On commencera par trouver un intervalle stable « pertinent ».

p.526

Exercice 10 Étudier la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2}{1+u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

p.526

Exercice 11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et vérifiant $u_{n+1} = \sin u_n$, pour tout entier naturel n.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
2. Conclure quant à la convergence de la suite et en donner la limite éventuelle.

5 Opérations sur les limites

Opérations algébriques

Les résultats de calcul algébrique de limites vus pour les suites peuvent être étendus aux fonctions. On les démontre par caractérisation séquentielle en utilisant les résultat correspondants pour les suites.

Proposition 11

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
Si $\lim\limits_a f = 0$ et si g est bornée au voisinage de a, alors $\lim\limits_a (f\,g) = 0$.

Démonstration page 527

Proposition 12 (Calcul algébrique de limites)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions ayant respectivement les limites ℓ et ℓ' dans $\overline{\mathbb{R}}$ en a.

1. Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et si $\lambda\,\ell + \mu\,\ell'$ est défini dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors la fonction $\lambda\,f + \mu\,g$ a une limite en a et :
$$\lim_a (\lambda\,f + \mu\,g) = \lambda \lim_a f + \mu \lim_a g.$$
2. Si $\ell \times \ell'$ est défini dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors le produit $f \times g$ admet une limite en a et :
$$\lim_a (f \times g) = \ell\,\ell'.$$

Démonstration page 527

Nous renvoyons au paragraphe I.2 page 396 du chapitre 8 pour l'extension partielle des opérations algébriques à $\overline{\mathbb{R}}$.

Corollaire 13

Soit f et g deux fonctions réelles définies sur I et continue en a, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors les fonctions $\lambda f + \mu g$ et $f g$ sont continues en a.

Exemple Toute fonction polynomiale (réelle) définie sur $\mathbb{R}$ est continue $\mathbb{R}$.

Attention On n'a pas en général $\lim\limits_a (f+g) = \lim\limits_a f + \lim\limits_a g$. Pour écrire une telle égalité, on doit avoir établi :

1. l'existence de $\lim\limits_a f$ et $\lim\limits_a g$;
2. que la somme a un sens dans $\overline{\mathbb{R}}$.

p.527 **Exercice 12** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$.

1. Démontrer que si deux des trois termes $\lim\limits_a (f+g)$, $\lim\limits_a f$ et $\lim\limits_a g$ sont définis et sont réels, alors le troisième est défini et l'on a $\lim\limits_a (f+g) = \lim\limits_a f + \lim\limits_a g$.
2. Démontrer que si deux des trois termes $\lim\limits_a (f+g)$, $\lim\limits_a f$ et $\lim\limits_a g$ sont définis et au moins un de ces deux termes est réel, alors le troisième est défini et l'on a $\lim\limits_a (f+g) = \lim\limits_a f + \lim\limits_a g$.
3. Que penser de l'énoncé « si deux des trois termes $\lim\limits_a (f+g)$, $\lim\limits_a f$ et $\lim\limits_a g$ sont définis, alors le troisième est défini et l'on a $\lim\limits_a (f+g) = \lim\limits_a f + \lim\limits_a g$. » ?

Théorème 14 (Limite de l'inverse)

Soit $f : I \to \mathbb{R}^*$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R}$.

Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ et $\ell \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$.

Démonstration page 527

Remarque Si l'on suppose simplement que f tend vers $\ell \neq 0$, alors la proposition 25 de la page 498 nous dit que f ne s'annule pas au voisinage de a, et le théorème précédent peut s'appliquer en considérant une restriction de f.

Corollaire 15

Soit $f : I \to \mathbb{R}^*$ une fonction continue en $a \in I$. Alors la fonction $1/f$ est continue en a.

Corollaire 16

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}^*$ deux fonctions continues en $a \in I$. Alors la fonction f/g est continue en a.

Exemple Toute fonction rationnelle (réelle) $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$.

Proposition 17 (Limite de l'inverse)

Soit $f : I \to \mathbb{R}^*$ une fonction.

Si f tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ en a, alors $\lim\limits_{a} \dfrac{1}{f} = 0$.

Démonstration page 527

Proposition 18 (Limite de l'inverse)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs strictement positives (respectivement à valeurs strictement négatives).

Si f tend vers 0 en a, alors $\lim\limits_{a} \dfrac{1}{f} = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{a} \dfrac{1}{f} = -\infty$).

Démonstration page 527

Composition

Théorème 19 (Composition des limites)

Soit I et J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$, ainsi que $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si :

$$\lim_{a} f = b \qquad \text{et} \qquad \lim_{b} g = \ell,$$

alors $g \circ f$ admet une limite en a et $\lim\limits_{a} (g \circ f) = \ell$.

Démonstration page 528

Corollaire 20 (Composition des fonctions continues)

Soit I et J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.
Si f est continue en $a \in I$ et si g est continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est une fonction continue en a.

Exemple La fonction $x \mapsto \exp(1 + \tan x)$ est continue en tout point de son domaine de définition, comme composée de fonctions continues sur leurs domaines de définition.

p.528

Exercice 13 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $a \in I$.

Démontrer que les fonctions f^+, f^-, $\sup\{f, g\}$ et $\inf\{f, g\}$ sont continues en a.

Restriction et caractère local

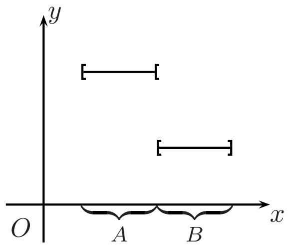
Proposition 21 (Stabilité de la limite par restriction)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, J un intervalle de I. Si a est un point de J ou un extrémité de J et si $\lim\limits_{a} f = \ell$, alors $\lim\limits_{a} f_{|J} = \ell$.

Démonstration page 528

Attention

Étant donné une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, on peut avoir une partition $\{A, B\}$ de I et $a \in I$, tel que f n'ait pas de limite en a, tout en ayant $\lim\limits_{a} f_{|A}$ et $\lim\limits_{a} f_{|B}$ qui sont définies. L'observation du dessin ci-contre permet facilement de construire un exemple.



Corollaire 22 (Stabilité de la continuité par restriction)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, J un intervalle non vide de I.
Si f est continue en $a \in J$, alors $f_{|J}$ est continue en a.

Proposition 23 (Caractère « local » de la limite)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a vérifiant les hypothèses de la page 484.

- Si $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a alors :
$$\lim_{a} f = \ell \iff \lim_{a} f_{|I\cap[a-r,a+r]} = \ell.$$
- Si $a = +\infty$ et $M \in \mathbb{R}$, on a alors :
$$\lim_{+\infty} f = \ell \iff \lim_{+\infty} f_{|I\cap[M,+\infty[} = \ell.$$
- Si $a = -\infty$ et $M \in \mathbb{R}$, on a alors :
$$\lim_{-\infty} f = \ell \iff \lim_{-\infty} f_{|I\cap]-\infty,M]} = \ell.$$

Principe de démonstration. Par caractérisation séquentielle. Démonstration page 528

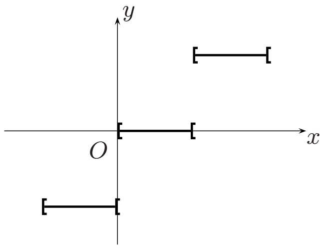
Corollaire 24 (Caractère « local » de la continuité)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, ainsi que $a \in I$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction f est continue en a si, et seulement si,la restriction $f_{|I\cap]a-r,a+r[}$ est continue en a.

Point méthode

- Pour étudier la limite d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$, on peut se restreindre à un intervalle $I \cap [a-r, a+r]$ avec $r > 0$.
- Pour étudier la limite d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ en $+\infty$, on peut se restreindre à un intervalle $I \cap [M, +\infty[$ avec $M \in \mathbb{R}$.
- Pour étudier la limite d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ en $-\infty$, on peut se restreindre à un intervalle $I \cap]-\infty, M]$ avec $M \in \mathbb{R}$.

Exemple



La fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est définie sur $\mathbb{R}$ et admet une limite en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. En effet, pour $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, il existe un réel $r > 0$ tel que $[a-r, a+r] \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (il suffit de prendre $0 < r < \min\{a - \lfloor a \rfloor, \lfloor a \rfloor - a + 1\}$). La fonction $f_{|[a-r,a+r]}$ étant constante, elle admet une limite en a.
Cela confirme l'idée intuitive de la continuité : les points de discontinuité de f, c'est-à-dire les points en lesquels f n'a pas de limite, sont ceux où il faut « lever le crayon » pour tracer le graphe.
L'aspect local de la limite permet d'affiner la proposition 4 de la page 489.

Point méthode

Afin d'établir qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite finie ℓ en a, on peut chercher à exhiber une fonction g telle que :

- l'inégalité $\left|f(x) - \ell\right| \leqslant g(x)$ soit vérifiée au voisinage a
- et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

p.528 **Exercice 14** Montrer que $\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

6 Propriétés liées à l'ordre

Ici encore, les propriétés liant les limites et la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ vues sur les suites, ont leurs analogues pour les fonctions.

Limite et signe

Proposition 25 (Limite et signe)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f admet une limite, finie ou infinie, ℓ strictement positive (resp. strictement négative) en a, alors f est strictement positive (resp. strictement négative) au voisinage de a.

Démonstration page 528

Limite par encadrement

Proposition 26 (Limite par encadrement)

Soit f, g et h trois fonctions définies sur I. Si :

- l'inégalité $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ est vérifiée au voisinage de a ;
- les fonctions f et h ont la même limite finie ℓ en a,

alors g admet une limite en a et $\lim\limits_{a} g = \ell$.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I, de limite a. Les suites $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(h(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, par composition, vers ℓ. À l'aide du théorème 31 de la page 413 du chapitre 8, la suite $\big(g(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et l'on conclut par caractérisation séquentielle de la limite. □

Proposition 27 (Limite par minoration)

Soit f et g deux fonctions définies sur I telles que $f \leqslant g$ au voisinage de a. Si $\lim\limits_{a} f = +\infty$, alors $\lim\limits_{a} g = +\infty$.

Démonstration. Par caractérisation séquentielle de la limite, à l'aide de la propriété correspondante sur les suites. □

Proposition 28 (Limite par majoration)

Soit f et g deux fonctions définies sur I telles que $f \leqslant g$ au voisinage de a. Si $\lim\limits_{a} g = -\infty$, alors $\lim\limits_{a} f = -\infty$.

Démonstration. Par caractérisation séquentielle de la limite, à l'aide de la propriété correspondante sur les suites. □

Passage à la limite dans les inégalités

Proposition 29 (Passage à la limite dans les inégalités)

Soit f et g deux fonctions réelles définies sur I. Si $f \leqslant g$ au voisinage de a et si $\lim\limits_{a} f$ et $\lim\limits_{a} g$ sont définies, alors :

$$\lim_{a} f \leqslant \lim_{a} g.$$

Démonstration. Par composition des limites dans le cas des suites et le corollaire 30 de la page 413 du chapitre 8. □

Remarque On notera la différence de nature entre le théorème précédent et les propositions 26 et 27. Le théorème de « passage à la limite dans les inégalités » suppose que l'on sache déjà que les différentes fonctions ont des limites, alors les propositions susmentionnées donnent l'existence d'une limite.

7 Démontrer l'existence ou la non existence de limites

Nous venons de voir divers énoncés concernant l'existence et le calcul de limites. Pour l'instant, on peut les regrouper en trois catégories :

- les définitions (avec des « ε ») , l'utilisation de suites ;
- les résultats opératoires (somme, produit, inverse, composée, etc.) ;
- les résultats liés à l'ordre (limite par encadrement, etc.)

Concrètement quelle méthode adopter pour justifier l'existence d'une limite ? Naturellement, il n'y a pas de réponse simple à cette question. Pour un problème donné, plusieurs stratégies peuvent être pertinentes. Le contexte amène souvent à en privilégier une.

Remarques préliminaires

- Les démonstrations « en ε » et/ou « en M » sont le dernier recours auquel vous devez penser, et s'utilisent principalement pour des questions de nature théorique.

- L'utilisation de suites est souvent incontournable pour démontrer la non existence de limite.

D'abord essayer d'utiliser les résultats opératoires

Cas d'application des théorèmes Lorsque la fonction f est donnée explicitement par une formule, on peut commencer par essayer d'utiliser les résultats opératoires, mais il faut le faire correctement.

Exemple Étude de la limite en 0 de $f : x \mapsto \frac{e^x+\sqrt{2+x}}{1+\cos^2 x}$.

- Une première rédaction acceptable serait la suivante.

  * Comme $\cos x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, on a donc $1+\cos^2 x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2 \neq 0$.

  * De plus $e^x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\sqrt{2+x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \sqrt{2}$, entraîne $e^x+\sqrt{2+x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1+\sqrt{2}$.

  Par quotient, on en déduit $\dfrac{e^x+\sqrt{2+x}}{1+\cos^2 x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\cdot$

  On a ainsi présenté une « chaîne » permettant d'utiliser les « théorèmes généraux » pour déterminer directement la limite.

- En fait, ici il suffit de prouver que f est continue en tout point de $[-2,+\infty[$ pour obtenir, en particulier, $\lim\limits_{0} f = f(0) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\cdot$

  La continuité de f provient :

  * de la continuité du numérateur comme somme de deux fonctions que l'on sait continues,

  * de la continuité du dénominateur pour des raisons analogues,

  * et du fait que le dénominateur ne s'annule pas sur $[-2,+\infty[$.

Cas des « formes indéterminées » Dans l'exemple précédent, une utilisation correcte des théorèmes généraux a permis facilement de conclure mais il est des cas où l'écriture sous forme de somme, produit, quotient de fonctions ne permet pas de conclure. On est alors face à ce que l'on appelle couramment une « forme indéterminée ».

Exemple

- Si P est une fonction polynomiale, alors l'étude directe de sa limite en $+\infty$ nous donne une somme de termes tendant vers $\pm\infty$, ce qui empêche le plus souvent d'utiliser les théorèmes généraux.
- Si $F : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ est une fonction rationnelle, alors l'étude directe de sa limite en $+\infty$ nous donne un quotient de termes tendant le plus souvent vers $\pm\infty$, ce qui empêche d'utiliser les théorèmes généraux.

Point méthode

Lorsque l'on est confronté à une telle situation de « forme indéterminée », on peut chercher à transformer l'écriture de expression de $f(x)$ *sans la moindre utilisation de limite*, pour obtenir une forme permettant d'utiliser les « théorèmes généraux » (sommes, produits, quotients, composées, etc.)

Exemple

Soit $P : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$, avec $n \geqslant 1$ et $a_n \neq 0$.

Pour tout réel $x \neq 0$, on a :

$$P(x) = x^n \left(a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, x^{k-n} \right) = x^n\, Q(x).$$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $x^{k-n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc : $Q(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a_n$.

On peut alors appliquer la proposition 12 de la page 494 et dire que :

- si $a_n > 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$;
- si $a_n < 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$;

On exprime souvent le résultat précédent en disant qu'en $+\infty$, une fonction polynomiale se comporte comme son terme de plus haut degré.

p.529

Exercice 15 Soit $f : x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle, où :

- P est une fonction polynomiale de degré $n \geqslant 0$ et de coefficient dominant a_n ;
- Q est une fonction polynomiale de degré $m \geqslant 0$ et de coefficient dominant b_m.

Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } m > n\,; \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m\,; \\ +\infty & \text{si } m < n \text{ et } a_n b_m > 0\,; \\ -\infty & \text{si } m < n \text{ et } a_n b_m < 0\,. \end{cases}$

Remarque Il reste des cas où l'on n'arrive pas, comme précédemment, à s'en sortir avec une chaîne de calculs. Nous verrons au chapitre 13 d'autres techniques bien plus efficaces et permettant le plus souvent de conclure.

Cas particulier des fonctions puissances

Point méthode

Dans le cas où g n'est pas constante, pour étudier la limite éventuelle en a d'une fonction $\varphi : x \mapsto f(x)^{g(x)}$ en a, on se ramène systématiquement à l'écriture $\varphi(x) = \exp\big(u(x)\big)$ avec $u(x) = g(x)\ln\big(f(x)\big)$ et l'on commence par étudier la limite éventuelle de u en a.

p.529 **Exercice 16** Calculer $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$.

Utilisation d'une majoration ou d'une minoration

Quand les résultats opératoires ne permettent pas de s'en sortir, ou dans des exercices plus théoriques où la fonction f n'est pas totalement explicitée, on doit alors penser aux méthodes suivantes.

- Pour prouver que f tend vers un réel ℓ en a, essayer d'obtenir une majoration $\big|f(x) - \ell\big| \leqslant g(x)$ où g est une fonction qui tend vers 0 en a.
- Pour prouver que f tend vers $+\infty$ en a, essayer d'obtenir une minoration $f(x) \geqslant g(x)$ où g est une fonction qui tend vers $+\infty$ en a.
- Pour prouver que f tend vers $-\infty$ en a, essayer d'obtenir une majoration $f(x) \leqslant g(x)$ où g est une fonction qui tend vers $-\infty$ en a.

La justification de la limite de g peut évidemment se faire, comme on vient de le voir, soit à l'aide des théorèmes généraux, soit par majoration, soit en dernier recours « en utilisant des ε ».

Pour pouvoir appliquer la méthode précédente, il faut évidemment avoir une idée de ce que peut être la limite de f. Dans certains cas, il faut d'abord faire marcher son intuition, pour « sentir ce qui se passe » comme par exemple dans l'exercice suivant.

p.529 **Exercice 17** On pose pour tout $x \in [1,+\infty[$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{t}}$.

Pour chercher la limite de f en $+\infty$, on peut remarquer que $t+\sqrt{t}$ est « proche » de t lorsque t tend vers $+\infty$. Ce qui suit met en forme cette idée.

1. Que vaut, pour $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$?
2. Démontrer que pour tout $t \in [1,+\infty[$, on a : $0 \leqslant \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+\sqrt{t}} \leqslant \dfrac{1}{t^{3/2}}$.
3. En déduire une majoration de $\big|\ln 2 - f(x)\big|$.
4. Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

8 Limites et continuité à droite, à gauche

Continuité à droite, à gauche

Définition 7

Supposons que a soit un point *intérieur* à I et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- La fonction f est **continue à droite** en a si $f_{|I\cap[a,+\infty[}$ est continue en a.
- La fonction f est **continue à gauche** en a si $f_{|I\cap]-\infty,a]}$ est continue en a.

Exemples

- La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$, mais elle n'est continue à gauche qu'aux points de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- La fonction $x \mapsto \lceil x \rceil$ est continue à gauche en tout point de $\mathbb{R}$, mais elle n'est continue à droite qu'aux points de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Proposition 30

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un point *intérieur* à I.
Si la fonction f est continue à droite et à gauche en a, alors elle est continue en a.

Démonstration page 530

Remarques

- Lorsque a est le plus petit élément de I, on peut définir de la même façon la continuité à droite en a, mais cela n'a pas beaucoup d'intérêt car il est évident que cela revient à la notion de continuité en a.

  De même pour la continuité à gauche lorsque a est le plus grand élément de I.
- En revanche, on ne peut pas définir la continuité à droite en $a = \max I$ ni la continuité à gauche en $a = \min I$, car cela reviendrait à considérer la restriction de f à $\{a\}$.

Point méthode

Pour démontrer que f est continue en a, on peut établir que f est continue à gauche et à droite en a.
Cette méthode n'est en général pertinente que si f est définie par des expressions différentes à droite et à gauche de a.

p.530

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \sin x$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = \operatorname{sh} x$ sinon. Démontrer que f est continue en 0.

p.530

Exercice 19 Soit T un réel strictement positif et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. On suppose que $f_{|[0,T]}$ est continue.

1. Montrer que f est continue en 0, en montrant que f est continue à droite et à gauche en 0.
2. Démontrer que f est continue.

Limite à droite, à gauche

Exemple La fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en 0 puisqu'elle n'est pas continue à gauche en 0. Pourtant, lorsque x tend vers 0 en restant strictement négatif, on a $f(x) = -1$ qui tend vers -1.
Il est donc raisonnable de dire que f admet -1 pour limite à gauche en 0 (et 0 pour limite à droite en 0).
Cela motive la définition suivante.

Définition 8

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$ un point autre que l'extrémité supérieure de I. La **limite à droite de f en a**, notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$, est la limite de $f_{|I \cap]a,+\infty[}$ en a, lorsque cette dernière est définie.
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$ un point autre que l'extrémité inférieure de I. La **limite à gauche de f en a**, notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ est la limite de $f_{|I \cap]-\infty,a[}$ en a, lorsque cette dernière est définie.

Remarque Si f a une limite en un point $a \in I$ autre que l'extrémité supérieure, alors f a une limite à droite en a et les deux limites coïncident. Il en va de même à gauche.

Notations

1. On note également $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ la limite à droite et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$) la limite à gauche, lorsqu'elles existent.
2. On trouve plus rarement les notations $f(a+)$ et $f(a-)$ pour désigner respectivement les limites à droite et à gauche en a (bien entendu lorsqu'elles existent).

p.531

Exercice 20 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & x - \lfloor x \rfloor \end{array}$ et n un entier relatif.

Déterminer, si elles existent, les limites $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x > n}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x < n}} f(x)$.

Continuité à droite et limite à droite

Attention Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a soit un point intérieur à I. Noter

- que si f est continue à droite et à gauche en a, alors f est continue en a ;
- que dans les notions de limite à droite et limite à gauche en a, la valeur de $f(a)$ n'intervient pas, alors que si $f$est continue en a, la limite de f est nécessairement égale à $f(a)$;
- que f peut donc avoir une limite à droite et à gauche en a, sans admettre de limite en a (c'est-à-dire sans être continue en a), même si ces deux limites sont égales.

p.531 **Exercice 21** Produire un contre-exemple.

Proposition 31

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.
Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$, alors f est continue à droite en a.

Démonstration page 531

Remarque On adaptera cet énoncé pour obtenir un résultat concernant la continuité à gauche.

9 Prolongement par continuité

Limites d'une fonction définie sur un intervalle épointé

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des fonctions définies sur un intervalle. Cependant, dans de nombreuses circonstances, on est amené à considérer des fonctions définies non pas sur un intervalle, mais sur un intervalle privé d'un point intérieur a. Il est naturel de vouloir étudier l'existence et la valeur de la limite de f en a. Cela conduit aux définitions suivantes.

Définition 9

Soit I un intervalle, a un point intérieur à I et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$.

- La fonction **tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend a** si :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \setminus \{a\} \quad \Big(|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\Big).$$
- La fonction **tend vers $+\infty$ lorsque x tend a** si :
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \setminus \{a\} \quad \big(|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant M\big).$$
- La fonction **tend vers $-\infty$ lorsque x tend a** si :
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \setminus \{a\} \quad \big(|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant M\big).$$

Le lecteur vérifiera que toutes les propriétés des limites vues jusqu'à présent dans ce chapitre s'étendent aux fonctions définies sur un intervalle épointé.

Remarques

- Soit a un point intérieur à I et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction. La fonction f a une limite en a si, et seulement si, elle a une limite à droite et une limite à gauche en a qui coïncident.
- Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction et $a \in I$, on définit la **limite épointée de f en a** par :
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \lim_{x \to a} f_{|I \setminus \{a\}}(x).$$
Par exemple, la fonction f indicatrice sur $\mathbb{R}$ du singleton $\{0\}$ n'a pas de limite en 0, mais $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$.

  On pourra remarquer que lorsque a est une borne de I, cette notion coïncide avec celle de limite à droite ou de limite à gauche.
- Si $f : I \to \mathbb{R}$ a une limite en a, elle a une limite épointée en a qui vaut $f(a)$.

Prolongement

Théorème 32

Soit I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Il existe une fonction $\widetilde{f} : I \to \mathbb{R}$ continue en a prolongeant f sur I si, et seulement si, f admet une limite finie en a. Dans ce cas, un tel prolongement est unique et $\widetilde{f}(a) = \lim\limits_a f$.
On l'appelle le **prolongement par continuité de f en a**.

Démonstration page 531

Exemple La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{x} \end{array}$ admet un prolongement par continuité en 0.

p.532 **Exercice 22**

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ admet un prolongement par continuité en 0.

p.532 **Exercice 23** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0\,; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ est-elle continue en 0 ?

10 Limite monotone

Théorème 33 (de la limite monotone)

Soit f une fonction monotone définie sur un intervalle ouvert $I =]a,b[$, avec $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et $a < b$. Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ existent dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Principe de démonstration. Elle est analogue à celle du théorème des suites monotones.

Démonstration page 532

Le corollaire suivant indique que, pour une fonction monotone définie sur I, dès que la question de l'existence d'une limite à droite (respectivement à gauche) peut se poser, cette limite existe.

Corollaire 34

Soit f une fonction croissante définie sur un intervalle I, d'extrémités a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors :

- pour pour tout $x \in I \setminus \{b\}$, la fonction f a une limite à droite en x et $f(x) \leqslant f(x+)$;
- pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, la fonction f a une limite à gauche en x et $f(x-) \leqslant f(x)$.

Principe de démonstration. Appliquer le théorème de la limite monotone à $f_{|]x,b[}$ pour obtenir l'existence de la limite à droite.

Démonstration page 532

Remarque Si f croissante et $c \in]a,b[$, alors, pour tout $(x,y) \in I^2$ vérifiant $x < c < y$, on a les inégalité :

$$f(x) \leqslant f(c-) \leqslant f(c) \leqslant (c+) \leqslant f(y).$$

Le lecteur adaptera cela au cas des fonctions décroissantes sur un intervalle.

Point méthode

Le théorème de la limite monotone est d'une très grande utilité tant théorique que pratique.
D'un point de vue théorique, il fournit l'existence d'une limite, sans que l'on la connaisse *a priori*.
D'un point de vue pratique, à partir du moment où l'on est assuré de l'existence d'une limite, on peut parfois la calculer explicitement, par exemple à l'aide de suites ou de relations vérifiées par f.

Exemple C'est ainsi que l'on a procédé pour démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ au chapitre 4.

II L'aspect global : fonctions continues définies sur un intervalle

De manière informelle, une propriété sera « globale » si elle fait intervenir la totalité du domaine de définition.

1 L'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

Définition 10

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **continue** si elle est continue en tout point de I.

Notation On désigne par $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur I.

Remarques

- On note parfois $\mathcal{C}(I)$ pour $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.
- On évitera de parler de « fonction discontinue sur I ». Cette locution est en effet ambiguë. On parlera soit d'une fonction non continue (pour indiquer qu'il existe au moins un point de discontinuité), soit d'une fonction discontinue en tout point.
- On s'autorise parfois la notation $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ lorsque X n'est pas un intervalle, pour désigner l'ensemble des fonctions continues sur X. Le plus souvent, X sera une réunion d'intervalles d'intérieur non vide. Par exemple :
  * la fonction $x \mapsto 1/x$ est un élément de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$,
  * la fonction tangente est un élément de $\mathcal{C}\left(\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \mathbb{R}\right)$.
- Il est clair que si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et si $J \subset I$ est un intervalle d'intérieur non vide, alors $f_{|J} \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$.

Opérations sur les fonctions continues

Les résultats qui suivent ne sont que des reformulations globales des résultats déjà établis pour la limite et la continuité ponctuelle.

Proposition 35

Soit $(f, g) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})^2$.

- Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur I ;
- le produit fg est continue sur I.

Démonstration. Il suffit d'appliquer en tout $x \in I$ la proposition 12 de la page 494. □

Remarques

1001
- Nous verrons que le premier résultat de cette proposition traduit le fait que l'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

872
- Nous verrons que ces derniers résultats impliquent que $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif.

Exemple En admettant que la fonction exp est continue (*cf.* page 517), les fonctions ch et sh sont continues sur $\mathbb{R}$.

Proposition 36

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ une fonction qui ne s'annule pas. Alors la fonction $1/f$ est continue.

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 17 de la page 496. □

Exemples

- Une fonction rationnelle est continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.
- La fonction tan est continue sur tout intervalle inclus dans $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.
- La fonction th est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 37

Soit I et J deux intervalles d'intérieur non vide, $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ telles que $f(I) \subset J$.
Alors $g \circ f$ est continue sur I.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du corollaire 22 de la page 497. □

Proposition 38

Soit I et J deux intervalles d'intérieur non vide, $J \subset I$. Alors pour tout $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, la fonction $f_{|J}$ est continue.

Démonstration. Immédiat. □

Fonction lipschitzienne

Définition 11

Soit, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Soit K un réel positif. On dit que f est ***K*-lipschitzienne** lorsque :
$$\forall (x,y) \in I^2 \quad \big|f(y) - f(x)\big| \leqslant K\,|y - x|\,.$$
- On dit que f est **lipschitzienne** lorsqu'il existe un réel K tel que f soit K-lipschitzienne.

Remarque Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et considérons deux points $A\left|\begin{smallmatrix} a \\ f(a)\end{smallmatrix}\right.$ et $B\left|\begin{smallmatrix} b \\ f(b)\end{smallmatrix}\right.$ du plan, avec $(a,b) \in I^2$ et $a \neq b$. La droite (AB) est une corde de la courbe représentative de f. Dire qu'une fonction est K-lipschitzienne signifie donc que les valeurs absolues des pentes des cordes de la courbe représentative de f sont majorées par K.

Théorème 39

Toute fonction lipschitzienne est continue.

Démonstration page 532

Exemple À l'aide de l'inégalité triangulaire, on vérifie aisément que la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne. On retrouve ainsi que cette fonction est continue.

p.532

Exercice 24

1. Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$: $\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| \leqslant \sqrt{|y - x|}$.
2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ est continue.
3. Démontrer que f n'est pas lipschitzienne.

p.533

Exercice 25 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array}$

- Démonter que la restriction de f à $[0, 1]$ est lipschitzienne.
- Démontrer que f n'est pas lipschitzienne.

Fonctions de références

Il est nécessaire dans la pratique de disposer de fonctions dont on sait qu'elles sont continues. On dresse ici la liste des fonctions de référence. Certaines justifications seront données plus loin.

Exemples Les fonctions usuelles suivantes sont continues.

- La fonction valeur absolue (*cf.* page 489).
- Les fonctions $x \mapsto x^n$, avec n entier naturel, sont continues sur $\mathbb{R}$ et plus généralement :
- les fonctions polynomiales (réelles) sont continues sur $\mathbb{R}$ (*cf.* page 495).
- Les fonctions $x \mapsto x^{-n}$, avec n entier naturel non nul, sont continues sur $\mathbb{R}^*$, plus généralement :
- toute fonction rationnelle (réelle) est continue sur un intervalle sur lequel le dénominateur ne s'annule pas (*cf.* page 509).
- Les fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sont continues sur leur domaine de définition (*cf.* page 517).
- Les fonctions $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, sont continues sur $\mathbb{R}_+$ (*cf.* page 517).
- Les fonctions $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}_- \setminus \mathbb{Z}_-$, sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ (*cf.* page 517).
- La fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (*cf.* page 648).
- La fonction $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$ (*cf.* page 517).
- Les fonctions trigonométriques $\sin$ et $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$, ce résultat est admis en première année ; la fonction $\tan$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ comme quotient de fonctions continues.
- Les fonctions hyperboliques ch, sh et th sont continues sur $\mathbb{R}$ (*cf.* page 509).

- Les fonctions Arcsin et Arccos sont continues sur $[-1,1]$; la fonction Arctan est continue sur $\mathbb{R}$. Ce sont en effet les fonctions réciproques de bijections continues définies sur des intervalles (*cf.* page 515).

Point méthode

Le plus souvent, pour justifier qu'une fonction est continue, on invoque les propositions 35, 37 et/ou 36, qui concernent les opérations sur les fonctions continues. En effet, les fonctions que l'on rencontre dans la pratique sont souvent obtenues en itérant opérations algébriques et compositions à partir des fonctions de références précédentes, qui sont continues. Pour décrire un tel raisonnement, on utilise parfois la locution « à l'aide des théorèmes généraux ».

Exemple Considérons $f : x \mapsto \dfrac{\sin\big(\ln|x|+1\big)}{3+\exp\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}$.

Puisque les fonctions valeur absolue, sin, exp, ln et les fonctions rationnelles sont continues sur leurs domaines de définition, f est continue à l'aide des théorèmes généraux sur son domaine de définition. Reste bien évidemment à déterminer ce domaine...

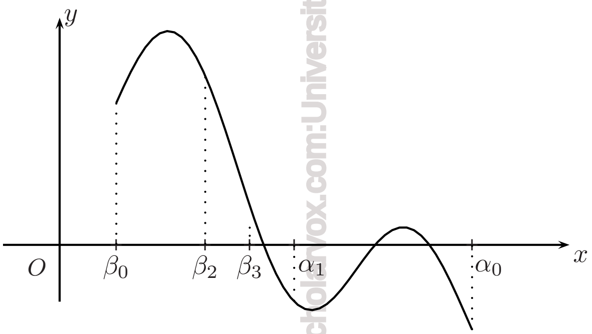
2 Théorème des valeurs intermédiaires

Intuitivement, une fonction définie sur un intervalle est continue si son graphe peut être tracé sans lever le stylo. On pourrait traduire cette propriété par « lorsque l'on passe de part et d'autre d'une droite, il y a un moment où l'on va se trouver sur cette droite ». C'est ce que montre en substance le théorème des valeurs intermédiaires, qui assure qu'une fonction réelle, continue sur un intervalle et qui change de signe, s'annule.

Théorème 40 (des valeurs intermédiaires)

Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ et $(a,b) \in I^2$.
Si $f(a)\,f(b) \leqslant 0$, alors il existe c entre a et b tel que $f(c)=0$.

Principe de démonstration. On procède par dichotomie. Démonstration page 533



Méthode de dichotomie pour le théorème des valeurs intermédiaires

La démonstration du théorème des valeurs intermédiaires est profondément algorithmique. On peut facilement en déduire une fonction Python, qui calcule une valeur approchée, à ε près, d'un des zéros d'une fonction continue sur l'intervalle I et qui change de signe sur l'intervalle.

```
def dichotomie(f,a,b,eps):
        """Suppose f(a)<=0 et f(b)>=0"""
    while abs(b-a)>eps:
        c=(a+b)/2
        if f(c)<=0:
            a=c
        else:
            b=c
    return(a)
```

Pour que le résultat de cette fonction soit correct, il n'est pas nécessaire que la valeur donnée aux paramètre a soit plus petite que celle donnée à b, mais on doit avoir $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$. Cela peut donner lieu à la session suivante.

```
>>> def f(x): return x*x-2
>>> dichotomie(f,1,2,1.e-7)
1.4142135381698608
```

Corollaire 41

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Si f ne s'annule pas, alors f a un signe (strict) constant.

Démonstration. Ce n'est que la contraposée du théorème 40 de la page précédente. $\square$

Point méthode

- Étant donné une équation « $f(x) = 0$ », un problème fréquent est de déterminer l'existence de solutions de l'équation.
  Le théorème des valeurs intermédiaires permet dans bien des cas d'établir l'existence d'une telle solution, lorsque f est continue.
- Pour étudier une équation « $f(x) = g(x)$ », on a souvent intérêt à se ramener au cas précédent, en posant $h = f - g$.

p.534

Exercice 26

Démontrer que l'équation $\exp(-x) = x^2$ a au moins une solution réelle.

Corollaire 42

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Notons respectivement a et b les extrémités inférieure et supérieure de I.
Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$, avec $\ell < 0$ ou $\ell = -\infty$ et si $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} \ell'$, avec $\ell' > 0$ ou $\ell = +\infty$, alors il existe $c \in I$ tel que $f\,(c) = 0$.

Démonstration page 534

Remarque Avec les notations ci-dessus, on déduit du corollaire 42 que si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$, avec $\ell > 0$ ou $\ell = +\infty$ et si $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} \ell'$, avec $\ell' < 0$ ou $\ell = -\infty$, alors il existe $c \in I$ tel que $f\,(c) = 0$.

p.534

Exercice 27 Montrer que toute fonction polynomiale réelle f de degré impair admet au moins un zéro sur $\mathbb{R}$.
On s'intéressera aux limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Corollaire 43

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a, b) \in I^2$.
Alors toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes par f.

Principe de démonstration. Pour tout $(a, b) \in I^2$ et pour tout γ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, on applique le théorème précédent à l'application $g\ :\ x \mapsto f(x) - \gamma$. Démonstration page 534

Remarque Le corollaire précédent justifie le nom de « théorème des valeurs intermédiaires » donné au théorème 40.

Théorème 44 (Image d'un intervalle par une fonction réelle continue)

L'image d'un intervalle par une fonction réelle continue est un intervalle.

Principe de démonstration. Appliquer le corollaire 43 du théorème des valeurs intermédiaires pour démontrer que pour tout couple $(\alpha, \beta) \in f(I)^2$ vérifiant $\alpha \leqslant \beta$, on a $[\alpha, \beta] \subset f(I)$.

Démonstration page 535

p.535

Exercice 28 Soit $f\ :\ I \to \mathbb{Z}$ une fonction continue. Démontrer que f est constante.
On pourra raisonner par l'absurde.

Attention Les intervalles I et $f\,(I)$ ne sont pas nécessairement de même nature, c'est-à-dire que l'image d'un intervalle ouvert est certes un intervalle, mais pas nécessairement ouvert, l'image d'un intervalle fermé n'est pas nécessairement un intervalle fermé, etc.

Exemples

- Le domaine de définition d'un fonction continue peut être un intervalle ouvert et son image un intervalle non ouvert. Soit par exemple la fonction $f\,:\,]-1,1[\,\to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x\left(x^2-1\right)$.

  L'étude de la variation de f permet de montrer que $f\big(]-1,1[\big) = \left[-\frac{2\sqrt{3}}{9}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right]$.

- Le domaine de définition d'une fonction continue peut être un intervalle borné et son image être un intervalle non borné. On peut considérer la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f\,: &]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}, \end{array}$$

  pour laquelle on a $f\big(]0,1]\big) = [1,+\infty[$.

p.535

Exercice 29 Donner un exemple de fonction continue $f\,:\; [0,+\infty[\; \to \mathbb{R}$, telle que $f\big([0,+\infty[\big) = [0,1[$.

3 Fonctions définies sur un segment

On vient de le voir, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, mais ces deux intervalles ne sont pas en général de même « nature ». Cependant les segments font exception.

Théorème 45 (Image d'un segment par une fonction continue)

Soit $f\,:\,[a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a < b$. Alors :

- f est majorée et admet un maximum M ;
- f est minorée et admet un minimum m.

De plus $f\big([a,b]\big)$ est le segment $[m,M]$.

Démonstration (non exigible) page 535

Point méthode

- Une manière simple de montrer qu'une fonction réelle est bornée, est de vérifier qu'elle est définie sur un segment et qu'elle est continue.
- Une manière simple de montrer que la borne supérieure d'une fonction est atteinte, est de vérifier qu'elle est définie sur un segment et qu'elle est continue.

p.535

Exercice 30

1. Soit f une fonction continue sur un segment et à valeurs strictement positives. Démontrer que f est minorée par une constante strictement positive.
2. Est-il vrai qu'une fonction continue à valeurs strictement positives est minorée par une constante strictement positive.

4 Théorème de la bijection

Théorème 46

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la fonction f est injective ;

(ii) la fonction f est strictement monotone.

Démonstration (non exigible) page 535

p.536

Exercice 31 Donner un exemple de fonction injective, continue, définie sur $\mathbb{R}^*$, qui n'est pas monotone.

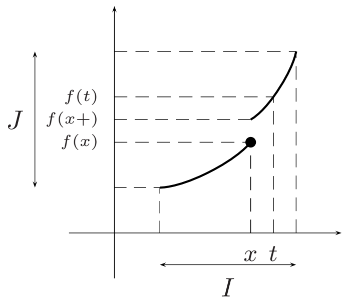
Lemme 47

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Elle est continue si, et seulement si, $f(I)$ est un intervalle

Principe de démonstration.

En vertu du théorème des valeurs intermédiaires, il suffit de démontrer que si f est non continue, alors $f(I)$ n'est pas un intervalle.

Démonstration page 536



Théorème 48 (de la bijection)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une injection continue. Alors :

1. la fonction f définit une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$;
2. la fonction f est strictement monotone ;
3. l'application réciproque f^{-1} est strictement monotone, de même monotonie que f ;
4. l'application réciproque f^{-1} est continue.

Démonstration page 537

Remarque Si f est continue et strictement monotone sur I, le tableau suivant donne l'intervalle $f(I)$ en fonction de I :

	I	$[a,b]$	$[a,b[$	$]a,b]$	$]a,b[$
$f \nearrow$	$f(I)$	$[f(a),f(b)]$	$[f(a),\lim\limits_b f[$	$]\lim\limits_a f, f(b)]$	$]\lim\limits_a f,\lim\limits_b f[$
$f \searrow$	$f(I)$	$[f(b),f(a)]$	$]\lim\limits_b f, f(a)]$	$[f(b),\lim\limits_a f[$	$]\lim\limits_b f,\lim\limits_a f[$

Justifions, par exemple, que si f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a,b[$, alors $f\big([a,b[\big) = \big[f(a),\lim\limits_b f\big[$.

- Montrons $f\big([a,b[\big) \subset \big[f(a),\lim\limits_b f\big[$. D'après le théorème la limite monotone et par croissance de f, on a pour tout $x \in [a,b[$:
$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant \lim_b f.$$
S'il existe $x \in [a,b[$ tel que $f(x) = \lim\limits_b f$ (ce qui ne pourrait se produire que dans le cas où la limite de f en b est finie), alors pour tout $x < y < b$, on aurait :
$$\lim_b f = f(x) < f(y) \leqslant \lim_b f,$$
ce qui est impossible. On en conclut que $f\big([a,b[\big) \subset \big[f(a),\lim\limits_b f\big[$.
- Montrons que $f\big([a,b[\big) \supset \big[f(a),\lim\limits_b f\big[$. Soit $y \in \big]f(a),\lim\limits_b f\big[$. Alors la fonction $g : x \mapsto f(x) - y$ vérifie $\lim\limits_a g < 0$ et $\lim\limits_a g > 0$. D'après le corollaire 42 de la page 513, la fonction g s'annule et donc $y \in f\big(]a,b[\big)$. Par conséquent $f\big([a,b[\big) \supset \big[f(a),\lim\limits_b f\big[$. □

Point méthode

- Pour démontrer qu'une fonction $f : I \to J$ est une bijection, il suffit d'établir que f est continue, strictement monotone et $f(I) = J$;
- La bijection réciproque d'une bijection continue, d'un intervalle sur un autre est elle même continue.

p.537 **Exercice 32** Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x + 1$, est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Attention Pour le théorème de la bijection, l'hypothèse que f soit définie sur un intervalle est cruciale, comme le montre l'exercice suivant.

p.537

Exercice 33 Démontrer que la fonction f définie sur $]0,1[\cup[2,3[$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in\,]0,1[\,; \\ x-1 & \text{si } x\in[2,3[, \end{cases}$$

définit une bijection continue strictement croissante de son domaine de définition sur $]0,2[$.

Son application réciproque f^{-1} est-elle continue ?

Applications aux fonctions usuelles

- Nous avons vu au chapitre 4 que la fonction $\ln$ définit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Elle de plus continue ; cela est intuitif et sera justifié au chapitre 12 page 648.
  D'après le théorème de la bijection, la fonction exponentielle, qui est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien, est continue sur $\mathbb{R}$.
- De par les théorème généraux, les fonctions $x\mapsto x^\alpha$, avec $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$. De même, les fonctions ch, sh et th sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La restriction de la fonction $\tan$ à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ définit une bijection continue strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction Arctan est continue sur $\mathbb{R}$.

  On justifie de même que les fonctions Arcsin et Arccos sont continues sur $[-1,1]$.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$ un entier impair. La fonction $f_n : x\mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}$ est continue, strictement croissante. De plus $\lim\limits_{-\infty} f_n=-\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f_n=+\infty$.
  Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
  Son application réciproque, notée $\sqrt[n]{\ }$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue et strictement croissante.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$ un entier pair. La fonction $f_n : x\mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}_+$ est continue, strictement croissante. De plus $f(0)=0$ et $\lim\limits_{+\infty} f_n=+\infty$. Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
  Son application réciproque, notée $\sqrt[n]{\ }$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, continue et strictement croissante.

5 Continuité uniforme

Soit $f\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$. Rappelons que cela signifie que :

$$\forall x\in I\quad \forall\varepsilon>0\quad \exists\eta>0\quad \forall y\in I\quad |x-y|\leqslant\eta\Longrightarrow\big|f(x)-f(y)\big|\leqslant\varepsilon.$$

Il est capital de bien comprendre que η dépend de ε, mais aussi de x. Pour un certain nombre de problèmes, il est utile d'avoir η ne dépendant que de ε, c'est-à-dire indépendamment de x. En d'autres termes, on veut un « contrôle uniforme » de η par ε. Cela conduit à la définition suivante.

Définition 12

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est **uniformément continue** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x,y) \in I^2 \quad \Big(|x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Remarque Il est clair que si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est uniformément continue, alors elle est continue.

Proposition 49

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Si f est lipschitzienne, elle est alors uniformément continue.

Démonstration page 537

Remarque Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On a les implications :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est} \\ \text{lipschitzienne} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est uniformément} \\ \text{continue} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est} \\ \text{continue} \end{array} \right.$$

p.537

Exercice 34 Soit $f : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array}$

1. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $f_{|[0,a]}$ est uniformément continue.
2. Soit $\eta > 0$. Démontrer qu'il existe un réel x tel que $(2x + \eta)\,\eta \geqslant 1$.
3. La fonction f est-elle uniformément continue ?

Théorème 50 (de Heine)

Toute fonction continue définie sur un segment est uniformément continue.

Démonstration (non exigible) page 538

p.538

Exercice 35 Soit $f : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x}. \end{array}$

1. Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $f_{|[0,a]}$ est uniformément continue.
2. Démontrer que f est uniformément continue.
3. La fonction réciproque d'une bijection uniformément continue d'un intervalle I sur un intervalle J est-elle uniformément continue ?

III Extension aux fonctions à valeurs complexes

On peut facilement étendre la notion de limite finie aux fonctions à valeurs complexes de la variable réelle. Il suffit pour cela de remplacer les valeurs absolues par des... modules. En revanche, puisque l'on ne dispose pas de relation d'ordre « pertinente » sur $\mathbb{C}$ qui étendrait celle sur $\mathbb{R}$, on ne peut pas donner un sens à « une limite $+\infty$ » pour les fonctions à valeurs complexes.

Définition 13

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{C}$.

On dit que ***$f(t)$* tend vers *ℓ* lorsque *t* tend vers *a*** si $|f(t) - \ell| \underset{t\to a}{\longrightarrow} 0$, ce qui peut se traduire par :

Cas a fini

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall t \in I \quad \Big(|t-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(t) - \ell| \leqslant \varepsilon\Big);$$

Cas $a = +\infty$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall t \in I \quad \Big(t \geqslant M \Longrightarrow |f(t) - \ell| \leqslant \varepsilon\Big),$$

Cas $a = -\infty$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall t \in I \quad \Big(t \leqslant M \Longrightarrow |f(t) - \ell| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Proposition 51 (Unicité de la limite)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction et $(\ell, \ell') \in \mathbb{C}^2$.
Si $|f(x) - \ell| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ et $|f(x) - \ell'| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, alors $\ell = \ell'$.
Le nombre complexe $\ell = \ell'$ est la **limite de *f* en *a***.

Démonstration page 538

Remarque Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, alors $|f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} |\ell|$. En effet :

$$\Big||f(x)| - |\ell|\Big| \leqslant |f(x) - \ell| \underset{t\to a}{\longrightarrow} 0.$$

Définition 14

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. Si $a \in I$, on dit f est **continue en *a***, si la limite de f en a existe et qu'elle vaut $f(a)$.
On dit que est **continue** si elle en continue en tout point x de I.

Notation On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{C}$.

La caractérisation séquentielle (*cf.* page 492) et les propriétés sur les limites finies d'une somme et d'un produit (*cf.* page 494) sont encore valables pour les fonctions à valeurs complexes. Il suffit de remplacer les valeurs absolues par des modules dans les démonstrations.

Proposition 52

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction.
Si f a pour limite ℓ en a, alors $\overline{f}$ a pour limite $\overline{\ell}$ en a.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition et d'utiliser le fait que pour tout $x \in I$, on a $\left|\overline{f}(x) - \overline{\ell}\right| = \left|\overline{f(x) - \ell}\right| = |f(x) - \ell|$. □

Théorème 53

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la fonction f a une limite en a ;

(ii) les fonctions $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(g)$ admettent des limites finies en a.

Dans ce cas, on a :

$$\lim_a f = \lim_a \mathrm{Re}\,(f) + i \lim_a \mathrm{Im}\,(f)\,.$$

Démonstration page 538

Corollaire 54

Soit $f : I \to \mathbb{C}^*$ une fonction.
Si f a une limite non nulle ℓ, alors $1/f$ a pour limite $1/\ell$ en a.

Principe de démonstration. Préciser les parties réelles et imaginaires de $1/f$.

Démonstration page 539

Corollaire 55

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction complexe de la variable réelle. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue ;

(ii) les fonctions $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont continues.

Exemples

- Lorsque f est une fonction continue, les fonctions $\overline{f}$ et $|f|$ sont continues.
- Les fonctions polynomiales complexes de la variable réelle sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle de la variable réelle à coefficients complexes est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des racines réelles de son dénominateur. Par exemple la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-i}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $t \mapsto e^{it}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 56

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors f est bornée.

Démonstration page 539

Proposition 57 (Composition des limites)

Soit I et J deux intervalles d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, ainsi que $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{C}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si :

$$\lim_a f = b \qquad \text{et} \qquad \lim_b g = \ell,$$

alors $g \circ f$ admet une limite en a et $\lim\limits_a (g \circ f) = \ell$.

Démonstration. Comme dans le cas de deux fonctions à valeurs réelles, elle se fait caractérisation séquentielle. □

Attention Bien noter la dissymétrie entre f et g. La fonction f est impérativement à valeurs réelles, alors que g est à valeurs complexes.

p.539 **Exercice 36** Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Démontrer que si f admet une limite en a, alors $\exp \circ f$ admet une limite en a.

p.539 **Exercice 37** La réciproque est-elle vraie ? C'est-à-dire est-il vrai que si $\exp \circ f$ admet une limite en a, alors f admet une limite en a ?

Point méthode

- L'écriture $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ permet, avec le théorème 53 de la page précédente, d'établir facilement des propriétés sur les limites et la continuité de fonctions de la variable réelle à valeurs complexes.
- Il ne faut cependant pas perdre de vue que les propriétés algébriques, de compositions, etc. peuvent être utilisées et qu'elles sont souvent souples et efficaces.

p.539 **Exercice 38** Déterminer, pour α réel et n entier naturel, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^{i\alpha} x - 1}{e^{-i\alpha} x - 1} \right)^n$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, avec $x \leqslant y$. On a $f(y) - f(x) = (y - x)(x + y + 1)$. Du fait que $x + y + 1 \geqslant 0$, il s'ensuit que $f(y) - f(x) \geqslant 0$. Par conséquent, la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$.
- Plus précisément, la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Si la fonction était monotone sur $\mathbb{R}$, elle serait donc croissante, or $f(-2) = 2$ et $f(0) = 0$: la fonction f n'est pas croissante. Par conséquent elle n'est pas monotone.

Exercice 2 Distinguons les cas $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ et $a = -\infty$.

- Cas $a \in \mathbb{R}$. Il existe $r_1 > 0$ tel que f vérifie la propriété $\mathcal{P}_1$ sur $I \cap [a - r_1, a + r_1]$. Il existe de même $r_2 > 0$ tel que f vérifie la propriété $\mathcal{P}_2$ sur $I \cap [a - r_2, a + r_2]$. Par conséquent, f vérifie « $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ » sur $I \cap [a - r, a + r]$, où $r = \min\{r_1, r_2\}$.
- Cas $a = +\infty$. Il existe $M_1 \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie la propriété $\mathcal{P}_1$ sur $I \cap [M_1, +\infty[$. Il existe de même $M_2 \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie la propriété $\mathcal{P}_2$ sur $I \cap [M_2, +\infty[$. Par conséquent, f vérifie « $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ » sur $I \cap [M, +\infty[$, où $M = \max\{M_1, M_2\}$.
  Le cas $a = -\infty$ se traite de manière similaire.

Proposition 1 Pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité $|f - \ell| \leqslant \varepsilon$ est vérifiée au voisinage de a. En particulier $\left|f(a) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.

Si $f(a) \neq \ell$, on aurait, en choisissant $\varepsilon = \frac{|f(a)-\ell|}{2}$, l'inégalité $\left|f(a) - \ell\right| \leqslant \frac{|f(a)-\ell|}{2}$, ce qui est absurde. Ainsi, $f(a) = \ell$.

Exercice 3 Soit $\eta > 0$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad \Big(|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Alors pour $x \in I \cap [a - \eta, a + \eta]$, on a, pour tout $\varepsilon > 0$ l'inégalité $\left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$. Il s'ensuit que $\left|f(x) - \ell\right| = 0$. En d'autres termes, la propriété signifie que f est constante (égale à ℓ) au voisinage de a.

Exercice 4

1. Avec $\varepsilon = 0$, la fonction f vérifie la propriété :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(|x| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x)\right| \leqslant 0\Big).$$

   La fonction est nécessairement nulle au voisinage de 0. Réciproquement, toute fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nulle au voisinage de 0 vérifie la propriété initiale.

2. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction vérifiant la propriété. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|f(0)| \leqslant \varepsilon$. Il s'ensuit que $f(0) = 0$.
   Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction nulle en 0 quelconque. Soit $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(|x| \leqslant 0 \Longrightarrow \left|f(x)\right| \leqslant 0 \leqslant \varepsilon\Big),$$

   et f vérifie la propriété. Ainsi les fonctions vérifiant la propriété sont les fonctions nulles en 0.

Théorème 3 Supposons $\ell_1 \neq \ell_2$. Dans ces conditions, $|\ell_2 - \ell_1| > 0$. Par définition, les inégalités $\left|f(x) - \ell_1\right| \leqslant \frac{|\ell_2 - \ell_1|}{3}$ et $\left|f(x) - \ell_2\right| \leqslant \frac{|\ell_2 - \ell_1|}{3}$ sont vérifiées au voisinage de a. En d'autres termes, il existe un intervalle J de la forme :

$$J = \begin{cases} [a - \eta, a + \eta] & \text{avec } \eta > 0, \text{ si } a \in \mathbb{R} \,; \\ ]M, +\infty[& \text{avec } M \in \mathbb{R}, \text{ si } a = +\infty \,; \\ ]-\infty, M[& \text{avec } M \in \mathbb{R}, \text{ si } a = -\infty \,; \end{cases}$$

tel que les deux inégalités sont vérifiées sur $I \cap J$. Pour tout $x \in I \cap J$, on a :

$$|\ell_2 - \ell_1| = \left|(\ell_2 - f(x)) + (f(x) - \ell_1)\right| \leqslant \left|f(x) - \ell_2\right| + \left|f(x) - \ell_1\right| \leqslant \frac{2}{3}\,|\ell_2 - \ell_1|.$$

Puisque $I \cap J \neq \varnothing$, on obtient l'inégalité $|\ell_2 - \ell_1| \leqslant \frac{2}{3}\,|\ell_2 - \ell_1|$, ce qui impossible.

Proposition 4 Il faut distinguer selon que $a = -\infty$, $a = +\infty$ ou a est réel. Nous ne traiterons que le cas $a = +\infty$, les autres démonstrations étant similaires.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe un réel M, tel que pour tout $x \in I$, on ait l'implication :

$$x \geqslant M \Longrightarrow g(x) \leqslant \varepsilon.$$

A fortiori, pour tout $x \in I$ vérifiant $x \geqslant M$, on a :

$$\left|f\,(x) - \ell\right| \leqslant g\,(x) \leqslant \varepsilon.$$

La conclusion en découle.

Proposition 5 Pour tout $x \in I$, on a :

$$\Big|\left|f(x)\right| - |\ell|\Big| \leqslant \left|f(x) - \ell\right|.$$

On conclut en remarquant que $\left|f(x) - \ell\right| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 5 On s'intéresse à la limite en 0 de la fonction f définie sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt{x}\,\left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor$.

Soit x un réel strictement positif. On essaie de majorer $\left|f(x) - 1\right|$. Par définition de la partie entière d'un réel, on a :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor\right| \leqslant 1.$$

En multipliant par $\sqrt{x}$, on obtient :

$$\left|1 - \sqrt{x}\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor\right| \leqslant \sqrt{x}.$$

La proposition 4 permet alors de conclure.

Exercice 6 Il faut distinguer selon que $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.

On a immédiatement :

- lorsque $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad \big(|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f\,(x) \leqslant M\big);$$

- lorsque $a=+\infty$:

$$\forall M\in\mathbb{R}\quad \exists N\in\mathbb{R}\quad \forall x\in I\quad \Big(x\geqslant N\Longrightarrow f(x)\leqslant M\Big);$$

- lorsque $a=-\infty$:

$$\forall M\in\mathbb{R}\quad \exists N\in\mathbb{R}\quad \forall x\in I\quad \Big(x\leqslant N\Longrightarrow f(x)\leqslant M\Big).$$

Théorème 6 Distinguons trois cas.

- Supposons ℓ_1 et ℓ_2 réels. Dans ce cas $\ell_1=\ell_2$ d'après le théorème 3 de la page 488.
- Supposons l'une des valeurs finie, l'autre infinie. On peut supposer sans perte de généralité que $\ell_1\in\mathbb{R}$ et $\ell_2=+\infty$. Par définition, les inégalités $\big|f(x)-\ell_1\big|\leqslant 1$ et $f(x)\geqslant \ell_1+2$ sont vérifiées au voisinage de a. En d'autres termes, il existe un intervalle J de la forme :

$$J=\begin{cases}[a-\eta,a+\eta] & \text{avec } \eta>0, \text{ si } a\in\mathbb{R}\,;\\ ]M,+\infty[& \text{avec } M\in\mathbb{R}, \text{ si } a=+\infty\,;\\ ]-\infty,M[& \text{avec } M\in\mathbb{R}, \text{ si } a=-\infty\,;\end{cases}$$

  tel que les deux inégalités sont vérifiées sur $I\cap J$. On a $I\cap J\neq\varnothing$ et, pour $x\in I\cap J$, on a

$$\ell_1+2\leqslant f(x)\leqslant \ell_1+1,$$

  et donc $2\leqslant 1$, ce qui est faux. Par suite, ce cas est impossible.
- Supposons ℓ_1 et ℓ_2 toutes deux infinie. Si $\ell_1\neq\ell_2$, on peut supposer $\ell_1=-\infty$ et $+\infty$. Comme dans le cas précédent, on a un intervalle J tel que $I\cap J\neq\varnothing$ et les inégalités $f(x)\leqslant -1$ et $f(x)\geqslant 1$ sont vérifiées sur $I\cap J$. Cela est évidemment impossible. Ainsi lorsque ℓ_1 et ℓ_2 sont infinies, on a $\ell_1=\ell_2$.

Théorème 7 Il y a *a priori* neuf cas à traiter, mais les démonstrations dans chacun des cas sont très similaires. Nous ne traiterons qu'un cas.

Supposons $f(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}\ell$, avec a et ℓ finis. Soit ε un réel strictement positif. L'hypothèse $f(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}\ell$ se traduit par l'existence d'un $\eta>0$ tel que pour tout $x\in I$ vérifiant $|x-a|\leqslant\eta$, nous ayons $\big|f(x)-\ell\big|\leqslant\varepsilon$. Fixons un tel η.

L'hypothèse sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne l'existence d'un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n\geqslant n_0$ nous ayons $|x_n-a|\leqslant\eta$.

Par conséquent, pour tout entier $n\geqslant n_0$, nous avons $\big|f(x_n)-\ell\big|\leqslant\varepsilon$. Ainsi, par définition $f(x_n)\longrightarrow\ell$.

Exercice 7 Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction ainsi que $(\ell_1,\ell_2)\in\overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $f(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}\ell_1$ et $f(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}\ell_2$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans I telle que $x_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}a$. Alors, d'après le théorème 7 de la page 491, $f(x_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ell_1$ et $f(x_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ell_2$. D'après l'unicité de la limite d'une suite, $\ell_1=\ell_2$.

Pour que la démonstration soit complète, l'existence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ doit être justifiée. Il y a plusieurs cas à envisager.

- Dans le cas où $a \in I$, la suite constante égale à a convient.
- Dans le cas où $a \in \mathbb{R}$ est l'extrémité inférieure de I, posons la suite $\left(a+\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite est à valeurs dans I à partir d'un certain rang et elle tend vers a ; elle permet de conclure. Le cas où $a \in \mathbb{R}$ est l'extrémité supérieure de I se traite de manière analogue.
- Dans le cas où $a = -\infty$, considérons la suite $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite est à valeurs dans I à partir d'un certain rang et elle tend vers $-\infty$; elle permet de conclure. Le cas où $a = +\infty$ est l'extrémité supérieure de I se traite de manière analogue.

Exercice 8 La démonstration repose sur la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et la densité de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit x est un réel. On sait qu'il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x, la première à valeurs dans $\mathbb{Q}$, la seconde à valeurs dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (voir page 399). Puisque $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_n) = 1$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(y_n) = 0$ et donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en x. On montre de même que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'a pas de limite en $+\infty$ et $-\infty$.

Théorème 8 Seul le sens $(ii) \Rightarrow (i)$ est à traiter (*cf.* le théorème 7 de la page 491). Il faut encore *a priori* traiter neuf cas. Les démonstrations dans chacun des cas sont relativement semblables. Nous traitons le cas où $a = +\infty$ et ℓ est fini. Supposons que l'assertion (ii) soit vraie et que ℓ ne soit pas limite de f en $+\infty$. Cela signifie qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in I \cap [M, +\infty[\quad \left|f(x) - \ell\right| > \varepsilon.$$

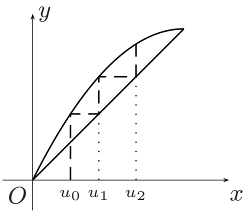
On peut donc, pour tout entier naturel n, choisir un réel $x_n \in I$ tel que $x_n \geqslant n$ et $\left|f(x_n) - \ell\right| > \varepsilon$. Il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$. En passant à la limite dans l'inégalité $\left|f(x_n) - \ell\right| > \varepsilon$, on obtient $0 \geqslant \varepsilon$, ce qui est absurde.

Théorème 9 Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in I$. Alors, par extraction, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$, mais on a également, par continuité de f en ℓ :

$$u_{n+1} = f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell).$$

Par conséquent $\ell = f(\ell)$.

Exercice 9 L'intervalle fermé $[0,1]$ est stable par la fonction $f : x \mapsto 2x - x^2$. Il s'ensuit que la suite est à valeurs dans $[0,1]$.

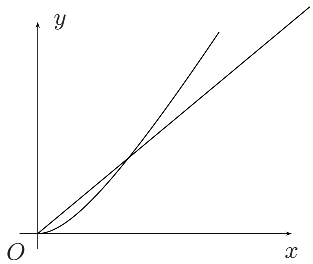


Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n(1-u_n) \geqslant 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée : elle converge. On note ℓ sa limite.

La fonction f étant continue en tout point de l'intervalle $[0,1]$, la limite ℓ est un point fixe de f. Ainsi $\ell \in \{0,1\}$. Par croissance de la suite, $u_0 \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc par passage à la limite dans les inégalités, $u_0 \leqslant \ell$. Puisque $u_0 > 0$, il vient que $\ell = 1$.

Remarque Dans cet exercice, on peut néanmoins ne pas utiliser le théorème 9 de la page 492. En effet, la suite extraite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ. Par les opérations sur les limites des suites, il vient de la relation $u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$ que $\ell = 2\ell - \ell^2$. On retrouve ainsi la condition $\ell \in \{0,1\}$.

Exercice 10 L'intervalle $I = [1,+\infty[$ est stable par la fonction $f : x \mapsto \frac{2x^2}{1+x}\cdot$



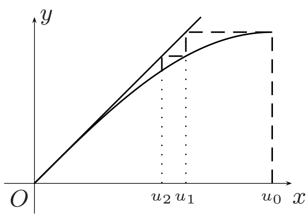
En effet, on a $f(x) - x = \frac{x(x-1)}{1+x} \geqslant 0$, pour $x \in [1,+\infty[$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans I et pour tout x de cet intervalle, on a $f(x) \geqslant x$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante. Elle a donc une limite, finie ou infinie. Soit ℓ cette limite.

L'intervalle I étant fermé, si la suite converge, sa limite ℓ est dans I. La fonction f étant continue sur I, le réel ℓ est alors un point fixe de f. Il est clair que $f(x) = x$ a pour seule solution $x = 1$ et donc on aurait $\ell = 1$. Par croissance de la suite, on a $u_n \geqslant u_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et par passage à la limite dans les inégalités, $1 \geqslant u_0$, ce qui impossible car $u_0 > 1$. La suite tend vers $+\infty$ et donc elle est divergente.

Exercice 11

1. L'intervalle $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ est stable par f.

   La fonction $g : x \mapsto \sin x - x$ est strictement décroissante sur I (elle est dérivable sur cet intervalle et la dérivée $g' : x \mapsto \cos x - 1$ est strictement négative). Puisque $g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $g(x) < 0$, pour tout $x \in I$. Il s'ensuit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
2. La suite est décroissante, positive : elle est donc convergente. Soit ℓ sa limite. Puisque la fonction sinus est continue sur l'intervalle fermé $J = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, sa limite ℓ est un point fixe.
   Puisque $g(x) = \sin x - x < 0$ pour tout $x \in I$, sur l'intervalle fermé J la fonction sinus a 0 comme unique point fixe. Par conséquent $\ell = 0$.

Proposition 11 On utilise la caractérisation séquentielle de la limite et la proposition 21 de la page 409. Plus précisément, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I, de limite a. Puisque g est bornée au voisinage de a, la suite $\big(g(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par composition des limites, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ainsi :

$$(f\,g)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Le théorème de caractérisation séquentielle permet alors de conclure.

Proposition 12 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.

Par composition des limites, $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $g(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$.

D'après les opérations sur les limites des suites, si $\lambda\ell + \mu\ell'$ est définie dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\big(\lambda\, f(x_n) + \mu g(x_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \big(\lambda\,\ell + \mu\,\ell'\big)$.

Ainsi, par caractérisation séquentielle, $\big(\lambda\, f(x) + \mu g(x)\big) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \big(\lambda\,\ell + \mu\,\ell'\big)$.

Le cas du produit $f\,g$ se traite de la même manière.

Exercice 12

1. C'est immédiat si $\lim\limits_a f$ et $\lim\limits_a g$ existent et sont finies. Si $\lim\limits_a f$ et $\lim\limits_a (f+g)$ existent et sont finies, alors, du fait que $g = (f+g) - f$, la limite de g est définie en a. De même si $\lim\limits_a g$ et $\lim\limits_a (f+g)$ existent et sont finies.
2. C'est encore immédiat si $\lim\limits_a f$ et $\lim\limits_a g$ existent et l'une de ces limites est finie. Là encore, si $\lim\limits_a f$ et $\lim\limits_a (f+g)$ existent et que et l'une de ces limites est finie, on peut remarquer que l'égalité $g = (f+g) - f$ permet de conclure.
3. C'est évidemment faux. On peut par exemple prendre $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto \sin x$ en $+\infty$ comme contre-exemple.

Théorème 14 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Par composition des limites, $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Puisque f est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, la suite $\left(\frac{1}{f(x_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie. D'après les opérations sur les limites des suites, sachant que $\ell \neq 0$, on a $\frac{1}{f(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell}$.

Proposition 17 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Par composition des limites, $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Puisque f est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, la suite $\left(\frac{1}{f(x_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie. D'après les opérations sur les limites des suites, sachant que $\ell = \pm\infty$, on a $\frac{1}{f(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell}$.

Proposition 18 On conclut par caractérisation séquentielle en utilisant la proposition 28 de la page 412 (chapitre 8) dans le premier cas. Le deuxième s'en déduit en utilisant $-f$.

Théorème 19 La démonstration se fait par caractérisation séquentielle. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I, de limite a. Par composition des limites dans le cas des suites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b$, du fait que $\lim\limits_a f = b$. Le même théorème assure, en vertu de l'hypothèse $\lim\limits_b g = \ell$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} g\big(f(x_n)\big) = \ell$. Le théorème de caractérisation séquentielle permet de conclure.

Exercice 13 On rappelle que les fonctions $\sup\{f,g\}$ et $\inf\{f,g\}$ sont définies sur I par :

$$\sup\{f,g\} : x \mapsto \max\big\{f(x), g(x)\big\} \quad \text{et} \quad \inf\{f,g\} : x \mapsto \min\big\{f(x), g(x)\big\}.$$

On sait que la fonction $|f|$ est également continue en a (*cf.* la proposition 5 de la page 489). On conclut aisément en remarquant que $f^+ = \dfrac{f+|f|}{2}$, $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$, et $\sup\{f,g\} = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\inf\{f,g\} = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$.

Proposition 21 Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans J, de limite a. Puisque qu'elle est également à valeurs dans I, on a, par composition des limites, $f(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_{|J}(y_n) = f(y_n)$. On en déduit donc que $f_{|J}(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et l'on peut conclure par le théorème de caractérisation séquentielle.

Proposition 23

1. Notons $J =]a-r, a+r[$, avec r un réel strictement positif. Il s'agit de démontrer que si $\lim\limits_a f_{|I\cap J} = \ell$, alors f a une limite en a et $\lim\limits_a f = \ell$; l'autre implication étant vraie d'après la proposition 21 de la page 497.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I qui converge vers a. Par définition de la limite d'une suite, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $|x_n - a| < r$. Puisque $\lim\limits_a f_{|J} = \ell$ et que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $I \cap J$ à partir d'un certain rang, on a par composition des limites que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$. On conclut alors par caractérisation séquentielle.

2. et 3. Les cas $+\infty$ et $-\infty$ se traitent de manière similaire.

Exercice 14 On a pour tout réel $x > 0$:

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Ainsi, toujours pour tout $x > 0$:

$$\left|\sqrt{x^2+1} - x\right| = \sqrt{x^2+1} - x \leqslant \frac{1}{x},$$

et on conclut à l'aide du fait que $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Proposition 25 Non traiterons que le cas ℓ strictement positive, le cas strictement négatif s'y ramenant par passage à l'opposé.

Cas a fini. Supposons que f ne soit pas strictement positive au voisinage de a. En particulier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe au moins un réel $x_n \in I \cap \left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right]$ tel que $f(x_n) \leqslant 0$. Par passage à la limite dans les inégalités pour les suites (*cf.* le corollaire 30 de la page 413), on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \leqslant 0$ et d'après le théorème 7 de la page 491, $\lim\big(f(x_n)\big) = \ell$; ainsi $\ell \leqslant 0$, ce qui est faux.

Cas $a = +\infty$. On raisonne de même en introduisant une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier n, on a $x_n \in I \cap [n, +\infty[$. Le cas $a = -\infty$ est évidemment similaire. Le cas $a = +\infty$ se traite de la même manière.

Exercice 15 Notons $P : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$. Pour tout $x > 0$, on a :

$$P(x) = x^n \left(a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n}\right) = x^n P_1(x)$$

$$Q(x) = x^m \left(b_m + \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^{k-n}\right) = x^m Q_1(x).$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = x^{n-m} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$.

On a justifié à l'exemple précédent que $P_1(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} a_n$ et $Q_1(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} b_m$ et donc, puisque a_n et b_m sont non nuls, $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{a_n}{b_m} \neq 0$. Par ailleurs :

$$x^{n-m} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } m > n\ ; \\ 1 & \text{si } m = n\ ; \\ +\infty & \text{si } m < n. \end{cases}$$

D'après les théorèmes généraux :

$$f(x) = x^{n-m} \frac{P_1(x)}{Q_i(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } m > n\ ; \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } m = n\ ; \\ +\infty & \text{si } m < n \text{ et } a_n b_m > 0\ ; \\ -\infty & \text{si } m < n \text{ et } a_n b_m < 0. \end{cases}$$

Exercice 16 La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur $]-1, +\infty[$ contenant 0. De la dérivabilité de fonction $\ln$ en 1, il vient que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln'(1) = 1.$$

Il s'ensuit, par continuité de la fonction exponentielle :

$$(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} e^1 = e.$$

Exercice 17

1. On a, pour $x > 0$:
$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \big[\ln t\big]_x^{2x} = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln 2.$$

2. Pour tout $t \geqslant 1$, on a $t + \sqrt{t} \geqslant t$ et donc $\frac{1}{t+\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{t}$. De plus :
$$0 \leqslant \frac{1}{t} - \frac{1}{t+\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t}}{t\left(t+\sqrt{t}\right)} \leqslant \frac{\sqrt{t}}{t^2} = \frac{1}{t^{3/2}}.$$

3. Soit $x \geqslant 1$. Puisque $x \leqslant 2x$, on a :
$$0 \leqslant \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+\sqrt{t}}\right) \mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} = \left[\frac{-2}{\sqrt{t}}\right]_x^{2x} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{x}}.$$
Puisque :
$$0 \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{t}} = \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+\sqrt{t}}\right) \mathrm{d}t,$$
on en déduit que :
$$0 \leqslant \ln 2 - f(x) \leqslant \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{x}}.$$

4. Puisque $\frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2$.

Proposition 30 Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue à droite, il existe $\eta_d > 0$ tel que :
$$\forall x \in I \cap [a, +\infty[\quad \Big(\big|x-a\big| \leqslant \eta_d \Rightarrow \big|f(x) - f(a)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$
Il existe de même $\eta_g > 0$ tel que :
$$\forall x \in I \cap]-\infty, a] \quad \Big(\big|x-a\big| \leqslant \eta_g \Rightarrow \big|f(x) - f(a)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$
Par conséquent, en posant $\eta = \min\{\eta_g, \eta_d\}$, on a $\eta > 0$ et :
$$\forall x \in I \quad \Big(\big|x-a\big| \leqslant \eta \Rightarrow \big|f(x) - f(a)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$
La conclusion est alors immédiate.

Exercice 18 Comme $\sin(0) = 0 = \mathrm{sh}(0)$, la fonction f vérifie :
$$\forall x \geqslant 0 \quad f(x) = \sin x \qquad \text{et} \qquad \forall x \leqslant 0 \quad f(x) = \mathrm{sh}\, x.$$
Donc la restriction de f à $]-\infty, 0]$ est l'application $x \mapsto \mathrm{sh}\, x$. Par conséquent $f_{|]-\infty,0]}$ est continue.

De même, la restriction de f à $[0, +\infty[$ est l'application $x \mapsto \sin x$. Par conséquent $f_{|[0,+\infty[}$ est continue. Le résultat s'ensuit.

Exercice 19

1. Par caractère local de la limite, il suffit de démontrer que $f_{|]-T,T[}$ est continue en 0. Par restriction, $f_{|[0,T[}$ est continue, et donc $f_{|]-T,T[}$ est continue à droite en 0.
Pour tout $x \in]-T, 0]$:
$$f(x) = f(x+T) = f_{|[0,T]}(x+T).$$

Ainsi, par composition de fonctions continues, $f_{|]-T,0]}$ est continue. Ainsi f est continue à gauche en 0 et donc continue en 0.

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus T\mathbb{Z}$. Il existe donc $n \in \mathbb{Z}$ tel que $nT < x < (n+1)T$, et donc $f(x) = f(x-nT)$. D'après le caractère local de la limite, la continuité de f sur $]0,T[$ garantit la continuité de f en x.
Si $x = nT$, par composition des limites, $\lim\limits_{t\to nT} f(t-nT) = f(0)$, et donc :
$$\lim_{t\to nT} f(t) = \lim_{t\to nT} f(t-nT) = f(0) = f(nT).$$
Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20 Puisque $f_{|]n-1,n[} = x-n+1$ et $f_{|]n,n+1[} = x-n$, on a :
$$\lim_{\substack{x\to n\\x<n}} f(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to n\\x>n}} f(x) = 0.$$

Exercice 21 La fonction indicatrice du singleton $\{0\}$:
$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
admet 0 pour limite à gauche et à droite en 0, mais n'est pas continue en 0 puisque, par exemple $\lim\limits_{n\to+\infty} f(1/n) = 0 \neq 1 = f(0)$.

Proposition 31 Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite à droite, il existe $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in I \cap]a,+\infty[\quad \Big(|x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x)-f(a)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$
Puisque $f(a) - f(a) = 0$, on a :
$$\forall x \in I \cap [a,+\infty[\quad \Big(|x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x)-f(a)\big| \leqslant \varepsilon\Big),$$
ce qui est la définition de la continuité à droite.

Théorème 32

Unicité. Par continuité de $\widetilde{f}$ et caractère local de la limite :
$$\widetilde{f}_{|I\setminus\{a\}}(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \widetilde{f}(a).$$
Par ailleurs, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a $\widetilde{f}_{|I\setminus\{a\}}(x) = f(x)$. Ainsi :
$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \widetilde{f}(a).$$

Existence. Notons ℓ la limite de f en a. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on ait $\big|f(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon$. Fixons un tel η. Par conséquent, $\big|\widetilde{f}(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ vérifiant $|x-a| \leqslant \eta$. Puisque $\widetilde{f}(a) = \ell$, il vient que :
$$\forall x \in I \quad \Big(|x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(a)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Exercice 22 On a $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 0}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$ par le théorème de composition des limites. La conclusion s'ensuit.

Exercice 23 Ici, il n'est pas question de prolongement. La fonction est évidemment continue à gauche en 0, car $f_{|]-\infty,0]}$ est nulle. De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et $f(0) = 0$; ainsi f est continue à droite en 0, et donc continue en 0.
Par caractère local de la continuité, elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 33 On peut supposer sans perte de généralité que f est croissante. Nous faisons la démonstration concernant la limite en b, celle de la limite en a étant similaire. Notons $J = f\big(I\big)$.

Cas J majorée. Posons $L = \sup J$. Soit ε un réel strictement positif. Par définition de la borne supérieure, il existe $\beta \in I$ tel que $L - \varepsilon \leqslant f(\beta)$ (sinon, $L - \varepsilon$ serait un majorant de f). D'après la croissance de f et la définition de la borne supérieure, pour tout $x \in I$, avec $\beta \leqslant x < b$, on a :

$$L - \varepsilon \leqslant f(\beta) \leqslant f(x) \leqslant L.$$

Par définition de la limite, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = L$.

Cas J non majorée. Soit M un réel. Il existe $\beta \in I$ tel que $f(\beta) \geqslant M$. Ainsi : pour tout $x \in I$, $\beta \leqslant x < b$, on a

$$M \leqslant f(\beta) \leqslant f(x).$$

Toujours par définition, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.

Corollaire 34 Soit $x \in I \setminus \{b\}$. Puisque f est croissante, on a, pour tout $t \in]x, b[$:

$$f(x) \leqslant f(t) = f_{|]x,b[}(t).$$

Puisque la fonction $f_{|]x,b[}$ est croissante et minorée par $f(x)$, d'après le démonstration du théorème 33 de la page 507, la fonction $f_{|]x,b[}$ a une limite finie en x et cette limite est supérieure à $f(x)$.
Raisonnement analogue pour le limite à gauche en $x \in I \setminus \{a\}$.

Théorème 39 Soit f une fonction K-lipschitzienne sur I et $a \in I$.
Pour tout $x \in I$:

$$\big|f(x) - f(a)\big| \leqslant K\,|x - a|.$$

On conclut immédiatement en remarquant que $\lim\limits_{x\to a} K|x - a| = 0$.

Exercice 24

- On peut, par symétrie, supposer $x \leqslant y$. Il s'agit alors de démontrer que :

$$\sqrt{y} \leqslant \sqrt{y - x} + \sqrt{x}.$$

Puisque qu'il s'agit de termes positifs, cette inégalité est équivalente à :

$$y \leqslant (y - x) + x + 2\sqrt{y - x}.$$

Cette dernière est évidemment vérifiée.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon > 0$. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, si $|y - x| \leqslant \varepsilon^2$, alors :

$$\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| \leqslant \sqrt{|y-x|} \leqslant \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

  Cela démontre la continuité de f en x.

- Raisonnons par l'absurde. Supposons que $f : x \mapsto \sqrt{x}$ soit K-lipschitzienne, pour un $K \in \mathbb{R}_+$. On peut évidemment supposer $K > 0$. On aurait alors, pour tout $x > 0$:

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| \leqslant K\,x,$$

  et donc, toujours pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant K.$$

  Cette dernière inégalité ne pas être vérifiée pour tout $x > 0$, car pour $x_0 = \frac{1}{4K^2}$ on a :

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}} = 2K > K.$$

Exercice 25

- Pour tout $(x, y) \in [0,1]^2$, on a $\left|f(y) - f(x)\right| = |x+y|\,|x-y| \leqslant 2\,|y-x|$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\left|\dfrac{f(2x) - f(x)}{2x - x}\right| = 3\,x. \qquad (*)$

  Si f était lipschitzienne, l'ensemble $\left\{\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}\ ;\ (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ x \neq y\right\}$ serait borné, ce qui n'est pas possible au vu de la relation $(*)$.

Théorème 40 L'hypothèse $f(a)f(b) \leqslant 0$, signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés. Définissons par récurrence deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose,

$$\alpha_0 = \begin{cases} a & \text{si } f(a) \leqslant f(b)\ ; \\ b & \text{sinon}\,; \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \beta_0 = \begin{cases} b & \text{si } f(a) \leqslant f(b)\ ; \\ a & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ensuite, pour tout entier naturel n, en notant $c_n = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}$, on pose :

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{si } f(c_n) \leqslant 0, \\ \alpha_n & \text{sinon}\,; \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \beta_{n+1} = \begin{cases} \beta_n & \text{si } f(c_n) \leqslant 0, \\ c_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les suites sont bien définies, car pour $(x,y) \in I^2$, le milieu $\frac{x+y}{2}$ de x et y est encore un élément de I. On vérifie alors par récurrence que $f(\alpha_n) \leqslant 0$ et $f(\beta_n) \geqslant 0$, pour tout entier n. Ainsi :

$$f(\alpha_n)\,f(\beta_n) \leqslant 0. \tag{1}$$

De plus, toujours pour tout entier n :

$$\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} = \begin{cases} \beta_n - c_n & = \frac{\beta_n - \alpha_n}{2} & \text{si } f(c_n) \leqslant 0, \\ c_n - \alpha_n & = \frac{\beta_n - \alpha_n}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, $\beta_n - \alpha_n = \frac{1}{2^n}(\beta_0 - \alpha_0)$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\beta_n - \alpha_n) = 0$.

De la définition des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a également que :

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \begin{cases} \frac{\beta_n - \alpha_n}{2} & \text{si } f(c_n) \leqslant 0, \\ 0 & \text{sinon}; \end{cases}$$

ce qui a pour conséquence que $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ est du signe (au sens large) de $\beta_0 - \alpha_0$ et donc $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. De même, $\beta_{n+1} - \beta_n$ est du signe de $\alpha_0 - \beta_0$ et la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, de monotonie opposée à celle de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il s'ensuit que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En notant c la limite commune, en passant à la limite dans l'inégalité (1), on obtient par continuité de f en c :

$$f(c)^2 \leqslant 0,$$

et donc $f(c) = 0$.

Exercice 26 Posons $h : x \mapsto \exp(-x) - x^2$, définie sur $\mathbb{R}$.
D'après les théorèmes généraux, elle est définie et continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$. On a $h(0) = 1 > 0$ et $h(1) = e^{-1} - 1 < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, h s'annule sur $]0,1[$.

Corollaire 42

- Si $\lim\limits_a f < 0$ ou $\lim\limits_a f = -\infty$, la fonction f est strictement négative au voisinage de a (*cf.* la proposition 25 de la page 498). Ainsi f est à valeurs strictement négatives au voisinage de a et il existe $x \in I$ tel que $f(x) < 0$.
- De même, en considérant $\lim\limits_b f$, il existe $y \in I$ tel que $f(y) > 0$.

Il suffit alors d'appliquer le théorème 40 de la page 511 pour conclure.

Exercice 27 Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{2n-1} a_k x^k$, où $(a_0, \ldots, a_{2n-1}) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $a_{2n-1} \neq 0$. Quitte à multiplier par -1, on peut supposer que $a_{2n-1} > 0$. On a pour tout $x > 0$:

$$\frac{f(x)}{x^{2n-1}} = a_{2n-1} + \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{a_k}{x^{2n-1-k}},$$

et par conséquent :

$$\frac{f(x)}{x^{2n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a_{2n-1}.$$

Il s'ensuit, en multipliant par x^{2n-1}, que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. On démontre de même que $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$. Le corollaire 42 de la page 513 permet de conclure.

Corollaire 43 Soit γ une valeur entre $f(a)$ et $f(b)$. Les réels $f(a) - \gamma$ et $f(b) - \gamma$ sont alors de signes opposés. La fonction continue $g : x \mapsto f(x) - \gamma$ change de signe sur l'intervalle I : d'après le théorème 40 de la page 511, elle s'annule.

Théorème 44 Soit $(\alpha, \beta) \in f(I)^2$, vérifiant $\alpha \leqslant \beta$. Par définition, il existe $(a, b) \in I^2$ tel que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.
D'après le corollaire 43 de la page 513, on a $[\alpha, \beta] \subset f(I)$.
On conclut, à l'aide de la caractérisation des intervalles, que $f(I)$ est un intervalle.

Exercice 28 Si f n'est pas constante, $f(I)$ est un intervalle contenant au moins deux points. Un tel intervalle contient au moins un éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ce qui contredit le fait que $f(I) \subset \mathbb{Z}$

Exercice 29 La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ convient.

Théorème 45

- Supposons que f ne soit pas majorée. D'abord montrons qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[a, b]$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$. En effet $f\big([a, b]\big)$ n'est pas majoré, et donc, pour tout entier naturel n, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) \geqslant n$.
D'après le théorème de Bolzano–Weierstraß (voir page 416), il existe une suite extraite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$; on note x sa limite. Par extraction, nous avons que $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = +\infty$. Par ailleurs, par continuité de f en x, nous obtenons l'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(x)$, ce qui est absurde. Par conséquent f est majorée. De même, f est minorée.
- Notons $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Supposons que f n'ait pas de maximum. Posons alors la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{M - f(t)}$, qui est définie et continue sur $[a, b]$. Par définition de la borne supérieure, pour tout $\alpha > 0$, il existe $t \in [a, b]$ tel que $M - \frac{1}{\alpha} \leqslant f(t)$ et donc tel que $g(t) \geqslant \alpha$. La fonction g continue sur un segment ne serait pas majorée, ce qui est contradictoire avec le premier point. De même f a un minimum.
- Les premiers points et le théorème de valeurs intermédiaires donnent que $f\big([a, b]\big)$ est un segment.

Exercice 30

1. La fonction f est continue sur un segment. Elle admet un minimum en un point c qui vaut $f(c) > 0$. Il s'ensuit que f est minorée par la constante $f(c)$.
2. L'assertion est fausse. Voici un contre-exemple. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, continue sur $\mathbb{R}_+^*$ est à valeurs strictement positives. Soit $m > 0$. Puisque $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, l'inégalité $f(x) \leqslant m/2$ est vérifiée au voisinage de $+\infty$: il existe donc $x > 0$ tel que $f(x) < m$. Donc f n'est minorée par aucune constante strictement positive.

Théorème 46 Démontrons l'implication $ii) \Rightarrow i)$. Il est clair que si f est strictement croissante, alors elle est injective. De même si elle est strictement décroissante.

Démontrons l'implication $i) \Rightarrow ii)$. Soit f une fonction continue et injective sur I.

1. Considérons $(x, y) \in I^2$, avec $x < y$.

- Supposons $f(x) < f(y)$. Démontrons qu'alors :

$$\forall t \in I \quad x < t \Rightarrow f(x) < f(t)$$

$$\forall t \in I \quad t < x \Rightarrow f(t) < f(x)$$

Introduisions la fonction g définie sur I par $g(t) = f(t) - f(x)$. Il s'agit de démontrer que $g(t) < 0$, pour $t \in I$ vérifiant $t < x$, et que que $g(t) > 0$, pour $t \in I$ vérifiant $t > x$. La fonction g est continue, injective.

  * Soit $t \in I$ tel que $t > x$. Si $g(t) \leqslant 0$, sachant que $g(y) \geqslant 0$, le théorème des valeurs intermédiaires impliquerait que la fonction g s'annulerait sur $I \cap]x, +\infty[$, ce qui, du fait que $g(x) = 0$, contredirait l'injectivité de g. Ainsi, $g(t) > 0$.
  * Soit $t \in I$ tel que $t < x$. Supposons $g(t) \geqslant 0$. On a $g(t) > 0$, car g est injective. Notons $m = \min\{g(t), g(y)\}$. Puisque $g(x) = 0 < m \leqslant g(y)$, il existe $\alpha \in [x, y]$ tel que $g(\alpha) = m$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliquées à $g_{|_{[x,y]}}$. Par ailleurs, $\alpha \in]x, y]$. On démontre de même qu'il existe $\beta \in [t, x[$ tel que $g(\beta) = m$, ce qui contredit l'injectivité. Ainsi, $g(t) < 0$.

- De même, si $f(x) > f(y)$, alors, pour tout $t \in I$ vérifiant $t < x$, on a $f(t) > f(x)$ et pour tout $t \in I$ vérifiant $t > x$, on a $f(t) < f(x)$. Il suffit d'appliquer le point précédent à la fonction $-f$.

2. Soit $(a, b) \in I^2$, avec $a < b$. Démontrons que si $f(a) < f(b)$, alors la fonction f est strictement croissante. Pour cela, supposons qu'il existe $(x, y) \in I^2$, avec $x < y$ et $f(x) > f(y)$.

   - Supposons $a \leqslant x$. Puisque $x < y$ et $f(x) > f(y)$, on a d'après le 1. l'inégalité $f(a) \geqslant f(x)$, car $a \leqslant x$. Puisque $a < b$ et $f(a) < f(b)$, toujours d'après le 1., on a $f(a) < f(y)$, car $a < y$. Ainsi, $f(x) \leqslant f(a) < f(y)$, ce qui est absurde.
   - Le même raisonnement montre que $y \leqslant a$ est impossible.
   - Le dernier cas correspond à $x < a < y$. D'après le 1., on a $f(x) < f(a) < f(y)$, ce qui est impossible.

   Il s'ensuit, pour tout $(x, y) \in I^2$ vérifiant $x < y$, que l'on a $f(x) \leqslant f(y)$ et, du fait que f est injective, $f(x) < f(y)$. Ainsi la fonction f est strictement croissante.

   Si $f(a) > f(b)$, en appliquant ce qui précède à la fonction $-f$, on obtient que la fonction f est strictement décroissante.

Exercice 31 La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ convient.

Lemme 47 Il suffit de démontrer que si f n'est pas continue, alors $f(I)$ n'est pas un intervalle. On peut, quitte à passer à l'opposé, supposer que f est croissante.
Supposons que f soit non continue en $x \in I$. Supposons de plus pour commencer que x soit intérieur à I.

On a alors $f(x-) \neq f(x)$ ou $f(x+) \neq f(x)$.

Pour fixer les idées, supposons $f(x+) \neq f(x)$, c'est-à-dire ici que $f(x+) > f(x)$. Pour tout $t \in I$, si $t \leqslant x$, on a $f(t) \leqslant f(x)$, et si $t > x$, on a $f(x+) \leqslant f(t)$.

Fixons un $t > x$, ce qui est possible, puisque x est intérieur à l'intervalle de définition. On a $f(x)$ et $f(t)$ dans l'image, mais $[f(x), f(t)] \not\subset f(I)$, du fait qu'aucune valeur de $]f(x), f(x+)[$ n'appartient à l'image. Ainsi $f(I)$ n'est pas un intervalle.

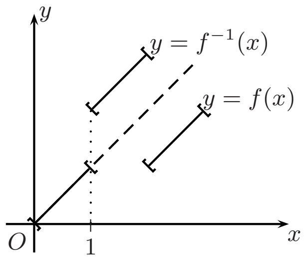
On raisonne de même lorsque x est une extrémité.

Théorème 48

1. L'application f induit une bijection de I sur $J = f(I)$. De plus $f(I)$ est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires (*cf.* page 513), $f(I)$ est un intervalle.
2. C'est une redite partielle du théorème précédent.
3. Supposons par exemple f strictement croissante et soit $(y, y') \in J^2$ tel que $y < y'$. Notons $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$. Si $x \geqslant x'$, on aurait par stricte croissance de f, l'inégalité $y = f(x) \geqslant f(x') = y'$, ce qui est absurde. Ainsi $x < x'$.
4. On a $f^{-1}(J) = I$ et I est un intervalle. Ainsi, f^{-1} est continue d'après le lemme 47 de la page 515.

Exercice 32 La fonction f est polynomiale, donc continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Il est facile d'établir que $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. On a donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. La fonction f est la somme d'une constante et des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^3$, tous les deux strictement croissante. Elle est donc strictement croissante.

Exercice 33



Notons $X =]0,1[\cup [2,3[$. D'après le caractère local de la continuité, f est continue en tout point de $]0,1[\cup [2,3[$. En distinguant les cas $x < y < 1$, $2 \leqslant x < y$ et $x < 2 \leqslant y$, on vérifie facilement que si $(x,y) \in X^2$, avec $x < y$, alors $f(x) < f(y)$. La fonction f est strictement croissante. Il est clair que $f(X) =]0,2[$. Ainsi, f une bijection continue strictement croissante sur X.

L'application réciproque f^{-1} est définie sur $]0,2[$. On a par ailleurs, $\lim\limits_{x \to 1^-} f^{-1}(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f^{-1}(x) = 2$. Elle n'est donc pas continue.

Proposition 49 Soit f une fonction K-lipschitzienne. On peut supposer $K > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. En posant $\eta = \frac{\varepsilon}{K}$, on a pour tout $(x,y) \in I^2$ vérifiant $|x - y| \leqslant \eta$:

$$\bigl|f(y) - f(x)\bigr| \leqslant K\,|y - x| \leqslant K\,\eta = \varepsilon.$$

Exercice 34

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $(x,y) \in [0,a]^2$, on a :
$$\bigl|y^2 - x^2\bigr| = |x + y|\,|x - y| \leqslant (2a)\,|y - x|.$$
D'après la proposition précédente, $f_{|[0,a]}$ est uniformément continue.
2. C'est une conséquence immédiate du fait que $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x + \eta)\,\eta = +\infty$.
3. Soit $\eta > 0$. Prenons x tel que $(2x + \eta)\eta \geqslant 1$ et posons $y = x + \eta$. Alors $|f(x) - f(y)| \geqslant 1$. On vient de démontrer la négation de continuité uniforme (avec « $\varepsilon = 1$ »)...

Théorème 50 Soit $f\,:\,[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a<b$.
On va démontrer le résultat par l'absurde.
Soit donc $\varepsilon>0$ tel que, pour tout $\eta>0$, il existe $(x,y)\in[a,b]^2$ tel que $|x-y|\leqslant\eta$ et $\bigl|f(y)-f(x)\bigr|>\varepsilon$. On peut donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ choisir $(x_n,y_n)\in[a,b]^2$ tel que $|x_n-y_n|\leqslant\frac{1}{n}$ et $\bigl|f(y_n)-f(x_n)\bigr|>\varepsilon$.
D'après le théorème de Bolzano–Weierstraß, il existe une application $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons $a=\lim\limits_{n\to+\infty}x_{\varphi(n)}$.
Puisque $|y_n-x_n|\leqslant\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n-x_n=0$ et donc, par extraction, $\lim\limits_{n\to+\infty}y_{\varphi(n)}=a$.
Par continuité de f en a, en passant à la limite dans l'inégalité $\bigl|f(y_{\varphi(n)})-f(x_{\varphi(n)})\bigr|>\varepsilon$, on obtient $0\geqslant\varepsilon$, ce qui est absurde.

Exercice 35

1. La fonction $f_{|[0,a]}$ est continue sur le segment $[0,a]$, elle donc uniformément continue conformément au théorème de Heine.
2. Soit $\varepsilon>0$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$, il existe $a>0$ tel que $\frac{1}{2\sqrt{a}}\leqslant 1$. Par conséquent, pour tout $x\geqslant a$ et $y\geqslant a$, on a :
$$\bigl|\sqrt{y}-\sqrt{x}\bigr|=\frac{|y-x|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leqslant\frac{|y-x|}{2\sqrt{a}}\leqslant|y-x|.$$
Par ailleurs, il existe η_1 tel que, pour tout $(x,y)\in[0,a]^2$, si $|y-x|\leqslant\eta$, alors $\bigl|\sqrt{y}-\sqrt{x}\bigr|\leqslant\varepsilon/2$. En posant $\eta=\min\{\eta_1,\varepsilon/2\}$, on obtient, pour tout (x,y) vérifiant $|y-x|\leqslant\eta$:
$$\bigl|\sqrt{y}-\sqrt{x}\bigr|\leqslant\begin{cases}\varepsilon/2\leqslant\varepsilon,\ \text{si } (x,y)\in[0,a]^2 \text{ ou } (x,y)\in[a,+\infty[^2\ ;\\ |f(x)-f(a)|+|f(y)-f(a)|\leqslant\varepsilon,\ \text{si } x\leqslant a\leqslant y.\end{cases}$$
La conclusion est immédiate.
Nous aurions pu également, sans utiliser le théorème de Heine, démontrer l'uniforme continuité de f à l'aide de l'exercice 24 de la page 510.
3. Non, puisque f^{-1} n'est pas uniformément continue, d'après l'exercice précédent.

Proposition 51 On a, pour tout $x\in I$:
$$0\leqslant|\ell-\ell'|=\Bigl|\bigl(\ell-f(x)\bigr)+\bigl(f(x)-\ell'\bigr)\Bigr|\leqslant\bigl|f(x)-\ell\bigr|+\bigl|f(x)-\ell'\bigr|.$$
Par passage à la limite dans les inégalités, du fait que $\bigl|f(x)-\ell\bigr|\underset{x\to a}{\longrightarrow}0$ et $\bigl|f(x)-\ell'\bigr|\underset{x\to a}{\longrightarrow}0$, on en déduit $|\ell-\ell'|\leqslant 0$, et donc $\ell=\ell'$.

Théorème 53

- Si $\lim\limits_a f=\ell$, alors $\lim\limits_a\overline{f}=\overline{\ell}$. D'après les propriétés des limites d'une somme et d'un produit, on a $\lim\limits_a\left(\frac{f+\overline{f}}{2}\right)=\frac{\ell+\overline{\ell}}{2}$ et $\lim\limits_a\left(\frac{f-\overline{f}}{2i}\right)=\frac{\ell-\overline{\ell}}{2i}$.
- De même, si $\lim\limits_a\mathrm{Re}\,(f)$ et $\lim\limits_a\mathrm{Im}\,(f)$ sont définies, alors :
$$\lim_a\bigl(\mathrm{Re}\,(f)+i\,\mathrm{Im}\,(f)\bigr)=\lim_a\mathrm{Re}\,(f)+i\lim_a\mathrm{Re}\,(f).$$

Corollaire 54 On a $\frac{1}{f} = \frac{\operatorname{Re} f}{|f|^2} - i\,\frac{\operatorname{Im} f}{|f|^2}$. Puisque $\ell \neq 0$ et $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$, la limite de $|f|^2$ en a est non nulle. De par les théorèmes généraux, les fonctions réelles $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{f}\right)$ et $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{f}\right)$ ont des limites finies en a. Ainsi :

$$\frac{1}{f(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \frac{\operatorname{Re} \ell}{|\ell|^2} - i\,\frac{\operatorname{Im} \ell}{|\ell|^2} = \frac{1}{\ell}.$$

Corollaire 56 Les fonctions réelles $\left|\operatorname{Re} f\right|$ et $\left|\operatorname{Im} f\right|$ sont continues sur le segment $[a,b]$. Elles sont respectivement majorées par des fonctions constantes A et B. On a alors que $|f|$ est majorée par $\sqrt{A^2+B^2}$.

Exercice 36 On ne peut en aucun cas invoquer directement la composition des limites, car nous ne disposons de la notion de limite que pour les suites et pour les fonctions définies sur une partie non vide de $\mathbb{R}$, et non pour les fonctions définies sur une partie de $\mathbb{C}$.
En revanche, on peut écrire $\exp \circ f = e^{\operatorname{Re} f} \cos \circ \big(\operatorname{Im}(f)\big) + i\, e^{\operatorname{Re} f} \sin \circ \big(\operatorname{Im}(f)\big)$.
L'existence de la limite est alors une conséquence des théorèmes généraux.

Exercice 37 Non. Considérons par exemple $f : x \mapsto i\left(1 + (-1)^{\lfloor x \rfloor}\right)\pi$. Cette fonction n'a pas de limite en $+\infty$, comme on peut le voir en considérant les suites $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2n{+}1)_{n\in\mathbb{N}}$. Cependant, $f(\mathbb{R}) = \{0, 2i\pi\}$, et donc $\exp \circ f$ est constante. *A fortiori*, elle a admet une limite en $+\infty$.

Exercice 38 Pour tout $x > 1$, on a :

$$\frac{e^{i\alpha}x - 1}{e^{-i\alpha}x - 1} = \frac{e^{i\alpha} - 1/x}{e^{-i\alpha} - 1/x},$$

Par ailleurs $e^{i\alpha} - 1/x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha} - 1/x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-i\alpha}$. Ainsi :

$$\frac{e^{i\alpha}x - 1}{e^{-i\alpha}x - 1} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} e^{2i\alpha} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{e^{i\alpha}x - 1}{e^{-i\alpha}x - 1}\right)^n \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} e^{2in\alpha}.$$

S'entraîner et approfondir

9.1 Quelles sont les fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(|x| < \eta \Longrightarrow \big|f(x)\big| < \varepsilon\Big)?$$

9.2 Déterminer les limites de :

1. $x \mapsto \dfrac{x^3 + x^2 + 5}{5x^3 - x^2 + 2}$ en $+\infty$;
2. $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x} - x$ en $+\infty$;
3. $x \mapsto \dfrac{\tan 5x}{\sin 2x}$ en 0 ;
4. $x \mapsto \dfrac{e^{3x} + 2x + 7}{e^x + e^{-x}}$ en $+\infty$;
5. $x \mapsto \dfrac{\sin \sqrt{x}}{\ln x}$ en 0^+.

9.3 Déterminer les fonctions périodiques ayant une limite en $+\infty$.

★ **9.4** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est un entier premier ;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Démontrer que pour tout $x > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(nx) = 0$.

La fonction f a-t-elle une limite en $+\infty$?

★ **9.5** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Démontrer l'équivalence entre les assertions :

(i) pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans I, de limite a, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie ou infinie ;

(ii) la fonction f admet une limite, finie ou infinie, en a.

9.6 Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = f(x).$$
Démontrer que f est constante.

9.7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, vérifiant :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$
On pose $\alpha = f(1)$

1. Calculer $f(x)$ en fonction de x et α, successivement pour $x \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Q}$.
2. Déterminer f.

★ **9.8** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}_+$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p_n \in [\![1, n]\!]$ et $q_n \in \mathbb{Z}$ tel que $|p_n \alpha + q_n| \leqslant \frac{1}{n}$. On pourra considérer les $\alpha_k = k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor$, avec $k \in [\![0, n]\!]$.
2. Démontrer qu'une fonction continue à la fois 1-périodique et α-périodique est constante.

9.9 1. Justifier qu'il existe une unique fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ qui soit 1-périodique et telle que :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\quad f(x) = |x|$$

2. Démontrer que f est continue.

9.10 Soit $f : I \to I$ une fonction décroissante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $f \circ f$ est croissante.
2. En déduire que les suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, puis qu'elles sont de monotonie opposées.
3. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0,1$ et $u_{n+1} = (1-u_n)^2$.

9.11 Étudier les suites définies par :

1. $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $u_{n+1} = \operatorname{th}(u_n)$, en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.
2. $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $u_{n+1} = \operatorname{sh}(u_n)$.

9.12 Donner un exemple de fonction continue $f :\ [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, telle que :

$$f\big([0,+\infty[\big) =]-1,1[.$$

On pourra construire un exemple avec la fonction sinus.

9.13 Soit a et b deux réels, tels que $a \leqslant b$ et $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Démontrer que f admet un point fixe, *i.e.* il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$.

★ **9.14** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Démontrer que f est minorée et que sa borne inférieure est atteinte.

9.15 Déterminer les fonctions continues $f : [0,1] \to [0,1]$ vérifiant $f \circ f = f$. On commencera par déterminer $f_{|_{f([0,1])}}$.

★ **9.16** Soit f et g deux fonctions réelles continues, définies sur $[0,1]$. On pose, pour tout x réel :

$$\varphi(x) = \sup_{t\in[0,1]} \big(f(t) + xg(t)\big).$$

Démontrer que φ est lipschitzienne.

9.17 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante, telle que $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Démontrer que f est continue.

★★ **9.18** Donner une bijection de $[0,1]$ dans lui-même, qui soit discontinue en tout point.

9.19 Démontrer qu'une fonction réelle, définie sur $\mathbb{R}$, continue et périodique, est uniformément continue.

9.20 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.
Démontrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \big|f(x)\big| \leqslant a\,|x| + b$.

Solution des exercices

9.1 Montrons qu'il s'agit des fonctions tendant vers 0 en 0.
Supposons que $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe η tel que, pour tout x vérifiant $|x| \leqslant \eta$, on ait $\left|f(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Il s'ensuit que pour tout x vérifiant $|x| < \eta$, on a $\left|f(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Réciproquement, supposons :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(|x| < \eta \Longrightarrow \left|f\left(x\right)\right| < \varepsilon\Big).$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout x vérifiant $|x| < \eta$, on ait, $\left|f(x)\right| < \varepsilon \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, pour tout x vérifiant $|x| \leqslant \frac{\eta}{2} < \eta$, on a $\left|f(x)\right| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

9.2 1. $\dfrac{x^3+x^2+5}{5x^3-x^2+2} = \dfrac{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}{5-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2+5}{5x^3-x^2+2} = \frac{1}{5}$.

2. Puisque x tend vers $+\infty$, on peut supposer que $x > 0$. On multiplie et divise par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x^2+2x} - x = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$

d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x} - x = 1$.

3. $\dfrac{\tan 5x}{\sin x} = \dfrac{\tan 5x}{5x}\,\dfrac{5x}{x}\,\dfrac{x}{\sin x}$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan 5x}{\sin x} = 5$.

4. $\dfrac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}} = e^{2x}\,\dfrac{1+2xe^{-3x}+7e^{-3x}}{1+e^{-2x}}$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}} = +\infty$.

5. $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\ln x} = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$, d'où $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{\ln x} = 0$.

9.3 Soit $\ell = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque $x + nT \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(x+nT) = \ell$.

Par ailleurs la suite $\big(f(x+nT)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à $f(x)$, et par conséquent on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(x+nT) = f(x)$. La fonction f est constante.

9.4 Soit $x > 1$. Si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel nx n'est pas rationnel et par conséquent n'est pas un entier. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(nx) = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f\left(nx\right) = 0$.

Si x est rationnel, $x = \dfrac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux et $p > q \geqslant 1$, car $x > 1$.

On constate que nx est un nombre premier pour au plus une valeur de $n \in \mathbb{N}$. La suite $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante égale à 0 à partir d'un certain rang. Elle converge vers 0.

La fonction f n'a pas de limite en $+\infty$ car, si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ représente la suite des nombres premiers, la suite $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 1 tandis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.

9.5 Seule l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est à démontrer. D'après la caractérisation séquentielle de la limite, il suffit de montrer qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I, de limite a, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ comme limite.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I, de limite a. On sait que la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite à valeurs dans I, de limite a et notons ℓ' la limite de $\big(f(y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Définissons la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{2n} = x_n \quad \text{et} \quad z_{2n+1} = y_n.$$

On sait qu'alors la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite a. Ainsi la suite $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite ℓ''. Par extraction :

$$\ell'' = \lim_{n\to+\infty} f(z_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell.$$

On a de même $\ell'' = \ell'$ et donc $\ell' = \ell$. Ainsi, pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a, la suite $\big(f(y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ.

9.6 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$. Par récurrence, on démontre alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Puisque $\frac{x}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par composition des limites et unicité de la limite, il vient que :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0).$$

9.7 1. En considérant $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 2f(0)$, c'est-à-dire $f(0) = 0$. Pour tout x réel, on vérifie, par récurrence sur $\mathbb{N}$, que $f(n\,x) = n\,f(x)$. En particulier $f(n) = \alpha\, n$, lorsque $n \in \mathbb{N}$.

Puisque $f(n) + f(-n) = f(0) = 0$, on obtient que $f(n) = \alpha\, n$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on a :

$$f\left(q\,\frac{p}{q}\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right) \qquad \text{et} \qquad f\left(q\,\frac{p}{q}\right) = f(p) = \alpha\, p.$$

Il s'ensuit que $f(x) = \alpha x$, pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels convergeant vers x. D'après ce qui précède :

$$f(x_n) = \alpha x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha x,$$

mais par continuité de f en x :

$$f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

Ainsi, pour tout x, on a nécessairement $f(x) = \alpha x$. Il est par ailleurs facile de vérifier que $f : x \mapsto \alpha x$ est une fonction continue vérifiant, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la relation $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

9.8 1. Les $n+1$ valeurs des α_k sont dans $[0,1[$. On peut réordonner de manière croissante ces valeurs. Cela nous donne β_0, $\beta_1, \ldots$, β_n, avec $\beta_0 \leqslant \cdots \leqslant \beta_n$. Si pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ on a $\beta_{i+1} - \beta_i > \frac{1}{n}$, alors en sommant :

$$\beta_n - \beta_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (\beta_{k+1} - \beta_k) > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} = 1.$$

Ce dernier résultat est faux, car $\beta_n - \beta_1 \leqslant 1 - 0$. Il s'ensuit qu'il existe $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\beta_{i+1} - \beta_i \leqslant \frac{1}{n}$. En d'autres termes, il existe deux indices distincts k et ℓ dans $[\![0, n]\!]$ tels que $0 \leqslant k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor - \ell\alpha + \lfloor \ell\alpha \rfloor \leqslant \frac{1}{n}$.

On peut donc prendre $p_n = k - \ell$ et $q_n = \lfloor k\alpha \rfloor - \lfloor \ell\alpha \rfloor$.

2. Avec les notations précédentes, $T_n = p_n\,\alpha + q_n$ est non nul (car $p_n > 0$ et α est irrationnel). De plus T_n est une période de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n = x - \left\lfloor \frac{x}{T_n} \right\rfloor T_n.$$

On a $|x - x_n| \leqslant |T_n| \leqslant \frac{1}{n}$ et $f(x) = f(x_n)$. En faisant tendre n vers $+\infty$, par continuité de f en 0, on obtient $f(x) = f(0)$. La fonction f est constante.

9.9 • Unicité. Il suffit de remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. Par périodicité, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $f(x) = \left| x - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \right|$.

Existence. Il suffit de poser :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \left| x - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \right|.$$

La périodicité est facile à établir en remarquant que $\lfloor a + 1 \rfloor = \lfloor a \rfloor + 1$, pour tout réel a.

• Il suffit de vérifier que $g : x \mapsto f\left(x - \frac{1}{2}\right)$ est continue. L'application g est 1-périodique et $g(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$ pour tout $x \in [0,1[$. Puisque $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \frac{1}{2}$ et que par périodicité $g(1) = \frac{1}{2}$, la fonction $g_{|_{[0,1]}}$ est continue en 0. D'après l'exercice 19 page 504, g est continue.

9.10 1. C'est immédiat.

2. En notant $g = f \circ f$, les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont du type « $x_{n+1} = g(x_n)$ ». Elles sont donc toutes les deux monotones, leur monotonie étant donnée par le signe de $u_2 - u_0$ et $u_3 - u_1$ respectivement. Puisque :

$$(u_2 - u_0)(u_3 - u_1) = (u_2 - u_0)\big(f(u_2) - f(u_0)\big),$$

on a par décroissance de f que $(u_2 - u_0)(u_3 - u_1) \leqslant 0$. Les suites sont donc de monotonies opposées.

3. Posons $f : \begin{array}{ccc} [0,1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (1-x)^2. \end{array}$

Cette fonction est décroissante et laisse l'intervalle $[0,1]$ stable. La suite est donc à valeurs dans $[0,1]$ et les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. ces dernières étant bornées, elles sont convergentes. On note ℓ_0 et ℓ_1 leurs limites respectives.

Par le calcul, $f(x) = x$ si, et seulement si, $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (les deux racines du polynôme $X^2 - 3X + 1$ sont $x_0 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$). Si la suite converge, sa limite sera x_0. Par ailleurs, pour $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} f\bigl(f(x)\bigr) - x &= x^4 - 4\,x^3 + 4\,x^2 - x \\ &= x(x-1)(x^2 - 3x + 1) \\ &= x(x-1)(x - x_0)(x - x_1). \end{aligned}$$

Il s'ensuit ℓ_0 et ℓ_1 sont éléments de $\{0, x_0, 1\}$ (la valeur x_1 est exclue, car $x_1 > 1$). De plus, pour tout $x \in [0,1]$, on a $x(x-1)(x - x_1) \geqslant 0$. On en déduit :

- si $u_0 = x_0$, la suite est stationnaire ;
- si $0 \leqslant u_0 < x_0$, puisque $u_2 - u_0$ est du signe $u_0 - x_0$, la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ; la seule limite possible étant lors 0, on en déduit que $\ell_0 = 0 \neq x_0$. Par conséquent, la suite est divergente. On peut être plus précis. Puisque f est strictement décroissante, $u_1 - x_0 = f(u_0) - f(x_0) > 0$. Il s'ensuit que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la seule possible est alors ℓ_1.
  On démontre de même que la suite est divergente dans le cas où $x_0 < u_0 \leqslant 1$.

9.11 1. L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est évidement stable par la fonction continue th.
Posons g l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \operatorname{th} x - x$. Il s'agit évidement d'une fonction dérivable et :

$$g' = \left(\frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}\right)' - 1 = \frac{\operatorname{ch}^2 - sh^2}{\operatorname{ch}^2} - 1 = -\frac{\operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} \leqslant 0.$$

Il s'ensuit que g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et, puisque $g(0) = 0$, la fonction g est négative. Il s'ensuit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Puisqu'elle est également positive, la suite est convergente. Par continuité de f, sa limite ℓ est un point fixe de f.

La dérivée de g est négative et ne s'annule qu'en 0. Il s'ensuit que g est strictement décroissante et donc que 0 est l'unique point fixe de f. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est évidement stable par la fonction continue sh.
Posons g l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \operatorname{sh} x - x$. Il s'agit évidement d'une fonction dérivable et :

$$g' = \operatorname{sh}' - 1 = \operatorname{ch} - 1.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\operatorname{ch} x \geqslant 1$ (par exemple en remarquant que la fonction ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\operatorname{ch}(0) = 1$).

Il s'ensuit que $g' \geqslant 0$ et que g' ne s'annule qu'en 0. Par conséquent, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et, puisque $g(0) = 0$, la fonction g est positive. Il s'ensuit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et admet une limite finie ou infinie.

La fonction $f = \operatorname{sh}$ étant continue sur l'intervalle fermé $\mathbb{R}_+$, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors ℓ serait un point fixe de f. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, on aurait également $0 < u_0 \leqslant \ell$. Du fait que $g(0) = 0$ et que g est strictement croissante, 0 est l'unique point fixe, et donc on aurait $0 < u_0 \leqslant 0$, ce qui impossible. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

9.12 La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1} \sin x$ convient.

9.13 La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$, avec $g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$. Le théorème de valeurs intermédiaires permet alors de conclure.

9.14 L'hypothèse sur les limites de f donne qu'il existe un réel $a > 0$ tel que pour tout x vérifiant $|x| \geqslant a$ on ait $f(x) \geqslant f(0)$.
La restriction de f au segment $[-a, a]$ est continue. Elle a donc un minimum en un $x_0 \in [-a, a]$, qui vaut $m \leqslant f(0)$. Pour tout $x \notin [-a, a]$, on a $f(x) \geqslant f(0) \geqslant m$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant m$ et f admet un minimum, atteint en x_0.

9.15 Soit f une solution. Notons $I = f\big([0,1]\big)$. Il s'agit d'un segment $[a, b]$. Puisque $f \circ f = f$, on a, pour tout $y \in [a, b]$:

$$f(y) = f \circ f(x) = f(x) = y,$$

où x est un antécédent de y. Ainsi $f_{|_{[a,b]}}$ est l'identité de $[a, b]$.

Réciproquement, soit $[a, b] \subset [0, 1]$. Soit $f_1 : [0, a] \to [a, b]$ une fonction quelconque telle que $f_1(a) = a$ et, si $0 < a$, continue. Soit de même $f_2 : [b, 1] \to [a, b]$ une fonction quelconque telle que $f_2(b) = b$ et, si $b < 1$, continue. Il est alors aisé de vérifier que la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } 0 \leqslant x < a\ ; \\ x & \text{si } a \leqslant x \leqslant b\ ; \\ f_2(x) & \text{si } b < x \leqslant 1, \end{cases}$$

est continue et qu'elle une solution du problème.

9.16 La fonction $|g|$ est continue sur le segment $[0, 1]$. Elle est bornée et admet un maximum. On pose $M = \max\limits_{t \in [0,1]} \big|g(t)\big|$.

Soit $(x, y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 1]$. Alors :

$$\begin{aligned} f(t) + yg(t) &= \big(f(t) + xg(t)\big) + (y - x)g(t) \\ &\leqslant \big(f(t) + xg(t)\big) + |y - x|\,|g(t)| \\ &\leqslant \big(f(t) + xg(t)\big) + |x - y|\,M && \text{(déf. d'une borne supérieure)} \\ &\leqslant \varphi(x) + M\,|x - y|. && \text{(déf. d'une borne supérieure)} \end{aligned}$$

Toujours par définition de la borne supérieure, on en déduit que :

$$\varphi(y) \leqslant \varphi(x) + M\,|x - y|.$$

En échangeant les rôles de x et y, on obtient $\varphi(x) \leqslant \varphi(y) + M\,|x - y|$ et donc :

$$\big|\varphi(y) - \varphi(x)\big| \leqslant M\,|y - x|.$$

9.17 Puisque f est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$f(x-) \leqslant f(x) \leqslant f(x+).$$

Puisque g est décroissante :

$$g(x-) \geqslant g(x) \geqslant f(x+),$$

en d'autres termes :

$$\frac{f(x-)}{x} \geqslant \frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{f(x+)}{x}.$$

Ainsi, du fait que $x > 0$, on a $f(x+) \leqslant f(x) \leqslant f(x-) \leqslant f(x+)$. La conclusion en découle.

9.18 Considérons la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\ ; \\ x + \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\ ; \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\ ; \end{cases}$$

On vérifie qu'elle est à valeurs dans $[0,1]$ et involutive (c'est-à-dire $f \circ f = Id_{[a0,1]}$). Par conséquent, f est une bijection de $[0,1]$ sur lui même.
Pour tout $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\cap \mathbb{Q}$ et $y \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, on a :

$$\left|f(x) - f(y)\right| = \left|x - y - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{1}{2} - |x - y|.$$

Avec la densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on obtient que pour tout $z \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, pour tout t tel que $|t - z| \leqslant \frac{1}{4}$, on a $|f(z) - f(t)| \geqslant \frac{1}{4}$, ce qui montre que f est discontinue en z. Il est facile d'adapter lorsque $z \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

9.19 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique continue, de période $T > 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. La restriction de $f_{|[0,2T]}$ est évidemment continue et donc, d'après le théorème de Heine (*cf.* le théorème 50 de la page 518), elle est uniformément continue. Il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [0,2T]^2 \quad |x - y| \leqslant \eta \Rightarrow \left|f(y) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Fixons un tel η, que l'on peut de plus supposer inférieur à T.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, avec $0 \leqslant y - x \leqslant \eta$. Posons $k = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$. On a alors $x' = x - kT \in [0, T[$ et $y' = y - kT \in [y - x, y - x + T[$. Puisque :

$$0 \leqslant y - x = y' - x' \leqslant \eta \leqslant T,$$

les deux points x' et y' sont dans $[0, 2T]$ et vérifient $|y' - x'| \leqslant \eta$. Par conséquent, en utilisant la périodicité de f, on obtient :

$$\left|f(y) - f(y)\right| = \left|f(y - kT) - f(y - kT)\right| = \left|f(y') - f(x')\right| \leqslant \varepsilon$$

Il s'ensuit que la fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

9.20 Il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x)-f(y)\big| \leqslant 1.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n\eta \leqslant x < (n+1)\eta.$$

On a :

$$f(x) = f(0) + f(\eta) - f(0) + f(2\eta) - f(\eta) + \\ \cdots + f(n\eta) - f\big((n-1)\eta\big) + f(x) - f(n\eta).$$

d'où :

$$f(x) \leqslant \big|f(0)\big| + (n+1).$$

Or $n \leqslant \dfrac{x}{\eta}$, d'où :

$$f(x) \leqslant \big|f(0)\big| + \left(\frac{x}{\eta} + 1\right) = \big|f(0)\big| + 1 + \frac{1}{\eta}x.$$

Chapitre 10 : Dérivation

I	**Dérivée**	**552**
1	Définitions, interprétations	552
2	Calcul de dérivées	555
3	Dérivées à droite et à gauche	559
II	**Théorèmes de Rolles et des accroissements finis**	**560**
1	Extrema	560
2	Théorèmes de Rolle et égalité des accroissements finis	562
3	Dérivée et fonctions monotones	564
4	Variations et extrema	566
5	Inégalité des accroissements finis	567
6	Application aux suites $u_{n+1} = f(u_n)$	568
7	Théorème de la limite de la dérivée	570
III	**Fonctions continument dérivables**	**571**
1	Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$	571
2	Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$	571
3	Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$	574
IV	**Extension aux fonctions à valeurs complexes**	**578**
1	Ce qui ne change pas : l'aspect opératoire...	579
2	Ce qui change : les accroissements finis...	581
Démonstrations et solutions des exercices du cours		**583**
Exercices		**599**

Dérivation 10

La notion de dérivée a déjà été vue dans le secondaire et rappelée au chapitre 1. Un certain nombre de propriétés de la dérivation ont été énoncées à cette occasion. Avant d'aborder de nouveaux résultats, commençons par préciser ces notions en démontrant rigoureusement ces propriétés. On pourra néanmoins se référer aux résultats des chapitres 1 et 4 pour la résolution des exercices.

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et a est un élément de I.

I Dérivée

1 Définitions, interprétations

Nombre dérivé

Définition 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **dérivable en a** si son taux d'accroissement en a :

$$\begin{array}{rccc} \tau_a(f): & I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

admet une limite finie en a. Cette limite, lorsqu'elle existe, est le **nombre dérivé de f en a**. Il est noté $f'(a)$ ou $D(f)(a)$.

Exemples

- Une fonction constante f sur I est dérivable en tout point de I et $f'(a) = 0$.
- Lorsque $n \in \mathbb{N}$, la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

  est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
  - Si $n = 0$, d'après le point précédent $f'(a) = 0$.
  - Si $n \geqslant 1$, on a $f'(a) = na^{n-1}$. Cela a été démontré au chapitre 1, page 40.

- Lorsque $n \in \mathbb{Z}_-^*$ et $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$, la fonction :

$$f : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

  est dérivable en tout point de I et $f'(a) = na^{n-1}$. Cela a également été démontré au chapitre 1.

- La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0, car $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarques

- On trouve parfois, notamment en physique, la notation $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ pour le nombre dérivé de f en a. On trouve également la notation $\dot{f}(a)$, lorsque la variable désigne le temps.

- Un simple changement d'écriture montre, en s'appuyant sur la composition des limites, que f est dérivable en a si, et seulement si, la fonction $h \mapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite finie en 0 et l'on a alors :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- Stabilité par restriction. Lorsque J est un intervalle d'intérieur non vide inclus dans I, avec $a \in J$, et si f est dérivable en a, alors $f_{|J}$ est dérivable en a.

- La notion de dérivabilité, étant définie à l'aide d'une limite, est une notion locale. Plus précisément si f est une fonction réelle définie sur un intervalle I et s'il existe $r > 0$ tel que $f_{|I \cap]a-r,a+r[}$ soit dérivable en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \big(f_{|I \cap]a-r,a+r[}\big)'(a)$.

p.583

Exercice 1 Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x|. \end{array}$

1. Les fonctions $f_{|[0,+\infty[}$ et $f_{|]-\infty,0]}$ sont-elles dérivables en 0 ?
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Interprétation graphique

Au chapitre 1 nous avons introduit brièvement la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction. Cette tangente a été interprétée comme « position limite de cordes ».

Définition 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en a.

La courbe représentative de f **admet une tangente** en a si le taux d'accroissement $\tau_a(f)$ a une limite ℓ en a dans $\overline{\mathbb{R}}$.

- Si ℓ est finie, c'est-à-dire si f est dérivable en a, la **tangente en a à la courbe représentative de f** est la droite d'équation :
$$y = f(a) + f'(a)\,(x-a).$$
- Si ℓ est infinie, la **tangente en a à la courbe représentative de f** est la droite d'équation $x = a$.

Une autre formulation de la dérivabilité

Proposition 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. La fonction f est dérivable en a si, et seulement s'il existe un réel ℓ et une fonction $\alpha : I \to \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall x \in I \quad f(x) = f(a) + \ell\,(x-a) + (x-a)\,\alpha(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \alpha(x) = 0.$$
Dans ces conditions $f'(a) = \ell$.

Démonstration page 583

Remarques

- On peut réécrire le résultat de cette dernière proposition sous la forme suivante. En notant $I_a = \{x - a\,;\ x \in I\}$, la fonction f est dérivable en a si, et seulement s'il existe un réel ℓ et une fonction $\beta : I_a \to \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall h \in I_a \quad f(a+h) = f(a) + \ell\,h + h\,\beta(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \beta(h) = 0 \qquad (\star)$$
- L'existence d'une fonction α vérifiant le premier point de la proposition précédente ne pose aucun problème. Il suffit de poser $\alpha(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell$ pour les $x \in I \setminus \{a\}$ et $\alpha(a) = 0$. Le point crucial de la proposition précédente n'est pas le « jeu d'écriture », mais bien le fait que $\alpha(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
- 710 Comme on le verra, la propriété $(\star)$ signifie que f possède un développement limité à l'ordre 1 en a.

Interprétation graphique : meilleure approximation

On peut interpréter la proposition 1 en disant que, parmi toutes les fonctions affines, $x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a)$ est celle qui approche le mieux f au voisinage de a. Cela est précisé à l'exercice 10.3 de la page 599 et sera développé au chapitre 12 page 663.

Dérivabilité et continuité

Proposition 2 (Continuité et dérivation)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration. Avec les notations de la proposition précédente, on a $\lim\limits_{x\to a} = (x-a)\,\alpha\,(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} \ell\,(x-a) = 0$. La conclusion en découle. □

La réciproque de la proposition précédente est fausse.

p.583

Exercice 2 Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit continue en 0 et non dérivable en 0.

Fonction dérivée

Définition 3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **dérivable** si elle est dérivable en tout point x de I. On note alors f' ou $D(f)$ l'application qui à $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x. On l'appelle l'**application dérivée** de f, ou plus simplement la **dérivée de f**.

Notation On note $\mathcal{D}\,(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définies et dérivables sur l'intervalle I.

Remarques

- On trouve parfois la notation $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ pour désigner la fonction dérivée.
- Comme pour les fonctions continues (*cf.* la remarque de la page 508), on s'autorise parfois à parler de fonctions dérivables même dans le cas où elles sont définies sur une réunion d'intervalles d'intérieur non vide.
- La notation prime (*i.e.* $'$) ne s'applique qu'*aux fonctions.*

  Écrire $(x^2+1)' = 2x$ est donc un abus à proscrire.

  En revanche, on pourra parfois, notamment en physique, écrire des égalités du type $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2+1\right) = 2x$.

2 Calcul de dérivées

Théorème 3 (Opérations algébriques)

Soit f et g deux fonctions définies sur I et dérivables en a.

- Soit λ et μ deux réels. La fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et :

$$(\lambda f + \mu g)'\,(a) = \lambda\, f'(a) + \mu g'(a). \qquad \text{(linéarité)}$$

- Le produit $f\,g$ est dérivable en a et :

$$(f\,g)'\,(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a).$$

Principe de démonstration. Pour le produit, utiliser l'astuce classique de calcul suivante :

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \frac{\big(f(x)-f(a)\big)g(x) + \big(g(x)-g(a)\big)f(a)}{x-a}.$$

Démonstration page 583

En appliquant ce théorème en tout point de I, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 4

Soit $(f,g) \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $\lambda f + \mu g$ et $f\,g$ sont dérivables sur I avec :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \qquad \text{et} \qquad (f\,g)' = f'\,g + f\,g'.$$

Remarque

- 1001 Nous verrons que le premier résultat de cette proposition traduit le fait que l'ensemble $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),+,\cdot)$,
- 864 De même on peut déduire de ces deux résultats que $(\mathcal{D}(I,\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau.

Corollaire 5

Les fonctions polynomiales réelles sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Remarque Plus précisément, la dérivée d'une fonction polynomiale est elle même une fonction polynomiale.

Théorème 6 (Composition)

Soit I et J deux intervalles d'intérieur non vide, ainsi que $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions, avec $f(I) \subset J$. Si :

- la fonction f est dérivable en a,
- la fonction g est dérivable en $b = f(a)$,

alors $g \circ f$ est dérivable en a et :

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)\,f'(a) = g'(f(a))\,f'(a).$$

Principe de démonstration. Écrire $g(y) - g(b) = g'(b)(y-b) + (y-b)\,\alpha(y)$ en $y = f(x)$. Diviser par $x - a$ et considérer la limite lorsque x tend vers a. Démonstration page 584

Corollaire 7

Soit $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{D}(J,\mathbb{R})$, où I et J sont des intervalles d'intérieur non vide, avec $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est dérivable et :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'.$$

p.584

Exercice 3

1. Démontrer que la dérivée d'une fonction paire sur $\mathbb{R}$ est une fonction impaire.
2. Que dire de la parité de la dérivée d'une fonction impaire sur $\mathbb{R}$?
3. La dérivée d'une fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$ est-elle périodique ?

Corollaire 8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f^n est dérivable en a et :
$$(f^n)'(a) = n\, f'(a)\, f^{n-1}(a).$$
- Pour $n \in \mathbb{Z}_-^*$, si $f(a) \neq 0$, alors la fonction f^n est dérivable en a et :
$$(f^n)'(a) = n\, f'(a)\, f^{n-1}(a),$$
en particulier :
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}.$$

Principe de démonstration. Utiliser le théorème précédent et la dérivation des fonctions puissances entières (*cf.* page 552). Démonstration page 584

Remarque Lorsque $n = 0$, l'égalité $(f^n)'(a) = n\, f'(a)\, f^{n-1}(a)$ est encore vérifiée dans le cas où $f(a) \neq 0$, mais elle n'a pas de sens si $f(a) = 0$.

Corollaire 9

Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f^n est dérivable et :
$$(f^n)' = n\, f'\, f^{n-1}.$$
- Pour $n \in \mathbb{Z}_-^*$, si f ne s'annule pas sur I, alors la fonction f^n est dérivable et :
$$(f^n)' = n\, f'\, f^{n-1}.$$

Corollaire 10

Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ ne s'annulant pas. Alors $1/f$ est dérivable et :
$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Remarque Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables et si g ne s'annule pas, alors la fonction f/g est dérivable, en tant que produit de deux fonctions dérivables et :
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \times \frac{1}{g} + f \times \left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Exemple La fonction tan est dérivable sur tout intervalle inclus dans $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et

$$\tan' = \frac{\sin' \times \cos - \sin \times \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2},$$

en d'autres termes :

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

Corollaire 11

Toute fonction rationnelle $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable.

Remarque Plus précisément, la dérivée d'une fonction rationnelle est elle-même une fonction rationnelle.

Fonctions réciproques

Théorème 12

Soit $f : I \to J$ une bijection continue sur I, dérivable en a. Alors, en posant $b = f(a)$:

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } b \text{ si, et seulement si, } f'(a) \neq 0,$$

et dans ce cas :

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 584

Remarquer que $\dfrac{f^{-1}(x) - f^{-1}(b)}{x - b} = \left(\dfrac{f\left(f^{-1}(x)\right) - f\left(f^{-1}(b)\right)}{f^{-1}(x) - f^{-1}(b)}\right)^{-1}.$

Corollaire 13

Soit $f : I \to J$ une bijection dérivable. Alors :

$$f^{-1} \text{ est dérivable si, et seulement si, } f' \text{ ne s'annule pas.}$$

et l'on a dans ce cas :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Exemples Le théorème de dérivation des fonctions réciproques permet d'établir des résultats concernant la dérivation des fonctions usuelles. Ils ont déjà été évoqués au chapitre 4.

- Puisque la dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction ln est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui est à valeurs strictement positives, la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.
- Puisque la dérivée sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tan est la fonction $x \mapsto 1 + \tan^2 x$, qui est à valeurs strictement positives, la fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Arctan}' : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$.

- Puisque, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin'(x) = \cos(x) > 0$, la fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et sur cet intervalle :
$$\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)}.$$
Par ailleurs, pour $x \in]-1,1[$, on a $y = \operatorname{Arcsin}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Il s'ensuit que $\cos y \geqslant 0$ et donc que $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$, ce qui implique :
$$\forall x \in]-1,1[\quad \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Notons que $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ et que $\sin'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Par conséquent, Arcsin n'est pas dérivable en 1. Il en de même, par exemple par imparité, pour -1.
Une étude analogue donne :
$$\forall x \in]-1,1[\quad \operatorname{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

p.585

Exercice 4

1. En utilisant les résultats du chapitre 4, démontrer que la fonction sh définit une bijection dérivable de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note f sa bijection réciproque.
2. Démontrer que f est dérivable. Donner une expression de $f'(x)$ analogue à celle de $\operatorname{Arcsin}'(x)$.

3 Dérivées à droite et à gauche

Définition 4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si a n'est pas l'extrémité supérieure de I, on dit que f est **dérivable à droite** en a si la restriction $f_{|I\cap[a,+\infty[}$ est dérivable en a. Par définition le nombre **dérivé à droite de f en a** est $\left(f_{|I\cap[a,+\infty[}\right)'(a)$. Il est noté $f'_d(a)$.
- On définit de même la dérivabilité à gauche et le nombre dérivé à gauche, en un point a qui n'est pas l'extrémité inférieure de I. Il est noté $f'_g(a)$.

Remarques

- Si a est l'extrémité supérieure de I, la fonction f ne peut pas avoir de dérivée à droite en a. En effet $I \cap [a,+\infty[$ est alors réduit au singleton $\{a\}$ et donc la question de la dérivabilité de $f_{|I\cap[a,+\infty[}$ en a ne se pose pas.
- Toujours si a est l'extrémité supérieure de I, la fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle est dérivable à gauche en a.
- Si f est dérivable à droite en a, alors f est continue à droite en a. Pour le démontrer, il suffit d'appliquer la proposition 2 de la page 554 à $f_{|I\cap[a,+\infty[}$.

- Si f est dérivable à droite et à gauche en a, alors f est continue à droite et à gauche en a, et donc f est continue en a.

p.585

Exercice 5 Démontrer que la fonction $t \mapsto |t|$ admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

Attention Comme le montre l'exercice précédent, la dérivabilité à droite et à gauche n'est pas suffisante pour garantir la dérivabilité.

Remarque Si a n'est pas une extrémité de I, il est immédiat par restriction que si la fonction f est dérivable en a, alors elle est dérivable à droite et à gauche en a, avec $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$. La proposition suivante établit la réciproque.

Proposition 14

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un point de l'intérieur de I. La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle est dérivable à gauche et à droite en a, avec $f'_g(a) = f'_d(a)$, et alors :

$$f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a).$$

Démonstration page 585

II Théorèmes de Rolles et des accroissements finis

1 Extrema

Nous avons vu au chapitre 1 ce que signifiait pour une fonction réelle d'admettre un maximum, un minimum et un extremum. Complétons ces notions.

Définition 5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f admet un **maximum local** (ou **relatif**) **en a**, s'il existe un réel $\eta > 0$ tel que la fonction $f_{|I\cap[a-\eta,a+\eta]}$ admette un maximum en a, *i.e.* :
$$\forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta] \quad f(x) \leqslant f(a).$$
- On définit de même la notion d'admettre un **minimum local**
- On dit que f admet un **extremum local en a**, si f admet un maximum ou un minimum local en a.

Remarques

- Évidemment, la fonction f admet un maximum local en a si, et seulement si, $-f$ admet un minimum local en a.

- On utilise parfois la locution « maximum global » à la place de maximum. De même pour « minimum global » et « extremum global ».
- Un extremum global est évidemment un extremum local.

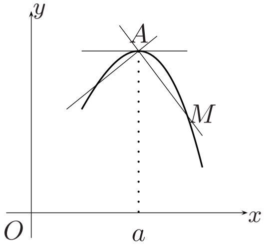
Théorème 15

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si :

- a est un point de l'intérieur de I,
- la fonction f est dérivable en a,
- la fonction f admet un extremum relatif en a,

alors $f'(a) = 0$.

Principe de démonstration.



Montrer que si f a un maximum relatif en a, les pentes des cordes (AM), où $A\left|\begin{smallmatrix} a \\ f(a) \end{smallmatrix}\right.$ et $M\left|\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix}\right.$ sont négatives si x est suffisamment près de a et $a < x$. Faire ensuite tendre x vers a par valeurs supérieures, pour obtenir $f'_d(a) \leqslant 0$. Démontrer de même que $f'_g(a) \geqslant 0$. Démonstration page 585

Remarque On dira également d'un point qu'il est « intérieur à I », lorsqu'il est un élément de l'intérieur de I.

Attention

- Bien noter que le théorème précédent ne s'applique pas aux extrémités de I.
- Le théorème précédent fournit une condition nécessaire d'existence d'un extremum relatif en un point intérieur, mais celle-ci n'est pas suffisante. On peut en effet avoir $f'(a) = 0$, où a n'est pas une extrémité de I, sans que f admette un extremum relatif en a. C'est le cas par exemple la fonction $f : x \mapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée s'annule en 0, mais f n'atteint ni un maximum relatif, ni un minimum relatif en 0.

p.586 **Exercice 6** Donner un exemple de fonction dérivable $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui a des extrema et dont la dérivée ne s'annule pas.

Définition 6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Un **point critique** est un point de I en lequel f est dérivable avec une dérivée nulle.

Remarque Ainsi, lorsque I est un intervalle, pour qu'une fonction dérivable $f : I \to \mathbb{R}$ admette un extremum relatif en un point intérieur a, il est nécessaire que a soit un point critique.

2 Théorèmes de Rolle et égalité des accroissements finis

Théorème 16 (de Rolle)

Soit a et b deux réels, avec $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$.

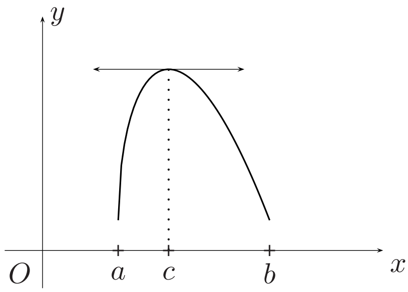
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Puisque f est continue sur le segment $[a, b]$, elle admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$.

- S'ils sont tous les deux en a ou b, la fonction f est constante et donc dans ce cas $f' = 0$; la conclusion s'ensuit.
- Sinon le maximum ou le minimum est atteint dans $]a, b[$. Le théorème 15 de la page précédente permet alors de conclure. □

Interprétation géométrique

Considérons le graphe d'une fonction réelle continue sur un segment $[a, b]$, dérivable sur l'intérieur. Si le graphe comporte deux points distincts de même ordonnée, alors il existe au moins une tangente au graphe qui soit parallèle à l'axe des abscisses.



Interprétation cinématique

Considérons un marcheur qui se promène le long d'une route rectiligne et qui revient à son point de départ. En supposant que la position du marcheur soit une fonction dérivable du temps, hypothèse physiquement raisonnable, le théorème de Rolle affirme qu'il existe au moins un moment où la vitesse instantanée du marcheur est nulle.

Attention Bien noter que le théorème de Rolle fournit l'existence d'un c tel que $f'(c) = 0$, mais en aucun cas l'unicité.

Exemple Sur $[0, 2\pi]$, la fonction sin s'annule (entres autres) en 0 et 2π. Sa fonction dérivée $\sin' = \cos$ s'annule deux fois, en $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

p.586

Exercice 7 On considère $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 8 + 2x^2 - x^4$. Quels sont les zéros de f ? de f' ? Commentaire ?

p.586

Exercice 8 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $n \geqslant 2$ un entier. On suppose que f s'annule au moins n fois. Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet au moins $n - 1$ solutions réelles, distinctes.

Point méthode

Il est fréquent de vouloir démontrer l'existence d'une ou plusieurs solutions d'une équation $\varphi(x) = 0$.

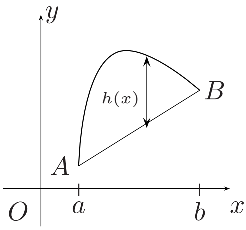
- Si l'on reconnaît φ comme étant la dérivée d'une fonction Φ vérifiant les hypothèses du théorème de Rolle, l'équation aura au moins une solution.
- Si l'on reconnaît φ comme étant est la dérivée d'une fonction Φ s'annulant $n+1$ fois, on ordonne $n+1$ points $a_0 < \cdots < a_n$ sur lesquels f s'annule, et on applique le théorème de Rolle sur chacun des intervalles $[a_k, a_{k+1}]$. Cela fournit l'existence d'au moins n solutions pour l'équation $\varphi(x) = 0$.
- Rappelons que le théorème des valeurs intermédiaires est une autre méthode d'utilisation courante pour établir l'existence de solutions d'une équation $\varphi(x) = 0$.

Théorème 17 (Égalité des accroissements finis)

Soit a et b deux réels, avec $a < b$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Il existe alors $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Principe de démonstration.

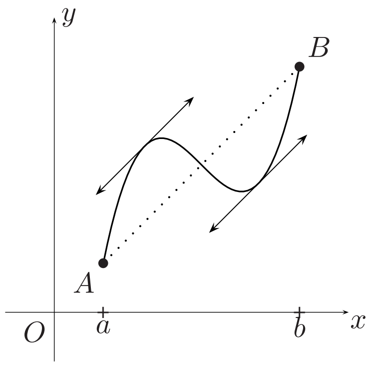


La corde (AB) n'étant pas « verticale », elle correspond au graphe d'une fonction affine. Appliquer le théorème de Rolle à la fonction h définie sur $[a,b]$, par $h(x) = f(x) - g(x)$, où $g(x)$ est l'ordonnée du point d'abscisse x situé sur la corde (AB), avec $A \Big| \begin{smallmatrix} a \\ f(a) \end{smallmatrix}$ et $B \Big| \begin{smallmatrix} b \\ f(b) \end{smallmatrix}$.

Démonstration page 586

Interprétation géométrique

Le théorème des accroissements finis signifie qu'il existe (au moins) une tangente au graphe d'une fonction continue sur le segment $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ qui soit parallèle à la corde (AB), où $A \Big| \begin{smallmatrix} a \\ f(a) \end{smallmatrix}$ et $B \Big| \begin{smallmatrix} b \\ f(b) \end{smallmatrix}$.



Interprétation cinématique

Considérons une randonneuse qui marche cinq kilomètres en une heure le long d'un sentier rectiligne. En supposant que sa position est une fonction dérivable du temps, il existe un moment où sa vitesse instantanée est de 5km/h.

Corollaire 18

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I, et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a+h \in I$. Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta\, h)\, h.$$

Démonstration page 586

Remarque

Dans le cas où $h = 0$, on peut encore garantir l'existence de $\theta \in]0,1[$ tel que $f(a+h)-f(a) = f'(a+\theta\, h)\, h$ ($\theta = 1/2$ convient par exemple), à condition que a ne soit pas une extrémité de I où f n'est pas supposée dérivable.

3 Dérivée et fonctions monotones

Fonctions dérivables monotones sur un intervalle

Théorème 19 (Fonctions dérivables croissantes)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I. Alors f est croissante si, et seulement si, $f'(x) \geqslant 0$ pour tout point x intérieur à I.

Principe de démonstration. Appliquer le théorème des accroissements finis à f entre x et y, avec $x < y$.

Démonstration page 586

p.586 **Exercice 9** Une fonction continue peut très bien être croissante sans être (partout) dérivable. Donner un exemple.

p.587 **Exercice 10** Le résultat du théorème précédent est faux si l'on ne se place pas sur un *intervalle*. Donner un contre-exemple.

p.587 **Exercice 11**

Étudier la monotonie de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 + x + 1}$.

Corollaire 20

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I. Alors f est décroissante si, et seulement si, $f' \leqslant 0$.

Corollaire 21 (Fonctions constantes sur un intervalle)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est constante si, et seulement si, f est dérivable et f' est la fonction nulle.

Démonstration.

- Si f est constante sur I, elle est dérivable et $f' = 0$.
- Puisque I est un intervalle, si $f' = 0$, alors f est croissante ($f' \geqslant 0$) et décroissante ($f' \leqslant 0$) ; elle est donc constante. □

Attention Insistons sur le fait de dans le corolaire précédent, il est crucial que le domaine de définition soit un intervalle.

p.587 **Exercice 12** Donner un exemple de fonction dérivable, dont la dérivée est nulle et qui n'est pas constante.

Fonctions dérivables strictement monotones sur un intervalle

Proposition 22

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I. Si $f'(x) > 0$ pour tout élément x intérieur à I, alors la fonction f est strictement croissante.

Principe de démonstration. Là encore, appliquer le théorème des accroissements finis à f entre a et b, avec $a < b$. Démonstration page 587

Exemple La fonction ln est strictement croissante. Il s'agit en effet d'une fonction dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et la dérivée $f' : x \mapsto \frac{1}{x}$ est à valeurs strictement positives.

Attention Le résultat de cette dernière proposition ne donne qu'une condition *suffisante*.

Exemple La fonction $x \mapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ est strictement croissante. Cependant sa dérivée $x \mapsto 3\,x^2$ s'annule en 0.

Proposition 23

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I. Si f' est positive sur l'intérieur de I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.

Principe de démonstration. Appliquer le théorème précédent entre deux points où f' s'annule et « recoller les morceaux ». Démonstration page 587

La proposition précédente ne donne qu'une condition suffisante pour qu'une fonction soit strictement croissante, mais elle couvre un grand nombre de cas pratiques.

p.587 **Exercice 13**

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

p.588 **Exercice 14**

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x - \sin x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Voici enfin une caractérisation des fonctions dérivables strictement croissantes. Ce résultat a un intérêt essentiellement théorique.

Théorème 24

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I. Alors f est strictement croissante si, et seulement si :

- la fonction f' est positive sur l'intérieur de I,
- il n'existe aucun couple $(a,b) \in I^2$ vérifiant $a < b$, tel que la restriction $(f')_{|]a,b[}$ soit la fonction nulle.

Principe de démonstration. Remarquer qu'une fonction croissante est non strictement croissante si, et seulement s'il existe $(a,b) \in I$ tel que $a < b$ et $f(a) = f(b)$ et que dans ce cas $f_{|[a,b]}$ est constante.

Démonstration page 588

Remarque Le lecteur adaptera les résultats de cette partie pour caractériser les fonctions dérivables strictement décroissantes sur un intervalle.

4 Variations et extrema

Le plan d'étude d'une fonction a été donné au chapitre 1.

p.588

Exercice 15 Étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - \ln(1+x)$.

Attention Ne pas oublier que l'on peut parfois établir très facilement les variations d'une fonction, sans faire appel à la dérivation.

Exemple La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. En effet, il est immédiat que $x \mapsto x^2+1$ est strictement croissante sur cet intervalle. On peut alors conclure en remarquant que $x \mapsto \sqrt{x}$ est également strictement croissante et que la composée de deux fonctions strictement croissante est strictement croissante.

Point méthode

Pour déterminer les extrema d'une fonction définie et dérivable sur I, on fait une étude de la variation et l'on résume l'étude par un tableau de variations.

p.588

Exercice 16

1. Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\,x^3 + 3\,x^2 - 12\,x + 5$.
2. Même question avec $h : x \mapsto x^2 \tan x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

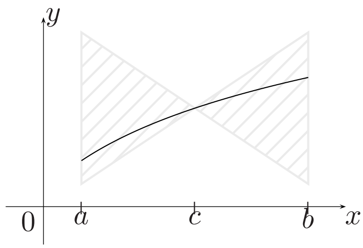
5 Inégalité des accroisements finis

Théorème 25 (Inégalité des accroissement finis)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour, tout x de l'intérieur de I, $|f'(x)| \leqslant M$. Alors f est M-lipschitzienne :

$$\forall (x,y) \in I^2 \quad |f(y) - f(x)| \leqslant M\,|y-x|\,.$$

Démonstration page 589

Interprétation géométrique
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, dérivable sur l'intérieur de I. Si la fonction $|f'|$ est majorée par une constante M, alors pour tout $c \in I$, le graphe de f est contenu dans la partie hachurée délimitée par les deux droites d'équations $y = f(c) + M(x-c)$ et $y = f(c) + M(c-x)$.



Interprétation cinématique
C'est le principe des radars tronçon : supposons, par exemple, deux radars installés au bord d'une autoroute rectiligne. Ses deux caméras sont distantes de 2,6 km et la vitesse est limitée à 130 km/h. Tout automobiliste qui passerait entre les deux caméras en strictement moins d'une minute et 12 secondes commettrait une infraction au code de la route.

p.589

Exercice 17 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Démontrer que f est lipschitzienne si, et seulement si, f' est bornée.

p.589

Exercice 18 Soit A une partie *finie* de I, ainsi qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $I \setminus A$. On suppose que $|f'|$ est majorée sur $I \setminus A$ par une constante K. Démontrer que f est K-lipschitzienne.

Avec les hypothèses du théorème 25, on obtient l'encadrement :

$$-M\,|x-y| \leqslant f(y) - f(x) \leqslant M\,|y-x|.$$

L'exercice suivant donne un encadrement plus précis.

p.590

Exercice 19 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I. On suppose qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout t intérieur à I, on ait :

$$m \leqslant f'(t) \leqslant M.$$

Montrer que pour tout x et y éléments de I, tels que $x < y$, on a l'encadrement :

$$m\,(y-x) \leqslant f(y) - f(x) \leqslant M\,(y-x)\,.$$

Application aux inégalités

Point méthode

Il est fréquent en Analyse d'avoir à établir des inégalités. Parmi les techniques usuelles, auxquelles on doit spontanément penser, citons :

- l'étude des variations de fonctions,
- le théorème ou l'inégalité des accroissements finis.

657

Remarque Nous verrons d'autres techniques, notamment au chapitre 12.

p.590

Exercice 20 Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left|\sin(x)\right| \leqslant |x|$.

p.590

Exercice 21 Démontrer : $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[\quad \ln(1+x) \leqslant x$.

6 Application aux suites $u_{n+1} = f(u_n)$

On s'intéresse dans cette section aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 \in I$ et, pour tout entier naturel n, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : I \to I$ est une fonction. On notera bien l'hypothèse de stabilité, à savoir $f(I) \subset I$.
Nous avons déjà rencontré de telles suites au chapitre 8 et nous avons vu au chapitre 9 que si une telle suite converge vers un réel $\ell \in I$, dans le cas où f est continue, alors ℓ est un point fixe de f (*cf.* le théorème 9 de la page 492). La difficulté est alors de démontrer que la suite converge effectivement. La proposition suivante permet de conclure dans certains cas.

Définition 7

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **contractante** si elle est K-lipschitzienne, avec $0 \leqslant K < 1$.

p.590

Exercice 22 Démontrer qu'une fonction contractante admet au plus un point fixe.

Proposition 26

Soit $f : I \to I$ une fonction contractante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si c est un point fixe de f, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c$.

Principe de démonstration. Établir l'inégalité $|u_{n+1} - c| \leqslant K\,|u_n - c|$, lorsque f est K-lipschitzienne. En déduire une majoration de $|u_n - c|$ en fonction de n.

Démonstration page 590

Point méthode

Dans la pratique, pour utiliser le théorème précédent, il suffit de vérifier, en vertu de l'inégalité des accroissements finis, que f est dérivable et qu'il existe une constante positive $K < 1$ telle que $|f'| \leqslant K$.

p.591

Exercice 23

Étudier la convergence de la suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2/4$.

p.591

Exercice 24 Pour $\alpha \in [-1, +\infty[$, étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = \alpha$ et la relation $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$, pour tout entier n.

p.591

Exercice 25 Soit I un intervalle fermé, $K \in [0,1[$ et $f : I \to I$ une fonction K-lipschitzienne.
Démontrer que toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est convergente.

On distinguera les cas où $I = [a,b]$, $I = [a, +\infty[$, $I =]-\infty, a]$ *et* $I = \mathbb{R}$.

Point méthode

Pour établir la convergence d'une suite « $u_{n+1} = f(u_n)$ », on peut :

- chercher à établir une monotonie et utiliser le théorème des suites monotones ;
- chercher, notamment si la suite n'est pas monotone, à établir que $|f'|$ est majorée par une constante positive $K < 1$.

Cette liste n'est pas exhaustive.

Calcul approché d'un point fixe

Lorsque $f : [a,b] \to [a,b]$ est une fonction K-lipschitzienne et $c \in I$ est un point fixe de f, nous venons de voir que toute suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers c. La démonstration de la proposition 26 de la page précédente donne une estimation de l'erreur, à savoir $|u_n - c| \leqslant K^n |u_0 - c| \leqslant K^n (b-a)$. On en déduit un programme Python donnant une valeur approchée de c à ε-près.

```
def PointFixe (f,k,u0,a,b,eps):
    u=u0
    err=b-a
    while err>=eps:
        u=f(u)
        err=k*err
    return u
```

7 Théorème de la limite de la dérivée

Proposition 27

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

S'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.

Principe de démonstration. Démonstration page 591

Utiliser le théorème des accroissements finis pour estimer $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Théorème 28

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

Si la restriction de f' à $I \setminus \{a\}$ admet une limite finie ℓ en a, alors :

- f est dérivable en a ;
- f' est continue en a et en particulier $f'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x)$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente. □

Remarque

Avec les notations ci-dessus, si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = +\infty$, alors f n'est pas dérivable en a.

Le graphe de la fonction possède une tangente verticale au point d'abscisse a.

p.591

Exercice 26

Démontrer que $f : \begin{array}{ccl} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arcsin}\left(1-x^4\right) \end{array}$ est dérivable en 0.

p.592

Exercice 27

La fonction $f : \begin{array}{ccl} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arcsin}\left(1-x^2\right) \end{array}$ est-elle dérivable en 0 ?

Point méthode

Pour déterminer si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, *a priori* continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$, est effectivement dérivable en a, on peut :

- soit étudier le taux d'accroissement en a ;
- soit utiliser le théorème de la limite de la dérivée, sans oublier de prouver la continuité de f en a. Cette méthode n'a d'intérêt que si la dérivée est plus simple à étudier que le taux d'accroissement.

p.592

Exercice 28 Démontrer que la fonction $f : x \mapsto (1-x^2)\operatorname{Arcsin} x$, définie sur $[-1,1]$ est dérivable en 1.

III Fonctions continument dérivables

1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est de **classe $\mathcal{C}^1$** sur I si elle est dérivable sur I et la fonction f' est continue.

Notation On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs réelles.

Remarque La notion de classe $\mathcal{C}^1$ est stable par restriction, c'est-à-dire que la restriction d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à un sous-intervalle d'intérieur non vide, est encore de classe $\mathcal{C}^1$.

p.592

Exercice 29 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$.

1. Démontrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
   On note encore f ce prolongement.
2. Démontrer que f est dérivable en 0.
3. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, le nombre dérivé $f'(x)$.
   Que dire de l'inclusion $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$?

Théorème 29 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment)

Soit a et b deux réels, avec $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$.
Alors f est M-lipschitzienne, où :

$$M = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

Démonstration. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $|f'|$ est continue sur un segment. Ainsi, $|f'|$ admet un maximum ; M est bien défini.
Il suffit alors d'appliquer le théorème 25 de la page 567. □

p.593

Exercice 30 Avec les notations précédentes, démontrer que si f est K-lipschitzienne, alors $K \geqslant \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

- Il se peut que la dérivée f' d'une fonction dérivable $f : I \to \mathbb{R}$ soit elle-même dérivable sur I. On dit alors que f est **deux fois dérivable**. La fonction $(f')'$ est alors sa **dérivée seconde**, fonction que l'on note $f^{(2)}$ ou f''.

- La dérivée seconde $f^{(2)}$ d'une fonction deux dérivable peut éventuellement être dérivable. La fonction f est alors dite de **trois fois dérivable** et sa **dérivée troisième** est la fonction $f^{(3)} = \left(f^{(2)}\right)'$. Ainsi de suite.

On esquisse ainsi un procédé, avec lequel on définirait ce que signifie, pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, d'être de $\boldsymbol{n}$ **fois dérivable**, ainsi que la **dérivée** $\boldsymbol{n}$**-ième** d'une telle fonction.
Par convention, toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est 0 fois dérivable et $f^{(0)} = f$.

Définition 9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est de **classe** $\boldsymbol{\mathcal{C}^n}$ lorsqu'elle est n fois dérivable et que la fonction $f^{(n)}$ est continue.
- On dit que f est de **classe** $\boldsymbol{\mathcal{C}^\infty}$ lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout entier naturel n.

Notations

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, ou plus simplement $\mathcal{C}^n(I)$, l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur I de classe $\mathcal{C}^n$. En particulier $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur I.
- On désigne par $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, ou plus simplement $\mathcal{C}^\infty(I)$, l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur I de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction n-fois dérivable. La dérivée n-ième de f est notée $f^{(n)}$ ou $D^n(f)$. On trouve dans certains ouvrages la notation $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ pour désigner la dérivée n-ième de f.

Remarques

- Comme pour les fonctions continues (*cf.* page 508), on s'autorise parfois à parler de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ même dans le cas où elles sont définies sur une réunion disjointe d'intervalles d'intérieur non vide.
- La propriété « de classe $\mathcal{C}^n$ » est stable par restriction.
- On sait que si une fonction est dérivable, elle est continue. Ainsi, pour tout entier naturel n, si f a une dérivée $(n+1)$-ième, alors est de classe $\mathcal{C}^n$.
- Pour démontrer qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, il suffit de vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(n)}$ est définie. Il n'est pas nécessaire de vérifier la continuité de celle-ci, d'après la remarque précédente.
- On dispose ainsi de la chaîne (infinie) d'inclusions :

$$\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}).$$

Proposition 30

Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ et $f\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ une fonction.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{p+q}$ si, et seulement si, f est de classe $\mathcal{C}^p$ et $f^{(p)}$ est de classe $\mathcal{C}^q$. On a alors :

$$f^{(p+q)}=\left(f^{(p)}\right)^{(q)}.$$

Démonstration page 593

Point méthode

Pour montrer qu'une fonction $f: I\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$, avec $n\geqslant 1$, il suffit de montrer que :

1. f est de classe $\mathcal{C}^1$
2. et que f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

Exemples

- Toute fonction polynomiale $f: I\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
  Pour cela, posons $\mathcal{H}_n$: « toute fonction polynomiale $f: I\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ ».
  Démontrons par récurrence que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

  * On sait que les fonctions polynomiales sont continues, ce qui assure $\mathcal{H}_0$.
  * Supposons que $\mathcal{H}_n$ est vrai pour un entier $n\in\mathbb{N}$. Soit $f: I\to\mathbb{R}$ une fonction polynomiale. On sait que f est dérivable et que f' est une fonction polynomiale. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, f' est de classe $\mathcal{C}^n$. Par conséquent, f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, ce qui termine la démonstration.

  En particulier, les fonctions $f_p: x\mapsto x^p$, avec $p\in\mathbb{N}$, sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
  Une fois $p\in\mathbb{N}$ fixé, par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, on vérifie que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f_p^{(n)}(x)=\begin{cases} p(p-1)\cdots(p-n+1)x^{p-n} & \text{si } n\leqslant p\,;\\ 0 & \text{si } n>p.\end{cases}$$

- En procédant comme dans l'exemple précédent, on déduit du fait que la dérivée d'une fonction rationnelle sur I est une fonction rationnelle sur I, que les fonctions rationnelles définies sur I sont classe $\mathcal{C}^\infty$.

  En particulier, la fonction $f: x\mapsto 1/x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$ ou $I=\mathbb{R}_-^*$.
  Par récurrence, on établit facilement :

$$\forall x\in I\quad f^{(n)}(x)=(-1)^n\,\frac{n!}{x^{n+1}}\cdot$$

- Il s'ensuit que la fonction logarithme est de classe $\mathcal{C}^\infty$, car $\ln': x\mapsto \frac{1}{x}\cdot$

3 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème 31 (Linéarité)

Soit $n \in \mathbb{N}$, ainsi que $(f,g) \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
Alors la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et :

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

Démonstration page 593

Corollaire 32

Soit $(f,g) \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstration page 594

1001 **Remarque** Nous verrons que ces deux derniers résultats traduisent le fait que les ensembles $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),+,\cdot)$.

Exemple Les fonctions sin et cos sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Nous savons que les fonctions sin et cos sont continues et dérivables. Puisque :

$$\sin' = \cos \qquad \cos' = -\sin, \tag{$*$}$$

elles sont de classe $\mathcal{C}^1$. Les relations $(*)$ permettent facilement de démontrer par récurrence que les fonctions sin et cos sont de classe $\mathcal{C}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
De plus, on démontre, toujours par récurrence, que pour tout entier n :

$$\sin^{(n)} : x \mapsto \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\cos^{(n)} : x \mapsto \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Théorème 33 (Formule de Leibniz)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(f,g) \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})^2$. Alors la fonction fg est de classe $\mathcal{C}^n$ et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}.$$

Principe de démonstration. Par récurrence à l'aide de la formule $(uv)' = u'v + uv'$ et de la relation de Pascal.

Démonstration page 594

Corollaire 34

Soit $(f,g) \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})^2$. Alors la fonction fg est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

872

Remarque Nous verrons que ce dernier résultat ainsi que le théorème 31 de la page précédente impliquent que $(\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau.

p.595

Exercice 31 Pour tout entier naturel n, calculer $f^{(n)}$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = x^2 e^x$.

Théorème 35 (Composition)

Soit I et J deux intervalles d'intérieur non vide, $n \in \mathbb{N}$ ainsi que $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^n(J,\mathbb{R})$ telles que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$.

Principe de démonstration. Elle se fait par récurrence. Pour montrer que $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, montrer que sa dérivée est de classe $\mathcal{C}^n$ à l'aide de la formule $(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f'$.

Démonstration page 595

Remarque Contrairement à la somme et au produit, on ne dispose pas de formule « simple » pour calculer la dérivée n-ième d'une composée.

Corollaire 36

Soit I et J deux intervalles d'intérieur non vide, $n \in \mathbb{N}$ ainsi que $f \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^\infty(J,\mathbb{R})$ telles que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.

Corollaire 37 (Inverse)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ qui ne s'annule pas. Alors $1/f$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

Principe de démonstration. À l'aide du théorème précédent et de la fonction $g : x \mapsto 1/x$.

Démonstration page 595

Corollaire 38

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui ne s'annule pas. Alors $1/f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exemples

- La fonction tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle où elle est définie.
- Plus généralement, une fonction définie comme le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$. De même, pour la classe $\mathcal{C}^\infty$.

Point méthode (Pour démontrer qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$)

- Commencer par essayer d'utiliser les théorèmes précédents car beaucoup des fonctions que l'on rencontre dans la pratique sont obtenues par opérations algébriques et/ou compositions de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de référence. Pour décrire cette situation, on utilise parfois la locution « à l'aide des théorèmes généraux ».
- Si les « théorèmes généraux » ne s'appliquent pas directement, on procède souvent par récurrence :
  * soit en prouvant que $f^{(n)}$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$;
  * soit en exploitant une relation entre la fonction et ses premières dérivées.

Exemples

1. Puisque la fonction exponentielle est dérivable et vérifie $\exp' = \exp$, on montre par récurrence qu'elle est, pour tout entier n, de classe $\mathcal{C}^n$ et $\exp^{(n)} = \exp$. La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Par les théorèmes généraux, les fonctions ch et sh sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Par composition, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, car par définition $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$, pour $x > 0$.
4. Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ et définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si, $\alpha \geqslant 1$ et, dans ce cas, $f' : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

p.595

Exercice 32 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant, pour tout $x \in I$, la relation $f'(x) = \varphi\big(f(x)\big)$.
Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Point méthode (Pour démontrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^n$)

- Commencer par chercher à utiliser « les théorèmes généraux ».
- Si les « théorèmes généraux » ne s'appliquent pas directement, on peut essayer de procéder par récurrence finie.

p.596

Exercice 33 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$.

Préciser la classe maximale de $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

Bijections de classe $\mathcal{C}^n$

Nous savons que la réciproque d'une bijection strictement monotone de classe $\mathcal{C}^0$ (c'est-à-dire continue) sur un intervalle est de classe $\mathcal{C}^0$. Cette « symétrie » n'est cependant pas conservée en toute généralité pour les bijections strictement monotones de classe $\mathcal{C}^n$.

Théorème 39 (Bijection de classe $\mathcal{C}^n$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi que I et J deux intervalles d'intérieur non vide et $f : I \to J$ une bijection strictement monotone de classe $\mathcal{C}^n$.
Si la dérivée première de f ne s'annule pas, alors la bijection réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$.

Démonstration page 596

Remarques

- À noter, toujours lorsque $n \geqslant 1$, que la condition pour que f^{-1} soit de classe $\mathcal{C}^n$ ne porte que sur la dérivée première, à savoir que la fonction f' ne s'annule pas.
- De même que pour la composition, on ne dispose pas de formule « simple » pour calculer la dérivée n-ième d'une bijection réciproque.

Corollaire 40

Soit I et J deux intervalles d'intérieur non vide et $f : I \to J$ une bijection strictement monotone de classe $\mathcal{C}^\infty$. Alors la bijection réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si, et seulement si, la dérivée première de f ne s'annule pas.

Exemples

- La fonction $\sqrt[3]{}$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (*cf.*page 517).
- La fonction Arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ce résultat aurait pu être obtenu en remarquant que $\operatorname{Arctan}' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
- Les fonctions Arcsin et Arccos restreintes à $]-1,1[$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Là encore, ce résultat aurait pu être obtenu en remarquant que $\operatorname{Arcsin}' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Remarque On peut retenir que les fonctions usuelles sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le domaine de définition de leur dérivée, à l'exception des fonctions $x \mapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ (*cf.* l'exercice 33 de la page ci-contre).

Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème 41 (Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$)

Soit n un entier naturel et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.
Si, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la fonction $f^{(k)}$ admet une limite finie α_k en a, alors f admet un **prolongement de classe $\mathcal{C}^n$** en a. De plus, ce prolongement est unique et, en le notant $\widetilde{f}$, on a :

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad \widetilde{f}^{(k)}(a) = \alpha_k.$$

Principe de démonstration.

Démonstration page 596

Par récurrence sur n, en utilisant le théorème de limite de la dérivée.

Corollaire 42

Soit n un entier naturel et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(k)}$ admet une limite finie α_k en a, alors f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ en a. De plus, ce prolongement est unique et, en le notant $\widetilde{f}$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \widetilde{f}^{(k)}(a) = \alpha_k.$$

p.597 **Exercice 34** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Pour tout entier n, démontrer qu'il existe une fonction polynomiale P_n telle que pour tout $x > 0$, on ait $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$.
2. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

IV Extension aux fonctions à valeurs complexes

L'extension des concepts de fonctions dérivables en un point, de fonctions dérivables sur un intervalle et de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, aux fonctions de la variable réelle à valeurs complexes ne posent aucune difficulté. Les résultats opératoires restent les mêmes. Il faut cependant ne pas perdre de vue que les propriétés liées à la relation d'ordre, telles maximum, minimum, n'ont plus de sens dans ce contexte.

Définition 10

- Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. Elle est dite **dérivable** en a si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est définie dans $\mathbb{C}$. Cette limite, lorsqu'elle existe, est le nombre **dérivé** de f en a. Il est encore noté $f'(a)$ ou $D(f)(a)$.
- Lorsque f est dérivable en tout point de I, on dit qu'elle est **dérivable sur I**. L'application $x \mapsto f'(x)$ est appelée **application dérivée** et elle est notée f' ou $D(f)$.
- La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ si f est dérivable et f' continue.

- L'ensemble des fonctions dérivables sur I est noté $\mathcal{D}(I, \mathbb{C})$.
- L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est noté $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$.
- Comme à la partie III, on définit pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ les ensembles $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, les applications $f^{(n)}$.

- La restriction d'une fonction dérivable (de classe $\mathcal{C}^n$) sur I à un sous-intervalle J est encore dérivable (de classe $\mathcal{C}^n$). Les notions de dérivées n-ièmes restent des notions locales.
- On définit également comme à la page 559 la notion de dérivée à droite et de dérivée à gauche. Le théorème 14 de la page 560 s'étend sans difficulté au cas des fonctions à valeurs complexes.

1 Ce qui ne change pas : l'aspect opératoire...

Proposition 43 (Linéarité)

Soit f et g deux fonctions complexes définies sur I, ainsi que λ et μ deux nombres complexes.

- Si les fonctions f et g sont dérivables en a, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.
- Plus généralement, si les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$, où $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et on a, lorsque $n \in \mathbb{N}$:
$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

Démonstration. Analogue au cas réel. □

Proposition 44 (Produit)

Soit f et g deux fonctions complexes définies sur I.

- Si f et g sont dérivables en $a \in I$. Alors fg est dérivable en a et :
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
- Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$, avec $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, alors fg est de classe $\mathcal{C}^n$. De plus, si $n \in \mathbb{N}$:
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration. Analogue au cas réel. □

Proposition 45 (Dérivation et conjuguaison)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction.

- La fonction f est dérivable en a, si, et seulement si, la fonction $\overline{f}$ est dérivable en a, et l'on alors $\overline{f}\,'(a) = \overline{f'}(a)$.
- Plus généralement, la fonction f est classe $\mathcal{C}^n$, où $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ si, et seulement si, la fonction $\overline{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et l'on a alors, lorsque $n \in \mathbb{N}$:
$$\overline{f}^{\,(n)} = \overline{f^{(n)}}.$$

Démonstration.

- C'est une conséquence immédiate de la proposition 52 de la page 520.
- Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. □

Théorème 46

Soit f une fonction complexe définie sur I.

1. La fonction f est dérivable en a, si, et seulement si, les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont dérivables en a et l'on a :
$$f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a) + i\,(\operatorname{Im} f)'.$$
2. Plus généralement f est classe $\mathcal{C}^n$, avec $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ si, et seulement si, les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ et l'on a alors, lorsque $n \in \mathbb{N}$:
$$f^{(n)} = (\operatorname{Re} f)^{(n)} + i\,(\operatorname{Im} f)^{n}.$$

Démonstration page 597

Proposition 47 (Puissances)

Soit f une fonction complexe définie sur I, dérivable en a.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors f^p est dérivable en a et :
$$(f^p)'(a) = p\,f'(a)\,f^{p-1}(a).$$
- Soit $p \in \mathbb{Z}_-^*$. Si f ne s'annule pas, alors f^p est dérivable en a et :
$$(f^p)'(a) = p\,f'(a)\,f^{p-1}(a).$$

Principe de démonstration.

- Dans le cas où $p \in \mathbb{N}$, raisonner par récurrence à l'aide de la proposition 44 de la page précédente.
- Montrer la dérivabilité de f^{-1} en passant par les parties réelles et imaginaires. Conclure en remarquant que $f^p \times f^{-p} = 1$.

Démonstration page 597

Corollaire 48

Soit f une fonction complexe de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, avec $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

- Si $p \in \mathbb{N}$, alors f^p est de classe $\mathcal{C}^n$.
- Si $p \in \mathbb{Z}_-^*$ et si f ne s'annule pas, alors f^p est de classe $\mathcal{C}^n$.

p.597

Exercice 35 Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Calculer $f^{(n)}$, où $f : t \to \dfrac{1}{t-\alpha}$.

Proposition 49 (Composition)

Soit I et J deux intervalles d'intérieur non vide, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{C}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.

- Si f est dérivable en a et g en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a, et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\,f'(a)$.
- Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$, avec $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

Démonstration. Appliquer le théorème 6 de la page 556 et le théorème 35 de la page 575 à $\operatorname{Re}(g \circ f) = (\operatorname{Re} g) \circ f$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) = (\operatorname{Im} g) \circ f$. □

Attention Bien noter qu'ici f et g ne jouent pas des rôles symétriques : la fonction f est à valeurs *réelles*, alors que g est à valeurs *complexes*.

p.597

Exercice 36 Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable.

1. Calculer la dérivée de $|f|^2$.
2. La fonction $|f|$ est-elle dérivable ?
3. Montrer que si $f(a) \neq 0$, alors la fonction $|f|$ est dérivable en a.

Une application : dérivée logarithmique

p.598

Exercice 37 Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable ne s'annulant pas. La **dérivée logarithmique** de f est la fonction $\frac{f'}{f}$.
Soit également $g : I \to \mathbb{C}$ et $h : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables ne s'annulant pas.
Calculer $\dfrac{(fg)'}{fg}$, $\dfrac{(f/g)'}{(f/g)}$, $\dfrac{(f^n)'}{f^n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\dfrac{(f^p g^q h^r)'}{f^p g^q h^r}$ où $(p, q, r) \in \mathbb{Z}^3$.

Remarques

- Dans le cas des fonctions à valeurs réelles, la dérivée logarithme n'est autre que... la dérivée de $\ln \circ |f|$.
- Toujours dans le cas réel, la dérivée logarithmique permet facilement d'obtenir le signe de f' connaissant celui de f.
- La dérivée logarithmique est adaptée aux fonctions qui s'écrivent comme des produits et des quotients. Elle mène souvent à des calculs plus simples que ceux de la dérivée usuelle.

2 Ce qui change : les accroissements finis...

Commençons par remarquer que les énoncés des théorèmes de Rolle et des accroissements finis ont un sens pour les fonctions à valeurs complexes, mais qu'ils sont faux. Cela tient entre autres, même s'il ne s'agit aucunement d'une preuve, du fait que la démonstration du théorème de Rolle repose sur la notion d'extremum, qui n'a pas de sens pour une fonction à valeurs complexes. Un autre élément qui permet d'appréhender la différence entre le cas réel et le cas complexe, est qu'un point matériel dans le plan peut se déplacer à partir d'un point A et y revenir, cela sans s'arrêter, ce qui est impossible sur une droite.

p.598

Exercice 38 Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(x) = e^{ix}$.
Existe-t-il $c \in]0, 2\pi[$ tel que $f(2\pi) - f(0) = 2\pi\, f'(c)$?

Cela étant, certaines propriétés issues du théorème de Rolle sont encore valables pour les fonctions à valeurs complexes. C'est le cas de la caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle.

Proposition 50

Une fonction dérivable $f : I \to \mathbb{C}$ est constante si, et seulement si, $f' = 0$.

Principe de démonstration. Raisonner sur les parties réelle et imaginaire.

Démonstration page 598

Attention Bien noter que ce dernier résultat n'est valable que si le domaine de définition I est un intervalle.

L'inégalité des accroissements finis est également préservée.

Théorème 51

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. S'il existe sur réel M tel que $|f'| \leqslant M$, alors :

$$\forall (x,y) \in I^2 \quad |f(y) - f(x)| \leqslant M\,|y-x|\,.$$

Démonstration. La démonstration sera donnée au chapitre de calcul intégral, (*cf.* le théorème 9 de la page 650). □

Remarque Noter la différence entre l'énoncé de l'inégalité des accroissements finis dans le cas réel (*cf.* page 567) et celui dans le cas complexe. Dans le cas réel, on suppose simplement f dérivable sur l'intérieur de I et non de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Le résultat analogue au cas réel est donné à l'exercice 10.20 de la page 601.

Interprétation cinématique

Un avion de ligne s'envole de l'aéroport A. La vitesse maximale pour ce modèle est de 950km/h et son autonomie, au vu du nombre de passagers et de la quantité de kérosène emmagasinée, est de 5 heures. On perd toute trace du vol au bout de quatre heures. En supposant en première approximation que les déplacements de l'avion sont plans, les recherches pour l'appareil devront se concentrer dans un disque de rayon 950km centré en la dernière position connue.

p.598

Exercice 39 L'élève Machin a « démontré » l'égalité des accroissements finis pour une fonction complexe en appliquant le théorème des accroissements finis (théorème 17 de la page 563) aux parties réelle et imaginaire de f.

Quelle peut être son erreur ?

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

1. La fonction $g_1 = f_{|[0,+\infty[}$ est dérivable en 0 car, pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a $g_1(x) = x$. Ainsi $g_1'(0) = 1$. De même $g_2 = f_{|]-\infty,0]}$ est dérivable en 0 et $g_2'(0) = -1$.
2. La fonction f n'est pas dérivable en 0. Si elle l'était, on aurait, par restriction, $f'(0) = g_1'(0) = 1$ et $f'(0) = g_2'(0) = -1$.

Proposition 1

- Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et $\alpha : I \to \mathbb{R}$ tel que $\alpha(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ et, pour tout $x \in I$:
$$f(x) = f(a) + \ell\,(x-a) + (x-a)\,\alpha\,(x)\,.$$
Alors, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a $\alpha(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell$ et donc :
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$
- Supposons f dérivable en a. Posons $\alpha : I \to \mathbb{R}$ l'application définie par :
$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)-(x-a)\,f'(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition du nombre dérivé, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in I \setminus \{a\} \quad \Big(\big(|x-a| \leqslant \eta\big) \Longrightarrow \big|\alpha(x)\big| \leqslant \varepsilon \Big),$$
et donc, puisque $\alpha\,(x) = 0$ si $x = a$, on a :
$$\forall x \in I \quad \Big(|x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|\alpha(h)\big| \leqslant \varepsilon \Big).$$

Exercice 2 La fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et nous avons vu qu'elle n'est pas dérivable en 0 (*cf.* l'exercice 1 de la page 553)

Théorème 3

1. Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a :
$$\frac{(\lambda f + \mu g)\,(x) - (\lambda f + \mu g)\,(a)}{x-a} = \lambda\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \mu\,\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot$$
On conclut facilement par linéarité de la limite.
2. Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a :
$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} &= \frac{\big(f(x)-f(a)\big)g(x) + \big(g(x)-g(a)\big)f(a)}{x-a} \\ &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,g(x) + f(a)\,\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot\end{aligned}$$
Par continuité de g en a, par définition du nombre dérivé en un point et par les théorèmes généraux sur les limites, le terme de droite dans l'égalité précédente tend vers $f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$ lorsque x tend vers a.

Théorème 6 Puisque g est dérivable en b, il existe une fonction α définie sur I de limite nulle en b et telle que pour tout $y \in J$, on ait :

$$g(y) - g(b) = g'(b)(y-b) + (y-b)\,\alpha(y).$$

En particulier, pour tout $x \in I$, avec $x \neq a$:

$$\frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{x-a} = g'(b)\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,\alpha\Big(f(x)\Big). \qquad (*)$$

Puisque f est continue en a, on a $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$. Ainsi, par composition des limites, $\alpha\Big(f(x)\Big) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$. D'après les théorèmes généraux le terme de droite dans l'égalité $(*)$ admet $g'(b)\,f'(a)$ pour limite (finie) lorsque x tend vers a, et la conclusion s'ensuit.

Exercice 3

1. Soit f une fonction dérivable paire. On a $f(x) = f(-x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par composition, la fonction $g : x \mapsto f(-x)$ est dérivable et $g'(x) = -f'(-x)$ pour tout $x \in I$. Par conséquent, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) = -f'(-x)$.
2. On démontre de même que la dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire.
3. Si f est une fonction T-périodique définie sur $\mathbb{R}$, on a $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x+T)$ est la fonction $x \mapsto f'(x+T)$, on a, pour tout x réel, $f'(x) = f'(x+T)$. Ainsi f' est également T-périodique.

Corollaire 8

- Pour tout entier naturel n non nul, d'après les exemples traités à la page 552, la fonction $\varphi_n : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi_n' : x \mapsto n\,x^{n-1}$. Par conséquent, $f^n = \varphi_n \circ f$ est dérivable en a et $(f^n)'(a) = n\,f'(a)\,f^{n-1}(a)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}_-^*$, toujours d'après les mêmes exemples, la fonction $\varphi_n : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

  Par ailleurs, si $f(a) > 0$ (respectivement $f(a) < 0$), il existe, par continuité de f en a, un réel $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap [a-\eta, a+\eta]$, on ait $f(x) > 0$ (respectivement $f(x) < 0$). Il suffit alors d'appliquer le théorème 6 de la page 556.

Théorème 12 Commençons par remarquer que J est un intervalle, du fait que f est continue et définie sur un intervalle. Vérifions que J est d'intérieur non vide. En effet, I est d'intérieur non vide, donc il contient au moins deux points et donc, du fait que f est injective, J également. Cela qui assure que J est d'intérieur non vide.

- Supposons f^{-1} dérivable en b. La formule donnant la dérivée d'une composée, appliquée à $f^{-1} \circ f$ donne $\left(f^{-1}\right)'(b) f'(a) = 1$, ce qui impose $f'(a) \neq 0$.
- Supposons $f'(a) \neq 0$. Soit $y \in J \setminus \{b\}$. Puisque f^{-1} est une bijection de J sur I et que $y \neq b$, on a $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b)$. Ainsi

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{1}{\frac{f\left(f^{-1}(y)\right) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}}.$$

La fonction réelle f est continue, injective sur un intervalle d'intérieur non vide, donc la fonction f^{-1} est continue sur J. Par composition des limites, à l'aide de la dérivabilité de f en a, on a :

$$\frac{f\big(f^{-1}(y)\big)-f(a)}{f^{-1}(y)-a}\underset{y\to b}{\longrightarrow} f'(a),$$

et puisque $f'(a)\neq 0$:

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}\underset{y\to b}{\longrightarrow}\frac{1}{f'(a)}.$$

Exercice 4

1. La fonction sh est évidemment continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Le tableau de variation a été donné aux chapitre 4. Il en découle que la fonction sh est une bijection continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Puisque $\mathrm{sh}'=\mathrm{ch}$ ne s'annule pas, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, on sait que $\mathrm{ch}^2-\mathrm{sh}^2=1$ et donc, du fait que ch est à valeurs positives :
$$\mathrm{ch}\big(f(x)\big)=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\big(f(x)\big)}=\sqrt{1+x^2},$$
pour tout x réel. Par conséquent, d'après le théorème 12 de la page 558, on a pour tout x réel :
$$f'(x)=\frac{1}{\mathrm{ch}\circ f(x)}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot$$

Exercice 5 On vérifie aisément, en notant $f : t\mapsto |t|$, que pour tout réel t :

$$f'_g(t)=\begin{cases}-1 & \text{si } t\leqslant 0\,;\\ \ \ 1 & \text{si } t>0\,;\end{cases}\qquad \text{et}\qquad f'_d(t)=\begin{cases}-1 & \text{si } t<0\,;\\ \ \ 1 & \text{si } t\geqslant 0.\end{cases}$$

Proposition 14

- Si f est dérivable en a, alors, par restriction, $f_{|I\cap[a,+\infty[}$ est dérivable en a (*cf.* la remarque de la page 553), et $f'(a)=\Big(f_{|I\cap[a,+\infty[}\Big)'(a)=f'_d(a)$. On démontre de même que $f'(a)=f'_g(a)$.
- Supposons $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ définies et égales au réel ℓ. Alors la fonction g définie sur $I\setminus\{a\}$ par $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite à droite et à gauche en a, et ces limites sont égales. Il s'ensuit que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} g(x)$ existe (*cf.* la proposition 30 de la page 503) et que f est dérivable en a.

Théorème 15 Nous démontrons le résultat dans le cas d'un maximum local.

- L'ensemble $\{x\in I\mid x>a\}$ est non vide, puisque a est intérieur à I. Puisque f admet un maximum local en a et que a est intérieur, il existe $\eta>0$ tel que, pour tout $a<x\leqslant a+\eta$, on a $f(x)\leqslant f(a)$.

  Par conséquent, pour de telles valeurs de x, on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant 0$ et donc, par passage à la limite dans les inégalités, on a $f'(a)\leqslant 0$.
- On démontre de même $f'(a)\geqslant 0$ en considérant les $a-\eta\leqslant x<a$. Il s'ensuit que $f'(a)=0$.

Exercice 6 La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ admet un minimum en 0 et un maximum en 1, alors que la fonction dérivée est la fonction constante égale à 1.

Exercice 7 Puisque les racines de l'équation du second degré $8 + 2x - x^2 = 0$ sont 2 et -4, les zéros de f sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$. Pour tout $x \in [-2,2]$, on a $f'(x) = 4\,x\,(1-x^2)$. Ainsi f' s'annule 3 fois entre les deux zéros consécutifs de f. Il n'y a donc pas unicité du c dans l'énoncé du théorème de Rolle, même entre deux zéros consécutifs.

Exercice 8 Soit α_1, α_2, $\ldots$,α_n des points distincts de I sur lesquels f s'annule. On peut sans perte de généralité les ordonner et supposer $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à f entre α_k et α_{k+1}, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. Cela garantit l'existence d'un $\beta_k \in \,]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $f'(\beta_k) = 0$.
Puisque $\alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \cdots < \beta_{n-1} < \alpha_n$, les β_k sont deux à deux distincts.

Théorème 17 La fonction $g : t \mapsto f(t) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(t-a)\right)$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. On a $g(a) = g(b) = 0$ et, pour tout $t \in \,]a,b[$, on a par ailleurs :

$$g'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

On conclut directement à l'aide du théorème de Rolle.

Corollaire 18 Supposons $h > 0$. Par la caractérisation d'un intervalle, on a $[a, a+h] \subset I$.

Il suffit alors d'appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g : t \mapsto f\big(a + t\,h\big)$, qui est, par composition, continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ (car $]a, a+h[$ est inclus dans l'intérieur de I).

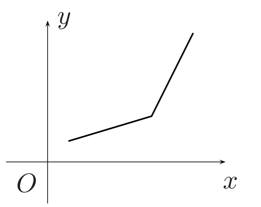
Dans le cas où $h < 0$, il suffit d'appliquer ce qui précède à $a+h$ et $(a+h) - h$.

Théorème 19

- Supposons f croissante. Soit x un point intérieur à I. Alors pour tout $y \in I$, avec $y \neq x$, on a $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0$ (il suffit de distinguer les cas $x < y$ et $y < x$ pour le démontrer). En faisant tendre y vers x on obtient, par passage à la limite dans les inégalités, que $f'(x) \geqslant 0$.
- Supposons que $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x de l'intérieur de I. Pour tout $(x,y) \in I^2$, avec $x < y$, la fonction f est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$ (car $]x,y[$ est inclus dans l'intérieur de I). Il existe donc d'après le théorème des accroissements finis $c \in \,]x,y[$ tel que
$$f(y) - f(x) = (y-x)\,f'(c).$$
La conclusion en découle, car $(y-x)\,f'(c) \geqslant 0$.

Exercice 9

L'observation de la figure ci-contre permet de construire un exemple.



Exercice 10 En effet, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -1/x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f'(x) = 1/x^2 > 0$ et pourtant f n'est pas croissante, puisque $f(-1) > f(1)$.

Exercice 11 Puisque la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, il suffit d'étudier la monotonie de la fonction dérivable $g : x \mapsto x^3 - x^2 + x + 1$. Les méthodes usuelles de calcul de dérivées donnent que g' est la fonction $x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$. Le discriminant de cette fonction polynomiale du second degré vaut $-8 < 0$. Ainsi g' a un signe fixe. Puisque le terme de degré 2 est $3x^2$, la fonction g' est à valeurs strictement positives et donc g est croissante. Il en est de même de f.

Exercice 12 On peut par exemple prendre la fonction H définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\ ; \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Proposition 22 Soit une fonction dérivable f tel que $f'(x) > 0$ pour tout x intérieur à I et $(a, b) \in I^2$, vérifiant $a < b$. La fonction f est continues sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. D'après l'égalité des accroissements finis, $c \in \,]a, b[$ tel que :

$$f(a) - f(b) = (b - a)\, f'(c)\,.$$

La conclusion en découle, car c est un point de l'intérieur de I et donc $(b - a)\, f'(c) > 0$.

Proposition 23

- Si f' se n'annule pas sur l'intérieur de I, la proposition 22 de la page 565 donne le résultat.
- Supposons que f' ne s'annule qu'une seule fois dans l'intérieur de I en un point c. Soit $(x, y) \in I^2$, avec $x < y$. La proposition 22 de la page 565 appliquée à $f_{|I\cap]-\infty,c]}$ et $f_{|I\cap[c,+\infty[}$ montre que ces deux fonctions sont strictement croissantes. Ainsi :
  * si $x < y \leqslant c$, alors $f(x) < f(y)$ par stricte croissance de $f_{|I\cap]-\infty,c]}$;
  * si $c \leqslant x < y$, alors $f(x) < f(y)$ par stricte croissance de $f_{|I\cap[c,+\infty[}$;
  * si $x < c < y$, alors $f(x) < f(c)$ et $f(c) < f(y)$, et donc $f(x) < f(y)$.

  La fonction f est strictement croissante.
- On adaptera le raisonnement précédent au cas de n annulations de f' sur l'intérieur de I.

Exercice 13 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$; elle est dérivable en tant que quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Les méthodes usuelles de calcul de dérivées donnent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, que l'on a $f'(x) = \frac{x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2}$.

Par conséquent, on a $f' \geqslant 0$ et f' ne s'annule qu'en un seul point. D'après la proposition 23 de la page 565, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Exercice 14 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$; elle est dérivable en tant que différence de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 1 - \cos x$. Ainsi $f' \geqslant 0$ et $f'(x) = 0$ si, et seulement si, $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Pour tout $a < b$, l'ensemble $[a,b] \cap 2\pi\mathbb{Z}$ est fini, et donc, d'après la proposition 23 de la page 565 on a que f est strictement croissante sur $[a,b]$. Par conséquent $f(a) < f(b)$. Il s'ensuit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème 24

Soit f une fonction croissante et continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I.

- Supposons que la fonction f soit strictement croissante. Soit $(a,b) \in I^2$ vérifiant $a < b$. Si la fonction $(f')_{|]a,b[}$ est nulle, alors $f_{|]a,b[}$ est constante, ce qui contredit la stricte monotonie de f, du fait que $]a,b[$ contient deux valeurs x et y, avec $x < y$.
- Réciproquement, supposons qu'il n'existe aucun couple $(a,b) \in I^2$ vérifiant $a < b$ et $(f')_{|]a,b[} = 0$. Si la fonction croissante f n'était pas strictement croissante, alors il existerait $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$ et $f(a) = f(b)$. Toujours par croissance, la restriction de f à $[a,b]$ serait constante et, du fait que la fonction f est dérivable sur $]a,b[$ qui est inclus dans l'intérieur de I, on aurait $(f')_{|]a,b[} = 0$, ce qui est contradictoire. Ainsi, la fonction f est strictement croissante.

Exercice 15 Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+$.

Sur cet intervalle, elle est continue.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+x} = \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{2(1+x)\sqrt{x}}.$$

Par conséquent, $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 1$. On en déduit le tableau de variations de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$			$+\infty$

Exercice 16

1. La fonction f est polynomiale, donc dérivable.
   Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+1)(x+2)$. L'étude du signe de f' est immédiate. On a le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	25	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

   La fonction f est n'a pas d'extremum global, mais elle a un maximum local en -2 et un minimum local en 1.

2. La fonction h est dérivable d'après les théorèmes généraux.
Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $h'(x) = 2x \tan x + x^2\left(1+\tan^2(x)\right)$. Par imparité de la fonction tangente, et du fait que h' est évidemment positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on obtient $h' \geqslant 0$. De plus, $h'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 0$. La fonction h est donc continue, strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par ailleurs, $h(x) \underset{x\to\pi/2^-}{\longrightarrow} +\infty$ et $h(x) \underset{x\to-\pi/2^+}{\longrightarrow} -\infty$. Ainsi h est une fonction strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Elle ne saurait avoir d'extrema globaux ou locaux.

Théorème 25 L'inégalité est immédiate si $x = y$.
Il reste donc à l'établir pour $(x,y) \in I^2$, avec $x \neq y$.
En posant $h = y - x$, on a $h \neq 0$ et $y = x + h$. Il existe donc, d'après le corollaire 18 de la page 564, un $c = x + \theta\, h$, avec $\theta \in]0,1[$, tel que $f(y) - f(x) = f'(c)\,(y-x)$.
Si $x < y$, on a $x < c < y$ et donc c n'est pas une extrémité de I. De même si $y < x$.
Ainsi : $\left|f(y) - f(x)\right| = \left|f'(c)\right|\,|y-x| \leqslant M\,|y-x|$.

Exercice 17

- Supposons que f' soit bornée. On peut supposer $|f'|$ majorée par une constante M. L'inégalité des accroissements finis assure que f est M-lipschitzienne.
- Supposons f soit K-lipschitzienne.
  Soit $a \in I$. Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leqslant K$. En faisant tendre x vers a dans cette inégalité, on obtient $\left|f'(a)\right| \leqslant K$. On en déduit que $|f'| \leqslant K$ et que f' est bornée.

Exercice 18 Il faut démontrer que pour tout $(x,y) \in I^2$, on a :

$$\left|f(y) - f(x)\right| \leqslant K\,|y-x|\,.$$

On peut supposer, sans perte de généralité, que $x \leqslant y$. Le résultat est immédiat si $x = y$. On supposera dans la suite que $x < y$.
Soit alors x_1, x_2,... x_p, avec $x \leqslant x_1 < \cdots x_p \leqslant y$, les points entre x et y où f n'est pas dérivable. Alors, d'après l'inégalité triangulaire et celle des accroissements finis, que l'on peut appliquer pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$ entre x_i et x_{i+1}, du fait que $f_{|[x_i,x_{i+1}]}$ est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$ et dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$:

$$\begin{aligned}
\left|f(y) - f(x)\right| &= \left|\left(f(y) - f(x_p)\right) + \sum_{k=1}^{p-1}\left(f(x_{k+1} - f(x_k)\right) + \left(f(x_1) - f(x)\right)\right| \\
&\leqslant \left|f(y) - f(x_p)\right| + \sum_{k=1}^{p-1}\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| + \left|f(x_1) - f(x))\right| \\
&\leqslant M\,(y - x_p) + \sum_{k=1}^{p-1} M\,(x_{k+1} - x_k) + M\,(x_1 - x) \\
&= M(y-x), \qquad\qquad \text{(« télescopage »)}
\end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité souhaitée.

Exercice 19 D'après le théorème 17 de la page 563, il existe $c \in]x, y[$ tel que :

$$f(y) - f(x) = f'\big(c\big)\ (y - x)\,.$$

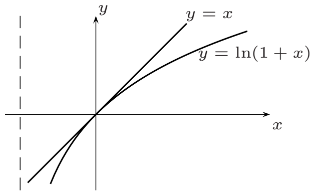
Puisque $m \leqslant f'(c) \leqslant M$ et $y - x > 0$, on a :

$$m\,(y - x) \leqslant f'\big(c\big)\ (y - x) \leqslant M\,(y - x).$$

La conclusion est alors immédiate.

Exercice 20 Il suffit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis entre 0 et x à la fonction $\sin$, en remarquant que $|\sin'| = |\cos| \leqslant 1$.

Exercice 21



La fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x) - x$ est définie et dérivable d'après les théorèmes généraux sur $]-1, +\infty[$. Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1}.$$

Ainsi $f'(x) > 0$ si, et seulement si, $x < 0$ et $f'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 0$. On peut ainsi donner le tableau des variations de f.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

La conclusion en découle.

Remarque Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on peut facilement démontrer l'inégalité $\ln(1 + x) \leqslant x$ à l'aide de l'inégalité des accroissements finis. En effet, en posant $f : x \mapsto \ln(1+x)$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$0 \leqslant f'(x) = \frac{1}{1+x} \leqslant 1,$$

la conclusion en découle.

Exercice 22 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction K-lipschitzienne, avec $0 \leqslant K < 1$.

Soit c et c' deux point fixes de f, alors :

$$\big|c - c'\big| = \big|f(c) - f(c')\big| \leqslant K\big|c - c'\big|.$$

Si $c \neq c'$, on aurait, en divisant par $|c - c'|$ dans l'inégalité ci-dessus, $1 \leqslant K$. Cela contredit l'hypothèse $K < 1$.

Proposition 26 Supposons que f soit K-lipschitzienne. On a, pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - c| = \big|f(u_n) - f(c)\big| \leqslant K\ |u_n - c|\,.$$

Par conséquent, par une récurrence facile, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - c| \leqslant K^n\ |u_0 - c|\,.$$

Puisque $0 \leqslant K < 1$, on a $K^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $|u_n - c| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 23 La fonction $f : x \mapsto 1 - x^2/4$ définie sur $[0,1]$ est décroissante. De plus l'intervalle $[0,1]$ et stable par f car $f\big([0,1]\big) = [3/4,1]$. L'équation $f(x) = x$ admet $2\sqrt{2}-2$ comme solution dans $[0,1]$. Enfin $\big|f'(x)\big| \leqslant \frac{1}{2}$.

D'après la proposition précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $2\sqrt{2}-2$.

Exercice 24 Il est clair que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ laisse $I = [-1,+\infty[$ stable : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

La fonction f étant croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Une solution de l'équation $f(x) = x$ est nécessairement positive. On en déduit facilement, pour tout $x \geqslant 0$, que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à $1 + x = x^2$. L'équation $x^2 = x + 1$ a sur $\mathbb{R}$ deux solutions $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$. Par conséquent $f(x) = x$ a une unique solution $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Il est clair que $u_1 \geqslant 0$ et que $[0,+\infty[$ est stable par f. Sur cet intervalle :

$$0 \leqslant f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Par conséquent la restriction de f à $[0,+\infty[$ est contractante ; la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 25 Il suffit simplement de démontrer l'existence d'un point fixe pour la fonction f. Pour cela on utilisera le théorème des valeurs intermédiaires (*cf.* le théorème 40 de la page 511) à la fonction continue $g : x \mapsto f(x) - x$ sur l'intervalle I.

- Si $I = [a,b]$, on a $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. Le théorème s'applique directement.
- Si $I = [a,+\infty[$, alors on a toujours $g(a) \geqslant 0$. De plus, pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leqslant k(x-a) + f(a)$ et donc $g(x) \leqslant (k-1)x + f(a) - ka$. Il s'ensuit par majoration que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$. Il existe donc $c \in I$ tel que $f(c) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires permet alors encore de conclure.
- Analyse similaire dans le cas où $I =]-\infty,a]$.

Proposition 27 Notons $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x) = \ell$. Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, en appliquant le théorème des accroissements finis à f entre a et x, il existe $c_x \in]a,x[$ (ou $]x,a[$), tel que :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x).$$

Puisque, pour tout $x \in I\setminus\{a\}$, on a $|c_x - a| \leqslant |x-a|$, on peut conclure que $\lim\limits_{x\to a} c_x = a$. Par composition des limites :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Exercice 26 Pour tout $x \in]-1,1[\setminus \{0\}$, on a $1-x^4 \in]0,1[$. Ainsi, par composition, on a :

$$f'(x) = -\frac{4\,x^3}{\sqrt{2\,x^4 - x^8}} = -\frac{4\,x}{\sqrt{2-x^4}}.$$

D'après le théorème précédent, puisque $-\frac{4x}{\sqrt{2-x^4}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

Exercice 27 Pour tout $x \in]-1,1[\setminus \{0\}$, on a $1-x^2 \in]0,1[$. Ainsi, par composition, on a pour $x>0$:

$$f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{2\,x^2 - x^4}} = -\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}.$$

D'après le théorème précédent, puisque $-\frac{2}{\sqrt{2-x^2}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\sqrt{2}$, la fonction f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\sqrt{2}$. De même, la fonction f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=\sqrt{2}$. Puisque $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 28 Ici, il est plus simple de revenir à la définition.

En effet, on a pour tout $x \in [-1,1[$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -(1+x)\operatorname{Arcsin} x,$$

et donc :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} -\pi.$$

Exercice 29

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a l'inégalité :

   $$\big|f(x)\big| \leqslant x^2.$$

   Ainsi, puisque $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, on a par encadrement $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. On pose donc $f(0)=0$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a l'inégalité :

   $$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| = \left|x \sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x|.$$

   On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$ et donc que f est dérivable en 0, avec $f'(0)=0$.
3. Par les théorèmes généraux, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a $f'(x) = 2\,x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.

   Considérons la suite $a = \left(\frac{1}{2k\pi}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$. On a :

   $$a_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad f'(a_k) = -\cos(2k\pi) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -1 \neq f'(0).$$

   Donc la fonction f' n'est pas continue en 0 et l'inclusion $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ est stricte.

Exercice 30 Soit $x \in [a,b]$. Alors, pour tout $y \in [a,b] \setminus \{x\}$, on a :

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leqslant K.$$

En faisant tendre y vers x, on obtient, par passage à la limite dans les inégalités, l'inégalité :

$$\left|f'(x)\right| \leqslant K.$$

Par définition de la borne supérieure, on en déduit que $\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right| \leqslant K$. Enfin, f' étant continue, définie sur un segment, on a $\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right| = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|$.

Proposition 30 Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$.
Considérons le prédicat $\mathcal{H}(q)$:

> « Si f est de classe $\mathcal{C}^p$ et $f^{(p)}$ est de classe $\mathcal{C}^q$, alors f est de classe $\mathcal{C}^{p+q}$ et de plus $f^{(p+q)} = \left(f^{(p)}\right)^{(q)}$ ».

Démontrons $\mathcal{H}(q)$ par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$.

- L'initialisation est immédiate.
- Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^p$ et que $f^{(p)}$ soit de classe $\mathcal{C}^{q+1}$. Il s'ensuit, par définition, que $\left(f^{(p)}\right)^{(q)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Par ailleurs, d'après l'hypothèse de récurrence, puisque f est de classe $\mathcal{C}^p$ et $f^{(p)}$ *a fortiori* de classe $\mathcal{C}^q$, on a que ${f^{(p)}}^{(q)} = f^{(p+q)}$. Ainsi $f^{(p+q)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc f est de classe $\mathcal{C}^{p+q+1}$. De plus :

$$f^{(p+q+1)} = \left(f^{(p+q)}\right)' = \left(\left(f^{(p)}\right)^{(q)}\right)' = \left(f^{(p)}\right)^{(q+1)}.$$

Soit maintenant $\mathcal{K}(q)$:

> « Si f est de classe $\mathcal{C}^{p+q}$, alors f est de classe $\mathcal{C}^p$ et $f^{(p)}$ est de classe $\mathcal{C}^q$. »

Démontrons $\mathcal{K}(q)$ par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$.

- L'initialisation est immédiate.
- Hérédité. Supposons f de classe $\mathcal{C}^{p+q+1}$. Elle est *a fortiori* de classe $\mathcal{C}^{p+q}$. Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $f^{(p)}$ est de classe $\mathcal{C}^q$. D'après $\mathcal{H}(q)$, on a la relation $f^{(p+q)} = \left(f^{(p)}\right)^{(q)}$. Ainsi, à l'aide de cette relation et la définition de la dérivée $(p+q+1)$-ième, on obtient :

$$f^{(p+q+1)} = \left(f^{(p+q)}\right)' = \left(\left(f^{(p)}\right)^{(q)}\right)'.$$

  Il s'ensuit que $f^{(p)}$ est $q+1$ fois dérivable et que sa dérivée $(q+1)$-ième est continue.

Théorème 31 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions, ainsi que $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
Démontrons, par récurrence sur l'entier n, le prédicat $\mathcal{H}_n$:

> « Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$, alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$ ».

C'est immédiat si $n = 0$. Supposons $\mathcal{H}_n$ vérifiée pour un entier $n \in \mathbb{N}$. Alors, si f et g sont de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, par linéarité de la dérivation, $\lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$ est dérivable et :

$$\left(\lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}\right)' = \lambda f^{(n+1)} + \mu g^{(n+1)}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $\lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)} = (\lambda f + \mu g)^{(n)}$, on conclut facilement.

Corollaire 32 Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ d'après le théorème précédent. Par conséquent $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Théorème 33 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
Démontrons, par récurrence sur l'entier n, le prédicat $\mathcal{H}_n$:

« Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$, alors $f\,g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}$ ».

- L'initialisation est immédiate.
- Soit n un entier tel que $\mathcal{H}_n$ soit vrai. Supposons f et g de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, fg est de classe $\mathcal{C}^n$ et :

$$(f\,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}.$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $f^{(k)}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1-k}$ et donc de classe $\mathcal{C}^1$. De même, $g^{(n-k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Sachant qu'un produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on a, par linéarité de la dérivation, que $(f\,g)^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\begin{aligned}(f\,g)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)}\, g^{(n-k)}\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}\, g^{(n-k)} + f^{(k)}\, g^{(n+1-k)}\right).\end{aligned}$$

En séparant et en réindexant la première somme, on obtient :

$$\begin{aligned}(f\,g)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}\, g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}\, g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n+1-k)}.\end{aligned}$$

En regroupant à nouveau et en utilisant la relation de Pascal, on a enfin :

$$\begin{aligned}(f\,g)^{(n+1)} &= f^{(0)}\,g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right) f^{(k)}\,g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)}\,g^{(0)}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{(k)}\,g^{(n+1-k)}.\end{aligned}$$

La continuité de la dérivée $(n+1)$-ième est alors immédiate, puisqu'elle s'exprime comme somme de produits de fonctions continues.

Exercice 31 Posons $g : x \mapsto x^2$ et $h : x \mapsto e^x$, qui sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout entier naturel k, on a $h^{(k)} = h$. De plus $g' : x \mapsto 2x$, $g'' : x \mapsto 2$ et $g^{(k)} = 0$ pour $k \geqslant 3$. La formule de Leibniz donne donc, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$f^{(n)} = gh^{(n)} + ng'\,h^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}\,g''\,h^{(n-2)},$$

soit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = \big(x^2 + 2\,n\,x + n(n-1)\big)\,e^x.$$

On vérifie que cette expression est encore valable lorsque $n \in \{0,1\}$.

Théorème 35 Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

« pour tout $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^n(J,\mathbb{R})$ tel que $f(I) \subset J$, on a $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ ».

- L'initialisation est une traduction du fait que la composée de deux fonctions continues est continue.
- Hérédité. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^{n+1}(J,\mathbb{R})$ telles que $f(I) \subset J$. Les fonctions f et g sont dérivables, du fait de $n+1 \geqslant 1$. De plus $(g \circ f)' = (g' \circ f)\ f'$. On a :
  * d'après l'hypothèse de récurrence, $g' \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$, car g' est de classe $\mathcal{C}^n$, ainsi que f (qui est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et donc de classe $\mathcal{C}^n$),
  * la fonction f' est de classe $\mathcal{C}^n$.

  Ainsi $(g \circ f)'$ est un produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$; il est donc même de classe $\mathcal{C}^n$ et $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Corollaire 37 D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f étant en particulier continue, f est à valeurs soit dans $]0,+\infty[$, soit dans $]-\infty,0[$.
Si f est à valeurs dans $]0,+\infty[$, la fonction $1/f$ est la composée de la fonction f et de la fonction $x \mapsto 1/x$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
Même justification lorsque f est à valeurs dans $]-\infty,0[$.

Exercice 32 Puisque f est dérivable, elle est continue.
Si l'on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors $\varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$. Ainsi f' est de classe $\mathcal{C}^n$ et donc f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Exercice 33 Pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}.$$

On en déduit que f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f_\alpha^{(n)}$ a une limite finie en 0 si, et seulement si, $\alpha - n \geqslant 0$. On en déduit que si f_α est de classe $\mathcal{C}^n$, alors $n \leqslant \lfloor\alpha\rfloor$.

On vérifie ensuite par récurrence finie que, pour tout $k \in [\![0, \lfloor\alpha\rfloor]\!]$, la fonction f_α est de classe $\mathcal{C}^k$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_\alpha^{(k)}(x) = \alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\,x^{\alpha-k}.$$

Cela est conséquence facile du fait que si $\beta \geqslant 1$, la fonction f_β est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $f'_\beta = \beta f_{\beta-1}$.

Théorème 39 Démontrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, le prédicat $\mathcal{H}(n)$: « pour toute bijection strictement monotone de classe $\mathcal{C}^n$ de I sur J telle que f' ne s'annule pas, la bijection réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ ».

- Pour $n = 1$, c'est une conséquence du théorème donnant la dérivée d'une bijection réciproque (*cf.* le théorème 12 de la page 558).
- Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors f' est de classe $\mathcal{C}^n$ et, d'après l'hypothèse de récurrence et par composition, $f' \circ f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et ne s'annule pas. Par passage à l'inverse, $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Théorème 41 Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction et considérons le prédicat $\mathcal{H}_n$:

« Si f classe $\mathcal{C}^n$ et si, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \alpha_k \in \mathbb{R}$,

alors la fonction définie sur I par :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0\,; \\ \alpha_0 & \text{si } x = a, \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^n$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a l'égalité $\widetilde{f}^{(k)}(a) = \alpha_n$. »

Démontrons $\mathcal{H}_n$ par récurrence sur l'entier n. Lorsque $n = 0$, il s'agit simplement du théorème de prolongement par continuité (*cf.* le théorème 32 de la page 506). Supposons $\mathcal{H}_n$ vrai pour un entier $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et, pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$, que $f^{(k)}(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \alpha_k \in \mathbb{R}$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\widetilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$. Par conséquent $\widetilde{f}^{(n)}$ est continue. De plus :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \left(\widetilde{f}^{(n)}\right)'(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \left(f^{(n)}\right)'(x) = \alpha_{n+1}.$$

Le théorème de la limite de la dérivée (*cf.* page 570) appliqué à $\widetilde{f}^{(n)}$, montre que $\widetilde{f}^{(n)}$ est dérivable en a, avec $\left(\widetilde{f}^{(n)}\right)'(a) = \alpha_{n+1}$. Ainsi $\left(\widetilde{f}^{(n)}\right)'$ est définie et continue en a et donc $\left(\widetilde{f}^{(n)}\right)'$ est continue sur I. Il s'ensuit que $\widetilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, ce qui démontre le résultat.

Un prolongement de classe $\mathcal{C}^n$ est en particulier un prolongement par continuité, ce qui assure l'unicité.

Exercice 34

1. Par composition, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'agit de démontrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $P_n(x) = f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) e^x$ est polynomiale. En dérivant on obtient :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad P_n'(x) = -\frac{1}{x^2} P_{n+1}(x) + P_n(x).$$
La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifie $P_0 = 1$ et, pour tout entier n, on a $P_{n+1} : x \mapsto x^2 P_n(x) - x^2 P_n'(x)$. On en déduit facilement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction P_n est polynomiale.

2. En notant $P_n : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k x^k$, on obtient par croissances comparées, que la limite à droite de $f^{(n)}$ en 0 est nulle. Il est clair que c'est également le cas de la limite à gauche. Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f^{(n)}(x) = 0$. On conclut alors à l'aide du corollaire 42 de la page 578.

Théorème 46

1. Si f est dérivable en a, alors $\overline{f}$ est dérivable en a (*cf.* la proposition 45) et par linéarité $\operatorname{Re} f = \frac{f+\overline{f}}{2}$ et $\operatorname{Im} f = \frac{f-\overline{f}}{2i}$ sont dérivables en a. Réciproquement, si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont dérivables en a, alors $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ est dérivables en a.
2. Par récurrence.

Proposition 47

- Lorsque $p \in \mathbb{N}$, la dérivabilité en a de f^p sont des conséquences de la proposition 44 de la page 579. La formule et la classe s'obtiennent par récurrence.

- En notant $f : t \mapsto x(t) + iy(t)$, on a $\frac{1}{f} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}$. On conclut alors quant à la dérivabilité en a et la classe de f^{-1}. Ce dernier résultat conjugué avec la proposition 44 de la page 579 permettent de conclure, toujours quant à la dérivabilité en a et la classe, pour f^{-p}, avec $p \in \mathbb{N}$. La formule s'obtient en dérivant $f^p\,\frac{1}{f^p}$ qui est égale à 1 et qui est un produit de deux fonctions dérivables.

Exercice 35 On vérifie par récurrence que :
$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{\alpha\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n\, n!}{(t-\alpha)^{n+1}}.$$

Exercice 36

1. Puisque $|f|^2 = f\,\overline{f}$, on a $D(|f|^2) = f'\overline{f} + f\,\overline{f'} = 2\operatorname{Re}\left(f'\,\overline{f}\right)$.
On peut également écrire $D(|f|^2) = 2\big((\operatorname{Re} f)\,(\operatorname{Re} f)' + (\operatorname{Im} f)\,(\operatorname{Im} f)'\big)$.
2. La fonction $f : x \mapsto x$ montre qu'en général $|f|$ n'est pas dérivable.
3. Puisque $|f|^2$ est dérivable en a et prend une valeurs strictement positive en a, et puisque la fonction $\sqrt{\ }$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, par composition, que $|f|$ est dérivable en a.

Exercice 37 Il est facile d'établir :

- $\dfrac{(fg)'}{fg} = \dfrac{f'}{f} + \dfrac{g'}{g}$;
- $\dfrac{(f/g)'}{(f/g)} = \dfrac{f'}{f} - \dfrac{g'}{g}$;
- pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\dfrac{(f^n)'}{f^n} = n\,\dfrac{f'}{f}\cdot$
- $\dfrac{(f^p g^q h^r)'}{f^p g^q h^r} = p\,\dfrac{f'}{f} + q\,\dfrac{g'}{g} + r\,\dfrac{h'}{h}\cdot$

Exercice 38 Non !

$f(2\pi) - f(0) = 0$, alors que pour tout $x \in [0, 2\pi]$, on a $f'(x) = ie^{ix} \neq 0$.

Proposition 50 On a $f' = 0$ si, et seulement si, $(\operatorname{Re} f)' = 0$ et $(\operatorname{Im} f)' = 0$. Par la caractérisation des fonctions réelles constantes sur un intervalle (voir le corollaire 21 de la page 564), on a $f' = 0$ si, et seulement si, les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont constantes, *i.e.* si, et seulement si, la fonction f est constante.

Exercice 39 Soit $f = g + i\,h$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. En appliquant l'égalité des accroissements finis aux fonctions réelles g et h, on obtient des éléments c et d de $]a, b[$ tels que $g(b) - g(a) = (b - a)\,g'(c)$ et $h(b) - h(a) = (b - a)\,h'(d)$.

Mais il n'y a évidemment aucune raison pour que c et d soient égaux ! D'ailleurs, le fait que l'égalité des accroissements finis soit fausse pour des fonctions complexes nous dit justement qu'on ne peut pas toujours avoir $c = d$, sinon on aurait $f(b) - f(a) = (b - a)\,f'(c)$.

S'entraîner et approfondir

10.1 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est dérivable en 0, alors $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(-x)}{2x} = f'(0)$.
2. Que dire de la réciproque ?

★★ **10.2** Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et telle que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x}$ existe et soit finie. Démontrer que f est dérivable en 0.

★ **10.3** Soit $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a.
On note $\varphi : x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ et $g : x \to \mu + \lambda(x-a)$ une fonction affine quelconque, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Démontrer que si $(\lambda, \mu) \neq \big(f'(a), f(a)\big)$, alors il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ vérifiant $0 < |x-a| \leqslant \eta$, on ait $\big|f(x) - g(x)\big| > \big|f(x) - \varphi(x)\big|$.
On distinguera les cas $\mu \neq f(a)$ *et,* $\mu = f(a)$ *avec* $\lambda \neq f'(a)$.

10.4 Soit f et g deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c).$$

10.5 Soit f une fonction dérivable sur le segment $[a,b]$, telle que $f(a) = f(b) = 0$ et $f'(a) = 0$.
Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

10.6 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que :

$$f(0) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Démonter qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

10.7 Démontrer les inégalités :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

★ **10.8** Soit f une fonction dérivable sur I.

1. Soit a et b deux éléments de I tels que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Démontrer qu'il existe c compris entre a et b tel que $f'(c) = 0$.
2. Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle. (*Théorème de Darboux*)

10.9 Soit f et g deux fonctions réelles, continues sur I, dérivable sur l'intérieur de I. On suppose que $|f'| \leqslant g'$. Montrer que $\big|f(b) - f(a)\big| \leqslant g(b) - g(a)$.

10.10 Soit a un point intérieur à I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, deux fois dérivable en a (c'est-à-dire f' est dérivable en a).
On dit que f admet un minimum local strict en a s'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ vérifiant $0 < |x-a| \leqslant \eta$, on a $f(x) > f(a)$.

Démontrer que si $f'(a) = 0$ et $(f')'(a) > 0$, alors a est un minimum local strict.

⋆ **10.11** Soit f l'application définie sur $[0,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot$

Démontrer que pour tout entier naturel n et pour tout $x \in [0,1[$, que $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

Indication. On chercher une relation entre $f^{(n+1)}$ et $f^{(n)}$.

10.12 Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\cdot$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme P_n tel que, pour tout réel x, on ait $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\cdot$

   Indication. On pourra écrire $f(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)\cdot$
2. Donner les racines de P_n.

⋆ **10.13** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ définie sur I, qui s'annule en $x_1 < \cdots < x_n$, avec $n \geqslant 1$. Démontrer que pour tout $x \in I$, il existe $\xi \in I$ tel que

$$f(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{n!}\, f^{(n)}(\xi)\,\cdot$$

Indication. Pour $x \in I \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, introduire $\varphi : t \mapsto f(t) - A(t-x_1)\cdots(t-x_n)$, avec $A \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = 0$.

⋆ **10.14** Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$.
Pour tout entier naturel n, on pose P_n la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n\left(f^n\right)$$

1. Démontrer que P_n a la parité de n.
2. Calculer $P_n(1)$. En déduire $P_n(-1)$.
3. Démontrer que P_n s'annule n fois sur $]-1,1[$.

⋆⋆ **10.15** Soit q une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\exists A \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \geqslant A \quad \Big(q(x) > 0 \qquad \text{et} \qquad q'(x) > 0\Big).$$

Montrer que pour tout fonction y deux fois dérivable vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y''(x) + q(x)y(x) = 0$$

est bornée au voisinage de $+\infty$. *Indication. On pourra considérer la fonction définie sur $[A+\infty[$ par $z : x \mapsto y^2(x) + \frac{y'^2(x)}{q(x)}\cdot$*

10.16 On cherche les triangles ABC d'aire maximale inscrits dans le cercle centré à l'origine et de rayon 1. On peut toujours supposer que A et B sont sur une droite parallèle à l'axe $(O,\vec{\imath})$.

1. Déterminer les triangles d'aire maximale pour lesquels A et B sont sur la droite d'équation $Y = y$, où $y \in [-1,1]$. On note $f(y)$ cette aire.
2. Conclure.

10.17 Soit $f : I \to I$ une fonction dérivable et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $u_0 \in I$. On suppose de plus que c est un point fixe de f, que $|f'(c)| > 1$ et que (u_n) converge vers c.

1. On suppose que pour tout entier naturel n on a $u_n \neq c$. Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}-c}{u_n-c}\cdot$ Aboutir à une contradiction.
2. Démontrer que la suite converge vers c si, et seulement si, elle est stationnaire, égale à c à partir d'un certain rang.
3. Démontrer que la suite définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$ diverge.

10.18 Étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 \in [0,2]$ et, pour tout entier naturel n, la relation $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$.

10.19 On considère la suite (u_n) définie sur $u_0 \in [0,\pi/2]$ et $u_{n+1} = \sin(2u_n)$.

1. Démontrer que l'intervalle $[\pi/4, 1]$ est stable par $f : x \mapsto \sin(2x)$.
2. Étudier la suite (u_n).

⋆⋆ **10.20** *Inégalité des accroissements finis générale*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe un réel M tel que, pour tout $x \in]a,b[$, on ait $\left|f'(x)\right| \leqslant M$.

1. On suppose dans cette question que $f(a)$ et $f(b)$ sont réels. Démontrer que $\left|f(b)-f(a)\right| \leqslant M(b-a)$.
2. On ne suppose plus $f(a)$ et $f(b)$ sont réels. En considérant une application g définie sur $[a,b]$ par $g(x) = u\big(f(x)-f(a)\big)$, avec $u \in \mathbb{C}$ bien choisi, démontrer que $\left|f(b)-f(a)\right| \leqslant M(b-a)$.

Solution des exercices

10.1 1. Comme f est dérivable, il existe une fonction α définie sur $\mathbb{R}$ et de limite nulle en 0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(x) = f(0) + xf'(0) + x\,\alpha(x)$. Par conséquent :

$$\frac{f(x) - f(-x)}{2x} = f'(0) + \frac{\alpha(x) - \alpha(-x)}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f'(0).$$

2. La réciproque est fausse. Considérons par exemple la fonction $f : x \mapsto |x|$ qui est définie sur $\mathbb{R}$. On sait qu'elle n'est pas dérivable en 0. En revanche, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\frac{f(x)-f(-x)}{2x} = 0$ et *a fortiori* :

$$\frac{f(x) - f(-x)}{2x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

10.2 Notons ℓ la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < |x| \leqslant \eta$ on ait :

$$\left|\frac{f(2x) - f(x)}{x} - \ell\right| \leqslant \varepsilon. \qquad (*)$$

Fixons un tel x. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|x/2^{n+1}| \leqslant \eta$, l'inégalité $(*)$ donne

$$\left|\frac{f(x/2^n) - f(x/2^{n+1})}{x} - \frac{\ell}{2^{n+1}}\right| \leqslant \varepsilon/2^{n+1}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x) - f(x/2^{n+1})}{x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\ell}{2^{k+1}}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{f(x/2^k) - f(x/2^{k+1})}{x} - \frac{\ell}{2^{k+1}}\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{f(x/2^k) - f(x/2^{k+1})}{x} - \frac{\ell}{2^{k+1}}\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\varepsilon \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x} - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

En d'autres termes, $\frac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ell$ et f est dérivable en 0.

10.3 Supposons que $(\lambda, \mu) \neq \big(f'(a), f(a)\big)$. Deux cas se présentent.

Cas $\mu \neq f(a)$**.** Alors $\lim\limits_{x\to a} \big|f(x) - g(x)\big| - \big|f(x) - \varphi(x)\big| = \big|f(a) - \mu\big| > 0$. Par conséquent $\big|f(x) - g(x)\big| > \big|f(x) - \varphi(x)\big|$ au voisinage de a (*cf.* la proposition 25 de la page 498).

Cas $\mu = f(a)$ et $\lambda \neq f'(a)$. Dans ces conditions :

$$\frac{\bigl|f(x)-g(x)\bigr|}{|x-a|} = \left|\frac{f(x)-f(a)-\lambda(x-a)}{x-a}\right| \underset{x\to a}{\longrightarrow} \bigl|f'(a)-\lambda\bigr|,$$

et par conséquent :

$$\frac{\bigl|f(x)-g(x)\bigr| - \bigl|f(x)-\varphi(x)\bigr|}{|x-a|} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \bigl|f'(a)-\lambda\bigr| > 0.$$

On en conclut que $\frac{\left|f(x)-g(x)\right|-\left|f(x)-\varphi(x)\right|}{|x-a|} > 0$ au voisinage de a, et donc également que $\bigl|f(x)-g(x)\bigr| - \bigl|f(x)-\varphi(x)\bigr| > 0$ au voisinage de 0 privé de a.

10.4 Introduisons la fonction φ définie sur $[a,b]$ par

$$\varphi(x) = \bigl(g(b)-g(a)\bigr)\bigl(f(x)-f(a)\bigr) - \bigl(f(b)-f(a)\bigr)\bigl(g(x)-g(a)\bigr).$$

D'après les théorème généraux, la fonction φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On a $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ et, pour tout $x\in\ ]a,b[$:

$$\varphi'(x) = \bigl(g(b)-g(a)\bigr)\,f'(x) - \bigl(f(b)-f(a)\bigr)\,g'(x).$$

On conclut alors immédiatement à l'aide du théorème de Rolle.

10.5 La fonction φ définie par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ si } x\neq a \\ \varphi(a)=0. \end{cases}$$

est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ avec $\varphi(a)=\varphi(b)=0$.
Il existe donc $c\in\,]a,b[$ tel que $\varphi'(c)=0$.
Or :

$$\varphi'(c)=0 \Longleftrightarrow f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}\cdot$$

10.6 Posons g l'application définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f\bigl(\tan x\bigr) & \text{si } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\,; \\ 0 & \text{si } x=\frac{\pi}{2}\cdot \end{cases}$$

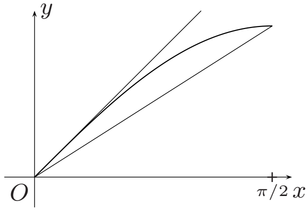
Par les théorèmes généraux, la fonction g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et dérivable sur sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Par composition des limites, puisque $\tan x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} g(x) = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Par conséquent, g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Le théorème de Rolle appliqué à la fonction g donne l'existence d'une réel $d\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$0 = g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(0) = g'(d)\frac{\pi}{2}\cdot$$

On conclut en remarquant que $g'(x) = f'(\tan x)\,(1+\tan^2 x)$, pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

10.7 L'inégalité $|\sin x| \leqslant |x|$ a été vue en exercice du cours (*cf.* exercice 20 de la page 568). Puisque sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction sin prend des valeurs positives, on obtient : $\sin x \leqslant x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



Étudions la fonction $g : \begin{array}{rcl} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x - \frac{2}{\pi} x. \end{array}$

Il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

La dérivée de g est $g' = \cos - \frac{2}{\pi}$. Celle-ci ne s'annule qu'en $x_0 = \operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{\pi}\right)$. On en déduit facilement le tableau des variations.

x	0		x_0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$g(x_0)$	$\searrow$	0

Il s'ensuit que la fonction g est à valeurs positives, ce qui donne la seconde inégalité.

10.8 1. Supposons, $a < b$. La fonction f restreinte à $[a, b]$ atteint son minimum sur ce segment en un point c, car elle est continue.

Puisque $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) < 0$, on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$ au voisinage de a et donc $c \neq a$. De même $f'(b) > 0$ implique que $\frac{f(x)-f(b)}{x-b} > 0$ au voisinage de b, et donc $f(x) - f(b) < 0$ pour au moins un $x \in [a, b]$; ainsi $c \neq b$.

Puisque $f_{|[a,b]}$ est dérivable et atteint son minimum en $c \in]a, b[$, on a $f'(c) = 0$.

On raisonne de même sur le maximum si $b < a$.

2. Soit a et b dans I tels que $f'(a) \neq f'(b)$.

Supposons par exemple $f'(a) < f'(b)$. Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) < k < f'(b)$ et soit g la fonction définie par $g(x) = f(x) - kx$. En appliquant le résultat de la première question à g, on déduit qu'il existe c entre a et b tel que $g'(c) = 0$, soit tel que $f'(c) = k$, ce qui montre que $k \in f'(I)$.

10.9 Soit $(a, b) \in I^2$ vérifiant $a \leqslant b$.

La fonction $\varphi : x \mapsto g(x) - g(a) - f(x) + f(a)$ définie sur I est continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I. De plus, $\varphi'(x) = g'(x) - f'(x) \geqslant 0$ pour tout x de l'intérieur. Il s'ensuit que φ est croissante et

$$g(b) - g(a) - f(b) + f(a) = \varphi(b) \geqslant \varphi(a) = 0.$$

En appliquant ce qui précède à $-f$ (qui vérifie les mêmes hypothèses que f), on obtient :

$$g(b) - g(a) + f(b) - f(a) \geqslant 0.$$

Ainsi :

$$-\big(g(b) - g(a)\big) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant g(b) - g(a),$$

et la conclusion en découle.

10.10 Il existe $\eta > 0$ tel que $[a-\eta, a+\eta] \in I$ (a est intérieur) et tel que l'on ait $\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} > 0$ pour $|x-a| \leqslant \eta$.

Par conséquent, $f'(x) > 0$ sur $[a, a+\eta]$ et $f_{|[a,a+\eta]}$ est strictement croissante. Ainsi, pour tout $x \in]a, a+\eta]$, on a $f(x) > f(a)$. De même $f_{|[a-\eta,a]}$ est strictement décroissante et tout $x \in][a-\eta, a[$, on a $f(x) > f(a)$. Par conséquent, f admet un minimum relatif strict en a.

10.11 La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout $x \in]0,1]$, on a $f'(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$, c'est-à-dire $(1-x^2)\,f'(x) = xf(x)$. D'après la formule de Leibniz, pour tout $n \geqslant 2$, on a en dérivant n fois la dernière relation :

$$(1-x^2)\,f^{(n+1)}(x) - 2nxf^{(n)}(x) - n(n-1)f^{(n-1)}(x) = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x), \quad (*)$$

c'est-à-dire, la formule étant encore valable pour $n = 1$:

$$(1-x^2)\,f^{(n+1)}(x) = (2n+1)xf^{(n)}(x) + n^2 f^{(n-1)}(x).$$

Pour tout $x \in [0,1[$, on a $f(x) \geqslant 0$ et $f'(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} \geqslant 0$. Il est alors facile de démontrer par récurrence sur n, à l'aide de la relation $(*)$, que pour tout $x \in [0,1[$ on a $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ (récurrence double).

10.12 1. D'après les théorème généraux, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
L'unicité est immédiate, car, pour tout x réel, $P_n(x) = (1+x^2)^{n+1} f^{(n)}(x)$.
Montrons par récurrence que pour tout entier n, il existe une fonction polynomiale P_n telle que $f^{(n)} : x \mapsto \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.
La fonction constante $P_0 = 1$ convient lorsque $n = 0$.
Supposons le résultat vrai pour un entier $n \in N$. Alors :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(x)(1+x^2) - 2(n+1)xP_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}} = \frac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence et les opérations sur les fonctions polynômiales

$$P_{n+1} : x \mapsto P_n'(x)(1+x^2) - 2(n+1)xP_n(x)$$

est une fonction polynomiale. La propriété s'en trouve démontrée.

2. On a facilement par le calcul :

$$f(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right).$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right).$$

En réduisant au même dénominateur, il vient que :

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{2i}\left((x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}\right).$$

Le complexe z est une racine de P_n si, et seulement s'il existe $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $(z+i) = \omega_k(z-i)$, avec $\omega_k = \exp\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)$, c'est-à-dire :

$$z(1-\omega_k) = -i(1+\omega_k).$$

Cette équation n'a pas de solution si $\omega_k = 1$ (*i.e.* $k=0$). Elle en a une seule dans tous les autres cas. L'ensemble des racines de P_n est donc, en vertu des formules d'Euler et des simplifications apportées par l'angle moitié :

$$\left\{\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n+1}\,;\ k \in [\![1,n]\!]\right\},$$

où l'on a posé $\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

10.13 Si x est égal à l'un de x_i, la relation est évidente.
Sinon, on pose :

$$A = \frac{f(x)}{(a-x_1)(a-x_2)\dots(a-x_n)}$$

et la fonction φ définie par :

$$\varphi(t) = f(t) - A(t-x_1)(t-x_2)\dots(t-x_n)$$

est n fois dérivable et s'annule $n+1$ fois. Par récurrence sur $k \in [\![1,n]\!]$, on montre, en appliquant plusieurs fois le théorème de Rolle, que $\varphi^{(k)}$ s'annule $n-k+1$ fois dans $]x_1,x_n[$. En particulier, la dérivée d'ordre n de φ a au moins un zéro ξ dans $]x_1,x_n[$.

Or, $\varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!A$, d'où $A = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$.

10.14 1. La fonction P_n est la dérivée d'ordre n d'une fonction polynomiale, il s'agit donc d'une fonction polynomiale.
On remarque que la dérivée d'une fonction paire est impaire et que la dérivée d'une fonction impaire est paire.
Le polynôme $(X^2-1)^n$ étant pair, P_n est pair si n est pair, impair si n est impair.

2. On peut écrire $f^n = g\,h$, où les fonctions g et h sont définies sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto (x-1)^n$ et $h : x \mapsto (x+1)^n$. La formule de Leibniz donne :

$$P_n = \frac{1}{2^n\,n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} g^{(i)}h^{(n-i)}.$$

Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $g^{(i)}(x) = n(n-1)\cdots(n-i+1)(x-1)^{n-i}$.
En particulier, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, on a $g^{(i)}(1) = 0$, et donc :

$$P_n = \frac{1}{2^n\,n!}\binom{n}{n} g^{(n)}h^{(0)} = 1$$

En utilisant les propriétés de parité de P_n :

$$P_n(-1) = (-1)^n.$$

3. En appliquant comme plus haut la formule de Leibniz à l'ordre $k < n$, il vient que -1 et 1 sont des zéros de $D^k(f^n)$.
   Montrons par récurrence finie que si $0 \leqslant k \leqslant n$, alors $D^k(f^n)$ admet au moins k zéros distincts dans $]-1,1[$. C'est immédiat pour $k=0$. Si le résultat est vrai pour un $k < n$, il existe des zéros x_1, ... x_k de $D^k(f^n)$, tels que $-1 < x_1 < \cdots < x_k < 1$. En posant $x_0 = -1$ et $x_{k+1} = 1$, qui sont également des zéros de $D^k(f^n)$, on peut appliquer le théorème de Rolle à $D^k(f^n)$ sur les intervalles $[x_k, x_{k+1}]$. Pour tout $k \in [\![0]\!]k$, il existe un zéro $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ de $D^{k+1}(f^n)$, et donc $D^{k+1}(f^n)$ s'annule au moins $k+1$ fois dans $]-1,1[$.
   Pour la valeurs $k=n$, on obtient que $P_n = D^n(f^n)$ s'annule n fois sur $]-1,1[$.

10.15 Si y est une solution de l'équation alors la fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \geqslant A \quad z'(x) &= 2y'(x)y(x) - y'^2(x)\frac{q'(x)}{q^2(x)} + 2y'(x)y''(x)\frac{1}{q(x)}\\ &= -y'^2(x)\frac{q'(x)}{q^2(x)} \leqslant 0.\end{aligned}$$

Par suite, la fonction z est une fonction positive décroissante sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\forall x \geqslant A \quad 0 \leqslant z(x) \leqslant z(0)$$

donc :

$$\forall x \geqslant A \quad |y(x)| \leqslant \sqrt{z(x)} \leqslant \sqrt{z(0)}$$

ce qui prouve que y est bornée au voisinage de $+\infty$.

10.16 1. Notons $A\left|\begin{smallmatrix} x_A \\ y\end{smallmatrix}\right.$, $B\left|\begin{smallmatrix} x_B \\ y\end{smallmatrix}\right.$ et $C\left|\begin{smallmatrix} x_A \\ z\end{smallmatrix}\right.$. On a $x_A = \pm\sqrt{1-y^2}$ et $x_B = \mp\sqrt{1-y^2}$. La distance AB vaut donc $2\sqrt{1-y^2}$. D'après la formule de l'aire d'un triangle « $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$ », l'aire est $\sqrt{1-y^2}\,|z-y|$. Puisque $z \in [-1,1]$, $|z-y| \leqslant 1+|y|$, inégalité atteinte en 1 où -1 selon le signe de y. Il s'ensuit que

$$f(y) = (1+|y|)\sqrt{1-y^2}.$$

2. Par parité, il s'agit d'étudier le maximum de f sur $[0,1]$. Par continuité sur un segment, il est atteint. La fonction est dérivable sur $[0,1[$, avec pour tout y de cet intervalle, $f'(y) = \frac{(1-2y)(1+y)}{\sqrt{1-y^2}}$. On en déduit le tableau de variation suivant.

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
f	1	$\nearrow$	$3\sqrt{3}/4$	$\searrow$	0

Il s'ensuit que la maximum de f est atteint en $1/2$. Cela correspond à un triangle équilatéral.

10.17 1. On a :

$$\frac{u_{n+1}-c}{u_n-c}=\frac{f(u_n)-f(c)}{u_n-c}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}f'(c).$$

Il existe donc un rang à partir duquel

$$\left|\frac{u_{n+1}-c}{u_n-c}\right|\geqslant\frac{|f'(c)|+1}{2}>1.$$

La suite $\big(|u_n-c|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir d'un rang n_0, et donc pour $n\geqslant n_0$, on a $|u_n-c|\geqslant|u_{n_0}-c|$. En passant à la limite dans cette dernière inégalité, on obtient $0\geqslant|u_{n_0}-c|$, ce qui est absurde.

2. Si la suite ne prenait pas la valeur c, elle serait divergente d'après la question précédente. Il existe donc un indice n_0 tel que $u_{n_0}=c$. Puisque c est un point fixe, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang n_0.

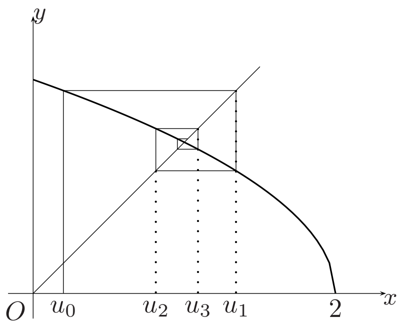
3. Les points fixes de $f:x\mapsto 4x(1-x)$ sont 0 et $3/4$. Puisque $f'(0)=4$ et $f'(3/4)=-2$, la suite ne sera convergente que si elle est stationnaire.

   On vérifie par récurrence que $u_k=\frac{a_k}{3^{2^k}}$, où a_k est un entier non divisible par 3. Par conséquent, $u_k\notin\{0,3/4\}$ pour tout entier k, et la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diverge.

10.18 Il est clair que la fonction $f:x\mapsto\sqrt{2-x}$ laisse l'intervalle fermé $[0,2]$ stable : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Par un calcul, on constate que l'équation $f(x)=x$ a une unique solution $c=1$, car une solution de l'équation $f(x)=x$ est une solution de l'équation :

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)=0.$$

Ainsi, si la suite est convergente, sa limite sera 1.



Puisque $f([0,2])=[0,\sqrt{2}]$, la suite est à valeurs dans $[0,\sqrt{2}]$ à partir du premier rang. De plus, f est dérivable sur $[0,\sqrt{2}]$ et, pour tout $x\in[0,\sqrt{2}]$, on a :

$$\big|f'(x)\big|=\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}<1.$$

La suite converge donc vers 1 en vertu de la proposition 26 de la page 568.

10.19 1. Notons $f:x\mapsto\sin(2x)$, définie sur $[0,\pi/2]$. Cette fonction est croissante sur $[0,\pi/4]$ et décroissante sur $[\pi/4,1]$. On a donc $f\big([\pi/4,1]\big)=[\sin 2,1]$; avec un outil de calcul, on vérifie que $\sin 2\simeq 0{,}9092$ et $\frac{\pi}{4}\simeq 0{,}7854$. Ainsi l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4},1\right]$ est stable par f.

2. L'étude de $g : x \mapsto \sin(2x) - x$ montre que f admet exactement deux points fixes sur $[0,1]$, l'un étant 0, l'autre étant $c \in [\pi/4, 1]$.
   - On a $|f'(x)| = |2\cos(2x)|$, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, et, sur $[\pi/4, 1]$, on a $|f'(x)|$ majoré par $|2\cos 2| < 1$. Ainsi, s'il existe n_0 tel que $u_n \in [\pi/4, 1]$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c.
   - Si $u_0 = 0$ la suite est nulle. Supposons, lorsque $u_0 \in]0, \pi/4]$, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit à valeurs dans $[0, \pi/4]$. Dans ces conditions, la suite est croissante (de par l'étude de g), majorée. Elle converge donc vers $\ell \in]0, \pi/4]$ (car $\ell \geqslant u_0$), ce qui est impossible, car par la continuité de f sur un intervalle fermé, ℓ serait un point fixe de f. Dans tous les cas où $u_0 \neq 0$, il existe donc n_0 tel que $u_{n_0} \in [\pi/4, 1]$, et donc la suite converge vers c.

10.20 1. Puisque f est dérivable sur $]a, b[$, il en est de même de $\operatorname{Re} f$. De plus, pour tout $x \in]a, b[$, on a :

$$\left|(\operatorname{Re} f)'(x)\right| \leqslant \left|(\operatorname{Re} f)'(x) + i(\operatorname{Im} f)'(x)\right| = \left|f'(x)\right| \leqslant M.$$

L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction réelle $\operatorname{Re} f$ nous donne :

$$\left|f(b) - f(a)\right| = \left|(\operatorname{Re} f)(b) - (\operatorname{Re} f)(a)\right| \leqslant M\,(b - a).$$

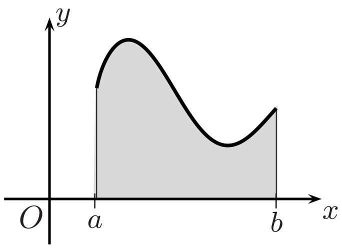
2. L'inégalité demandée est immédiate si $f(b) = f(a)$.

Dans le cas contraire, soit α un argument de $f(b) - f(a)$; posons g l'application définie sur $[a, b]$ par $g(x) = e^{-i\alpha}\big(f(x) - f(a)\big)$. La fonction g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Pour tout $x \in]a, b[$, on a $g'(x) = e^{-i\alpha} f'(x)$ et donc $\left|g'(x)\right| \leqslant M$. De plus $g(a) = 0$ et $g(b) = \left|f(b) - f(a)\right|$. L'inégalité s'obtient alors en appliquant le résultat de la première question à la fonction g.

Chapitre 11 : Intégration

I	**Intégrale des fonctions en escalier**	**613**
1	Fonctions en escalier	613
2	Intégrale des fonctions en escalier	615
II	**Intégrale des fonctions continues par morceaux**	**617**
1	Fonctions continues par morceaux	617
2	Théorème d'approximation	619
3	Intégrale des fonctions continues par morceaux	620
III	**Inégalités**	**622**
1	Fonctions positives	622
2	Inégalité de Cauchy-Schwarz	624
IV	**Extension aux fonctions à valeurs complexes**	**624**
V	**Sommes de Riemann**	**625**
Démonstrations et solutions des exercices du cours		**627**
Exercices		**636**

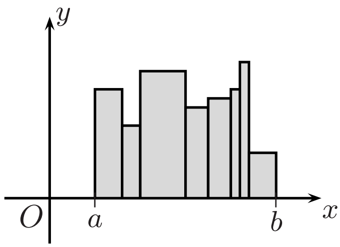
Intégration 11

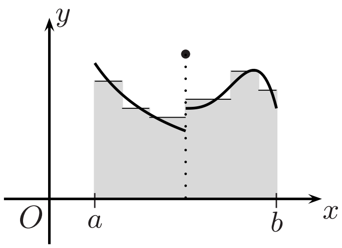


Le but de ce chapitre est de définir un nombre qui, pour une fonction f positive sur un segment $[a, b]$, mesure l'aire délimitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Ce nombre sera appelé intégrale de f et sera noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

Si f est en escalier, c'est-à-dire constante par morceaux, son intégrale doit donc être la somme des aires des rectangles délimités par sa courbe représentative.





De manière informelle, dans le cas général, si l'on peut approcher d'aussi près que l'on veut, en un sens à préciser, f par des fonctions en escalier, l'intégrale de f sera la limite, si elle existe, des intégrales de ces approximations. Parmi les fonctions qui sont bien approchées par des fonctions en escalier on trouve les fonctions continues, ou encore les fonctions continues par morceaux.

Dans tout le chapitre, a et b sont deux réels tels que $a < b$.

I Intégrale des fonctions en escalier

Dans cette section, toutes les fonctions sont à valeurs réelles.

1 Fonctions en escalier

Subdivision

Définition 1

- Une **subdivision** du segment $[a, b]$ est une suite finie $\sigma = (u_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ telle que $a = u_0 < \cdots < u_n = b$.
- Le **support** de la subdivision, noté $\operatorname{supp}(\sigma)$, est l'ensemble des valeurs prises par la suite, à savoir $\operatorname{supp}(\sigma) = \{u_k \,;\; k \in [\![0, n]\!]\}$.
- On appelle **pas** ou **module** de la subdivision σ, noté $\delta(\sigma)$, l'écart maximal entre deux points consécutifs de la subdivision :

$$\delta(\sigma) = \max_{0\leqslant k<n} (u_{k+1} - u_k)\,.$$

Exemple La suite finie $\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est une subdivision de $[a, b]$. Elle est dite **régulière** et son pas est $\frac{b-a}{n}$.

Remarque Il est clair que pour toute partie finie A du segment $[a, b]$ contenant a et b, il existe une unique subdivision dont A est le support. Il suffit pour cela d'ordonner les éléments de A. Cette subdivision est la **subdivision associée** à A.

Définition 2

Soit $[a, b]$ un segment, σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que σ' est **plus fine** que σ si $\operatorname{supp}(\sigma) \subset \operatorname{supp}(\sigma')$.

En d'autres termes, la subdivision σ' est plus fine que σ si tous les points de σ sont des points de σ'.

Proposition 1

Soit σ et σ' deux subdivisions d'un segment $[a, b]$. Il existe alors une subdivision σ'' de $[a, b]$ qui soit plus fine que σ et plus fine que σ'.

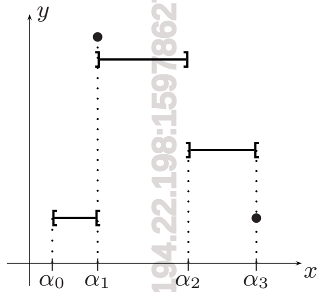
Démonstration. La subdivision associée à $\operatorname{supp}(\sigma) \cup \operatorname{supp}(\sigma')$ convient. □

Fonctions en escalier

Définition 3

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'elle est **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma = (u_0, \dots, u_n)$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $f_{|]u_i, u_{i+1}[}$ est constante.

Lorsque f est une fonction en escalier et lorsque la subdivision σ vérifie la propriété ci-dessus, on dit que σ est **adaptée** à f.



Graphe d'une fonction en escalier

Exemples

1. Une fonction constante est une fonction en escalier.
2. Si f est une fonction en escalier sur $[a,b]$, alors $|f|$ est également en escalier.
3. La fonction partie entière restreinte à $[a,b]$ est en escalier. Une subdivision adaptée est donnée par $A \cup \{a,b\}$, où A est l'ensemble des entiers dans $[a,b]$.

Remarques

- Si $\sigma = (u_0, \dots, u_n)$ est une subdivision adaptée à une fonction en escalier f, il n'y a aucune contrainte quant aux valeurs de f aux points u_i.
- Une fonction en escalier sur un segment prend un nombre fini de valeurs. Elle est en particulier bornée.
- Si f est une fonction en escalier sur $[a,b]$ et si φ est une fonction quelconque définie sur $f\big([a,b]\big)$, alors $\varphi \circ f$ est une fonction en escalier et toute subdivision adaptée à f est adaptée à $\varphi \circ f$.
- Si f est une fonction en escalier sur le segment $[a,b]$ et si $[c,d] \subset [a,b]$, alors $f_{|[c,d]}$ est encore une fonction en escalier.

Notation On note $\mathcal{E}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$ l'ensemble des fonctions en escalier à valeurs réelles sur le segment $[a,b]$.

Proposition 2

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier et σ une subdivision adaptée. Alors toute subdivision de $[a,b]$ plus fine que σ est adaptée à f.

Principe de démonstration. Commencer par le cas où σ et σ' diffèrent d'un point.

Démonstration page 627

Corollaire 3

Soit f et g deux fonctions en escalier sur le segment $[a, b]$. Il existe alors une subdivision adaptée à f et à g.

Démonstration. Si σ et σ' sont des subdivisions de $[a, b]$ adaptées respectivement à f et à g, il suffit de prendre une subdivision σ'' à la fois plus fine que σ et σ' (*cf.* la proposition ci-dessus). □

Proposition 4

Soit $[a, b]$ un segment, f et g deux fonctions de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λf et $f + g$ sont des fonctions en escalier.

Démonstration page 627

1001 **Remarque** Nous verrons que les résultats de cette proposition traduisent le fait que l'ensemble $\mathcal{E}(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

2 Intégrale des fonctions en escalier

Définition de l'intégrale

Lemme 5

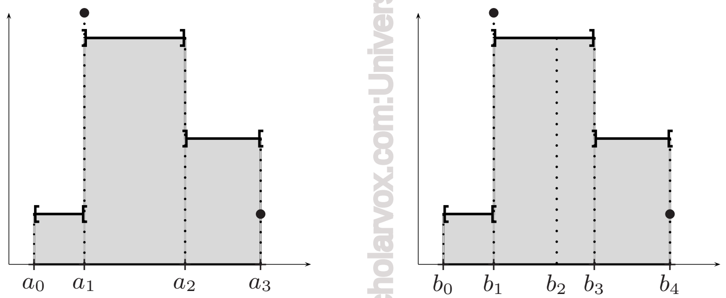
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier et $\sigma = (u_0, \ldots, u_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note f_i la valeur prise par f sur $]u_i, u_{i+1}[$. Alors la somme :

$$S_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)\, f_i$$

ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée.

Cette somme est appelée **intégrale de f**. On la note $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

Principe de démonstration. Il est suggéré par la figure ci dessous.



Démonstration page 627

Exemple Si f est la fonction constante égale à α, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \alpha\,(b-a)$.

Remarque Si f est une fonction en escalier et σ est une subdivision adaptée, les valeurs aux points du support de σ n'interviennent pas dans le calcul de l'intégrale de f.

Propriétés de l'intégrale

Proposition 6

Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$. Alors :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|\,.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 628

L'inégalité triangulaire pour une somme donne $\left|S_\sigma(f)\right| \leqslant S_\sigma\big(|f|\big)$.

Théorème 7 (Linéarité de l'intégrale)

Soit f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ et λ un réel. On a alors :

- $\displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda f) = \lambda \int_{[a,b]} f$;
- $\displaystyle\int_{[a,b]} (f+g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$.

Principe de démonstration. Avec les notations du lemme 5, en considérant une subdivision σ adaptée à f et à g, vérifier les égalités $S_\sigma(\lambda f) = \lambda S_\sigma(f)$ et $S_\sigma(f+g) = S_\sigma(f) + S_\sigma(g)$.

Démonstration page 628

1007 **Remarque**

Nous verrons que ce théorème traduit le fait que l'application $f \mapsto \displaystyle\int_{[a,b]} f$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

Proposition 8 (Positivité et croissance de l'intégrale)

Soit deux fonctions f et g en escalier sur $[a,b]$.

- Si $f \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$. (positivité)
- Si $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$. (croissance de l'intégrale)

Démonstration.

- Soit σ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Si f est à valeurs positives, l'inégalité $S_\sigma(f) \geqslant 0$ est immédiate.
- Puisque $g-f \geqslant 0$, par linéarité et positivité de l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} g - \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} (g-f)$ est positif. □

Proposition 9 (Relation de Chasles)

Soit $[a,b]$ un segment, $c \in]a,b[$ et f une fonction en escalier sur $[a,b]$. Alors les fonctions $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ sont en escalier et :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}\,.$$

Démonstration page 628

II Intégrale des fonctions continues par morceaux

Dans cette section, toutes les fonctions sont à valeurs réelles.

1 Fonctions continues par morceaux

Définition 4

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'elle est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $\sigma = (u_0, \ldots, u_n)$ de $[a,b]$ telle que :

1. pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $f_{|]u_i, u_{i+1}[}$ soit continue,
2. pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $f_{|]u_i, u_{i+1}[}$ admette des limites finies en u_i et u_{i+1}.

Une telle subdivision est dite **adaptée** à f.

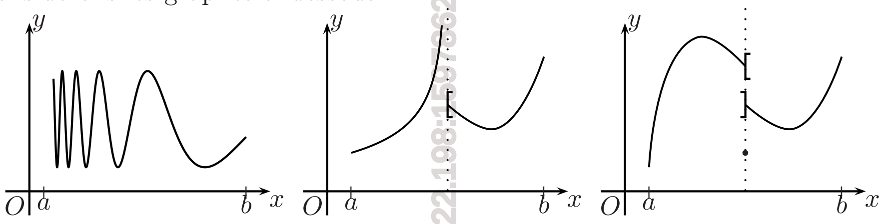
Remarques

- On peut reformuler cette définition : la fonction f est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (u_0, \ldots, u_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:
  1. la restriction $f_i = f_{|]u_i, u_{i+1}[}$ soit continue,
  2. on puisse prolonger f_i en une fonction continue $\widetilde{f_i}$ sur $[u_i, u_{i+1}]$.
- Encore une autre façon de formuler cette définition : il existe une subdivision $\sigma = (u_0, \ldots, u_n)$ telle que :
  1. la fonction f soit continue sur $[a,b] \setminus \operatorname{supp}(\sigma)$;
  2. pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la limite $\lim\limits_{x \to u_i^+} f(x)$ existe et soit finie ;
  3. pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la limite $\lim\limits_{x \to u_i^-} f(x)$ existe et soit finie.
- Toute subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée à une fonction continue par morceaux f est encore adaptée à f.
- Si f est une fonction continue par morceaux définie sur $[a,b]$ et si $[c,d]$ est inclus dans $[a,b]$, alors $f_{|[c,d]}$ est encore continue par morceaux.

Notation On note $\mathcal{CM}([a,b],\mathrm{IR})$ l'ensemble des fonctions réelles continues par morceaux sur le segment $[a,b]$.

Exemples

- Toute fonction réelle continue sur $[a,b]$ est continue par morceaux.
- La restriction de la fonction partie entière à $[a,b]$ est continue par morceaux.
- Toute fonction réelle en escalier sur $[a,b]$ est continue par morceaux.
- Considérons les graphes ci-dessous :



Graphe A Graphe B Graphe C

Seul le graphe C correspond à celui d'une fonction continue par morceaux. Le graphe A correspond à une fonction qui n'a pas de limite, finie ou infinie, en a. Le graphe B correspond à une fonction ayant une limite à gauche infinie en un point.

p.628

Exercice 1

- La fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+\lfloor 1-x\rfloor}$ est-elle continue par morceaux ?
- La fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ si $x>0$ et $f(0)=0$ est-elle continue en 0 ? Est-elle continue par morceaux ?

Proposition 10

Toute fonction continue par morceaux définie sur $[a,b]$ est bornée.

Démonstration page 629

Proposition 11

Soit f et g deux éléments de $\mathcal{CM}([a,b],\mathrm{IR})$ et λ un réel. Alors les fonctions $f+g$, λf et fg sont continues par morceaux.

Démonstration page 629

1001 **Remarque** Nous verrons que les résultats de la proposition précédente traduisent que $\mathcal{CM}([a,b],\mathrm{IR})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a,b],\mathrm{IR})$ et un anneau.

p.629

Exercice 2

1. Est-il vrai que si $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et si $g \in \mathcal{CM}\big([c,d],\mathbb{R}\big)$, avec $f\big([a,b]\big) \subset [c,d]$, alors $g \circ f$ est continue par morceaux ?
2. Est-il vrai que si $f \in \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et si $g \in \mathcal{C}\big(I,\mathbb{R}\big)$, avec $f\big([a,b]\big) \subset I$, alors $g \circ f$ est continue par morceaux ?

2 Théorème d'approximation

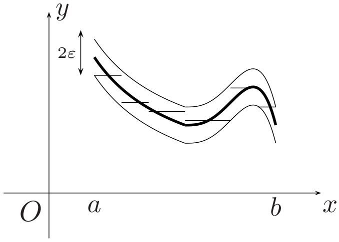
Proposition 12 (Approximation uniforme)

Soit $f \in \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et ε un réel strictement positif.
Il existe alors une fonction en escalier φ telle que $|f-\varphi| \leqslant \varepsilon$, *i.e.* :

$$\forall x \in [a,b] \quad \big|f(x)-\varphi(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration (non exigible) page 629

Remarque Le fait marquant du théorème précédent est que l'inégalité $\big|f(x)-\varphi(x)\big| \leqslant \varepsilon$ est vérifiée *pour tout* $x \in [a,b]$.



Corollaire 13

Soit $f \in \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Il existe alors une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ telle que :

$$\sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)-\varphi_n(x)\big| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, en prenant $\varepsilon = 1/(n+1)$, il existe d'après la proposition 12 une fonction en escalier φ_n telle que $|f-\varphi_n| \leqslant 1/(n+1)$. La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convient. $\square$

3 Intégrale des fonctions continues par morceaux

Définition de l'intégrale

Théorème 14

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathrm{IR})$.

Il existe alors au moins une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ de fonctions en escalier telle que :

$$\sup_{x\in[a,b]} \left|f(x)-\varphi_n(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (*)$$

De plus :

- pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ vérifiant $(*)$, la suite $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)_{n\in\mathrm{IN}}$ converge ;
- la limite de cette suite d'intégrales ne dépend pas du choix de $(\varphi_n)_{n\in\mathrm{IN}}$.

On appelle **intégrale de f** cette limite, que l'on note $\int_{[a,b]} f$.

Démonstration page 630

Remarque Si la fonction f est en escalier, la suite constante $(f)_{n\in\mathrm{IN}}$ vérifie les hypothèses du théorème 14. Il s'ensuit que l'intégrale de f en tant que fonction continue coïncide avec l'intégrale de f en tant que fonction en escalier. Ainsi, les deux définitions de l'intégrale coïncident lorsqu'elles coexistent et il n'y a pas d'ambiguïté sur la notation $\int$.

Définition 5

Soit $f : [a,b] \to \mathrm{IR}$. La **valeur moyenne** de f est $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

Remarque La valeur moyenne est la constante α qui vérifie $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \alpha$.

Propriétés de l'intégrale

Les propriétés fondamentales de l'intégrale des fonctions en escalier s'étendent à l'intégrale des fonctions continues par morceaux par simple passage à la limite.

Théorème 15 (Linéarité de l'intégrale)

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ et λ un réel. Alors :

$$\int_{[a,b]} (\lambda f) = \lambda \int_{[a,b]} f \qquad \text{et} \qquad \int_{[a,b]} (f+g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g.$$

Principe de démonstration. Par passage à la limite à partir de fonctions en escalier.

Démonstration page 631

1007 **Remarque** Nous verrons que le résultat de ce théorème traduit le fait que l'application $f \mapsto \int_{[a,b]} f$ est une application linéaire de $\mathcal{CM}([a,b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Corollaire 16

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ dont les valeurs diffèrent seulement en un nombre fini de points. Alors $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.

Démonstration. La fonction $f - g$ est en escalier, nulle sauf en un nombre fini de points. Ainsi, son intégrale est nulle $\square$

Proposition 17

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors $|f|$ est continue par morceaux et :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|.$$

Principe de démonstration. Par passage à la limite à partir de l'inégalité similaire pour les fonctions en escalier. Démonstration page 631

Proposition 18 (Positivité et croissance de l'intégrale)

Soit deux fonctions f et g continues par morceaux sur $[a,b]$.

- Si $f \geqslant 0$, alors $\int_{[a,b]} f \geqslant 0$; (positivité)
- Si $f \leqslant g$, alors $\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$. (croissance de l'intégrale)

Principe de démonstration. Pour le premier point, utiliser la proposition précédente, en remarquant que si f est à valeurs positives, alors $f = |f|$. Démonstration page 632

p.632 **Exercice 3** Retrouver le résultat de la proposition 17 à l'aide de la proposition 18 en remarquant que l'on a les inégalités $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$.

Corollaire 19 (Inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ et M une constante majorant $|f|$. Alors :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant M\,(b-a).$$

Proposition 20 (Relation de Chasles)

Soit $c \in]a,b[$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors $f_{|_{[a,c]}}$ et $f_{|_{[c,b]}}$ sont continues par morceaux et :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f_{|_{[a,c]}} + \int_{[c,b]} f_{|_{[c,b]}}.$$

Principe de démonstration. C'est une conséquence de la relation de Chasles pour les intégrales des fonctions en escalier. Démonstration page 632

Remarque Les notations ci-dessus sont un peu lourdes. Bien que cela constitue un abus de notation, on écrit en général la relation de Chasles sous la forme :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Corollaire 21

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, $\sigma = (u_0, \dots, u_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note $f_i = f_{|_{]u_i,u_{i+1}[}}$ et $\widetilde{f_i}$ le prolongement par continuité de f_i à $[u_i, u_{i+1}]$. Alors

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[u_i,u_{i+1}]} \widetilde{f_i}.$$

Démonstration page 632

III Inégalités

1 Fonctions positives

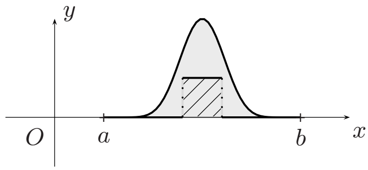
Théorème 22

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction *continue* et *positive*.

Si f est non nulle, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$.

Principe de démonstration.

Minorer f par une fonction en escalier très simple, d'intégrale strictement positive. Démonstration page 632



Corollaire 23

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction *continue* et *positive*.

Si $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$, alors f est nulle.

Remarque Il est important de retenir que ces deux derniers résultats ne s'appliquent qu'aux fonctions continues. Par exemple la fonction indicatrice de $\{0\}$ sur $[-1, 1]$ est une fonction en escalier positive, d'intégrale nulle alors qu'elle n'est pas la fonction nulle.

p.633

Exercice 4 Soit $f \in \mathcal{C}\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$.

1. On suppose que $\displaystyle\int_{[0,1]} f = 0$. Démontrer que f s'annule au moins une fois.
2. On suppose de plus que $\displaystyle\int_{[a,b]} g = 0$, où $g : t \mapsto t\, f(t)$.

   Démontrer que f s'annule au moins deux fois.

Point méthode

Le théorème précédent est un résultat très simple et efficace pour montrer qu'une intégrale est strictement positive, lorsqu'on n'a pas fait (ou pas pu faire) le calcul de celle-ci. Cette méthode est incontournable lorsque l'on ne connaît pas la valeur de l'intégrale.

p.633

Exercice 5 On pose $f : x \mapsto \ln\big(1 + \sin^3(x)\big)$ et $I = \displaystyle\int_{[0,\pi]} f$.

A-t-on $I < 0$, ou $I = 0$ ou $I > 0$?

p.633

Exercice 6 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et positive. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la fonction f est nulle sauf en un nombre fini de points ;

(ii) l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$

2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 24 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$. Alors

$$\left(\int_{[a,b]} f g\right)^2 \leqslant \left(\int_{[a,b]} f^2\right)\left(\int_{[a,b]} g^2\right)$$

Principe de démonstration. Considérer l'application $t \mapsto \int_{[a,b]} (f+tg)^2$.

Démonstration page 633

Remarque On écrit également l'inégalité de Cauchy-Schwarz sous la forme :

$$\left|\int_{[a,b]} f g\right| \leqslant \left(\int_{[a,b]} f^2\right)^{1/2}\left(\int_{[a,b]} g^2\right)^{1/2}.$$

Proposition 25 (Cas d'égalité dans le cas des fonctions continues)

Soit $[a,b]$ un segment, f et g deux fonctions de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Alors

$$\left(\int_{[a,b]} f g\right)^2 = \left(\int_{[a,b]} f^2\right)\left(\int_{[a,b]} g^2\right)$$

si, et seulement si, f et g sont proportionnelles, *i.e.* s'il existe un réel λ tel que $f = \lambda g$ ou $g = \lambda f$.

Démonstration page 634

p.634

Exercice 7 Dans quelles conditions a-t-on l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour des fonctions continues par morceaux ?

IV Extension aux fonctions à valeurs complexes

Le lecteur pourra se convaincre que toutes les définitions et tous les résultats développés dans les deux premières parties de ce chapitre se traduisent *mutatis mutandis* aux fonctions à valeurs complexes. Une exception à cette règle : les propriétés de positivité et de monotonie perdent leur sens pour les fonctions à valeurs complexes.

Proposition 26

Soit $[a,b]$ un segment et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction.

1. La fonction f est en escalier si, et seulement si, les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont en escalier.
2. La fonction f est continue par morceaux si, et seulement si, les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont continues par morceaux.

Démonstration page 634

Proposition 27

Soit $[a,b]$ un segment et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. On a alors :

1. $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \operatorname{Re} f + i \int_{[a,b]} \operatorname{Im} f$;
2. $\displaystyle\overline{\int_{[a,b]} f} = \int_{[a,b]} \overline{f}$.

Démonstration page 634

p.634

Exercice 8 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Démontrer que $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$, uniquement en utilisant cette inégalité dans le cas réel. On commencera par le cas où $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \left|\int_{[a,b]} f\right|$.

p.635

Exercice 9 Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$. Montrer que :

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right|^2 \leqslant \left(\int_{[a,b]} |f|^2\right)\left(\int_{[a,b]} |g|^2\right)$$

V Sommes de Riemann

Définition 6

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **somme de Riemann d'ordre n associée à f** la somme :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right).$$

Remarques

- Avec les notations ci-dessus, $S_n = \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)$ est l'intégrale d'une fonction en escalier g définie sur $[a,b]$ vérifiant :
$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad g_{|]u_i,u_{i+1}[} = f\,(u_i)\,,$$
où l'on a posé $u_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$.
- On trouve couramment les deux sommes :
$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right).$$
On dit également que la somme S'_n est une somme de Riemann.

Théorème 28 (Convergence des sommes de Riemann)
Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{C})$ un segment. Alors :
$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f.$$

Démonstration page 635

Exemple Puisque la la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue sur $[0,1]$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2.$$

Corollaire 29
Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{C})$ un segment. Alors :
$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que :
$$S_n - S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{f(a) - f(b)}{n}. \qquad \square$$

p.635 **Exercice 10** Donner la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$.

p.635 **Exercice 11** Soit $\alpha \geqslant 0$.

Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $S_\alpha(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 2 Soit $\sigma = (u_0, \ldots, u_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f.

Considérons une subdivision σ' de $[a, b]$ telle que $\mathrm{supp}\,(\sigma)$ contienne un point c de plus que $\mathrm{supp}\,(\sigma)$. On a $\sigma' = (u_0, \ldots, u_k, c, u_{k+1}, \ldots u_n) = (v_0, \ldots, v_{n+1})$. En distinguant selon que $i \in [\![0, k-1]\!]$, $i = k$ ou $k+1$, $i \in [\![k+2, n]\!]$, on vérifie facilement que la fonction $f_{|]v_i, v_{i+1}[}$ est constante et donc σ' est adaptée à f.

On démontre alors aisément le résultat par récurrence sur $\mathrm{card}\big(\mathrm{supp}(\sigma')\big) - \mathrm{card}\big(\mathrm{supp}(\sigma)\big)$.

Proposition 4 Soit $\sigma = (u_0, \ldots, u_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f et g (il en existe au moins une d'après le corollaire précédent). Alors, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $(\lambda f)_{|]u_i, u_{i+1}[}$ et $(f+g)_{|]u_i, u_{i+1}[}$ sont constantes. Donc σ est adaptée à λf et $f+g$.

Lemme 5 Soit $\sigma = (u_0, \ldots, u_n)$ une subdivision adaptée à f.

- Considérons d'abord une subdivision σ', plus fine que σ, contenant un point c supplémentaire. On note $\sigma' = (v_0, \ldots, v_{n+1}) = (u_0, \ldots, u_k, c, u_{k+1}, \ldots, u_n)$ et f'_i la valeur prise par f sur $]v_i, v_{i+1}[$, pour $i \in [\![0, n]\!]$. Il est clair que :
$$\forall i \in [\![0, n]\!] \quad f'_i = \begin{cases} f_i & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant k\,; \\ f_{i-1} & \text{si } k+1 \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$
où f_i est la valeur prise par f sur $]u_i, u_{i+1}[$, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$.
Par conséquent :
$$\begin{aligned} S_{\sigma'}(f) &= \sum_{i=0}^{n} (v_{i+1} - v_i)\, f'_i \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (v_{i+1} - v_i)\, f'_i + (v_{k+1} - v_k)\, f'_k + (v_{k+2} - v_{k+1})\, f'_{k+1} \\ &\qquad + \sum_{i=k+2}^{n} (v_{i+1} - v_i)\, f'_i \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (v_{i+1} - v_i)\, f_i + (v_{k+2} - v_k)\, f_k + \sum_{i=k+2}^{n} (v_{i+1} - v_i)\, f_{i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (u_{i+1} - u_i)\, f_i + (u_{k+1} - u_k)\, f_k + \sum_{i=k+2}^{n} (u_i - u_{i-1})\, f_{i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)\, f_i = S_\sigma(f). \end{aligned}$$
La conclusion s'ensuit.
- Ensuite, lorsque σ' est une subdivision plus fine que σ, on démontre le résultat par récurrence sur le nombre de points du support de σ' qui ne sont pas dans le support de σ.
- Enfin, en notant σ'' la subdivision associée à $\mathrm{supp}\,(\sigma) \cup \mathrm{supp}\,(\sigma')$, on a, du fait que σ'' est plus fine que σ et σ' :
$$S_\sigma(f) = S_{\sigma''}(f) \qquad \text{et} \qquad S_{\sigma'}(f) = S_{\sigma''}(f).$$
Ainsi, $S_\sigma(f) = S_{\sigma'}(f)$.

Proposition 6 La fonction $|f|$ est en escalier et toute subdivision de $[a,b]$ adaptée à f est adaptée à $|f|$. En considérant une subdivision $\sigma = (u_0, \dots, u_n)$ adaptée à f et, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, un point ξ_i de $]u_i, u_{i+1}[$, l'inégalité triangulaire pour une somme donne :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)\, f(\xi_i)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)\, \big|f(\xi_i)\big| = \int_{[a,b]} |f|.$$

Théorème 7 Soit $\sigma = (u_0, \dots, u_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f et, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, un point ξ_i de $]u_i, u_{i+1}[$. Alors :

$$\int_{[a,b]} (\lambda f) = \sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)\ \lambda f(\xi_i) = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)\, f(\xi_i) = \lambda \int_{[a,b]} f.$$

De même, lorsque σ est adaptée à f et g, on a :

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} (f+g) &= \sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)\, \big(f(\xi_i) + g(\xi_i)\big) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)\, f(\xi_i) + \sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)\, g(\xi_i) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g.\end{aligned}$$

Proposition 9 Soit $\sigma = (u_0, \dots, u_n)$ une subdivision adaptée à f. Quitte à rajouter c au support de σ, on peut supposer que c fait partie de la subdivision. En supposant que $c = u_k$ pour un $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f &= \sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)\, f(\xi_i) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (u_{i+1} - u_i)\, f(\xi_i) + \sum_{i=k}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)\, f(\xi_i) \\ &= \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}.\end{aligned}$$

Exercice 1

- On a, pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0,1] \,; \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } x \in]-1,0] \,; \\ 1 & \text{si } x = -1. \end{cases}$$

  La fonction n'est pas continue par morceaux, car $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

- En considérant les suites $\left(\frac{1}{2n\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, on dispose de deux suites convergeant vers 0 par valeurs supérieures et dont les images par f ont des limites distinctes, respectivement 0 et 1. Par conséquent f n'a pas de limite à droite en 0. La fonction n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$.

Proposition 10 Soit $f \in \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et $(u_0,\ldots,u_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, la fonction $f_i = f_{|]u_i,u_{i+1}[}$ admet un prolongement par continuité $\widetilde{f_i}$ sur le segment $[u_i,u_{i+1}]$. Par le théorème 45 de la page 514, la fonction $\widetilde{f_i}$ est bornée ; il existe donc M_i tel que pour tout $x \in]u_i,u_{i+1}[$ on ait $\big|f(x)\big| \leqslant M_i$.
Il est alors clair que pour tout $x \in [a,b]$ on a :

$$\big|f(x)\big| \leqslant \max\Big\{M_0,\ldots,M_{n-1},\big|f(a_0)\big|,\ldots,\big|f(a_n)\big|\Big\}.$$

Proposition 11 Soit $\sigma = (a_0,\ldots,a_n)$ une subdivision adaptée à f et g. Puisque, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, les restrictions $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ et $g_{|]a_i,a_{i+1}[}$ ont des prolongement par continuité sur $[a_i,a_{i+1}]$, il en est de même des fonctions $(\lambda f)_{|]a_i,a_{i+1}[}$, $(f+g)_{|]a_i,a_{i+1}[}$ et $(f\,g)_{|]a_i,a_{i+1}[}$.

Exercice 2

1. Non. On peut construire un contre-exemple à partir de la fonction partie entière et d'une fonction qui change de signe « une infinité de fois au voisinage de 0 ». Par exemple, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Elle est continue en 0 (ce que l'on peut démontrer en remarquant que $\big|f(x)-f(0)\big| \leqslant |x|$) et elle est évidemment continue sur $\mathbb{R}^*$. La fonction $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux. Enfin, la fonction $h : x \mapsto \lfloor f(x) \rfloor$, définie sur $\mathbb{R}$, n'a pas de limite à droite en 0. En effet :
$$\lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{2}{(4n+3)\pi}\right) = -1.$$
2. Non. La fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$ est continue par morceaux, à valeurs dans $]0,1]$. La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0,1]$ est continue. En revanche $\lim\limits_{x\to 0^+} g\circ f(x) = +\infty$, ce qui montre que $g\circ f$ n'est pas continue par morceaux.

Proposition 12

Cas des fonctions continues. Soit ε un réel strictement positif. D'après le théorème de Heine (*cf.* le théorème 50 de la page 518), f est uniformément continue et donc il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$, on ait $\big|f(x)-f(y)\big| \leqslant \varepsilon$ dès que $|x-y| \leqslant \eta$. Fixons η. Il existe un entier naturel n tel que $0 \leqslant \frac{b-a}{n} \leqslant \eta$. On fixe également n. Notons $a_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ et posons φ la fonction en escalier sur $[a,b]$ définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} f\,(a_k) & \text{si } k \in [\![0,n-1]\!] \text{ et } x \in [a_k,a_{k+1}[\,; \\ f(b) & \text{si } x = b. \end{cases}$$

Il est clair que $f(b) - \varphi(b) = 0$. Pour tout $x \in [a,b[$, il existe un unique k tel que $x \in [a_k,a_{k-1}[$, et puisque $|x-a_k| \leqslant \frac{b-a}{n} \leqslant \eta$:

$$\big|f(x)-\varphi(x)\big| = \big|f(x)-f(a_k)\big| \leqslant \varepsilon.$$

La fonction φ répond donc au problème.

Cas des fonctions continues par morceaux Considérons $\sigma = (u_0, \ldots, u_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f et notons, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction f_i de la fonction f à $]u_i, u_{i+1}[$. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, notons $\widetilde{f_i}$ le prolongement par continuité sur $[u_i, u_{i+1}]$ de f_i. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la première partie de l'étude, il existe, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, une fonction en escalier φ_i telles que $|\widetilde{f_i} - \varphi_i| \leqslant \varepsilon$. Considérons la fonction φ définie sur $[a,b]$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_k(x) & \text{si } k \in [\![0, n-1]\!] \text{ et } x \in \,]u_k, u_{k+1}[\,; \\ f(a_k) & \text{si } x = u_k \text{ et } k \in [\![0, n]\!]. \end{cases}$$

La fonction φ répond au problème.

Théorème 14 L'existence est assurée par le corollaire 13 de la page 619.

Notons $\alpha_n = \sup\limits_{x \in [a,b]} \bigl|f(x) - \varphi_n(x)\bigr|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $*$ Montrons que la suite $\left(\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. En effet $|f|$ est bornée par une constante M (*cf.* la proposition 10 de la page 618). Ainsi, pour tout $x \in [a,b]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

  $$|\varphi_n(x)| = \Bigl|f(x) + \bigl(\varphi_n(x) - f(x)\bigr)\Bigr| \leqslant \bigl|f(x)\bigr| + \bigl|\varphi_n(x) - f(x)\bigr| \leqslant M + \alpha_n,$$

  et donc, d'après les propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier :

  $$\left|\int_{[a,b]} \varphi_n\right| \leqslant (b-a)\bigl(M + \alpha_n\bigr).$$

  On conclut en remarquant que la suite $(\,\alpha_n\,)_{n \in \mathbb{N}}$, étant convergente, est bornée.

  $*$ D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß (*cf.* le théorème 37 de la page 416), il existe une extraction ψ telle que la suite $\left(\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_{\psi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente.

  Notons L sa limite.
  Par ailleurs, pour tout $x \in [a,b]$ et $n \in \mathbb{N}$:

  $$\bigl|\varphi_n(x) - \varphi_{\psi(n)}(x)\bigr| \leqslant \bigl|\varphi_n(x) - f(x)\bigr| + \bigl|f(x) - \varphi_{\psi(n)}(x)\bigr| \leqslant \alpha_n + \alpha_{\psi(n)},$$

  et par conséquent :

  $$\left|\int_{[a,b]} \varphi_n - \int_{[a,b]} \varphi_{\psi(n)}\right| = \left|\int_{[a,b]} \bigl(\varphi_n - \varphi_{\psi(n)}\bigr)\right| \leqslant (b-a)\bigl(\alpha_n + \alpha_{\psi(n)}\bigr).$$

  Puisque $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et, par extraction, $\alpha_{\psi(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_n = L$.

- Soit $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une autre suite de fonctions en escalier telle que :

  $$\sup_{x \in [a,b]} \bigl|f(x) - \psi_n(x)\bigr| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Notons $\beta_n = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f(x) - \psi_n(x)\right|$, pour $n \in \mathbb{N}$.

En remarquant que, pour tout $x \in [a,b]$, on a pour tout entier n :

$$\left|\varphi_n(x) - \psi_n(x)\right| \leqslant \left|\varphi_n(x) - f(x)\right| + \left|\psi_n(x) - f(x)\right| \leqslant \alpha_n + \beta_n,$$

on obtient :

$$\left|\int_{[a,b]} \varphi_n - \int_{[a,b]} \psi_n\right| \leqslant (b-a)\left(\alpha_n + \beta_n\right),$$

et donc $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_n - \int_{[a,b]} \psi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi $\displaystyle\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\displaystyle\left(\int_{[a,b]} \psi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même limite.

Théorème 15 On introduit deux suites de fonctions en escaliers $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $|f-\varphi_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$ et $|g-\psi_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$ (*cf.* le corollaire 13 de la page 619). Toutes les fonctions $\varphi_n + \psi_n$ sont en escalier (*cf.* le théorème 4 de la page 615). De plus, pour tout $x \in [a,b]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|(\varphi_n + \psi_n)(x) - (f+g)(x)\right| \leqslant \left|\varphi_n(x) - f(x)\right| + \left|\psi_n(x) - g(x)\right| \leqslant \frac{2}{n+1},$$

et par conséquent :

$$0 \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \left|(f+g-\varphi_n+\varphi_n)(x)\right| \leqslant \frac{2}{n+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La suite de fonctions en escaliers $(\varphi_n+\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses du théorème 14 de la page 620 pour $f+g$. On conclut alors à l'aide de la propriété de linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier que $\displaystyle\int_{[a,b]} (f+g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$.

Proposition 17 Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier telle que $\left|\varphi_n - f\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$ (*cf.* le corollaire 13 de la page 619). Pour tout $x \in [a,b]$ et $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité triangulaire donne :

$$\Big|\left|\varphi_n(x)\right| - \left|f(x)\right|\Big| \leqslant \left|\varphi_n(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent $\left(|\varphi_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} \Big|\left|\varphi_n(x)\right| - \left|f(x)\right|\Big| = 0.$$

En particulier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} |\varphi_n| = \int_{[a,b]} |f|$. Le résultat s'obtient alors en passant à la limite dans l'inégalité $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} \varphi_n\right| \leqslant \int_{[a,b]} |\varphi_n|$, inégalité valable pour toute fonction en escalier. (*cf.* la proposition 6 de la page 616).

Proposition 18

- Soit $f \in \mathcal{CM}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$, à valeurs positives. On a $f = |f|$. Par ailleurs, d'après la proposition précédente, $0 \leqslant \left|\displaystyle\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \displaystyle\int_{[a,b]} |f|$, et par conséquent :
$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} |f| \geqslant \left|\int_{[a,b]} f\right| \geqslant 0.$$
- Même démonstration que dans le cas des fonctions en escalier.

Exercice 3 En effet, par propriété de linéarité et par croissance de l'intégrale :
$$-\int_{[a,b]} |f| \leqslant \int_{(a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} |f|.$$

Proposition 20 On sait que les restrictions sont continues par morceaux.

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier telle que $|f - \varphi_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

On a évidemment, pour tout entier naturel n :
$$\left|f_{|[a,c]} - \varphi_{n}{}_{|[a,c]}\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \left|f_{|[c,b]} - \varphi_{n}{}_{|[c,b]}\right| \leqslant \frac{1}{n+1},$$
donc $\displaystyle\int_{[a,c]} \varphi_{n}{}_{|[a,c]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,c]} f_{|[a,c]}$, $\displaystyle\int_{[c,b]} \varphi_{n}{}_{|[c,b]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$

et $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f$.

Par conséquent, la relation de Chasles pour les intégrales des fonctions en escalier permet d'établir :
$$\int_{[a,b]} \varphi_n = \int_{[a,c]} \varphi_{n}{}_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} \varphi_{n}{}_{|[c,b]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$$
et donc :
$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}.$$

Corollaire 21 D'après la relation de Chasles :
$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[u_i,u_{i+1}]} f_{|[u_i,u_{i+1}]}.$$

Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, les fonctions $\widetilde{f}_i$ et $f_{|[u_i,u_{i+1}]}$ sont deux fonctions continues par morceaux qui diffèrent en au plus deux points. Leurs intégrales sont donc égales.

Théorème 22 Si f est non nulle, il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) > 0$ (f est à valeurs positives). Par continuité de f en x, il existe $\eta > 0$ tel que $f(t) \geqslant f(x)/2$ pour tout $t \in [a,b] \cap [x-\eta, x+\eta]$. La fonction g définie sur $[a,b]$ par :
$$g(t) = \begin{cases} f(x)/2 & \text{si } t \in [a,b] \cap [x-\eta, x+\eta]\ ; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
est en escalier et vérifie $f \geqslant g$. On conclut par croissance de l'intégrale, en remarquant que $\displaystyle\int_{[a,b]} g = \lambda f(x)/2 > 0$, où λ est la longueur de l'intervalle $[a,b] \cap [x-\eta, x+\eta]$.

Exercice 4

1. Par l'absurde. Si f ne s'annule pas, elle garde d'après le théorème des valeurs intermédiaires (*cf.* page 511) un signe strict, que l'on peut supposer positif. D'après la proposition qui précède, on aurait alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$.
2. Supposons que f ne s'annule qu'une seule fois, en un point c. Les restrictions $f_{|[0,c]}$ et $f_{|[c,1)}$ ont des signes fixes et, d'après la question précédente, distincts. Alors la fonction $h : t \mapsto (t-c)f(t)$ serait continue, ayant un signe fixe. Par linéarité $\displaystyle\int_{[a,b]} h = 0$ et donc $h = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse émise.

Exercice 5 La fonction f est continue, en vertu des théorème généraux. Puisque $\sin(x)$ est positif pour tout $x \in [0,\pi]$, elle est positive. Elle ne s'annule qu'en 0 et π ; f n'est pas nulle. Par conséquent $I > 0$.

Exercice 6 Deux méthodes pour démontrer $(ii) \Rightarrow (i)$, l'autre implication étant immédiate.

1. L'examen de la démonstration de la proposition 22 donne que si f est une fonction continue par morceaux *positive* et que s'il existe un point de continuité x pour f tel que $f(x) > 0$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$. On conclut en remarquant qu'une fonction continue par morceaux a un nombre fini de points de discontinuité.
2. En considérant une subdivision adaptée, avec les notations du corollaire 21 de la page 622, on a :
$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[u_i,u_{i+1}]} \widetilde{f}_i.$$
On a une somme de termes positifs qui est nulle : tous les termes sont donc nuls. La proposition 22 de la page 622 implique que toutes les fonctions $\widetilde{f}_i$ sont nulles et donc $f(x) = 0$ pour tout point de $[a,b]$ qui n'est pas un point de la subdivision.

Théorème 24 Posons, pour tout t réel, $p_t : x \mapsto \big(f(x) + tg(x)\big)^2$. Pour tout t, la fonction p_t est continue par morceaux, à valeurs positives. Posons $P(t) = \displaystyle\int_{[a,b]} p_t$. Puisque $p_t(x) = f^2(x) + 2\,t\,f(x)\,g(x) + t^2 g^2(x)$, on a par propriété de linéarité :
$$P(t) = \int_{[a,b]} f^2 + 2\,t \int_{[a,b]} fg + t^2 \int_{[a,b]} g^2.$$

Cas où $\displaystyle\int_{[a,b]} g^2$ est nul La fonction affine P est à valeurs positives sur IR tout entier.

Nécessairement $\displaystyle\int_{[a,b]} fg = 0$. (On peut raisonner par l'absurde et considérer les limites de P en $+\infty$ et $-\infty$). On a alors égalité.

Cas où $\int_{[a,b]} g^2$ est non nul La fonction polynomiale P du second degré est à valeurs positives sur tout $\mathbb{R}$. Par conséquent le discriminant

$$\Delta = 4\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 - 4\left(\int_{[a,b]} f^2\right)\left(\int_{[a,b]} g^2\right)$$

est négatif, ce qui fournit l'inégalité souhaitée.

Proposition 25

- Si f et g sont proportionnelles, alors l'égalité se démontre par un simple calcul.
- Supposons que l'égalité soit vérifiée.
  - ∗ Si $\int_{[a,b]} g^2 = 0$, alors $g = 0$ (*cf.* proposition 22) et donc $g = 0\,f$.
  - ∗ Si $\int_{[a,b]} g^2 > 0$, alors, avec les notations de théorème précédent, $\Delta = 0$ et donc P admet une racine réelle. Il existe t_0 tel que p_{t_0} ait son intégrale nulle. Comme p_{t_0} est une fonction continue positive, d'après le théorème 22 de la page 622, p_{t_0} est nulle. En d'autres termes $f = t_0\,g$.

Exercice 7 L'examen de la démonstration précédente montre qu'il y a égalité si, et seulement s'il existe un réel λ tel que $\int_{[a,b]}(f-\lambda g)^2 = 0$ ou bien si $\int_{[a,b]} g^2 = 0$. Ainsi, d'après l'exercice 6, on a égalité si, et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda g$ sauf en un nombre fini de points, ou tel que $g = \lambda f$ sauf en un nombre fini de points.

Proposition 26

1. C'est immédiat.
2. C'est une conséquence du fait qu'une fonction à valeurs complexes admet une limite en un point si, et seulement si, les parties réelles et imaginaires ont une limite en ce point.

Proposition 27 Notons $A = \int_{[a,b]} \operatorname{Re} f$ et $B = \int_{[a,b]} \operatorname{Im} f$.

1. Il suffit d'utiliser la relation $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$.
2. Par linéarité :

$$\overline{\int_{[a,b]} f} = \overline{A+iB} = A - iB = \int_{[a,b]} (\operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f) = \int_{[a,b]} \overline{f}.$$

Exercice 8 Notons $A = \int_{[a,b]} \operatorname{Re} f$ et $B = \int_{[a,b]} \operatorname{Im} f$.

Si $\int_{[a,b]} f = \left|\int_{[a,b]} f\right|$, alors $A + iB = |A+iB|$. Par conséquent, $B = 0$ et $A \geqslant 0$. En remarquant que $\operatorname{Re} f \leqslant |f|$, on a :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| = |A+iB| = \int_{[a,b]} \operatorname{Re} f \leqslant \int_{[a,b]} |f|.$$

Dans le cas général, soit $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$, et alors l'inégalité est évidemment vérifiée, soit $\displaystyle\int_{[a,b]} f \neq 0$. Dans ce cas, en considérant φ un argument de $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, on a :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} f\, e^{-i\varphi} = \left|\int_{[a,b]} f\, e^{-i\varphi}\right|,$$

et donc, en utilisant le premier cas :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| = \left|\int_{[a,b]} f\, e^{-i\varphi}\right| \leqslant \int_{[a,b]} \left|f\, e^{-i\varphi}\right| = \int_{[a,b]} |f|.$$

Exercice 9 Il suffit que remarquer que $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|\,|g|$ et d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas réel aux fonctions $|f|$ et $|g|$.

Théorème 28 La démonstration n'est exigible que dans le cas où la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et fera l'objet de la proposition 19 de la page 661 du chapitre 12. Nous en donnons néanmoins une démonstration dans le cas plus général où la fonction f est continue.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et notons φ_n la fonction en escalier définie sur $[a,b]$ par :

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} f(a_k) & \text{si } k \in [\![0, n-1]\!] \text{ et } x \in [a_k, a_{k+1}[\,; \\ f(b) & \text{si } x = b. \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Lors de la démonstration du théorème d'approximation (*cf.* la proposition 12 de la page 619), nous avons vu qu'il existait une entier n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, on ait $|f - \varphi_n| \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, pour $n \geqslant n_0$, par croissance de l'intégrale :

$$\left|\int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \varphi_n\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f - \varphi_n| \leqslant \int_{[a,b]} \varepsilon = (b-a)\varepsilon.$$

On conclut alors en remarquant que $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

Exercice 10 On a que $S_n = \dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}$ est la somme de Riemann à l'ordre n de f, où f est l'application continue définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = \sin x$. Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \displaystyle\int_{[0,\pi]} f = 2$ (nous anticipons un peu sur les résultats du chapitre suivant). Il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = +\infty$.

Exercice 11 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $\dfrac{1}{n^{\alpha+1}} S_n$ est une somme de Riemann d'ordre n de la fonction continue f_α définie sur $[0,1]$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha$. Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} S_n = \int_{[0,1]} f_\alpha = \frac{1}{\alpha+1} \qquad \text{et ainsi} \qquad S_\alpha(n) \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

S'entraîner et approfondir

Pour la résolution des exercices, on pourra utiliser le fait que si f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$, $\int_{[a,b]} f = F(b)-F(a)$, où F est une primitive de f (*cf.* le chapitre 5). On trouvera également parfois la notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pour désigner l'intégrale de f sur $[a,b]$

11.1 Soit $f \in \mathcal{CM}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ telle que $f\big([0,1]\big) \subset [a,b]$ et $\int_{[a,b]} f = 0$.

Montrer que $\int_{[0,1]} f^2 \leqslant -ab$.

Indication. Considérer $(f-a)(b-f)$.

11.2 *Formule de la moyenne.* Soient f et g deux applications définies sur $[a,b]$, la fonction f étant continue et la fonction g étant positive et continue par morceaux.

1. Montrer qu'il existe c dans $[a,b]$ tel que :

$$\int_{[a,b]} f\,g = f(c)\int_{[a,b]} g.$$

2. On suppose de plus g continue et strictement positive. Montrer qu'il existe c dans $]a,b[$ tel que :

$$\int_{[a,b]} f\,g = f(c)\int_{[a,b]} g.$$

11.3 1. Soit $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Montrer que $\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f|$ si, et seulement si, f garde un signe fixe.

2. Soit $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f|$.

On commencera par se ramener au cas où $\int_{[a,b]} f = \left|\int_{[a,b]} f\right|$.

★★ **11.4** Soit $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}_+\big)$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{[a,b]} f^n\right)^{1/n} = \sup_{x\in[a,b]}\big|f(x)\big|.$$

11.5 Soit $f\,:\,[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On pose, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $I_n = \int_{[0,1]} |f|^n$.

Démontrer que, pour tout $n\geqslant 1$, $I_n^2 \leqslant I_{n-1}I_{n+1}$.

⋆ **11.6** Soit f une fonction continue réelle continue, définie sur $[0,1]$, telle que $f(1)=0$.

1. Démontrer que, pour tout $\alpha \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\displaystyle\int_0^{\alpha} t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\displaystyle\int_0^{1} t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

11.7 Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs strictement positives. On pose, pour $f\in\mathcal{E}$:

$$\varphi(f) = \left(\int_{[a,b]} f\right)\left(\int_{[a,b]} \frac{1}{f}\right).$$

Déterminer, si elle est définie, $\inf\limits_{f\in\mathcal{E}} \varphi(f)$.

11.8 Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = \big((n+1)(n+2)\dots(n+n)\big)^{\frac{1}{n}}.$$

Trouver un équivalent de u_n.

11.9 Soit $[a,b]$ un segment. Une fonction définie sur $[a,b]$ est en escalier si, et seulement s'il existe $n\in\mathbb{N}^*$, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et des sous-intervalles $I_1,\dots,I_n$ de $[a,b]$ tels que

$$f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbb{1}_{I_k}.$$

11.10 1. Soit $f\in\mathcal{C}^1\big([a,b],\mathbb{C}\big)$. Démontrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\,e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

On fera une intégration par parties (*cf.* la proposition 7 de la page 255).

2. Soit $f\in\mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$. Démontrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\,e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

On commencera par le cas où f est la fonction indicatrice d'un sous-intervalle de $[a,b]$.

3. Soit $f\in\mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$. Démontrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\,e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

11.11 Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$.

Étudier :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)|\sin nt|\,\mathrm{d}t.$$

Solution des exercices

11.1 Posons $g : x \mapsto (f(x)-a)(b-f(x))$. Avec les hypothèses de l'énoncé, g est une fonction continue, positive. Par croissance de l'intégrale, nous obtenons, par propriété de linéarité :

$$0 \leqslant \int_{[0,1]} g = \int_{[0,1]} \big(bf + af - ab - f^2\big) = -ab - \int_{[0,1]} f^2.$$

C'est l'inégalité demandée.

11.2 1. La fonction f étant continue à valeurs réelles, l'image du segment $[a,b]$ est un segment $[m,M]$. Puisque g est à valeurs positives on a $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Par croissance de l'intégrale :

$$m\int_{[a,b]} g \leqslant \int_{[a,b]} fg \leqslant M\int_{[a,b]} g.$$

Ainsi, si $\displaystyle\int_{[a,b]} g = 0$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} fg = 0$ et la relation $\displaystyle\int_{[a,b]} fg = f(c)\int_{[a,b]} g$ est vérifiée pour tout $c \in [a,b]$. Sinon :

$$\frac{\displaystyle\int_{[a,b]} fg}{\displaystyle\int_{[a,b]} g} \in [m,M]$$

et donc, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \dfrac{\int_{[a,b]} fg}{\int_{[a,b]} g}$.

2. Si f est constante sur $[a,b]$, le résultat est évident. Sinon, on montre que la constante :

$$k = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx}$$

est nécessairement dans $]m,M[$. En effet, si par exemple $\displaystyle\int_{[a,b]} fg = m\int_{[a,b]} g$ alors la fonction $x \mapsto f(x)g(x) - mg(x)$ est continue positive, d'intégrale nulle donc est nulle sur $[a,b]$, ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse que f n'est pas constante et que g est continue à valeurs strictement positive.

Enfin si $k \in\,]m,M[$, alors on montre qu'il existe $c \in\,]a,b[$ tel que $f(c) = k$ en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre deux points où f atteint son minimum et son maximum.

11.3 1. L'égalité est immédiate si f a un signe fixe, car alors soit $f = |f|$, soit $f = -|f|$.

Supposons $\left|\displaystyle\int_{[a,b]} f\right| = \displaystyle\int_{[a,b]} |f|$. Les fonctions $f^+ = \frac{1}{2}\big(f + |f|\big)$ et $f^- = \frac{1}{2}\big(f + |f|\big)$ sont continues, positives, avec $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

En notant $A = \displaystyle\int_{[a,b]} f^+$ et $B = \displaystyle\int_{[a,b]} f^-$, la fonction f vérifie $|A - B| = A + B$.

En distinguant selon que $A \geqslant B$, ou $B \geqslant A$, on obtient que $A = 0$ ou $B = 0$. Dans le cas où $A = 0$, f^+ est une fonction continue positive d'intégrale nulle, donc nulle ; en d'autres termes $f = -f^-$ est négative. On procède de la même manière lorsque $B = 0$.

2. Posons cette fois $A = \displaystyle\int_{[a,b]} \operatorname{Re} f$ et $B = \displaystyle\int_{[a,b]} \operatorname{Im} f$. Montrons que l'égalité a lieu si, et seulement s'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $f = e^{i\varphi}|f|$.

   Supposons en un premier temps que $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} |f|$. Alors $A + iB = \displaystyle\int_{[a,b]} |f|$, ce qui impose que $B = 0$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} \big(|f| - \operatorname{Re}(f)\big) = 0$. Puisque $|f| - \operatorname{Re} f$ est une fonction continue à valeurs positives, on a $|f| = \operatorname{Re} f$, et donc que f est une fonction réelle à valeurs positives, *i.e.* $f = |f|$.

   Dans le cas général, on peut supposer $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ non nulle (sinon $f = 0$ et la conclusion est vérifiée). On se ramène alors au cas précédent en introduisant φ un argument de $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ et en considérant $\displaystyle\int_{[a,b]} f e^{-i\varphi}$.

11.4 Notons $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ et $u_n = \left[\displaystyle\int_{[a,b]} f^n\right]^{\frac{1}{n}}$.

On a $\forall x \in [a,b] \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant M$ d'où $\displaystyle\int_{[a,b]} f^n \leqslant M^n\,(b-a)$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leqslant M(b-a)^{\frac{1}{n}}.$$

La fonction f étant continue sur $[a,b]$, le réel M est atteint en un point c de $[a,b]$. Fixons $\varepsilon > 0$, et posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M+1}$.
Il existe un segment I, non réduit à un point , contenant c et inclus dans $[a,b]$ tel que :

$$\forall x \in I \quad f(x) \geqslant M - \varepsilon'.$$

Soit η la longueur du segment I. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left[\int_{[a,b]} f^n\right]^{\frac{1}{n}} \geqslant \eta^{\frac{1}{n}}(M - \varepsilon').$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \eta^{\frac{1}{n}} = 1$, donc il existe n_2 tel que $n \geqslant n_2 \Longrightarrow \eta^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 - \varepsilon'$. On a alors :

$$u_n \geqslant (1 - \varepsilon')(M - \varepsilon') \geqslant M - (M+1)\varepsilon' = M - \varepsilon.$$

De plus, il existe n_1 tel que $n \geqslant n_1 \Longrightarrow M(b-a)^{\frac{1}{n}} \leqslant M + \varepsilon$.
Finalement :

$$n \geqslant \max(n_1, n_2) \Longrightarrow M - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant M + \varepsilon,$$

ce qui prouve la convergence de la suite vers M.

11.5 Pour tout réel positif, $\big|f(t)\big|^n = \big|f(t)\big|^{\frac{n+1}{2}}\,\big|f(t)\big|^{\frac{n-1}{2}}$.
On conclut grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

11.6 1. Notons M un majorant de $|f|$ sur $[a,b]$; un tel majorant existe, puisque f est continue, définie sur un segment. Alors, pour tout $\alpha \in [0,1[$:

$$0 \leqslant \left| n \int_0^\alpha x^n f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_0^\alpha n x^n\, M\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1} M\,\alpha^{n+1} \leqslant M_{,}\alpha^{n+1}.$$

Puisque $\alpha \in [0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^{n+1} = 0$ et donc par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_0^\alpha x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en 1 et que $f(1) = 0$, il existe $\alpha \in [0,1[$, tel que pour tout $t \in [\alpha, 1]$ on ait $|f(t)| \leqslant \varepsilon/2$. Par conséquent :

$$0 \leqslant \left| n \int_\alpha^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_\alpha^1 n x^n\, \varepsilon\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 n x^n\, \varepsilon\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}\,\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs, α étant fixé, il existe d'après la première question un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $\left| n \int_0^\alpha x^n f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\left| n \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \left| n \int_0^\alpha x^n f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \left| n \int_\alpha^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \varepsilon.$$

En conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} n \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

11.7 On a :

$$\int_{[a,b]} f \int_{[a,b]} \frac{1}{f} \geqslant 0$$

ce qui assure l'existence de la borne inférieure.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_{[a,b]} f \int_{[a,b]} \frac{1}{f} \geqslant \left(\int_{[a,b]} \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{f}} \right)^2 = (b-a)^2.$$

Il y a égalité dans le cas où est constante. Ainsi, la borne inférieure est $(b-a)^2$.
On remarque qu'il y a égalité si, et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{f} = \lambda \dfrac{1}{\sqrt{f}}$, c'est-à-dire si et seulement si, f est constante.

11.8 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \left(\prod_{k=1}^n (n+k) \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{k=1}^n \left(n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right) \right)^{\frac{1}{n}} = n \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Considérons :

$$\ln u_n = \ln n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n} \right).$$

Or $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann qui converge vers :

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = 2\ln 2 - 1.$$

On a donc $\ln u_n = \ln n + 2\ln 2 - 1 + v_n$ où (v_n) est une suite qui tend vers 0.

On conclut que $u_n \sim \dfrac{4}{e}n$.

11.9 Il est clair qu'une fonction indicatrice d'un sous-intervalle de $[a,b]$ est une fonction en escalier. En vertu du théorème 4 de la page 615, toute fonction pour laquelle il existe $n \in \mathbb{N}$, I_1, I_2,..., I_n sous-intervalles de $[a,b]$ et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{I_i}$ est une fonction en escalier.

Soit f une fonction en escalier et $\sigma = (u_0,\ldots,u_n)$ une subdivision adaptée. Il est facile de vérifier que :

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} f(b_i)\mathbb{1}_{]u_i,u_{i+1}[} + \sum_{i=0}^{n} f(u_i)\mathbb{1}_{\{u_i\}},$$

où pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, le réel b_i est un point quelconque de $]u_i,u_{i+1}[$.

11.10 1. Supposons $\lambda > 0$. La fonction $u : t \mapsto \dfrac{e^{i\lambda t}}{i\lambda}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $u' : t \mapsto e^{i\lambda t}$. Ainsi, une intégration par parties donne :

$$\int_a^b f(t)\,e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[f(t)\,\frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda}\right]_a^b - \frac{1}{i\lambda}\int_a^b f'(t)\,e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

L'inégalité triangulaire et l'inégalité de la moyenne donnent :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \frac{|f(a)|+|f(b)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\left|\int_a^b f'(t)\,e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{|f(a)|+|f(b)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

2. Soit $J \subset [a,b]$ un intervalle d'extrémités c et d. Pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$\int_a^b \mathbb{1}_J(x)e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{i\lambda d} - e^{i\lambda c}}{i\lambda},$$

et donc :

$$\left|\int_a^b \mathbb{1}_J(x)e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{|\lambda|}.$$

Par conséquent, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_a^b \mathbb{1}_J(x)e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}x = 0$. Puisque toute fonction en escalier s'écrit comme une combinaison finie de fonctions indicatrices (*cf.* exercice 11.9), on obtient que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(x)\,e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}x = 0$, pour toute $f \in \mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème d'approximation, il existe une fonction en escalier g telle que $|f-g| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\, e^{i\lambda x}\, \mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\, e^{i\lambda x}\, \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\, e^{i\lambda x}\, \mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_a^b \left|\big(f(x)-g(x)\big)\, e^{i\lambda x}\right|\, \mathrm{d}x + \left|\int_a^b g(x)\, e^{i\lambda 1 x}\, \mathrm{d}x\right| \\
&= \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\, \mathrm{d}x + \left|\int_a^b g(x)\, e^{i\lambda x}\, \mathrm{d}x\right| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b g(x)\, e^{i\lambda x}\, \mathrm{d}x\right|.
\end{aligned}$$

Enfin, g étant fixé, d'après la première question il existe un réel λ_0 tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda_0$, on ait :

$$\left|\int_a^b g(x) e^{i\lambda x}\, \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc, pour $\lambda \geqslant \lambda_0$:

$$\left|\int_a^b f(x) e^{i\lambda x}\, \mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon.$$

11.11 On montre d'abord que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |\sin(nt)|\, \mathrm{d}t = \frac{2(b-a)}{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_a^b \mathrm{d}t.$$

En effet, si k est la partie entière de $\dfrac{n(b-a)}{\pi}$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b |\sin nt|\, \mathrm{d}t &= \sum_{l=0}^{k-1} \int_{a+l\frac{\pi}{n}}^{a+(l+1)\frac{\pi}{n}} |\sin nt|\, \mathrm{d}t + \int_{a+k\frac{\pi}{n}}^{b} |\sin nt|\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{k}{n}\int_0^\pi |\sin t|\, \mathrm{d}t + \int_{a+k\frac{\pi}{n}}^{b} |\sin nt|\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Le premier terme tend vers $\dfrac{2}{\pi}(b-a)$ et le second vers 0.

On montre ensuite que si φ est une fonction en escalier sur $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b \varphi(t)|\sin nt|\, \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(t)\, \mathrm{d}t.$$

On montre le même résultat pour une fonction continue par morceaux, en l'encadrant par deux fonctions en escalier.

Chapitre 12 : Calcul intégral

I Notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 644
1 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle 644
2 Intégrale entre deux bornes 645
II Intégration et dérivation 647
1 Primitives 647
2 Applications 648
3 Inégalité des accroissements finis 650
III Calcul d'intégrales 650
1 Intégration par parties 650
2 Changement de variable 651
IV Formules de Taylor 657
1 Formules globales 657
2 Formule locale 659
V Application aux méthodes numériques 660
1 Intégration numérique 660
2 Résolution approchée d'équation : méthode de Newton 663
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 664
Exercices 682

Calcul intégral

12

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La notation I désigne un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.

I Notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

1 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition 1

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est **continue par morceaux** si, pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, la restriction $f_{|[a,b]}$ est continue par morceaux.

Notation L'ensemble des fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{K}$ définies sur l'intervalle I est encore noté $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$.

1001 **Remarque** Nous verrons que l'ensemble $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ et un anneau.

Exemples

- La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ est continue par morceaux sur l'intervalle $]0,1]$. En effet les points de discontinuité de la fonction partie entière sont les entiers. Il s'ensuit que les points de discontinuité de f sont dans $\left\{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Par conséquent, pour tout $[a,b] \subset\,]0,1]$, $f_{|[a,b]}$ a au plus $\left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor$ points de discontinuité. Enfin, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{x \to \frac{1}{n}^+} f(x) = 1$, alors que $\lim\limits_{x \to \frac{1}{n}^-} f(x) = 0$. La conclusion en découle.

2 Intégrale entre deux bornes

Nous avons vu au chapitre 11 la relation de Chasles sur les intégrales. Rappelons que si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ et si $a<c<b$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$. $\qquad (*)$

Cette formule peut se réécrire de plusieurs manières, par exemple :

$$\int_{[a,c]} f = \int_{[a,b]} f - \int_{[c,b]} f \qquad \text{ou} \qquad \int_{[c,b]} f = \int_{[a,b]} f - \int_{[a,c]} f.$$

Pour plus de souplesse et pour pouvoir écrire une formule analogue à la formule $(*)$ sans avoir à constamment tenir compte de l'ordre des points, on introduit une convention de signe.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et $(a,b)\in I^2$. On sait que si $a<b$, l'intégrale $\int_{[a,b]} f$ est définie. De même si $b<a$, l'intégrale $\int_{[b,a]} f$ est définie. L'**intégrale de f entre a et b**, notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\displaystyle\int_a^b f$, est définie par :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a<b\,; \\ -\int_{[b,a]} f & \text{si } b<a\,; \\ 0 & \text{si } a=b. \end{cases}$$

Remarque Dans la notation $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, la lettre x est évidemment « muette ». On peut évidemment utiliser d'autres lettres.

La valeur de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est, au signe près, celle de l'intégrale de f restreinte au segment $[a,b]$ ou $[b,a]$. On a, dans tous les cas :

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Il est facile de vérifier que, pour tout $(a,b)\in I^2$, l'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ conserve la propriété de linéarité (*cf.* le théorème 15 de la page 620).

Attention

- La notation $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est réservée aux intégrales des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$, avec $a<b$.
- La notation $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est, quant à elle, réservée aux intégrales des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I contenant a et b et elle est soumise à la convention de signe donnée plus haut.

Théorème 1 (Relation de Chasles)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et $(a,b,c) \in I^3$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration page 664

Attention

La souplesse algébrique apportée par la convention de signe a néanmoins un prix. Toutes les propriétés de l'intégrale liées à l'ordre, telles que la positivité ou la croissance, sont d'emblée plus délicates à utiliser, car elles reposent toutes sur le « sens des bornes ».

Exemple On ne peut pas affirmer que si f est une fonction positive continue par morceaux sur l'intervalle I et que si $(a,b) \in I^2$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. Cette dernière assertion est vraie si $a \leqslant b$, mais n'est plus vraie en général si $a \geqslant b$.

Proposition 2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et $(a,b) \in I^2$. Si $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b}$:

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

Démonstration. Si $a = b$, l'inégalité est immédiate. Sinon, d'après la proposition 17 de la page 621 du chapitre 11 :

$$\left|\int_a^b f\right| = \left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f| = \int_a^b |f|.$$

□

p.664

Exercice 1 *Inégalité de la moyenne*

Soit $(a,b) \in I^2$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On suppose que la fonction $|f|$ est majorée par la constante M. Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M\,|b-a|.$$

Point méthode

Lorsque l'on manipule des inégalités portant sur des intégrales, il faut faire attention au « sens des bornes ». On doit, bien que cela entraine souvent des discussions, « remettre les bornes dans le bon sens ».

II Intégration et dérivation

1 Primitives

Nous rappelons la définition suivante, vue au chapitre 5.

Définition 2

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle **primitive de f** toute fonction F définie sur I telle que $F' = f$.

Nous rappelons également la proposition suivante.

Proposition 3

Soit f et g deux fonctions sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Si F et G sont des primitives de f et g respectivement, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$. De même, si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors λF est une primitive de λf.
2. La différence de deux primitives de f sur l'intervalle I est une fonction constante.

p.664

Exercice 2 Vrai ou faux ?

1. Toute primitive d'une fonction impaire définie sur I est paire.
2. Toute primitive d'une fonction paire définie sur I est impaire.

p.665

Exercice 3

À quelle(s) condition(s) une primitive d'une fonction continue T-périodique définie sur $\mathbb{R}$ est-elle T-périodique $(T > 0)$?

Théorème 4

Soit $a \in I$ et f une fonction continue sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors l'application $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f.

C'est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Démonstration page 665

Remarques

- Ce dernier résultat est connu aussi sous le nom de « théorème fondamental de l'analyse » ou encore « théorème fondamental du calcul différentiel et intégral ».
- On peut voir de manière informelle la « primitivation » c'est-à-dire la recherche de primitives, comme la réciproque de la dérivation. Cela, bien entendu, n'est pas à proprement parler exact, puisque la dérivation n'est pas injective.

- L'examen de la démonstration permet de généraliser aisément ce dernier résultat. Plus précisément, si f est une fonction continue par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue, dérivable à droite en tout point autre que l'extrémité supérieure et dérivable à gauche en tout point autre que l'extrémité inférieure. De plus, $F'_g(x) = f(x-)$ et $F'_d(x) = f(x+)$.
- Rappelons qu'une primitive d'une fonction définie sur I est nécessairement continue, du fait qu'elle est dérivable.
- Une fonction continue par morceaux sur un intervalle n'a pas de primitive en général. On trouvera un exemple ci-dessous.

p.665

Exercice 4

1. Démonter que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = 0$ sinon est continue par morceaux et qu'elle n'admet pas de primitive.
2. Retrouver ce résultat à l'aide de l'exercice 10.8 de la page 599.

2 Applications

Nous sommes enfin en mesure d'établir l'existence de la fonction logarithme. Puisque nous avons construit la fonction exponentielle et les fonctions puissances à l'aide de la fonction logarithme, leur existence s'en trouve également démontrée.

Corollaire 5 (Logarithme népérien)

Il existe une unique fonction réelle f, dérivable et définie sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on ait $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $f(1) = 0$. Elle est appelée fonction **logarithme népérien** et elle est notée $\ln$.

Démonstration. La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. La fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est donc l'unique primitive de g s'annulant en 1. □

Corollaire 6

Soit f une fonction *continue* définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et F une primitive de f. Alors pour tout $(a,b) \in I^2$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Principe de démonstration. Le résultat est immédiat pour la primitive $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t\,\mathrm{d}t)$. Il est donc vrai en général puisque les primitives de f diffèrent de G d'une constante.

Démonstration page 666

Corollaire 7

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors pour tout $(a,b) \in I^2$:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Corollaire 8

Soit I et J deux intervalles d'intérieur non vide, $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue, α et β deux fonctions dérivables définies sur J à valeurs dans I. La fonction g définie sur J par :

$$g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable et, pour tout $x \in J$, on a :

$$g'(x) = \beta'(x) f\big(\beta(x)\big) - \alpha'(x) f\big(\alpha(x)\big).$$

Démonstration. En notant F une primitive de f, on a $g = F \circ \beta - F \circ \alpha$. La conclusion résulte de la dérivation des fonctions composées. □

p.666 **Exercice 5** Soit $(a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$.

Après avoir précisé le domaine de définition, dériver l'application $x \mapsto \displaystyle\int_{x^a}^{x^b} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

Point méthode

- Une méthode pour donner la valeur de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment est de calculer une primitive et d'appliquer le corollaire 6 de la page ci-contre.
- Pour donner une valeur de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, on utilise la relation de Chasles pour se ramener à des fonctions continues (*cf.* chapitre 11, corollaire 21 de la page 622).

p.666 **Exercice 6** Calculer $\displaystyle\int_0^2 x\big(x - \lfloor x \rfloor\big)\,\mathrm{d}x$.

3 Inégalité des accroissements finis

Théorème 9 (Inégalité des accroissements finis)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $|f'|$ est majorée par une constante M. Alors :

$$\forall (x,y) \in I^2 \quad |f(y) - f(x)| \leqslant M\,|y-x|.$$

Principe de démonstration. Appliquer le corollaire 7 de la page précédente.

Démonstration page 666

Remarques

- Ce résultat a déjà été démontré pour des fonctions à valeurs réelles grâce à l'égalité des accroissements finis et ne nécessite, d'ailleurs, que des hypothèses bien plus faibles. Au fait quelles sont ces hypothèses ?
- Bien noter que l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs complexes n'est établie que pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

III Calcul d'intégrales

Nous revenons sur quelques techniques vues au chapitre 5.
Signalons que, dans la pratique, la première chose à faire est d'apprendre les primitives usuelles.
Fort de ce bagage, lorsque l'on est en face d'une fonction dont on ne connaît pas immédiatement une primitive, on pourra chercher à appliquer l'une des méthodes ci-dessous.
Notons enfin que dans la pratique, on est souvent confronté à des fonctions pour lesquelles on ne connaît pas de primitive. On est alors amené à faire, notamment à l'aide de l'outil informatique, des calculs numériques approchés.

1 Intégration par parties

Rappelons l'énoncé du résultat, vu page 255.

Proposition 10

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et définies sur I. Alors pour tout $(a,b) \in I^2$:

$$\int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)\,v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Lorsque l'on rédige une intégration par parties, on prendra soin de bien spécifier u et v, de vérifier qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ et de préciser u' et v'.

p.667

Exercice 7

1. Vérifier que $x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

p.667

Exercice 8 On pose $I(p,q)=\displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$ pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$.

1. Lorsque $p>0$, donner une relation entre $I(p,q)$ et $I(p-1,q+1)$.
2. En déduire $I(p,q)$.

p.668

Exercice 9 (Intégrales de Wallis)

On pose $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Lorsque $n\geqslant 2$, donner une relation entre I_n et I_{n-2}. En déduire la valeur de I_nI_{n-1} pour tout $n\geqslant 1$.
   Indication. On pourra remarquer que $\sin^n=\sin\times\sin^{n-1}$.
3. Calculer I_{2p} pour tout entier naturel p. En déduire I_{2p+1}.
4. Préciser la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Donner, à l'aide de ce qui précède, pour $n\in\mathbb{N}^*$, un encadrement de I_n^2. En déduire un équivalent simple de I_n.

2 Changement de variable

Rappelons d'abord le résultat suivant, qui a été vu au chapitre 5 page 256 et qui est une conséquence immédiate du théorème fondamental du calcul intégral et de la formule de dérivation des fonctions composées.

Théorème 11 (Formule de changement de variable)

Soit I et J deux intervalles d'intérieur non vide, $f : I\to\mathbb{K}$ une fonction continue et $u : J\to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors pour tout $(a,b)\in J^2$ on a :

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f\left(u(t)\right)u'(t)\,\mathrm{d}t$$

Attention

- Ne pas oublier de changer les bornes.
- Bien noter que la formule de changement de variable est établie pour les fonctions continues (et non continues par morceaux).

De l'utilisation du changement de variable

De droite à gauche

p.670 **Exercice 10** Donner une primitive de $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}\cdot$

Lorsque l'on *reconnaît* une expression du type « $f\big(u(t)\big)\,u'(t)$ », on peut appliquer la formule de changement de variable. Il arrive parfois que l'on doive légèrement modifier l'expression pour faire apparaître cette forme. Dans ce contexte, la locution « changement de variable » est abusive, puisque tout s'exprime simplement en fonction de t.

Pour la rédaction, on posera u, on spécifiera le domaine sur lequel u est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on donnera la dérivée de u.

Exemples

- Calculons une primitive de $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}\cdot$

  La fonction $u : s \mapsto s^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $u'(s) = 2s$. Puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue, pour tout t réel :

$$\int_0^t \frac{s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{u'(s)}{2\big(1+u(s)\big)}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right).$$

- Calculons une primitive de $t \mapsto \sin^3(t)\cos^4(t)$. La fonction $u : s \mapsto \cos s$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $u'(s) = -\sin s$. Ainsi, puisque la fonction $x \mapsto \left(1-x^2\right)x^4$ est continue, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}\int_0^t \sin^3(s)\,\cos^4(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^t \sin(s)\big(1-\cos^2(s)\big)\cos^4(s)\,\mathrm{d}s\\ &= -\int_0^t \big(u^4(s)-u^6(s)\big)\,u'(s)\,\mathrm{d}s\\ &= \frac{\cos^7(t)}{7} - \frac{\cos^5(t)}{5} + \frac{2}{35}\cdot\end{aligned}$$

p.670 **Exercice 11** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}\,\mathrm{d}x$.

p.670 **Exercice 12** Calculer, pour tout réel $x>0$, l'intégrale $\displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{1}{t(1+t^4)}\,\mathrm{d}t$.

De gauche à droite

Lorsque l'on cherche à calculer une intégrale, il arrive que l'on ne reconnaisse pas une primitive usuelle ou une expression du type « $f\big(u(t)\big)\,u'(t)$ », et qu'une intégration par parties ne semble pas aboutir. Parfois à l'aide d'un

« bon » changement de variable, on se ramène à une fonction pour laquelle nous disposons de techniques de calcul d'intégrales, par exemple une fonction polynomiale.

À proprement parler un **changement de variable** pour calculer une intégrale $\int_{\dots}^{\dots} f(x)\,\mathrm{d}x$, où f est continue, consiste à poser $x = \varphi(t)$, avec φ de classe $\mathcal{C}^1$. La nouvelle intégrale à calculer est obtenue en remplaçant formellement x par $\varphi(t)$ et $\mathrm{d}x$ par $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. Pour la rédaction :

- ▷ on posera $x = \varphi(t)$;
- ▷ on précisera le domaine sur lequel φ est de classe $\mathcal{C}^1$;
- ▷ on calculera $\mathrm{d}x$, c'est-à-dire $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$;
- ▷ on précisera les bornes.

Remarques

- On utilisera toujours une changement de variable sous la forme $x = \varphi(t)$, c'est-à-dire en exprimant « l'ancienne » variable en fonction de la « nouvelle ». Il arrive cependant, pour des raisons de commodité, qu'un changement de variable soit proposé sous la forme $t = \psi(x)$. La première chose à faire sera donc de se ramener à la forme $x = \varphi(t)$. Cela nécessite, bien entendu, que φ et ψ soient des bijections réciproques l'une de l'autre et que φ soit de classe $\mathcal{C}^1$.
- Il n'existe malheureusement pas de « recette » qui donne un changement de variable simplificateur. Cependant :
  - ∗ lorsque l'on est en présence d'une expression où figure $\sqrt{1-x^2}$, le changement de variable $x = \sin t$ est souvent utile ;
  - ∗ des changements de variable affines permettent souvent d'exploiter des symétries.

p.671 **Exercice 13** On pose $I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\ \mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\ \mathrm{d}x$.

1. Calculer $I + J$.
2. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que $I = J$ et en déduire leur valeur commune.
3. Donner, sans faire de calcul de primitive, la valeur de $K = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\ \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Exploitation des symétries

Proposition 12 (Parité, imparité)

Soit a un réel strictement positif et $f \in \mathcal{CM}([-a,a],\mathbb{K})$.

1. Si la fonction f est paire, alors :
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Si la fonction f est impaire, alors :
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Principe de démonstration. Dans le cas où f est continue, poser le changement de variable $x = -t$.

Démonstration page 671

Remarque Noter qu'ici f est simplement supposée continue par morceaux.

p.672 **Exercice 14** Calculer $I = \displaystyle\int_{-\pi/8}^{\pi/8} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1+x^4}{1+x^2}\right)\sqrt[3]{\sin x^3}\,\sin\left(\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$.

p.672 **Exercice 15** Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+x^4}\,\mathrm{d}x$.

p.672 **Exercice 16** Soit f une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{K}$, définie sur un segment $[a,b]$.

- Montrer que si, pour tout $x \in [a,b]$, on a $f(a+b-x) = f(x)$, alors :
$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{(a+b)/2}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{a}^{(a+b)/2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Si, pour tout $x \in [a,b]$, on a $f(a+b-x) = -f(x)$, alors :
$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

p.672 **Exercice 17** Calculer $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

On utilisera une symétrie pour réduire le domaine d'intégration. On posera ensuite $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ *et on utilisera les formules de la page 61.*

Proposition 13 (Invariance par translation)

Soit $T \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue par morceaux sur I.
Pour tout $(a,b) \in I^2$ on a :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x-T)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Principe de démonstration. Dans le cas où f est continue, poser le changement de variable $x = T + s$. Démonstration page 673

Proposition 14 (Périodicité)

Soit un réel $T > 0$ et f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, T-périodique. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 673

Dans le cas où f est continue, dériver la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_y^{y+T} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque Noter que, dans ces deux résultats, f est simplement supposée continue par morceaux.

Exemples de changement de variable

p.673

Exercice 18

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Point méthode

Lorsque l'on cherche un changement de variable, souvent on isole un élément de l'expression. On tente alors de prendre cet élément comme nouvelle variable, mais on écrira quand même la relation entre les deux variables sous la forme « l'ancienne en fonction de la nouvelle ». Cela suppose alors bien entendu que la correspondance entre « l'ancienne » variable et « la nouvelle » soit bijective.

Exemple Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$. Il est naturel de vouloir voir ce que donnerait e^x comme nouvelle variable. Posons donc $x = \ln t$. La fonction ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,e]$ et $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x &= \int_1^e \frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right]_1^e = 1 + \ln 2 - \ln(e+1)\end{aligned}$$

Exemple Pour calculer $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$, il est naturel de vouloir prendre x^2 comme nouvelle variable. Malheureusement, la formule de changement de variable ne s'applique pas : il faudrait poser $x = \sqrt{t}$ et on serait amené à écrire $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \ldots$ Cette intégrale n'est pas définie ! Pour le voir, on peut remarquer que non seulement la fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{\sqrt{t}}$ n'est pas définie en 0, mais elle ne peut pas être prolongée en une fonction continue par morceaux sur $[0, \pi/2]$, du fait que $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} = +\infty$.

p.674

Exercice 19

En posant le changement de variable $x = \cos t$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$.

p.674

Exercice 20

1. En posant le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, donner une primitive sur $]-\pi, \pi[$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{2 + \cos x}\cdot$
2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.

Remarque

1. Lorsque l'on cherche à intégrer une fonction qui est une « fraction en sinus/cosinus », les formules :

$$\sin x = \frac{2t}{1-t^2} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1-t^2} \quad \text{où} \quad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$$

   fournissent des changements de variable utiles (voir page 61). Ils ramènent l'intégration de la fonction initiale à l'intégration d'une fonction rationnelle. Nous verrons au chapitre 18 des techniques adaptées à ce problème.

2. Cela étant, on peut également essayer les changements de variable du type $u = \sin x$, $u = \cos x$ ou $u = \tan x$. Lorsque l'un de ces changements mène à une fonction rationnelle (ce qui n'est pas toujours le cas), celle-ci est en général plus simple que celle issue du changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}\cdot$

p.675

Exercice 21 Considérons $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\,(\cos x + \sin x)}\cdot$

1. Calculer I en posant le changement de variable $t = \tan x$.
2. Que donne changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$?

IV Formules de Taylor

Historiquement, les fonctions les plus simples à calculer furent les fonctions polynomiales. C'est pourquoi l'on a cherché à approcher les fonctions par de telles fonctions. Même au XXI$^{\mathrm{e}}$ siècle, à l'âge du numérique, les fonctions polynomiales restent des fonctions utiles pour les problèmes d'approximations et pour lesquelles on dispose de méthodes numériques extrêmement efficaces de calcul.

p.675

Exercice 22 Soit $a \in I$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction polynomiale de degré au plus n. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \,.$$

Indication : on commencera par le cas où $a = 0$.

Comme le montre l'exercice précédent, il y a un lien entre les coefficients d'une fonction polynomiale et ses dérivées successives en un point. Ce lien conduit à la définition suivante.

Définition 3

Soit $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.
La **fonction polynomiale de Taylor d'ordre n en a associée à f** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k.$$

Remarque
Par abus, on parle également de « polynôme de Taylor d'ordre n en a ».

1 Formules globales

Théorème 15 (Formule de Taylor à l'ordre n avec reste intégral)

Soit $a \in I$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Alors pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

où :

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Principe de démonstration. Elle se fait par récurrence, en opérant une intégration par parties sur le reste R_n.

Démonstration page 675

Remarques

- Cette formule est la formule de **Taylor avec reste intégral à l'ordre n en a**. Elle est également connue sous le nom de formule de **Taylor-Laplace**.
- La formule de Taylor avec reste intégral explicite, *pour tout* $x \in I$, l'erreur commise en approchant $f(x)$ par le polynôme de Taylor en a à l'ordre n.
- Bien noter que pour utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n, la fonction f doit être de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
- Il est utile de se rappeler qu'à l'ordre 0, la formule s'écrit :
$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$
Cela peut servir pour vérifier que l'on ne s'est pas trompé dans les indices et exposants en écrivant la formule...

p.676

Exercice 23 Démontrer que, pour tout réel positif x, on a $\ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\cdot$

p.676

Exercice 24 Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}\cdot$

Théorème 16 (Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n)

Soit $a \in I$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que la fonction $\left|f^{(n+1)}\right|$ est majorée par une constante M_{n+1}. Alors, pour tout $x \in I$:
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}\,.$$

Principe de démonstration. Majorer le reste R_n de la formule de Taylor avec reste intégral.

Démonstration page 676

p.677

Exercice 25 On note f l'application définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \ln(1+x)$.

1. Expliciter $f^{(n)}(x)$, pour tout réel $x \in [0,1]$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Donner $\max\limits_{t\in[0,1]} \left|f^{(n)}(t)\right|$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Démontrer, à l'aide d'une formule de Taylor, que, pour tout $x \in [0,1]$:
$$\ln(1+x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k\,.$$

2 Formule locale

p.677

Exercice 26 Soit a et b deux réels vérifiant $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ avec n entier naturel.

Montrer qu'il existe une fonction α définie sur $[a, b]$ vérifiant :

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + (x-a)^n\,\alpha(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

Le théorème suivant garantit le résultat de l'exercice précédent, sous des hypothèses plus faibles.

Théorème 17 (Formule de Taylor-Young à l'ordre n)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ avec n entier naturel et $a \in I$. Il existe alors une fonction α définie sur I telle que :

$$\forall x \in I \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + (x-a)^n\,\alpha(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 678

Lorsque $n \geqslant 1$, utiliser la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre $n-1$.

Remarques

- Le point important du théorème précédent n'est pas tant qu'il existe une fonction α telle que $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + (x-a)^n\,\alpha(x)$ (l'existence d'une telle fonction est immédiate), que le fait que la limite de α en a est nulle.
- La formule de Taylor-Young signifie donc que la différence entre f et son polynôme de Taylor d'ordre n en a tend plus vite vers 0 en a que $(x-a)^n$.
- Bien noter que :
  - ∗ pour utiliser la formule de Taylor-Young à l'ordre n, la fonction f doit être de classe $\mathcal{C}^n$,
  - ∗ alors que pour utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n, la fonction f doit être de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Point méthode

Lorsque l'on veut appliquer une formule de Taylor, il est impératif de savoir si le résultat qu'on veut en déduire est de nature « locale » ou « globale ».

- S'il s'agit d'un résultat global du type : « *pour tout $x \in I$, on a ...* », il faudra utiliser soit la formule de Taylor avec reste intégral, soit l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- Lorsqu'il s'agit d'un résultat local, par exemple une limite ou, comme nous le verrons au chapitre 13, un équivalent, un développement limité, etc., la formule de Taylor-Young peut rendre service.

p.678

Exercice 27 Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}\cdot$

p.678

Exercice 28 Soit I un intervalle d'intérieur non vide contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer que $g : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ admet un prolongement par continuité en 0. On note encore g ce prolongement.
2. Montrer, en utilisant le théorème de limite de la dérivée (*cf.* le théorème 28 de la page 570), que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

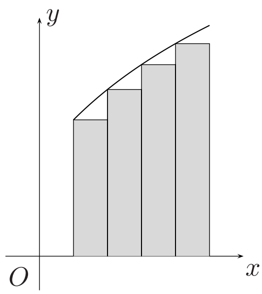
V Application aux méthodes numériques

1 Intégration numérique

Comme nous l'avons déjà signalé, dans de nombreuses situations, on est confronté à des fonctions continues dont on ne sait pas calculer de primitives. Il a même été démontré au XIX$^{\text{e}}$ siècle que, pour certaines d'entre elles, les primitives, qui existent puisqu'il s'agit fonctions continues sur un intervalle, ne peuvent pas s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles décrites dans cet ouvrage. C'est par exemple le cas de $x \mapsto \exp(x^2)$ ou de $x \mapsto \cos(x^2)$. D'autre part, même lorsque l'on sait calculer une primitive, l'expression peut être trop compliquée pour être facilement exploitable. Pour toutes ces raisons, on a recours aux méthodes numériques.

Méthode des rectangles

La méthode des rectangles consiste à approcher l'intégrale par la somme de Riemann S_n pour un certain n. Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut facilement majorer la différence entre les sommes de Riemann et l'intégrale. L'erreur de méthode de la méthode des rectangles est la valeur absolue de la différence entre l'intégrale et l'approximation. Elle est estimée ci-dessous.



Lemme 18

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, avec $a < b$. Alors :

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f(a) \right| \leqslant \frac{M_1}{2}(b-a)^2, \quad \text{avec} \quad M_1 = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

Principe de démonstration. La fonction f est lipschitzienne. Démonstration page 679

Proposition 19 (Sommes de Riemann dans le cas $\mathcal{C}^1$)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, avec $a < b$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n(f) \right| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2\,n},$$

avec $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$ et $M_1 = \displaystyle\max_{x\in[a,b]} \bigl|f'(x)\bigr|$.

Principe de démonstration. Appliquer le lemme 18 de la page ci-contre à f sur chacun des segments $[a_k, a_{k+1}]$, où $a_k = a + k\,\frac{b-a}{n}\cdot$

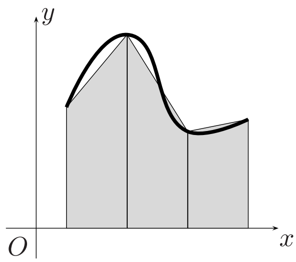
Démonstration page 679

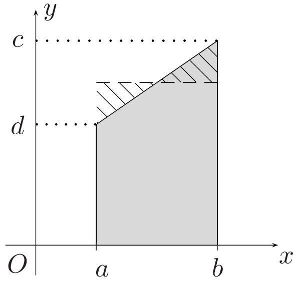
La méthode conduit naturellement à un programme Python 3 pour donner une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ entre deux bornes a et b. Le choix du nombre de points est laissé à l'utilisateur. Il sera dicté par une analyse de l'erreur de méthode, par la précision souhaitée, etc.

```
def rectangles(f,a,b,n):
        s=0
        pas=(b-a)/n
        for k in range(n):
                s=s+f(a)
                a=a+pas
        return (s*pas)
```

Méthode des trapèzes

La méthode des rectangles n'est pas très efficace. Nous venons de voir que l'erreur de méthode est en $1/n$. Cela signifie *grosso modo* que pour avoir une valeur approchée à 10^{-p} près, il faut faire 10^p calculs ! Pour pallier ce problème, on cherche une meilleure approximation de la courbe. Il est intuitif qu'une ligne polygonale « épouse mieux » la courbe que le graphe d'une fonction en escalier.





La méthode des trapèzes consiste à « découper » la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $y = b$ et en dessous de la courbe, à l'aide d'une subdivision régulière. On approche alors l'aire de ces parties à l'aide de l'aire de trapèzes.

Un calcul élémentaire montre que l'aire d'un trapèze du plan muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ délimité par les points $A(a,0)$, $B(b,0)$, $C(b,c)$ et $D(a,d)$ est $(b-a)\,\dfrac{c+d}{2}\cdot$

Lemme 20

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, avec $a < b$. Alors :

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2} \right| \leqslant \frac{M_2}{12}\,(b-a)^3 \quad \text{avec} \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Principe de démonstration. Procéder à deux intégrations par parties. Pour la première, poser $u(x) = x - \frac{a+b}{2}$ et $v(x) = f(x)$. Démonstration page 680

La méthode des trapèzes consiste donc à approcher l'intégrale par S'_n, qui est la somme des aires des trapèzes associés à la subdivision régulière à $n+1$ points, c'est-à-dire par :

$$\begin{aligned} S'_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n}\,\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} \\ &= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a_k)\right), \end{aligned}$$

où l'on a noté $a_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$.
L'objet de l'exercice suivant est d'estimer l'erreur de méthode.

p.680

Exercice 29

Avec les notations ci-dessus, démontrer que :

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S'_n \right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12\,n^2}\cdot$$

Comme pour la méthode des rectangles, on peut facilement écrire une fonction Python donnant une valeur approchée d'une intégrale en utilisant la méthode des trapèzes à $n+1$ points. On peut d'ailleurs exploiter la fonction déjà écrite pour la méthode des rectangles, en remarquant que les sommes à l'ordre n dans les deux méthodes ne diffèrent que de deux termes.

```
def trapezes(f,a,b,n):
    s=(f(b)-f(a))*(b-a)/(2*n)
    return rectangles(f,a,b,n)+s
```

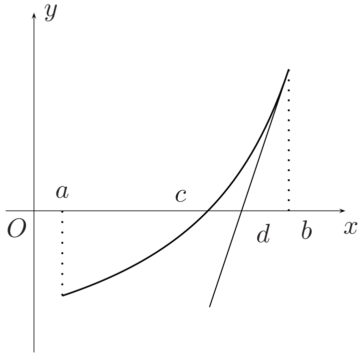
```
>>> def f(x):return x*x

>>> rectangles(f,0,1,100)
0.32835000000000004
>>> trapezes(f,0,1,100)
0.33335000000000004
```

Cela peut donner lieu à la session ci-dessus. La valeur exacte est évidemment $1/3$. L'amélioration apportée par la méthode des trapèzes est, sur cet exemple, patente.

2 Résolution approchée d'équation : méthode de Newton

La méthode de Newton est une méthode efficace pour obtenir de bonnes approximations numérique d'un zéro d'un fonction, sous réserve de quelques hypothèses. La formule de Taylor permet de majorer l'erreur d'approximation que l'on commet.



Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en tout point de I. Supposons qu'il existe $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$, tel que $f(a)$ et $f(b)$ aient des signe opposés. On sait d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$. Si l'intervalle $[a,b]$ est « relativement petit », il est naturel de chercher à approcher le graphe de f sur $[a,b]$ par une de ses tangentes, (*cf.* la proposition 1 de la page 554). On cherche donc, là encore naturellement, à approcher f sur $[a,b]$ par l'une des fonctions :

$$g_a : x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{ou} \qquad g_b : x \mapsto f(b) + f'(b)(x-b).$$

Si l'on choisit par exemple g_b, le point d'intersection de la tangente en b à la courbe représentative avec l'axe des abscisses fournit une abscisse d dont on peut raisonnablement penser qu'elle donne une bonne approximation de c. L'exercice suivant précise cela.

p.680

Exercice 30 Soit a et b deux réels, $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f' et f'' sont à valeurs strictement positives et que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

On note $m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]} f'(x)$ et $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} f''(x)$, ainsi que $\mu = \frac{M_2}{2m_1}\cdot$

1. Justifier la définition de m_1, M_2 et μ.
2. Démontrer que f s'annule une seule fois. On note c cet unique zéro.
3. Soit d l'abscisse du point d'intersection de la tangente au graphe de f en b avec l'axe des abscisses. Démontrer que $c < d < b$.
4. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_0 = b$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\cdot$
   Démontrer que la suite est bien définie et qu'elle converge vers c.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $x_{n+1} - c = \dfrac{1}{f'(x_n)} \displaystyle\int_{x_n}^{c} (c-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer $|x_{n+1} - c| \leqslant \mu(x_n - c)^2$, puis $|x_n - c| \leqslant \frac{1}{\mu}\big(\mu(b-a)\big)^{2^n}$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Théorème 1 La relation est immédiate si $c=a$, ou $c=b$ ou $a=b$. On peut donc supposer $c\neq a$, et $c\neq b$ et $a\neq b$.

Supposons que $a<b$ et $a<c$. On a alors deux possibilités :

- soit $a<c<b$ et alors la relation de Chasles vue à la page 622 donne :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{[a,b]} f=\int_{[a,c]} f+\int_{[c,b]} f=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

- soit $a<b<c$ et alors

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{[a,c]} f=\int_{[a,b]} f+\int_{[b,c]} f=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

  ce qui avec la convention de signe donne :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On raisonne de même lorsque b (respectivement c) est la plus petite valeur des trois.

Exercice 1

- Supposons $a\leqslant b$. On a, par croissance de l'intégrale :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b\big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b M\,\mathrm{d}x=M(b-a).$$

- Supposons $a\geqslant b$. D'après le premier cas :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M(a-b).$$

Exercice 2

1. Vrai. L'intervalle I est nécessairement symétrique par rapport à 0. En notant F une primitive sur I de f, la fonction $\Phi : x\mapsto F(x)-F(-x)$ est dérivable. On a $\Phi'(x)=f(x)+f(-x)=0$ pour tout $x\in I$. Par conséquent Φ est constante sur l'intervalle I. Puisque $\Phi(0)=0$, on en déduit que Φ est nulle, et donc que F est une fonction paire.
2. Faux. La fonction nulle est paire, la fonction constante égale à 1 en est une primitive et cette primitive n'est pas impaire.
   On peut se poser la question de savoir s'il existe *une* primitive qui soit une fonction impaire. L'intervalle I est nécessairement symétrique par rapport à 0. Toujours en posant F est une primitive sur I de f, la fonction $\Psi : x\mapsto F(x)+F(-x)$ est dérivable et $\Psi'=0$. Par conséquent, Ψ est constante et pour tout $x\in I$:

$$F(x)+F(-x)=2F(0).$$

   La primitive est impaire si, et seulement si, $F(0)=0$. On en déduit aisément que $x\mapsto F(x)-F(0)$ est l'*unique* primitive de f qui soit impaire.

Exercice 3 Là encore, en posant F une primitive de f et $\Delta : x \mapsto F(x+T) - F(x)$, on vérifie facilement que Δ est constante. Ainsi, F sera T-périodique si, et seulement si, $F(T) = F(0)$.

On constate que soit toutes les primitives de f sont T-périodique, soit aucune ne l'est.

Théorème 4 Notons F l'application définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

- Soit $x \in I$ et $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in [x-\eta, x+\eta] \cap I$, on ait $\big|f(t) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon$. Soit donc h réel tel que $0 < |h| \leqslant \eta$ et $x + h \in I$. D'après la relation de Chasles et la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) - hf(x) &= \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - hf(x) \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

  Si $h \geqslant 0$, on a :

$$\big|F(x+h) - F(x) - hf(x)\big| = \left|\int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{x+h} \big|f(t) - f(x)\big|\,\mathrm{d}t$$

  et comme $\big|f(t) - f(x)\big|$ pour tout t compris entre x et $x+h$, on en déduit ;

$$\big|F(x+h) - F(x) - hf(x)\big| \leqslant \varepsilon\,|h|.$$

  On obtient la même inégalité si $h < 0$ et ainsi :

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

  Donc $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

- Il est clair que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ s'annule en a. Par ailleurs, la différence de deux primitives d'une fonction sur un intervalle est constante, ce qui permet d'obtenir l'unicité.

Exercice 4

1. Supposons que f ait une primitive F. La restriction $F_{|]-\infty,0[}$ est une primitive de l'application nulle sur l'intervalle $]-\infty, 0[$; il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $F_{|]-\infty,0[}$ soit la constante α. De même, la restriction $F_{|]0,+\infty[}$ est une primitive sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la constante 1 ; il existe donc $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = x + \beta$ pour tout $x \geqslant 0$. Puisque qu'une primitive est continue, on a nécessairement :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x < 0 \,; \\ x + \alpha & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

   On constate alors que $F_g'(0) = 0$ et $F_d'(0) = 1$. Par conséquent F n'est pas dérivable en 0 et F n'est pas une primitive de f.

2. Une dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, à savoir que $f'(I)$ est un intervalle. Puisque $f(\mathbb{R}) = \{0,1\}$, f ne saurait avoir de primitive.

Corollaire 6 La fonction $G : x \mapsto \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ définie sur I est la primitive de f s'annulant en a et :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b).$$

Si F est une primitive de f sur I, on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $G = F + \lambda$ (*cf.* la proposition 3 de la page 647). En particulier $0 = G(a) = F(a) + \lambda$, et donc

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) = F(b) + \lambda = F(b) - F(a).$$

Exercice 5 La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est définie sur $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$. Pour que la fonction $f : x \mapsto \int_{x^a}^{x^b} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ soit définie en x, il faut et il suffit que x^a et x^b soient définies, et qu'aucune valeur négative, ni 1, ne se trouve entre x^a et x^b. Par définition de x^a et x^b, on doit donc avoir $x \geqslant 0$ et donc ici il est nécessaire d'avoir $x > 0$. Si $x \in\,]0,1[$, il en est de même de x^a et x^b puisque a et b sont strictement positifs. Ainsi f est définie sur $]0,1[$. On démontre de même que f est définie sur $]1,+\infty[$.
Enfin, pour tout $x \in\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = b\,x^{b-1}\frac{1}{\ln x^b} - a\,x^{a-1}\frac{1}{\ln x^a} = \frac{x^b - x^a}{x\,\ln x}\cdot$$

Exercice 6 En posant $f : x \mapsto x\big(x - \lfloor x \rfloor\big)$, on a :

$$\forall x \in [0,2] \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1[\,; \\ x^2 - x & \text{si } x \in [1,2[\,; \\ 0 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \big(x^2 - x\big)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Relation de Chasles)} \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{7}{6}\cdot \end{aligned}$$

Théorème 9 Soit $(x,y) \in I^2$. On peut sans perte de généralité supposer $x < y$ (le cas $x = y$ étant immédiat). On a, d'après le corollaire 7 de la page 649 et par monotonie de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \big|f(y) - f(x)\big| &= \left|\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_x^y \big|f'(t)\big|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_x^y M\,\mathrm{d}t = M\,|y - x| \end{aligned}$$

Exercice 7

1. La fonction $F : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout x réel, par stricte croissance de la fonction racine carrée :

$$|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$$

et donc $0 \leqslant x + |x| < x + \sqrt{x^2+1}$. Notons $\varphi(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$. La fonction φ ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ de par les théorèmes généraux. De plus, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Par conséquent, la formule de dérivation des fonctions composées donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,\frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

2. Soit les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \sqrt{t^2+1}$. Elles sont évidemment de classe $\mathcal{C}^1$. On a, pour tout t réel, que $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x (u'v)(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \Big[t\sqrt{t^2+1}\Big]_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On a également :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{t^2+1-1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^x \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$2\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \Big[t\sqrt{t^2+1}\Big]_0^x + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t$$

et donc qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est donnée par :

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right).$$

Exercice 8

1. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Les fonctions $u : x \mapsto x^p$ et $v : x \mapsto -\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a, pour tout x réel, $u'(x) = px^{p-1}$ et $v'(x) = (1-x)^q$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} I_{p,q} &= \int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{q+1}\,x^p(1-x)^{q+1}\right]_0^1 + \frac{p}{q+1}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{p}{q+1}\,I_{p-1,q+1}. \end{aligned}$$

(La quantité $\left[-\frac{1}{q+1}\,x^p(1-x)^{q+1}\right]_0^1$ est nulle car $p>0$ et $q+1>0$.)

2. Lorsque $p \in \mathbb{N}^*$, on a donc :

$$\begin{aligned} I_{p,q} &= \frac{p}{q+1}\,I_{p-1,q+1} \\ &= \frac{p(p-1)\cdots 1}{(q+1)\cdots(q+p)}\,I_{0,q+p} \\ &= \frac{p!\,q!}{(p+q)!}\,I_{0,p+q}. \end{aligned}$$

Il est par ailleurs clair que $I_{0,p+q} = \frac{1}{p+q+1}$. En conclusion :

$$I_{p,q} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}.$$

Exercice 9

1. On a immédiatement :

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = \big[-\cos x\big]_0^{\pi/2} = 1.$$

2. Suivons l'indication. Les fonctions $u : x \mapsto -\cos x$ et $v : x \mapsto \sin^{n-1} x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$u'(x) = \sin(x) \qquad \text{et} \qquad v'(x) = (n-1)\cos(x)\,\sin^{n-2}(x).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-\cos(x)\sin^{n-1}(x)\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Puisque $n \geqslant 2$, on a $-\cos(0)\sin^{n-1}(0) = 0$ et $-\cos(\pi/2)\sin^{n-1}(\pi/2) = 0$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} I_n &= (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} \big(1-\sin^2(x)\big)\sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (n-1)\left(I_{n-2}-I_n\right). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité peut être réécrite sous la forme :

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}. \qquad (*)$$

Cela donne :

$$I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}$$

et en multipliant $(*)$ par I_{n-1}, on constate que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$nI_n\,I_{n-1} = (n-1)\,I_{n-1}\,I_{n-2}.$$

Ainsi la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n\,I_n\,I_{n-1} = \frac{\pi}{2}\cdot \qquad (**)$$

3. On a, pour tout entier naturel p non nul :

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p}\,I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2}\,I_0$$

Par ailleurs,

$$(2p)(2p-2)\cdots 2 = 2^p\,p(p-1)\cdots 1 = 2^p\,p!\,.$$

Pour le produit des impairs, il est classique de multiplier et diviser par le produit des pairs (*cf.* page 97), c'est-à-dire :

$$(2p-1)(2p-3)\cdots 1 = \frac{(\mathbf{2p})(2p-1)(\mathbf{2p-2})(2p-3)\cdots\mathbf{2}\;1}{(\mathbf{2p})\,(\mathbf{2p-2})\cdots\mathbf{2}} = \frac{(2p)!}{2^p\,p!}\,.$$

En conclusion, pour tout entier naturel p :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}\,\frac{\pi}{2}\cdot$$

Enfin, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$I_{2p+1} = \frac{1}{(2p+1)\,I_{2p}}\,\frac{\pi}{2} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}\,.$$

4. Pour tout $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$, et donc on a également $0 \leqslant \sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de l'intégrale, du fait que $0 \leqslant \pi/2$:

$$0 \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

5. Puisque la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, à valeurs positives, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$I_{n+1}\, I_n \leqslant I_n^2 \leqslant I_n\, I_{n-1}.$$
Par conséquent, d'après la relation $(**)$:
$$\frac{\pi}{2\,(n+1)} \leqslant I_n^2 \leqslant \frac{\pi}{2\,n}\cdot$$
Par encadrement, on en déduit que $\dfrac{2\,n}{\pi}\, I_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. En d'autres termes, puisque I_n est positif pour tout entier n :
$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\,n}}\,.$$

Exercice 10 La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$; elle admet donc une primitive. La fonction $u : t \mapsto \ln t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $t \mapsto \frac{1}{t}\cdot$ Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x u'(t)\,u(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln^2 t}{2}\right]_1^x.$$
Ainsi, une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est $x \mapsto \frac{1}{2}\ln^2(x)$.

Exercice 11 La fonction $u : x \mapsto x^3$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a $u'(x) = 3x^2$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ étant continue, on a :
$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{u'(x)}{3\big(1+u^2(x)\big)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{Arctan}\left(x^3\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{12}\cdot$$

Exercice 12 On peut remarquer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$:
$$\frac{1}{t(1+t^4)} = \frac{t^3}{t^4(1+t^4)} = t^3\left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{1+t^4}\right).$$
Posons $u : t \mapsto t^4$. Il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $u'(t) = 4t^3$ pour tout $t > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t(1+t)}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $x > 0$:
$$\begin{aligned}\int_{1/x}^x \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^4)} &= \int_{1/x}^x \frac{u'(t)}{4}\left(\frac{1}{u(t)} - \frac{1}{1+u(t)}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{4}\Big[\ln(t^4) - \ln\big(1+t^4\big)\Big]_{1/x}^x\\ &= \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{x^4}{1+x^4}\right) - \ln\left(\frac{\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^4}}\right)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{x^4}{1+x^4}\right) - \ln\left(\frac{1}{1+x^4}\right)\right) = \ln x.\end{aligned}$$

Exercice 13 Il est clair que les trois intégrales sont définies.

1. Par linéarité :
$$I + J = \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \cdot$$

2. En posant le changement de variable affine $x = \frac{\pi}{2} - t$, on obtient :
$$\begin{aligned} I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, \mathrm{d}x &= \int_{\pi/2}^{0} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-1)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, \mathrm{d}t = J. \end{aligned}$$
Par conséquent, $I = J = \frac{\pi}{4} \cdot$

3. On a $K = \frac{1}{4} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(2x)\, \mathrm{d}x$. Le changement de variable linéaire $x = t/2$ donne :
$$K = \frac{1}{8} \int_0^{\pi} \sin^2 t \, \mathrm{d}t.$$
Puisque :
$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t + \pi/2)\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, \mathrm{d}t,$$
on a :
$$K = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{16} \cdot$$

Proposition 12

- Soit f une fonction continue sur un segment $[-\beta, -\alpha]$. En posant le changement de variable affine $x = -t$, on obtient :
$$\int_{-\beta}^{-\alpha} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(-t)\, \mathrm{d}t. \qquad (*)$$

- Si f est une fonction paire et continue, alors $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^a f(t)\, \mathrm{d}t$, et l'on conclut avec la relation de Chasles.

  Si f est une fonction impaire et continue, alors $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\, \mathrm{d}x = -\int_0^a f(t)\, \mathrm{d}t$, et l'on conclut avec la relation de Chasles.

- Si $f \in \mathcal{CM}\big([-a, a], \mathbb{K}\big)$ est impaire ou paire, il existe une subdivision σ adaptée à f, avec $\sigma = (-u_n, \ldots, -u_1, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ et $u_0 = 0$. Il suffit, pour cela, de prendre une subdivision adaptée à f puis une subdivision plus fine en lui ajoutant 0 et les opposés de tous ses éléments.

  La relation de Chasles donne :
$$\int_{-a}^{a} f(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{u_k}^{u_{k+1}} f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{-u_{k+1}}^{-u_k} f(x)\, \mathrm{d}x \right).$$
  On conclut alors à l'aide de la relation $(*)$.

Exercice 14 Puisque $-1 < -\frac{\pi}{8} \leqslant \pi/8 < 1$, la fonction sous le signe intégrale est bien définie et, de par les théorèmes généraux continue. Puisque la fonction est impaire, $I = 0$.

Exercice 15 La fonction à intégrer est paire et continue sur $[-1, 1]$, donc :

$$I = \int_{-1}^{1} |x| \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x.$$

La fonction $u : x \mapsto x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout x réel $u'(x) = 2x$. Ainsi :

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x &= \int_0^1 \big(1+u(x)\big)^{1/2} u'(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{2}{3}\big(1+u(x)\big)^{3/2}\right]_0^1. \end{aligned}$$

On en déduit que $I = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$.

Exercice 16

1. Le changement de variable $x = t + \frac{a+b}{2}$ donne :

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\, \mathrm{d}t,$$

et on conclut aisément à l'aide de la relation de Chasles.

2. Le changement de variable $x = a + b - t$ donne

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_b^a -f(a+b-t)\, \mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$$

et la conclusion suit naturellement.

Exercice 17 La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{1+\sin x}$ est continue et $f(\pi - x) = f(x)$, pour tout $x \in [0, \pi]$. Il s'ensuit que :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\sin x}\, \mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x}\, \mathrm{d}x.$$

La fonction $t \mapsto 2\operatorname{Arctan} t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En posant $x = 2\operatorname{Arctan} t$, on a $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x}\, \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{1+\sin x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2}{1+t^2} - \frac{2}{(1+t)^2}\right) \mathrm{d}t \\ &= \left[2\operatorname{Arctan} t + \frac{2}{1+t}\right]_0^1. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\sin x}\, \mathrm{d}x = \pi - 2.$$

Proposition 13 **Cas où la fonction f est continue** L'application $x \mapsto f(x-T)$ est continue sur l'intervalle contenant les points entre $a+T$ et $b+T$. Dans ces conditions, puisque $s \mapsto s+T$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut appliquer le formule de changement de variable, et donc :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x-T)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s$$

Cas où la fonction f est continue par morceaux Supposons $a < b$.
Soit $(u_0, \ldots, u_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f. Il est clair que l'application $g : x \mapsto f(x-T)$ est continue par morceaux sur $[a+T, b+T]$ et $(u_0+T, \ldots, u_n+T)$ une subdivision de $[a+T, b+T]$ adaptée à g. D'après la relation de Chasles et le cas précédent :

$$\begin{aligned}\int_{a+T}^{b+T} f(x-T)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k+T}^{u_{k+1}+T} f(x-T)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Proposition 14 Même si le cas des fonctions continues pourrait se déduire de celui des fonctions continues par morceaux, nous le traitons à part, car sa preuve est élémentaire.

Cas où $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. La fonction continue f sur l'intervalle $\mathbb{R}$ admet une primitive F. La fonction $y \mapsto \displaystyle\int_y^{y+T} f(x)\,\mathrm{d}x = F(y+T) - F(y)$ est dérivable et, pour tout $y \in \mathbb{R}$, sa dérivée en y vaut $f(y+T) - f(y) = 0$. Il s'ensuit qu'elle est constante.

Cas où $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x && \text{(Relation de Chalses)} \\ &= \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x+T)\,\mathrm{d}x && \text{(Translation)} \\ &= \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x && \text{(Périodicité)} \\ &= \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x && \text{(Relation de Chasles)}\end{aligned}$$

Exercice 18

1. La fonction sous le signe intégrale est continue. Posons le changement de variable $x = \sin t$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a $\mathrm{d}x = \cos t\,dt$ et par conséquent :
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2\,t)+1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\cdot$$

2. Il ne faut pas se jeter tête baissée sur le changement de variable $x = \sin t$. Bien que ce dernier conduise à des calculs raisonnables, il convient d'utiliser la méthode de l'exercice 15

Exercice 19 La fonction à intégrer est continue sur $[0,1]$. La fonction cosinus étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on peut légitimement poser $x = \cos t$. On a alors $\mathrm{d}x = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$ et donc :

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}\,\sin t\,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, pour tout $t \in [0,\pi/2]$, on a $1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$, $1+\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}$ et donc, du fait que la fonction tangente est positive sur $[0,\pi/4]$:

$$\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}\,\sin t = \tan\frac{t}{2}\,\sin t = 2\sin^2\frac{t}{2} = 1-\cos t.$$

Par conséquent :

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \big(1-\cos t\big)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Exercice 20

1. L'application f est continue sur $\mathbb{R}$. Posons $x = 2\,\mathrm{Arctan}\,t$.
   La fonction $t \mapsto 2\,\mathrm{Arctan}\,t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et elle définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi,\pi[$. On a $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Ainsi, en utilisant le fait que $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, on a pour tout $s \in\,]-\pi,\pi[$:
   $$\int_0^s \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int_0^{\tan\left(\frac{s}{2}\right)} \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\tan\left(\frac{s}{2}\right)}.$$
   Ainsi, la fonction F définie sur $]-\pi,\pi[$ par :
   $$F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$
   est une primitive de la restriction de f à cet intervalle.
2. Puisque $\lim\limits_{t\to\pi^-} \tan\left(\frac{x}{2}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{Arctan}\,x = \frac{\pi}{2}$, par composition des limites on obtient :
   $$\lim_{x\to\pi^-} F(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot$$
   On pose $F(\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Soit G l'unique primitive sur $\mathbb{R}$ de f s'annulant en 0. Celle-ci est bien définie, puisque f est continue. Il est clair par unicité que $G_{|]-\pi,\pi]} = F$.
   Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'application F_n définie par $F_n(x) = F\big(x-2n\pi\big)$ vérifie par 2π-périodicité de f :
   $$\forall x \in \big](2n-1)\pi,(2n+1)\pi\big[\quad F_n'(x) = f\big(x-2n\pi\big) = f(x) = G'(x)$$
   Il existe donc un réel $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait $G(x) = F\big(x-2n\pi\big) + \alpha_n$ pour tout $x \in \big](2n-1)\pi,(2n+1)\pi\big[$. On vérifie par récurrence et en utilisant la continuité de G en $(2n+1)\pi$ que $\alpha_n = \frac{2n}{\sqrt{3}}\pi$ lorsque n est un entier naturel, puis un entier relatif. En résumé :
   $$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \big](2n-1)\pi,(2n+1)\pi\big] \quad G(x) = F\big(x-2n\pi\big) + \frac{2n}{\sqrt{3}}\pi.$$

Exercice 21

1. En posant $x = \operatorname{Arctan} t$, on obtient :

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\ (1+\tan x)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2.$$

2. En posant $x = 2\operatorname{Arctan} t$, on obtient $I = \displaystyle\int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)(1+2t-t^2)}\,\mathrm{d}t$. Le calcul est alors nettement plus compliqué, et nous ne le ferons pas.

Exercice 22 Notons $f : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k\, x^k$ dans le cas où $a = 0$. Par linéarité de la dérivation, on a pour tout $i \in [\![0,n]\!]$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(i)}(x) = \sum_{k=i}^{n} \alpha_k\, k\,(k-1)\cdots(k-i+1)\, x^{k-i}\,.$$

En particulier, on a $f^{(i)}(0) = i!\,\alpha_i$ et l'égalité demandée s'ensuit.
Dans le cas général, posons $g : h \mapsto f(a+h)$. Il est facile d'établir par récurrence pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on a $g^{(i)}(0) = f^{(i)}(a)$. Il s'ensuit, à l'aide du premier cas :

$$\forall h \in \mathbb{R} \qquad g(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\, h^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\, h^k.$$

La conclusion est alors une conséquence du fait que pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = g(x-a)$.

Théorème 15 Démontrons par récurrence le prédicat $\mathcal{H}_n$: « pour tout $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et pour tout $(x,a) \in I^2$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \text{ ».}$$

- Pour $n = 0$, il s'agit de démontrer que, pour $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $x \in I$, on a :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

  Cette assertion n'est autre que le résultat du corollaire 7 de la page 649.
- Supposons le résultat vrai au rang n. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I, \mathbb{K})$. Alors, en particulier, f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et, d'après H_n, pour tout $(a,x) \in I^2$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x). \qquad (\star)$$

  Intégrons $R_n(x)$ par parties : les fonctions $u : t \mapsto f^{(n+1)}(t)$ et $v : t \mapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, avec $u'(t) = f^{(n+2)}(t)$ et $v'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}R_n(x) &= \Big[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(t)\Big]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(a) + R_{n+1}(x).\end{aligned}$$

La conclusion est alors immédiate, en reportant dans $(\star)$.

Exercice 23 La fonction $f\ :\ x \mapsto \ln(x+1)$ est de classe $\mathcal{C}^4$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. On a pour tout $x \geqslant 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\ f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad \text{et} \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}\cdot$$

Soit x un réel positif. La formule de Taylor-Laplace à l'ordre 3 nous donne :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \int_0^x 6\frac{(x-t)^3}{(1+t)^4}\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $t \in [0,x]$, on a $\frac{(x-t)^3}{(1+t)^4} \geqslant 0$ et donc, par croissance de l'intégrale, on obtient que $\displaystyle\int_0^x \frac{6(x-t)^3}{(1+t)^4}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. La conclusion découle de cette dernière inégalité.

Exercice 24 Par parité, il suffit d'établir cette inégalité pour tout $x \geqslant 0$.
En appliquant l'égalité avec reste intégral à l'ordre un à la fonction cosinus, on obtient, sachant que $\cos' = -\sin$ et $\cos'' = -\cos$, que pour tout x réel :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - \cos x = \int_0^x (x-t)\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $t \in [0,x]$, on a $x-t \geqslant 0$ et $\cos t \leqslant 1$, et donc $(x-t)\cos t \leqslant x-t$. Par croissance de l'intégrale :

$$1 - \cos x \leqslant \int_0^x (x-t)\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{(x-t)^2}{2}\Big]_0^x = \frac{x^2}{2}\cdot$$

Théorème 16 Pour tout $t \in I$, $\left|f^{(n+1)}(t)(t-x)^n\right| \leqslant M_{n+1}\,|t-x|^n$. Ainsi, lorsque $x \geqslant a$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^x (t-x)^n\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_a^x \left|(t-x)^n\, f^{(n+1)}(t)\right|\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_a^x M_{n+1}\,(t-x)^n\ \mathrm{d}t = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\, M_{n+1}.\end{aligned}$$

Il suffit d'appliquer cette inégalité au reste R_n de la formule de Taylor avec reste intégral.

Le cas où $x \leqslant a$ se traite de manière similaire.

Exercice 25

1. La fonction $f \,:\, x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-1,+\infty[$. On vérifie par récurrence que, pour tout x du domaine de définition et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$.

2. Pour tout $t \in [0,1]$, on $\frac{1}{1+t} \leqslant 1$. Par conséquent, par croissance des fonctions puissances positives, on a :
$$\left|f^{(n)}(t)\right| = \left|\frac{(n-1)!}{(1+t)^n}\right| \leqslant (n-1)!$$
Puisque $\left|f^{(n)}(0)\right| = (n-1)!$, on a $\max\limits_{t\in[0,1]} \left|f^{(n)}(t)\right| = (n-1)!$.

3. Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée à f entre 0 et x donne :
$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, x^k\right| \leqslant \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}\, n! \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}\cdot$$
La conclusion en découle.

Exercice 26 Puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, la fonction $\left|f^{(n+1)}\right|$ est continue sur le segment $[a,b]$; elle est en particulier bornée.

Notons $M_{n+1} = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|\, f^{(n+1)}(x) \,\right|$.

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange :
$$\forall x \in [a,b] \qquad \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^n\right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\, M_{n+1}. \tag{$*$}$$
Cela conduit à poser α la fonction définie sur $[a,b]$ par :
$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-a)^n}\left(f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^n\right) & \text{si } x \in\,]a,b]\ ; \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$
D'après l'inégalité $(*)$, pour $x \in\,]a,b]$, on a $\left|\alpha(x)\right| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|x-a|$. Cette dernière inégalité est évidemment encore vérifiée lorsque $x = a$. Ainsi :
$$\left|\alpha(x)\right| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|x-a| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$
La fonction α répond à la question, puisque par définition :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + (x-a)^n\,\alpha(x)$$
pour tout $x \in\,]a,b]$ et que l'égalité est évidement vérifiée pour $x = a$.

Théorème 17

- Commençons par le cas $n = 0$. Le résultat à démontrer est alors dans ce cas : « on peut écrire $f(x) = f(a) + \alpha(x)$ avec $\alpha(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ ». Cette dernière assertion ne fait que traduire la continuité de f en a.
- Supposons $n \geqslant 1$ et posons $g : x \mapsto f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$. On cherche à démontrer que $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} g(x) = 0$. D'après la formule de Taylor-Laplace, pour tout $x \in I$, on a :
$$g(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$
On remarque que $\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t = \frac{(x-a)^n}{n!}$.
On peut donc réécrire $g(x)$ sous la forme :
$$g(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\big(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\big)\,\mathrm{d}t.$$
Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de $f^{(n)}$ en a, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in I$ vérifiant $|t-a| \leqslant \eta$, on ait $\left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right| \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, si $|x-a| \leqslant \eta$, pour tout t entre x et a, on a $\left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right| \leqslant \varepsilon$ et donc, lorsque $x \geqslant a$, par croissance de l'intégrale, on a :
$$\begin{aligned} |g(x)| &\leqslant \int_a^x \left|\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\big(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\big)\right|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_a^x \varepsilon\,\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t = \varepsilon\,\frac{(x-a)^n}{n!}. \end{aligned}$$
Par conséquent $\left|\dfrac{g(x)}{(x-a)^n}\right| \leqslant \varepsilon$.
On obtient la même inégalité lorsque $x \leqslant a$. On peut alors conclure.

Exercice 27 Sachant que $\cos' = -\sin$ et $\cos'' = -\cos =$, on a $\cos'(0) = 0$ et $\cos''(0) = -1$. D'après la formule de Taylor-Young, il existe une fonction α de limite nulle en 0 telle que :
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\,\alpha(x).$$
Il s'ensuit que $\dfrac{\cos x - 1}{x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$.
On peut également démontrer ce résultat en remarquant que, pour tout réel x non nul, on a $\dfrac{\cos x - 1}{x^2} = -\dfrac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}$.

Exercice 28

1. Puisque f est dérivable en 0, par définition de la dérivée en un point, nous avons $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = f'(0)$.

2. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Pour tout point x de $\mathbb{R}^*$, on a :

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x) + f(0)}{x^2}.$$

On peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, les relations :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + x^2\alpha(x) \quad \text{et} \quad f'(x) = f'(0) + xf''(0) + x\beta(x)$$

où α et β sont des fonctions de limite nulle en 0. Par conséquent :

$$xf'(x) - f(x) + f(0) = x^2\frac{f''(0)}{2} + x^2\left(\beta(x) - \alpha(x)\right).$$

Il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = \frac{f''(0)}{2}$. Le théorème de la limite de la dérivée montre que g est dérivable en 0 et que la dérivée est continue en 0. La conclusion est alors immédiate.

Lemme 18 D'après l'inégalité des accroissements finis, f est M_1-lipschitzienne. On remarque de plus que $\int_a^b f(a)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(a)$. Ainsi, par linéarité nous avons :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f(a)\right| &= \left|\int_a^b \big(f(x) - f(a)\big)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_a^b \big|f(x) - f(a)\big|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^b M_1\,|x-a|\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{M_1}{2}\,(b-a)^2.
\end{aligned}$$

Proposition 19 En utilisant la relation de Chasles et en notant $a_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\,f(a_k)\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - (a_{i+1} - a_i)\,f(a_k)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M_1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{M_1(b-a)^2}{2\,n}.
\end{aligned}$$

Lemme 20 La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, ainsi que la fonction $x \mapsto x - \frac{a+b}{2}$ sur $[a,b]$. L'intégration par parties correspondante donne :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)}{2}\big(f(b)+f(a)\big) - \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Les fonctions f' et $g : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{8}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Le choix de la constante dans l'expression de g est dicté par la propriété $g(a) = g(b) = 0$. On peut donc faire une nouvelle intégration par parties :

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b g(x) f''(x)\,\mathrm{d}x.$$

Par ailleurs, en posant le changement variable affine $x = a + (b-a)t$, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b \big|g(x)\big|\,\mathrm{d}x &= \frac{(b-a)^3}{8}\int_0^1 \big|(2t-1)^2 - 1\big|\ \mathrm{d}t\\ &= \frac{(b-a)^3}{2}\int_0^1 \left(t - t^2\right)\ \mathrm{d}t = \frac{(b-a)^3}{12}\cdot\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\right| &= \left|\int_a^b g(x)f''(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b \big|g(x)f''(x)\big|\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \int_a^b M_2\big|g(x)\big|\,\mathrm{d}x = \frac{M_2}{12}\,(b-a)^3.\end{aligned}$$

Exercice 29

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S'_n\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right|\\ &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\,\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right)\right|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\,\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M_2}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 = \frac{M_2(b-a)^3}{12\,n^2}\cdot\end{aligned}$$

Exercice 30

1. Les fonctions réelles f' et f'' sont continues sur le segment $[a,b]$: elles sont bornées et atteignent leurs bornes. Cela justifie l'existence de m_1 et M_2, qui sont de plus strictement positifs ; par suite μ est défini.
2. La fonction f est une bijection strictement croissante (f' est à valeurs strictement positives sur un intervalle d'intérieur non vide) de l'intervalle $[a,b]$ sur $f\big([a,b]\big)$. L'unicité en découle, et, puisque $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires fournit l'existence.
3. La tangente au graphe en b à pour équation $y = f(b) + f'(b)\big(x-b\big)$.
   (a) Puisque $f'(b) > 0$ et $f(b) > 0$, l'abscisse $d = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ est bien définie et $d < b$.

(b) D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]c, b[$ tel que :

$$f(b) - f(c) = f'(\xi)\,(b - c).$$

Par conséquent :

$$f(b) - f(c) = f'(\xi)\,(b - c) < f'(b)(b - c),$$

car f' est strictement croissante et $b - c > 0$. Il s'ensuit que :

$$f(b) + f'(b)\,(c - b) < f(c) = 0.$$

Puisque $t \mapsto f(b) + f'(b)(t - b)$ est croissante, on en déduit que $c < d$.

4. Il est alors immédiat que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, à valeurs dans $[c, b]$, décroissante. Elle est convergente, de limite $\ell \in [c, b]$. De plus ℓ vérifie $\ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}\cdot$ Donc $\ell = c$.

5. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 entre c et x_n donne :

$$0 = f(c) = f(x_n) + (c - x_n)\,f'(x_n) + \int_{x_n}^{c} (c - t)\,f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

En divisant par $f'(x_n)$, qui est non nul, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (c - x_n) + \frac{1}{f'(x_n)} \int_{x_n}^{c} (c - t)\,f''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= c - x_{n+1} + \frac{1}{f'(x_n)} \int_{x_n}^{c} (c - t)\,f''(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

La formule demandée est alors immédiate.

6. D'après la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - c| &= \frac{1}{f'(x_n)}\left|\int_{x_n}^{c} (c - t) f''(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{1}{m_1}\left|\int_{x_n}^{c} (c - t) f''(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{1}{m_1}\int_{c}^{x_n} \big|(c - t) f''(t)\big|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{M_2}{m_1}\int_{c}^{x_n} (t - c)\,\mathrm{d}t \\ &= \mu\,(x_n - c)^2 \end{aligned}$$

Ce qui est le résultat demandé. La dernière inégalité est alors facilement obtenue par récurrence.

Remarque La méthode de Newton est extrêmement efficace. Si l'on connait un encadrement grossier $a \leqslant c \leqslant b$ de c, mais suffisamment précis pour que l'on ait $\lambda = \mu(b - a) < 1$, alors $|u_n - c| = \frac{1}{\mu}\left(\lambda^{2^n}\right)$ converge plus vite vers 0 que n'importe quelle suite géométrique. Si $\lambda = 10^{-1}$, on aurait *grosso modo* que u_n serait une approximation de c à 10^{-2^n} près ; à chaque itération, le nombre de chiffres significatifs double ! On parle alors de convergence quadratique. Dans les applications informatiques, on est cependant souvent limité par la précision des calculs.

S'entraîner et approfondir

12.1 Trouver des primitives des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto 2x^2 + 3x - 5$;
2. $x \mapsto (x-1)\sqrt{x}$;
3. $x \mapsto \dfrac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}$;
4. $x \mapsto \dfrac{x+3}{x+1}$.

12.2 Trouver des primitives des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x\sqrt{1+x}$;
2. $x \mapsto x^3 e^{2x}$;
3. $x \mapsto x^2 \ln x$.

12.3 Donner, pour $n \in \mathbb{N}$, une primitive de $x \mapsto \ln^n x$.

12.4 Soit f une fonction dérivable strictement croissante bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.
On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t - xf(x).$$

La fonction F est-elle dérivable ? En déduire une égalité.
Donner une interprétation géométrique du résultat.

12.5 Étudier la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

12.6 Montrer que :

$$\int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t\ln t}\right) \mathrm{d}t$$

tend vers 0 lorsque x tend vers 1.
En déduire la limite lorsque x tend vers 1 de :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

⋆ **12.7** Trouver toutes les applications continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

12.8 Soit f positive et continue sur $\mathbb{R}_+$.
On suppose qu'il existe un nombre réel k positif tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) \leqslant k \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que f est nulle.

On pourra utiliser la fonction $F(x) = e^{-kx} \int_0^x f(t)\, dt$.

12.9 Soient $c \in \mathbb{R}_+$, u et v deux applications continues positives de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad u(x) \leqslant c + \int_0^x u(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad u(x) \leqslant c \exp\left(\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

On pourra poser $\varphi(x) = c + \int_0^x u(t)v(t)\, dt$.

★★ **12.10** Soit f une fonction positive ou nulle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
On suppose que f'' est bornée et l'on note :

$$M = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|f''(x)\right|.$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ , \ \left|f'(x)\right| \leqslant \sqrt{2Mf(x)}.$$

12.11 Pour $x > 0$, on définit :

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\, dt.$$

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

On pourra écrire $\dfrac{\sin t}{t^2} = \dfrac{1}{t} + \alpha(t)$.

★ **12.12** Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et x un point de $\mathbb{R}$ tel que $f''(x) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout h dans $[-\eta, +\eta] \setminus \{0\}$, il existe un unique nombre $\theta \in \ ]0,1[$ avec

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x + \theta h).$$

La fonction définie sur $[-\eta, +\eta] \setminus \{0\}$ qui à h associe cet unique θ est notée θ_x.

2. Montrer que :

$$\lim_{h \to 0} \theta_x(h) = \frac{1}{2}.$$

Solution des exercices

12.1 1. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 2x^2 + 3x - 5$ est $F : x \mapsto \frac{2}{3}\, x^3 + \frac{3}{2}\, x^2 - 5x$.

2. Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x} = x^{3/2} - x^{1/2}$ est :

$$F : x \mapsto \frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{2}{3} x^{3/2}.$$

3. La fonction $f : x \mapsto \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} = x^{3/2} - 2x^{1/2} + x^{-1/2}$ admet

$$F : x \mapsto \frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{4}{3} x^{3/2} + 2x^{1/2}$$

comme primitive sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. La fonction $f : x \mapsto \frac{x+3}{x+1}$ est définie sur l'intervalle $I_1 =]-\infty, -1[$ et sur l'intervalle $I_2 =]-1, +\infty[$.
On peut remarquer que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ on a $f(x) = 1 + \frac{2}{x+1}$.
Ainsi, la fonction $F : x \mapsto x + 2 \ln |x+1|$ est une primitive de f sur chacun des intervalles I_1 et I_2.

12.2 1. La fonction $f : x \mapsto x\sqrt{1+x}$ est définie et continue sur l'intervalle $[-1, +\infty[$.
Pour $x \geqslant -1$, on peut écrire $f(x) = \big((x+1) - 1\big)\sqrt{1+x}$, soit encore :

$$f(x) = (x+1)^{3/2} - (x+1)^{1/2},$$

et donc $F : x \mapsto \frac{2}{5}\,(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}\,(x+1)^{3/2}$ est une primitive de f.

2. La fonction $f : x \mapsto x^3 e^{2x}$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle admet une primitive.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Le changement de variable linéaire $t = s/2$ donne :

$$\int_0^x t^3 e^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{16} \int_0^{2x} s^3 e^s\,\mathrm{d}s \qquad (*)$$

Les fonctions $u : t \mapsto t^3$ et $x \mapsto e^t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Une intégration par parties donne donc pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^y t^3 e^t\,\mathrm{d}t = y^3 e^y - 3 \int_0^y t^2 e^t\,\mathrm{d}t,$$

une deuxième intégration par parties donne :

$$\int_0^y t^3 e^t\,\mathrm{d}t = y^3 e^y - 3y^2 e^y + 6 \int_0^y t e^t\,\mathrm{d}t,$$

et une dernière :

$$\begin{aligned}\int_0^y t^3 e^t\,\mathrm{d}t &= y^3 e^y - 3y^2 e^y + 6y e^y - 6 \int_0^y e^t\,\mathrm{d}t \\ &= y^3 e^y - 3y^2 e^y + 6y e^y - 6e^y + 6.\end{aligned}$$

À l'aide de la relation $(*)$, on obtient donc que :

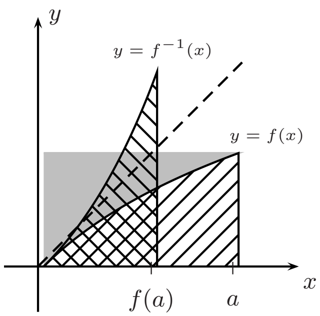
$$x \mapsto \frac{1}{8}\,\big(4\,x^3 - 6\,x^2 + 6\,x - 3\big)\, e^{2x}$$

est une primitive de f.

3. La fonction $f : x \mapsto x^2 \ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, comme produit de telles fonctions. Les fonctions $x \mapsto \frac{x^3}{3}$ et logarithme sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. On peut donc opérer une intégration par parties :
$$\int_1^x t^2 \ln t \,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} \ln x - \int_1^x \frac{t^2}{3} \,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9}$$
Par conséquent $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

12.3 Pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$, on pose $F_n(x) = \displaystyle\int_1^x \ln^n t \,\mathrm{d}t$, qui est bien définie car la fonction sous le signe intégrale est continue. Les fonctions $u : t \mapsto \ln^n t$ et $v : t \mapsto t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $u'(t) = n\frac{\ln^{n-1} t}{t}$. Par conséquent, une intégration par parties donne, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout réel $x > 0$:
$$\begin{aligned} F_n(x) &= x \ln^n(x) - n \int_1^x \ln^{n-1} t \;\mathrm{d}t \\ &= x \ln^n x - nF_{n-1}(x). \end{aligned}$$
En d'autres termes :
$$\frac{(-1)^n}{n!} F_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} F_{n-1}(x) + \frac{(-1)^n}{n!} x \ln^n(x).$$
En sommant, on obtient que $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x \ln^k x$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $\ln^n$.

12.4 La fonction f est une bijection continue (car dérivable) strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Ainsi f^{-1} est continue ; soit G la primitive sur $\mathbb{R}$ de f^{-1} s'annulant en 0. La fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + G\big(f(x)\big) - xf(x)$ est donc dérivable et à l'aide des formules de dérivation, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$F'(x) = f(x) + G'\big(f(x)\big)\, f'(x) - f(x) - xf'(x) = f(x) + x\, f'(x) - f(x) - xf'(x) = 0.$$
Avec la condition $F(0) = 0$, on en déduit que $F = 0$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) = xf(x).$$



Pour tout $a \in \mathbb{R}$, le terme $\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ correspond à l'aire algébrique du domaine délimité par l'axe Ox, la courbe $y = f(x)$ et la droite d'équation $x = a$.

Le terme $\int_0^{f(a)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$ correspond à l'aire du domaine hachuré délimité par l'axe Ox, la courbe d'équation $y = f^{-1}(x)$ et la droite d'équation $x = f(a)$. Par symétrie, cette aire est égale à l'aire du domaine grisé délimité par l'axe Oy, la courbe $y = f(x)$ et la droite d'équation $y = f(a)$.

L'union des deux domaines est un rectangle de côtés a et $f(a)$. La somme de ces deux aires vaut bien $a\,f(a)$.

12.5 La fonction est définie sur tout $\mathbb{R}$. De plus :

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} = -\int_{x}^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} = -F(x)$$

ce qui prouve que F est impaire. De plus, F est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée en x :

$$\frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}},$$

qui est du signe de :

$$2\sqrt{x^4+x^2+1} - \sqrt{16x^4+4x^2+1}. \qquad (*)$$

En multipliant par $2\sqrt{x^4+x^2+1} + \sqrt{16x^4+4x^2+1} > 0$, le terme $(*)$ est du signe de $4\left(x^4+x^2+1\right) - \left(16x^4+4x^2+1\right)$, c'est-à-dire du signe de $-12x^4+3$.
Pour $x > 0$, on a :

$$0 \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \leqslant \frac{2x-x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

ce qui donne :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$$

et, par imparité de F, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$. On résume l'étude à l'aide du tableau de variation de la restriction de f à $\mathbb{R}_+$.

x	0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
F	0	$\nearrow$	$F(1/\sqrt{2})$	$\searrow$	0

12.6 Puisque la fonction logarithme est dérivable en 1, on a $\frac{\ln x}{x-1} \underset{x\to1}{\longrightarrow} 1$. Il s'ensuit que $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t\ln t}$ admet un prolongement par continuité en 1 ; on le note encore φ. Soit Φ une primitive de φ. On a alors :

$$\int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t\ln t}\right) \mathrm{d}t = \Phi\left(x^2\right) - \Phi(x) \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0.$$

De plus :

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\ln x^2\right) - \ln\left(\ln x\right) = \ln 2.$$

La limite cherchée est donc $\ln 2$.

12.7 La fonction nulle est solution.

Soit f une solution non nulle.

Il existe donc $x_0 \in \mathrm{IR}$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathrm{IR} \quad f(x) = \frac{1}{f(x_0)} \int_{x-x_0}^{x+x_0} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit, par récurrence, que f est de classe C^∞ sur IR.
En dérivant la relation fonctionnelle par rapport à x, une fois, puis deux fois, on obtient pour tout $(x,y) \in \mathrm{IR}^2$:

$$f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y)$$
$$f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y).$$

De même, en dérivant par rapport à y, on obtient pour tout $(x,y) \in \mathrm{IR}^2$:

$$f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y)$$
$$f(x)f''(y) = f'(x+y) - f'(x-y).$$

D'où :

$$f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$$

et :

$$f''(x) - \frac{f''(x_0)}{f(x_0)} f(x) = 0.$$

En remarquant de plus que $f(0) = 0$, les solutions sont de l'une des trois formes :

$$x \mapsto k \operatorname{sh} \omega x, \quad x \mapsto k \sin \omega x, \quad x \mapsto kx.$$

En cherchant, parmi les fonctions de ce type, celles qui vérifient l'équation fonctionnelle, on trouve que les solutions sont :

$$x \mapsto \frac{2}{\omega} \sin \omega x, \quad x \mapsto \frac{2}{\omega} \operatorname{sh} \omega x, \quad x \mapsto 2x \quad \text{et} \quad x \mapsto 0 \quad (\omega \in \mathrm{IR}^*).$$

12.8 La fonction F est dérivable de dérivée négative donc est décroissante sur IR_+.
Or F étant positive, décroissante et vérifiant $F(0) = 0$, elle est identiquement nulle sur IR_+. Par conséquent $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est également nulle sur IR_+.
Par dérivation, on conclut que f est nulle.

12.9 Posons $\varphi(x) = c + \displaystyle\int_0^x u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$, pour $x \geqslant 0$.

La fonction φ est dérivable et :

$$\varphi'(x) = u(x)v(x) \leqslant \varphi(x)v(x).$$

En multipliant par $\exp\left(-\displaystyle\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t\right)$ et en posant :

$$\psi(x) = \varphi(x)\exp\left(-\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t\right),$$

on obtient $\psi'(x) \leqslant 0$ pour tout réel x, et donc $\psi(x) \leqslant \psi(0)$, c'est-à-dire :

$$\varphi(x)\exp\left(-\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant c,$$

d'où l'on déduit :

$$u(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant c\,\exp\left(\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

12.10 Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f.
Soit x et h deux réels quelconques. Alors :

$$\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \leqslant \frac{h^2}{2}M,$$

d'où :

$$\forall h \in \mathbb{R}\,,\ 0 \leqslant f(x+h) \leqslant f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}M.$$

Le trinôme du second degré en h :

$$h^2M + 2hf'(x) + 2f(x)$$

est toujours positif, donc son discriminant est négatif :

$$f'(x)^2 - 2f(x)M \leqslant 0$$

d'où puisque f et M sont positifs :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \left|f'(x)\right| \leqslant \sqrt{2Mf(x)}.$$

12.11 D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 appliquée à la fonction sinus, la fonction α définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t) - t}{t^2} & \text{si } t \neq 0\,; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$. Puisque α est continue, en notant A un primitive de α, on a pour tout x réel :

$$\int_x^{3x} \alpha\,(t)\ \mathrm{d}t = A(3x) - A(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Par propriété de linéarité, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \ln 3 + \int_x^{3x} \alpha(t)\,\mathrm{d}t$ et par conséquent :

$$\lim_{x\to 0}\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \ln 3.$$

12.12 1. On suppose $f''(x) > 0$, la démonstration étant similaire dans le cas où $f''(x) < 0$. Par continuité de f'', il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in [x-\eta, x+\eta]$, on ait $f''(t) > 0$. Dans ces conditions, $f'_{|[x-\eta,x+\eta]}$ est strictement croissante sur l'intervalle $[x-\eta, x+\eta]$ et donc injective. Soit $h \in [-\eta, \eta]\backslash\{0\}$. D'après le théorème des accroissements finis (*cf.* le corollaire 18 de la page 564), il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta\, h)\,.$$

L'unicité provient de la stricte monotonie de f' sur $[x-\eta, x+\eta]$.

2. La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en x appliquée à f donne l'existence d'une fonction α telle que, pour tout $h \in \mathbb{R}$, on ait :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{f''(x)}{2}h^2 + h^2\alpha(h)\,, \qquad (*)$$

où $\alpha(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. De même la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en x appliquée à f' donne l'existence d'une fonction β telle que, pour tout $h \in \mathbb{R}$, on ait :

$$f'(x+h) = f'(x) + hf''(x) + h\beta(h), \qquad (**)$$

où $\beta(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Ainsi, pour tout $h \in [-\eta, \eta]\backslash\{0\}$, on a, en utilisant la relation $(**)$ dans la relation $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$:

$$f(x+h) = f(x) + h\Big(f'(x) + f''(x)h\theta_x(h) + h\theta_x(h)\,\beta\big(h\theta_x(h)\big)\Big), \qquad (***)$$

et donc en identifiant les expressions $(***)$ et $(*)$, on obtient :

$$\frac{f''(x)}{2} = f''(x)\theta_x(h) + \theta_x(h)\beta\big(h\theta_x(h)\big) - \alpha(h).$$

On conclut en passant à la limite et en remarquant que la fonction θ_x est bornée et que $f''(x)$ est non nul.

Chapitre 13 : Analyse asymptotique

I Fonctions dominées, fonctions négligeables 692
1 Définitions, exemples 692
2 Propriétés 694
II Fonctions équivalentes 696
1 Définitions 696
2 Équivalents classiques 699
3 Résultats fondamentaux 700
4 Produit et quotient 701
5 Substitution dans un équivalent 704
6 Équivalents et addition 705
III Développements limités : généralités 706
1 Développement limité au voisinage de 0 707
2 Continuité, dérivabilité 709
3 Développements limités usuels 710
4 Forme normalisée d'un développement limité . . . 715
5 Développement limité en un réel x_0 717
IV Opérations sur les développements limités 718
1 Somme de développements limités 719
2 Produit de développements limités 720
3 Quotient de développements limités 724
4 Développements limités de fonctions composées . . 728
V Applications des développements limités 732
1 Recherche de limites et d'équivalents 732
2 Étude de l'allure d'une courbe au voisinage d'un point 734
3 Recherche d'asymptotes 735
VI Développements asymptotiques 737
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 740
Exercices 764

Analyse asymptotique

13

Les relations de comparaisons envisagées pour les suites au chapitre 8 peuvent également être définies dans le cas des fonctions. Elles permettent d'étudier et de comparer le comportement local de fonctions au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Dans tout le chapitre, et sauf mention du contraire :

- $\mathcal{D}$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide ;
- a est un point adhérent à $\mathcal{D}$;
- les fonctions considérées sont définies sur $\mathcal{D}$ et à valeurs réelles ou complexes ; si besoin, la lettre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Lorsqu'une fonction f est définie sur $\mathcal{D}$ et que a est un point adhérent à $\mathcal{D}$, nous dirons aussi que f est *définie au voisinage de* a.

I Fonctions dominées, fonctions négligeables

1 Définitions, exemples

Définition 1

Soit f et φ deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$.

1. On dit que f est **dominée** par φ au voisinage de a s'il existe une fonction u définie sur $\mathcal{D}$, bornée au voisinage de a et telle que $f = \varphi \times u$ au voisinage de a.

   On note alors $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\varphi)$ (lire « grand O de φ au voisinage de a »).

2. On dit que f est **négligeable** devant φ au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie sur $\mathcal{D}$ et tendant vers 0 en a telle que $f = \varphi \times \varepsilon$ au voisinage de a.

   On note alors $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi)$ (lire « petit o de φ au voisinage de a »).

Notation

- Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le point a au voisinage duquel on se place, alors on peut se contenter de noter $f = \mathrm{O}(\varphi)$ ou $f = \mathrm{o}(\varphi)$, sans mettre a en indice.
- Les notations suivantes sont également utilisées :

  $$f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\left(g(x)\right) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}\left(g(x)\right),$$

  ou plus simplement, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le point a :

  $$f(x) = \mathrm{O}\left(\varphi(x)\right) \qquad \text{et} \qquad f(x) = \mathrm{o}\left(\varphi(x)\right).$$

Remarque Dans la plupart des situations, ces relations de comparaison seront utilisées au voisinage de 0 ou de $+\infty$.

Exemples

1. On a $x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}(x^2)$.

   En effet, en considérant les fonctions $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $u : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, alors f et u sont définies sur $\mathbb{R}^*$, la fonction u est bornée, et l'on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = u(x) \times x^2.$$

   Remarque Dans cet exemple, les deux fonctions comparées : $x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $x \mapsto x^2$, sont *a priori* définies sur des domaines différents : $\mathbb{R}^*$ pour la première et $\mathbb{R}$ pour la seconde. Le fait d'écrire la relation $x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}(x^2)$ signifie alors implicitement que l'on considère la restriction de la fonction $x \mapsto x^2$ à $\mathbb{R}^*$.

2. On a $x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x)$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

   $$x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \underbrace{\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0} \times x.$$

3. Montrons que $x^2 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(\sin x)$. Pour tout $x \in \left]-\pi, 0\right[\cup \left]0, \pi\right[$, on peut écrire :

   $$x^2 = \underbrace{\left(\frac{x^2}{\sin x}\right)}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0} \times \sin x.$$

   En posant alors $\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sin x} & \text{si } x \in \left[-\pi, 0\right[\cup \left]0, \pi\right[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } |x| \geqslant \pi \end{cases}$, on a :

   $$\lim_0 \varepsilon = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \left]-\pi, \pi\right[\quad x^2 = \varepsilon(x) \times \sin x.$$

   Cela montre que $x^2 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(\sin x)$.

Remarque Dans l'exemple 3 ci-dessus, la fonction ε a été définie sur $\mathbb{R}$ tout entier afin de pouvoir vérifier la définition 1 de la page 692. En pratique, dans une telle situation, on peut se contenter de définir la fonction ε sur $]-\pi, \pi[$ seulement, puisque la seule relation faisant intervenir ε, en l'occurrence $x^2 = \varepsilon(x) \times \sin(x)$ est donnée pour $x \in]-\pi, \pi[$.

Les résultats suivants découlent de la définition 1 de la page 692 :

Proposition 1

1. Une fonction f est bornée au voisinage de a si, et seulement si, elle est dominée par la fonction constante 1, c'est-à-dire si, et seulement si, $f = \mathrm{O}(1)$.
2. Une fonction f tend vers 0 en a si, et seulement si, elle est négligeable devant la fonction constante 1, c'est-à-dire si, et seulement si, $f = \mathrm{o}(1)$.

Attention Comme dans le cas des suites, les écritures $f = \mathrm{o}(g)$ et $f = \mathrm{O}(g)$ ne sont que des notations, et ne sont pas à manipuler comme des égalités algébriques. Ainsi on peut avoir $f = \mathrm{o}(h)$ et $g = \mathrm{o}(h)$ sans pour autant que les fonctions f et g soient égales !
En cas de doute lors de l'utilisation de ces notations, ne pas hésiter à revenir à la définition, ou à la caractérisation à l'aide du quotient qui sera donnée dans la proposition 3 de la page ci-contre.

p.740 **Exercice 1** Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $\alpha < \beta$.

1. Montrer que $x^\alpha = o(x^\beta)$ au voisinage de $+\infty$.
2. Montrer que $x^\beta = \mathrm{o}(x^\alpha)$ au voisinage de 0.

Le résultat de l'exercice qui précède est très important, en particulier en raison de son utilité dans les développements limités :

- au voisinage de 0, les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ forment, lorsque l'exposant α croît, une gamme de fonctions négligeables les unes devant les autres, c'est-à-dire que $x^\beta = \mathrm{o}(x^\alpha)$ si $\alpha < \beta$;
- de même au voisinage de $+\infty$, ces fonctions sont négligeables les unes devant les autres au fur et à mesure que l'exposant α diminue, c'est-à-dire que $x^\alpha = \mathrm{o}(x^\beta)$ si $\alpha < \beta$.

2 Propriétés

Règles de calcul Les résultats suivants sont des traductions de propriétés connues sur les fonctions bornées et les fonctions tendant vers 0. Ils correspondent à ceux déjà vus pour les suites dans le chapitre 8. Toutes les relations de comparaison ci-dessous sont données au voisinage d'un point a fixé.

$$\begin{array}{rclcl}
 & & f = \mathrm{o}(\varphi) & \Longrightarrow & f = \mathrm{O}(\varphi) \\
f_1 = \mathrm{O}(\varphi_1) & \text{et} & f_2 = \mathrm{O}(\varphi_2) & \Longrightarrow & f_1 f_2 = \mathrm{O}(\varphi_1\varphi_2) \\
f_1 = \mathrm{o}(\varphi_1) & \text{et} & f_2 = \mathrm{O}(\varphi_2) & \Longrightarrow & f_1 f_2 = \mathrm{o}(\varphi_1\varphi_2) \\
f_1 = \mathrm{o}(\varphi_1) & \text{et} & f_2 = \mathrm{o}(\varphi_2) & \Longrightarrow & f_1 f_2 = \mathrm{o}(\varphi_1\varphi_2) \\
f_1 = \mathrm{O}(\varphi) & \text{et} & f_2 = \mathrm{O}(\varphi) & \Longrightarrow & f_1 + f_2 = \mathrm{O}(\varphi) \\
f_1 = \mathrm{o}(\varphi) & \text{et} & f_2 = \mathrm{o}(\varphi) & \Longrightarrow & f_1 + f_2 = \mathrm{o}(\varphi) \\
f = \mathrm{O}(\varphi_1) & \text{et} & \varphi_1 = \mathrm{O}(\varphi_2) & \Longrightarrow & f = \mathrm{O}(\varphi_2) \\
f = \mathrm{o}(\varphi_1) & \text{et} & \varphi_1 = \mathrm{O}(\varphi_2) & \Longrightarrow & f = \mathrm{o}(\varphi_2) \\
f = \mathrm{O}(\varphi_1) & \text{et} & \varphi_1 = \mathrm{o}(\varphi_2) & \Longrightarrow & f = \mathrm{o}(\varphi_2) \\
f = \mathrm{o}(\varphi_1) & \text{et} & \varphi_1 = \mathrm{o}(\varphi_2) & \Longrightarrow & f = \mathrm{o}(\varphi_2)
\end{array}$$

Proposition 2

Soit f et φ deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$.

1. Si $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\varphi)$ et si la fonction φ est bornée au voisinage de a, alors la fonction f l'est également.
2. Si $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\varphi)$ et si la fonction φ tend vers 0 en a, alors f également.
3. Si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi)$ et si la φ est bornée au voisinage de a, alors $\lim\limits_{a} f = 0$.

Principe de démonstration. Démonstration page 740

Utiliser la proposition 1 ainsi que les règles de calculs énoncées précédemment.

Proposition 3

Supposons que φ ne s'annule pas sur $\mathcal{D}\setminus\{a\}$. Supposons de plus que si $a \in \mathcal{D}$ et $\varphi(a) = 0$, alors $f(a) = 0$.
Alors, au voisinage de a, on a les équivalences suivantes :

1. f est dominée par φ si, et seulement si, $\dfrac{f}{\varphi}$ est bornée au voisinage de a ;
2. f est négligeable devant φ si, et seulement si, $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{\varphi} = 0$.

Principe de démonstration. Démonstration page 740

Là où φ ne s'annule pas, utiliser l'équivalence $f = u \times \varphi \Longleftrightarrow \dfrac{f}{\varphi} = u$.

Remarques

1. Ce résultat, très important et très pratique, permet souvent de ramener l'étude des relations de comparaisons à celle de limites de quotients.
2. Dans la pratique, les hypothèses « φ ne s'annule pas sur $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ » et « $(a \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad \varphi(a) = 0) \Longrightarrow f(a) = 0$ » sont rarement gênantes car :
   - les fonctions considérées ne s'annulent généralement pas sur $\mathcal{D} \setminus \{a\}$;
   - il est clair que si $\varphi(a) = 0$ et $f(a) \neq 0$, alors f n'est pas dominée par φ et donc encore moins négligeable devant φ.

Reformulation des résultats de croissances comparées

- Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Les résultats classiques de croissances comparées, sont :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0.$$

Ces résultats se reformulent ainsi avec le symbole « o » :

$$(\ln x)^b \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^a\right) \qquad \text{et} \qquad x^b \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(e^{ax}\right).$$

- Les autres résultats de croissances comparées sont, pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to 0} x^a \big|\ln x\big|^b = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} |x|^b e^{ax} = 0.$$

ce qui se reformule ainsi :

$$\big|\ln x\big|^b \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^{-a}\right) \qquad \text{et} \qquad e^{ax} \underset{x \to -\infty}{=} \mathrm{o}\left(|x|^{-b}\right).$$

II Fonctions équivalentes

1 Définitions

Proposition 4

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe une fonction u définie sur $\mathcal{D}$ tendant vers 1 en a telle que $f = g \times u$ au voisinage de a.

(ii) $f - g = \mathrm{o}(g)$ au voisinage de a.

Lorsque ce qui précède est vérifié, on dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a, et l'on note $f \underset{a}{\sim} g$.

Principe de démonstration. Démonstration page 741

Écrire la relation $f - g = \mathrm{o}(g)$ sous la forme $f - g = \varepsilon \times g$ avec $\varepsilon \underset{a}{\longrightarrow} 0$.

Notation

- Comme pour les notations o et O, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le point au voisinage duquel on se place, alors on note simplement $f \sim g$.
- On note également $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le point a, simplement $f(x) \sim g(x)$.

Exemple On a $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ puisque $x+1 = \dfrac{x+1}{x} \times x$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$.

Proposition 5

La relation $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur les fonctions définies sur $\mathcal{D}$.

Principe de démonstration. Démonstration page 741

Les propriétés de réflexivité, symétrie et transitivité découlent rapidement de la définition.

Remarque Le résultat de symétrie précédent justifie qu'en général, plutôt que de dire « f est équivalente à g au voisinage de a », on utilise la formulation symétrique suivante : « f et g sont équivalentes au voisinage de a »

p.741 **Exercice 2** Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et admettant en a une limite finie ℓ. Peut-on affirmer que $f \underset{a}{\sim} \ell$?

Attention Comme cela a été vu dans l'exercice précédent, si f tend en a vers une limite finie ℓ, et que l'on souhaite écrire l'équivalent $f \underset{a}{\sim} \ell$, alors il est important de vérifier que la limite finie ℓ est non nulle.

Remarque D'après la définition, une fonction f est équivalente à la fonction nulle signifie que f est identiquement nulle au voisinage du point considéré ; il est donc fort peu probable qu'un calcul d'équivalents mène à ce résultat.

p.742 **Exercice 3** Soit f la fonction polynomiale non nulle définie par $f(x) = \sum\limits_{k=p}^{n} a_k\, x^k$ où p et n sont deux entiers naturels vérifiant $p \leqslant n$, avec $a_p \neq 0$ et $a_n \neq 0$

1. Montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p\, x^p$.
2. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n\, x^n$ et $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} a_n\, x^n$.

Point méthode

On retiendra qu'une fonction polynomiale non nulle est :

- au voisinage de 0, équivalente à son terme de plus bas degré ;
- au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, équivalente à son terme de plus haut degré.

Proposition 6

Si f et g sont deux fonctions telles que $g \underset{a}{=} \mathrm{o}(f)$, alors $f+g \underset{a}{\sim} f$.

Démonstration. Supposons que $g \underset{a}{=} \mathrm{o}(f)$. On peut donc écrire $g = f \times \varepsilon$ où ε est une fonction tendant vers 0 en a. L'écriture $f+g = f \times \underbrace{(1+\varepsilon)}_{\underset{a}{\longrightarrow} 1}$ montre alors que $f+g \underset{a}{\sim} f$. □

p.742 **Exercice 4** Donner un équivalent « simple » en $+\infty$ de $x^2 + x + \ln x + \dfrac{1}{x}\cdot$

Point méthode

- Lorsque l'on écrit un équivalent pour une fonction, on cherchera toujours à écrire « l'équivalent le plus simple possible ».
- La proposition 6 combinée avec la transitivité de la relation $\underset{a}{\sim}$ justifie l'habitude suivante : si, au voisinage de a, une fonction f vérifie $f \sim g+h$, et si de plus $h = \mathrm{o}(g)$, alors on a, plus simplement, $f \sim g$.

Exemple Si une fonction f vérifie, au voisinage de 0 :

$$f(x) \sim 1 + x + x^2,$$

alors on le simplifiera systématiquement en $f(x) \sim 1$, équivalent plus simple et qui donne exactement la même information que le précédent.

Proposition 7

Supposons que g ne s'annule pas sur $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ et que, si $a \in \mathcal{D}$ et $g(a) = 0$, alors $f(a) = 0$. Alors la fonction f est équivalente à g au voisinage de a si, et seulement si, $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = 1$.

Principe de démonstration. C'est une conséquence de la proposition 3 de la page 695.

Démonstration page 742

Au même titre que la proposition 3 de la page 695, ce résultat est très utile dans la pratique : pour montrer que deux fonctions sont équivalentes, on se ramène souvent à étudier la limite de leur quotient.

Exemple Pour obtenir l'équivalent $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, il suffit de constater que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, ce qui est évident car il s'agit du taux d'accroissement de la fonction sin en 0.

2 Équivalents classiques

La proposition suivante permet d'obtenir de nombreux équivalents.

Proposition 8

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$. Supposons que f soit dérivable en un point a de $\mathcal{D}$ et que $f'(a) \neq 0$. Alors, au voisinage de a :

$$f(x) - f(a) \sim f'(a)(x-a).$$

Démonstration. Comme $f'(a) \neq 0$, la quantité $f'(a)(x-a)$ ne s'annule pas sur $\mathcal{D}\backslash\{a\}$. Donc, d'après la proposition 7 de la page ci-contre, la limite suivante montre l'équivalent souhaité :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{f'(a)(x-a)} = 1. \qquad \square$$

Exemples

1. On a $\sin x \sim x$ au voisinage de 0, car sin est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$.
2. On a $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0 et $\ln u \sim u-1$ au voisinage de 1.
   - le premier vient du fait que la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0 et vérifie $f'(0) = 1$.
   - le second vient du fait que la fonction ln est dérivable en 1 et vérifie $\ln'(1) = 1$.

p.742

Exercice 5 Montrer que, pour tout nombre réel α non nul, on a au voisinage de 0 :

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

Equivalents classiques au voisinage de 0

Les équivalents (au voisinage de 0) suivants sont obtenus grâce à la proposition 8. Ils sont à connaître.

$$\begin{aligned} e^x - 1 &\sim x & \qquad \ln(1+x) &\sim x \\ \sin x &\sim x & \operatorname{Arcsin} x &\sim x \\ \tan x &\sim x & \operatorname{Arctan} x &\sim x \\ \operatorname{sh} x &\sim x & \operatorname{th} x &\sim x \end{aligned}$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha\, x \qquad (\text{avec } \alpha \in \mathbb{R}^*)$$

Remarque Le dernier équivalent ci-dessus est également vrai si α est nul. Il n'est alors pas obtenu par la proposition 8, mais simplement par le fait que la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha - 1$ est alors la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

Attention La proposition 8 de la page précédente ne s'applique pas dans le cas où $f'(a) = 0$. Plus précisément, lorsque $f'(a) = 0$, on a :

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(x - a).$$

Ainsi, par exemple, on a $\cos(x) - 1 = \mathrm{o}(x)$ et $\operatorname{ch} x - 1 = \mathrm{o}(x)$ au voisinage de 0. Nous obtiendrons plus loin (*cf.* exemple de la page 701 et exercice 7) les équivalents classiques suivants :

$$\cos x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{ch} x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

3 Résultats fondamentaux

Proposition 9

Étant donné deux fonctions f et g équivalentes en a, si g a une limite finie ou infinie en a alors f a une limite en a et $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g$.

Démonstration. Conséquence immédiate de l'égalité $f = g \times h$ avec $\lim\limits_a h = 1$. □

Attention La réciproque du résultat précédent est fausse : deux fonctions peuvent en effet tendre toutes les deux vers 0 ou vers $+\infty$ (ou $-\infty$) sans être équivalentes, comme le montre l'exercice qui suit.

p.742

Exercice 6

1. Donner deux fonctions tendant vers $+\infty$ mais qui ne sont pas équivalentes.
2. Même question pour des fonctions tendant vers 0.

Proposition 10

Soit f et g deux fonctions équivalentes en a.

1. Si g est positive au voisinage de a, alors f aussi.
2. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors f non plus.

Démonstration. Comme $f \underset{a}{\sim} g$, on peut écrire $f = g \times h$ au voisinage de a, ou h est une fonction tendant vers 1 en a. La fonction h est alors à valeurs strictement positives au voisinage de a, ce qui permet d'obtenir facilement les deux propriétés souhaitées. □

Exemple Soit f la fonction $x \mapsto x^5 + x^3 - 2x^2$. On a :

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} -2x^2 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^* \quad -2x^2 \leqslant 0.$$

Donc, en appliquant le second point de la proposition précédente aux fonctions f et $g : x \mapsto -2x^2$ considérées sur $\mathbb{R}^*$, on peut affirmer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$x \in [-\eta, 0[\cup]0, \eta] \Longrightarrow f(x) \leqslant 0.$$

4 Produit, quotient, puissance d'équivalents

Produit et quotient

Proposition 11

Soit f_1, f_2, g_1 et g_2 quatre fonctions définies sur $\mathcal{D}$. Les équivalents suivants sont donnés au voisinage d'un point a.

1. Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors $f_1\, f_2 \sim g_1\, g_2$.
2. Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, et si aucune de ces fonctions ne s'annule sur $\mathcal{D} \setminus \{a\}$, alors $\dfrac{f_1}{f_2} \sim \dfrac{g_1}{g_2}$.

Principe de démonstration. Écrire $f_1 = g_1\, u_1$ et $f_2 = g_2\, u_2$ avec $\lim\limits_a u_1 = \lim\limits_a u_2 = 1$.

Démonstration page 742

Exemple *Équivalent de* $\cos t - 1$ *au voisinage de* 0

Pour tout $t \in \left]-\pi, \pi\right[$, on a $\cos t - 1 = \dfrac{\cos^2 t - 1}{\cos t + 1} = -\dfrac{\sin^2 t}{\cos t + 1}\cdot$

On a $\sin t \underset{t \to 0}{\sim} t$, donc $\sin^2(t) \underset{t \to 0}{\sim} t^2$. De plus, $\cos t + 1 \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 2$, donc $\cos t + 1 \underset{t \to 0}{\sim} 2$.
Il en résulte l'équivalent classique suivant au voisinage de 0 :

$$\cos t - 1 \sim -\frac{t^2}{2}\cdot$$

p.743 **Exercice 7** Donner un équivalent de $\operatorname{ch} t - 1$ au voisinage de 0.

p.743 **Exercice 8** Donner un équivalent simple de $\dfrac{(e^x - 1)^2}{(1+x)^5 - 1}$ au voisinage de 0.

Remarque Lorsque l'on opère sur les équivalents, on applique couramment la symétrie et la transitivité de la relation $\underset{a}{\sim}$, mais le plus souvent sans le mentionner explicitement.

p.743 **Exercice 9** Soit f une fonction rationnelle non nulle définie par :

$$f(x) = \frac{\sum\limits_{k=p}^{n} a_k\, x^k}{\sum\limits_{k=q}^{m} b_k\, x^k}$$

avec $p \leqslant n$, $q \leqslant m$ et a_p, a_n, b_q, b_m des réels non nuls.

1. Montrer qu'en 0, on a $f(x) \sim \dfrac{a_p}{b_q}\, x^{p-q}$ (on exprime cela en disant qu'en 0 une fonction rationnelle est équivalente au quotient de ses termes de plus bas degré).
2. Qu'en est-il en $+\infty$ et $-\infty$?

Mise à la puissance

De manière générale, il est possible de « passer un équivalent à la puissance », ce qui s'exprime par le résultat suivant :

Proposition 12

> Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$, équivalentes au voisinage d'un point a. Soit α un réel. Si les fonctions f^α et g^α sont bien définies sur $\mathcal{D}$, alors elles sont équivalentes au voisinage de a.

Principe de démonstration. Revenir à la définition. Démonstration page 743

Remarque La condition « les fonctions f^α et g^α sont bien définies sur $\mathcal{D}$ » s'exprime différemment suivant la valeur de l'exposant α.
De manière générale, en écrivant ;

$$f(x)^\alpha = \exp\left(\alpha \ln f(x)\right) \qquad \text{et} \qquad g(x)^\alpha = \exp\left(\alpha \ln g(x)\right),$$

on constate que les fonctions f et g considérées doivent être à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Cependant, certaines valeurs de α permettent de considérer la fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ sur un domaine plus grand que $\mathbb{R}_+^*$. Cela mène aux cas suivants :

- si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, alors il suffit que les fonctions f et g soient à valeurs dans $\mathbb{R}_+$;
- si $\alpha \in \mathbb{Z}_-$, alors il suffit que les fonctions f et g ne s'annulent pas ;
- si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors il n'y a aucune condition sur les valeurs prises par f et g.

Exemple Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$ telles que $f \underset{a}{\sim} g$.

Alors, au voisinage de a :

1. sans autre condition sur f et g, on a $f^4 \sim g^4$;
2. si f et g sont à valeurs positives, alors on a $\sqrt{f} \sim \sqrt{g}$;
3. si f et g sont à valeurs strictement positives, alors on a $f^{\ln 2} \sim g^{\ln 2}$.

Cas particulier de la racine cubique La fonction $u \mapsto \sqrt[3]{u}$ est définie sur $\mathbb{R}$, comme bijection réciproque de la fonction $u \mapsto u^3$. Donc, sans condition supplémentaire sur les fonctions f et g, si l'on a $f \underset{a}{\sim} g$, alors on a $\sqrt[3]{f} \underset{a}{\sim} \sqrt[3]{g}$.

Mise en garde : pas de composition !

Attention On vient de voir que si φ est une fonction de la forme $x \mapsto x^\alpha$, alors il est possible de « composer » une relation d'équivalence par φ. Cela tient au fait que si le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1, alors il en est de même pour le quotient $\dfrac{f(x)^\alpha}{g(x)^\alpha}$.

Cela est faux en général si φ n'est pas une fonction puissance : en effet, ce n'est pas parce que le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 que l'on peut dire quoi que ce soit du quotient $\dfrac{\varphi(f(x))}{\varphi(g(x))}$.
On ne peut donc pas, en général, composer un équivalent par une fonction.
L'exercice suivant concerne l'exemple classique de la fonction exponentielle.

p.743

Exercice 10

1. Étant donné deux fonctions $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, montrer que :
$$e^{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} e^{g(x)} \iff f(x) - g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$
2. Donner alors deux fonctions f et g équivalentes au voisinage de $+\infty$ mais telles que les fonctions $x \mapsto e^{f(x)}$ et $x \mapsto e^{g(x)}$ ne le soient pas.

Remarque Disposant d'un équivalent $f \underset{a}{\sim} g$ et d'une fonction φ, si l'on pense que l'équivalent $\varphi(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(g(x))$ a lieu, alors (sauf si φ est une fonction puissance, auquel cas on peut conclure directement) il est nécessaire, pour montrer l'équivalent souhaité, de revenir à la définition. C'est ce qui est fait dans l'exemple suivant.

Exemple Montrons qu'au voisinage de 0 on a $\ln(\sin x) \sim \ln x$.
Ne pouvant pas composer l'équivalent $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ par la fonction $\ln$, il faut procéder autrement. Écrivons, pour $x \in]0, \pi[$:
$$\ln(\sin x) = \ln x + \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right). \qquad (\star)$$
On a $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, ce qui assure que $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = o\big(\ln x\big)$.
La relation $(\star)$ donne alors, grâce à la proposition 6 de la page 698, l'équivalent souhaité $\ln(\sin x) \sim \ln x$.

Point méthode

Pour trouver un équivalent du logarithme d'une fonction qui tend vers 0 ou vers $+\infty$, la démarche de l'exemple précédent est classique : on factorise, à l'intérieur du logarithme, par un équivalent de la fonction considérée.

L'exercice suivant en est une autre illustration.

p.743

Exercice 11 Soit f et g deux fonctions à valeurs strictement positives, tendant vers $+\infty$ en a, et telles que $f \underset{a}{\sim} g$. Montrer qu'alors $\ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$.

5 Substitution dans un équivalent

Cas d'une fonction

Le résultat suivant permet d'obtenir de nombreux équivalents à partir d'équivalent déjà connus.

Proposition 13 (Substitution dans un équivalent)

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ définies au voisinage d'un point α.
Si φ est une fonction définie au voisinage d'un point a, à valeurs dans $\mathcal{D}$, et telle que $\lim\limits_{t\to a} \varphi(t) = \alpha$, alors on a $f\big(\varphi(t)\big) \sim g\big(\varphi(t)\big)$ au voisinage de a.

Principe de démonstration. C'est une composition de limites. Démonstration page 743

Exemples

1. Comme $2t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, alors l'équivalent $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$ donne $\sin(2t) \underset{t\to 0}{\sim} 2t$.
2. Comme $\cos t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, alors l'équivalent $\ln u \underset{u\to 1}{\sim} u-1$ donne $\ln(\cos t) \underset{t\to 0}{\sim} \cos t - 1$.

   Étant donné que $\cos t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} -\dfrac{t^2}{2}$, on obtient, par transitivité, $\ln(\cos t) \underset{t\to 0}{\sim} -\dfrac{t^2}{2}\cdot$
3. Comme $\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, l'équivalent $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$ donne $\exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}\cdot$

p.744 **Exercice 12** En exprimant $\cos t - 1$ en fonction de $\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$, retrouver l'équivalent classique de $\cos t - 1$ au voisinage de 0.

Cas d'une suite

Dans un équivalent, on peut remplacer la variable par une suite selon le même principe que précédemment :

Proposition 14

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ vérifiant $f \sim g$ au voisinage d'un point α.
Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ tendant vers α, alors :

$$f(a_n) \sim g(a_n).$$

Principe de démonstration. C'est une composition de limites. Démonstration page 744

Exemple De l'équivalent $\ln(\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$, on déduit que :

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}\cdot$$

Substitution dans des relations de domination et de négligeabilité

Les résultats de substitution donnés pour la relation d'équivalence (propositions 13 et 14) s'adaptent sans difficulté aux symboles o et O :

Proposition 15

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ deux fonctions définies au voisinage d'un point α. Soit φ une fonction définie au voisinage d'un point a, à valeurs dans $\mathcal{D}$, telle que $\lim\limits_{t\to a} \varphi(t) = \alpha$.

- Si $f = \mathrm{O}(g)$ au voisinage de α, alors on a $f(\varphi(t)) = \mathrm{O}\Big(g(\varphi(t))\Big)$.
- Si $f = \mathrm{o}(g)$ au voisinage de α, alors on a $f(\varphi(t)) = \mathrm{o}\Big(g(\varphi(t))\Big)$.

Proposition 16

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ deux fonctions définies au voisinage d'un point α. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ tendant vers α.

- Si $f = \mathrm{O}(g)$ au voisinage de α, alors on a $f(a_n) = \mathrm{O}\left(g(a_n)\right)$.
- Si $f = \mathrm{o}(g)$ au voisinage de α, alors on a $f(a_n) = \mathrm{o}\left(g(a_n)\right)$.

6 Équivalents et addition

Il n'y a pas de résultat général pour une somme ou une différence d'équivalents : si, au voisinage d'un point a, deux fonctions f_1 et f_2 sont équivalentes à g_1 et g_2 respectivement, rien ne dit que la fonction $f_1 + f_2$ est équivalente à $g_1 + g_2$.

Cela se comprend aisément en pensant à la caractérisation à l'aide du quotient : on peut très bien avoir $\dfrac{f_1}{g_1} \to 1$ et $\dfrac{f_2}{g_2} \to 1$ sans pour autant avoir $\dfrac{f_1+f_2}{g_1+g_2} \to 1$.

p.744 **Exercice 13** Trouver quatre fonctions f_1, f_2, g_1 et g_2 vérifiant :

$$\frac{f_1}{g_1} \xrightarrow[0]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{f_2}{g_2} \xrightarrow[0]{} 1 \qquad \text{mais pas} \qquad \frac{f_1+f_2}{g_1+g_2} \xrightarrow[0]{} 1.$$

Les trois exemples suivants illustrent, dans l'ordre, les trois situations classiques fréquemment rencontrées lors de la recherche d'un équivalent d'une somme de deux fonctions :

- *première situation* : l'une des deux fonctions est négligeable devant l'autre ; ce cas a déjà été traité par la proposition 6 de la page 698 ;
- *deuxième situation* : les deux fonctions « apportent chacune une contribution dans l'équivalent final, sans se compenser » ; ce cas se traite en revenant à la définition ;
- *troisième situation* : les deux fonctions « se compensent » ; sans information supplémentaire, il n'est alors pas possible de conclure.

Exemples

1. Cherchons un équivalent en 0 de la fonction $f : x \mapsto \sin x + \operatorname{sh}(x^2)$.
   L'équivalent $\operatorname{sh} u \underset{u\to 0}{\sim} u$ donne, par substitution : $\operatorname{sh}(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$.
   Comme $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, on peut affirmer que $\operatorname{sh}(x^2) = \mathrm{o}\big(\sin(x)\big)$ au voisinage de 0.
   Il en résulte (*cf.* proposition 6 de la page 698) qu'on a $f(x) \sim \sin(x)$ au voisinage de 0, ou encore $f(x) \sim x$.
2. Cherchons un équivalent en 0 de la fonction $f : x \mapsto \sin(5x) - \operatorname{sh}(2x)$.
   En 0, les quantités $\sin(5x)$ et $\operatorname{sh}(2x)$ sont respectivement équivalentes à $5x$ et $2x$. Cela peut laisser pressentir que f est équivalente en 0 à $5x-2x$, c'est-à-dire $3x$. Cette intuition est correcte. En effet, on a :
   $$f(x) = \sin(5x) - \operatorname{sh}(2x) = x \times \Bigg(\underbrace{\frac{\sin(5x)}{x} - \frac{\operatorname{sh}(2x)}{x}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 5-2=3}\Bigg).$$
   Comme $\dfrac{\sin(5x)}{x} - \dfrac{\operatorname{sh}(2x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 3$ et que $3 \neq 0$, on a $\dfrac{\sin(5x)}{x} - \dfrac{\operatorname{sh}(2x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 3$.
   Donc, par produit d'équivalent, on obtient l'équivalent suivant pour f :
   $$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x.$$
3. Intéressons-nous à un équivalent en 0 de la fonction $f : x \mapsto \sin(2x) - \operatorname{sh}(2x)$.
   On sait que :
   $$\sin(2x) \sim 2x \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh}(2x) \sim 2x.$$
   Dans ce cas, il ne faut surtout pas penser qu'un équivalent de f s'obtient en soustrayant ces deux équivalents : cela nous mènerait à dire que f est équivalente en 0 à la fonction nulle, ce qui est complètement faux (rappelons qu'une fonction est équivalente à la fonction nulle si, et seulement si, elle est identiquement nulle au voisinage du point considéré).
   En fait, dans cette situation, on peut simplement conclure que $f(x) = \mathrm{o}(x)$ au voisinage de 0, grâce au calcul suivant :
   $$f(x) = x \times \Bigg(\underbrace{\frac{\sin(2x)}{x} - \frac{\operatorname{sh}(2x)}{x}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}\Bigg).$$
   Dans un tel cas, si l'on souhaite obtenir un équivalent de f, il faudra utiliser un outil plus puissant, comme la formule de Taylor-Young ou plus généralement un développement limité (ce qui sera fait dans le suite de ce chapitre).

III Développements limités : généralités

Dans toute la suite de ce chapitre, n désigne un entier naturel.
Les fonctions considérées sont à valeurs réelles ou complexes. Si f désigne une telle fonction, alors nous noterons $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f.
Dans la plupart des cas, nous travaillerons au voisinage de 0. Ainsi, pour alléger les écritures, et sauf mention du contraire, nous utiliserons la notation o pour désigner o_0 ou $\mathrm{o}_{x\to 0}$.

1 Développement limité au voisinage de 0

Définition 2

Soit f une fonction définie au voisinage de 0. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n en 0**, s'il existe des complexes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction ε définie sur $\mathcal{D}_f$ tels que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{0} \varepsilon = 0. \tag{$\star$}$$

Remarques

- La relation $(\star)$ peut aussi s'écrire $\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, x^k = x^n \varepsilon(x)$, ou encore :

  $$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k = \mathrm{o}(x^n).$$

  Dans la pratique, on écrit couramment cette relation sous la forme :

  $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + \mathrm{o}(x^n), \tag{$\star\star$}$$

  qui a l'avantage d'être plus simple à écrire et d'éviter l'introduction d'une fonction ε. Cependant, l'utilisation faite du symbole « o » dans la relation $(\star\star)$ est nouvelle dans ce chapitre :

  * jusqu'à présent, le symbole « o » était utilisé seul, à droite d'un symbole « = », pour signifier qu'une fonction était négligeable devant une autre ;
  * dans la relation $(\star\star)$, le « $\mathrm{o}(x^n)$ » est utilisé pour désigner, dans une expression algébrique, une quantité dont on sait qu'elle est négligeable devant x^n au voisinage de 0.

- Plus généralement, si f, g et h sont trois fonctions telles que $f - g$ est négligeable devant h, alors on écrira indifféremment :

  $$f - g = \mathrm{o}(h) \qquad \text{et} \qquad f = g + \mathrm{o}(h).$$

Exemples

1. La fonction $f \;:\; \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - x^2 + 2x^3 + x^3 \ln(1+x) \end{array}$

   admet un développement limité à l'ordre 3 en 0. En effet, comme $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $x^3 \ln(1+x) = \mathrm{o}(x^3)$, ce qui permet d'écrire :

   $$f(x) = x - x^2 + 2x^3 + \mathrm{o}(x^3).$$

2. La fonction $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{array}$ admet un développement limité à tout ordre en 0. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, on sait que :
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$
ce qui s'écrit aussi :
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$
Comme $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \times \underbrace{\dfrac{x}{1-x}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0} = \mathrm{o}(x^n)$, la relation précédente est bien un développement limité à l'ordre n en 0.
3. La fonction $x \mapsto e^{-1/x^2}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, possède un développement limité en 0 à tout ordre n (avec tous les coefficients $a_0, \ldots, a_n$ nuls), puisque l'on a, par croissances comparées :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad e^{-1/x^2} = \mathrm{o}(x^n).$$

Proposition 17 (Unicité du développement limité)

Si f est une fonction pour laquelle il existe deux $(n+1)$-listes de complexes $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ vérifiant, au voisinage de 0 :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + \mathrm{o}(x^n) \qquad \text{et} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k\, x^k + \mathrm{o}(x^n),$$
alors on a $(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$.

Principe de démonstration. Si l'on suppose les deux listes distinctes, alors on considère le plus petit entier p tel que $a_p \neq b_p$ pour aboutir à une contradiction. Démonstration page 744

Définition 3

Si f possède un développement limité à l'ordre n en 0 de la forme :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n),$$
alors la fonction polynomiale $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ s'appelle **partie régulière du développement limité** de f à l'ordre n en 0.

Remarque Avec les notations de la définition précédente, et par abus de langage, on appelle également partie régulière, l'expression polynomiale $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Corollaire 18

Si f est une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0, de partie régulière $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, alors f admet un développement limité en 0 à tout ordre $p \leqslant n$, dont la partie régulière est $x \mapsto \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$.

Démonstration. C'est immédiat, car si f admet un développement limité à l'ordre n en 0 dont la partie régulière est $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, alors, pour tout $p \leqslant n$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + \underbrace{\sum_{k=p+1}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)}_{=\mathrm{o}(x^p)}. \qquad \square$$

Notation Avec les notations du corollaire 18, on dit que la partie régulière du développement de f à l'ordre p s'obtient en **tronquant à l'ordre p** celle du développement limité de f à l'ordre n.
On parle également de **troncature à l'ordre p**.

p.744

Exercice 14 Soit f une fonction polynomiale de degré au plus p, et $n \geqslant p$. Que vaut la partie régulière du développement limité à l'ordre n en 0 de f ?

Corollaire 19

Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0 dont la partie régulière est $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$.

- Si f est paire, alors $P(x)$ n'est formée que de puissances paires de x.
- Si f est impaire, alors $P(x)$ n'est formée que de puissances impaires de x.

Principe de démonstration. Écrire les développements limités des fonctions f et $x \mapsto f(-x)$, puis invoquer l'unicité du développement limité. Démonstration page 745

2 Continuité, dérivabilité

Développement limité à l'ordre 0

Proposition 20

Une fonction f admet un développement limité à l'ordre 0 en 0 si, et seulement si, elle admet une limite finie en 0 ; en notant alors $\ell = \lim_{0} f$, on a :

$$f(x) = \ell + \mathrm{o}(1).$$

Principe de démonstration. Écrire $\varepsilon(x) = f(x) - \ell$. Démonstration page 745

Remarque Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre 0 en 0 s'écrivant $f(x) = a_0 + \mathrm{o}(1)$. Avec cette hypothèse :

- si f est définie en 0, alors f est continue en 0 et $f(0) = a_0$;
- si f n'est pas définie en 0, alors on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = a_0$.

Développement limité à l'ordre 1

Proposition 21

Soit f une fonction définie en 0. Alors, f est dérivable en 0 si, et seulement si, f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0.
Ce développement limité est alors $f(x) = f(0) + xf'(0) + \mathrm{o}(x)$.

Démonstration page 745

Point méthode

Le résultat précédent s'utilise souvent lorsque l'on a pu obtenir, pour une fonction f définie en 0, un développement limité de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \mathrm{o}(x).$$

On peut alors affirmer :

- d'une part, que f est dérivable en 0 ;
- d'autre part, que $f(0) = a_0$ et $f'(0) = a_1$.

Attention Les propositions 20 et 21 ne se généralisent pas à des ordres plus grands. Ainsi, une fonction définie en 0 peut admettre un développement limité à l'ordre 2 en 0 sans pour autant être deux fois dérivable en 0, comme le prouve l'exercice suivant.

p.746

Exercice 15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{si } x \in \mathbb{R}^* \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0.$$

1. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.
2. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Si oui, que vaut $f'(0)$?
3. La fonction f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

3 Développements limités usuels

Cette partie est destinée à énoncer les formes des développements limités en 0, à un ordre n quelconque, des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{1}{1 \pm x} \ ; \quad \exp \ ; \quad \mathrm{ch} \ ; \quad \mathrm{sh} \ ; \quad \cos \ ; \quad \sin \ ; \quad x \mapsto (1+x)^\alpha \text{ (avec } \alpha \in \mathbb{R}) \ ;$$

$$\tan \text{ (à l'ordre 3)} \quad \text{et} \quad x \mapsto \ln(1 \pm x).$$

Par la suite, nous les supposerons acquis et les utiliserons dans les calculs.
Tout d'abord, on a déjà obtenu le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ (*cf.* exemple 2 de la page 708) :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n).$$

p.746

Exercice 16 Déduire du développement limité précédent le celui de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ à l'ordre n en 0.

Obtention de développements limités par la formule de Taylor-Young

Rappelons le résultat suivant (*cf.* le théorème 17 de la page 659), qui va nous permettre d'obtenir certains développements limités usuels qui suivent.

Proposition 22 (Formule de Taylor-Young à l'ordre n en 0)

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I d'intérieur non vide et contenant 0, alors elle admet un développement limité à l'ordre n en 0 qui s'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \mathrm{o}(x^n).$$

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction exp est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre n en 0. Le calcul de la valeur des dérivées successives en 0 donne :

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad \exp^{(k)}(0) = 1.$$

Donc, la formule de Taylor-Young nous donne :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n),$$

ou encore

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n).$$

Les fonctions élémentaires suivantes étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, la formule de Taylor-Young nous assure qu'elles possèdent chacune un développement limité à tout ordre en 0, que l'on peut obtenir en déterminant les valeurs en 0 de leurs dérivées successives, comme dans l'exemple précédent.

- Les fonctions hyperboliques ch et sh :

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})\ ;$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2}).$$

- Les fonctions trigonométriques cos et sin :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})\ ;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+2}).$$

Remarque Le choix des ordres $2n+1$ ou $2n+2$ dans les quatre développements limités précédents est lié à la parité des fonctions ch, sh, cos et sin. Il est est effet plus délicat d'écrire des développements limités à l'ordre n pour ces fonctions, car cela nécessite de tenir compte de la parité de n.

- Pour α réel quelconque, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \mathrm{o}(x^n).$$

Exemple Appliquons la formule précédente avec $\alpha = \frac{1}{2}$, afin d'obtenir le développement limité à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= (1+x)^{1/2} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)x^3 + \mathrm{o}(x^3),\end{aligned}$$

ce qui donne $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$.

p.746 **Exercice 17** Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot$

Remarque Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, les coefficients de la partie régulière du développement limité de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ne sont rien d'autre que les coefficients binomiaux $\binom{\alpha}{k}$, ce qui est cohérent avec la formule du binôme.

Approfondissement : coefficient binomial généralisé

Il arrive que l'on étende ainsi la notation $\binom{\alpha}{k}$ pour un réel α quelconque :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Avec cette notation, le développement limité de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ s'écrit :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \mathrm{o}(x^n).$$

Obtention de développements limités par primitivation

Proposition 23

Soit I un intervalle d'intérieur non vide contenant 0 et f une fonction définie sur I et possédant un développement limité à l'ordre n en 0, de partie régulière $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, x^k$. Si F est une primitive de f sur I, alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 dont la partie régulière est :

$$x \mapsto F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\, x^{k+1}.$$

Principe de démonstration. Commencer par traiter le cas où $f(x) = \mathrm{o}(x^n)$ et où F est la primitive de f qui s'annule en 0. Démonstration page 747

Remarque Le résultat précédent s'énonce également ainsi : si f est une fonction dérivable sur I, et si sa dérivée f' admet un développement limité à l'ordre n en 0 de partie régulière $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0, de partie régulière $x \mapsto f(0) + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{k+1} x^{k+1}$.

Exemples

1. **Développement limité de la fonction** $\tan$ **à l'ordre 3 en 0**
   On connaît un équivalent de la fonction $\tan$ en 0 : $\tan x \sim x$. Il en résulte que $\tan^2 x \sim x^2$, c'est-à-dire $\tan^2 x = x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.

   La relation $\tan' x = 1 + \tan^2 x$ nous donne alors le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la dérivée de la fonction $\tan$:

   $$\tan' x = 1 + x^2 + \mathrm{o}(x^2).$$

   Il en résulte, par primitivation, que la fonction $\tan$ admet le développement limité suivant à l'ordre 3 en 0 :

   $$\tan x = \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3),$$

   c'est-à-dire, comme $\tan(0) = 0$:

   $$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3).$$

2. **Développement limité en** 0 **de la fonction** $x \mapsto \ln(1+x)$
   Pour $n \geqslant 1$, en primitivant le développement limité à l'ordre $n-1$ en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$:
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \mathrm{o}(x^{n-1}),$$
   on obtient rapidement celui de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre n :
$$\ln(1+x) = \ln(1) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n),$$
   ce qui, comme $\ln(1) = 0$, donne :
$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n)\\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n).\end{aligned}$$

p.748

Exercice 18 Déduire du développement limité précédent celui de $x \mapsto \ln(1-x)$ à l'ordre n en 0.

p.748

Exercice 19 Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant un développement limité en 0 de la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$, obtenir le développement limité à l'ordre $2n$ en 0 de Arctan', puis en déduire le développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de Arctan.

Attention

- Pour une fonction f dérivable, l'existence d'un développement limité à l'ordre n pour f n'implique pas l'existence d'un développement limité à l'ordre $n-1$ pour f'. Considérons en effet la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{si } x \in \mathbb{R}^* \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0.$$
  La fonction f admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 mais f' n'a pas de limite en 0 et donc n'admet de développement limité à aucun ordre en 0 (*cf.* exercice 15 de la page 710).

  Dans cet exemple, $\varphi(x) = f(x) - x$ est négligeable devant x^2, mais $\varphi'(x)$ n'est pas négligeable devant $2x$, et ne tend même pas vers 0. Physiquement, cela traduit qu'un signal peut être « petit » mais avoir de grandes variations.
- En revanche, si f est dérivable et si l'on sait que f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$, alors le développement limité de f' peut s'obtenir en dérivant celui de f à l'ordre n.

Approfondissement À l'aide de la proposition 23 de la page 713, on peut donner une une autre démonstration de la formule de Taylor-Young. C'est le but de l'exercice suivant.

p.749

Exercice 20 Soit I un intervalle d'intérieur non vide contenant 0.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on veut montrer :

$$\forall f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \mathrm{o}(x^n). \qquad (H_n)$$

1. Justifier rapidement H_0 puis H_1.
2. À titre d'exercice, justifier H_2, en utilisant la proposition 23 de la page 713.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer H_n par récurrence,

4 Forme normalisée d'un développement limité

Définition 4

Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0 de partie régulière non nulle :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}(x^n).$$

Alors, en notant p le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$, l'écriture :

$$f(x) = x^p\big(a_p + a_{p+1}x + \cdots + a_n x^{n-p} + \mathrm{o}(x^{n-p})\big),$$

s'appelle **forme normalisée** du développement limité de f à l'ordre n en 0.

La forme normalisée se révèle utile lorsque l'on souhaite manipuler ou faire des considérations sur les plus petits exposants apparaissant dans les développements limités entrant en jeu dans un calcul.
Nous l'utiliserons en particulier :

- dans certains calculs de produits de développements limités (*cf.* exercice 30 de la page 723) ;
- pour étudier le développement limité d'un quotient $\dfrac{f}{g}$ dans le cas où g admet 0 comme limite (*cf.* page 726).

p.749

Exercice 21 Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0, existe-t-il toujours une forme normalisée associée ?

Équivalent, étude locale de signe

Proposition 24

Soit f une fonction dont le développement limité à l'ordre n en 0 possède une forme normalisée :

$$f(x) = x^p\big(a_p + a_{p+1}x + \cdots + a_n x^{n-p} + \mathrm{o}(x^{n-p})\big)$$

avec donc $a_p \neq 0$. Alors on a $f(x) \sim a_p x^p$ au voisinage de de 0.

Démonstration. Du développement normalisé de f il découle que $f(x) = a_p x^p + \mathrm{o}(x^p)$. Comme de plus a_p est non nul, on a $\mathrm{o}(x^p) = \mathrm{o}(a_p x^p)$. Il en résulte que $f(x) = a_p x^p + \mathrm{o}(a_p x^p)$, c'est-à-dire $f(x) \sim a_p x^p$. □

Remarques

1. Sous les hypothèses de la proposition précédente, on peut donc également affirmer que $f(x)$ est, au voisinage de 0, du même signe que $a_p x^p$.
2. Toujours sous ces hypothèses, on dispose d'un développement limité à l'ordre n en 0 pour la fonction $x \mapsto f(x) - a_p x^p$:

   $$f(x) - a_p x^p = a_{p+1}x^{p_1} + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}(x^n).$$

   Si la partie régulière de ce développement limité n'est pas nulle, et si $a_q x^q$ désigne le « premier terme non nul », alors on a l'équivalent suivant :

   $$f(x) - a_p x^p \sim a_q x^q.$$

   En particulier, $f(x) - a_p x^p$ est, au voisinage de 0, du signe de $a_q x^q$.
3. On peut itérer ce raisonnement autant de fois qu'il y a de termes non nuls dans le développement limité de f.

Exemple Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.
Le développement limité de f à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \mathrm{o}(x^2),$$

nous donne trois équivalents successifs.

- Tout d'abord, $f(x) \sim 1$, ce qui signifie simplement que $\lim\limits_{0} f = 1$.
- Ensuite, $f(x) - 1 \sim x$.
- Enfin, $f(x) - 1 - x \sim x^2$. En particulier, on en déduit que $f(x) - 1 - x$ est, au voisinage de 0, du signe de x^2, c'est-à-dire positif. Cela s'interprète graphiquement en disant que la courbe de f est, au voisinage de 0, au dessus de sa tangente (qui est la droite d'équation $y = 1 + x$).

5 Développement limité en un réel x_0

Définition 5

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f admet un **développement limité à l'ordre n** en x_0 si la fonction $h \mapsto f(x_0 + h)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, c'est-à-dire s'il existe une $(n+1)$-liste de complexes $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ telle que :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, h^k + \mathrm{o}(h^n). \qquad (\star)$$

Remarques

- Pour que la fonction $h \mapsto f(x_0 + h)$ puisse admettre un développement limité en 0, il est nécessaire que cette fonction soit définie au voisinage de 0, ce qui revient à dire que f soit définie au voisinage du point x_0.
- La relation $(\star)$ s'écrit encore :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + \mathrm{o}_{x \to x_0}\big((x - x_0)^n\big),$$

  et c'est en fait cette dernière expression qui est appelée **développement limité à l'ordre n en x_0 de f**.

  On remarque que le développement limité de f en x_0 est naturellement écrit en puissances de $(x - x_0)$. Il ne faut surtout pas développer, car ce sont bien les puissances de $(x - x_0)$ qui sont intéressantes au voisinage de x_0 car chacune des quantités est négligeable devant les précédentes.

Point méthode

Lorsque l'on cherche le développement limité d'une fonction en un point x_0, on se ramène de manière quasi-systématique à effectuer un développement limité en 0, en considérant la fonction $h \mapsto f(x_0 + h)$.

Exemple Donnons un développement limité à l'ordre 3 en 1 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}\cdot$

Tout d'abord, il est clair que f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et donc définie au voisinage de 1. Le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $h \mapsto f(1+h)$ s'écrit :

$$f(1+h) = \frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + \mathrm{o}(h^3).$$

On en déduit le développement limité à l'ordre 3 en 1 de f :

$$f(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \mathrm{o}_{x \to 1}\big((x-1)^3\big).$$

Remarque Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle d'intérieur non vide contenant x_0, alors la formule de Taylor-Young prouve que cette fonction possède un développement limité à l'ordre n en x_0 qui est :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \mathrm{o}_{x\to x_0}\big((x-x_0)^n\big),$$

ou encore :

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \mathrm{o}(h^n).$$

p.750 **Exercice 22** Donner un développement limité à l'ordre 2 de la fonction cos en $\dfrac{\pi}{3}\cdot$

p.750 **Exercice 23** Étant donné $x_0 \in \mathbb{R}$, donner un développement limité à l'ordre 3 en x_0 de la fonction exp.

IV Opérations sur les développements limités

Cette partie donne des outils pour manipuler les développements limités et explique comment effectuer concrètement les calculs. Il est fortement recommandé de traiter les exercices proposés au fur et à mesure, car c'est à ce prix que se fait l'assimilation des techniques de calcul.

L'utilisation de la formule de Taylor-Young n'est pas en général la meilleure méthode pour calculer effectivement le développement limité d'une fonction f, car elle suppose l'existence des dérivées successives de f et nécessite leur calcul (souvent pénible). Quant à la méthode de primitivation, elle est efficace lorsqu'elle peut s'appliquer, mais cela concerne des cas bien particuliers.

On préfère le plus souvent utiliser les résultats que l'on va établir dans cette partie, qui permettent d'obtenir des développements limités par somme, produit, quotient ou encore composition d'autres développements limités.

Remarque Nous avons vu que tout calcul de développement limité se ramène à un calcul en 0. En effet, si x_0 désigne un réel, n un entier naturel et f une fonction, alors le calcul du développement limité de f à l'ordre n en x_0 se fait en déterminant le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $h \mapsto f(x_0+h)$.

Dans la suite, nous nous contentons donc de présenter les opérations sur les développements limités en 0.

1 Somme de développements limités

Proposition 25

Si f et g sont deux fonctions définies sur un même ensemble $\mathcal{D}$ et admettent chacune un développement limité à l'ordre n en 0, alors il en est de même pour la fonction $f+g$.

Démonstration. C'est immédiat, car si les développements limités de f et g s'écrivent :

$$f(x)=P(x)+\mathrm{o}(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x)=Q(x)+\mathrm{o}(x^n),$$

alors on a :

$$f(x)+g(x)=\big(P(x)+\mathrm{o}(x^n)\big)+\big(Q(x)+\mathrm{o}(x^n)\big)=\underbrace{P(x)+Q(x)}_{\text{de degré au plus } n}+\underbrace{\mathrm{o}(x^n)+\mathrm{o}(x^n)}_{=\mathrm{o}(x^n)}. \qquad \square$$

Remarques

1. On constate dans la démonstration précédente que la partie régulière du développement limité de $f+g$ s'obtient simplement en additionnant les parties régulières des développements limités de f et g.
2. Soit λ et μ deux complexes. Si f et g sont deux fonctions admettant des développements limités à l'ordre n en 0, alors il est clair qu'il en est de même pour les fonctions $x\mapsto\lambda f(x)$ et $x\mapsto\mu g(x)$, et donc également, d'après la proposition précédente, pour la fonction $x\mapsto\lambda f(x)+\mu g(x)$.

p.750

Exercice 24

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x\mapsto\sin x+\cos x$.

p.750

Exercice 25

Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x\mapsto e^x+\ln(1+x)$.

p.751

Exercice 26

Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}-e^x$.

p.751

Exercice 27 Retrouver, à partir du développement limité à l'ordre $2n$ en 0 de la fonction exp, les développements limités à l'ordre $2n$ en 0 des fonctions ch et sh.

2 Produit de développements limités

Proposition 26

> Si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ admettant chacune un développement limité à l'ordre n en 0, alors il en est de même pour la fonction $f\times g$.

Démonstration. Supposons que f et g possèdent des développements limités qui s'écrivent :

$$f(x)=P(x)+\mathrm{o}(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x)=Q(x)+\mathrm{o}(x^n).$$

En développant le produit $f(x)g(x)$, il vient :

$$f(x)g(x)=P(x)Q(x)+P(x)\mathrm{o}(x^n)+Q(x)\mathrm{o}(x^n)+\mathrm{o}(x^{2n}).$$

Comme les fonctions polynomiales P et Q sont bornées au voisinage de 0, on a $P(x)\mathrm{o}(x^n)=\mathrm{o}(x^n)$ et $Q(x)\mathrm{o}(x^n)=\mathrm{o}(x^n)$. Comme de plus $\mathrm{o}(x^{2n})=\mathrm{o}(x^n)$, on obtient :

$$f(x)g(x)=P(x)Q(x)+\mathrm{o}(x^n).$$

Soit R la fonction polynomiale obtenue en tronquant à l'ordre n le produit PQ. Alors, R est une fonction polynomiale, de degré au plus n, qui vérifie $P(x)Q(x)=R(x)+\mathrm{o}(x^n)$. Il en résulte que :

$$f(x)g(x)=R(x)+\mathrm{o}(x^n)$$

ce qui est le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $f\times g$. □

Remarque La démonstration précédente nous indique que la partie régulière du développement limité de $f\times g$ s'obtient en tronquant à l'ordre n le produit des parties régulières des développements limités de f et g.
Autrement dit, et en reprenant les notations de la démonstration, $R(x)$ est obtenue, à partir de l'expression polynomiale $P(x)Q(x)$, en ne conservant que les termes de degré au plus n.

Exemple Déterminons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction :

$$f : x\mapsto \frac{e^x}{1-x}\cdot$$

La fonction f apparaît comme le produit des fonctions $x\mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $x\mapsto e^x$, qui admettent les développements limités à l'ordre 3 en 0 suivants :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\mathrm{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3).$$

Il en résulte que :

$$f(x)=\big(1+x+x^2+x^3+\mathrm{o}(x^3)\big)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)\right),$$

ce qui donne, en développant et en simplifiant :

$$\begin{aligned} f(x)&=1+(x+x)+\left(\frac{x^2}{2}+x^2+x^2\right)+\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{2}+x^3+x^3\right)+\mathrm{o}(x^3)\\ &=1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+\mathrm{o}(x^3). \end{aligned}$$

Point méthode
Comme on l'a fait dans l'exemple précédent, lorsque l'on développe un produit de développements, on écrit les différents termes en les ordonnant par puissances croissantes en s'arrêtant à l'ordre adéquat.

p.751 **Exercice 28**
Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x(1+x)^{1/3}$.

Par récurrence, on déduit de la proposition 26 le résultat suivant.

Corollaire 27
Soit $p \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0, alors il en est de même pour la fonction $x \mapsto \big(f(x)\big)^p$.

Démonstration. C'est une récurrence immédiate, car le résultat est évidemment vrai si $p = 0$, et si on le suppose vrai pour un certain $p \in \mathbb{N}$, alors en écrivant $f(x)^{p+1} = f(x)f(x)^p$, il suffit d'appliquer la proposition 26 de la page ci-contre avec les fonctions f et $x \mapsto f(x)^p$. □

Optimisation des ordres de précision

D'après la proposition 26 de la page précédente, , lorsque l'on cherche le développement limité à l'ordre n d'une fonction de la forme $f \times g$, il peut sembler nécessaire d'effectuer les développements limités de f et g à l'ordre n.
En réalité, il arrive qu'il ne soit pas nécessaire de « pousser » les développements limités de f et g à l'ordre n, mais que l'on puisse se contenter d'un ordre plus petit. Commençons par un exemple.

Exemple Développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x \ln(1+x)$.

- **Méthode non optimale.** Si l'on écrit les développements limités à l'ordre 2 des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$:
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2) \qquad \text{et} \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2),$$
alors en effectuant le produit, puis en développant et simplifiant, on obtient le résultat :
$$e^x \ln(1+x) = \Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\Big)\Big(x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\Big) = x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2).$$
Cependant, dans le calcul précédent, on constate que, compte tenu du fait que l'on souhaite obtenir un développement à l'ordre 2, on a écrit un terme inutile. Il s'agit du terme $\dfrac{x^2}{2}$ apparaissant dans le premier facteur :
$$\Big(1 + x + \boxed{\frac{x^2}{2}} + \mathrm{o}(x^2)\Big)\Big(x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\Big).$$
En effet, lors du développement de l'expression, ce terme donne naissance à trois autres : $\dfrac{x^3}{2}$, $-\dfrac{x^4}{4}$ et $\dfrac{x^2}{2}\mathrm{o}(x^2)$, qui sont tous négligeables devant x^2.

- **Optimisation du calcul.** En fait, ici, on peut se contenter d'écrire le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $x \mapsto e^x$ pour mener à bien le calcul. En effet, lorsqu'on écrit :

$$e^x \ln(1+x) = \big(1 + x + \mathrm{o}(x)\big)\Big(x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\Big),$$

les deux termes qui limitent la précision du calcul sont :

  * le $\mathrm{o}(x)$ du premier facteur, qui va être multiplié, « au minimum », par x, et donc qui va donner un terme en $\mathrm{o}(x^2)$;
  * le $\mathrm{o}(x^2)$ du deuxième facteur (qui va être multiplié, « au minimum », par 1).

On obtient donc bien la précision en $\mathrm{o}(x^2)$ souhaitée :

$$e^x \ln(1+x) = x + \Big(-\frac{x^2}{2} + x^2\Big) + \mathrm{o}(x^2) = x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2).$$

Remarque Il faut bien comprendre que, dans l'exemple précédent, c'est l'absence de terme constant dans le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ qui permet de se contenter d'un ordre 1 pour le développement limité de $x \mapsto e^x$. En effet, en développant le produit, chaque terme du développement limité de $x \mapsto e^x$, et donc en particulier le terme $\mathrm{o}(x)$, est multiplié par des termes polynomiaux dont l'exposant vaut au moins 1, ce qui entraîne ce « gain » d'un degré de précision.

p.751 **Exercice 29** *Développement limité de* tan *à l'ordre 5 en 0.*

Constater que le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction tan permet d'obtenir un développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction tan′, et en déduire le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction tan.

Plus généralement, supposons que nous souhaitions obtenir un développement limité à l'ordre n pour une fonction de la forme $f \times g$, et que l'on dispose des formes normalisées des développements limités de f et g en 0, à des ordres r et s respectivement :

$$f(x) = x^p\big(a_p + a_{p+1}x + \cdots + a_r x^{r-p} + \mathrm{o}(x^{r-p})\big) \quad (\text{avec } a_p \neq 0)$$

et :

$$g(x) = x^q\big(b_q + b_{q+1}x + \cdots + a_s x^{s-q} + \mathrm{o}(x^{s-q})\big) \quad (\text{avec } b_q \neq 0).$$

Alors, en développant le produit $f(x)g(x)$, on constate que les deux termes qui limitent la précision du calcul sont :

$$x^p \times a_p \times x^q \times \mathrm{o}(x^{s-q}) \quad \text{et} \quad x^p \times \mathrm{o}(x^{r-p}) \times x^q \times b_q,$$

c'est-à-dire, comme $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$:

$$\mathrm{o}(x^{s+p}) \quad \text{et} \quad \mathrm{o}(x^{r+q}).$$

Cela nous permet alors de choisir judicieusement les ordres r et s afin d'obtenir la précision en $o(x^n)$ souhaitée.

Remarque En l'occurrence, avec les notations précédentes, on voit qu'il est pertinent de faire les développements limités de f et g aux ordres $n-q$ et $n-p$ respectivement. De manière informelle :

- la factorisation par x^p du développement limité de f permet de gagner p degrés de précision vis-à-vis du développement limité de g ;

- la factorisation par x^q du développement limité de g permet de gagner q degrés de précision vis-à-vis du développement limité de f.

Point méthode

Dans le calcul du développement limité à l'ordre n d'une fonction de la forme $f \times g$, afin de choisir judicieusement les ordres auxquels effectuer les développements limités des fonctions f et g, on écrirera en général ceux-ci sous forme normalisée.

p.752 **Exercice 30** Déterminer le développement limité à l'ordre 6 en 0 de la fonction :

$$f \; : \; x \mapsto \left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right)\left(\cos x - 1\right),$$

en choisissant judicieusement les ordres de précision.

p.753 **Exercice 31** *Produit de trois fonctions*

Déterminer le développement limité à l'ordre 7 en 0 de la fonction :

$$f \; : \; x \mapsto (1-\cos x)(e^x - 1)(x - \sin x).$$

p.753 **Exercice 32** *(Approfondissement)*

Soit f_1, f_2 et f_3 trois fonctions. En supposant que l'on dispose des développements limités en 0 suivants (écrits sous forme normalisée) :

$$f_1(x) = x^{p_1}\left(a_{p_1} + a_{p_1+1}x + \cdots + a_{n_1}x^{n_1-p_1} + o(x^{n_1-p_1})\right),$$

$$f_2(x) = x^{p_2}\left(b_{p_2} + b_{p_2+1}x + \cdots + b_{n_2}x^{n_2-p_2} + o(x^{n_2-p_2})\right),$$

$$f_3(x) = x^{p_3}\left(c_{p_3} + c_{p_3+1}x + \cdots + c_{n_3}x^{n_3-p_3} + o(x^{n_3-p_3})\right),$$

exprimer, en fonction des entiers p_1, p_2, p_3, n_1, n_2 et n_3, l'ordre auquel il est possible d'obtenir le développement limité en 0 de la fonction $f_1 \times f_2 \times f_3$.

3 Quotient de développements limités

Développement limité de $\dfrac{1}{1-u}$

Proposition 28

Soit u une fonction telle que $\lim\limits_0 u = 0$. Si u admet un développement limité à l'ordre n en 0, alors la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-u(x)}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, dont la partie régulière est la même que celle du développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} u(x)^k$.

Démonstration page 753

Point méthode

La proposition 28 nous dit que pour déterminer le développement limité de $\dfrac{1}{1-u}$, il suffit de déterminer celui de la fonction $\sum\limits_{k=0}^{n} u^k$, qui s'obtient, par sommes et produits de développements limités, à partir du développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction u.

Exemple

Déterminons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f \ : \ x \mapsto \dfrac{1}{1-\ln(1+x)}$.

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ tend vers 0 en 0, et possède un développement limité à l'ordre 3 en 0. Donc, d'après la proposition 28, la fonction f possède un développement limité à l'ordre 3 en 0, qui a même partie régulière que celui de la fonction $x \mapsto 1 + \ln(1+x) + \big(\ln(1+x)\big)^2 + \big(\ln(1+x)\big)^3$.

On a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3),$$

puis :

$$\big(\ln(1+x)\big)^2 = x^2 - x^3 + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad \big(\ln(1+x)\big)^3 = x^3 + \mathrm{o}(x^3).$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + \Big(-\frac{x^2}{2} + x^2\Big) + \Big(\frac{x^3}{3} - x^3 + x^3\Big) + \mathrm{o}(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3). \end{aligned}$$

p.754

Exercice 33

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $f \ : \ x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$.

Développement limité d'un quotient

Proposition 29

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ admettant chacune un développement limité à l'ordre n en 0. Si g a une limite non nulle en 0, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.

Démonstration. La fonction g admettant une limite non nulle en 0, elle ne s'annule pas au voisinage de 0, ce qui assure que la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bien définie au voisinage de 0.

Posons $\ell = \lim\limits_{0} g$. Au voisinage de 0, on peut écrire :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{\ell} \times \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{g(x)}{\ell}\right)}. \qquad (\star)$$

Notons u la fonction $x \mapsto 1 - \dfrac{g(x)}{\ell}$. Alors, u admet un développement limité à l'ordre n en 0 et $\lim\limits_{0} u = 0$. La proposition 28 de la page ci-contre donne alors que la fonction $\dfrac{1}{1-u}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.

Par suite, d'après la relation $(\star)$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, comme produit de fonctions admettant chacune un développement limité à l'ordre n en 0. $\square$

Point méthode

La relation $(\star)$ de la démonstration précédente nous indique comment le calcul du développement limité d'un quotient se ramène, essentiellement, à l'utilisation de la proposition 28 de la page précédente.

Cette relation n'est certainement pas à apprendre par cœur. On la retrouve naturellement :

- en écrivant le dénominateur $g(x)$ sous la forme : $g(x) = \ell \times \dfrac{g(x)}{\ell}$, pour faire apparaître la quantité $\dfrac{g(x)}{\ell}$ qui tend vers 1 ;
- puis en écrivant $\dfrac{g(x)}{\ell}$ sous la forme $1 - \left(1 - \dfrac{g(x)}{\ell}\right)$ pour voir apparaître une forme en $1 - u(x)$ avec $u(x)$ tendant vers 0.

Exemple Déterminons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$.

On voit facilement que le dénominateur $1 + e^x$ tend vers 2 quand x tend vers 0. Écrivons :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1+e^x}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1+e^x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{1-e^x}{2}\right)}.$$

En notant u la fonction $x \mapsto \dfrac{1-e^x}{2}$, on a donc $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-u(x)}$.
Étant donné que $\lim\limits_{0} u = 0$ et que la fonction u admet un développement limité à l'ordre 3 en 0, la proposition 28 de la page 724 nous assure que la fonction $\dfrac{1}{1-u}$ admet un développement limité à l'ordre 3, de même partie régulière que celui de la fonction $x \mapsto 1 + u(x) + u(x)^2 + u(x)^3$. De plus, on a $u(x) = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^3}{12} + \mathrm{o}(x^3)$, puis, après calculs :

$$u(x)^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + \mathrm{o}(x^3) \quad \text{et} \quad u(x)^3 = -\frac{x^3}{8} + \mathrm{o}(x^3).$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-u(x)} &= 1 - \frac{x}{2} + \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4}\right) + \left(-\frac{x^3}{12} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{8}\right) + \mathrm{o}(x^3) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + \mathrm{o}(x^3) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + \mathrm{o}(x^3).$$

p.755 **Exercice 34** Donner le développement limité à l'ordre 5 de la fonction th.

Cas où le dénominateur tend vers 0

La proposition 29 de la page précédente ne s'applique pas à un quotient de la forme $\dfrac{f}{g}$ si la fonction g tend vers 0. Dans une telle situation, il est encore possible que la fonction $\dfrac{f}{g}$ possède un développement limité, mais ce n'est pas certain.
Pour le comprendre, écrivons, sous forme normalisée, les développements limités des fonctions f et g à des ordres respectifs n_1 et n_2 :

$$f(x) = x^{p_1}\left(a_{p_1} + a_{p_1+1}x + \cdots + a_{n_1}x^{n_1-p_1} + \mathrm{o}(x^{n_1-p_1})\right)$$

$$g(x) = x^{p_2}\left(b_{p_2} + b_{p_2+1}x + \cdots + b_{n_2}x^{n_2-p_2} + \mathrm{o}(x^{n_2-p_2})\right)$$

Remarque L'écriture des formes normalisées ci-dessus

- suppose que les développements limités considérés pour f et g soient de parties régulières non nulles ;
- sous-entend que $a_{p_1} \neq 0$, $b_{p_2} \neq 0$, $p_1 \leqslant n_1$ et $p_2 \leqslant n_2$.

Alors, le quotient s'écrit :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x^{p_1-p_2} \underbrace{\left(\frac{a_{p_1} + a_{p_1+1}x + \cdots + a_{n_1}x^{n_1-p_1} + \mathrm{o}(x^{n_1-p_1})}{b_{p_2} + b_{p_2+1}x + \cdots + b_{n_2}x^{n_2-p_2} + \mathrm{o}(x^{n_2-p_2})}\right)}_{=h(x)}.$$

Comme a_{p_1} et b_{p_2} sont non nuls, la proposition 29 de la page 725 assure que la fonction $x \mapsto h(x)$ possède un développement limité (dont on voit que l'ordre est $\min(n_1 - p_1, n_2 - p_2)$).
De plus, le terme constant du développement limité de la fonction h vaut $\dfrac{a_{p_1}}{b_{p_2}}$, donc est non nul. Par suite, la fonction $\dfrac{f}{g}$ possède un développement limité si, et seulement si, $p_1 - p_2 \in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire $p_2 \leqslant p_1$).

Exemple Considérons la fonction $f \ : \ x \mapsto \dfrac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$.
On cherche, s'il existe, le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
Partons des développements limités des fonctions $x \mapsto e^x - 1 - x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ aux ordres 4 et 3 respectivement (ce choix des ordres sera expliqué dans la remarque située après cet exemple). On a :

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3),$$

ou, sous forme normalisée :

$$e^x - 1 - x = x^2\Big(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \mathrm{o}(x^2)\Big) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x\Big(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)\Big).$$

On obtient l'écriture suivante :

$$f(x) = x \times \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \mathrm{o}(x^2)\right) \times \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)\right)}.$$

Après calculs, on obtient :

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)\right)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}(x^2).$$

On obtient, en calculant le produit :

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \mathrm{o}(x^2)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}(x^2)\right) \\ &= x\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{x}{4} + \frac{x}{6}\right) + \left(-\frac{x^2}{24} + \frac{x^2}{12} + \frac{x^2}{24}\right) + \mathrm{o}(x^2)\right) \\ &= x\left(\frac{1}{2} + \frac{5x}{12} + \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}(x^2)\right) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{12} + \frac{x^3}{12} + \mathrm{o}(x^3), \end{aligned}$$

ce qui est le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.

Remarque Dans l'exemple précédent, pour savoir quels ordres choisir pour les développements limités des fonctions $x \mapsto e^x - 1 - x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$, il faut essayer d'anticiper le calcul.
L'utilisation des formes normalisées des développements limités donne :

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)} = \frac{x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \cdots\right)}{x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots\right)} = x \times \left[\underbrace{\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \cdots\right)}{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \cdots\right)}}_{g(x)}\right].$$

Pour obtenir le développement à l'ordre 3 de f souhaité, il faut donc effectuer un développement limité à l'ordre 2 de la quantité $g(x)$ entre crochets. Cela nécessite un développement limité à l'ordre 2 du numérateur et du dénominateur de $g(x)$. Or, ceux-ci proviennent respectivement :

- de la factorisation par x^2 du développement limité de $x \mapsto e^x - 1 - x$;
- de la factorisation par x du développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$.

Cela explique les choix d'un ordre 4 pour le développement limité de $x \mapsto e^x - 1 - x$ et d'un ordre 3 pour le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$.

Remarque Une mauvaise anticipation du calcul, et donc un choix un peu farfelu des ordres auxquels effectuer les développements limités, peut mener à deux situations.

- **Première situation.** Les ordres n'ont pas été choisis assez grands, et ne permettent pas d'obtenir la précision finale souhaitée. Dans ce cas, il faut recommencer en les choisissant mieux.
- **Deuxième situation.** Les ordres ont été choisis trop grands. Dans ce cas, on voit apparaître, lors du calcul, des termes inutiles qui disparaissent. Cette situation ne présente donc pas de gravité, si ce n'est qu'il est toujours dommage de faire des calculs plus compliqués que nécessaire !

p.755

Exercice 35 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x^3 - 1 + \cos x}$.

1. Montrer que f n'a pas de développement limité en 0.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto xf(x)$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, et le déterminer.

p.756

Exercice 36 *(Approfondissement)*

Avec les notations précédentes utilisées à la remarque de la page 726, et dans le cas où $p_2 \leqslant p_1$, à quels ordres n_1 et n_2 faut-il effectuer les développements limités de f et g pour obtenir un développement limité à l'ordre n de f/g ?

4 Développements limités de fonctions composées

Conformément au programme, illustrons l'obtention de développements limités de fonctions composées à l'aide d'exemples.

Exemple Effectuons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

Tout d'abord, le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $u \mapsto e^u$ donne :

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3 \varepsilon(u),$$

où ε est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui tend vers 0 en 0.
Pour $x \in \mathbb{R}$, en substituant $-x$ à u dans le développement précédent, il vient :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - x^3 \varepsilon(-x).$$

Comme la fonction ε tend vers 0 en 0, on a $-x^3\varepsilon(-x) = x^3\big(\underbrace{-\varepsilon(-x)}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}\big) = \mathrm{o}(x^3)$, et

donc la relation précédente est le développement limité à l'ordre 3 en 0 cherché :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3).$$

Remarque Le principe de substitution de l'exemple précédent a déjà été utilisé à plusieurs reprises :

- dans la démonstration du corollaire 19 de la page 709 ;
- pour l'obtention du développement limité de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ (*cf.* exercice 18 de la page 714) ;
- pour l'obtention du développement limité de la fonction Arctan (*cf.* exercice 19 de la page 714).

Exemple Effectuons le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \ln(1+\sin x)$.
Tout d'abord, le développement limité à l'ordre 4 en 1 de la fonction ln nous donne :

$$\forall u \in \left]-1, +\infty\right[\quad \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + u^4\varepsilon(u),$$

où ε est une fonction définie sur $\left]-1,+\infty\right[$ et qui tend vers 0 en 0.
Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin x \in \left]-1,+\infty\right[$, et on peut donc substituer $\sin x$ à u dans le développement limité précédent :

$$\ln(1+\sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^4 x}{4} + (\sin^4 x)\,\varepsilon(\sin x).$$

On sait que $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)$, puis on a :

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}(x^4) \;; \qquad \sin^3 x = x^3 + \mathrm{o}(x^4)$$

$$\sin^4 x = x^4 + \mathrm{o}(x^4) \qquad \text{et} \qquad (\sin^4 x)\,\varepsilon(\sin x) = \mathrm{o}(x^4).$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\ln(1+\sin x) = \Big(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)\Big) &- \frac{1}{2}\Big(x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}(x^4)\Big) + \frac{1}{3}\Big(x^3 + \mathrm{o}(x^4)\Big)\\ &- \frac{1}{4}\Big(x^4 + \mathrm{o}(x^4)\Big) + \mathrm{o}(x^4),\end{aligned}$$

ce qui, en simplifiant, donne le développement cherché :

$$\ln(1+\sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \mathrm{o}(x^4).$$

Présentons maintenant l'exemple d'une situation plus délicate, montrant ainsi qu'il y a des précautions à prendre lorsque l'on cherche le développement limité d'une fonction composée.

Exemple Effectuons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \ln(1+e^x)$.
On dispose du développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$:

$$\forall u \in]-1,+\infty[\quad \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3\varepsilon(u), \qquad (\star)$$

où ε est une fonction définie sur $]-1,+\infty[$ et qui tend vers 0 en 0.

- **Ce qui ne marche pas.** Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x \in]-1,+\infty[$, donc il est licite de substituer e^x à u dans le développement précédent et d'écrire :

$$\ln(1+e^x) = e^x - \frac{(e^x)^2}{2} + \frac{(e^x)^3}{3} + (e^x)^3\,\varepsilon(e^x).$$

Cependant, cela ne nous avance à rien. En effet, la seule information que l'on ait sur la fonction ε étant $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$, et comme $e^x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, on ne peut rien dire de la quantité $\varepsilon(e^x)$ lorsque x tend vers 0. La formule est donc inexploitable.

- **Ce qui marche.** Afin de pouvoir tirer parti de la relation $(\star)$, il est nécessaire de substituer à u une quantité qui tend vers 0. Ici, il s'agit de transformer l'expression $\ln(1+e^x)$ de façon à voire apparaître une quantité de la forme $\ln\big(1+h(x)\big)$ avec $h(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Pour cela, écrivons :

$$\ln(1+e^x) = \ln\left(2\Big(\frac{1}{2} + \frac{e^x}{2}\Big)\right) = \ln 2 + \ln\Big(1 + \frac{e^x - 1}{2}\Big).$$

On a donc, en notant h la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x-1}{2}$:

$$\ln(1+e^x) = \ln 2 + \ln\big(1+h(x)\big).$$

Comme $h(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $h(x) \in]-1,+\infty[$ pour x suffisamment proche de 0, ce qui permet de substituer $h(x)$ à u dans la relation $(\star)$:

$$\ln\big(1+h(x)\big) = h(x) - \frac{1}{2}h(x)^2 + \frac{1}{3}h(x)^3 + h(x)^3\,\varepsilon\big(h(x)\big). \qquad (\star\star)$$

De plus, des calculs classiques donnent :

$$h(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \mathrm{o}(x^3)\ ; \quad h(x)^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + \mathrm{o}(x^3)\ ;$$

$$h(x)^3 = \frac{x^3}{8} + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad h(x)^3\varepsilon\big(h(x)\big) = \mathrm{o}(x^3).$$

La relation ($\star\star$) devient alors :

$$\ln\big(1+h(x)\big) = \Big(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{4}\Big) + \frac{1}{3}\Big(\frac{x^3}{8}\Big) + \mathrm{o}(x^3).$$

Le développement limité cherché est finalement :

$$\ln(1+e^x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}(x^3).$$

Point méthode

Lorsque l'on cherche le développement limité en un point a d'une fonction composée de la forme $f \circ g$, les développements limités dont on a *a priori* besoin sont :

- celui de g en a ;
- celui de f en b, où b est la limite de g en a.

Si l'on connaît ces deux développements limités, alors le développement limité de $f \circ g$ en a s'obtient en substituant $g(x)$ à la variable utilisée dans l'écriture du développement limité de f.

Remarque

Dans la pratique, si le développement limité de f s'écrit sous la forme :

$$f(u) = a_0 + a_1(u-b) + \cdots + a_n(u-b)^n + (u-b)^n \underbrace{\varepsilon\big((u-b)^n\big)}_{\underset{u \to b}{\longrightarrow} 0},$$

alors, en substituant $g(x)$ à u, on obtient :

$$f\big(g(x)\big) = a_0 + a_1\big(g(x)-b\big) + \cdots + a_n\big(g(x)-b\big)^n + \big(g(x)-b\big)^n \underbrace{\varepsilon\big(g(x)-b\big)}_{\underset{x \to a}{\longrightarrow} 0}.$$

Le calcul peut alors se poursuivre en utilisant le développement limité de g en a.

Des situations classiques sont les recherches de développements limités pour des fonctions de la forme $x \mapsto \ln\big(f(x)\big)$ et $x \mapsto e^{f(x)}$, comme le détaillent les points méthodes ci-dessous.

Point méthode

Pour une fonction de la forme $x \mapsto \ln\big(f(x)\big)$, et dans le cas où la fonction f possède une limite finie non nulle ℓ, alors on peut écrire :

$$\ln\big(f(x)\big) = \ln\left(\ell\Big(\frac{f(x)}{\ell}\Big)\right) = \ln \ell + \ln\left(1 + \Big(\frac{f(x)}{\ell} - 1\Big)\right),$$

pour se ramener à utiliser le développement limité en 1 de la fonction $\ln$.

Point méthode

Pour une fonction de la forme $x \mapsto e^{f(x)}$, et dans le cas où la fonction f possède une limite finie ℓ, alors on peut écrire :

$$e^{f(x)} = e^{\ell + f(x) - \ell} = e^{\ell} e^{f(x) - \ell},$$

pour se ramener à utiliser le développement limité en 0 de la fonction $\exp$.

Attention Pour une fonction de la forme $x \mapsto \big(u(x)\big)^{v(x)}$, il ne faut surtout pas essayer d'utiliser le développement limité usuel de $u \mapsto (1+u)^{\alpha}$, qui nécessite que α soit constant et ne dépende pas de x, mais écrire :

$$\big(u(x)\big)^{v(x)} = e^{v(x) \ln\big(u(x)\big)},$$

pour se ramener à une fonction de la forme $x \mapsto e^{f(x)}$.

p.757

Exercice 37

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+\cos x)$.

p.757

Exercice 38

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

p.758

Exercice 39

Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$.

p.758

Exercice 40 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction :

$$f : x \mapsto \big(\cos x\big)^{\frac{1}{(\sin x)^2}}.$$

V Applications des développements limités

1 Recherche de limites et d'équivalents

Les développements limités peuvent être utilisés pour obtenir des équivalents. Plus précisément, la proposition 24 de la page 716 entraîne que si une fonction f admet en x_0 un développement limité d'ordre n de partie régulière :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k (x-x_0)^k \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0,$$

alors, au voisinage de x_0, on a l'équivalent suivant pour f :

$$f(x) \sim a_p (x-x_0)^p.$$

Exemple Reprenons l'exemple 3 de la page 706 : on souhaite déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(2x) - \operatorname{sh}(2x).$$

Pour obtenir un équivalent de f, effectuons le développement limité de f à un ordre suffisant pour que la partie régulière soit non nulle, par exemple à l'ordre 3 :

$$\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh}(2x) = 2x + \frac{4}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3),$$

ce qui donne :

$$f(x) = -\frac{8}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3),$$

et fournit l'équivalent suivant pour f au voisinage de 0 : $f(x) \sim -\dfrac{8}{3}x^3$.

Point méthode

Pour obtenir un équivalent d'une fonction, il suffit d'en faire le développement limité à un ordre assez grand de façon à avoir une partie régulière non nulle.

Exemple Déterminons un équivalent au voisinage de 0 de $\dfrac{\sin(2x) - \operatorname{sh}(2x)}{(2x - \sin x - \tan x)^2}$.
On a déjà trouvé un équivalent du numérateur :

$$\sin(2x) - \operatorname{sh}(2x) \sim -\frac{8}{3}\,x^3.$$

Cherchons un équivalent du dénominateur. Pour cela, commençons par calculer un développement limité en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto 2x - \sin x - \tan x$:

$$\begin{aligned} 2x - \sin x - \tan x &= 2x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right) - \left(x + \frac{1}{3}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right) \\ &= -\frac{1}{6}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3) \sim -\frac{1}{6}\,x^3. \end{aligned}$$

On en déduit, par produit et quotient d'équivalents :

$$\frac{\sin(2x) - \operatorname{sh}(2x)}{(2x - \sin x - \tan x)^2} \sim \frac{-\frac{8}{3}\,x^3}{\left(-\frac{1}{6}x^3\right)^2} \sim -\frac{96}{x^3}.$$

Point méthode

Pour obtenir un équivalent d'un quotient de deux fonctions, le plus efficace est souvent de déterminer un équivalent du numérateur et un équivalent du dénominateur, puis de conclure par quotient d'équivalents (*cf.* exemple précédent).

Les recherches d'équivalents ne concernent pas uniquement les fonctions, mais également les suites.

p.760

Exercice 41 Déterminer un équivalent de la suite de terme général :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n\,(n+1)}{1+n^2}.$$

Les techniques précédentes de recherche d'équivalents permettent aussi de déterminer des limites.

Exemple Étudions la limite en 0 de la fonction :

$$x \mapsto \frac{3\sin x - x\,\cos x - 2x}{\sin^5 x}.$$

On a déjà $\sin^5 x \sim x^5$. Pour le numérateur, rappelons les développements limités :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \qquad \text{et} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

On en déduit que $3\sin x - x\,\cos x - 2x \sim -\dfrac{1}{60}x^5$, puis :

$$\frac{3\sin x - x\,\cos x - 2x}{\sin^5 x} \sim -\frac{\frac{1}{60}x^5}{x^5} \sim -\frac{1}{60}.$$

La fonction étudiée possède donc une limite, qui vaut $-\dfrac{1}{60}$.

p.760

Exercice 42 Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

2 Étude de l'allure d'une courbe au voisinage d'un point

Un développement limité peut permettre de déterminer l'allure de la courbe représentative d'une fonction dérivable au voisinage d'un point.

- L'existence d'une tangente non verticale au point d'abscisse x_0 du graphe d'une fonction f est équivalente à la dérivabilité de f en x_0, c'est-à-dire à l'existence d'un développement limité de f à l'ordre 1 en x_0.

- Dans ce cas, l'étude du signe de :

$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0)\,f'(x_0)$$

  permet de préciser la position de la courbe représentative de la fonction f par rapport à la tangente. D'après la proposition 10 de la page 700, on sait qu'il suffit d'obtenir un équivalent de cette quantité pour en connaître le signe au voisinage du point x_0.

Point méthode

Si, en x_0, on dispose d'un développement limité à un ordre $p \geqslant 2$:

$$f(x) = a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_p\,(x - x_0)^p + \mathrm{o}\big((x - x_0)^p\big) \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0,$$

alors le graphe de f admet une tangente, qui est la droite d'équation $y = a_0 + a_1\,(x - x_0)$. De plus, au voisinage de x_0, la position de la courbe par rapport à cette tangente est donnée par le signe de $a_p(x - x_0)^p$ (ce qui peut amener à discuter sur la parité de p).

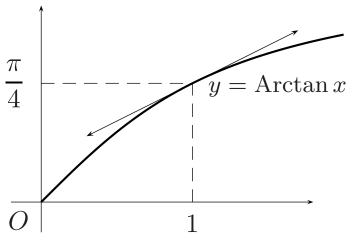
Exemple

En 1, la fonction Arctan a pour développement limité à l'ordre 2 (*cf.* exercice 13.10 de la page 765) :

$$\operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,(x-1) - \frac{1}{4}\,(x-1)^2 + \mathrm{o}\big((x-1)^2\big).$$

Son graphe est donc tangent à la droite d'équation $y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}(x-1)$ et, au voisinage de 1, la courbe est en dessous de sa tangente car :

$$\operatorname{Arctan} x - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,(x-1)\right) \sim -\frac{1}{4}\,(x-1)^2.$$



p.760 **Exercice 43** Au voisinage de 0, étudier la position de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 + e^x}$ par rapport à sa tangente.

3 Recherche d'asymptotes

Prenons un exemple. Étudions, au voisinage de $+\infty$, la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

- On a facilement $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
- Il est également facile d'obtenir un équivalent de f en $+\infty$. En effet, comme $\dfrac{x^3}{x-1} \sim x^2$, on a $f(x) \sim \sqrt{x^2}$, c'est-à-dire $f(x) \sim x$ $(x > 0)$.
- Précisons le comportement de $\dfrac{f(x)}{x}$ à l'aide d'un développement limité.

Pour $x > 1$, on a (comme $x > 1 > 0$, on a $x = \sqrt{x^2}$) :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \sqrt{\frac{x}{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}.$$

Le développement limité suivant à l'ordre 2 en 0 :

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = (1-u)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\,u + \frac{3}{8}\,u^2 + \mathrm{o}(u^2)$$

nous donne, au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

ou encore :

$$f(x) = \underbrace{x + \frac{1}{2}}_{(1)} + \underbrace{\frac{3}{8x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)}_{(2)}.$$

Dans la dernière relation, le terme (1) est affine, et le terme (2) tend vers zéro en $+\infty$. Plus précisément, on dispose de l'équivalent suivant au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \sim \frac{3}{8x}$$

qui met en évidence qu'au voisinage de $+\infty$:

- la courbe représentative de f se rapproche de la droite Δ d'équation $y = x + \frac{1}{2}$; cette droite est donc une asymptote à la courbe ;
- la courbe représentative de f est située (pour x assez grand) au-dessus de la droite Δ, car $\frac{3}{8x}$ est positif.

Remarques

1. La droite Δ est appelée **asymptote oblique en $+\infty$** à la fonction f.
2. La relation suivante :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

est appelée **développement asymptotique** de f au voisinage de l'infini à la précision $\frac{1}{x}$.

VI Développements asymptotiques

Exemples de développements asymptotiques

Dans l'exemple précédent, le développement obtenu pour la fonction f au voisinage de $+\infty$ n'est pas un développement limité, puisque la partie principale n'est, à cause du terme $\dfrac{1}{x}$, pas une fonction polynomiale : on parle alors de *développement asymptotique*.

Plus généralement, on appelle développement asymptotique tout développement faisant intervenir une gamme de fonctions plus large que les fonctions puissances entières $x \mapsto x^k$ utilisées lors de développements limités.

Par exemple, on envisage souvent les fonctions $f_{\alpha,\beta} : x \mapsto x^\alpha (\ln x)^\beta$, où α et β sont deux nombres réels.

Remarque En général, les fonctions utilisées dans un développement asymptotique vérifient vérifient des relations de négligeabilité les unes vis-à-vis des autres. Ainsi, concernant les fonctions du type $f_{\alpha,\beta}$ évoquées précédemment, en $+\infty$, les théorèmes de croissances comparées assurent que la fonction $f_{\alpha,\beta}$ est négligeable devant la fonction $f_{\alpha',\beta'}$ si, et seulement si :

$$\alpha < \alpha' \qquad \text{ou} \qquad \alpha = \alpha' \quad \text{et} \quad \beta < \beta'.$$

p.761 **Exercice 44** Que dire des fonctions $f_{\alpha,\beta}$ au voisinage de 0^+ ?

Exemple Donnons un développement asymptotique en 0 de la fonction $f : x \mapsto (e\,x)^x$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, donc au voisinage de 0. Pour $x > 0$, on a :

$$f(x) = e^x\, x^x = e^x\, e^{x \ln x}.$$

Écrivons le développement limité de la fonction exp à l'ordre 2 en 0 :

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + u^2 \varepsilon(u), \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon = 0.$$

En substituant $x \ln x$ à u, on obtient, pour tout $x > 0$:

$$e^{x \ln x} = 1 + x \ln x + \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x + \big(x \ln x\big)^2 \varepsilon(x \ln x).$$

Comme $x \ln x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ et par composition de limite, on a $\varepsilon(x \ln x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, ce qui donne $\big(x \ln x\big)^2 \varepsilon(x \ln x) \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}\left((x \ln x)^2\right)$, puis :

$$e^{x \ln x} = 1 + x \ln x + \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x + \mathrm{o}\big(x^2 \ln^2 x\big).$$

On a ainsi, au voisinage de 0 :

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right) \left(1 + x \ln x + \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x + \mathrm{o}\big(x^2 \ln^2 x\big)\right).$$

En développant le produit, on constate que, parmi les termes en « o » qui apparaissent, c'est le terme $\mathrm{o}\big(x^2 \ln^2 x\big)$ qui « limite » la précision du calcul (tous les autres termes en « o », étant négligeables devant lui, n'ont donc pas à être écrits dans le calcul). Après avoir développé, en écrivant les termes dans l'ordre de précision croissante, on obtient le développement suivant pour f :

$$f(x) = 1 + x \ln x + x + \frac{3}{2} x^2 \ln^2 x + \mathrm{o}\big(x^2 \ln^2 x\big). \qquad (\star)$$

On parle alors de « développement asymptotique à la précision $x^2 \ln^2 x$ ».

Remarque Du développement asymptotique précédent obtenu pour f, on obtient les informations suivantes, qu'il est par ailleurs possible de retrouver directement à partir de l'expression de $f(x)$:

- la fonction f tend vers 1 en 0 et peut donc être prolongée par continuité ;
- en appelant encore f le prolongement ainsi obtenu, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \ln x + \mathrm{o}(\ln x) \sim \ln x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty,$$

  ce qui se traduit par l'existence d'une tangente verticale à la courbe en 0.

p.761

Exercice 45 Soit f la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{\ln^2(1+x)}{\sin^3 x}}$.

1. La fonction f possède-t-elle un développement limité en 0 ?
2. Donner un développement asymptotique de f à la précision $\mathrm{o}\big(x\sqrt{x}\big)$.

p.762

Exercice 46 On veut donner un développement asymptotique à trois termes au voisinage de $+\infty$ de la fonction :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{1+\frac{1}{x}}. \end{array}$$

1. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$.
2. Déterminer un développement asymptotique à trois termes de f.
3. Le graphe de la fonction f admet-il une asymptote oblique en $+\infty$?

Exemple d'une suite définie par une intégrale

La notion de développement asymptotique s'étend aussi aux suites. Nous illustrons ceci par l'exercice suivant :

p.763

Exercice 47 Pour tout entier naturel n, on définit :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 et, plus précisément, que :

$$I_n - 1 = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

1. Considérons l'ensemble $\mathcal{D} =]0, +\infty[$. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a l'égalité $x^\alpha = x^{\alpha-\beta} x^\beta$. Puisque $x^{\alpha-\beta}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ d'après l'hypothèse $\alpha < \beta$, on a la relation $x^\alpha = o(x^\beta)$ au voisinage de $+\infty$.
2. Au voisinage de 0, on distingue trois cas :
   - si α et β sont deux entiers naturels, on peut prendre $\mathcal{D} = [-1, 1]$;
   - si α et β sont deux entiers strictement négatifs, alors les fonctions considérées ne sont pas définies en 0, et l'on peut prendre $\mathcal{D} = [-1, 0[\cup]0, 1]$;
   - si α et β sont deux nombres réels quelconques, alors on considère $\mathcal{D} =]0, 1]$.

   Pour l'ensemble $\mathcal{D}$ en vigueur, on a :
   $$\forall x \in \mathcal{D} \quad x^\beta = x^{\beta-\alpha} x^\alpha.$$
   Puisque $\beta - \alpha$ est strictement positif, on a donc $\lim\limits_{x \to 0} x^{\beta-\alpha} = 0$, et, par suite, on a $x^\beta = \mathrm{o}(x^\alpha)$ au voisinage de 0.

Proposition 2

1. Le fait que φ soit bornée au voisinage de a s'écrit $\varphi = \mathrm{O}_a(1)$.
   Si de plus on a $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\varphi)$, alors, par transitivité, on a $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(1)$, ce qui signifie que f est bornée au voisinage de a.
2. Le fait que φ tende vers 0 en a s'écrit $\varphi \underset{a}{=} \mathrm{o}(1)$. Si de plus on a $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\varphi)$, alors on peut affirmer que $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(1)$, c'est-à-dire que f tend vers 0 en a.
3. De même, si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi)$ et $\varphi \underset{a}{=} \mathrm{O}(1)$, alors on a $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(1)$.

Proposition 3 La fonction f/φ est définie sur $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ ou sur $\mathcal{D}$ suivant que φ est nulle ou non en a.

1. Si f est dominée par φ, alors on peut trouver une fonction u bornée au voisinage de a telle que $f = \varphi\, u$ au voisinage de a. La fonction f/φ coïncide alors au voisinage de a avec la fonction u ; elle est donc aussi bornée au voisinage de a.
   Réciproquement, supposons f/φ bornée au voisinage de a et posons :
   $$u(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \quad \text{si} \quad x \in \mathcal{D} \setminus \{a\}.$$
   Si $a \in \mathcal{D}$, il faut définir $u(a)$:
   - si $\varphi(a) \neq 0$, on pose $u(a) = \dfrac{f(a)}{\varphi(a)}$;
   - dans le cas où $\varphi(a) = 0$, on a supposé que $f(a) = 0$. On peut prendre alors n'importe quelle valeur pour $u(a)$, par exemple $u(a) = 1$.

   On a ainsi :
   $$\forall x \in \mathcal{D} \quad f(x) = \varphi(x)\, u(x)$$
   avec u bornée au voisinage de a, ce qui prouve que f est dominée par φ.

2. Si f est négligeable devant φ, alors on peut trouver une fonction ε tendant vers 0 telle que $f = \varphi\,\varepsilon$ au voisinage de a. La fonction f/φ coïncide alors au voisinage de a avec la fonction ε, donc tend vers 0 en a.

   Réciproquement, si $\lim\limits_a \dfrac{f}{\varphi} = 0$, on peut poser :
$$\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \quad \text{si} \quad x \in \mathcal{D} \setminus \{a\}.$$
   Si $a \in \mathcal{D}$, on pose $\varepsilon(a) = 0$.
   - Si $\varphi(a) \neq 0$, la fonction f/φ est définie en a et tend vers 0 en a. Donc elle est continue en a, ce qui donne $f(a) = 0 = \varepsilon(a)\,\varphi(a)$.
   - Dans le cas où $\varphi(a) = 0$, on a supposé que $f(a) = 0$ et l'on a donc également $f(a) = \varepsilon(a)\,\varphi(a)$.

   On a alors :
$$\forall x \in \mathcal{D} \quad f(x) = \varphi(x)\,\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_a \varepsilon = 0$$
   ce qui prouve que f est négligeable devant φ.

Proposition 4 Supposons (i). Il existe alors une fonction u tendant vers 1 et telle que, au voisinage de a, on ait $f = u\,g$. En posant $\varepsilon = u - 1$, on a $f - g = \varepsilon\,g$ au voisinage de a, avec $\lim\limits_0 \varepsilon = 0$. Ainsi, on a $f - g = \mathrm{o}(g)$.

Réciproquement, supposons (ii). Il existe donc un fonction ε tendant vers 0 en a et telle que, au voisinage de a, on ait $f - g = \varepsilon \times g$. On trouve alors (i) en posant $u = 1 + \varepsilon$.

Proposition 5

Dans ce qui suit, f, g et h désignent des fonctions définies sur $\mathcal{D}$. Les relations d'équivalence écrites ci-dessous le sont au voisinage de a.

Réflexivité. L'écriture $f = 1 \times f$ montre que $f \sim f$.

Symétrie. Supposons $f \sim g$.

Alors, il existe alors une fonction u tendant vers 1 en a telle que $f = ug$. Soit v la fonction définie sur $\mathcal{D}$ ainsi : $v(x) = \begin{cases} 1/u(x) & \text{si } u(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Comme u tend vers 1 en a, la fonction u ne s'annule pas au voisinage de a, et donc v et $1/u$ coïncident au voisinage de a. Il en résulte que $v \underset{a}{\longrightarrow} 1$ et que $g = v \times f$ au voisinage de a. D'où $g \sim f$.

Transitivité. Supposons que $f \sim g$ et $g \sim h$. Il existe par définition deux fonctions u et v définies sur $\mathcal{D}$, tendant vers 1 en a, et telles que $f = u \times g$ et $g = v \times h$. Comme $u \times v \underset{a}{\longrightarrow} 1$, l'écriture $f = (u \times v) \times h$ montre alors que $f \sim h$.

Exercice 2 Si la limite ℓ est non nulle, alors on a $f \underset{a}{\sim} \ell$.

En effet, on a alors $\dfrac{f(x)}{\ell} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$, et l'écriture $f(x) = \dfrac{f(x)}{\ell} \times \ell$ justifie le fait que $f \underset{a}{\sim} \ell$.

En revanche, si ℓ est nulle, alors dire que $f \underset{a}{\sim} \ell$ signifie qu'il existe une fonction u définie sur $\mathcal{D}$ et tendant vers 1 en a telle que $f = 0 \times u$ au voisinage de a, ce qui signifie que la fonction f est constante égale à 0 au voisinage de a.

Exercice 3

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f(x) = a_p\, x^p \Big(1 + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{a_k}{a_p}\, x^{k-p}\Big).$$
Comme la fonction entre parenthèses tend vers 1, quand x tend vers 0, on en déduit $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p\, x^p$.

2. Pour $x \neq 0$, on a :
$$f(x) = a_n\, x^n \Big(\sum_{k=p}^{n-1} \frac{a_k}{a_n\, x^{n-k}} + 1\Big)$$
et $\Big(\sum\limits_{k=p}^{n-1} \dfrac{a_k}{a_n\, x^{n-k}} + 1\Big)$ tend vers 1 lorsque x tend vers $\pm\infty$, d'où les équivalents recherchés.

Exercice 4 Il suffit de remarquer que $x + \ln x + \dfrac{1}{x} = \mathrm{o}(x^2)$ au voisinage de $+\infty$.

On a donc $x^2 + x + \ln x + \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$.

Proposition 7 Posons $h = f - g$. Par hypothèse, si $g(a) = 0$, alors $f(a) = 0$ et donc $h(a) = 0$. La proposition 3 nous dit alors que $h = \mathrm{o}(g)$ si, et seulement si, h/g $(= f/g - 1)$ tend vers 0, c'est-à-dire si, et seulement si, f/g tend vers 1.

Exercice 5 La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est dérivable sur $\left]-1, +\infty\right[$, et sa dérivée sur cet intervalle est la fonction $x \mapsto \alpha(1+x)^{\alpha-1}$. Le nombre dérivé en 0 de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est donc α. Puisque α est par hypothèse non nul, on conclut grâce à la propriété précédente.

Exercice 6 L'exemple des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ répond aux deux questions :

- en $+\infty$, elles tendent toutes les deux vers $+\infty$, mais ne sont pas équivalentes ;
- en 0, elles tendent toutes les deux vers 0, mais ne sont pas équivalentes.

Proposition 11

1. Si, au voisinage de a, on a :
$$f_1 = g_1\, u_1 \quad \text{et} \quad f_2 = g_2\, u_2 \quad \text{avec} \quad \lim_a u_1 = \lim_a u_2 = 1$$
alors, au voisinage de a, on a :
$$f_1\, f_2 = (g_1\, g_2)\,(u_1\, u_2) \quad \text{avec} \quad \lim_a u_1\, u_2 = 1$$
ce qui prouve que $f_1\, f_2$ et $g_1\, g_2$ sont équivalentes.

2. On a :
$$\frac{f_1}{f_2} \div \frac{g_1}{g_2} = \frac{f_1}{g_1} \times \frac{g_2}{f_2}.$$
Or :
$$\lim_a \frac{f_1}{g_1} = \lim_a \frac{f_2}{g_2} = 1.$$
Ainsi, $\lim\limits_a \dfrac{f_1}{f_2} \div \dfrac{g_1}{g_2} = 1$, ce qui conclut.

Exercice 7 Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}(t) - 1 = \dfrac{\operatorname{ch}^2 t - 1}{\operatorname{ch} t + 1} = \dfrac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t + 1}\cdot$

Comme $\operatorname{sh} t \underset{t \to 0}{\sim} t$ et $\operatorname{ch} t + 1 \underset{t \to 0}{\sim} 2$, on obtient $\dfrac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t + 1} \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}\cdot$ On a donc $\operatorname{ch} t - 1 \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}\cdot$

Exercice 8 Comme $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$, on a $(e^x - 1)^2 \underset{x \to 0}{\sim} x^2$; de plus, $(1+x)^5 - 1 \underset{x \to 0}{\sim} 5x$. Donc, au voisinage de 0, on a :

$$\frac{(e^x - 1)^2}{(1+x)^5 - 1} \sim \frac{x^2}{5x} \sim \frac{x}{5}\cdot$$

Exercice 9 On utilise le résultat déjà vu sur les fonctions polynomiales.

1. En 0, on a $f(x) \sim \dfrac{a_p\, x^p}{b_q x^q} \sim \dfrac{a_p}{b_q}\, x^{p-q}$.
2. En $\pm\infty$, on a $f(x) \sim \dfrac{a_n\, x^n}{b_m x^m} \sim \dfrac{a_n}{b_m}\, x^{n-m}$. Ainsi, en $\pm\infty$ une fonction rationnelle est équivalente au quotient de ses termes de plus haut degré.

Proposition 12 Supposons que les fonctions f^α et g^α soient bien définies. Comme f et g sont équivalentes au voisinage de a, cela signifie qu'il existe une fonction h tendant vers 1 en a vérifiant $f = g \times h$. On a alors $f^\alpha = \big(g \times h\big)^\alpha$, c'est-à-dire :

$$f^\alpha = g^\alpha \times h^\alpha.$$

Cette dernière relation montre le résultat souhaité, car comme $h \underset{a}{\longrightarrow} 1$, on a $h^\alpha \underset{a}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 10

1. Pour $x \in \mathcal{D}$, on a :

$$\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^{f(x) - g(x)}.$$

   Le rapport $\dfrac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}$ tend donc vers 1 si, et seulement si, $f(x) - g(x)$ tend vers 0.
2. Les fonction $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x + 1$ conviennent. En effet, au voisinage de $+\infty$, on a $x \underset{x \to +\infty}{\sim} x + 1$, mais le rapport $\dfrac{e^{x+1}}{e^x}$ est constant (il vaut e), et ne tend pas vers 1.

Exercice 11 On a $\ln(f) - \ln(g) = \ln\left(\dfrac{f}{g}\right)$. Or f et g sont équivalentes en a, donc $\dfrac{f}{g}$ tend vers 1 en a. Ainsi $\ln(f) - \ln(g)$ tend vers 0, donc $\ln(f) - \ln(g) = \mathrm{o}(1)$. Par ailleurs, $\ln(g)$ tend vers $+\infty$ par composition avec $\ln$. On en déduit la relation $\ln(f) - \ln(g) = \mathrm{o}\big(\ln(g)\big)$. Ainsi, $f \underset{a}{\sim} g$.

Proposition 13 Comme $f \sim g$ au voisinage de α, on peut trouver une fonction u définie sur $\mathcal{D}$ tendant vers 1 en α et telle que $f = g \times u$. Notons $\widetilde{\mathcal{D}}$ l'ensemble de définition de φ. Les trois fonctions $f \circ \varphi$, $g \circ \varphi$ et $u \circ \varphi$ sont alors définies sur $\widetilde{\mathcal{D}}$ et vérifient $f \circ \varphi = (g \circ \varphi) \times (u \circ \varphi)$. Comme $\varphi \underset{a}{\longrightarrow} \alpha$ et $u \underset{b}{\longrightarrow} 1$, on a, par composition de limite, $u \circ \varphi \underset{a}{\longrightarrow} 1$, ce qui prouve l'équivalent souhaité.

Exercice 12 Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(t) - 1 = \cos\left(2 \times \frac{t}{2}\right) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right).$$

Comme $\sin u \underset{u \to 0}{\sim} u$, on a, par substitution, $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t}{2}$, puis, par produit :

$$\cos(t) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t \to 0}{\sim} -2 \times \left(\frac{t}{2}\right)^2 = -\frac{t^2}{2}.$$

Proposition 14 Comme $f \sim g$ au voisinage de α, on peut trouver une fonction u définie sur $\mathcal{D}$ tendant vers 1 en α et telle que $f = g \times u$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(a_n) = g(a_n)\, u(a_n).$$

Comme $u \underset{\alpha}{\longrightarrow} 1$ et $a_n \to \alpha$, on a $u(a_n) \to 1$, ce qui montre que $f(a_n) \sim g(a_n)$.

Exercice 13 En prenant $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $g_1(x) = x$ et $g_2(x) = -x + x^2$, on a :

$$\frac{f_1}{g_1} \underset{0}{\longrightarrow} 1, \quad \frac{f_2}{g_2} \underset{0}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} \underset{0}{\longrightarrow} 0.$$

Proposition 17 Raisonnons par l'absurde : supposons que $(a_0, \ldots, a_n)$ et $(b_0, \ldots, b_n)$ sont deux listes distinctes vérifiant :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + \mathrm{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k\, x^k + \mathrm{o}(x^n),$$

On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)\, x^k = \mathrm{o}(x^n). \tag{$\star$}$$

Les deux listes étant distinctes, on peut poser $p = \min\{k \in [\![0, n]\!] \mid a_k \neq b_k\}$.

La relation $(\star)$ devient alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (a_k - b_k)\, x^k = \mathrm{o}(x^n)$.

En divisant par x^p (pour $x \neq 0$), on obtient :

$$\underbrace{a_p - b_p}_{\substack{\text{constante non nulle,} \\ \text{par définition de } p}} = \underbrace{\sum_{k=p+1}^{n} (b_k - a_k)\, x^{k-p} + \mathrm{o}(x^{n-p})}_{\underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{\longrightarrow} 0},$$

ce qui aboutit à une contradiction.

Exercice 14 Comme f est polynomiale de degré au plus p, elle est de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k x^k.$$

On a alors, de manière immédiate :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k x^k = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k x^k + \mathrm{o}(x^n),$$

qui est le développement limité de f à l'ordre n en 0. La partie régulière de ce développement limité est donc la fonction f elle-même.

Corollaire 19 Écrivons le développement limité à l'ordre n en 0 de f :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + x^n \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{0} \varepsilon = 0. \tag{1}$$

La fonction f étant paire ou impaire, son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0. Pour $x \in \mathcal{D}_f$, on a donc $-x \in \mathcal{D}_f$ ce qui permet de substituer $-x$ à x dans la relation précédente. En notant $\widetilde{\varepsilon}$ la fonction $x \mapsto (-1)^n \varepsilon(-x)$, on a :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(-x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, a_k\, x^k + x^n \widetilde{\varepsilon}(x), \quad \text{et} \quad \lim_{0} \widetilde{\varepsilon} = 0, \tag{2}$$

qui est donc le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto f(-x)$.

- Si f est paire, alors les fonctions f et $x \mapsto f(-x)$ sont égales. Les relations (1) et (2) permettent alors, par unicité du développement limité, d'affirmer que :

  $$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad a_k = (-1)^k a_k,$$

  ce qui signifie que tous les coefficients d'indice impair sont nuls.
- De même, si f est impaire, alors les fonctions f et $x \mapsto -f(-x)$ sont égales. Cela entraîne que :

  $$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad a_k = (-1)^{k+1} a_k,$$

  c'est-à-dire que tous les coefficients d'indice pair sont nuls.

Proposition 20

- Soit f une fonction admettant une limite finie ℓ en 0. Alors, en considérant la fonction $\varepsilon : x \mapsto f(x) - \ell$, on a :

  $$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x) = \ell + \varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0,$$

  ce qui prouve que f admet un développement limité à l'ordre 0 en 0.
- Réciproquement, si une fonction f possède un développement limité à l'ordre 0 en 0, de la forme $f(x) = a_0 + \mathrm{o}(1)$, alors il est clair que f possède a_0 comme limite en 0.

Proposition 21

- Supposons que f possède un développement limité à l'ordre 1 en 0, que l'on écrit :

  $$f(x) = a_0 + a_1 x + \mathrm{o}(x).$$

  Comme f est définie en 0, il en résulte que f est continue en 0 et que $f(0) = a_0$. L'utilisation du développement limité à l'ordre 1 en 0 de f donne de plus :

  $$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{a_0 + a_1 x + \mathrm{o}(x) - a_0}{x} = a_1 + \mathrm{o}(1) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} a_1,$$

  ce qui prouve que f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.
- Réciproquement, si f est dérivable en 0, alors on a :

  $$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) + \mathrm{o}(1).$$

  Cela donne $f(x) = f(0) + x f'(0) + \mathrm{o}(x)$, ce qui est le développement limité à l'ordre 1 en 0 de f.

Exercice 15

1. Comme la fonction sin est bornée, il est clair que l'on a :
$$x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = x + x^2 \underbrace{\left(x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0} = x + \mathrm{o}(x^2).$$
Comme de plus $f(0) = 0$, on en déduit que f possède le développement limité à l'ordre 2 en 0 suivant :
$$f(x) = x + \mathrm{o}(x^2).$$

2. Le développement limité à l'ordre 2 de f en 0 obtenu précédemment :
   - nous assure de l'existence d'un développement à l'ordre 1 pour f, et donc de la dérivabilité de f en 0 ;
   - nous donne $f'(0) = 1$ (coefficient devant le terme de degré 1).

   D'autre part, d'après les théorèmes généraux, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et :
$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 1 + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

3. Comme la fonction sin est bornée, on a facilement $1 + 3x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, tandis que la fonction $x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ n'admet pas de limite en 0. Ainsi la restriction de f' à $\mathbb{R}^*$ n'a pas de limite en 0, et donc f' non plus. Comme f' n'est pas continue, la fonction f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exercice 16 Le développement limité de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ se déduit de celui de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ en substituant $-x$ à x. On obtient :
$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n)\\ &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n).\end{aligned}$$

Exercice 17 Puisque $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$, il suffit d'appliquer la formule du développement limité de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$. On obtient :
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= (1+x)^{-1/2}\\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{1}{2} - 1\Big)x^2\\ &\quad + \frac{1}{3!}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{1}{2} - 1\Big)\Big(-\frac{1}{2} - 2\Big)x^3 + \mathrm{o}(x^3),\end{aligned}$$
ce qui donne :
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \mathrm{o}(x^3).$$

Proposition 23

Cas particulier. Supposons que F soit la primitive de f qui s'annule en 0, et que le développement limité de f soit de partie régulière nulle, *i.e.* :

$$F(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) = \mathrm{o}(x^n).$$

Montrons qu'on a alors $F(x) = \mathrm{o}(x^{n+1})$, ce qui montrera que F possède un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 dont la partie régulière est nulle.

- Traitons d'abord le cas où f est à valeurs réelles.

  Comme on a déjà $F(0) = 0$, il s'agit de montrer que $\dfrac{F(x)}{x^{n+1}} \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} 0$.

  Montrons cela par caractérisation séquentielle : donnons-nous (u_p) une suite d'éléments de $I \setminus \{0\}$ tendant vers 0, et montrons que $\dfrac{F(u_p)}{u_p^{n+1}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Pour tout $p \in \mathbb{N}$, le théorème des accroissements finis assure l'existence de $\theta_p \in]0,1[$ tel que $\dfrac{F(u_p) - F(0)}{u_p} = f(\theta_p u_p)$, c'est-à-dire, puisque $F(0) = 0$:

  $$\frac{F(u_p)}{u_p^{n+1}} = \frac{f(\theta_p u_p)}{u_p^n} = \frac{f(\theta_p u_p)}{(\theta_p u_p)^n} \times \theta_p^n. \qquad (\star)$$

  Puisque $f(x) = \mathrm{o}(x^n)$, on a $\dfrac{f(x)}{x^n} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et comme $\theta_p u_p \to 0$, on obtient, par composition de limites :

  $$\frac{f(\theta_p u_p)}{(\theta_p u_p)^n} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  Comme $\forall p \in \mathbb{N} \quad \theta_p^n \in]0,1[$, la relation $(\star)$ donne alors le résultat souhaité :

  $$\frac{F(u_p)}{u_p^{n+1}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Ne supposons plus f à valeurs réelles. La relation $f(x) = \mathrm{o}(x^n)$ se traduit par :

  $$\mathrm{Re}(f)(x) = \mathrm{o}(x^n) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{o}(x^n).$$

  Comme F est la primitive de f qui s'annule en 0, les fonctions $\mathrm{Re}(F)$ et $\mathrm{Im}(F)$ ne sont rien d'autre que les primitives s'annulant en 0 de $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ respectivement. D'après le cas déjà traité, on a donc :

  $$\mathrm{Re}(F)(x) = \mathrm{o}(x^{n+1}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(F)(x) = \mathrm{o}(x^{n+1}),$$

  ce qui donne bien $F(x) = \mathrm{o}(x^{n+1})$.

Cas général. Comme le développement de f à l'ordre n en 0 s'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + \mathrm{o}(x^n),$$

alors en notant g la fonction $x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$, on a $g(x) = \mathrm{o}(x^n)$.

Soit F une primitive de f. On vérifie facilement que la fonction :

$$x \mapsto F(x) - F(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

est la primitive de g qui s'annule de 0.

D'après la première partie de la démonstration, on a donc :

$$F(x) - F(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} = \mathrm{o}(x^{n+1}),$$

ce qui donne :

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \mathrm{o}(x^{n+1}),$$

et prouve le résultat attendu.

Exercice 18 En substituant $-x$ à x dans le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, on obtient :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n).$$

Exercice 19 La fonction $u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$ admet le développement limité suivant à l'ordre n en 0 :

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \cdots + (-1)^n u^n + \mathrm{o}(u^n).$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, substituons x^2 à u dans le développement limité précédent :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \mathrm{o}(x^{2n}).$$

De plus, la fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

On obtient donc le développement limité de Arctan à l'ordre $2n+1$ en 0 en primitivant le développement limité précédent :

$$\mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+1}).$$

Comme $\mathrm{Arctan}(0) = 0$, on obtient :

$$\mathrm{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+1}).$$

Exercice 20

1. • **Preuve de H_0.** Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. La continuité de f en 0 s'exprime ainsi :

$$f(x) = f(0) + \mathrm{o}(1) \;;$$

c'est la formule de Taylor-Young à l'ordre 0.

• **Preuve de H_1.** Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. Comme f est dérivable 0, on sait (*cf.* la proposition 21 de la page 710) que l'on a alors :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \mathrm{o}(x) \;;$$

c'est la formule de Taylor-Young à l'ordre 1.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$. Alors $f' \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$, et donc d'après H_1, la fonction f' possède un développement limité à l'ordre 1 en 0 qui s'écrit :

$$f'(x) = f'(0) + (f')'(0)\,x + \mathrm{o}(x) = f'(0) + f''(0)\,x + \mathrm{o}(x).$$

En utilisant la proposition 23 de la page 713, on en déduit que f possède un développement limité d'ordre 2 en 0, obtenu par primitivation :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,\frac{x^2}{2} + o(x^2) \;;$$

c'est la formule de Taylor-Young à l'ordre 2.

3. Démontrons H_n par récurrence sur n. On a déjà établi H_0.
Supposons donc H_n vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ et prouvons H_{n+1}.
Soit donc $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. On a alors $f' \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ et donc, d'après H_n, la fonction f' possède un développement limité à l'ordre n en 0 qui s'écrit :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(0)}{k!}\,x^k + \mathrm{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!}\,x^k + \mathrm{o}(x^n).$$

En utilisant la proposition 23 de la page 713, on en déduit que f possède un développement limité d'ordre $n+1$ en 0, obtenu par primitivation :

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!}\,\frac{x^{k+1}}{k+1} + \mathrm{o}(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k + \mathrm{o}(x^n),$$

ce qui est la formule de Taylor-Young à l'ordre $n+1$, c'est-à-dire H_{n+1}.
Cela termine la démonstration par récurrence.

Remarque La démonstration précédente est en fait valable dès que f est supposée n fois dérivable sur I (*i.e.* f de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et $f^{(n-1)}$ dérivable), ce qui est une hypothèse plus faible que l'hypothèse « f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I » du programme.

Exercice 21 La réponse est négative, car, comme la définition 4 de la page 715 l'impose, il est nécessaire que la partie régulière du développement limité de f soit non nulle. Ainsi, si le développement limité à l'ordre n en 0 de f est $f(x) = \mathrm{o}(x^n)$, alors il n'y a pas de forme normalisée associée. C'est par exemple le cas de la fonction nulle, ou encore de la fonction $x \mapsto x^{n+1}$.

Exercice 22 La fonction cos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{3}\cdot$
La formule de Taylor-Young est efficace ici, car les dérivées de la fonction cos sont immédiates à calculer (on a $\cos' = -\sin$ et $\cos'' = -\cos$). On obtient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \cos'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cdot$$

Le développement limité à l'ordre 3 en $\dfrac{\pi}{3}$ de la fonction cos s'écrit donc :

$$\cos(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \mathrm{o}_{x\to\pi/3}\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2\right),$$

ou encore :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,h}{2} - \frac{h^2}{4} + \mathrm{o}\left(h^2\right).$$

Exercice 23 La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donc de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 1.
Comme ses dérivées successives en x_0 valent toutes e^{x_0}, on obtient :

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) + \frac{e^{x_0}}{2}(x - x_0)^2 + \frac{e^{x_0}}{6}(x - x_0)^3 + \mathrm{o}_{x\to x_0}\left((x - x_0)^3\right).$$

On peut cependant faire plus simple en écrivant $e^{x_0+h} = e^{x_0}\,e^h$ et en utilisant le développement limité de la fonction exponentielle en 0. On obtient :

$$e^{x_0+h} = e^{x_0}\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \mathrm{o}(h^3)\right),$$

ce qui redonne le résultat obtenu avec la formule de Taylor-Young (tant mieux !) .

Exercice 24 Les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions sin et cos s'écrivent :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4) \qquad \text{et} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4).$$

Le développement limité cherché est donc :

$$\sin x + \cos x = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4).$$

Exercice 25 Écrivons les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3).$$

Le développement limité cherché est donc :

$$\begin{aligned} e^x + \ln(1+x) &= (1+0) + (1+1)x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)x^3 + \mathrm{o}(x^3) \\ &= 1 + 2x + \frac{x^3}{2} + \mathrm{o}(x^3). \end{aligned}$$

Exercice 26 Les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $x \mapsto e^x$ s'écrivent :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3).$$

Cela donne le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} - e^x$ suivant :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} - e^x &= (1-1) + (1-1)x + \Big(1 - \frac{1}{2}\Big)x^2 + \Big(1 - \frac{1}{6}\Big)x^3 + \mathrm{o}(x^3)\\ &= \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{5}{6}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3).\end{aligned}$$

Exercice 27 On a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n})$$

et, en substituant $-x$ à x :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n}).$$

On retrouve alors que :

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n})\\ \mathrm{sh}(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{6} + + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathrm{o}(x^{2n}).\end{aligned}$$

Exercice 28 Écrivons les développements limités à l'ordre 2 en 0 des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto (1+x)^{1/3}$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2) \qquad \text{et} \qquad (1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \mathrm{o}(x^2).$$

Il en résulte que :

$$e^x(1+x)^{1/3} = \Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\Big)\Big(1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \mathrm{o}(x^2)\Big),$$

ce qui donne, en développant et en simplifiant :

$$\begin{aligned}e^x(1+x)^{1/3} &= 1 + \Big(\frac{1}{3} + 1\Big)x + \Big(-\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\Big)x^2 + \mathrm{o}(x^2)\\ &= 1 + \frac{4}{3}x + \frac{13}{18}x^2 + \mathrm{o}(x^2).\end{aligned}$$

Exercice 29 Le développement à l'ordre 3 en 0 de la fonction tan est :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3) = x\Big(1 + \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)\Big).$$

Il en résulte que :

$$\tan^2 x = x^2\Big(1+\frac{x^2}{3}+\mathrm{o}(x^2)\Big)^2 = x^2\Big(1+\frac{2x^2}{3}+\mathrm{o}(x^2)\Big)$$
$$= x^2+\frac{2x^4}{3}+\mathrm{o}(x^4).$$

On obtient :

$$\tan' x = 1+\tan^2 x = 1+x^2+\frac{2x^4}{3}+\mathrm{o}(x^4).$$

Par primitivation, et comme $\tan 0 = 0$, on obtient le développement limité de la fonction tan à l'ordre 5 en 0 :

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\mathrm{o}(x^5).$$

Remarque La fonction tan étant impaire, on obtient, sans effort supplémentaire, son développement à l'ordre 6 en 0 (car le terme en x^6 est nul).

Exercice 30

Prévision des ordres.

- Le premier terme non nul dans le développement limité en 0 de $\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$ est $\frac{x^3}{3}$, dont l'exposant vaut 3. Donc, pour obtenir le développement de f à l'ordre 6 souhaité, il suffit donc de faire le développement limité à l'ordre 3 ($=6-3$) de la fonction $x \mapsto \cos x - 1$.
- De même, le premier terme non nul dans le développement limité en 0 de la fonction $x \mapsto \cos x - 1$ est $-\frac{x^2}{2}$, dont l'exposant vaut 2. Donc, pour obtenir le développement de f à l'ordre 6 souhaité, il suffit de faire le développement limité à l'ordre 4 ($=6-2$) de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\cdot$

Calcul effectif.

On a :

$$\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\mathrm{o}(x^4) \qquad \text{et} \qquad \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^3),$$

ce qui s'écrit, sous forme normalisée :

$$\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2} = x^3\Big(\frac{1}{3}-\frac{x}{4}+\mathrm{o}(x)\Big) \qquad \text{et} \qquad \cos x - 1 = x^2\Big(-\frac{1}{2}+\mathrm{o}(x)\Big)$$

On a donc :

$$f(x) = x^5\Big(\frac{1}{3}-\frac{x}{4}+\mathrm{o}(x)\Big)\Big(-\frac{1}{2}+\mathrm{o}(x)\Big) = x^5\Big(-\frac{1}{6}+\frac{x}{8}+\mathrm{o}(x)\Big).$$

Cette forme normalisée du développement de limilté f à l'ordre 6 en 0 s'écrit encore :

$$f(x) = -\frac{x^5}{6}+\frac{x^6}{8}+\mathrm{o}(x^6).$$

Exercice 31

Prévision des ordres.

Les premiers termes non nuls dans les développements limités en 0 des fonctions $x \mapsto 1-\cos x$, $x \mapsto e^x - 1$ et $x \mapsto x - \sin x$ sont respectivement $\frac{x^2}{2}$, x et $\frac{x^3}{6}$, dont les exposants valent respectivement 2, 1 et 3.

On anticipe que pour obtenir le développement limité de f à l'ordre 7 souhaité, il suffit de faire des développements limités :

- à l'ordre 3 $(=7-1-3)$ de $x \mapsto 1-\cos x$;
- à l'ordre 2 $(=7-2-3)$ de $x \mapsto e^x - 1$;
- à l'ordre 4 $(=7-1-2)$ de $x \mapsto x - \sin x$.

Calcul effectif. Écrivons sous forme normalisée les développements limités annoncés :

$$1-\cos x = x^2\Big(\frac{1}{2}+\mathrm{o}(x)\Big) \ ; \quad e^x - 1 = x\Big(1+\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x)\Big) \ ; \quad x-\sin x = x^3\Big(\frac{1}{6}+\mathrm{o}(x)\Big).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6\Big(\frac{1}{2}+\mathrm{o}(x)\Big)\Big(1+\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x)\Big)\Big(\frac{1}{6}+\mathrm{o}(x)\Big)\\ &= x^6\Big(\frac{1}{12}+\frac{x}{24}+\mathrm{o}(x)\Big)\\ &= \frac{x^6}{12}+\frac{x^7}{24}+\mathrm{o}(x^7). \end{aligned}$$

Exercice 32 En développant l'expression $f_1(x)f_2(x)f_3(x)$, on constate que les termes qui limitent la précision du calcul sont :

$$\mathrm{o}(x^{n_1+p_2+p_3}), \quad \mathrm{o}(x^{n_2+p_1+p_3}) \quad \text{et} \quad \mathrm{o}(x^{n_3+p_1+p_2}).$$

Il est donc possible d'obtenir un développement limité de la fonction $f_1 \times f_2 \times f_3$ à l'ordre :

$$\min(n_1+p_2+p_3,\ n_2+p_1+p_3,\ n_3+p_1+p_2).$$

Proposition 28 Comme u tend vers 0 en 0, la fonction $1-u$ ne s'annule pas au voisinage de 0, ce qui assure que la fonction $\frac{1}{1-u}$ est définie au voisinage de 0.

Supposons que u possède un développement limité à l'ordre n en 0, et montrons qu'il en est de même pour la fonction $\frac{1}{1-u}\cdot$

- Si $n=0$, alors le théorème de composition des limites assure que $\lim\limits_0 \frac{1}{1-u} = 1$, c'est-à-dire que $\frac{1}{1-u}$ admet le développement limité à l'ordre 0 suivant :

$$\frac{1}{1-u(x)} = 1+\mathrm{o}(1).$$

- Supposons $n \geqslant 1$. Le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $h \mapsto \dfrac{1}{1-h}$ s'écrit :
$$\forall h \in \mathrm{IR} \setminus \{1\} \quad \frac{1}{1-h} = \sum_{k=0}^{n} h^k + h^n \varepsilon(h),$$
où ε est une fonction définie sur $\mathrm{IR} \setminus \{1\}$ admettant 0 comme limite en 0.
Le fait que $\lim\limits_{0} u = 0$ assure que, pour x suffisamment petit, on a $u(x) \neq 1$, ce qui permet de substituer $u(x)$ à h dans le développement limité précédent :
$$\frac{1}{1-u(x)} = \sum_{k=0}^{n} u(x)^k + u(x)^n \varepsilon\big(u(x)\big). \qquad (\star)$$
  - D'après le corollaire 27 de la page 721, chacune des fonctions u^k admet un développement limité à l'ordre n. Il en est donc de même pour la fonction $\sum\limits_{k=0}^{n} u^k$.
  - Montrons pour finir que $u(x)^n \varepsilon\big(u(x)\big) = \mathrm{o}(x^n)$. Cela entraînera, grâce à la relation $(\star)$, que la fonction $\dfrac{1}{1-u}$ possède un développement limité à l'ordre n en 0, qui a même partie régulière que celui de la fonction $\sum\limits_{k=0}^{n} u^k$.
  Pour cela, écrivons le développement limité à l'ordre 1 en 0 de u :
  $$u(x) = a_0 + a_1 x + \mathrm{o}(x).$$
  Comme $\lim\limits_{0} u = 0$, on a $a_0 = 0$, ce qui entraîne que $u(x) = x\big(a_1 + \mathrm{o}(1)\big) = \mathrm{O}(x)$.
  Il en résulte que $u(x)^n = \mathrm{O}(x^n)$, puis que :
  $$\underbrace{u(x)^n}_{=\mathrm{O}(x^n)} \underbrace{\varepsilon\big(u(x)\big)}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0} = \mathrm{O}(x^n)\mathrm{o}(1) = \mathrm{o}(x^n).$$

Exercice 33 Comme $\lim\limits_{0} \cos = 1$, la fonction f est définie au voisinage de 0.

En notant u la fonction $1 - \cos$, on a :
$$f(x) = \frac{1}{1 - 1 + \cos x} = \frac{1}{1 - u(x)}.$$
Comme $\lim\limits_{0} u = 0$ et que la fonction u admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, la proposition 28 de la page 724 nous dit que la fonction f admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, qui a même partie régulière que celui de la fonction $1 + u + u^2 + u^3 + u^4$.

On sait que $u(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)$, puis des calculs classiques donnent :
$$u(x)^2 = \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}(x^4) \; ; \; u(x)^3 = \mathrm{o}(x^4) \quad \text{et} \quad u(x)^4 = \mathrm{o}(x^4).$$
Il en résulte que :
$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \Big(-\frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4}\Big) + \mathrm{o}(x^4) = \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4).$$

Exercice 34 On a $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}} = \mathrm{sh} \times \dfrac{1}{\mathrm{ch}}\cdot$

Comme le premier terme non nul dans le développement limité en 0 de sh est de degré 1, on peut se contenter d'effectuer un développement de $\dfrac{1}{\mathrm{ch}}$ à l'ordre 4 $(= 5-1)$.

On a $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{1}{1-\big(1-\mathrm{ch}(x)\big)}$, et donc, en considérant $u : x \mapsto 1 - \mathrm{ch}\, x$:

$$\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{1}{1-u(x)}\cdot$$

Comme $\lim\limits_{0} u = 0$ et que u possède un développement limité à l'ordre 4 en 0, la proposition 28 de la page 724 assure que la fonction $\dfrac{1}{1-u}$ possède un développement limité à l'ordre 4 en 0, de même partie régulière que celui de la fonction $x \mapsto 1 + u(x) + u(x)^2 + u(x)^3 + u(x)^4$.

On a $u(x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)$, puis :

$$u(x)^2 = \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}(x^4)\ , \quad u(x)^3 = \mathrm{o}(x^4) \quad \text{et} \quad u(x)^4 = \mathrm{o}(x^4).$$

En utilisant le développement limité à l'ordre 5 en 0 de sh, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{th}(x) &= \mathrm{sh}(x) \times \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \\
&= \Big(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5)\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)\Big) \\
&= x + \Big(-\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6}\Big) + \Big(\frac{5x^5}{24} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120}\Big) + \mathrm{o}(x^5) \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathrm{o}(x^5).
\end{aligned}$$

Remarque Pour obtenir ce développement limité de th, on aurait pu remarquer que $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2$ et, en partant de l'équivalent $\mathrm{th}^2 x \underset{x\to 0}{\sim} x^2$, procéder par primitivation pour obtenir un développement limité d'abord à l'ordre 3 et ensuite à l'ordre 5.

Exercice 35

1. Les premiers termes non nuls dans les développements limités en 0 des fonctions $x \mapsto \sqrt{1+x} - 1$ et $x \mapsto x^3 - 1 + \cos x$ sont respectivement $\dfrac{x}{2}$ et $-\dfrac{x^2}{2}\cdot$

   La fonction f ne possède donc pas de développement limité en 0. Pour le justifier, on peut écrire l'équivalent suivant de f en 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x/2}{-x^2/2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{x}\ ;$$

   de cet équivalent on déduit que la fonction f ne possède pas de limite finie en 0, ce qui prouve qu'elle ne possède pas de développement limité.

2. Partons des développements limités suivants (voir la remarque de la page 728 pour le choix des ordres) :

$$\sqrt{1+x}-1 = \frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\mathrm{o}(x^3) = x\Big(\frac{1}{2}-\frac{x}{8}+\frac{x^2}{16}+\mathrm{o}(x^2)\Big)$$

$$x^3-1+\cos x = -\frac{x^2}{2}+x^3+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^4) = x^2\Big(-\frac{1}{2}+x+\frac{x^2}{24}+\mathrm{o}(x^2)\Big).$$

On obtient :

$$xf(x) = x\times\frac{x\big(\frac{1}{2}-\frac{x}{8}+\frac{x^2}{16}+\mathrm{o}(x^2)\big)}{x^2\big(-\frac{1}{2}+x+\frac{x^2}{24}+\mathrm{o}(x^2)\big)} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{x}{8}+\frac{x^2}{16}+\mathrm{o}(x^2)}{-\frac{1}{2}+x+\frac{x^2}{24}+\mathrm{o}(x^2)},$$

ou encore :

$$xf(x) = -\Big(1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}+\mathrm{o}(x^2)\Big)\times\frac{1}{1-\underbrace{\Big(2x+\frac{x^2}{12}+\mathrm{o}(x^2)\Big)}_{u(x)}}\cdot$$

La fonction u tend vers 0 et possède un développement limité à l'ordre 2 en 0, donc, d'après la proposition 28 de la page 724, la fonction $\dfrac{1}{1-u}$ possède un développement limité à l'ordre 2 en 0, qui a même partie régulière que celui de la fonction $x\mapsto 1+u(x)+u(x)^2$. Comme on a :

$$u(x) = 2x+\frac{x^2}{12}+\mathrm{o}(x^2) \quad \text{et} \quad u(x)^2 = 4x^2+\mathrm{o}(x^2),$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\big(2x+\frac{x^2}{12}+\mathrm{o}(x^2)\big)} &= 1+2x+\Big(\frac{x^2}{12}+4x^2\Big)+\mathrm{o}(x^2)\\ &= 1+2x+\frac{49x^2}{12}+\mathrm{o}(x^2).\end{aligned}$$

On peut alors terminer le calcul du développement à l'ordre 2 de $x\mapsto xf(x)$:

$$\begin{aligned}xf(x) &= -\Big(1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}+\mathrm{o}(x^2)\Big)\Big(1+2x+\frac{49x^2}{12}+\mathrm{o}(x^2)\Big)\\ &= -\bigg(1+\Big(2x-\frac{x}{4}\Big)+\Big(\frac{49x^2}{12}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{8}\Big)+\mathrm{o}(x^2)\bigg)\\ &= -1-\frac{7x}{4}-\frac{89x^2}{24}+\mathrm{o}(x^2).\end{aligned}$$

Exercice 36 Comme on obtient un développement limité de la fonction h à l'ordre $\min(n_1-p_1, n_2-p_2)$, la multiplication par $x^{p_1-p_2}$ nous fait obtenir un développement limité de la fonction $\dfrac{f}{g}$ à l'ordre $\min(n_1-p_2, n_2+p_1-2p_2)$.

Il est donc naturel de choisir n_1 et n_2 tels que :

$$n_1-p_2 = n \quad \text{et} \quad n_2+p_1-2p_2 = n,$$

c'est-à-dire :

$$n_1 = n+p_2 \quad \text{et} \quad n_2 = n-p_1+2p_2.$$

Exercice 37 Commençons par remarquer que la fonction considérée est paire. Il suffit donc d'établir son développement limité à l'ordre 2 pour le déduire à l'ordre 3.

On dispose du développement limité à l'ordre 2 en 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$:

$$\forall u \in \left]-1,+\infty\right[\quad \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u),$$

où ε est une fonction définie sur $\left]-1,+\infty\right[$ et qui tend vers 0 en 0.

Afin de pouvoir tirer parti du développement limité précédent, transformons l'expression $\ln(1+\cos x)$ en une expression faisant apparaître un $\ln\big(1+h(x)\big)$ avec $h(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

On a :

$$\ln(1+\cos x) = \ln\left(2\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos x}{2}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{\cos x - 1}{2}\right).$$

On a donc, en notant h la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos x - 1}{2}$:

$$\ln\big(1+\cos x\big) = \ln 2 + \ln\big(1+h(x)\big).$$

On a $h(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc, pour x suffisamment proche de 0, on a $h(x) \in \left]-1,+\infty\right[$, ce qui permet de substituer $h(x)$ à u dans le développement limité de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$:

$$\ln\big(1+h(x)\big) = h(x) - \frac{1}{2}h(x)^2 + h(x)^2\,\varepsilon\big(h(x)\big). \qquad (\star)$$

Des calculs classiques donnent ensuite :

$$h(x) = -\frac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^2)\ ; \quad h(x)^2 = \mathrm{o}(x^2) \qquad \text{et} \qquad h(x)^2\varepsilon\big(h(x)\big) = \mathrm{o}(x^2).$$

La relation $(\star)$ donne alors simplement :

$$\ln\big(1+h(x)\big) = -\frac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^2),$$

ce qui donne le développement limité à l'ordre 2 puis, par parité, à l'ordre 3 :

$$\ln(1+\cos x) = \ln 2 - \frac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^2) \quad \text{puis} \quad \ln(1+\cos x) = \ln 2 - \frac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^3).$$

Exercice 38

Tout d'abord, remarquons que la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ est définie sur $\left]-\pi,0\right[\cup \left]0,\pi\right[$.

Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ tend vers 1 en 0, il est naturel d'écrire :

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln\left(1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right).$$

En notant h la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x} - 1$, on a donc $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \ln\big(1+h(x)\big)$.

Écrivons le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$:

$$\forall u \in \left]-1,+\infty\right[\quad \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u) \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon = 0.$$

Comme $h(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $h(x) \in \left]-1,+\infty\right[$ pour x suffisamment proche de 0, et il est alors licite de substituer $h(x)$ à u dans le développement limité précédent, ce qui donne :

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = h(x) - \frac{1}{2}h(x)^2 + h(x)^2\,\varepsilon\big(h(x)\big).$$

Puis, des calculs classiques donnent :

$$h(x) = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \mathrm{o}(x^4)\ ; \quad h(x)^2 = \frac{x^4}{36} + \mathrm{o}(x^4) \quad \text{et} \quad h(x)^2\,\varepsilon\big(h(x)\big) = \mathrm{o}(x^4).$$

On obtient finalement le développement limité suivant :

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + \mathrm{o}(x^4).$$

Remarque On remarque que, dans le calcul précédent, un ordre 2 pour le développement limité de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ a suffi pour obtenir l'ordre 4 finalement souhaité.

En effet, comme le premier terme non nul du développement limité de la fonction $x \mapsto h(x)$ est $-\dfrac{x^2}{6}$ (de degré 2), on a $\forall k > 3 \quad h(x)^k = \mathrm{O}(x^{2k}) = \mathrm{o}(x^4)$.

Exercice 39 Rappelons le développement limité à l'ordre 2 et 0 de exp :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u), \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon = 0.$$

Pour $x \in [-1,+\infty[$, on a, en notant h la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x} - 1$:

$$e^{\sqrt{1+x}} = e^{1+(\sqrt{1+x}-1)} = e \times e^{\sqrt{1+x}-1} = e \times e^{h(x)}.$$

Pour $x \in [-1,+\infty[$, la substitution de $h(x)$ à u dans le développement limité de exp donne :

$$e^{h(x)} = 1 + h(x) + \frac{h(x)^2}{2} + h(x)^2\varepsilon\big(h(x)\big).$$

De plus, on a :

$$h(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}(x^2)\ ; \quad h(x)^2 = \frac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^2) \qquad \text{et} \qquad h(x)^2\varepsilon\big(h(x)\big) = \mathrm{o}(x^2).$$

On en déduit, après simplification, le développement limité cherché :

$$e^{\sqrt{x+1}} = e \times e^{h(x)} = e \times \left(1 + \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right) = e + \frac{ex}{2} + \mathrm{o}(x^2).$$

Exercice 40 *Pour alléger la rédaction, tous les calculs ne sont pas détaillés. Le lecteur les fera alors par lui-même puis vérifiera qu'il obtient les mêmes résultats.*

On a :

$$f(x) = \exp\left(\frac{\ln(\cos x)}{(\sin x)^2}\right) = e^{g(x)} \qquad \text{avec} \qquad g\ :\ x \mapsto \frac{\ln(\cos x)}{(\sin x)^2}.$$

La fonction f est définie au voisinage de 0, par exemple sur la réunion des deux intervalles $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ et $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

On peut montrer que $\lim\limits_{0} g = -\frac{1}{2}$; cette limite, que l'on peut obtenir par des équivalents (*cf.* exemple 2 de la page 704), sera confirmée par le calcul qui va suivre.

Écrivons alors :

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}+g(x)+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \times e^{g(x)+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \times e^{h(x)},$$

où h désigne la fonction $x \mapsto g(x) + \frac{1}{2}\cdot$

On écrit le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction exp :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u) \qquad \text{avec} \quad \lim_{0} \varepsilon = 0,$$

dans lequel on substitue $h(x)$ à u :

$$e^{h(x)} = 1 + h(x) + \frac{h(x)^2}{2} + h(x)^2\varepsilon\big(h(x)\big). \tag{$\star$}$$

Pour terminer le calcul, il s'agit maintenant de déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction h. Par anticipation des ordres de précision dans le calcul, nous choisissons un ordre 4 pour les développements limités en 0 des fonctions $x \mapsto (\sin x)^2$ et $x \mapsto \ln(\cos x)$.

On a, par composition de développements limités (après calculs) :

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \mathrm{o}(x^4) = x^2\Big(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}(x^2)\Big),$$

et d'autre part :

$$(\sin x)^2 = \Big(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)\Big)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}(x^4) = x^2\Big(1 - \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)\Big).$$

On obtient, par calcul du développement limité d'un quotient (après calculs) :

$$g(x) = \frac{\ln(\cos x)}{(\sin x)^2} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}(x^3)}{1 - \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^3)} = -\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^3),$$

ce qui donne le développement limité à l'ordre 2 souhaité pour h :

$$h(x) = -\frac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^3).$$

On a alors :

$$h(x)^2 = \mathrm{o}(x^2) \quad \text{et} \quad h(x)^2\varepsilon\big(h(x)\big) = \mathrm{o}(x^2).$$

La relation $(\star)$ donne alors :

$$e^{h(x)} = 1 - \frac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^2),$$

ce qui donne le développement de f à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{x^2}{4\sqrt{e}} + \mathrm{o}(x^2).$$

Remarque Après avoir remarqué que la fonction f est paire, on aurait pu envisager ici d'appliquer la formule de Taylor-Young, qui nécessite uniquement les calculs de $f(0)$ et $f''(0)$ (puisque $f'(0)$ est nul).

Exercice 41 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n^2}} = f\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{avec} \qquad f \ : \ x \mapsto e^x - \frac{1+x}{1+x^2}.$$

Après calculs, on obtient le développement limité à l'ordre 2 suivant pour f :

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2).$$

On en déduit $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3}{2}x^2$, puis $u_n \sim \frac{3}{2n^2}\cdot$

Exercice 42 Transformons d'abord l'expression de manière à obtenir un quotient :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x) - x}{x\,\ln(1+x)}\cdot$$

- D'une part, on a $x\ln(1+x) \sim x^2$.
- D'autre part, un développement limité à l'ordre 2 donne pour le numérateur :

$$\ln(1+x) - x = -\frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2) \sim -\frac{1}{2}x^2.$$

Par quotient d'équivalents, on a donc :

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x\ln(1+x)} \sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

et donc :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right) = -\frac{1}{2}\cdot$$

Exercice 43 On a déjà vu (*cf.* exemple de la page 725) que la fonction $f \ : x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ admet le développement limité suivant à l'ordre 3 en 0 :

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 + \mathrm{o}(x^3).$$

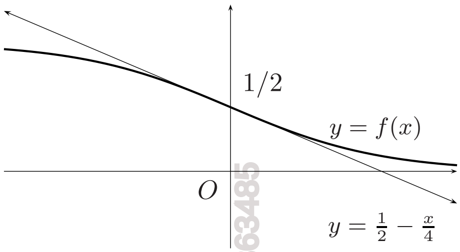
Au point d'abscisse 0, le graphe est donc tangent à la droite d'équation :

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$$

et, au voisinage de 0, la quantité :

$$f(x) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\right) \sim \frac{1}{48}x^3$$

est positive à droite et négative à gauche. Le graphe traverse donc la tangente : il s'agit d'un point d'inflexion.



Exercice 44 La fonction $f_{\alpha,\beta}$ n'est évidemment pas définie au voisinage de 0^+ en général car $\ln x < 0$ lorsque x tend vers 0^+ et donc $(\ln x)^\beta = \exp\big(\beta \ln(\ln x)\big)$ n'est pas défini. Limitons-nous donc à des valeurs entières de β.

En 0^+, d'après les théorèmes de croissances comparées, la fonction $f_{\alpha,\beta}$ est négligeable devant la fonction $f_{\alpha',\beta'}$ dans les cas suivants :

$$\alpha > \alpha' \qquad \text{ou} \qquad \alpha = \alpha' \text{ et } \beta < \beta'.$$

Exercice 45 Remarquons déjà que la fonction f est définie sur l'ensemble :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 + x > 0 \quad \text{et} \quad \sin x > 0\}$$

et est donc définie au voisinage de 0 (elle est par exemple bien définie sur l'intervalle $]0, \pi[$), ce qui permet d'en faire l'étude en 0.

1. On a $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc :

$$\frac{\ln^2(1+x)}{\sin^3 x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Il en résulte que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, et donc que $f \underset{0}{\longrightarrow} +\infty$. La fonction f, ne possédant pas de limite finie en 0, n'admet donc pas de développement limité en 0.

2. On a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad \text{et} \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

donc :

$$\ln^2(1+x) = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4) \qquad \text{et} \qquad \sin^3 x = x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5).$$

On a donc, en faisant le quotient :

$$\begin{aligned}
\frac{\ln^2(1+x)}{\sin^3 x} &= \frac{1}{x} \times \frac{1 - x + \frac{11}{12}x^2 + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\
&= \frac{1}{x} \times \left(1 - x + \frac{11}{12}x^2 + o(x^2)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{x} \times \left(1 - x + \frac{17}{12}x^2 + o(x^2)\right)
\end{aligned}$$

On obtient :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \sqrt{1 - x + \frac{17}{12}x^2 + \mathrm{o}(x^2)}.$$

Après calculs, on obtient :

$$\sqrt{1 - x + \frac{17}{12}x^2 + \mathrm{o}(x^2)} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{7}{12}x^2 + \mathrm{o}(x^2),$$

puis finalement :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{7}{12}x\sqrt{x} + \mathrm{o}\big(x\sqrt{x}\big).$$

Exercice 46

1. Pour tout $x > 0$, on a $f(x) = e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} = xe^{\frac{\ln x}{x}}$.
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$, et donc $f(x) \sim x$.
2. Pour $x > 0$, on a :

   $$f(x) = x \times x^{\frac{1}{x}} = x \times \exp\big(u(x)\big) \quad \text{avec} \quad u(x) = \frac{\ln x}{x}\cdot$$

   Écrivons le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $\exp$:

   $$\forall u \in \mathbb{R} \quad e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + u^2\varepsilon(u) \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon = 0,$$

   et substituons $u(x)$ à u :

   $$\forall x > 0 \quad \exp\big(u(x)\big) = 1 + u(x) + \frac{1}{2}u(x)^2 + u(x)^2\varepsilon\big(u(x)^2\big).$$

   Comme $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\varepsilon\big(u(x)\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $u(x)^2\varepsilon\big(u(x)\big) = \mathrm{o}\big(u(x)^2\big)$.
   Cela donne :

   $$\exp\big(u(x)\big) = 1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln^2 x}{2x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln^2 x}{x^2}\right).$$

   En multipliant par x, on obtient le développement suivant pour f :

   $$f(x) = x + \ln x + \frac{\ln^2 x}{2x} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right).$$

   C'est un développement limité à trois termes ; il est à la précision $\dfrac{\ln^2 x}{x}\cdot$
3. Le graphe de f n'admet donc pas d'asymptote oblique, car il n'existe aucun réel m tel que $f(x) - m\,x$ admette une limite finie en $+\infty$. En effet,
   - si $m \neq 1$, alors $f(x) - mx \sim (1-m)x$;
   - si $m = 1$, alors $f(x) - mx \sim \ln x$.

Exercice 47

1. On constate que :

$$1 - I_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^n}\right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} \mathrm{d}t. \qquad (\star)$$

On a donc :

$$0 \leqslant 1 - I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

Il en résulte, par encadrement, que $I_n \to 1$, puis, comme $\left|I_n - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$, on a bien $I_n - 1 = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. De la relation $(\star)$ précédente on obtient :

$$I_n - 1 = -\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} \mathrm{d}t.$$

Intégrons par parties (les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \frac{\ln(1+t^n)}{n}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t \times \frac{t^{n-1}}{1+t^n} \mathrm{d}t &= \left[\frac{t}{n} \ln(1+t^n)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n} \ln(1+t^n) \mathrm{d}t \\ &= \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n) \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$I_n - 1 = -\frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n) \mathrm{d}t. \qquad (\star\star)$$

On dispose de l'inégalité classique suivante :

$$\forall u \in \left[0, +\infty\right[\quad 0 \leqslant \ln(1+u) \leqslant u,$$

qui donne en particulier :

$$\forall t \in \left[0, 1\right] \quad 0 \leqslant \ln(1+t^n) \leqslant t^n.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+t^n) \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

Il en résulte que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n) \mathrm{d}t \to 0$. La relation $(\star\star)$ donne alors :

$$I_n - 1 = -\frac{\ln 2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right),$$

ce qui donne bien le développement asymptotique souhaité :

$$I_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

S'entraîner et approfondir

13.1 1. Montrer que la $f : x \mapsto \ln(1+2x)$ est négligeable par la fonction $g : x \mapsto x \ln x$ au voisinage de 0.

2. Montrer que la $f : x \mapsto \sqrt{x^2+3x}\,\ln(x^2)\sin x$ est dominée par la fonction $g : x \mapsto x\ln x$ au voisinage de 0.

⋆ **13.2** Comparer les fonctions $x \mapsto e^{x^2}$ et $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ au voisinage de $+\infty$.

13.3 Déterminer, à l'aide d'équivalents, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\,(3+x)\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\,\sin\left(\sqrt{x}\right)}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)(1-\cos x)}{3x^3+2x^4}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

13.4 Donner des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ pour :

1. $\left(\ln\left(1+e^{-n^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$
2. $\left(\dfrac{e^n}{1+e^{-n}}\right)^n$.

13.5 1. Trouver la limite lorsque x tend vers 0 de $\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

2. Trouver la limite lorsque x tend vers 0 de $\left(1+3\tan^2 x\right)^{\frac{1}{x\sin x}}$.

13.6 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f_n : x \mapsto n\cos^n x \sin x.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n possède un maximum, atteint en un unique point.

On note x_n l'unique point auquel f_n atteint son maximum, et $y_n = f(x_n)$.

2. Trouver un équivalent pour chacune des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

13.7 Trouver un équivalent de la suite de terme général :

$$u_n = \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{n}} - (n-1)^{\frac{n-1}{n}}}{n}.$$

13.8 1. Donner le développement limité de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ à l'ordre 3 au point 2.

2. La fonction f admet-elle un développement limité d'ordre $n \geqslant 1$ en 0 ?

13.9 Calculer les développements limités suivants :

1. $x \mapsto \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0,
2. $x \mapsto \big(\ln(1+x)\big)^2$ à l'ordre 4 en 0,
3. $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2+2x+2}$ à l'ordre 3 en 0,
4. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$ à l'ordre 4 en 0,
5. $x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$ à l'ordre 3 en 0.

13.10 Déterminer le développement limité de la fonction Arctan à l'ordre 4 en 1.

13.11 Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}.$$

1. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \mathrm{o}_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. Interpréter graphiquement ce qui précède.

13.12 Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ avec $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ avec $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

13.13 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

1. Donner un développement limité de f en 0 à l'ordre 4.
2. Donner l'allure de la courbe représentative de f en 0.

Solution des exercices

13.1 1. On se place sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
De l'équivalent $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ on déduit, par substitution, que $\ln(1+2x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$.
Ainsi :
$$\frac{\ln(1+2x)}{x\ln x} \sim \frac{2x}{x\ln x} = \frac{2}{\ln x}$$
d'où :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x\ln x} = 0.$$
Par conséquent :
$$\ln(1+2x) = \mathrm{o}(x\ln x).$$

2. Pour $x \in]1,+\infty[$, on a :
$$\frac{\sqrt{x^2+3x}\,\ln(x^2)\sin x}{x\ln x} = 2\times\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x}\times\sin x = 2\sqrt{1+\frac{3}{x}}\times\sin x.$$
Le quotient étudié est donc borné au voisinage de $+\infty$, ce qui assure que :
$$\sqrt{x^2+3x}\,\ln(x^2)\sin x = \mathrm{O}(x\ln x).$$

13.2 Soit $x>0$. Pour tout $t\in[0,x]$, on a $t^2 \leqslant tx$ et donc, par croissance de la fonction exponentielle : $e^{t^2} \leqslant e^{tx}$. Ainsi, par croissance de l'intégrale :
$$0 \leqslant \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x e^{tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left(e^{x^2}-1\right).$$
Comme de plus on a $e^{x^2}-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, on obtient :
$$\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(e^{x^2}\right).$$

13.3 1. Au voisinage de 0, on a les équivalents $3+x\sim 3$ et $\sqrt{x+3}\sim\sqrt{3}$. Par ailleurs, de l'équivalent classique $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$, on déduit par substitution que $\sin\sqrt{x}\sim\sqrt{x}$.
Ainsi :
$$x(3+x)\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}} \sim x\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = 3\sqrt{3}.$$
La quantité étudiée a donc une limite quand $x\to 0$, et cette limite vaut $3\sqrt{3}$.

2. Par opérations sur les équivalents, on obtient :
$$\frac{(1-e^x)(1-\cos x)}{3x^3+2x^4} \sim \frac{(-x)\times(x^2/2)}{3x^3} = -\frac{x^3}{6x^3} = -\frac{1}{6}.$$
La quantité étudiée a donc une limite quand $x\to 0$, et cette limite vaut $-\dfrac{1}{6}$.

3. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\ln\left((1+\sin x)^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x}\ln(1+\sin x)$.

   On a $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, donc, par substitution, $\ln(1+\sin x) \sim \sin x$.

   Ainsi $\frac{1}{x}\ln(1+\sin x) \sim \frac{\sin x}{x} \sim 1$. Il en résulte que $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left((1+\sin x)^{\frac{1}{x}}\right) = 1$.

   La quantité étudiée a donc une limite quand $x \to 0$, et cette limite vaut e.

13.4 1. Pour $n \geqslant 1$, on a $\left(\ln(1+e^{-n^2})\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\ln\left(1+e^{-n^2}\right)\right)\right)$.

Comme $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ et que $e^{-n^2} \to 0$, on a, par subtitution :

$$\ln\left(1+e^{-n^2}\right) \sim e^{-n^2}$$

ce qui s'écrit aussi $\ln(1+e^{-n^2}) = e^{-n^2}\left(1+\mathrm{o}(1)\right)$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}\ln\left(\ln\left(1+e^{-n^2}\right)\right) &= \ln\left(e^{-n^2}\left(1+\mathrm{o}(1)\right)\right)\\ &= \ln(e^{-n^2}) + \underbrace{\ln\left(1+\mathrm{o}(1)\right)}_{\to 0} = -n^2 + \mathrm{o}(1)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{n}\ln\left(\ln(1+e^{-n^2})\right) = -n + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et, en passant à l'exponentielle :

$$\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\ln(1+e^{-n^2})\right)\right) = e^{-n} \times \underbrace{e^{\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}}_{\to 1} \sim e^{-n}.$$

Conclusion. On a donc $\left(\ln\left(1+e^{-n^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \sim e^{-n}$.

2. On a :

$$\left(\frac{e^n}{1+e^{-n}}\right)^n = e^{n^2} \times e^{-n\ln(1+e^{-n})}.$$

On a $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $e^{-n} \to 0$, donc, par substitution, on a $\ln\left(1+e^{-n}\right) \sim e^{-n}$, puis $n\ln\left(1+e^{-n}\right) \sim ne^{-n}$. Par croissances comparées, cette dernière expression tend vers 0. On en déduit que :

$$e^{-n\ln(1+e^{-n})} \to 1.$$

Conclusion. On a donc $\left(\frac{e^n}{1+e^{-n}}\right)^n \sim e^{n^2}$.

13.5 1. On a :

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = \exp\left(\frac{\sin x}{x-\sin x}\ \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)\right). \qquad (\star)$$

Or, puisque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$, on a :

$$\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) \sim \frac{x}{\sin x} - 1$$

d'où :

$$\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) \sim \frac{\sin x}{x-\sin x} \times \frac{x-\sin x}{\sin x} = 1.$$

On a donc $\dfrac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\dfrac{x}{\sin x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, et donc, d'après la relation $(\star)$, la limite cherchée vaut e.

2. On a :

$$\left(1+3\tan^2 x\right)^{\frac{1}{x\sin x}} = \exp\left(\frac{1}{x\sin x} \times \ln(1+3\tan^2 x)\right).$$

On a $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\lim\limits_{x\to 0} 3\tan^2 x = 0$, donc, par substitution, on a :

$$\ln(1+3\tan^2 x) \sim 3\tan^2 x \sim 3x^2.$$

Comme $\sin x \sim x$, on peut conclure par produit et quotient d'équivalents :

$$\frac{1}{x\sin x}\ln(1+3\tan^2 x) \sim \frac{1}{x\times x} \times 3x^2 \sim 3.$$

La limite cherchée vaut donc e^3.

13.6 1. La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$f_n'(x) = n(1 - n\tan^2 x)\cos^{n+1} x.$$

Il est alors facile d'établir le tableau de variation de f_n :

x	0		x_n		$\frac{\pi}{2}$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(x_n)$	$\searrow$	0

La fonction f_n atteint son maximum en un unique point x_n vérifiant la relation $\tan x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, c'est-à-dire, puisque $x_n \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $x_n = \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. • Puisque $x_n = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, et comme $\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a :

$$x_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

- Pour donner un équivalent de y_n, partons de :
$$y_n = n\cos^n x_n \,\sin x_n.$$
  * D'une part, $n\sin x_n \sim nx_n \sim \dfrac{n}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{n}$.
  * D'autre part, donnons la limite de $\cos^n(x_n)$. On a :
$$\cos^n(x_n) = e^{n\ln(\cos x_n)}.$$
    Comme $x_n \to 0$, on a $\cos x_n \to 1$, et donc :
$$\ln(\cos x_n) \sim (\cos x_n - 1) \sim -\frac{x_n^2}{2} \sim -\frac{1}{2n}\cdot$$
    Ainsi on a $n\ln(\cos x_n) \to -\dfrac{1}{2}$, et donc $\cos^n x_n \to \dfrac{1}{\sqrt{e}}\cdot$

  On obtient finalement $y_n \sim \sqrt{\dfrac{n}{e}}\cdot$

13.7 Pour commencer, traitons séparément les deux termes. On a :
$$(n+1)^{\frac{n+1}{n}} = \exp\left(\frac{n+1}{n}\ln(n+1)\right),$$
et :
$$\begin{aligned}\frac{n+1}{n}\ln(n+1) &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\ln n + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \ln n + \frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\end{aligned}$$
Puis en passant à l'exponentielle :
$$(n+1)^{\frac{n+1}{n}} = n \times e^{\frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)}.$$
Par un raisonnement analogue, on obtient :
$$\frac{n-1}{n}\ln(n-1) = \ln n - \frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$
puis :
$$(n-1)^{\frac{n-1}{n}} = n \times e^{-\frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)}.$$
On a alors :
$$u_n = e^{\frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)} - e^{-\frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)}.$$
Écrivons le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction exp :
$$e^u = 1 + u + u\varepsilon(u) \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon = 0.$$

Puisque $\dfrac{\ln n}{n} \to 0$, on a :

$$\varepsilon\left(\frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\Big(\frac{\ln n}{n}\Big)\right) \to 0.$$

Ainsi, en substituant $\frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ à u dans le développement limité précédent, on obtient :

$$e^{\frac{\ln n}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)} = 1 + \left(\frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\Big(\frac{\ln n}{n}\Big)\right) + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\Big(\frac{\ln n}{n}\Big)\right)$$

ce qui donne :

$$e^{\frac{\ln n}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)} = 1 + \frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\cdot$$

De la même manière, on obtient :

$$e^{-\frac{\ln n}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)} = 1 - \frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\cdot$$

Finalement, on obtient, en revenant à u_n :

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 + \frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\Big(\frac{\ln n}{n}\Big)\right) - \left(1 - \frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\Big(\frac{\ln n}{n}\Big)\right) \\ &= \frac{2\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right) \sim \frac{2\ln n}{n}\cdot \end{aligned}$$

13.8 1. Faire un développement limité en 2 pour la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ revient à faire un développement limité en 0 pour la fonction $h \mapsto \sqrt{2+h}$. On a :

$$\sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}}\cdot$$

Or, au voisinage de 0, on a le développement limité :

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + \mathrm{o}(u^3).$$

En remplaçant u par $\dfrac{h}{2}$, on trouve, après simplification :

$$\sqrt{2+h} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}h - \frac{\sqrt{2}}{32}h^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}h^3 + \mathrm{o}(h^3).$$

Le développement limité de $x \mapsto \sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 2 est donc :

$$\sqrt{x} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}(x-2)^3 + \mathrm{o}_{x\to 2}\big((x-2)^3\big).$$

2. La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. Elle n'admet donc pas de développement limité en 0 à l'ordre 1, ni *a fortiori* à aucun ordre supérieur.

13.9 1. On a les développements limités :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$
$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$

d'où :

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{64}x^4 + \mathrm{o}(x^4).$$

2. Un développement limité sous forme normalisée de $\ln(1+x)$ est de la forme :

$$\ln(1+x) = x\big(1 + \cdots + \mathrm{o}(x^r)\big),$$

ce qui mène à :

$$\big(\ln(1+x)\big)^2 = x^2\big(1 + \cdots + \mathrm{o}(x^r)\big)^2 = x^2\big(1 + \cdots + \mathrm{o}(x^r)\big).$$

Pour obtenir le développement limité à l'ordre 4, on choisit donc $r = 4 - 2 = 2$.

On a : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3) = x\Big(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)\Big)$,

puis : $\big(\ln(1+x)\big)^2 = x^2\Big(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)\Big)^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$.

3. Le numérateur x^2+1 est une fonction polynomiale de degré 2, qui est donc son propre développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Obtenons un développement limité de $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$. On a :

$$\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+u(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = x + \frac{x^2}{2}\cdot$$

Le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$ est :

$$\forall u \in \left]-1,+\infty\right[\quad \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\varepsilon(u) \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon = 0.$$

Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $u(x) \in \left]-1,+\infty\right[$ pour x assez proche de 0, ce qui permet de substituer $u(x)$ à x dans le développement précédent :

$$\frac{1}{1+u(x)} = 1 - u(x) + u(x)^2 - u(x)^3 + u(x)^3\varepsilon\big(u(x)\big)$$

On a :

$$u(x) = x + \frac{x^2}{2}\,; \quad u(x)^2 = x^2 + x^3 + \mathrm{o}(x^3)\,;$$
$$u(x)^3 = x^3 + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad \underbrace{u(x)^3}_{\sim x^3}\underbrace{\varepsilon\big(u(x)\big)}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0} = \mathrm{o}(x^3),$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{1+u(x)} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3),$$

puis :

$$\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^3).$$

En multipliant par x^2+1 et en simplifiant, on obtient :

$$\frac{x^2+1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{2} + \mathrm{o}(x^3).$$

4. Comme $\dfrac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, la fonction considérée est bien définie au voisinage de 0. Il est donc possible de l'étudier au voisinage de 0. On a :

$$\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) = -\ln\big(\cos(x)\big) = -\ln\big(1+u(x)\big), \quad \text{avec} \quad u(x) = \cos(x) - 1.$$

Écrivons le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$:

$$\forall u \in \left]-1,+\infty\right[\quad \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u), \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon = 0.$$

Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $u(x) \in \left]-1,+\infty\right[$ pour x assez proche de 0, ce qui permet de substituer $u(x)$ à u dans le développement précédent :

$$\ln\big(1+u(x)\big) = u(x) - \frac{u(x)^2}{2} + u(x)^2\varepsilon\big(u(x)\big).$$

On a :

$$u(x) = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)\,; \quad u(x)^2 = \left(\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}(x^4)\,;$$

$$\text{et} \quad \underbrace{u(x)^2}_{=\mathrm{O}(x^4)}\ \underbrace{\varepsilon\big(u(x)\big)}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0} = \mathrm{o}(x^4),$$

ce qui donne :

$$\ln\big(1+u(x)\big) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \mathrm{o}(x^4),$$

et donc finalement :

$$\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \mathrm{o}(x^4).$$

5. Pour x assez proche de 0, on a $x \neq -1$ et $x \neq 2$. La fonction considérée est donc bien définie au voisinage de 0. On a :

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x^2-x-2} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+u(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}.$$

Écrivons le développement limité à l'ordre 3 en 0 pour $u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$:

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\varepsilon(u) \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon = 0.$$

Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $u(x) \in]-\infty, 1[$ pour x assez proche de 0, ce qui permet de substituer $u(x)$ à u dans le développement précédent :

$$\frac{1}{1+u(x)} = 1 - u(x) + u(x)^2 - u(x)^3 + u(x)^3\varepsilon\big(u(x)\big).$$

On a :

$$u(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\,; \quad u(x)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{2} + \mathrm{o}(x^3)\,;$$

$$u(x)^3 = \frac{x^3}{8} + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad \underbrace{u(x)^3}_{=\mathrm{O}(x^3)}\underbrace{\varepsilon\big(u(x)\big)}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0} = \mathrm{o}(x^3),$$

et donc :

$$\frac{1}{1+u(x)} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{5x^3}{8} + \mathrm{o}(x^3).$$

On obtient finalement :

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \mathrm{o}(x^3).$$

Remarque Pour ce dernier développement limité, on aurait également pu remarquer que :

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{-1/3}{x+1} + \frac{1/3}{x-2},$$

ce qui ramène à effectuer la somme de deux développement limités rapides à écrire.

13.10 Commençons par effectuer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $h \mapsto \operatorname{Arctan}(1+h)$. Pour $h \in \mathbb{R}$, on a :

$$\operatorname{Arctan}'(1+h) = \frac{1}{1+(1+h)^2} = \frac{1}{2+2h+h^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+h+\frac{h^2}{2}}.$$

En notant u la fonction $h \mapsto -h - \frac{h^2}{2}$, la fonction $h \mapsto \dfrac{1}{1+h+\frac{h^2}{2}}$ possède un développement limité à l'ordre 3 en 0, de même partie régulière que $1+u+u^2+u^3$. Après calculs et simplification, on obtient :

$$\frac{1}{1+h+\frac{h^2}{2}} = 1 - h + \frac{h^2}{2} + \mathrm{o}(h^3),$$

et donc :

$$\operatorname{Arctan}'(1+h) = \frac{1}{2} - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + \mathrm{o}(h^3).$$

Par primitivation, et comme $\operatorname{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}$, il vient :

$$\operatorname{Arctan}(1+h) = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{12} + \mathrm{o}(h^4).$$

On en déduit le développement limité à l'ordre 4 en 1 de la fonction Arctan :

$$\operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{12} + \mathrm{o}\big((x-1)^4\big).$$

13.11 1. On a, pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x^2}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \sqrt[3]{1+u(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3}.$$

Écrivons le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $u \mapsto \sqrt[3]{1+u}$:

$$\sqrt[3]{1+u} = 1 + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + u^2\varepsilon(u) \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon = 0.$$

Substituons $u(x)$ à u dans le développement précédent :

$$\sqrt[3]{1+u(x)} = 1 + \frac{u(x)}{3} - \frac{u(x)^2}{9} + u(x)^2\varepsilon\big(u(x)\big).$$

On a :

$$u(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right); \quad u(x)^2 = \frac{9}{x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$\text{et} \qquad \underbrace{u(x)^2}_{=\mathrm{O}\left(1/x^2\right)} \underbrace{\varepsilon\big(u(x)\big)}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

ce qui donne :

$$\sqrt[3]{1+u} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{3x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Il en résulte que :

$$f(x) = x + 1 - \frac{5}{3x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. Le résultat obtenu précédemment signifie graphiquement qu'au voisinage de $+\infty$,
   - la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique au graphe de la fonction f,
   - la courbe représentative de f est située en-dessous de cette droite, car $-\dfrac{5}{3x} < 0$.

13.12 1. Le développement limité de la fonction exp à l'ordre 1 en 0 :

$$e^u = 1 + u + \mathrm{o}(u)$$

nous donne facilement :

$$a^x = e^{x\ln a} = 1 + x\ln(a) + \mathrm{o}(x) \qquad \text{et} \qquad b^x = e^{x\ln b} = 1 + x\ln(b) + \mathrm{o}(x).$$

Il en résulte que :

$$a^x - b^x = (\ln a - \ln b)x + \mathrm{o}(x),$$

ou encore :

$$\frac{a^x - b^x}{x} = \ln a - \ln b + \mathrm{o}(1).$$

Conclusion. La limite recherchée existe est vaut $\ln a - \ln b$.

2. On a :
$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right).$$
Par le même principe qu'à la question précédente, on obtient :
$$\frac{a^x+b^x}{2} = \frac{1}{2}\times\big(2+x(\ln a+\ln b)+\mathrm{o}(x)\big) = 1+x\ln\sqrt{ab}+\mathrm{o}(x).$$
puis :
$$\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) = \ln\Big(1+x\ln\sqrt{ab}+\mathrm{o}(x)\Big) = x\ln\sqrt{ab}+\mathrm{o}(x).$$
On obtient finalement :
$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) = \ln\sqrt{ab}+\mathrm{o}(1)\to\ln\sqrt{ab}.$$
Conclusion. Par composition de limites, la limite cherchée existe est vaut $\sqrt{ab}$.

3. Dans la suite, on considère $x\in\,]-1,0[\,\cup\,]0,+\infty[$. On a :
$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{x}}-e &= \exp\Big(\frac{\ln(1+x)}{x}\Big)-e\\ &= e\left(\exp\Big(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\Big)-1\right).\end{aligned}$$
Comme $\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$, on a, au voisinage de 0 :
$$\exp\Big(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\Big)-1 \sim \frac{\ln(1+x)}{x}-1.$$
Comme $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)$, on a $\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1=-\dfrac{x}{2}+\mathrm{o}(x)\sim-\dfrac{x}{2}\cdot$
Par transitivité puis produit et quotient d'équivalents, on en déduit que :
$$(1+x)^{\frac{1}{x}}-e\sim-e\frac{x}{2}\quad\text{puis}\quad\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}\sim-\frac{e}{2}\cdot$$
Conclusion. La limite recherchée existe et vaut $-\dfrac{e}{2}\cdot$

13.13 1. Commençons par montrer que la fonction f est dérivable. En notant G une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction continue $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, on a :
$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=G(x^2)-G(x).$$
La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f l'est aussi. On a :
$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=2xG'(x^2)-G'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot$$

Pour obtenir un développement limité à l'ordre 4 de f, donnons un développement limité à l'ordre 3 de sa dérivée. Partons du développement limité :

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + \mathrm{o}(u^2),$$

ce qui mène à :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underbrace{\frac{3}{8}x^4 + \mathrm{o}(x^4)}_{=\mathrm{o}(x^3)} = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3),$$

et :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = 1 + \mathrm{o}(x^3).$$

On a donc :

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^3).$$

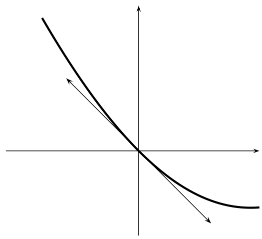
En intégrant ce développement limité, on trouve (puisque $f(0) = 0$) :

$$f(x) = -x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^4).$$

2. Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f :

$$f(x) = -x + x^2 + \mathrm{o}(x^2),$$

nous indique que la courbe représentative f admet donc une tangente d'équation $y = -x$ en 0, et que la courbe est située localement au-dessus de sa tangente.



Chapitre 14 : Séries

I Séries numériques **778**

1 Définitions 778

2 Propriétés immédiates 782

II Séries à termes réels positifs **783**

1 Généralités 783

2 Théorèmes de comparaison 783

3 Comparaison série-intégrale dans le cas monotone 785

4 Application aux séries de Riemann 788

III Séries absolument convergentes **790**

1 Convergence absolue 790

2 Une application : la formule de Stirling 791

IV Représentation décimale d'un réel **792**

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . **796**

Exercices **807**

Séries 14

I Séries numériques

Dans tout ce chapitre, nous considérons des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1 Définitions

Définition 1

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1. On appelle **série de terme général** u_n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$. On la note $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ou encore $\sum u_n$.

   On dit donc que la **série $\sum u_n$ converge** si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie dans $\mathbb{K}$.

   Dans le cas contraire, on dit que la **série diverge**.
2. Si $\sum u_n$ converge, la limite de la série est alors appelée **somme de la série** et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, S_n est appelée **somme partielle d'ordre n** ou n-ième somme partielle.

Remarques

- Une série n'est donc pas autre chose qu'une suite. On peut donc lui appliquer tous les résultats concernant les suites qu'elles soient réelles ou complexes.

  Mais une série est donnée par son terme général et non par ses sommes partielles. Le propos de ce chapitre est de développer des « outils » spécifiques à l'étude d'une série, opérant sur le terme général de cette série.

- Lorsque la suite u est définie seulement à partir d'un certain rang n_0, la série de terme général u_n est notée $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$; l'étude de la série de terme général u_n est alors l'étude de la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ des sommes partielles définies par :
$$\forall n \geqslant n_0 \quad S_n = \sum_{p=n_0}^{n} u_p.$$
Lorsqu'il y a convergence de cette série, la limite est notée $\sum\limits_{p=n_0}^{+\infty} u_p$.
- Le caractère asymptotique de la notion de limite permet de voir que pour tout entier naturel n_0, une série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ converge. Les deux séries sont donc de même nature, mais lorsqu'elles sont convergentes, leurs sommes diffèrent de la valeur $\sum\limits_{p=0}^{n_0-1} u_p$.
- Attention à ne pas confondre les notations : $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ représente la série de terme général u_n alors que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la somme de cette série lorsqu'elle est convergente et est un élément de $\mathbb{K}$.
- On ne peut donc écrire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ qu'après avoir prouvé la convergence de la série.

p.796 **Exercice 1** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite constante. À quelle condition la série de terme général u_n est-elle convergente ?

Proposition 1 (Condition nécessaire de convergence)

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Démonstration. Supposons la série $\sum u_n$ convergente. En notant S_n la somme partielle d'ordre n, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est la différence de deux suites ayant la même limite finie. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. □

Attention La convergence vers 0 du terme général est une condition nécessaire mais non suffisante de convergence ; pour s'en convaincre, il suffit de considérer, par exemple, la série harmonique étudiée dans l'exemple suivant.

Exemple La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$, appelée **série harmonique**, diverge. En effet, si la série était convergente, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \geqslant 1}$ serait convergente et l'on devrait avoir $\lim\limits_{n \to +\infty} \big(S_{2n} - S_n\big) = 0$. Or, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$
Cela donnerait, par passage à la limite $0 \geqslant \dfrac{1}{2}$, d'où la contradiction.

Point méthode

Bien que ce ne soit qu'une condition nécessaire pour déterminer la nature de la série de terme général u_n, il est fréquent de commencer par regarder si le terme général tend vers 0 ou non.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, alors $\sum u_n$ est divergente ; on dit alors que la série est **grossièrement divergente** et l'on parle de **divergence grossière**.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on ne peut rien conclure immédiatement pour la nature de la série. Reste à utiliser d'autres arguments.

p.796 **Exercice 2** Montrer, de deux manières différentes, que la série de terme général $(-1)^n$ est divergente.

Proposition 2

Soit $q \in \mathbb{C}$. La série de terme général q^n, appelée **série géométrique** de raison q, converge si, et seulement si, $|q| < 1$ et l'on a alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\cdot$

Principe de démonstration. Les sommes partielles sont des sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique. Démonstration page 796

Définition 2

Si la série $\sum u_n$ converge, l'élément de $\mathbb{K}$:

$$R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$$

est appelé **reste d'ordre n** de la série $\sum u_n$.

Remarque La définition ci-dessus est justifiée par le fait qe si la série $\sum u_n$ converge, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{p\geqslant n+1} u_p$ converge. □

Attention

- On ne parle de reste d'ordre n pour $n \in \mathbb{N}$ que pour une *série convergente*.
- On notera bien que, pour $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n est la somme $\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} u_p$, et non $\sum\limits_{p=n}^{+\infty} u_p$, afin que l'on dispose pour toute série convergente de la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S = S_n + R_n \quad \text{avec} \quad S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Proposition 3

La suite des restes d'une série convergente tend vers 0.

Démonstration. Il suffit de voir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = S - S_n$, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S$. □

p.796

Exercice 3 Soit $q \in \mathbb{K}$ tel que la série géométrique de raison q soit convergente. Que vaut alors R_n pour $n \in \mathbb{N}$?

On revient ici sur la notion de sommes télescopiques introduite dans le chapitre 2 à la page 102 pour étudier la convergence de telles sommes partielles.

Définition 3

Une **série télescopique** est une série dont le terme général peut s'écrire sous la forme $u_n = v_{n+1} - v_n$ où $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

On a vu que la convergence d'une série n'est rien d'autre que la convergence d'une suite. Réciproquement, dans certains cas, on ramène l'étude de la convergence d'une suite à l'étude de la convergence d'une série télescopique en utilisant la proposition suivante.

Proposition 4 (Lien suite-série)

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.

On a alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \left(\lim\limits_{n \to +\infty} v_n\right) - v_0$.

Démonstration.

Les sommes partielles d'une série télescopique de terme général $u_n = v_{n+1} - v_n$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = v_{n+1} - v_0,$$

on obtient immédiatement le résultat demandé. □

p.796

Exercice 4 Dans les cas suivants, déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ et, lorsqu'il y a convergence, calculer la somme de la série.

1. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$;
2. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$;
3. $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$;
4. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

p.797

Exercice 5

Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{2}{n(n+2)}$ converge et donner sa somme.

2 Propriétés immédiates

Les résultats qui suivent ne sont qu'une reformulation, dans le langage des séries, des résultats correspondant sur les suites.

Proposition 5

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries numériques convergentes ainsi que λ et μ des éléments de $\mathbb{K}$. Alors la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Remarque

1001 • L'ensemble des séries convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1007 • L'application qui, à une série convergente, associe sa somme, est linéaire.

Attention Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries convergentes, alors $\sum(u_n + v_n)$ l'est aussi. Mais $\sum(u_n + v_n)$ peut très bien être une série convergente lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes. Par exemple, $\sum\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ est convergente alors que $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n+1}$ sont divergentes d'après l'exemple de la page 779.

On ne peut donc pas écrire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ sans s'être auparavant assuré de l'existence de ces sommes.

p.797

Exercice 6 Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries numériques.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge.
   Que peut-on dire de la série $\sum(u_n + v_n)$?
2. Même question lorsque les deux séries sont divergentes.

De l'exercice précédent, on déduit immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 6

On ne change pas la nature d'une série en ajoutant à son terme général le terme général d'une série convergente.

Proposition 7 (Cas des séries à termes complexes)

Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes. La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent et l'on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n).$$

Démonstration. Ce résultat découle immédiatement du lien entre la convergence d'une suite complexe et celle des suites de ses parties réelles et imaginaires. □

p.797 **Exercice 7** Montrer que les séries de termes généraux $u_n = \dfrac{\cos n}{2^n}$ et $v_n = \dfrac{\sin n}{2^n}$ sont convergentes et calculer leur somme.

II Séries à termes réels positifs

Dans cette section, il est question de séries dont les termes généraux sont des *réels positifs*. En pratique, d'après le caractère asymptotique de la notion de limite, on peut souvent se contenter de la positivité à partir d'un certain rang.

1 Généralités

La suite des sommes partielles d'une série à terme général réel positif est croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = \sum\limits_{k=0}^{n+1} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geqslant 0$.

D'après les résultats sur les limites des suites croissantes, on a donc la proposition suivante.

Proposition 8

La suite des sommes partielles d'une série de terme général positif ou nul converge ou tend vers $+\infty$.

Remarque Pour montrer qu'une série à termes réels positifs converge, il suffit donc de montrer que la suite des sommes partielles est majorée. Mais, sauf dans de rares cas, on utilisera plutôt les théorèmes de comparaison ci-dessous qui permettent, encore une fois, de travailler sur le terme général de la série et non sur ses sommes partielles.

2 Théorèmes de comparaison

Proposition 9

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge, et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Principe de démonstration. Démonstration page 798

Comparer les sommes partielles des séries de termes généraux u_n et v_n.

Remarque

Il va de soi que le résultat subsiste si la double inégalité $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ n'est valable qu'à partir d'un certain rang n_0 ; mais, en cas de convergence, on dispose seulement de l'inégalité :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

p.798 **Exercice 8** Justifier que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{1+2^n}$ est convergente.

p.798 **Exercice 9** Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.

Montrer alors que $\sum u_n^2$ est convergente.

Corollaire 10

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes généraux positifs.

1. Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ alors la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$.
2. *A fortiori*, le résultat subsiste si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$.

Démonstration. Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, il existe un rang N et un réel $A \in \mathbb{R}_+$ tels que, pour tout entier $n \geqslant N$, on ait $0 \leqslant u_n \leqslant A\,v_n$. Ce qui permet d'appliquer la proposition 9 de la page précédente. □

p.798 **Exercice 10** En comparant à une série géométrique, montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n2^n}$ est une série convergente.

Corollaire 11

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries réelles à termes généraux positifs.

Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration.

En effet, chacune des deux suites domine l'autre et l'on applique le corollaire 10. □

p.798 **Exercice 11** En étudiant la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$, montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Remarque Dans le cas de l'utilisation du critère d'équivalence, il est inutile de vérifier le caractère positif des termes généraux des deux séries ; vérifier la positivité de l'un des deux suffit puisque, par équivalence, l'autre est alors positif à partir d'un certain rang.

Point méthode

Étudier la nature d'une série à terme général positif à l'aide des théorèmes de comparaison ci-dessus nécessite l'utilisation de séries de référence dont on connaît la nature : séries géométriques $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$ (proposition 2 de la page 780) ou séries de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ (proposition 15 de la page 788) .

3 Comparaison série-intégrale dans le cas monotone

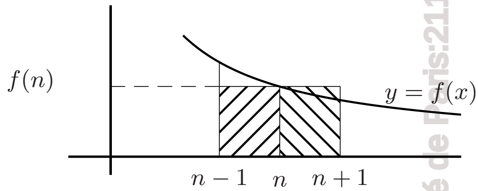
Le but de ce paragraphe est de comparer, pour une fonction f positive, continue par morceaux et monotone, l'intégrale de f sur un intervalle dont les extrémités sont des entiers et des sommes partielles de la série de terme général $f(n)$ en interprétant $f(n)$ comme l'aire d'un rectangle.

Lemme 12

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ positive, continue par morceaux et décroissante. On a :

$$\forall n \geqslant n_0 + 1 \qquad \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Principe de démonstration.



L'aire de chacun des deux rectangles hachurés vaut $f(n)\dots$

Démonstration page 798

Remarques

- L'inégalité de droite du lemme 12 est valable pour tout $n \geqslant n_0$.

- La positivité de la fonction f n'intervient ici que pour l'interprétation en termes d'aire. La relation de droite du lemme 12 s'obtient en intégrant sur tout intervalle $[n, n+1]$, $n \geqslant n_0$, l'inégalité :

$$\forall t \in [n, n+1] \quad f(n) \geqslant f(t).$$

L'inégalité de gauche s'obtient de manière similaire.

Proposition 13 (Comparaison avec une intégrale)

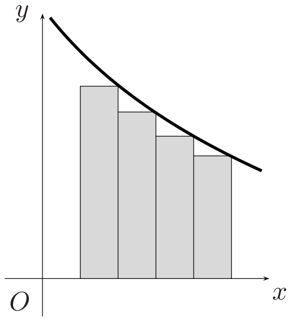
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ positive, continue par morceaux et décroissante.

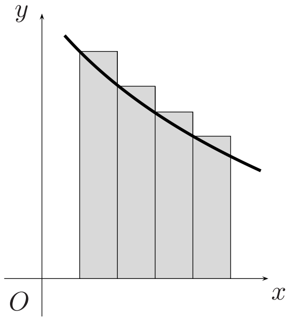
$$\forall N \geqslant n_0 \quad \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} f(n) \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Principe de démonstration. On somme l'encadrement obtenu dans le lemme entre des bornes judicieusement choisies.

Démonstration page 799

Graphiquement, on retrouve très facilement ces résultats :





p.799

Exercice 12 Que devient la relation de la proposition 13 dans le cas d'une fonction positive, continue par morceaux et croissante sur $[n_0, +\infty[$?

Proposition 14 (Comparaison avec une intégrale)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et décroissante.

La série $\sum f(n)$ converge si, et seulement si, $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Démonstration page 800

Remarque Cette proposition permet de donner la nature de la série de terme général $f(n)$ dans le cas où l'on sait calculer l'intégrale $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

En pratique, on l'utilise lorsque l'on connaît une primitive de f.

p.800

Exercice 13 En comparant à une intégrale, étudier la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n \ln n}$.

Étude des sommes partielles et des restes

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux décroissante.

Notons $I_n = \displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

- **Supposons** $\sum f(n)$ **convergente**. Alors la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons I sa limite. Soit n et N des entiers tels que $N \geqslant n+1 \geqslant 1$.

  On reprend l'encadrement du lemme 12 :
  $$\forall p \geqslant 1 \quad \int_p^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(p) \leqslant \int_{p-1}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t,$$
  que l'on somme de $p = n+1$ à N :
  $$\int_{n+1}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{p=n+1}^{N} f(p) \leqslant \int_n^N f(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (*)$$
  Or, on a $\displaystyle\int_{n+1}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$, donc :
  $$\lim_{N\to+\infty} \int_{n+1}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t = I - I_{n+1}.$$
  De la même façon, on obtient $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_n^N f(t)\,\mathrm{d}t = I - I_n$.

  Cela donne alors, en passant à la limite lorsque N tend vers $+\infty$, dans la relation $(*)$:
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad I - I_{n+1} \leqslant R_n \leqslant I - I_n. \qquad (**)$$
  Cet encadrement permet d'estimer l'erreur que l'on commet en approchant la somme S d'une série de ce type par une somme partielle d'ordre n, puisque $S - S_n = R_n$.

  Cet encadrement permet aussi souvent de donner un équivalent de R_n. En effet, si l'on connaît un équivalent simple de $I - I_n$ que l'on note α_n et si $\alpha_{n+1} \sim \alpha_n$, alors $R_n \sim \alpha_n$.

- **Supposons** $\sum f(n)$ **divergente**. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite croissante divergente, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On reprend l'encadrement du lemme 12 :
  $$\forall p \geqslant 1 \quad \int_p^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(p) \leqslant \int_{p-1}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On somme cette fois l'inégalité de gauche de $p=0$ à $n-1$ et celle de droite de $p=1$ à n :

$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{p=0}^{n-1} f(p) \quad \text{et} \quad \sum_{p=1}^{n} f(p) \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On obtient alors :

$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n) \leqslant \sum_{p=0}^{n} f(p) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t,$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n + f(n) \leqslant S_n \leqslant f(0) + I_n.$$

Cet encadrement prouve que S_n est équivalent à I_n, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$ et que $\left(f(n)\right)_{n\mathbb{N}}$ converge en tant que une suite décroissante minorée par 0.

Remarque Dans le cas où la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on peut facilement adapter les résultats précédents.

p.800 **Exercice 14** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

p.800 **Exercice 15** On a vu dans l'exercice 11 de la page 784 que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente.

1. Donner une estimation de l'erreur commise lorsque l'on prend pour valeur approchée de $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ la somme partielle $\displaystyle\sum_{p=1}^{100} \frac{1}{p^2}$.
2. Comment obtenir une approximation de S à 10^{-4} près ?

4 Application aux séries de Riemann

Proposition 15 (Séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Démonstration page 801

Point méthode

Pour étudier la convergence d'une série à terme général positif, on compare souvent son terme général à celui d'une série de Riemann.

Les séries de Riemann constituent ainsi un exemple important, avec les séries géométriques, de séries de référence.

p.801 **Exercice 16** Montrer que la série de terme général $u_n = (1+2+\cdots+n)^{-\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1/2$.

p.801 **Exercice 17**

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n$ est convergente.

Sa limite est appelée **constante d'Euler** et notée γ.

p.802 **Exercice 18** Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Corollaire 16 (Règle $n^\alpha u_n$)

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.

- S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$, alors $\sum u_n$ converge.
- S'il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que $\dfrac{1}{n^\alpha} = \mathrm{o}(u_n)$, alors $\sum u_n$ diverge.
- S'il existe des réels α et $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $u_n \sim \dfrac{\ell}{n^\alpha}$, alors $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

p.802 **Exercice 19** Soit β un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln n}{n^\beta}$ est convergente. On la comparera à une série de Riemann.

p.802 **Exercice 20** Soit la série de terme général $u_n = e^{-n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour $\alpha \leqslant 0$, la série $\sum u_n$ est divergente.
2. On suppose $\alpha > 0$. Montrer que $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de $\sum u_n$.

III Séries absolument convergentes

1 Convergence absolue

Définition 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente**, ou **converge absolument**, si la série à termes réels positifs $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 17

Toute série absolument convergente est convergente.

Principe de démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que la série $\sum |u_n|$ converge.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on montre que $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes pour en déduire la convergence de $\sum u_n$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on montre d'abord que $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ sont absolument convergentes.

Démonstration page 802

Attention La réciproque est fausse comme le montre l'exercice suivant.

p.803

Exercice 21 On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$ est convergente.
2. Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas absolument.

Proposition 18

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$ absolument convergente. On a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{N}$. L'inégalité triangulaire nous permet d'écrire :

$$\left|\sum_{n=0}^{p} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{p} |u_n|.$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ étant absolument convergente est aussi convergente. Un passage à la limite lorsque p tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente donne alors la relation cherchée. □

Point méthode

Comme $|u_n| \in \mathbb{R}_+$, on peut utiliser tous les résultats sur les séries à termes réels positifs pour démontrer la **convergence absolue** d'une série. En particulier, la comparaison de $|u_n|$ ($\leqslant$, O, o, $\sim$) avec une série convergente **à termes positifs** permet de montrer la convergence absolue de $\sum u_n$, donc sa convergence.
La comparaison avec des séries à termes positifs divergentes pourra uniquement montrer que la série n'est pas absolument convergente.

p.803 **Exercice 22** Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{e^{in}}{n^2}$ est convergente.

Remarque Dans l'exercice 7 de la page 783, la convergence des séries pouvait s'obtenir en montrant leur convergence absolue. Cependant, cela ne nous donne pas le calcul de la somme demandée.

p.803 **Exercice 23** Trouver une condition suffisante simple portant sur α pour qu'une série complexe de terme général u_n tel que $u_n = \mathrm{O}(n^{-\alpha})$ soit convergente.

Attention La comparaison (en particulier par équivalent) de séries de terme général non positif ne permet pas en règle général de conclure quant à la nature des séries. Il suffit de considérer l'exercice suivant.

p.803 **Exercice 24** On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

On pose $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge.
2. Montrer que l'on a cependant $u_n \sim v_n$.

2 Une application : la formule de Stirling

Étape 1 On va d'abord prouver l'existence d'un réel K strictement positif tel que $n! \sim K \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.

p.804 **Exercice 25** Soit $n \geqslant 1$. On pose $v_n = \dfrac{n!}{n^n} e^n$ et $w_n = \dfrac{v_n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \dfrac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
2. En déduire la nature de la série de terme général $\ln w_{n+1} - \ln w_n$.
3. Conclure.

Étape 2 Détermination de K.

On va utiliser les résultats de l'exercice 9 de la page 651 concernant les intégrales de Wallis afin de trouver un équivalent de $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x$.

Il a été prouvé dans cet exercice que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \, \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

On conclut alors en cherchant un équivalent de I_{2n} d'une autre manière.

p.804

Exercice 26

1. Trouver un équivalent de I_{2n} à partir de l'équivalent trouvé dans l'exercice précédent.
2. En déduire la valeur de K.

On vient donc de prouver la proposition suivante.

Proposition 19

L'équivalent suivant est connu sous le nom de **formule de Stirling** :

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

IV Représentation décimale d'un réel

On s'intéresse ici à l'écriture d'un réel sous la forme d'un « nombre à virgule ». Par exemple, $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$. Pour les réels négatifs, la tradition veut que l'on adopte l'écriture décimale de leur valeur absolue précédée du signe « $-$ » (par exemple $-\sqrt{2} = -1{,}414\ldots$).

On se contente donc dans la suite de cette section de considérer des réels positifs.

L'écriture décimale d'un réel positif telle que :

$$\pi = 3{,}14159\ldots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \cdots$$

conduit naturellement à l'étude de séries de terme général $\beta_n 10^{-n}$, où β_0 appartient à $\mathbb{N}$ et les β_n, pour $n \geqslant 1$, sont des **chiffres**, c'est-à-dire des entiers compris entre 0 et 9.

Une telle série converge puisque, pour $n \geqslant 1$, son terme général est dominé par 10^{-n} (ou, plus précisément, majoré par 9.10^{-n}), terme général positif d'une série géométrique convergente.

Malheureusement, une telle écriture n'est pas unique, puisque l'on a, par exemple, $1{,}000000\ldots = 0{,}999999\ldots$.

p.804 **Exercice 27** Sauriez-vous prouver que $1{,}000\ldots = 0{,}999\ldots$?

Pour éviter ce problème, nous allons nous limiter aux suites $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes ne sont pas constamment égaux à 9 à partir d'un certain rang.
Nous notons donc $\mathcal{D}$ l'ensemble des **développements décimaux illimités**, c'est-à-dire :

$$\mathcal{D} = \left\{(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \geqslant 1 \quad 0 \leqslant \beta_n \leqslant 9\right\}$$

et $\mathcal{D}_p$ l'ensemble des **développements décimaux illimités propres**, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{D}$ non stationnaires à 9.
On peut remarquer qu'il n'y a aucune condition sur l'entier naturel β_0.

Lemme 20

Soit $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}_p$. Si on note $(a_n\,10^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série de terme général $\beta_n\,10^{-n}$, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 10^n \sum_{p=0}^{n} \frac{\beta_p}{10^p}$$

on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{a_n}{10^n} \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\beta_p}{10^p} < \frac{1+a_n}{10^n}.$$

Principe de démonstration. Pour une inégalité, on n'oublie pas que les séries sont à termes généraux positifs ; pour l'autre, on compare le reste d'ordre n de la série $\sum \beta_n$ à celui de la série $\sum \frac{9}{10^n}$.

Démonstration page 804

Proposition 21

L'application $\delta \ :\ (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_n}{10^n}$ est une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}_+$ dont la restriction à $\mathcal{D}_p$ est injective.

Autrement dit, si $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites distinctes de $\mathcal{D}_p$, les réels $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \beta'_n$ sont différents.

Principe de démonstration. Soit $\beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\beta' = (\beta'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments distincts de $\mathcal{D}_p$. En considérant le plus petit élément n_0 de $\{n \in \mathbb{N} \mid \beta_n \neq \beta'_n\}$, on montre, en utilisant le lemme précédent, que $\delta(\beta) \neq \delta(\beta')$.

Démonstration page 805

Remarque Soit $\beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}_p$ et $x = \delta(\beta)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement $a_n \leqslant 10^n\,x < 1 + a_n$, avec $a_n \in \mathbb{N}$, montre que a_n est la partie entière de $10^n\,x$. On a vu dans le chapitre 8 que $\dfrac{a_n}{10^n}$ est la valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près et $\dfrac{1+a_n}{10^n}$ est la valeur approchée par excès de x à 10^{-n} près (*cf.* la proposition 8 de la page 399). Cela justifie ce qui suit pour prouver la surjectivité de $\delta_{|\mathcal{D}_p}$.

Théorème 22

Tout réel positif x s'écrit de manière unique sous la forme :

$$x = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_n}{10^n},$$

où $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels tels que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant \beta_n \leqslant 9$ et qui n'est pas constamment égale à 9 à partir d'un certain rang.

Cette écriture est le **développement décimal illimité propre** de x.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si l'on note a_n la partie entière de $10^n\,x$, la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\beta_0 = a_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \beta_{n+1} = a_{n+1} - 10a_n.$$

Démonstration page 805

Remarques

- La restriction à $\mathcal{D}_p$ de la fonction δ est une bijection.
- La démonstration de la proposition 21 de la page précédente fournit une méthode pratique pour comparer deux réels positifs donnés par leurs développements décimaux illimités propres : leur position relative est donnée par la comparaison des premiers chiffres qui diffèrent dans leurs développements décimaux illimités.

p.806

Exercice 28 Comment caractériser par son développement décimal illimité propre un nombre décimal positif ? On rappelle qu'un nombre décimal est un nombre rationnel s'écrivant sous la forme $\dfrac{a}{10^p}$ où $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{Z}$.

p.806 **Exercice 29** On cherche le développement décimal illimité propre de $\alpha = \dfrac{1}{12}\cdot$

1. Déterminer les valeurs décimales approchées par défaut de α à l'ordre n pour $n \in [\![0,5]\!]$.
2. En déduire les premiers chiffres du développement décimal illimité propre de α. Quelle conjecture peut-on en tirer ?
3. Prouver que la conjecture précédente est vraie.

Remarque On peut prouver que les rationnels sont caractérisés par le fait que leur développement décimal illimité propre est périodique (*cf.* exercice 14.20 de la page 809).

Attention Par nature, l'affichage d'un calcul donné par une calculatrice ou un ordinateur ne comporte qu'un nombre fini de chiffres. Si cet affichage est $0{,}3333333333$, ce résultat peut être une valeur approchée de $\dfrac{1}{3}$ comme une valeur approchée de $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{10^{11}} \cdots$

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 Notons a la valeur constante de la suite. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p = (n+1)a.$$

Donc $\sum a$ converge si, et seulement si, $a = 0$.

Exercice 2

- *Méthode 1 .* Comme, pour tout entier naturel p $S_{2p+1} = \sum\limits_{k=0}^{2p+1} (-1)^k = 0$ et $S_{2p} = \sum\limits_{k=0}^{2p} (-1)^k = 1$, la suite des sommes partielles est divergente ; donc la série $\sum (-1)^n$ l'est aussi.
- *Méthode 2 .* Comme la suite $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, la série associée est divergente.

Proposition 2

- Si $|q| \geqslant 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad |q^n| \geqslant 1$, donc le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.
- Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on sait que $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\cdot$

  Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $\dfrac{1}{1-q}\cdot$

Exercice 3 En reprenant les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique, on obtient, puisque, dans le cas des séries géométriques convergentes, $q \neq 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n = S - S_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}\cdot$$

Exercice 4

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est néanmoins divergente puisque c'est une série télescopique associée à une suite non convergente.
2. Ici aussi, il s'agit d'une série télescopique.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.

   Donc, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = -1$.

3. Puisque, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \ln(n+1) - \ln n$, la série est une série télescopique. D'après les résultats de la proposition 4 de la page 781, la série est ici divergente car $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln n = +\infty$

4. Puisque, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, il s'agit ici d'une série télescopique convergente car la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On a alors :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Exercice 5 Puisque, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2}{n(n+2)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}$, les sommes partielles de cette série s'écrivent :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$
La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ est donc convergente et on a :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+2)} = \frac{3}{2}.$$

Exercice 6

1. Si la série $\sum(u_n + v_n)$ était convergente, de l'égalité $v_n = (u_n + v_n) + (-u_n)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduirait que la série de terme général v_n serait convergente, en tant que somme de séries convergentes ; d'où la contradiction. Donc, $\sum(u_n + v_n)$ est divergente.

2. On ne peut rien dire de général. Si l'on prend, par exemple, $u_n = v_n = \dfrac{1}{n+1}$, $\sum(u_n + v_n)$ est divergente, alors que $\sum(u_n - v_n)$ est convergente.

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}$. Les réels u_n et v_n sont respectivement les parties réelle et imaginaire de $w_n = \dfrac{e^{in}}{2^n} = \left(\dfrac{e^i}{2}\right)^n$. Comme $\left|\dfrac{e^i}{2}\right| = \dfrac{1}{2} < 1$, la série géométrique $\sum w_n$ est convergente, donc la série des parties réelles et des parties imaginaires aussi.

De la relation $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \frac{1}{1 - \dfrac{e^i}{2}} = \frac{2}{2 - \cos(1) - i\sin(1)} = 2\frac{2 - \cos(1) + i\sin(1)}{\big(2 - \cos(1)\big)^2 + \sin^2(1)}$,

on déduit :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_n = \operatorname{Re}\left(\frac{2}{2 - e^i}\right) = \frac{2(2 - \cos(1))}{5 - 4\cos 1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} v_n = \operatorname{Im}\left(\frac{2}{2 - e^i}\right) = \frac{2\sin(1)}{5 - 4\cos(1)}.$$

Proposition 9 Ces résultats sont une conséquence des inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{p=0}^{n} u_p \leqslant \sum_{p=0}^{n} v_p. \tag{$*$}$$

Si $\sum v_n$ converge, les sommes partielles de la série $\sum v_n$ sont majorées par un réel M ; il en est alors de même de celles de la série $\sum u_n$. Donc $\sum u_n$ est convergente en tant que suite croissante majorée. Un passage à la limite dans la relation $(*)$ donne alors l'inégalité voulue.

Le deuxième point s'en déduit par contraposée du premier.

Exercice 8 Pour tout entier naturel n, on a l'encadrement :

$$0 \leqslant \frac{1}{1+2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Comme la série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ est convergente, $\sum u_n$ l'est aussi.

Exercice 9 La série $\sum u_n$ étant convergente, son terme général tend vers 0.

Il existe donc un rang N tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

et l'on a alors :

$$\forall n \geqslant N \quad 0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n.$$

Le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet alors de conclure.

Exercice 10 Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, on a $\dfrac{\ln n}{n2^n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

La convergence de la série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, à terme général positif, entraîne alors celle de la série $\displaystyle\sum \frac{\ln n}{n2^n}$.

Exercice 11 La série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ est une série télescopique convergente puisque u_n peut s'écrire $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Comme $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ et que les séries sont à termes positifs, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série convergente.

Lemme 12 Soit $n \geqslant n_0 + 1$. L'aire de chacun des deux rectangles hachurés vaut $f(n)$. Par décroissance de la fonction f et croissance de l'intégrale, on obtient :

$$f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n).$$

Ce qui donne la relation cherchée.

Proposition 13 Soit $N \geqslant n_0$.

- En sommant de $n = n_0$ à $n = N$ l'inégalité $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$, on obtient :

$$\sum_{n=n_0}^{N} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} f(n).$$

  Par utilisation de la relation de Chasles, on a alors :

$$\int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} f(n).$$

- En sommant de $n = n_0+1$ à $n = N$ l'inégalité $f(n) \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$, on obtient cette fois :

$$\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

  On en déduit donc :

$$\sum_{n=n_0}^{N} f(n) \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ce qui donne bien l'encadrement demandé.

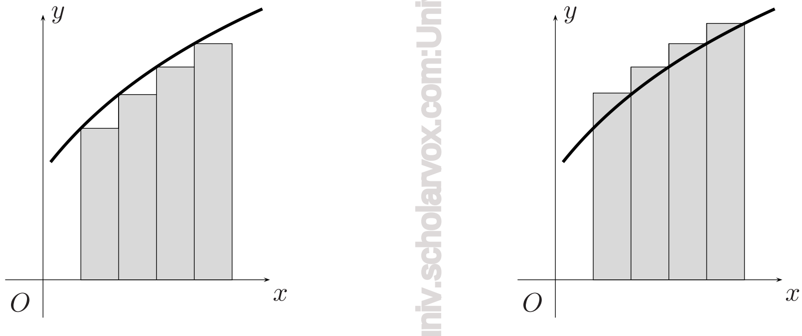
Exercice 12 Soit f une fonction continue par morceaux et croissante sur $[n_0, +\infty[$. Alors $-f$ est une fonction continue par morceaux décroissante sur $[n_0, +\infty[$. D'après la remarque de la page 785, on peut, bien que $-f$ ne soit pas positive, lui appliquer la proposition 13 de la page 786. On obtient alors :

$$\forall N \geqslant n_0 \quad -\int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant -\sum_{n=n_0}^{N} f(n) \leqslant -f(n_0) - \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et en multipliant par -1, on trouve :

$$\forall N \geqslant n_0 \quad f(n_0) + \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On peut bien sûr s'appuyer également ici sur des considérations graphiques.



Proposition 14 La fonction f étant décroissante, on obtient l'encadrement :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme f est une fonction positive, les séries de termes généraux positifs $f(n)$ et $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature d'après la proposition 9 de la page 783.

Or, par la relation de Chasles, $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{n-1} \int_p^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit donc que la série de terme général $f(n)$ et la suite $\displaystyle\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.

Exercice 13 On pose $f(t) = \dfrac{1}{t\ln t}$ pour $t \in [e, +\infty[$. La fonction f est continue et positive sur cet intervalle, dérivable sur $[e, +\infty[$ et une étude rapide du signe de $f' : t \mapsto -\dfrac{1}{t^2 \ln^2 t}(\ln t - 1)$ prouve que f est décroissante.

En reprenant ce qui précède, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n\ln n}$ et la suite $\displaystyle\left(\int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 3}$ sont de même nature.

Or, pour $n \geqslant 3$, $\displaystyle\int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t = \big[\ln(\ln t)\big]_3^n = \ln(\ln n) - \ln(\ln 3) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On en déduit que la série est divergente.

Exercice 14 La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante, positive, continue sur $[1, +\infty[$.

On sait que la série harmonique est divergente.

On reprend ce qui précède avec $I_n = \displaystyle\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = \ln n$ et $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} f(p)$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln n + \frac{1}{n} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leqslant 1 + \ln n.$$

Comme $\ln n + \dfrac{1}{n} \sim \ln n \sim 1 + \ln n$, on obtient $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \sim \ln n$.

Remarquons que ce résultat peut être obtenu également à partir de l'exercice 17 de la page 789.

Exercice 15 On a ici $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 1\cdot$

1. De la relation $(**)$ de la page 787, on déduit l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \leqslant \frac{1}{n}\cdot$$

Ainsi, avec $n = 100$, la somme partielle $S_{100} = \displaystyle\sum_{p=1}^{100} \frac{1}{p^2}$ donne une approximation de S par défaut à 10^{-2} près, car l'erreur commise est majorée par $\dfrac{1}{n}\cdot$

2. On pourrait être tenté de recommencer en remplaçant 100 par $10\,000$, mais en fait, l'encadrement :
$$S_{100} + \frac{1}{101} \leqslant S \leqslant S_{100} + \frac{1}{100}$$
donne un encadrement de S à $\dfrac{1}{100} - \dfrac{1}{101} \leqslant 10^{-4}$ près.

Proposition 15 Posons $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ pour $t \geqslant 1$. La fonction f est positive, continue et dérivable sur $[1, +\infty[$ et $\forall t \geqslant 1 \quad f'(t) = -\alpha \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}\cdot$

- Si $\alpha \leqslant 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n) \neq 0$. Donc, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ diverge grossièrement.
- Si $\alpha > 0$, alors f est décroissante. D'après la proposition 14 de la page 786, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ est de la même nature que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ où $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha}\cdot$

  Or, une primitive sur $[1, +\infty[$ de f est $\begin{cases} t \mapsto \dfrac{1}{1-\alpha}\dfrac{1}{t^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ t \mapsto \ln t & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$

  * Si $\alpha = 1$, on a $I_n = \ln n$ et la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est divergente.
  * Si $\alpha \neq 1$, on a $I_n = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right)$.

    On en déduit que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Conclusion : la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Exercice 16 De la relation $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} \sim \dfrac{n^2}{2}$, on déduit que $u_n \sim \dfrac{2^\alpha}{n^{2\alpha}}\cdot$
Les séries étant à termes généraux positifs, on obtient :
$$\sum u_n \text{ converge} \iff 2\alpha > 1 \iff \alpha > 1/2.$$

Exercice 17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $v_n = u_{n+1} - u_n$. Grâce au lien suite-série (*cf.* la proposition 4 de la page 781), pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, il suffit de montrer que la série $\sum v_n$ converge.
On a :
$$v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$
Un développement limité à l'ordre 2 donne :
$$v_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = -\frac{1}{2(n+1)^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\cdot$$

Donc, $-v_n \sim \dfrac{1}{2(n+1)^2} \sim \dfrac{1}{2n^2}$.

La série de terme général positif $\dfrac{1}{2n^2}$ étant convergente (série de Riemann avec $\alpha = 2$), on en déduit que $-v_n$ est positif à partir d'un certain rang et que la série de terme général $-v_n$ est convergente.

Donc $\sum v_n$ est convergente, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Exercice 18 En utilisant les développements limités en 0 de $\cos x$ et $\ln(1+x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} u_n &= n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2(\sqrt{n})^2} + \frac{1}{24(\sqrt{n})^4} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{7}{24n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que $u_n \sim \dfrac{7}{24n^2}$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc positive à partir d'un certain rang et l'équivalent trouvé permet de conclure que la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 19 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha - \beta < 0$, la suite de terme général $n^\alpha u_n = n^{\alpha-\beta} \ln n$ a pour limite 0. Choisissons alors un réel α tel que $1 < \alpha < \beta$ (ceci est possible puisque $\beta > 1$). On a alors :

$$u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge.}$$

Donc la série $\sum u_n$ (à termes positifs) converge.

Exercice 20

1. La série de terme général $u_n = e^{-n^\alpha}$ diverge pour $\alpha \leqslant 0$ puisque son terme général ne tend pas vers 0.
2. Soit $\alpha > 0$. Par croissances comparées :

$$n^2\, u_n = (n^\alpha)^{2/\alpha}\, e^{-n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui signifie que $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Comme $2 > 1$, on en déduit que $\sum u_n$ converge.

Théorème 17 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que la série $\sum |u_n|$ converge.

Cas des séries réelles. On suppose ici que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in \mathbb{R}$.

On a alors, pour tout entier n, $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$. Comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$, la convergence de la série de terme général $|u_n|$ entraine la convergence de la série à termes positifs $\sum u_n^+$. De même, $\sum u_n^-$ converge.

Par suite, $\sum \left(u_n^+ - u_n^-\right)$ est une série convergente, en tant que différence de séries convergentes. Donc, $\sum u_n$ est convergente.

Cas des séries complexes. Des inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\operatorname{Re}(u_n)| \leqslant |u_n| \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|,$$

on déduit que les séries de termes généraux positifs $|\operatorname{Re}(u_n)|$ et $|\operatorname{Im}(u_n)|$ sont convergentes ; les séries $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ sont donc absolument convergentes et d'après le point précédent, elles sont convergentes. En vertu de la proposition 7 de la page 782, la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 21

1. La *suite* $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0. Donc, $\sum u_n$ est convergente en tant que série télescopique associée à une suite convergente.
2. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\right) = 2$, on obtient :

$$|u_n| \sim \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Donc, la série à termes positifs $\sum |u_n|$ n'est pas convergente puisque la série $\sum \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ diverge.

Exercice 22 L'égalité :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \left|\frac{e^{in}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$$

et la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ assurent que la série de terme général $\dfrac{e^{in}}{n^2}$ est absolument convergente, et donc convergente.

Exercice 23 Si $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument puisque $|u_n| = \mathrm{O}(n^{-\alpha})$ et $\sum n^{-\alpha}$ converge, donc, $\sum u_n$ converge.

Exercice 24

1. • On a montré la convergence de $\sum u_n$ dans l'exercice 21 de la page 790.

   • Comme $\sum u_n$ converge et $\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum v_n$ diverge en tant que somme d'une série convergente et d'une série divergente.
2. Par ailleurs, l'équivalent de $|u_n|$ trouvé dans l'exercice 21 de la page 790 montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} n|u_n| = +\infty$ puisque $u_n \sim \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ et donc, $\dfrac{1}{n} = \mathrm{o}\,(u_n)$.

   On en déduit que $v_n = u_n + \mathrm{o}(u_n) \sim u_n$.

Exercice 25

1. De l'égalité $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = e\Big(\dfrac{n}{n+1}\Big)^n = e\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{-n}$, on obtient que :

$$\ln v_{n+1} - \ln v_n = 1 - n\ln\big(1+\frac{1}{n}\big) = \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$$

2. Comme $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{v_{n+1}}{v_n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$, on a :

$$\ln w_{n+1} - \ln w_n = \ln v_{n+1} - \ln v_n - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$$

   On en déduit la convergence absolue de la série $\sum(\ln w_{n+1} - \ln w_n)$.

3. On déduit de ce qui précède que la suite $(\ln w_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente ; notons ℓ sa limite. Par continuité de la fonction exp, on obtient alors que $(w_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $K = e^\ell > 0$. On a ainsi prouvé l'existence d'une constante $K > 0$ telle que :

$$n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

Exercice 26

1. $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2} \sim \dfrac{Ke^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{2^{2n}(Ke^{-n}n^n\sqrt{n})^2}\dfrac{\pi}{2} \sim \dfrac{\pi}{K\sqrt{2n}}\cdot$

2. Par unicité de la limite de $\sqrt{n}I_{2n}$, on obtient alors $K = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 27

On a $1{,}\underbrace{00\ldots00}_{n \text{ fois } 0} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{0}{10^k} = 1$ et $1{,}000\ldots = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{0}{10^k}\right) = 1$.

De même, $0{,}\underbrace{99\ldots99}_{n \text{ fois } 9} = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{9}{10^k} = \dfrac{9}{10}\,\dfrac{1-(1/10)^n}{1-1/10} = 1 - \dfrac{1}{10^n}\cdot$

Donc $0{,}999\ldots = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right) = 1$.

Lemme 20 Soit $n \in \mathbb{N}$. L'inégalité de gauche est immédiate puisque la série de terme général positif est convergente et donc, les sommes partielles sont majorées par la somme de la série. Pour l'autre, on a :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{\beta_p}{10^p} \leqslant \sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{9}{10^p} = \frac{1}{10^n},$$

l'inégalité étant stricte, puisque les β_p pour $p > n$ ne sont pas constamment égaux à 9. Ce qui donne :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\beta_p}{10^p} = \sum_{p=0}^{n}\frac{\beta_p}{10^p} + \sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{\beta_p}{10^p} \leqslant \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} = \frac{a_n+1}{10^n}\cdot$$

Proposition 21 Nous savons déjà que δ est bien définie sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Soit $\beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\beta' = (\beta'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments distincts de $\mathcal{D}_p$. L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid \beta_n \neq \beta'_n\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide ; appelons n_0 son plus petit élément qui vérifie alors :

$$\forall n < n_0 \quad \beta_n = \beta'_n \qquad \text{et} \qquad \beta_{n_0} \neq \beta'_{n_0}.$$

Quitte à échanger β et β', on peut supposer que $\beta_{n_0} < \beta'_{n_0}$. On a donc, plus précisément, $\beta_{n_0} + 1 \leqslant \beta'_{n_0}$ puisque ce sont des entiers.

Notons $(a_n\, 10^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a'_n\, 10^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des sommes partielles respectivement des séries $\sum \beta_n\, 10^{-n}$ et $\sum \beta'_n\, 10^{-n}$. D'après le lemme 20 de la page 793, on a :

$$\delta(\beta) < \frac{1 + a_{n_0}}{10^{n_0}} \quad \text{et} \quad \frac{a'_{n_0}}{10^{n_0}} \leqslant \delta(\beta').$$

Par ailleurs, $a'_{n_0} - a_{n_0} = 10^{n_0}\Big(\sum\limits_{p=0}^{n_0} \dfrac{\beta'_p}{10^p} - \sum\limits_{p=0}^{n_0} \dfrac{\beta_p}{10^p}\Big) = \beta'_{n_0} - \beta_{n_0} \geqslant 1.$

On a donc :

$$\delta(\beta) < \frac{1 + a_{n_0}}{10^{n_0}} \leqslant \frac{a'_{n_0}}{10^{n_0}} \leqslant \delta(\beta').$$

Cela signifie bien que la restriction de δ à $\mathcal{D}$ est injective.

Théorème 22 Soit $n \in \mathbb{N}$. On note a_n la partie entière de $10^p\, x$ et on définit la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\beta_0 = a_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \beta_{n+1} = a_{n+1} - 10a_n.$$

Par définition de la partie entière :

- a_{n+1} est le plus grand entier inférieur ou égal à $10^{n+1}\, x$,
- $1 + a_{n+1}$ est le plus petit entier strictement supérieur à $10^{n+1}\, x$.

De la double inégalité : $10a_n \leqslant 10^{n+1}\, x < 10a_n + 10$, on déduit alors $10a_n \leqslant a_{n+1}$ et $10a_n + 10 \geqslant 1 + a_{n+1}$. On a donc $0 \leqslant \beta_{n+1} \leqslant 9$.

Les suites $\left(\dfrac{a_n}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{a_n + 1}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors adjacentes, et l'encadrement :

$$a_n\, 10^{-n} \leqslant x < (1 + a_n)\, 10^{-n} \tag{$*$}$$

montre que leur limite commune est x. Comme la suite $\left(\dfrac{a_n}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum \beta_n\, 10^{-n}$, on en déduit que cette série est convergente et que $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\beta_n}{10^n}\cdot$

Enfin, si le développement décimal illimité $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'était pas propre, on aurait à partir d'un certain rang $a_{n+1} - 10a_n = \beta_n = 9$, soit encore :

$$\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} - \frac{a_n}{10^n} = \frac{9}{10^{n+1}} = \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^{n+1}}.$$

Donc la suite $((1 + a_n)\, 10^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ serait stationnaire, de limite x ; ce qui contredirait l'inégalité stricte dans l'encadrement $(*)$.

Exercice 28

- Soit $x = \dfrac{a}{10^p}$ un nombre décimal positif où $a \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.

  Pour $n \geqslant p$, $10^n x \in \mathbb{N}$; donc $a_n = \lfloor 10^n x \rfloor = 10^n x$ et on en déduit que $\beta_{n+1} = a_{n+1} - 10a_n = 0$. Par suite, la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire égale à 0 et le développement décimal illimité propre de x s'écrit :

$$x = \sum_{n=0}^{p} \frac{\beta_n}{10^n} = \beta_0{,}\beta_1 \cdots \beta_p.$$

  On dit que le développement décimal illimité propre de x ne comporte qu'un nombre fini de décimales.

- Réciproquement, supposons que le développement décimal illimité propre de x ne comporte qu'un nombre fini de décimales. Il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que :

$$x = \beta_0{,}\beta_1 \cdots \beta_p = \sum_{n=0}^{p} \frac{\beta_n}{10^n} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{p} 10^{p-n}\beta_n}{10^p}.$$

  Comme $\sum\limits_{n=0}^{p} 10^{p-n}\beta_n \in \mathbb{N}$, x est un nombre décimal.

Exercice 29

1. Comme $\left\lfloor \dfrac{1}{12} \right\rfloor = 0 \quad \left\lfloor \dfrac{10}{12} \right\rfloor = 0 \quad \left\lfloor \dfrac{10^2}{12} \right\rfloor = 8 \quad \left\lfloor \dfrac{10^3}{12} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{10^4}{12} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{10^5}{12} \right\rfloor = 3,$
   les valeurs décimales approchées par défaut de α à l'ordre n sont :

$$0 \qquad 0{,}0 \qquad 0{,}08 \qquad 0{,}083 \qquad 0{,}0833 \qquad 0{,}08333.$$

2. En reprenant les notations précédentes, on a alors $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 8$, $\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 3$. On peut alors conjecturer que $\beta_n = 3$ si $n \geqslant 3$.

3. On a $0{,}083333\ldots = \dfrac{8}{100} + \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{8}{100} + \frac{3}{10^3}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{8}{100} + \frac{1}{300} = \frac{1}{12}.$

S'entraîner et approfondir

14.1 Étudier la convergence des séries dont les termes généraux u_n, $n \geqslant 1$, sont :

1. $\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$; 2. $\dfrac{\ln n}{2^n}$; 3. $n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n}}$; 4. $\dfrac{n\sqrt{n}}{2^n + \sqrt{n}}$.

14.2 Étudier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^3 - n}$; 2. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$; 3. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (3 + (-1)^n)^{(-n)}$.

On pourra utiliser que $\dfrac{1}{n^3 - n} = -\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \geqslant 2$.

14.3 En fonction des valeurs du paramètre $p \in \mathbb{N}$, étudier la nature de la série de terme général :

$$v_n = \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{(n+p)!}.$$

⋆ **14.4** En fonction des valeurs du paramètre $p \in \mathbb{N}$, étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$$

et calculer sa somme lorsqu'elle est convergente.

Pour $p \geqslant 2$, on cherchera à exprimer u_n à l'aide de $a_n = \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{p-1} (n+i)\right)^{-1}$.

14.5 Soit x un réel tel que $|x| < 1$.

1. En considérant les sommes partielles de la série de terme général x^n, montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n x^{n-1}$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
2. De la même manière, prouver la convergence de la série de $\sum_{n \geqslant 2} n(n-1)x^{n-2}$ et déterminer la valeur de sa somme.
3. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$.

14.6 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}.$$

Lorsque la série converge, calculer la valeur de la somme.

★★ **14.7** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs ou nul. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}\cdot$$

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge et que sa somme vérifie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n \leqslant 1$.
2. Prouver que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = 1$ si, et seulement si, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

14.8 Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries convergentes à termes positifs. Montrer que les séries de termes généraux $\max(u_n, v_n)$ et $\sqrt{u_n v_n}$ sont convergentes.

★ **14.9** Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}\cdot$

En remarquant que $\displaystyle\int_0^1 x^p \,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}$ pour tout entier p, calculer sa somme.

★ **14.10** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n = -\dfrac{4}{n}$ si n est multiple de 5 et $u_n = \dfrac{1}{n}$ sinon.

1. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{5n} u_k$.
2. En déduire que $\sum u_k$ converge et déterminer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$.

14.11 Retrouver la nature des séries de Riemann en étudiant la série de terme général $\dfrac{1}{n^\beta} - \dfrac{1}{(n+1)^\beta}$ où $\beta \in \mathbb{R}$.

★ **14.12** Soit $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln\left(\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$.

Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

On pourra utiliser la formule $\sin 2a = 2\sin a \cos a$.

14.13 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

On suppose que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent. Montrer que $\sum v_n$ converge.

14.14 Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n}$ diverge et donner un équivalent simple de ses sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}\cdot$

14.15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]1,+\infty[$. Étudier la nature de la série de terme général :
$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$
On cherchera un équivalent de u_n.

⋆ **14.16** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier, en fonction de la valeur de α, la nature de la série de terme général $u_n = \left(\cos \dfrac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$.

14.17 Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^\beta\, n^\alpha}$, $n \geqslant 2$, converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha < 1$. Que se passe-t-il si $\alpha = 1$?
Ces séries sont appelées **séries de Bertrand**.

14.18 Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive, décroissante de limite nulle. On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n v_n$ et l'on s'intéresse à la nature de la série de terme général u_n.

1. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

   Montrer que les suites $\left(S_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(S_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la série de terme général u_n est convergente. Ce résultat est connu sous le nom de **critère spécial des séries alternées.**
3. Application : pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?
   Ces séries sont appelées **séries de Riemann alternées**.

⋆⋆ **14.19** Soit $x \in \mathbb{R}$.
En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

On pourra s'inspirer de l'exercice 9 de la page 651.

14.20 Un développement décimal illimité $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dit *périodique* s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :
$$\forall n \geqslant n_0\,,\ \beta_n = \beta_{n+p}.$$
1. Montrer que, si le développement décimal illimité d'un nombre réel positif x est périodique, alors $x \in \mathbb{Q}$.
2. Soit $\dfrac{a}{b}$ un rationnel positif, avec $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$.
   (a) On note β_0 et α_0 respectivement les quotient et reste de la division euclidienne de a par b et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, β_n et α_n respectivement les quotient et reste de la division euclidienne de $10\alpha_{n-1}$ par b. Montrer que le développement décimal illimité de $\dfrac{a}{b}$ est alors $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) En déduire que le développement décimal illimité de $\dfrac{a}{b}$ est périodique.

Solution des exercices

14.1 1. La série diverge grossièrement puisque la suite a pour limite 1.

2. On obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \ln n = 0$ par croissances comparées ; donc $\dfrac{\ln n}{2^n} = \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)^n$.

La convergence de la série géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ assure celle de $\sum \dfrac{\ln n}{2^n}\cdot$

3. On peut écrire $u_n = n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}}\left[1 - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$.

Comme $\dfrac{1}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

On en déduit que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\dfrac{1}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) = 1 + \dfrac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Donc, $u_n = n^{\frac{1}{n}}\left[-\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})\right]$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$, on a $u_n \sim -\dfrac{1}{n^2}$; d'où la convergence de la série.

4. Par croissances comparées, on a $u_n = \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)^n$, donc $\sum u_n$ est convergente.

14.2 1. Comme $\dfrac{1}{n^3-n} \sim \dfrac{1}{n^3}$, la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n^3-n}$ est convergente.

À partir de l'égalité (*cf.* chapitre 18) :

$$\forall n \geqslant 2 \quad \frac{1}{n^3-n} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+1},$$

on obtient que :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^3-n} &= -\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+1}\\ &= -\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+1}\frac{1}{n}\\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{N} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{N} + \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2N(N+1)}\cdot\end{aligned}$$

Donc, $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n^3-n}$ est convergente et $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^3-n} = \dfrac{1}{4}\cdot$

2. De la relation $\ln\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n} = \ln(n+2) + \ln(n+1) - \ln n - \ln(n+3)$, en faisant un changement d'indice comme dans l'exercice précédent, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{N}\ln\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n} = \ln(N+1) - \ln(N+3) + \ln 3 = \ln 3 - \ln\frac{N+3}{N+1}\cdot$$

On en déduit que la série est convergente et que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n} = \ln 3$.

3. La relation :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \left(\frac{1}{3+(-1)^n}\right)^n \leqslant \frac{1}{2^n}$$
prouve que $\sum\limits_{n\geqslant 0}(3+(-1)^n)^{(-n)}$ est convergente.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :
$$\sum_{n=0}^{2N}(3+(-1)^n)^{(-n)} = \sum_{j=0}^{N} 4^{(-2j)} + \sum_{j=0}^{N-1} 2^{(-2j-1)}$$
$$= \sum_{j=0}^{N}\left(\frac{1}{16}\right)^j + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\frac{1}{4}\right)^j.$$

Par passage à la limite,
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(3+(-1)^n)^{(-n)} = \frac{1}{1-\frac{1}{16}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{26}{15}.$$

14.3 ▷ $p=0$: $v_n \geqslant 1$ donc $\sum v_n$ diverge grossièrement.

▷ $p=1$: $v_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$ donc $\sum v_n$ diverge.

▷ $p\geqslant 3$: $v_n \leqslant \dfrac{nn!}{(n+3)!} \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc $\sum v_n$ converge.

▷ $p=2$: $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{(n-1)(n-1)!}{(n+2)!} + \dfrac{n!}{(n+2)!} = \dfrac{2n-1}{n(n+1)(n+2)} \sim \dfrac{2}{n^2}$ donc $\sum v_n$ converge.

14.4 ▷ $p=0$: $u_n = 1$ et la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

▷ $p=1$: $u_n = \dfrac{1}{n}$ et la série $\sum u_n$ est divergente.

▷ $p\geqslant 2$: $u_n = p!\dfrac{1}{(n+p)\cdots(n+1)}$.

On va faire apparaitre une somme télescopique de la manière suivante :
$$u_n = \frac{p!}{1-p}\frac{(n+1)-(n+p)}{(n+p)\cdots(n+1)} = \frac{p!}{1-p}\left(a_{n+1}-a_n\right).$$
où on a posé $a_n = \dfrac{1}{\prod\limits_{i=1}^{p-1}(n+i)}$.

Or, $a_n \sim \dfrac{1}{n^{p-1}}$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. La série est donc une série télescopique convergente et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \dfrac{p!}{p-1}a_0 = \dfrac{p}{p-1}$.

14.5 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction S_n qui, à tout réel $x \in\,]-1,+1[$, associe $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ est une fonction polynomiale et, en tant que telle, est dérivable.

Dérivons alors la relation :

$$\forall x \in \,]-1,+1[\quad S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}. \qquad (*)$$

On obtient :

$$\forall x \in \,]-1,+1[\quad S_n'(x)=\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}-\frac{(n+1)x^n}{(1-x)}+\frac{x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{(n+1)x^n}{(1-x)}+\dfrac{x^{n+1}}{(1-x)^2}\right)=0$, on en déduit que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} kx^{k-1}$ est convergente lorsque $|x|<1$. De plus :

$$\forall x \in \,]-1,+1[\quad \sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

2. On reprend le même raisonnement en dérivant $(*)$ une deuxième fois. On obtient alors :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
   - $\sum\limits_{n=0}^{N} nx^n = \sum\limits_{n=1}^{N} nx^n = x\sum\limits_{n=1}^{N} nx^{n-1}$. Ces sommes étant convergentes, on en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 0} nx^n$ est convergente et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.
   - $\sum\limits_{n=0}^{N} n^2x^n = \sum\limits_{n=1}^{N} n^2x^n = x^2\sum\limits_{n=2}^{N} n(n-1)x^{n-2}+\sum\limits_{n=1}^{N} nx^n$. Les deux sommes de droite étant convergentes, on en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2x^n$ est convergente.

   De plus : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$

14.6 On a $u_n = \sqrt{n}+a\sqrt{n}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+b\sqrt{n}\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}$.

- Effectuons un développement asymptotique de u_n :

$$u_n = (1+a+b)\sqrt{n}+\left(\frac{1}{2}a+b\right)\frac{1}{\sqrt{n}}+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big).$$

  * Si $1+a+b\neq 0$, alors $u_n \sim (1+a+b)\sqrt{n}$ et $\sum u_n$ est divergente.
  * Si $1+a+b=0$ et $\dfrac{1}{2}a+b\neq 0$, alors $u_n\sim\left(\dfrac{1}{2}a+b\right)\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum u_n$ diverge.
  * Si $1+a+b=0$ et $\dfrac{1}{2}a+b=0$, alors $u_n=\mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\Big)$ et $\sum u_n$ converge.

  Or, $\left(1+a+b=0 \quad\text{et}\quad \dfrac{1}{2}a+b=0\right) \iff (a=-2 \quad\text{et}\quad b=1)$.

  On en conclut que $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $(a,b)=(-2,1)$.

- On suppose que $(a,b)=(-2,1)$. Dans ce cas, on a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}\sqrt{k} - 2\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k} + \sum_{k=2}^{n+2}\sqrt{k}\\ &= \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-1\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-1.\end{aligned}$$
On en déduit que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = -1$.

14.7 Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n}(1+u_k)$. Remarquons alors que $P_n \neq 0$.

1. Pour tout entier naturel n non nul :
$$v_n = \frac{1+u_n}{P_n} - \frac{1}{P_n} = \frac{1}{P_{n-1}} - \frac{1}{P_n}.$$
La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ étant une série télescopique, on obtient que cette série converge si, et seulement si, la suite $\left(\frac{1}{P_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Or, pour tout entier naturel n, $P_{n+1} \geqslant P_n \geqslant 1$; la suite $\left(\frac{1}{P_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante positive, donc convergente. Notons ℓ sa limite. On a alors $\ell \geqslant 0$.
Donc, $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ est convergente et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{1}{1+u_0} - \ell$. On en déduit que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = v_0 + \frac{1}{1+u_0} - \ell = 1-\ell \leqslant 1.$$
2. Compte-tenu de la question précédente, on a :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 1 &\iff \ell = 0\\ &\iff \lim_{n\to+\infty} P_n = +\infty\\ &\iff \lim_{n\to+\infty} \ln(P_n) = +\infty\\ &\iff \sum_{n\geqslant 0}\ln(1+u_n) \text{ diverge.}\end{aligned}$$
Premier cas : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(1+u_n)\neq 0$ et la série $\sum \ln(1+u_n)$ diverge grossièrement ainsi que $\sum u_n$.
Deuxième cas : $\lim u_n = 0$. Alors, $u_n \sim \ln(1+u_n)$; les deux séries étant à termes généraux positifs ont même nature.
On en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 0}\ln(1+u_n)$ diverge $\iff \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.
D'où le résultat demandé.

14.8 • Pour tout entier naturel n, u_n et v_n étant positifs, on a $0 \leqslant \max(u_n, v_n) \leqslant u_n + v_n$. La série de terme général $u_n + v_n$ est convergente puisque somme de deux séries convergentes. On en déduit que la série de terme général $\max(u_n, v_n)$ est convergente.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 = u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n} \geqslant 0$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Cet encadrement assure la convergence de la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$.

14.9 • La majoration $\left|\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}\right| \leqslant \dfrac{1}{4n^2}$ assure la convergence absolue, et donc la convergence, de la série.

• La relation $\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3}\Big)$ pourrait faire penser à une somme télescopique ; mais ce n'est pas le cas ici à cause des changements de signes occasionnés par les « $(-1)^n$ ».

Néanmoins, calculons les sommes partielles. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
2\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} &= \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+3} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-1)^n x^{2n}\,\mathrm{d}x - \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-1)^n x^{2n+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-x^2)^n\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2 \sum_{n=0}^{N} (-x^2)^n\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\frac{1-(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}(-x^2)^{N+1}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Reste à trouver la limite de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}(-x^2)^{N+1}\,\mathrm{d}x$. On majore alors cette intégrale :

$$\left|\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}(-x^2)^{N+1}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}x^{2N+2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{2N+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2N+3}.$$

D'après le théorème d'encadrement, on obtient alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}(-x^2)^{N+1}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(-1+\frac{2}{1+x^2}\Big)\,\mathrm{d}x = -1 + 2\,\mathrm{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{2} - 1$, on en déduit que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

14.10 Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_{5n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{5k+3} + \frac{1}{5k+4} - \frac{4}{5k+5} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{5k+3} + \frac{1}{5k+4} + \frac{1}{5k+5} \right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{5}{5k+5} \\ &= \sum_{k=1}^{5n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{1+k/n}. \end{aligned}$$

   On reconnaît une somme de Riemann de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$, continue sur $[0,4]$.

   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{5n} u_k = \displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 5$.

   Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} u_p = 0$, $S_{5n+1} = S_{5n} + u_{5n+1}$ a aussi pour limite $\ln 5$.

2. De la même manière, on montre que :

$$\lim_{n\to+\infty} S_{5n+2} = \lim_{n\to+\infty} S_{5n+3} = \lim_{n\to+\infty} S_{5n+4} = \ln 5.$$

   Cela prouve que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite convergente et que $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \ln 5$.

14.11 On utilise ici encore une série télescopique et les équivalents :

$$\frac{1}{n} \sim \ln(n+1) - \ln n \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n^{\beta+1}} \sim \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}\right) \quad \text{pour } \beta \neq 0.$$

Le résultat provient donc de la convergence de la **suite** $n^{-\beta}$ pour $\beta > 0$ et de la divergence des **suites** $\ln n$ et $n^{-\beta}$ pour $\beta < 0$.

En conclusion, on en déduit que, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, la série $\sum \dfrac{1}{n^{\beta+1}}$ converge si, et seulement si, $\beta > 0$. Donc, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

14.12 Remarquons tout d'abord que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{x}{2^n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Ce qui assure que $\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right) \in]0,1[$, $\cos\left(\dfrac{x}{2^n}\right) \in]0,1[$ et que u_n est bien défini.

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\dfrac{x}{2^n} = 1$, on a :

$$u_n \sim \cos\frac{x}{2^n} - 1 \sim -\frac{x^2}{2}\,\frac{1}{4^n},$$

ce qui assure la convergence de la série de termes négatifs u_n.

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$. De la relation $2\sin\dfrac{x}{2^k}\cos\dfrac{x}{2^k} = \sin\dfrac{x}{2^{k-1}}$, on tire :

$$\ln\left(\cos\frac{x}{2^k}\right) = \ln\left(\sin\frac{x}{2^{k-1}}\right) - \ln\left(\sin\frac{x}{2^k}\right) - \ln 2,$$

puis en sommant de $k=0$ à $k=n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= u_0 + \sum_{k=1}^{n}\Big(\ln\big(\sin\frac{x}{2^{k-1}}\big) - \ln\big(\sin\frac{x}{2^k}\big)\Big) - n\ln 2\\ &= \ln(\cos x) + \ln(\sin x) - \ln\big(\sin\frac{x}{2^n}\big) - n\ln 2\\ &= \ln\big(\frac{\sin 2x}{2}\big) - \ln\big(2^n\sin\frac{x}{2^n}\big)\end{aligned}$$

Or, $2^n\sin\dfrac{x}{2^n} = x\,\dfrac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \sim x$ puisque $\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$. On obtient donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{x}{2^k}\right) = \ln\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\cdot$$

14.13 On obtient : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant v_n - u_n \leqslant w_n - u_n$.
La série de terme général $w_n - u_n$ est une série convergente comme différence de deux séries convergentes. La série de terme général positif $v_n - u_n$ l'est donc aussi.
Comme $v_n = (v_n - u_n) + u_n$, v_n est le terme général d'une série convergente.

14.14 L'encadrement $\forall n \geqslant 2 \quad 0 \leqslant \dfrac{\ln 2}{n} \leqslant \dfrac{\ln n}{n}$ assure la divergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n}\cdot$

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est continue, positive, décroissante sur $]e,+\infty[$. On va utiliser une comparaison série-intégrale. Comme cette série diverge, on peut utiliser l'encadrement du lemme 12 de la page 785 :

$$\forall p \geqslant 3 \quad \int_p^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(p) \leqslant \int_{p-1}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On obtient alors :

$$\int_3^n \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{p=3}^{n}\frac{\ln p}{p} \leqslant \frac{\ln(3)}{3} + \int_3^n \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t.$$

Comme $\displaystyle\int_3^n \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big[\big(\ln t\big)^2\Big]_3^n$, on en déduit que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln p}{p} \sim \frac{1}{2}\big(\ln n\big)^2$.

14.15 Comme $\alpha > 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente ; cela justifie l'existence de u_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ étant continue, positive, décroissante sur $[1,+\infty[$, on va utiliser une comparaison série-intégrale.

On reprend l'encadrement du lemme 12 de la page 785 :

$$\forall p \geqslant 1 \quad \int_p^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(p) \leqslant \int_{p-1}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t$$

que l'on somme de $p = n+1$ à N avec $N \geqslant n+1$:

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{p=n+1}^{N} f(p) \leqslant \int_n^N f(t)\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

Or, $\displaystyle\int_{n+1}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_{n+1}^{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$.

Par passage à la limite dans $(*)$, on obtient :

$$\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est de même nature que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$, soit encore :

$$\sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge} \iff \alpha - 1 > 1 \iff \alpha > 2.$$

14.16 On a $u_n = \exp(v_n)$ avec $v_n = n^\alpha \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \sim n^\alpha\left(\cos\frac{1}{n} - 1\right) \sim -\dfrac{n^{\alpha-2}}{2}\cdot$

On en déduit que :

- v_n ne tend pas vers $-\infty$ et donc u_n ne tend pas vers 0 si $\alpha \leqslant 2$;
- pour $\alpha > 2$, v_n tend vers $-\infty$ et $\frac{\ln n}{v_n} \sim -\frac{2\ln n}{n^{\alpha-2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Donc $v_n + 2\ln n = v_n + \mathrm{o}(v_n) \sim v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

  Par suite, $n^2 u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, $\sum u_n$ est convergente

En conclusion, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

14.17 Remarquons tout d'abord que la série de terme général u_n est une série à termes positifs.

- Si $\alpha > 1$, on peut trouver γ tel que $1 < \gamma < \alpha$, et alors par croissances comparées :

  $$n^\gamma\, u_n = (\ln n)^{-\beta}\, n^{\gamma-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  Donc, $u_n = \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{n^\gamma}\Big)$ et alors $\sum u_n$ est convergente.
- Si $\alpha < 1$, alors $n\,u_n$ tend vers $+\infty$. Comme $\dfrac{1}{n} = \mathrm{o}\big(u_n\big)$, la divergence de $\sum\frac{1}{n}$ entraîne celle de $\sum u_n$.
- On suppose maintenant que $\alpha = 1$.
  Montrons alors que la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.
  - $*$ Si $\beta \leqslant 0$, la série diverge puisque $\dfrac{1}{n\,(\ln n)^\beta} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 3$.
  - $*$ Si $\beta > 0$, la fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{t\,(\ln t)^\beta}$ est positive et décroissante sur $[2,+\infty[$ et l'on connaît une primitive de f ; la forme de cette primitive dépend de la position de β par rapport à 1.

⋆ si $\beta = 1$, une primitive de f est $t \mapsto \ln(\ln t)$. Donc, d'après le théorème de comparaison série-intégrale, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$, la série $\sum u_n$ et divergente.

⋆ Si $\beta \neq 1$, une primitive est $t \mapsto \dfrac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta}$. On obtient alors que, pour $n \geqslant 2$, $I_n = \displaystyle\int_2^n f(t)\,dt = \frac{1}{1-\beta}\big((\ln n)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}\big)$. Par conséquent, la suite $\big(I_n\big)_{n\geqslant 2}$ est convergente si, et seulement si, $1-\beta<0 \iff \beta>1$.

Conclusion : la série $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

14.18 1. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par décroissance de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = v_{2n+2} - v_{2n+1} \leqslant 0$;
- $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -v_{2n+3} + v_{2n+2} \geqslant 0$;
- $S_{2n+1} - S_{2n} = -v_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc, les suites $\big(S_{2n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(S_{2n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2. Par conséquent, elles convergent toutes les deux vers la même limite. On en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, soit encore que la série $\sum u_n$ est convergente.

3. Posons, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\cdot$

- Si $\alpha \leqslant 0$, la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0, donc $\sum(-1)^n v_n$ est grossièrement divergente.
- Si $\alpha > 0$, alors $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante, positive, de limite nulle, et donc d'après le résultat précédent, la série $\sum(-1)^n v_n$ est convergente.

Conclusion : $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 0$.

14.19 Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction $f : x \mapsto \exp(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc écrire, pour tout entier naturel n :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}M_{n+1} \quad \text{avec} \quad M_{n+1} = \max_{[0,x]} |f^{n+1}|.$$

Or, $\forall t \in [0,x] \quad f^{(n)}(t) = \exp t$, donc $M_{n+1} = \exp(x)$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\exp x = 0$ d'après l'exercice 65 de la page 434, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \exp(x).$$

Cela signifie que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^k}{k!}$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp x$.

Cette démonstration s'adapte très bien dans le cas où $x \in \mathbb{R}_-$.

14.20 1. Soit x un réel admettant un développement périodique. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} x &= q_0, q_1 \dots q_k b_1 \dots b_p b_1 \dots b_p \dots \\ &= q_0 + \frac{\overline{q_1 \dots q_k}}{10^k} + \frac{\overline{b_1 \dots b_p}}{10^k}\left(\frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \cdots\right) \end{aligned}$$

où $\overline{a_p \dots a_0} = a_0 + 10\, a_1 + \cdots + a_p\, 10^p$ est l'écriture décimale d'un entier naturel.

En « développant » les écritures décimales, on obtient :

$$\begin{aligned} x = q_0 &+ \frac{q_k + 10q_{k-1} + \cdots + 10^{k-1}q_1}{10^k} \\ &+ \frac{b_p + 10b_{p-1} + \cdots + 10^{p-1}b_1}{10^k}\left(\frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \cdots\right) \end{aligned}$$

Le réel x est donc un rationnel puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{kp}} = \frac{10^{-p}}{1 - 10^{-p}} \in \mathbb{Q}$.

2. Soit $\dfrac{a}{b}$ un rationnel positif, avec $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$.

(a) Soit $\beta'_0, \beta'_1\beta'_2 \dots$ le développement décimal illimité de a/b. On a alors :

$$\beta_0 = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \beta'_0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\alpha_0}{b} = 0, \beta'_1\beta'_2 \dots$$

Donc $\dfrac{10\alpha_0}{b} = \beta'_1, \beta'_2\beta'_3 \dots$ ce qui donne :

$$\beta_1 = \beta'_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\alpha_1}{b} = 0, \beta'_2\beta'_3 \dots$$

Par une récurrence immédiate, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \beta_n = \beta'_n$.
Remarque : cette démonstration repose sur la méthode usuelle pour déterminer le développement décimal illimité d'un rationnel a/b en effectuant une division à virgule.

(b) La suite (α_n) est à valeurs dans l'ensemble fini $[\![0, b-1]\!]$, donc elle prend au moins deux fois la même valeur. Soit $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha_n = \alpha_{n+p}$. On a alors par construction :

$$(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}) = (\alpha_{n+p+1}, \beta_{n+p+1})$$

et, par une récurrence immédiate :

$$\forall k > n\,,\ (\alpha_k, \beta_k) = (\alpha_{k+p}, \beta_{k+p}).$$

La suite (β_n) est donc périodique.

Partie IV

Algèbre

Chapitre 15 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

I Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ **824**
1 Diviseurs, multiples 824
2 Division euclidienne sur $\mathbb{Z}$ 825
II PGCD, PPCM **826**
1 Définition du PGCD 826
2 Caractérisation du PGCD 827
3 Algorithme d'Euclide 828
4 Extension au cas des entiers relatifs 829
5 Coefficients de Bézout 829
6 Entiers premiers entre eux 832
7 Extension à un nombre fini d'entiers 833
8 PPCM 835
9 Théorème de Gauss 836
10 Solutions de $a\,x + b\,y = c$ 836
III Nombres premiers **837**
1 Définition 837
2 Propriétés 837
3 Décomposition en produit de facteurs premiers . . 839
IV Congruences **842**
1 Définition, compatibilité 842
2 Petit théorème de Fermat 844
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . **845**
Exercices **855**

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

15

I Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1 Diviseurs, multiples

Définition 1

Étant donné deux entiers relatifs a et b, on dit que b **divise** a, et l'on note $b \mid a$, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k\,b$.

On dit aussi que b est un **diviseur** de a, ou que a est un **multiple** de b.

Notations

- L'ensemble des diviseurs de $a \in \mathbb{Z}$ est noté $\mathcal{D}(a)$.
- L'ensemble des multiples de $b \in \mathbb{Z}$ est $b\mathbb{Z} = \{b\,q\,;\; q \in \mathbb{Z}\}$.

Remarques

- 1 et -1 divisent tous les entiers, mais ne sont divisibles que par 1 et -1.
- 0 est un multiple de tous les entiers, mais n'est diviseur que de lui-même.
- Si a est non nul et si b divise a, alors $|b| \leqslant |a|$. En effet, il existe un entier k tel que $a = k\,b$, et puisque $a \neq 0$, on a $k \neq 0$ donc $|k| \geqslant 1$.

  Les diviseurs d'un entier a non nul sont donc en nombre fini (alors que $\mathcal{D}(0) = \mathbb{Z}$ est infini).

Exemple Les diviseurs de 6 sont ± 1, ± 2, ± 3 et ± 6. En effet, ce sont évidemment des diviseurs et les seuls autres éléments non nuls de $[\![-6, 6]\!]$ sont ± 4 et ± 5 dont aucun multiple ne peut être égal à 6 puisque $1 \times 4 < 6 < 2 \times 4$ et $1 \times 5 < 6 < 2 \times 5$.

Proposition 1

On a $(a \mid b \quad \text{et} \quad b \mid a) \iff |a| = |b|$. Deux tels entiers sont dits **associés**

Principe de démonstration. Deux entiers k et k' tels que $k\,k' = 1$ sont égaux à ± 1.

Démonstration page 845

Remarques

- La divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$, mais pas sur $\mathbb{Z}$ (voir les exercices 21 et 22 de la page 352).

  Pour cette relation d'ordre, $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément 1 et un plus grand élément 0 (voir l'exercice 27 de la page 355).
- Pour tout ce qui concerne la divisibilité, on peut se limiter à $\mathbb{N}$ puisqu'un entier a les mêmes diviseurs et les mêmes multiples que son opposé. On pourra alors utiliser les deux relations d'ordre : la divisibilité et l'ordre naturel $\leqslant$.
- La divisibilité sur $\mathbb{N}^*$ est liée à l'ordre naturel de $\mathbb{N}^*$ par la relation :

$$a \mid b \Longrightarrow a \leqslant b.$$

  Ce résultat est faux dans $\mathbb{N}$ puisque, par exemple, $1 \mid 0$.

Proposition 2

Soit a et b deux entiers relatifs.

- Si $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$, alors :

$$(d \mid a \quad \text{et} \quad d \mid b) \Longrightarrow d \mid a\,u + b\,v.$$

- Si n est un entier *non nul*, alors :

$$b\,n \mid a\,n \iff b \mid a.$$

Démonstration page 845

2 Division euclidienne sur $\mathbb{Z}$

Théorème 3

Soit a un entier relatif et b un entier naturel *non nul*. Il existe un unique couple d'entiers relatifs (q,r) tel que :

$$a = b\,q + r \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant r < b. \qquad (*)$$

- q est appelé **quotient de la division euclidienne** de a par b,
- r est appelé **reste de la division euclidienne** de a par b.

Principe de démonstration. L'existence a déjà été démontrée pour $a \in \mathbb{N}$ (*cf.* le théorème 11 de la page 357). On s'y ramène dans le cas général en ajoutant à a un multiple de b.

Démonstration page 845

Remarque Si q est le quotient de la division euclidienne de a par $b \neq 0$, on a $b\,q \leqslant a < b\,q + b$ c'est-à-dire $q \leqslant \dfrac{a}{b} < q+1$.

Donc $q = \left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor$ où $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

Exemple

En `Python 3`, la division euclidienne des entiers naturels se fait à l'aide des opérateurs `//` et `%`, le premier donnant le quotient et le deuxième le reste.

```
>>> q = 123456 // 456
>>> r = 123456 % 456
>>> [q,r,456*q+r]
   [270, 336, 123456]
```

Proposition 4

Étant donné $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on a $b \mid a$ si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Démonstration page 845

II PGCD, PPCM

1 Définition du PGCD

Soit a et b deux entiers naturels non tous les deux nuls.

L'ensemble des diviseurs positifs communs à a et b est une partie de $\mathbb{N}$, non vide puisqu'elle contient 1, et majorée par exemple par $\max(a,b)$ (et même par $\min(a,b)$, si a et b sont tous les deux non nuls). Elle possède donc un plus grand élément, supérieur ou égal à 1.

Définition 2

Soit a et b deux entiers naturels *non tous les deux nuls.*

Le **PGCD** de a et b, noté $a \wedge b$, est le plus grand des diviseurs positifs communs à a et b.

Exemples

1. L'ensemble des diviseurs positifs de 12 est $\{1,2,3,4,6,12\}$ et celui de 15 est $\{1,3,5,15\}$, donc 1 et 3 sont les seuls diviseurs positifs communs à 12 et 15 et le plus grand d'enter eux est $12 \wedge 15 = 3$.
2. Si a est un entier naturel non nul, on a $a \wedge 0 = a$ puisque a est le plus grand diviseur de a et qu'il divise également 0.

Remarque Deux entiers naturels non tous les deux nuls ont toujours un PGCD supérieur ou égal à 1.

2 Caractérisation du PGCD

Lemme 5

Soit a, b deux entiers naturels, avec $b \neq 0$. On suppose $a = b\,q + r$, avec q et r des entiers naturels.

Alors $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r)$ et, en particulier, $a \wedge b = b \wedge r$.

Démonstration page 845

Théorème 6

Soit a et b deux entiers naturels non tous les deux nuls et d leur PGCD.

Alors $\mathcal{D}(d) = \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \mid a \quad \text{et} \quad n \mid b) \Longleftrightarrow n \mid d. \tag{$*$}$$

Le PGCD de a et b est le seul élément $d \in \mathbb{N}^*$ à vérifier l'équivalence $(*)$.

Principe de démonstration. On démontre par récurrence forte la propriété H_b : « pour tout a, on a $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a \wedge b)$ » en utilisant la division euclidienne de a par b.

Démonstration page 846

Remarque Si $a = b = 0$, on a $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathbb{N} = \mathcal{D}(0)$. On peut donc poser, par convention, $0 \wedge 0 = 0$, ce qui permet d'avoir, dans tous les cas :

$$\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a \wedge b).$$

Une telle convention n'a aucun intérêt pratique, mais permet d'éviter parfois d'avoir à traiter à part des cas particulier triviaux.

p.846 **Exercice 1** Y a-t-il plus simple que ce que l'on a fait dans l'exemple 1 de la page ci-contre pour trouver le PGCD de 12 et 15 ?

Point méthode

Dans la pratique, pour déterminer le PGCD de deux entiers a et b non tous les deux nuls, il suffit d'exhiber un diviseur d commun à a et b qui vérifie l'implication :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \mid a \quad \text{et} \quad n \mid b) \Longrightarrow n \mid d.$$

L'implication réciproque est alors une conséquence immédiate du fait que d divise a et b.

p.846 **Exercice 2** Étant donné trois entiers naturels non nuls a, b et c, montrer que :

$$(a\,c) \wedge (b\,c) = (a \wedge b)\,c.$$

Remarques

- Soit a et b deux entiers naturels non tous les deux nuls.

  Par définition, $d = a \wedge b \neq 0$ est le plus grand élément de $\mathcal{D}(d)$ au sens de l'ordre naturel $\leqslant$ de $\mathbb{N}$.

  Mais comme les diviseurs positifs communs à a et b sont exactement les diviseurs positifs de $d = a \wedge b$, le PGCD de a et b est aussi le plus grand, au sens de la divisibilité, des diviseurs positifs communs à a et b.

- En revanche, lorsque $a = b = 0$, parmi les diviseurs communs à a et b (c'est-à-dire tous les entiers), il n'en existe pas de plus grand pour l'ordre naturel de $\mathbb{N}$, mais 0 est bien le plus grand d'entre eux pour la relation de divisibilité. La convention $0 \wedge 0 = 0$ (remarque de la page précédente) prend alors tout son sens.

3 Algorithme d'Euclide

L'**algorithme d'Euclide**, donné ci-contre en `Python 3`, permet de calculer un PGCD à l'aide du lemme 5 de la page précédente et de la division euclidienne : si b est non nul, le PGCD de a et b est le même que celui de b et du reste r de la division euclidienne de a par b. Il suffit donc de remplacer (a, b) par (b, r) et de recommencer.

```
def pgcd(a,b):
    while b != 0:
        (a,b) = (b,a%b)
    return a
```

Remarques

- Lorsque $b = 0$, on n'effectue aucune division et le résultat obtenu est bien $a = a \wedge 0$.
- Lorsque $a < b$, la première division donne a pour reste et l'algorithme commence donc par échanger a et b. Par la suite, on a toujours $a > b$.
- La terminaison de l'algorithme est assurée par le fait que la variable entière b diminue strictement à chaque itération et donc finit par s'annuler.
- Le PGCD est alors le dernier reste non nul.

Un peu d'histoire Historiquement, l'algorithme d'Euclide reposait sur l'égalité $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a - b) \cap \mathcal{D}(b)$. Il était ainsi plus long, puisque si q et r sont les quotient et reste de la division euclidienne de a par b, il fallait q étapes pour se ramener au couple (b, r).
En revanche, il était plus simple puisqu'il ne nécessitait que des soustractions et pas de division.

4 Extension au cas des entiers relatifs

Les diviseurs et les multiples d'un entier a sont les mêmes que ceux de $-a$. On peut donc étendre les définitions des PGCD aux entiers relatifs de la façon suivante.

Définition 3

Soit a et b deux entiers relatifs non tous les deux nuls.

Le PGCD de a et b, noté $a \wedge b$, est le PGCD de $|a|$ et $|b|$.

On conserve de façon évidente le résultat fondamental suivant : si a et b sont des entiers relatifs non tous les deux nuls, leur PGCD d est tel que $\mathcal{D}(d) = \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad (n \mid a \quad \text{et} \quad n \mid b) \Longleftrightarrow n \mid d.$$

5 Coefficients de Bézout

Théorème 7

Soit a et b deux entiers relatifs non tous les deux nuls. Il existe des entiers relatifs u et v tels que :

$$a\,u + b\,v = a \wedge b.$$

Un tel (u, v) est appelé un couple de **coefficients de Bézout** de a et b.

Principe de démonstration. Quitte à remplacer a par $|a|$ et b par $|b|$, il suffit de traiter le cas où a et b sont des entiers naturels. On démontre l'existence de u et v par une récurrence sur b similaire à celle du théorème 6 de la page 827 : si $a = b\,q + r$ et si l'on dispose d'un couple (u', v') tel que $b\,u' + r\,v' = d$, où $d = a \wedge b = b \wedge r$, alors on trouve facilement u et v tels que $a\,u + b\,v = d$.

Démonstration page 846

Remarque Il n'y a pas unicité d'un tel couple de coefficients de Bézout. En effet, si $a\,u + b\,v = d$, alors par exemple $a\,(u - b) + b\,(v + a) = d$.
On verra page 836 comment trouver tous les couples (u, v) vérifiant la relation $a\,u + b\,v = d$.

Obtention des coefficients de Bézout par l'algorithme d'Euclide

Comme on l'a vu dans la démonstration précédente, lorsque l'on connaît un couple de coefficients de Bézout de b et r, avec $a = b\,q + r$, on connaît un couple de coefficients de Bézout de a et b.
Dans l'algorithme d'Euclide, il suffit donc de remonter les calculs en partant de la fin.

Exemple Soit $a = 19$ et $b = 7$.

- La première division euclidienne s'écrit $a = b\,q_1 + c$, avec $q_1 = 2$ et $c = 5$.
- La deuxième est $b = c\,q_2 + d$, avec $q_2 = 1$ et $d = 2$.
- Enfin, $c = d\,q_3 + e$, avec $d = 2$ et $e = 1$.

Le PGCD de a et b est donc 1.

- On écrit alors $1 = c - 2d$.
- Mais, $d = b - c$, ce qui donne $1 = c - 2(b-c) = -2b + 3c$.
- Enfin, $c = a - 2b$, donc $1 = -2b + 3(a-2b) = 3a - 8b$.

$$\begin{array}{rclcrcl} 19 &=& 2\times 7 + 5 & \qquad & 1 &=& 3\times 19 - 8\times 7\\ 7 &=& 1\times 5 + 2 & & 1 &=& -2\times 7 + 3\times 5\\ 5 &=& 2\times 2 + 1 & & 1 &=& 1\times 5 - 2\times 2 \end{array}$$

(Dans les équations de droite, on remplace l'entier entouré par la valeur tirée de l'équation de gauche correspondante.)

Pour généraliser l'exemple précédent, changeons de notations en écrivant $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ à la place de (a, b, c, d, e). Les divisions euclidiennes s'écrivent alors :

$$a_0 = q_1\, a_1 + a_2 \qquad a_1 = q_2\, a_2 + a_3 \quad \text{et} \quad a_2 = q_3\, a_3 + a_4.$$

Pour trouver le PGCD et un couple de coefficients de Bézout de deux entiers a et b, on peut utiliser l'algorithme suivant. On pose $a_0 = a$, $a_1 = b$ et l'on effectue les divisions euclidiennes successives de a_{k-1} par a_k jusqu'à obtenir un reste nul :

$$\begin{aligned} a_0 &= q_1\, a_1 + a_2\\ a_1 &= q_2\, a_2 + a_3\\ &\;\vdots\\ a_{N-3} &= q_{N-2}\, a_{N-2} + a_{N-1}\\ a_{N-2} &= q_{N-1}\, a_{N-1} + a_N\\ a_{N-1} &= q_N\, a_N + a_{N+1} \qquad \text{avec} \qquad a_{N+1} = 0 \end{aligned}$$

Le PGCD de a et b est donc $d = a_N$; l'avant-dernière équation donne immédiatement $a_N = a_{N-2} - q_{N-1}\, a_{N-1}$ soit :

$$d = u_{N-1}\, a_{N-2} + v_{N-1}\, a_{N-1} \quad \text{avec} \quad (u_{N-1}, v_{N-1}) = (1, -q_{N-1}).$$

En utilisant l'équation précédente, on peut exprimer a_{N-1} en fonction de a_{N-3} et a_{N-2}, ce qui donne une nouvelle relation du type $d = u_{N-2}\, a_{N-3} + v_{N-2}\, a_{N-2}$. De proche en proche, on arrive ainsi à la relation de Bézout $d = u_1\, a_0 + v_1\, a_1$ que l'on cherchait.

p.847 **Exercice 3** Soit (F_n) la suite définie par :

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. En utilisant cet algorithme, calculer le PGCD de F_{n+1} et F_n, pour $n \in [\![3, 7]\!]$, et en donner un couple de coefficients de Bézout. Que remarque-t-on ?
2. Donner un couple de coefficients de Bézout de F_{n+1} et F_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Malheureusement, cet algorithme exige de garder en mémoire toutes les divisions euclidiennes successives, ce qui en rend coûteuse la programmation.

Voyons maintenant comment modifier l'algorithme d'Euclide de la page 828 pour qu'il donne, en plus du PGCD, un couple de coefficients de Bézout. Reprenons les notations de la page précédente. Le principe consiste à garder, à chaque étape, un couple (u_k, v_k) tel que $a\,u_k + b\,v_k = a_k$.

- Pour $k = 0$, on pose $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$.
- Pour $k = 1$, on pose $u_1 = 0$ et $v_1 = 1$.
- Si pour $1 \leqslant k \leqslant N-1$, on connaît u_{k-1}, v_{k-1}, u_k et v_k tels que :
$$a_{k-1} = a\,u_{k-1} + b\,v_{k-1} \qquad \text{et} \qquad a_k = a\,u_k + b\,v_k$$
alors on a :
$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_{k-1} - q_k\,a_k \\ &= (a\,u_{k-1} + b\,v_{k-1}) - q_k\,(a\,u_k + b\,v_k) \\ &= a\,(u_{k-1} - q_k\,u_k) + b\,(v_{k-1} - q_k\,v_k). \end{aligned}$$
En posant $u_{k+1} = u_{k-1} - q_k\,u_k$ et $v_{k+1} = v_{k-1} - q_k\,v_k$, on a bien :
$$a_{k+1} = a\,u_{k+1} + b\,v_{k+1}.$$
- Pour $k = N$, on a alors :
$$d = a_N = a\,u_N + b\,v_N.$$

Un couple de coefficients de Bézout de (a,b)est donc (u_N, v_N).

Voici une implémentation de cet algorithme en `Python 3` :

```
def pgcd_bezout(a,b):
    (u_0 , v_0) = (1 , 0)
    (u_1 , v_1) = (0 , 1)
    while b != 0:
        q = a // b
        (u_0 , u_1) = (u_1 , u_0-q*u_1)
        (v_0 , v_1) = (v_1 , v_0-q*v_1)
        (a , b) = (b , a-q*b)
    return (a , u_0 , v_0)
```

6 Entiers premiers entre eux

Définition 4

Les entiers relatifs a et b sont **premiers entre eux** si le seul diviseur commun à a et b est 1, c'est-à-dire si $(a,b) \neq (0,0)$ et $a \wedge b = 1$.

Il est immédiat que si deux entiers a et b sont premiers entre eux, alors tout diviseur de a est premier avec tout diviseur de b.

Théorème 8 (Identité de Bézout)

Les entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si, et seulement s'il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a\,u + b\,v = 1$.

Démonstration page 847

Proposition 9

Soit a et b deux entiers non tous les deux nuls et d leur PGCD. Alors il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux tels que $a = d\,a'$ et $b = d\,b'$.

Principe de démonstration. L'existence est immédiate. Pour montrer que a' et b' sont premiers entre eux, on utilise une relation de Bézout entre a et b. Démonstration page 847

Point méthode

Soit a et b deux entiers non tous les deux nuls. On peut se ramener à deux entiers premiers entre eux en considérant $a' = \dfrac{a}{a \wedge b}$ et $b' = \dfrac{b}{a \wedge b}$.

Remarque Réciproquement, si $a = k\,a'$ et $b = k\,b'$, avec $a' \wedge b' = 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$, alors $a \wedge b = k$ d'après l'exercice 2 de la page 827.

p.847 **Exercice 4** Déterminer tous les entiers relatifs a et b tels que $a + b = a \wedge b$.

Proposition 10

Soient a, b et c trois entiers relatifs. Si :

- a et b sont premiers entre eux,
- a et c sont premiers entre eux,

alors a et $b\,c$ sont premiers entre eux.

Principe de démonstration. Démonstration page 848

Multiplier les identités de Bézout correspondant aux couples (a,b) et (a,c).

Corollaire 11

Un produit est premier avec un entier a si, et seulement si, chacun de ses facteurs est premier avec a.

Principe de démonstration. Démonstration page 848

Récurrence sur le nombre de facteurs.

Corollaire 12

Si a et b sont deux entiers relatifs premiers entre eux, alors on a :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad a^m \wedge b^n = 1.$$

7 Extension à un nombre fini d'entiers

Définition 5

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{Z}^k \backslash \{(0,0,\ldots,0)\}$. Le **PGCD** de $a_1, \ldots, a_k$ est le plus grand diviseur positif commun à tous les a_i.

Remarques

- L'existence est justifiée par le fait que l'ensemble des diviseurs positifs communs à tous les a_i est non vide, puisqu'il contient 1, et majoré, par exemple par $\max(|a_1|, \ldots, |a_k|)$.
- Lorsque $k = 1$, le PGCD est évidemment $d = |a_1|$.
- Il est clair que si l'un des a_i est nul, on peut le supprimer de la famille sans changer le PGCD, puisque tout entier est un diviseur de 0. On pourra donc dans la suite se limiter au cas où tous les a_i sont non nuls.

Proposition 13

Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{Z}^k \setminus \{(0,0,\ldots,0)\}$ et d leur PGCD. On a :

$$\mathcal{D}(d) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{D}(a_i).$$

Principe de démonstration. Récurrence sur k après s'être ramené à des entiers tous non nuls. On montre que le PGCD de $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ est $a_0 \wedge d'$, où d' est le PGCD de $(a_1, \ldots, a_k)$.

Démonstration page 848

Notation Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{Z}^k \setminus \{(0,0,\ldots,0)\}$.

On note $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_k$ ou $\bigwedge\limits_{i=1}^{k} a_i$ leur PGCD.

La démonstration précédente montre que lorsque $a_0, \ldots, a_k$ sont tous non nuls, alors $a_0 \wedge a_1 \wedge \cdots \wedge a_k = a_0 \wedge (a_1 \wedge \cdots \wedge a_k)$, ce qui permet de calculer le PGCD par récurrence.

Proposition 14

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{Z}^k \setminus \{(0,0,\ldots,0)\}$ et d leur PGCD.

On a l'**identité de Bézout** :

$$\exists (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{Z}^k \quad d = a_1\, u_1 + \cdots + a_k\, u_k.$$

Principe de démonstration. Par récurrence en utilisant la relation :

$$a_0 \wedge \big(a_1 \wedge \cdots \wedge a_k\big) = a_0 \wedge a_1 \wedge \cdots \wedge a_k.$$

Démonstration page 848

Définition 6

Les entiers $a_1, \ldots, a_k$ sont **premiers entre eux dans leur ensemble** s'ils n'ont pas de diviseurs communs autres que 1 ou -1, c'est-à-dire s'ils sont non tous nuls et que leur PGCD est égal à 1.

Attention Soit $k \geqslant 2$ et $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$. Ne pas confondre la propriété « les entiers $a_1, \ldots, a_k$ sont premiers entre eux dans leur ensemble » avec le fait que les entiers a_i soient **premiers entre eux deux à deux**, c'est-à-dire que $\forall (i,j) \in [\![1,k]\!] \quad i \neq j \Longrightarrow a_i \wedge a_j = 1$.
Il est clair que si les a_i sont premiers entre eux deux à deux, alors ils sont premiers entre eux dans leur ensemble, mais la réciproque est fausse.

p.849

Exercice 5

1. Donner un exemple de trois entiers a, b et c premiers entre eux dans leur ensemble mais pas premiers entre eux deux à deux.
2. Montrer que l'on peut même choisir a, b et c tels que $a \wedge b \neq 1$, $a \wedge c \neq 1$ et $b \wedge c \neq 1$.

Proposition 15 (Identité de Bézout)

Les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si, et seulement s'il existe une famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ d'entiers relatifs telle que :

$$\sum_{i=1}^{k} u_i a_i = 1.$$

Démonstration.

L'implication directe est une conséquence de la proposition 14. La réciproque est évidente. □

8 PPCM

Définition 7

Le **PPCM** de deux entiers naturels non nuls a et b, noté $a \vee b$, est le plus petit des multiples strictement positifs communs à a et b.

Démonstration. L'ensemble des multiples strictement positifs communs à a et b est une partie de $\mathbb{N}$, non vide car elle contient $a\,b$, ce qui justifie l'existence de son plus petit élément. □

Remarques Soit a et b des entiers naturels non nuls.

- On a vu que le PGCD de a et b est le plus grand des diviseurs positifs communs à a et b, aussi bien pour l'ordre naturel de $\mathbb{N}^*$ que pour la divisibilité.
- Le PPCM est le plus petit des multiples strictement positifs communs à a et b. Mais est-il aussi le plus petit pour l'ordre de divisibilité, c'est-à-dire a-t-on :

  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad (a \mid n \quad \text{et} \quad b \mid n) \Longleftrightarrow m \mid n\ ?$$

  Le théorème suivant répond (positivement) à la question.

Théorème 16

Soit a et b des entiers naturels non nuls et m leur PPCM. Les multiples de m sont exactement les multiples communs à a et b, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (a \mid n \quad \text{et} \quad b \mid n) \Longleftrightarrow m \mid n. \qquad (*)$$

Le PPCM de a et b est le seul élément $m \in \mathbb{N}$ à vérifier l'équivalence $(*)$.

Principe de démonstration. Soit m un PPCM. On montre que le reste de la division euclidienne par m de tout multiple commun à a et b est nul. Démonstration page 849

Point méthode

Dans la pratique, pour déterminer le PPCM de deux entiers non nuls a et b, il suffit d'exhiber un multiple m commun à a et b qui vérifie l'implication :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (a \mid n \quad \text{et} \quad b \mid n) \Longrightarrow m \mid n.$$

L'implication réciproque est alors une conséquence immédiate du fait que a et b divisent m.

p.849 **Exercice 6**

Soit a, b et c trois entiers naturels non nuls. Montrer que $(a\,c) \vee (b\,c) = (a \vee b)\,c$.

Remarque On peut définir le PPCM de deux entiers relatifs non nuls a et b comme le PGCD de $|a|$ et $|b|$. On a alors évidemment la relation :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad (a \mid n \quad \text{et} \quad b \mid n) \Longleftrightarrow m \mid n.$$

9 Théorème de Gauss

Théorème 17 (Lemme de Gauss)

Soit a, b et c trois entiers relatifs. Si a divise $b\,c$ et si a est premier avec b, alors a divise c.

Principe de démonstration. Écrire $c = a\,c\,u + b\,c\,v$ à l'aide d'une relation de Bézout.

Démonstration page 849

Proposition 18

Soit r un nombre rationnel.

1. Il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = a/b$, avec a et b premiers entre eux. La fraction a/b est alors appelée **forme irréductible** de r.
2. Si $(a', b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ est tel que $r = a'/b'$, alors $a \mid a'$ et $b \mid b'$.
3. En particulier, r admet une unique forme irréductible.

Principe de démonstration. Pour obtenir une forme irréductible de r, il suffit de diviser son numérateur et son dénominateur par leur PGCD.

L'unicité est une conséquence du théorème de Gauss.

Démonstration page 849

Proposition 19

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

1. Si a et b sont premiers entre eux, alors $a \vee b = a\,b$.
2. Plus généralement, on a $(a \vee b)\,(a \wedge b) = a\,b$.

Démonstration page 850

p.850

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{Z}$, quel est le PPCM de n et de $2n+1$? de $n-1$ et $2n+1$?

10 Solutions de $a\,x + b\,y = c$

p.850

Exercice 8 Soit a et b dans $\mathbb{Z}$ premiers entre eux et $c \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer qu'il existe un couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a\,x_0 + b\,y_0 = c$.
2. À l'aide du théorème de Gauss, montrer que, si $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie $a\,x + b\,y = c$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + k\,b$ et $y = y_0 - k\,a$.
3. Quels sont tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a\,x + b\,y = c$?

p.850

Exercice 9 Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et d leur PGCD. On note a' et b' tels que $a = d\,a'$ et $b = d\,b'$.

1. Existe-t-il, pour tout $c \in \mathbb{Z}$, un couple $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a\,x + b\,y = c$?
   Dans la négative, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur c pour qu'il existe un tel couple.
2. On suppose que $c \in \mathbb{Z}$ vérifie cette condition et l'on fixe un couple (x_0, y_0) solution. À l'aide de l'exercice précédent, montrer :
$$\big\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \;\big|\; a\,x + b\,y = c\big\} = \big\{(x_0 + k\,b', y_0 - k\,a') \;\big|\; k \in \mathbb{Z}\big\}.$$

III Nombres premiers

Dans cette section, nous nous limitons à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

1 Définition

Définition 8

On appelle **nombre premier** tout entier naturel différent de 1 n'admettant pour diviseurs positifs que 1 et lui–même.

Autrement dit, un entier p est premier si $p \geqslant 2$ et si :
$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2 \quad p = a\,b \Longrightarrow (a = 1 \quad \text{ou} \quad b = 1).$$

Exemples $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11, \ldots,\ 65\,537, \ldots,\ 314\,159, \ldots,\ 2\,718\,281, \ldots$ sont premiers.

Notation L'ensemble des nombres premiers est noté $\mathcal{P}$.

2 Propriétés

Proposition 20

Si $p \in \mathcal{P}$, alors p est premier avec tous les entiers qu'il ne divise pas. En particulier, si p est un nombre premier, on a :
$$\forall k \in [\![1, p-1]\!] \quad k \wedge p = 1.$$

Démonstration page 851

Exemple Deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux puisqu'aucun des deux ne divise l'autre.

p.851

Exercice 10 Soit p un nombre premier et $k \in [\![1, p-1]\!]$.

En utilisant la relation $\dbinom{p}{k} = \dfrac{p}{k}\dbinom{p-1}{k-1}$, montrer que le coefficient binomial $\dbinom{p}{k}$ est divisible par p.

Corollaire 21

Un nombre premier divise un produit si, et seulement s'il divise l'un de ses facteurs.

Démonstration page 851

Attention Le résultat est faux sans l'hypothèse « premier ».

p.851

Exercice 11 Produire un contre-exemple.

Proposition 22

Tout entier naturel strictement supérieur à 1 admet un diviseur premier.

Principe de démonstration. On considère son plus petit diviseur strictement supérieur à 1.

Démonstration page 851

p.851

Exercice 12 Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1. Montrer que si n n'est pas premier, il admet un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Point méthode

Pour montrer qu'un entier naturel $n \geqslant 2$ est premier, il suffit donc de vérifier qu'il n'est divisible par aucun entier k vérifiant $2 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}$.

Exemple Pour voir si un entier $n \leqslant 100$ est premier, il suffit de regarder s'il est divisible par 2, 3, 5 ou 7.

Corollaire 23

Il y a une infinité de nombres premiers.

Principe de démonstration.

Pour tout entier naturel n, considérer un diviseur premier de $1+n!$. Démonstration page 851

Crible d'Eratosthène

Pour donner la liste des nombres premiers strictement inférieurs à un entier n donné, on peut utiliser l'algorithme suivant, appelé **crible d'Eratosthène**.

$\boxed{1}$ Écrire tous les entiers de 2 à $n-1$.

$\boxed{2}$ $p=2$ est premier ; barrer tous ses multiples stricts.

$\boxed{3}$ Le premier nombre non barré suivant p est un nombre premier. On le note à nouveau p et l'on barre tous ses multiples stricts.

$\boxed{4}$ Tant qu'il reste un nombre non barré après p, on reprend à l'étape $\boxed{3}$.

$\boxed{5}$ Les nombres premiers strictement inférieurs à n sont les nombres non barrés.

Pour représenter tous les entiers de 2 à $n-1$ (en fait, tous de 0 à $n-1$ dans le programme suivant), on utilise un tableau de booléens indiquant si le nombre a été barré (valeur `False`). Les nombres premiers sont donc repérés à la fin par la valeur `True` qui leur correspond. En `Python 3`, cela donne :

```
def Eratosthène(n):
    premiers = n * [True]
    premiers[0] = False
    premiers[1] = False
    for p in range(2,n):
        if premiers[p]:
            print(p)
            for i in range(p*p,n,p): # Voir remarque
                premiers[i] = False
```

Remarques

- Nous avons choisi d'afficher les nombres premiers. On pourrait facilement à la place retourner le tableau `premiers`, voire en extraire la liste des nombres premiers trouvés.
- Le premier multiple strict de p non barré est p^2 puisque $2p$ est multiple de 2, $3p$ multiple de $3, \ldots$, $(p-1)p$ multiple de n'importe lequel des diviseurs premiers de $p-1$.
- Donc, dès que p^2 dépasse n, on pourrait arrêter l'algorithme : le tableau `premiers` donne exactement tous les nombres premiers inférieurs strictement à n.

3 Décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème 24

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Il existe un entier naturel r non nul ainsi que des nombres premiers $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ et des entiers naturels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ non nuls tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$$

et cette décomposition est unique.

Les nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sont appelés les **facteurs premiers** de n.

Démonstration page 852

Autres écritures

- La décomposition de n en facteurs premiers peut aussi s'écrire :
$$n = q_1\, q_2 \ldots q_k$$
où q_1, q_2,…, q_k sont des nombres premiers non nécessairement distincts.
- Si $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ est un ensemble de nombres premiers contenant tous les facteurs premiers de n, on peut aussi écrire :
$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$$
en prenant $\alpha_i = 0$ si p_i n'est pas un diviseur de n.
- Avec cette convention, 1 peut aussi s'écrire sous cette forme en prenant tous les α_i nuls.
- Étant donné deux entiers naturels a et b non nuls, on peut écrire :
$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} \qquad \text{et} \qquad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r}$$
en utilisant les mêmes nombres premiers. Il suffit pour cela de prendre tous les facteurs premiers du produit $a\,b$.

Exemple $7007 = 7 \times 7 \times 11 \times 13 = 7^2 \times 11^1 \times 13^1$.

Soit p un nombre premier et n un entier naturel non nul. L'ensemble des entiers naturels k tels que p^k divise n est non vide (il contient 0) et majoré (par exemple par n puisque $p^n \geqslant n$ par une récurrence évidente). Il possède donc un plus grand élément, ce qui justifie la définition suivante.

Définition 9

Soit p un nombre premier. Pour tout entier naturel n non nul, on appelle **valuation p-adique** de n, que l'on note $v_p(n)$, le plus grand entier $k \in \mathbb{N}$ tel que p^k divise n.

Lemme 25

Étant donné $p \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_p(n) = k$ si, et seulement s'il existe q premier avec p tel que $n = p^k\, q$.

Démonstration page 852

Remarques Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ où $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ sont des nombres premiers et α_1, α_2,…, α_r des entiers naturels non nuls, alors :
$$\forall i \in [\![1, r]\!] \quad v_{p_i}(n) = \alpha_i.$$
En effet, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a $n = p_i^{\alpha_i}\, q$, avec $q = \prod_{j \neq i} p_j^{\alpha_j}$ premier avec p, ce qui donne le résultat d'après le lemme 25.

  Ainsi, on a $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{v_{p_i}(n)}$.

- Pour tout $p \in \mathcal{P} \setminus \{p_1, \ldots, p_r\}$, on a $v_p(n) = 0$. La décomposition en facteurs premiers de n peut donc se réécrire $n = \prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$, ce produit ayant bien un sens puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de $p \in \mathcal{P}$ tels que $v_p(n)$ soit non nul, c'est-à-dire tels que $p^{v_p(n)} \neq 1$.

Exemples

1. $v_7(7007) = 2$, $v_{11}(7007) = v_{13}(7007) = 1$ et $\forall p \in \mathcal{P} \setminus \{7, 11, 13\} \quad v_p(7007) = 0$.
2. Pour tout nombre premier p, on a $v_p(1) = 0$.

Proposition 26

Étant donné un nombre premier p et deux entiers naturels a et b non nuls, on a $v_p(a\,b) = v_p(a) + v_p(b)$.

Principe de démonstration. Utiliser le lemme 25 pour écrire $a = p^{v_p(a)}\,q$ et $b = p^{v_p(b)}\,r$, avec q et r premiers avec p.

Démonstration page 852

p.852

Exercice 13 Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et p un nombre premier.

1. Montrer que $v_p(a+b) \geqslant \min\big(v_p(a), v_p(b)\big)$.
2. Trouver a, b et p tels que $v_p(a+b) > \min\big(v_p(a), v_p(b)\big)$.
3. Montrer que si $v_p(a) \neq v_p(b)$, alors $v_p(a+b) = \min\big(v_p(a), v_p(b)\big)$.

p.853

Exercice 14 Soit p un nombre premier. On peut prolonger la fonction v_p à $\mathbb{Z}$ en posant :

$$v_p(n) = v_p(-n) \quad \text{si } n < 0 \qquad \text{et} \qquad v_p(0) = +\infty.$$

Vérifier que les relations $v_p(a\,b) = v_p(a) + v_p(b)$ et $v_p(a+b) \geqslant \min\big(v_p(a), v_p(b)\big)$ restent exactes pour tout $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.

Proposition 27

Étant donné deux entiers naturels non nuls a et b, on a :

1. $b \mid a \iff \forall p \in \mathcal{P} \quad v_p(b) \leqslant v_p(a)$,
2. $\forall p \in \mathcal{P} \quad v_p(a \wedge b) = \min\big(v_p(a), v_p(b)\big)$ et $v_p(a \vee b) = \max\big(v_p(a), v_p(b)\big)$.

Démonstration page 853

Ainsi, si :

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} \qquad \text{et} \qquad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers distincts, alors on a :

1. $a \mid b \iff \forall i \in [\![1, k]\!] \quad \alpha_i \leqslant \beta_i$.
2. $a \wedge b = \prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$ et $a \vee b = \prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$.

Exemples

1. Étant donné un entier naturel n non nul dont la décomposition en facteurs premiers est :
$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$
les diviseurs d de a s'écrivent :
$$d = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_k^{\delta_k} \qquad \text{avec} \qquad \forall i \in [\![1,k]\!] \quad \delta_i \leqslant \alpha_i.$$
Un diviseur d est donc déterminé par le k-uplet $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)$ appartenant à $E = [\![0,\alpha_1]\!] \times \cdots \times [\![0,\alpha_k]\!]$ et par suite le nombre de diviseurs positifs de n est le cardinal de E, c'est-à-dire $\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(1+\alpha_i)$.

2. Étant donné deux entiers naturels non nuls a et b, on retrouve la formule :
$$(a \wedge b)(a \vee b) = ab$$
puisque pour tout couple d'entiers (α, β), on a :
$$\max(\alpha,\beta) + \min(\alpha,\beta) = \alpha + \beta.$$

Point méthode

Pour déterminer le PGCD de deux entiers, nous disposons donc de deux méthodes : l'algorithme d'Euclide, et la décomposition en facteurs premiers.

On peut utiliser la deuxième, même si seul l'un des deux nombres a une décomposition simple.

Exemple Quel est le PGCD de $a = 201387$ et $b = 3000$? La décomposition de b en facteurs premiers est immédiate : $3000 = 2^3 \times 3 \times 5^3$. Le PGCD recherché est donc de la forme $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$, avec $\alpha \leqslant 3$, $\beta \leqslant 1$ et $\gamma \leqslant 3$. Comme ni 2 ni 5 ne divisent a mais que 3 le divise (la somme des chiffres est un multiple de 3, *cf.* l'exercice 15.17 de la page 856), on en déduit $a \wedge b = 3$.

IV Congruences

1 Définition, compatibilité

Définition 10

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On dit que deux entiers relatifs a et b sont **congrus modulo n** si n divise $b-a$, c'est-à-dire s'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a + k\,n$. On écrit $a \equiv b \quad [n]$.

Nous avons vu dans l'exemple 2 de la page 347 que la **congruence modulo n** est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Les classes d'équivalence sont appelées **classes de congruence modulo n**. Les relations de congruence modulo n et modulo $-n$ sont évidemment identiques. Dans la suite, on peut donc supposer $n \in \mathbb{N}$.

p.853 **Exercice 15** Que sont les relations de congruence modulo 0 et modulo 1 ?

Proposition 28

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n classes de congruence modulo n.

Plus précisément : $\forall k \in \mathbb{Z} \quad \exists!\, r \in [\![0, n-1]\!] \quad k \equiv r \quad [n]$.

Démonstration. C'est le théorème de la division euclidienne. □

Proposition 29

Soit $n \in \mathbb{N}$. La congruence modulo n est **compatible** avec l'addition et la multiplication de $\mathbb{Z}$, ce qui signifie :

$$\forall (a, b, a', b') \in \mathbb{Z}^2 \quad \begin{cases} a \equiv a' & [n] \\ b \equiv b' & [n] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a + b \equiv a' + b' & [n] \\ a \times b \equiv a' \times b' & [n]. \end{cases}$$

Démonstration page 853

Remarque La proposition 28 nous dit que les classes de congruences modulo $n \in \mathbb{N}^*$ sont les classes de 0, 1, ..., $n-1$. Plus généralement, si a est un entier quelconque on peut prendre comme représentant des classes de congruences les éléments de $[\![a, a+n-1]\!]$.
En effet, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k - a$ est congru à un entier $r \in [\![0, n-1]\!]$ et donc $k = a + (k - a)$ est congru à $a + r$.

Point méthode

Il peut être intéressant, surtout lorsqu'il s'agit de faire des produits, de choisir comme représentants des classes de congruences les éléments de :

- $[\![-p, p]\!]$ lorsque $n = 2p + 1$ est impair,
- $[\![-p+1, p]\!]$ lorsque $n = 2p$ est pair.

p.853 **Exercice 16** D'après la proposition 29, la classe de congruence de k^2 modulo 8 ne dépend que de la classe de k.

Quelles sont les classes, modulo 8, des carrés des éléments de $\mathbb{Z}$?

Exemple Soit n un entier naturel qui s'écrit $\overline{a_k \cdots a_1 a_0}$ en base 10.
On a donc $n = a_0 + 10\, a_1 + \cdots + 10^k\, a_k$.
Comme $10 \equiv 1 \quad [9]$, on a, par produit, $\forall i \in \mathbb{N} \quad 10^i \equiv 1 \quad [9]$.
Donc $n \equiv a_0 + \cdots + a_k \quad [9]$.
On obtient ainsi un critère de divisibilité par 9 : un nombre entier est divisible par 9 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

p.853

Exercice 17 Est-ce que le calcul suivant est juste :

$$1994996 \times 26399273 = 52666454037908\ ?$$

2 Petit théorème de Fermat

Proposition 30

Soit p un nombre premier.

1. Pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ est divisible par p.
2. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on a $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \quad [p]$.

Démonstration.

1. Voir l'exercice 10 de la page 837.
2. Conséquence immédiate de la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^p = a^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k\, b^{p-k} + b^p. \qquad \square$$

Corollaire 31 (Petit théorème de Fermat)

Pour tout nombre premier p et tout entier relatif n, on a $n^p \equiv n \quad [p]$.

Principe de démonstration.

Se ramener à $n \in \mathbb{N}$ puis faire une récurrence en utilisant $(n+1)^p \equiv n^p + 1^p \quad [p]$.

Démonstration page 854

p.854

Exercice 18 Soit p un nombre premier et n un entier non multiple de p.

1. Montrer qu'il existe un entier k tel que $n\,k \equiv 1 \quad [p]$.
2. En déduire que $n^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 1

- Supposons $a \mid b$ et $b \mid a$. Il existe alors des entiers relatifs k et k' tels que $b = k\,a$ et $a = k'\,b$, ce qui donne $a = k'\,k\,a$.

  * Si $a = 0$, alors $b = k\,0 = 0$ et $|a| = |b| = 0$.
  * Si $a \neq 0$, alors $k'\,k = 1$. Comme k et k' sont des entiers relatifs, on en déduit $|k| = |k'| = 1$, ce qui montre que $|a| = |b|$.

- Si $|a| = |b|$, alors $a = b$ ou $a = -b$. Donc $a \mid b$ et $b \mid a$.

Proposition 2

- Supposons que d divise a et b. Il existe donc deux entiers k et k' tels que $a = k\,d$ et $b = k'\,d$. Alors pour tout $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, on a $a\,u + b\,v = (k\,u + k'\,v)\,d$, donc d divise $a\,u + b\,v$.
- Si $b\,n$ divise $a\,n$, avec $n \neq 0$, alors il existe un entier k tel que $a\,n = k\,b\,n$. En simplifiant par $n \neq 0$, on obtient $a = k\,b$, donc b divise a.

  La réciproque est immédiate (et ne nécessite d'ailleurs pas l'hypothèse $n \neq 0$).

Théorème 3

Unicité. Soit (q_1, r_1) et (q_2, r_2) deux couples d'entiers tels que :

$$a = b\,q_1 + r_1 = b\,q_2 + r_2 \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant r_1 < b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r_2 < b.$$

Alors $b\,(q_2 - q_1) = r_1 - r_2$ et $|r_1 - r_2| < b$. On en déduit $|q_2 - q_1| < 1$ puisque $b > 0$, ce qui donne $q_2 - q_1 = 0$ puisque c'est un entier. On a donc $q_2 = q_1$ puis $r_2 = r_1$.

Existence. Puisque $b \in \mathbb{N}^*$, on a $b\,n \geqslant n$ pour tout entier naturel n. On peut donc trouver un entier naturel n tel que $a + b\,n \geqslant 0$: il suffit de prendre $n = |a|$.

Prenons un tel n ; le théorème 11 de la page 357 (division euclidienne dans $\mathbb{N}$) donne donc l'existence d'un couple (q, r) d'entiers tels que $a + b\,n = b\,q + r$, avec $0 \leqslant r < b$. Le couple $(q - n, r)$ convient alors.

Proposition 4 Notons q et r les quotient et reste de la division euclidienne de a par b.

- Si $r = 0$, alors $a = b\,q$ et donc $b \mid a$.
- Réciproquement, si $b \mid a$, alors on a $a = k\,b + 0$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant 0 < b$. L'unicité de la division euclidienne nous donne donc $k = q$ et $r = 0$.

On a donc l'équivalence $b \mid a \Longleftrightarrow r = 0$.

Lemme 5 En effet, la relation $a = b\,q + r$ montre que tout diviseur commun à b et r est aussi un diviseur de a (et aussi de b évidemment !).

L'inclusion inverse provient de même de la relation $r = b\,(-q) + a$.

Puisque b est non nul, on a :

$$a \wedge b = \max\bigl(\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)\bigr) = \max\bigl(\mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r)\bigr) = b \wedge r.$$

Théorème 6 Pour tout $b \in \mathbb{N}$, on définit la propriété :

H_b : « pour tout entier naturel a (non nul si $b=0$), on a $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a \wedge b)$ ».

- Supposons $b = 0$.

  Soit $a \in \mathbb{N}^*$; alors $d = a \wedge b = a$, donc $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a) = \mathcal{D}(d)$ ce qui prouve H_0.
- Soit $b \in \mathbb{N}^*$; supposons H_r, pour tout $r \in \mathbb{N}$ tel que $r < b$. Soit $a \in \mathbb{N}$. En considérant le quotient q et le reste r de la division euclidienne de a par b (supposé non nul), on a $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.

  L'hypothèse H_r nous dit que $\mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r) = \mathcal{D}(b \wedge r)$ et le lemme 5 assure alors que $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r) = \mathcal{D}(b \wedge r) = \mathcal{D}(a \wedge b)$. D'où la propriété H_b.

Enfin, deux entiers naturels d et d' vérifiant $(*)$ sont égaux. En effet, puisque $d \mid d$, on a $d \mid a$ et $d \mid b$ et par suite $d \mid d'$. Par symétrie, on a aussi $d' \mid d$, ce qui prouve que d et d' sont associés puis égaux puisqu'ils sont positifs.

Exercice 1 Le lemme 5 de la page 827 nous donne :

$$12 \wedge 15 = 12 \wedge (15 - 12) = 12 \wedge 3.$$

Le PGCD de 12 et 15 est alors un diviseur positif de 3, soit 1 ou 3. Comme 3 divise 12 et 15, on en déduit $12 \wedge 15 = 3$.

Exercice 2

- Comme c divise $a\,c$ et $b\,c$, il divise leur PGCD. On peut donc trouver un entier d tel que $(a\,c) \wedge (b\,c) = d\,c$.
- Comme $c \neq 0$, et que $d\,c$ divise $a\,c$ et $b\,c$, la proposition 2 de la page 825 nous dit que d est un diviseur commun à a et b.
- Soit x un diviseur commun à a et b. Alors $x\,c$ divise $a\,c$ et $b\,c$, donc leur PGCD $d\,c$. De la même façon que précédemment, on en déduit que x divise d.
- Ainsi, d est le PGCD de a et b, ce qui donne la relation souhaitée.

Théorème 7 Démontrons, par récurrence sur $b \in \mathbb{N}$, la propriété H_b : « pour tout entier naturel a (non nul si $b = 0$), il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a\,u + b\,v = a \wedge b$. »

- H_0 est vraie car, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on a $a \times 1 + 0 \times 0 = a = a \wedge 0$.
- Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $b-1$, avec $b \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{N}$; notons d le PGCD de a et b. On effectue la division euclidienne de a par b :

  $$a = b\,q + r \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant r < b.$$

  D'après le lemme 5 de la page 827, on a donc $d = b \wedge r$ et la propriété H_r montre qu'il existe $(u', v') \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

  $$b\,u' + r\,v' = d.$$

  On a donc :

  $$b\,u' + (a - b\,q)\,v' = d$$

  ce qui donne $a\,u + b\,v = d$ avec $u = v'$ et $v = u' - q\,v'$. D'où H_b.

Exercice 3 On a $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$ et $F_8 = 21$.

1. Les divisions euclidiennes successives donnent donc :

   $$F_8 = F_7 + F_6 \qquad F_7 = F_6 + F_5 \qquad F_6 = F_5 + F_4 \qquad F_5 = F_4 + F_3 \quad \text{et} \quad F_4 = F_3 + 1.$$

   Donc $F_8 \wedge F_7 = 1$ et en remontant les calculs :

   $$\begin{aligned} 1 = F_4 - F_3 = F_4 - (F_5 - F_4) &= -F_5 + 2F_4 \\ &= -F_5 + 2(F_6 - F_5) = 2F_6 - 3F_5 \\ &= 2F_6 - 3(F_7 - F_6) = -3F_7 + 5F_6 \\ &= -3F_7 + 5(F_8 - F_7) = 5F_8 - 8F_7. \end{aligned}$$

2. On remarque, d'après les résultats qui précèdent, que pour $k \in [\![3, 7]\!]$, on a $F_{k-1}\, F_k - F_{k-2}\, F_{k+1} = (-1)^k$, formule valable également pour $k = 2$. Montrons ce résultat par récurrence sur k. L'initialisation est (largement !) faite. Soit $k \geqslant 2$ tel que $F_{k-1}\, F_k - F_{k-2}\, F_{k+1} = (-1)^k$. En remplaçant F_{k-2} par $F_k - F_{k-1}$ et F_k par $F_{k+2} - F_{k+1}$, on trouve :

   $$\begin{aligned} (-1)^k = F_{k-1}\, F_k - F_{k-2}\, F_{k+1} &= F_{k-1}\,(F_{k+2} - F_{k+1}) - (F_k - F_{k-1})\, F_{k+1} \\ &= F_{k-1}\, F_{k+2} - F_k\, F_{k+1} \end{aligned}$$

   donc $F_k\, F_{k+1} - F_{k-1}\, F_{k+2} = (-1)^{k+1}$.

   Un couple de coefficients de Bézout de (F_k, F_{k+1}), pour $k \geqslant 2$, est donc donné par $\big((-1)^k\, F_{k-1}, -(-1)^k\, F_{k-2}\big)$.

Théorème 8

- Si a et b sont premiers entre eux, alors $a \wedge b = 1$ et, d'après le théorème 7 de la page 829, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a\,u + b\,v = a \wedge b = 1$.
- S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a\,u + b\,v = 1$, alors tout diviseur commun à a et b divise $a\,u + b\,v$ donc est égal à 1 ou à -1. On en déduit que a et b sont premiers entre eux.

Proposition 9

Comme d divise a et b, il est clair qu'il existe a' et b' tels que $a = d\,a'$ et $b = d\,b'$.

Puisque d est le PGCD de a et b, il existe u et v entiers tels que $d = a\,u + b\,v$, ce qui donne $1 = a'\,u + b'\,v$ puisque $d \neq 0$. Ainsi, a' et b' sont premiers entre eux.

Exercice 4 Soit (a, b) un couple solution. Par définition du PGCD, on a $(a, b) \neq (0, 0)$; posons $a' = \dfrac{a}{d}$ et $b' = \dfrac{b}{d}$, où $d = a \wedge b$. Les entiers a' et b' sont alors premiers entre eux et, en divisant la relation $a + b = a \wedge b$ par d qui est non nul, on obtient $a' + b' = 1$. Donc $(a, b) = \big(d\,a', d(1 - a')\big)$.

Réciproquement, si $d \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$, le couple $(a, b) = \big(d\,k, d(1 - k)\big)$ est solution. En effet, on a $a \wedge b = d$ d'après la remarque qui précède et $a + b = d$.

L'ensemble des solutions est donc $\big\{\big(d\,k, d\,(1 - k)\big)\ ;\ (d, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}\big\}$.

Proposition 10

- Supposons $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$.

  D'après l'identité de Bézout, il existe $(u, v, u', v') \in \mathbb{Z}^4$ tel que :

  $$a\,u + b\,v = 1 \qquad \text{et} \qquad a\,u' + c\,v' = 1.$$

  En multipliant membre à membre ces deux égalités on obtient alors immédiatement une relation du type $a\,U + b\,c\,V = 1$, avec U et V entiers, ce qui prouve que a et $b\,c$ sont premiers entre eux.
- La réciproque est évidente, puisque $a \wedge b$ et $a \wedge c$ sont des diviseurs communs à a et $b\,c$.

Corollaire 11 Si un entier a est premier avec un produit $c = b_1\,b_2 \ldots b_k$, il est premier avec tous les b_i puisque ce sont des diviseurs de c. Pour la réciproque, démontrons par récurrence sur k la propriété H_k : « Si b_1, b_2, ..., b_k sont des entiers premiers avec a, alors $b_1\,b_2 \cdots b_k$ est premier avec a. »

- La propriété H_1 est évidente.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$; supposons H_k. Soit b_1, b_2, ..., b_{k+1} premiers avec a. L'hypothèse H_k, nous dit que $b_1\,b_2 \cdots b_k$ est premier avec a. Comme b_{k+1} est aussi premier avec a, le produit $(b_1\,b_2 \cdots b_k)\,b_{k+1}$ est premier avec a d'après la proposition précédente. D'où H_{k+1}.

Proposition 13 Conformément à la remarque précédente, on peut supposer tous les a_i non nuls. Raisonnons par récurrence sur k.

- Pour $k = 1$, le résultat est trivial.
- Supposons le résultat vrai pour n'importe quel k-uplet d'entier non nuls, avec $k \in \mathbb{N}^*$.

  Considérons $k{+}1$ entiers non nuls $a_0, a_1, \ldots, a_k$. Notons d' le PGCD de $(a_1, \ldots, a_k)$.

  L'hypothèse de récurrence donne donc $\mathcal{D}(d') = \mathcal{D}(a_1) \cap \cdots \cap \mathcal{D}(a_k)$.

  Alors $\mathcal{D}(a_0 \wedge d') = \mathcal{D}(a_0) \cap \mathcal{D}(d')$ d'après le théorème 6 de la page 827. On en déduit :

  $$\mathcal{D}(a_0 \wedge d') = \mathcal{D}(a_0) \cap \mathcal{D}(a_1) \cap \cdots \cap \mathcal{D}(a_k)$$

  et comme $a_0 \wedge d'$ est un entier strictement positif, c'est le plus grand élément de $\mathcal{D}(a_0) \cap \mathcal{D}(a_1) \cap \cdots \cap \mathcal{D}(a_k)$.

  On en déduit que le PGCD de $(a_0, \ldots, a_k)$ est $d = a_0 \wedge d'$ et donc que :

  $$\mathcal{D}(d) = \bigcap_{i=0}^{k} \mathcal{D}(a_i)$$

  ce qui montre le résultat pour $k + 1$.

Proposition 14 Comme précédemment, on peut supposer les a_k tous non nuls.

- Le résultat est immédiat si $k = 1$ puisqu'alors $d = |a_1|$ et qu'il suffit donc de prendre $u_1 = \pm 1$.
- Supposons le résultat vrai pour tout k-uplet d'entiers non nuls. Considérons $k + 1$ entiers non nuls $a_0, a_1, \ldots, a_k$. Notons d' le PGCD de $(a_1, \ldots, a_k)$. L'hypothèse de récurrence donne l'existence d'entiers $u'_1, \ldots, u'_k$ tels que $d' = a_1\,u'_1 + \cdots + a_k\,u'_k$.

D'autre part, en notant :

$$d = a_0 \wedge a_1 \wedge \cdots \wedge a_k = a_0 \wedge \bigl(a_1 \wedge \cdots \wedge a_k\bigr) = a_0 \wedge d',$$

l'identité de Bézout pour deux entiers (*cf.* le théorème 8 de la page 832) nous fournit deux entiers u_0 et v_0 tels que $a_0\, u_0 + d'\, v_0 = d$. On obtient alors :

$$d = a_0\, u_0 + a_1\, u_1 + \cdots + a_k\, u_k \qquad \text{avec} \qquad \forall i \in [\![1,k]\!] \quad u_i = v_0\, u_i'.$$

Exercice 5

1. Par exemple : $a = 4$, $b = 6$ et $c = 9$.
2. $a = 6$, $b = 10$ et $c = 15$ conviennent.

Théorème 16 Soit $m = a \vee b \in \mathbb{N}^*$.

- Puisque m est un multiple de a et b, on a l'implication :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad m \mid n \Longrightarrow (a \mid n \quad \text{et} \quad b \mid n).$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $a \mid n$ et $b \mid n$. Effectuons la division euclidienne de n par m : $n = q\,m + r$, avec $0 \leqslant r < m$. Alors $r = n - q\,m$ est un multiple commun à a et b strictement inférieur à m. Par définition de m, on en déduit $r = 0$ et donc $n = q\,m$ est un multiple de m.

S'il existe deux entiers naturels m et m' vérifiant $(*)$, alors, comme dans le cas du PGCD, on a $m \mid m'$ et $m' \mid m$ puis $m = m'$.

Exercice 6 Posons $m = a \vee b$. C'est un multiple de a et b, donc $m\,c$ est un multiple de $a\,c$ et $b\,c$.

Soit n un multiple de $a\,c$ et $b\,c$. C'est en particulier un multiple de c et l'on peut donc écrire $n = k\,c$, avec $k \in \mathbb{N}$. On a donc $a\,c \mid k\,c$ et $b\,c \mid k\,c$, avec $c \neq 0$, ce qui prouve que k est un multiple commun à a et b. Ainsi, k est un multiple de $m = a \vee b$. Par suite $n = k\,c$ est un multiple de $m\,c$. Donc $(a\,c \vee b\,c) = m\,c = (a \vee b)\,c$.

Théorème 17 Supposons $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1$. D'après l'identité de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a\,u + b\,v = 1$, ce qui implique $a\,c\,u + b\,c\,v = c$.

Comme $a \mid b\,c$, on a $a \mid b\,c\,v$ et donc :

$$a \mid a\,c\,u + b\,c\,v = c.$$

Proposition 18 Soit $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $b_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = a_0/b_0$.

1. En notant d le PGCD de a_0 et b_0, il existe deux entiers a et b tels que $a_0 = d\,a$ et $b_0 = d\,b$. Comme $b_0 > 0$ et $d > 0$, on a $b > 0$ et :

$$r = \frac{a_0}{b_0} = \frac{d\,a}{d\,b} = \frac{a}{b}.$$

   D'autre part, d'après la proposition 9 de la page 832, a et b sont premiers entre eux.
2. Si $r = a'/b'$, alors $b\,a' = a\,b'$. Donc b divise $a\,b'$; comme il est premier avec a, il divise b'. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b' = k\,b$. En divisant par $b \neq 0$ l'égalité $b\,a' = a\,k\,b$, on obtient $a' = k\,a$, donc a divise a'.
3. Si a'/b' est une autre forme irréductible de r, alors b divise b' et b' divise b d'après ce qui précède, donc $b = b'$ (ce sont des entiers positifs). On en déduit alors $a = a'$.

Proposition 19

1. Supposons $a \wedge b = 1$. Soit m un multiple de a et b. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = k\,a$ et b divise donc $k\,a$. Comme il est premier avec a, il divise k. En écrivant $k = k'\,b$, on obtient $m = k'\,(a\,b)$. Puisque $a\,b$ est évidemment un multiple commun à a et b, on en déduit que c'est le PPCM de a et b.
2. On a $d = a \wedge b \neq 0$.

   Ainsi, on peut écrire $a = d\,a'$ et $b = d\,b'$ et alors $d\,a'\,b' = a\,b' = a'\,b$ est un multiple commun à a et b. Réciproquement, soit m un multiple commun à a et b. Alors il existe $m' \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = d\,m'$ puisque d divise a qui divise m. On a donc $d\,a' \mid d\,m'$ et $d\,b' \mid d\,m'$ ce qui prouve, puisque $d \neq 0$, que m' est un multiple de a' et b'. Comme a' et b' sont premiers entre eux, m' est un multiple de $a'\,b'$ d'après le premier point et par conséquent m est un multiple de $d\,a'\,b'$. On a donc prouvé l'équivalence :

   $$\forall m \in \mathbb{N} \quad (a \mid m \quad \text{et} \quad b \mid m) \Longleftrightarrow d\,a'\,b' \mid m$$

   ce qui prouve que le PPCM de a et b est $d\,a'\,b'$.

   Donc $(a \wedge b)\,(a \vee b) = d^2\,a'\,b' = (d\,a')\,(d\,b') = a\,b$.

Exercice 7

- On a $2n + 1 - 2n = 1$ donc $2n + 1$ et n sont premiers entre eux et leur PPCM est leur produit $(2n + 1)\,n$.
- La relation $2n + 1 = 2(n - 1) + 3$ montre que le PGCD de $n - 1$ et $2n + 1$ est un diviseur de 3, donc est égal à 3 ou à 1.
  - Si $(n - 1) \wedge (2n + 1) = 3$, alors :

    $$(n - 1) \vee (2n + 1) = \frac{(n - 1)\,(2n + 1)}{3}.$$

  - Sinon, $(n - 1) \wedge (2n + 1) = 1$, et donc $(n - 1) \vee (2n + 1) = (n - 1)\,(2n + 1)$.

Exercice 8

1. Il suffit de partir d'une identité de Bézout $a\,u + b\,v = 1$ et de prendre $x_0 = c\,u$ et $y_0 = c\,v$.
2. Comme a et b sont premiers ente eux, on a $(a, b) \neq (0, 0)$. On peut donc supposer par exemple $a \neq 0$. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a\,x + b\,y = c = a\,x_0 + b\,y_0$. Alors $a\,(x - x_0) = b\,(y_0 - y)$, donc a divise $b\,(y_0 - y)$. Comme il est premier avec b, il divise $y_0 - y$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y_0 - y = k\,a$. Mais alors, $a\,(x - x_0) = b\,k\,a$, ce qui donne $x - x_0 = k\,b$ puisque $a \neq 0$.
3. Il est évident que tous les couples $(x_0 + k\,b, y_0 - k\,a)$, pour $k \in \mathbb{Z}$, sont solutions de l'équation $a\,x + b\,y = c$. Donc :

   $$\left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; a\,x + b\,y = c\right\} = \left\{(x_0 + k\,b, y_0 - k\,a) \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Exercice 9

1. Comme $a\,x + b\,y$ est un multiple de d pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, il est clair qu'il n'y a pas de solution si c n'est pas multiple de d. Montrons que la condition nécessaire et suffisante d'existence est $d \mid c$.

On a déjà vu qu'elle était nécessaire, vérifions qu'elle est suffisante.

Remarque Lorsque $d = 1$, la condition est vide et cela revient donc à montrer qu'il y a des solutions pour tout $c \in \mathbb{Z}$, ce qui est vrai d'après l'exercice précédent.

Supposons c multiple de d et posons $e \in \mathbb{N}^*$ tel que $c = d\,e$. Soit u et v des entiers tels que $a\,u + b\,v = d$ (Bézout). Alors $(x_0, y_0) = (e\,u, e\,v)$ vérifie $a\,x_0 + b\,y_0 = d\,c$.

2. Soit c un multiple de d. Écrivons $c = d\,c'$. L'équation $a\,x + b\,y = c$ est alors équivalente à $a'\,x + b'\,y = c'$ puisque $d \neq 0$.

   La dernière question de l'exercice précédent donne alors immédiatement le résultat.

Proposition 20 Étant donné un entier naturel k non multiple de p, si d est un diviseur commun à k et à p, alors l'entier d est un diviseur de p différent de p donc est égal à 1 puisque p est premier. Par suite, k est premier avec p.

Exercice 10 En effet, si $k \in [\![1, p-1]\!]$, les égalités :

$$\binom{p}{k} = \frac{\overbrace{p(p-1)(p-2)\cdots}^{k \text{ facteurs}}}{k!} = \frac{p\;\overbrace{(p-1)(p-2)\cdots}^{k-1 \text{ facteurs}}}{k\,(k-1)!} = \frac{p}{k}\binom{p-1}{k-1}$$

donnent $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$ et prouvent donc que p divise $k\binom{p}{k}$.

Comme p et k sont premiers entre eux, le théorème de Gauss entraîne $p \mid \binom{p}{k}$.

Corollaire 21 S'il ne divise aucun des facteurs, il est premier avec chacun d'entre eux et donc avec leur produit, ce qui prouve qu'il ne divise pas ce produit.

La réciproque est évidente.

Exercice 11 6 divise 2×3 mais ne divise ni 2, ni 3.

Proposition 22 Soit $n > 1$. L'ensemble des diviseurs de n strictement supérieurs à 1 est non vide puisqu'il contient n ; son plus petit élément p est un entier supérieur ou égal à 2. Or, tout diviseur de p est un diviseur de n, donc p n'a pas de diviseur strictement compris entre 1 et p, c'est-à-dire que p est premier.

Exercice 12 Si $n \geqslant 2$ n'est pas premier, son plus petit diviseur $p > 1$ est premier d'après la démonstration précédente. Si l'on écrit $n = p\,q$, on a $q > 1$ puisque n n'est pas premier. Donc $q \geqslant p$ par minimalité de p. On en déduit $n \geqslant p^2$, soit $p \leqslant \sqrt{n}$.

Corollaire 23 Si n est un entier naturel, l'entier $N = 1 + n!$ admet un diviseur premier p (éventuellement lui–même). Si $p \leqslant n$, alors p divise N et $n!$ et donc leur différence 1, ce qui est impossible. Donc $p > n$.

On a montré que, pour tout entier n, il existe un nombre premier p strictement supérieur à n, ce qui prouve que l'ensemble des nombres premiers est non majoré, donc infini.

Théorème 24

Existence. Démontrons par récurrence la propriété H_n : « Tout entier naturel compris entre 2 et n admet une décomposition en facteurs premiers ».

- H_2 est vérifiée puisque 2 est premier.
- Supposons H_{n-1}, pour $n \geqslant 3$ et montrons que n admet une décomposition en facteurs premiers, ce qui prouvera H_n.
  - $*$ Si n est premier, alors c'est un produit d'un seul nombre premier.
  - $*$ Sinon, n admet un diviseur premier p.
    En posant $n = p\,q$, on a $1 < q < n$ et donc q est un produit de nombres premiers $q = q_1 q_2 \ldots q_k$ par hypothèse de récurrence. Alors $n = p\,q_1 q_2 \ldots q_k$ est aussi un produit de nombres premiers.

On a ainsi montré H_n, pour tout $n \geqslant 2$. L'écriture du théorème 24 s'obtient en regroupant les nombres premiers identiques et en les rangeant par ordre croissant.

Unicité. Soit $n = q_1 q_2 \ldots q_k$ une décomposition en facteurs premiers de n. Chaque nombre premier q_i divise n et réciproquement, si un nombre premier p divise n, alors il divise l'un des q_i donc lui est égal puisqu'il s'agit de deux nombres premiers (positifs). Les facteurs premiers intervenant dans une telle décomposition sont donc tous les diviseurs premiers de n.

Soit alors deux décompositions de n, que l'on peut donc écrire :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r}$$

où les p_i sont des nombres premiers vérifiant $p_1 < p_2 \cdots < p_r$.

Si, pour un entier i, on a $\alpha_i \neq \beta_i$, par exemple $\alpha_i < \beta_i$, alors on a :

$$\prod_{j \neq i} p_j^{\alpha_j} = p_i^{\beta_i - \alpha_i} \prod_{j \neq i} p_j^{\beta_j}$$

et donc p_i divise $\displaystyle\prod_{j \neq i} p_j^{\alpha_j}$, ce qui est impossible puisque si $j \neq i$, les entiers p_i et p_j sont premiers entre eux.

Par suite $\forall i \in [\![1, r]\!] \quad \alpha_i = \beta_i$, ce qui montre l'unicité de la décomposition.

Lemme 25 Si $k = v_p(n)$, alors $p^k \mid n$. Écrivons donc $n = p^k\,q$; alors p ne divise pas q puisque p^{k+1} ne divise pas n, donc p est premier avec q puisque p est premier.

Réciproquement, supposons $n = p^k\,q$, avec $p \wedge q = 1$. Alors n est divisible par p^k mais pas par p^{k+1} puisque p ne divise pas q.

Proposition 26 Le lemme 25 permet d'écrire $a = p^{v_p(a)}\,q$ et $b = p^{v_p(b)}\,r$, avec q et r premiers avec p. Alors $a\,b = p^{v_p(a)+v_p(b)}\,(q\,r)$ et $q\,r$ est premier avec p puisque q et r le sont. Le même lemme permet d'en déduire $v_p(a\,b) = v_p(a) + v_p(b)$.

Exercice 13 Notons $\alpha = v_p(a)$ et $\beta = v_p(b)$ de telle sorte que $a = p^\alpha\,q$ et $b = p^\beta\,r$, avec q et r premiers avec p. Par symétrie, on peut supposer $\alpha \leqslant \beta$.

1. On a $a + b = p^\alpha \left(q + p^{\beta-\alpha}\,r\right)$, donc $a + b$ est divisible par p^α, ce qui prouve que $v_p(a+b) \geqslant \alpha = \min(\alpha, \beta)$.
2. Par exemple $a = b = p = 2$: $v_p(a) = v_p(b) = 1$ mais $v_p(a+b) = v_2(4) = 2$.
3. Supposons $\alpha < \beta$. Alors p divise $p^{\beta-\alpha}$ mais ne divise pas q, donc ne divise pas $q + p^{\beta-\alpha}\,r$. Le lemme 25 donne donc $v_p(a+b) = \alpha = \min(\alpha, \beta)$.

Exercice 14

- Si a ou b est nul, alors $v_p(a\,b) = +\infty$ ainsi que $v_p(a) + v_p(b)$.

  La relation $v_p(a\,b) = v_p(a) + v_p(b)$ est donc vraie pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.

  Si a et b sont dans $\mathbb{Z}$, on a alors :

$$v_p(a\,b) = v_p\big(|a\,b|\big) = v_p\big(|a|\big) + v_p\big(|b|\big) = v_p(a) + v_p(b).$$

- La deuxième relation est évidente si a, b et $a+b$ sont non nuls puisque si p^k divise a et b, il divise aussi $a+b$.

  Si $b = 0$, alors $\min\big(v_p(a), v_p(b)\big) = v_p(a) = v_p(a+b)$. Par symétrie, c'est vrai aussi lorsque $a = 0$. Enfin, si $a+b = 0$, l'inégalité est évidente.

Proposition 27

1. Si $b \mid a$, alors pour tout $p \in \mathcal{P}$, $p^{v_p(b)}$ divise b, donc divise a. Donc $v_p(a) \geqslant v_p(b)$.

   Réciproquement, supposons que l'on ait $\forall p \in \mathcal{P} \quad v_p(b) \leqslant v_p(a)$. On peut alors poser $c = \prod\limits_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(a)-v_p(b)}$ puisque $\big\{p \in \mathcal{P} \bigm| v_p(a) - v_p(b) > 0\big\} \subset \big\{p \in \mathcal{P} \bigm| v_p(a) > 0\big\}$ est un ensemble fini. Il est alors immédiat que $a = b\,c$.

2. Posons $d = \prod\limits_{p\in\mathcal{P}} p^{\min\left(v_p(a), v_p(b)\right)}$ et $m = \prod\limits_{p\in\mathcal{P}} p^{\max\left(v_p(a), v_p(b)\right)}$. Cela a bien un sens car :

$$\begin{aligned}\big\{p \in \mathcal{P} \bigm| \min\big(v_p(a), v_p(b)\big) > 0\big\} &\subset \big\{p \in \mathcal{P} \bigm| \max\big(v_p(a), v_p(b)\big) > 0\big\} \\ &\subset \big\{p \in \mathcal{P} \bigm| v_p(a) > 0\big\} \cup \big\{p \in \mathcal{P} \bigm| v_p(b) > 0\big\}\end{aligned}$$

   ce qui prouve que tous ces ensembles sont finis.

   Le premier point prouve que d est un diviseur de a et b et que tout diviseur commun à a et b divise d. Donc $d = a \wedge b$.

   De la même façon, on a $m = a \vee b$.

Exercice 15 La congruence modulo 0 est la relation d'égalité, puisque seul 0 est un multiple de 0. Les classes de congruence sont donc tous les singletons $\{n\}$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

Deux entiers quelconques sont congrus entre eux modulo 1, puisque leur différence est un multiple de 1. Il y a donc une seule classe de congruence.

Proposition 29 Supposons $a \equiv a' \quad [n]$ et $b \equiv b' \quad [n]$. Alors $a' - a$ et $b' - b$ sont des multiples de n donc il en est de même de :

$$(a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b) \qquad \text{et} \qquad a'\,b' - a\,b = a'\,(b' - b) + (a' - a)\,b.$$

Exercice 16 Il suffit de considérer les éléments 0, ± 1, ± 2, ± 3 et 4 dont les carrés sont respectivement 0, 1, 4, 9 et 16. Les classes des carrés modulo 8 sont donc les classes des éléments de $\{0, 1, 4\}$.

Exercice 17 Soit $a = 1994996$, $b = 26399273$ et $c = 52666454037908$.

On a $a \equiv 1 + 4 + 6 \equiv 11 \equiv 2 \quad [9]$. De même, $b \equiv 5 \quad [9]$ et $c \equiv 2 \quad [9]$.

Or $a\,b \equiv 2 \times 5 \equiv 1 \quad [9]$, donc $a\,b \neq c$ (en fait, $a\,b = 526664\boxed{4}4037908$).

Cette méthode pour détecter des erreurs de calculs est appelée la **preuve par 9**.

Corollaire 31 Par compatibilité de la congruence avec la multiplication, la classe de n^p modulo p ne dépend que de la classe de n. Comme tout entier relatif est congru modulo p à un entier naturel d'après la proposition 28 de la page 843, il suffit donc de prouver le résultat lorsque n est un entier naturel.

Démontrons donc par récurrence la propriété H_n : « $n^p \equiv n \quad [p]$ ».

- H_0 est évident.
- Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons H_n.
  Alors, d'après la proposition précédente $(n+1)^p \equiv n^p + 1^p \equiv n^p + 1 \quad [p]$ puis, d'après H_n, $(n+1)^p \equiv n+1 \quad [p]$. D'où H_{n+1}.

Exercice 18

1. Comme n n'est pas multiple de p premier, on a $n \wedge p = 1$. L'identité de Bézout donne donc deux entiers u et k tels que $n\,k + p\,u = 1$, ce qui entraîne $n\,k \equiv 1 \quad [p]$.
2. En multipliant la relation $n^p \equiv n \quad [p]$ par k et en utilisant la compatibilité de la congruence avec la multiplication, on obtient $n^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$.

S'entraîner et approfondir

15.1 Trouver le nombre d'entiers relatifs qui, dans la division euclidienne par 23, ont un quotient égal au reste.

15.2 Déterminer $v_2(1000!)$.

15.3 Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$ n'a pas de racines dans $\mathbb{Q}$.

⋆ **15.4** Montrer qu'il existe des intervalles de $\mathbb{N}$ de longueur aussi grande que l'on veut qui ne contiennent aucun nombre premier.

15.5 Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que :

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{b} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a+b-1}{b} \right\rfloor = a.$$

On déterminera les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $\left\lfloor \dfrac{a+n}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor$ ainsi que ceux tels que $\left\lfloor \dfrac{a+n}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor + 1$.

15.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers.

1. Calculer la somme $S(n)$ des diviseurs positifs de n.
2. Montrer que, si m et n sont premiers entre eux, alors $S(mn) = S(m)S(n)$.

15.7 Trouver n de la forme $3^p 5^q$ sachant que le produit de ses diviseurs est 45^{42}.

15.8
1. Soit $n \geqslant 2$ et $a \in \mathbb{Z}$ un entier premier avec n.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note r_k le reste de la division euclidienne de a^k par n.
   Montrer que la suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est périodique.
2. Quel est le reste de la division euclidienne de 3^{2013} par 5 ?
3. Montrer que 13 divise $3^{126} + 5^{126}$.

15.9 Soit n un entier avec $n \geqslant 2$.

1. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
2. Que constate-t-on si l'on prend $n = 11$?

Les nombres premiers de la forme $2^n - 1$ (avec donc n premier d'après la première question) sont les **nombres de Mersenne**.

15.10 Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^m + 1$ soit premier.
Montrer que m est de la forme 2^n, avec $n \in \mathbb{N}$.

15.11 Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1. Vérifier la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad F_{n+1} - 2 = (F_n - 2)\, F_n$.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de F_n en fonction des F_k pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
3. Montrer que, si $n \neq m$, alors F_n et F_m sont premiers entre eux.

⋆ **15.12** Soit p un nombre entier tel que $2^p - 1$ soit premier. On sait alors (voir exercice 15.9) que p est premier.

1. Montrer que le nombre $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait, c'est-à-dire que $2n = S(n)$ où $S(n)$ représente la somme de ses diviseurs.
2. Montrer que tout nombre parfait pair est de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$ où p est premier.

On ne sait pas, à l'heure actuelle, s'il existe des nombres parfaits impairs.

15.13
1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k + 3$.
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6k + 5$.

15.14 Montrer qu'il existe une application d de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Z}$, et une seule, telle que, pour tout nombre premier p, on ait $d(p) = 1$ et :
$$\forall (u, v) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad d(uv) = ud(v) + vd(u).$$
Résoudre l'équation $d(n) = n$.

15.15
1. Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
   Montrer que :
   $$(a + b) \wedge (a \vee b) = a \wedge b.$$
2. Trouver tous les couples $(a, b) \in {\mathbb{N}^*}^2$ tels que :
   $$\begin{cases} a + b = 144 \\ a \vee b = 420. \end{cases}$$

⋆ **15.16** Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation $x^y = y^x$.

15.17 En s'inspirant de l'exemple de la page 843, donner des critères de divisibilité par 2, 3, 5 et 11 d'un nombre entier en fonction des chiffres de son écriture en base 10.

15.18 On remarque que $1001 = 7 \times 11 \times 13$.
En déduire un critère de divisibilité par 13.
Si n s'écrit dans le système décimal $\overline{a_p a_{p-1} \ldots a_1 a_0}$, on pourra considérer les nombres $\overline{a_2 a_1 a_0}$, $\overline{a_5 a_4 a_3}$ $\overline{a_8 a_7 a_6}$....
Donner également un critère de divisibilité par 7.

Solution des exercices

15.1 Les entiers qui conviennent sont ceux de la forme $n = 23q + q$ avec $0 \leqslant q < 23$. Il y en a donc 23.

15.2 Entre 1 et $n = 1000$, il y a $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ nombres pairs, donc $\left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor$ qui sont multiples de 4, $\left\lfloor \dfrac{n}{8} \right\rfloor$ multiples de 8...

On a donc :

$$v_2(1000!) = 500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 994.$$

15.3 Supposons que l'équation admette une solution rationnelle $x = \dfrac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ et $q > 0$. Dans ce cas, on aurait :

$$p^3 + p^2q + 2pq^2 + q^3 = 0.$$

Puisque $q \mid p^2q + 2pq^2 + q^3$, on a $q \mid p^3$ et donc $q = 1$ car $q \wedge p^3 = 1$.

Or l'équation ne peut admettre de solution entière. En effet, quelle que soit la parité de x, l'entier $x^3 + x^2 + 2x + 1$ est impair donc non nul.

15.4 Soit $n \geqslant 2$. On considère l'intervalle $[\![n! + 2, n! + n]\!]$. Il est de longueur $n - 1$ et, pour tout i entre 2 et n, $n! + i$ n'est pas premier car divisible par i.

15.5 Effectuons la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$, $0 \leqslant r < b$.

Alors $\left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor = q$.

De plus $\left\lfloor \dfrac{a+n}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor$ si, et seulement si, $0 \leqslant \dfrac{r+n}{b} < 1$ soit $-r \leqslant n < b - r$.

De même $\left\lfloor \dfrac{a+n}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor + 1$ si, et seulement si, $b - r \leqslant n < 2b - r$.

Alors :

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{b} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a+b-1}{b} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a+b-r-1}{b} \right\rfloor \\ &\quad + \left\lfloor \frac{a+b-r}{b} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a+b-1}{b} \right\rfloor \\ &= (b-r)q + r(q+1) = bq + r = a.\end{aligned}$$

15.6 1. Si $r = 1$, alors $S(n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\alpha_1} p_1^i = \frac{p_1^{1+\alpha_1} - 1}{p_1 - 1}$.

Supposons $r \geqslant 2$ et notons $d_1, \ldots, d_N$ les diviseurs de $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_{r-1}^{\alpha_{r-1}}$.

Les diviseurs de n sont alors :

$$d_i p_r^j \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant i \leqslant N \quad \text{et} \quad 0 \leqslant j \leqslant \alpha_r.$$

La somme cherchée est donc :

$$S(n) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{\alpha_r} d_i p_r^j = \sum_{i=1}^{N} d_i \frac{p_r^{1+\alpha_r}-1}{p_r-1} = S(m)\,\frac{p_r^{1+\alpha_r}-1}{p_r-1}.$$

Une récurrence immédiate sur r permet alors de montrer $S(n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{1+\alpha_i}-1}{p_i-1}\cdot$

2. On décompose m et n en produit de facteurs premiers. Le résultat précédent permet de montrer facilement le résultat.

15.7 Le produit des diviseurs s'écrit $\displaystyle\prod_{0\leqslant i\leqslant p\,,\,0\leqslant j\leqslant q} 3^i 5^j = 3^{\frac{p(q+1)(p+1)}{2}} 5^{\frac{q(q+1)(p+1)}{2}}$.

Or $45^{42} = 3^{84}5^{42}$. Donc, par unicité de la décomposition en facteurs premiers, $\dfrac{p(q+1)(p+1)}{2} = 84$ et $\dfrac{q(q+1)(p+1)}{2} = 42$ d'où $p = 2q$ puis $q = 3$ et $p = 6$.

15.8 1. L'application $k \mapsto r_k$ de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ est non injective, donc il existe $k_1 < k_2$ tels que $r_{k_1} = r_{k_2} = r$. Posons $T = k_2 - k_1$ et montrons que la suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est T-périodique.

On a $n\,|\,a^{k_1} - r$ et $n\,|\,a^{k_1+T} - r = (a^{k_1} - r)a^T - r + ra^T$ donc $n\,|\,r(a^T - 1)$.

Or, $a^k \wedge n = n \wedge r_k$ d'après le lemme 5 de la page 827 et $a^k \wedge n = 1$ puisque $a \wedge n = 1$.

Ainsi, d'après le théorème de Gauss, $n\,|\,a^T - 1$, ce qui montre que le reste de la division de a^T par n est 1.

On a :

$$n\,|\,a^k - r_k \qquad \text{et} \qquad a^{T+k} - r_k = (a^T - 1)a^k + a^k - r_k$$

donc $n\,|\,a^{T+k} - r_k$, ce qui montre que le reste de la division par n de a^{T+k} est r_k.

2. On applique le résultat précédent avec $n = 5$ et $a = 3$: $r_0 = 1$, $r_1 = 3$, $r_2 = 4$, $r_3 = 2$ et $r_4 = 1$. La suite est donc 4-périodique.

Le reste de la division euclidienne de 2013 par 4 est 1 donc le reste cherché est 3.

3. En utilisant ce qui précède avec $n = 13$, on trouve :
   - pour $a = 3$: $r_0 = 1$, $r_1 = 3$, $r_2 = 9$ et $r_3 = 1$,
   - pour $a = 5$: $r_0 = 1$, $r_1 = 5$, $r_2 = 12$ donc $r_4 = 1$ puisque $r_4 \equiv r_2^2$ [13].

   Ainsi :
   - le reste de la division de 3^{126} par 13 est 1 puisque $126 \equiv 0$ [3],
   - le reste de la division de 5^{126} par 13 est 12 puisque $126 \equiv 2$ [4].

   Cela montre le résultat.

15.9 Soit d un diviseur de n alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = dp$ et :

$$2^{pd} - 1 = (2^d)^p - 1 = (2^d - 1)(1 + 2^d + 2^{2d} + \cdots + 2^{(p-1)d}).$$

$2^d - 1$ divise $2^n - 1$ d'où $d = 1$ ou $d = n$, ce qui montre que n est premier.

15.10 Supposons que m ne soit pas de la forme cherchée, alors il existe deux entiers p et q avec q impair distinct de 1 tel que $m = pq$. Alors :

$$2^m + 1 = (2^p)^q + 1 = (2^p + 1)(2^{p(q-1)} - 2^{p(q-2)} + \cdots + 1)$$

et $2^p + 1$ divise $2^m + 1$ donc $p = m$ ce qui est impossible.

15.11 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$F_{n+1} - 2 = 2^{2^{n+1}} - 1 = \left(2^{2^n} - 1\right)\left(2^{2^n} + 1\right) = (F_n - 2)\, F_n.$$

2. Une récurrence immédiate donne $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_n = 2 + F_0 F_1 \ldots F_{n-1}$.

3. Soit d le PGCD de F_n et de F_m. Supposons, par exemple, $n > m$. Alors d divise F_n et $F_0 F_1 \ldots F_{n-1}$, donc leur différence 2. Comme F_n est impair, il en est de même de d, donc $d = 1$ et $F_n \wedge F_m = 1$.

15.12 1. $2^p - 1$ étant premier, le nombre $2^{p-1}(2^p - 1)$ est directement décomposé en produit de nombres premiers.

La somme de ses diviseurs est alors (voir l'exercice 15.6) :

$$S\left(2^{p-1}(2^p - 1)\right) = \frac{2^p - 1}{2 - 1} 2^p = 2^p(2^p - 1) = 2n.$$

2. Soit n un nombre parfait pair, on peut écrire $n = 2^a b$ où b est un nombre impair et $a \geqslant 1$.

Alors :

$$S(n) = (2^{a+1} - 1)S(b) \qquad \text{et} \qquad 2n = 2^{a+1} b.$$

Or $2^{a+1} - 1$ et 2^{a+1} sont premiers entre eux donc $2^{a+1} - 1$ divise b.

On a alors :

$$S(b) = b + \frac{b}{2^{a+1} - 1}.$$

Les deux nombres b et $\dfrac{b}{2^{a+1} - 1}$ sont deux diviseurs de b dont la somme est $S(b)$, ce sont donc les seuls. On en déduit que b est premier et que $b = 2^{a+1} - 1$.

15.13 1. On utilise, dans cette question, que hormis 2, les nombres premiers sont congrus à ± 1 modulo 4 (une congruence à 0 ou 2 entraîne une divisibilité par 2).

Supposons qu'il y ait un nombre fini de nombres premiers de la forme $4k + 3$ et considérons $n = 3 \times 7 \times 11 \times 19 \ldots$ le produit de ces nombres.

Le nombre $m = 4n - 1$ est impair et ne possède aucun facteur premier de la forme $4k + 3$ car il est premier avec chacun d'entre eux. Donc $m = p_1 p_2 \ldots p_r$ où tous les p_i sont congrus à 1 modulo 4.

Ainsi, m serait congru à 1 modulo 4 ce qui est impossible.

2. On procède de manière analogue. On suppose qu'il y a un nombre fini de nombres premiers de la forme $6k + 5$. Soit $n = 5 \times 11 \times 17 \ldots$ le produit des ces nombres premiers.

Le nombre $6n - 1$ n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par aucun nombre premier de la forme $6k - 1$ puisque premier avec ceux-ci. Or, on peut montrer comme dans la première question que, hormis 2 et 3, tous les nombres premiers sont de la forme $6k \pm 1$. Donc, $6n - 1$ est un produit de nombres premiers congrus à 1 modulo 6, ce qui entre en contradiction avec le fait qu'il est congru à -1 modulo 6.

15.14 Soit d une telle application. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que si p est premier, alors $d(p^n) = np^{n-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers.

On montre par récurrence sur r que : $d\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{p_i}\right) n$.

Réciproquement, on montre que la fonction d ainsi définie vérifie les conditions données.

D'autre part $d(n) = n$ si, et seulement si, $\sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{p_i} = 1$. Or si $\sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{p_i} = 1$ alors :

$$\frac{\alpha_1}{p_1} = 1 - \sum_{i=2}^{r} \frac{\alpha_i}{p_i} \qquad \text{et} \qquad \alpha_1 \prod_{j=2}^{r} p_j = -p_1 k \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

donc :

$$p_1 \mid \alpha_1 \prod_{j=2}^{r} p_j$$

et, par le lemme de Gauss, $p_1 \,|\alpha_1$. Dans ce cas, on a nécessairement :

$$\alpha_1 = p_1 \quad \text{et} \quad \forall j \in \{2, \ldots, r\} \quad \alpha_j = 0$$

puisque $\sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{p_i} = 1$ et $\frac{\alpha_1}{p_1} \geqslant 1$.

Finalement $n = p^p$ où p est un nombre premier.

Réciproquement, tout nombre de cette forme est bien solution.

15.15 1. Notons $D = a \wedge b$ et $M = a \vee b$.

On a $a = Da'$ et $b = Db'$ (avec a' et b' premiers entre eux) d'où :

$$a + b = D(a' + b').$$

De plus $DM = ab$, d'où $M = Da'b'$.

Pour montrer que D est le PGCD de $a+b$ et de M, il suffit de montrer que $a'b'$ et $a'+b'$ sont premiers entre eux.

Tout d'abord, a' est premier avec $a'+b'$. En effet, un diviseur commun de a' et de $a'+b'$ est un diviseur commun de a' et de b'. De même b' est premier avec $a'+b'$.

On conclut que $a'b'$ est premier avec $a'+b'$.

2. Si a et b conviennent, alors, avec les mêmes notations :

$$D = a \wedge b = (a+b) \wedge M = 144 \wedge 420 = 12$$

donc $a'+b' = 12$ et $a'b' = 35$.

Les entiers a' et b' sont donc solutions de $X^2 - 12X + 35 = 0$, soit $\{a', b'\} = \{5, 7\}$, ce qui donne $\{a, b\} = \{60, 84\}$.

Réciproquement, les couples $(60, 84)$ et $(84, 60)$ sont évidemment solution.

15.16 Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ solution.

Écrivons les décompositions en facteurs premiers de x et de y :

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} \ \text{ et } \ y = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r}.$$

avec $0 \leqslant \alpha_i$ et $0 \leqslant \beta_i$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$. La relation $x^y = y^x$ donne :

$$\forall i \in \{1, 2 \ldots, r\} \quad \alpha_i y = \beta_i x.$$

Si l'on suppose $x \leqslant y$, alors on a :

$$\forall i \in \{1, 2 \ldots, r\} \quad \alpha_i x \leqslant \beta_i x \qquad \text{donc} \qquad x \mid y.$$

En prenant $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = mx$, l'entier x non nul est solution de l'équation :

$$x^{m-1} = m.$$

Recherchons les solutions de cette équation.
Remarquons que si $x \geqslant 2$ et $m > 2$, alors $x^{m-1} \geqslant 2^{m-1} > m$.

- Si $x \geqslant 2$ est solution alors $m \leqslant 2$, on trouve pour solutions $x = 2$ et $m = 2$, $x \geqslant 2$ et $m = 1$.
- Si $x < 2$, alors $m = 1$.

Finalement, $(x, y) = (2, 4)$ ou $(x, y) = (4, 2)$ ou $x = y$ et l'on vérifie facilement que tous ces couples conviennent.

15.17 Comme $10 \equiv 0 \quad [2]$ et $10 \equiv 0 \quad [5]$, un nombre entier est congru modulo 2 ou 5 à son chiffre des unités. Il est donc multiple de 2 si, et seulement si, son écriture en base 10 se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 et divisible par 5 si, et seulement si, son écriture en base 10 se termine par 0 ou 5.

Comme pour 9, un nombre est congru à la somme de ses chiffres modulo 3 puisque $10 \equiv 1 \quad [3]$. Il est donc divisible par 3 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

On a $10 \equiv -1 \quad [11]$ donc $10^k \equiv (-1)^k \quad [11]$. Soit n un entier naturel qui s'écrit $\overline{a_k \cdots a_1 a_0}$ en base 10. On a donc $n \equiv a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^k a_k \quad [11]$. On obtient ainsi un critère de divisibilité par 11 : un nombre entier est divisible par 11 si, et seulement si, la somme de ses chiffres d'indices pairs ($a_0 + a_2 + \cdots$) est congrue, modulo 11 à la somme de ses chiffres d'indices impairs ($a_1 + a_3 + \cdots$).

15.18 On remarque que le reste dans la division euclidienne de 10^{3p} par 1001 est 1 si p est pair, 1000 sinon.

Donc $10^{3p} - 1$ est un multiple de 1001 si p est pair et $10^{3p} + 1$ est un multiple de 1001 si p est impair. De plus :

$$\overline{a_p a_{p-1} \ldots a_1 a_0} = \overline{a_2 a_1 a_0} + \overline{a_5 a_4 a_3} \times 10^3 + \overline{a_8 a_7 a_6} \times 10^6 + \cdots .$$

On en déduit que :

$$\overline{a_p a_{p-1} \ldots a_1 a_0} - \overline{a_2 a_1 a_0} + \overline{a_5 a_4 a_3} - \overline{a_8 a_7 a_6} + \cdots$$

est un multiple de 1001 donc de 13.
Pour étudier la divisibilité de $\overline{a_p a_{p-1} \ldots a_1 a_0}$ par 13, il suffit donc de regarder celle de $\overline{a_2 a_1 a_0} - \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_8 a_7 a_6} + \cdots$
Le même raisonnement conduit à un critère de divisibilité par 7.
Exemple : 1117541763 est divisible par 13 puisque $763 - 541 + 117 - 1 = 338 = 26 \times 13$.

En revanche, 338 n'étant pas divisible par 7, le nombre 1117541763 n'est pas un multiple de 7.

Chapitre 16 : Structures algébriques usuelles

I Lois de composition interne 864

1 Généralités 864

2 Itérés d'un élément 868

3 Partie stable, loi induite 869

II Groupes 869

1 Définitions, exemples 869

2 Sous–groupes 870

III Anneaux 871

1 Définitions 871

2 Règles de calcul 873

3 Éléments inversibles, unités 874

4 Corps 875

IV Espaces vectoriels 876

V Exemple : une construction de $\mathbb{C}$ 876

1 Structure d'anneau commutatif 876

2 Notation définitive 877

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 879

Structures algébriques usuelles

16

Le but de ce chapitre est de définir le vocabulaire élémentaire concernant les structures algébriques usuelles (groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels). Ce vocabulaire permet d'unifier les propriétés classiques des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^n$ munis de leurs opérations usuelles $+$ et $\times$, propriétés que nous supposerons connues, et de se rendre compte que l'on retrouve des propriétés analogues sur d'autres ensembles tels que des sous-ensembles stricts de précédents ou encore des ensembles de fonctions.
La figure de la page 878 résume les structures définies dans ce chapitre, et qui seront utilisées dans tout ce livre, et montre leur imbrication.
Dans tout ce chapitre, E désigne un ensemble.

I Lois de composition interne

1 Généralités

Définition 1

On appelle **loi de composition interne sur E**, toute application de $E \times E$ dans E.

Traditionnellement, on utilise la notation $x * y$ pour désigner l'image d'un couple $(x, y) \in E^2$ par une loi $*$ plutôt que la notation fonctionnelle $*(x, y)$.

Exemples

1. L'addition, la multiplication sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
   La soustraction sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
   La division sur $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{C}^*$.
2. Si E est un ensemble, on a sur $\mathcal{P}(E)$ les lois de composition interne suivantes :
   - l'intersection : $(A, B) \mapsto A \cap B$,
   - la réunion : $(A, B) \mapsto A \cup B$,
   - la différence : $(A, B) \mapsto A \setminus B$.

3. Soit A un ensemble. La composition des applications notée $\circ$ est une loi de composition interne sur :
   - l'ensemble des applications de A dans A, noté A^A,
   - l'ensemble des permutations de A, c'est-à-dire des bijections de A dans A, noté $\mathfrak{S}_A$ ou $\mathfrak{S}(A)$.

Propriétés des lois de composition interne

Soit $*$ une loi de composition interne sur un ensemble E.

Définition 2

On dit que $*$ est :

- **associative** si $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad (x*y)*z = x*(y*z)$,
- **commutative** si $\forall (x,y) \in E^2 \quad x*y = y*x$.

Exemples

1. Sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, l'addition et la multiplication sont associatives et commutatives.
2. Sur $\mathcal{P}(E)$, les lois $\cap$ et $\cup$ sont associatives et commutatives (voir page 320).
3. Sur $\mathbb{R}$, la soustraction n'est ni commutative, ni associative.
4. Sur E^E, la composition des applications est associative. C'est la traduction, dans le cas particulier où $F = G = H = E$, du résultat la proposition 1 de la page 340.

p.879

Exercice 1

1. Soit E un ensemble possèdant au moins deux éléments distincts a et b. Construire deux applications f_a et f_b de E dans E telles que $f_a \circ f_b \neq f_b \circ f_a$.

   En déduire que la composition des applications n'est pas commutative sur E^E.
2. Montrer que la composition des applications sur $\mathfrak{S}_E$ n'est pas commutative si E possède au moins trois éléments.

   Qu'en est-il sur un ensemble à 2 éléments ?

Remarque

La notation additive $+$ n'est utilisée que pour une loi commutative.

Définition 3

Soient $\oplus$ et $\otimes$ deux lois de composition interne sur E. On dit que $\otimes$ est **distributive** par rapport à $\oplus$ si pour tous x, y et z de E, on a :

$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \quad \text{et} \quad (x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z).$$

Exemples

1. Sur $\mathbb{R}$, la multiplication est distributive par rapport à l'addition.
2. Sur $\mathcal{P}(E)$, la réunion et l'intersection sont chacune distributive par rapport à l'autre.

   C'est la traduction des propriétés de la page 320.

Propriétés des éléments

Soit $*$ une loi de composition interne sur un ensemble E.

Définition 4

On dit que $a \in E$ est **régulier** ou **simplifiable** pour la loi $*$ si, pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$a * x = a * y \Longrightarrow x = y \qquad \text{et} \qquad x * a = y * a \Longrightarrow x = y.$$

Remarque Évidemment, pour une loi de composition interne commutative, il est suffisant de vérifier l'une des deux implications de cette définition.

Exemple Dans $\mathbb{N}$:

- tous les éléments sont réguliers pour l'addition,
- tous les éléments non nuls sont réguliers pour la multiplication.

p.879

Exercice 2

Dans $\mathcal{P}(E)$, montrer que E est le seul élément régulier pour l'intersection.

Définition 5

On dit que $e \in E$ est **élément neutre** pour $*$ si :

$$\forall x \in E \quad x * e = e * x = x.$$

Proposition 1

Un tel élément neutre, quand il existe, est unique.

Principe de démonstration. Soit e et e' deux éléments neutres. Calculer $e * e'$.

Démonstration page 879

Exemples

1. Sur $\mathbb{R}$:
   - 0 est élément neutre pour l'addition,
   - 1 est élément neutre pour la multiplication.
2. Id_E est élément neutre pour la composition sur E^E.
3. E est élément neutre pour l'intersection sur $\mathcal{P}(E)$.

p.879

Exercice 3 Montrer que $\mathbb{N}^*$ n'a pas d'élément neutre pour l'addition.

p.879

Exercice 4 Montrer que l'élément neutre est toujours régulier.

p.879

Exercice 5 Résumer les propriétés ⑦ à ⑭ de la page 319 en utilisant les définitions introduites jusque-là.

Définition 6

Soit E un ensemble muni d'une loi $*$ et possédant un élément neutre e. Un élément x de E est **symétrisable** ou **inversible** si :

$$\exists y \in E \quad x * y = y * x = e.$$

Proposition 2

En plus des hypothèses de la définition précédente, supposons la loi associative. S'il existe un tel élément y, celui-ci est unique. On l'appelle le **symétrique** de x.

Principe de démonstration. Démonstration page 880

Prendre y et z de E tels que $x * y = z * x = e$ et calculer $z * (x * y)$ et $(z * x) * y$.

Notation Le symétrique d'un élément x se note :

- x^{-1} pour une loi notée multiplicativement et s'appelle **inverse** de x.
- $-x$ pour une loi notée additivement et s'appelle **opposé** de x.

Exemples

1. Pour l'addition dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, tout élément admet un opposé.
2. Pour la multiplication de $\mathbb{R}$, tout élément non nul admet un inverse.
3. S'il existe, l'élément neutre de $(E,*)$ est symétrisable pour $*$ et il est son propre symétrique.

p.880 **Exercice 6** Dans $(E^E,\circ)$, montrer que les éléments inversibles sont les bijections et que leur symétrique est alors leur application réciproque.

Remarque Lorsque f est une bijection de E dans E, il n'y a donc pas ambiguïté dans la notation f^{-1} : il s'agit aussi bien de son application réciproque que de son inverse pour la loi $\circ$.

Proposition 3

Soit E un ensemble muni d'une loi $*$ associative.

Si a et b sont deux éléments inversibles, alors $a * b$ est inversible et :

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}.$$

Démonstration. Il suffit de vérifier :

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = e \qquad \text{et} \qquad (b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = e,$$

ce qui découle de l'associativité de $*$. □

Exemples

1. Si f et g sont deux bijections d'un ensemble E dans lui–même, alors $f \circ g$ est aussi bijective et sa réciproque est $g^{-1} \circ f^{-1}$.
2. 1143 Si A et B sont deux matrices inversibles, le produit $A\,B$ est également inversible et $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$.

Proposition 4

Soit E un ensemble muni d'une loi associative $*$ et possédant un élément neutre e. Tout élément inversible de E est régulier.

Principe de démonstration. Composer la relation $x * a = x * b$ par le symétrique de x.

Démonstration page 880

p.880 **Exercice 7** Dans $\mathcal{P}(E)$, seul l'élément neutre E admet un symétrique pour $\cap$.

Attention Un élément régulier n'est pas nécessairement inversible.

p.880 **Exercice 8** Exhiber, dans $(\mathbb{N}, +)$, un élément régulier non inversible.

2 Itérés d'un élément

Notation multiplicative

Soit E un ensemble muni d'une loi associative $*$ et possédant un élément neutre e. Pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$x^n = \underbrace{x * x * \cdots * x}_{n \text{ fois}}.$$

Plus formellement, on définit l'**itéré** n-ième de $x \in E$, pour $n \in \mathbb{N}$, par récurrence de la façon suivante :

$$x^0 = e \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad x^{n+1} = x * (x^n).$$

Si $x \in E$ est inversible, alors, pour tout entier naturel n, l'élément x^n est inversible et son inverse est $(x^{-1})^n$ que l'on note x^{-n}.

Proposition 5

Étant donné $x \in E$, on a pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$:

$$x^{p+q} = x^p * x^q \qquad \text{et} \qquad (x^p)^q = x^{pq}.$$

Si x est inversible, ces relations sont vraies pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$.

Démonstration page 880

Notation additive

Lorsque la loi est commutative et qu'elle est notée additivement :

- l'élément neutre est noté 0,
- l'itéré n-ième d'un élément x s'écrit $n.x$ ou $n\,x$ au lieu de x^n pour $n \in \mathbb{N}$ (ou $n \in \mathbb{Z}$ si x est inversible).

Les résultats de la proposition 5 s'écrivent alors, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$:

$$(p+q).x = p.x + q.x \qquad \text{et} \qquad p.(q.x) = (pq).x$$

et, si x admet un opposé, ces relations sont vraies pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$.

3 Partie stable, loi induite

Définition 7

Soit E muni d'une loi de composition interne $*$ et F une partie de E.

On dit que F est **stable** par $*$ si $\forall (x,y) \in F^2 \quad x * y \in F$.

La loi de composition interne alors définie sur F par $\begin{array}{ccc} F^2 & \longrightarrow & F \\ (x,y) & \longmapsto & x*y \end{array}$

est appelée **loi induite** par $*$ sur F.

Exemples

1. $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$ sont stables pour les multiplications respectives de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$.
2. Dans $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des nombres complexes de module 1 est stable par $\times$.
3. $\mathbb{N}$ est stable par l'addition et la multiplication de $\mathbb{Z}$.

II Groupes

1 Définitions, exemples

Définition 8

Étant donné un ensemble G, on dit que $(G,*)$ est un **groupe** si :

- $*$ est une loi de composition interne sur G,
- $*$ est associative,
- $(G,*)$ possède un élément neutre,
- tout élément de G possède un symétrique dans G.

Si de plus $*$ est commutative, on dit que G est un groupe **commutatif**

Remarques

- Par abus de langage et lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté, on dit souvent « soit G un groupe... » sans préciser la loi.
- Dans un groupe, tout élément est régulier, puisqu'inversible.

Exemples

1. $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{R}_+^*,\times)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$ sont des groupes commutatifs.
2. $(\mathbb{N},+)$ et $(\mathbb{R},\times)$ ne sont pas des groupes puisqu'ils ont des éléments non inversibles.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En munissant $\mathbb{R}^n$ de l'addition terme à terme définie par :
$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \forall (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
on obtient un groupe commutatif. L'élément neutre est $(0, \ldots, 0)$ et l'opposé de $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est $(-x_1, \ldots, -x_n)$. L'associativité et la commutativité sont immédiates en utilisant l'associativité et la commutativité de l'addititon des réels.
Il en est évidemment de même en remplaçant partout $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

p.880

Exercice 9 Montrer que $(E^E, \circ)$ n'est pas un groupe si E possède au moins deux éléments.

Proposition 6

L'ensemble $(\mathfrak{S}_E, \circ)$ des permutations de E est un groupe

Il n'est pas commutatif si E a au moins trois éléments.

Démonstration page 880

p.881

Exercice 10 Soit $(G, *)$ un groupe et A un ensemble non vide. Sur l'ensemble G^A des applications de A dans G, on peut définir une loi (encore notée $*$ pour simplifier) de la façon suivante : si f et g sont deux applications de A dans G, l'application $f * g \in G^A$ est définie par :
$$\forall x \in A \quad (f * g)(x) = f(x) * g(x).$$
1. Montrer que $(G^A, *)$ est un groupe.
2. Montrer qu'il est commutatif si, et seulement si, G est commutatif.

2 Sous–groupes

Définition 9

Soit G un groupe. Une partie H de G est un **sous–groupe** de G si elle est stable par produit et passage au symétrique, et si elle contient l'élément neutre de G.

Exemples
1. $\mathbb{Z}$ est un sous–groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
2. $\mathbb{R}_+^*$ est un sous–groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.
3. Dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$, l'ensemble $\mathbb{U}$ des éléments de module 1 et l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité, sont des sous–groupes de $\mathbb{C}^*$.
4. G et $\{e\}$ sont des sous–groupes du groupe G. On les appelle **sous–groupes triviaux** de G.

p.881 **Exercice 11** $\mathbb{R}_+^*$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$? de $(\mathbb{R},\times)$?

Proposition 7

Muni de la loi induite, un sous–groupe est un groupe.

Démonstration page 881

Point méthode

C'est la méthode habituelle, car la plus efficace, pour montrer que l'on a affaire à un groupe : on démontre en général que c'est un sous-groupe d'un groupe connu. Cela permet, en particulier, de ne pas à avoir à montrer l'associativité.

Le lecteur est donc invité à bien connaître les exemples classiques ci-dessus, afin de pouvoir les utiliser pour démontrer qu'une de leur partie est un groupe.

p.881 **Exercice 12** En utilisant leur représentation complexe, montrer que l'ensemble des similitudes directes du plan est un groupe pour la composition des applications.

III Anneaux

1 Définitions

Définition 10

Soit A un ensemble muni de deux lois de composition interne, notées en général $+$ et $\times$. On dit que $(A,+,\times)$ est un **anneau** si :

- $(A,+)$ est un groupe commutatif,
- $\times$ est associative,
- A possède un élément neutre pour $\times$,
- $\times$ est distributive par rapport à $+$.

On dit que l'anneau est **commutatif** si $\times$ est commutative.

Notation Dans un anneau A :

- on note 0 (ou 0_A) l'élément neutre pour $+$,
- on note 1 (ou 1_A) l'élément neutre pour $\times$,
- on note couramment $x.y$ ou même xy à la place de $x \times y$,

- on utilise simultanément les deux notations :
  - $n.a$ ou $n\,a$ avec $n \in \mathbb{Z}$ pour l'itéré additif,
  - a^n avec $n \in \mathbb{N}$ (ou $n \in \mathbb{Z}$ si a est inversible) pour l'itéré multiplicatif,
- on a, par définition, $\forall x \in A \quad x^0 = 1$; en particulier, $0_A^0 = 1_A$.

Exemples

1. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des anneaux commutatifs pour l'addition et la multiplication usuelles.
2. On sait déjà, par l'exemple 3 de la page 870, que $(\mathbb{R}^n, +)$ est un groupe commutatif. En le munissant de la loi multiplicative définie par :
$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \forall (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$(x_1, \ldots, x_n)\,(y_1, \ldots, y_n) = (x_1\,y_1, \ldots, x_n\,y_n)$$
on obtient un anneau. En effet, l'associativité et la distributivité se démontrent facilement à partir des mêmes propriétés sur $\mathbb{R}$ (en travaillant coordonnée par coordonnée). De plus, l'élément $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ est neutre pour la multiplication.
3. $A = \big(\{0\}, +, \times\big)$ est un anneau appelé **anneau trivial**. Dans ce cas, on a $0_A = 1_A$.

p.882 **Exercice 13** Soit X un ensemble. On munit l'ensemble $(\mathbb{R}^X, +, \times)$ des applications de X dans $\mathbb{R}$ des lois naturelles suivantes : si f et g sont deux applications de X dans $\mathbb{R}$, les applications $f+g$ et $f\,g$ sont définies par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad (f\,g)(x) = f(x)\,g(x).$$
Montrer que $(\mathbb{R}^X, +, \times)$ est un anneau et en préciser les éléments neutres.

p.882 **Exercice 14** Est-ce que $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \circ)$ est un anneau ?

p.882 **Exercice 15** Soit I un intervalle d'intérieur non vide. Montrer, à l'aide des résultats du chapitre 9 sur la continuité, que l'addition et la multiplication des fonctions réelles confèrent à $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ une structure d'anneau.

Remarque En fait, on pourrait montrer que $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est un sous-anneau de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \times)$.
Un **sous-anneau** d'un anneau $(A, +\times)$ est un sous-groupe de $(A, +)$ qui contient 1_A et qui est stable par multiplication. C'est l'équivalent, pour la structure d'anneau, de la notion de sous-groupe pour les groupes, mais la notion est hors programme en première année.
On peut facilement prouver qu'un sous-anneau de A est lui-même un anneau, ce qui permettrait encore plus rapidement de répondre à l'exercice 15.

2 Règles de calcul

Proposition 8

Dans un anneau A, on a les propriétés suivantes :

- $\forall a \in A \quad 0 \times a = a \times 0 = 0,$ **(0 est absorbant)**
- $\forall (a,b) \in A^2 \quad (-a) \times b = a \times (-b) = -(a \times b).$ **(règle des signes)**

Principe de démonstration. Calculer $a \times 0 + a \times 0$ et $a \times (-b) + a \times b$.

Démonstration page 882

p.882 **Exercice 16** Soit A un anneau dans lequel $0_A = 1_A$. Montrer que $A = \{0_A\}$.

Dans toute la suite, nous ne considérerons que des anneaux A contenant au moins deux éléments (anneaux non triviaux), et donc vérifiant $0_A \neq 1_A$.

Proposition 9

Soit a et b deux éléments d'un anneau A tels que $a\,b = b\,a$ (on dit que a et b **commutent**). On a les résultats suivants.

(a) **Formule du binôme de Newton** :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n-p}.$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + \cdots + a\,b^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}\, b^k. \end{aligned}$$

(c) Pour $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a^{2p+1} + b^{2p+1} &= (a+b)\,(a^{2p} - a^{2p-1}\,b + \cdots - a\,b^{2p-1} + b^{2p}) \\ &= (a+b) \sum_{k=0}^{2p} a^{2p-k}\, b^k. \end{aligned}$$

En particulier, ces relations sont vraies quels que soient les éléments a et b d'un anneau commutatif.

Démonstration. Ces relations, qui généralisent celles que l'on a déjà vues dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, se démontrent de la même façon. Le lecteur est invité à en refaire la démonstration et, en particulier, de voir où intervient l'hypothèse $a\,b = b\,a$. $\square$

Attention Bien prendre garde que certains réflexes de calcul, valables dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, ne le sont pas dans tout anneau. Voir par exemple la proposition précédente où les résultats ne sont pas vrais en général sans la commutativité. Un exemple important sera celui des matrices carrées étudiées dans le chapitre 22.

De même, faire attention que dans un anneau A, l'implication :

$$\forall (a,b) \in A^2 \quad a\,b = 0 \Longrightarrow (a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0)$$

n'est pas vraie en général, même dans un anneau commutatif.

p.882 **Exercice 17** Donner, dans l'anneau $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times)$ (voir l'exercice 13 de la page 872), deux éléments f et g non nuls tels que $f\,g = 0$.

3 Éléments inversibles, unités

Soit A un anneau.

Définition 11

On appelle **unité** de A tout élément de A inversible pour la multiplication.

Proposition 10

L'ensemble des unités de A forme un groupe pour $\times$ appelé **groupe des inversibles** ou **groupe des unités** de A.

Principe de démonstration. On ne peut pas, ici, montrer que G est un sous-groupe d'un autre groupe connu, puisque l'on ne connaît pas (encore) de groupe multiplicatif dans A. On revient donc à la définition d'un groupe. Démonstration page 883

Exemples

1. Le groupe des unités de $\mathbb{Z}$ est $\{-1, 1\}$.
2. Le groupe des unités de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Point méthode

En revanche, lorsque l'on veut montrer qu'une partie de A, stable par multiplication, est un groupe, on montre en général que c'est un sous-groupe du groupe des unités de A (à condition, évidemment, que ce soit une partie de ce groupe !).

p.883 **Exercice 18** Soit $\mathbb{R}^2$ muni des deux lois définies par :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \text{et} \qquad (x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1\,x_2, y_1\,y_2).$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ est un anneau.
2. Quel est le groupe des unités de cet anneau ?
3. Montrer que $\big((\mathbb{R}_+^*)^2, \times\big)$ est un groupe.
4. Est-ce que $\big(\mathbb{R}^* \times \{0\}, \times\big)$ est un groupe ?

p.883 **Exercice 19** Dans $\mathbb{R}^X$, montrer que les éléments inversibles sont les applications qui ne s'annulent pas.

4 Corps

Définitions

Définition 12

On dit que $(\mathbb{K},+,\times)$ est un **corps** si $(\mathbb{K},+,\times)$ est un anneau commutatif non réduit à $\{0\}$ et dont tous les éléments non nuls sont inversibles, c'est-à-dire dont le groupe des unités est $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Remarques

- Tout élément non nul d'un corps est régulier puisqu'inversible, mais 0 n'est pas régulier car $0 \times 0 = 0 \times 1$, avec $0 \neq 1$.
- Il peut arriver que l'on rencontre, dans la littérature, une autre définition de la notion de corps dans laquelle on ne suppose plus la commutativité de la multiplication. Les corps que nous venons de définir s'appellent alors « corps commutatifs ».

Exemples

1. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ munis des lois usuelles sont des corps.
2. $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps, puisque seuls 1 et -1 sont inversibles.

Proposition 11

Dans un corps $\mathbb{K}$, un produit est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

Principe de démonstration.

Il suffit de vérifier que si x est non nul, et si $x\,y = 0$, alors $y = 0$. Démonstration page 883

p.883

Exercice 20 Soit X un ensemble contenant au moins 2 éléments a et b distincts.

1. Construire deux applications non nulles f_a et f_b dans $\mathbb{R}^X$ telles que $f_a\,f_b = 0$.
2. Est-ce que $\mathbb{R}^X$ est un corps ?

p.884

Exercice 21 On peut munir l'ensemble $\mathbb{K} = \{0,1\}$ des lois $+$ et $\times$ définies par les tables suivantes :

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

(ce sont les lois usuelles, hormis la relation $1+1=0$).

Vérifier que $(\mathbb{K},+,\times)$ est un corps dans lequel chaque élément est son propre symétrique pour l'addition.

IV Espaces vectoriels

Définition 13

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un ensemble. On appelle **loi externe** de $\mathbb{K}$ sur E toute application de $\mathbb{K} \times E$ dans E. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on note en général $\lambda.x$ l'image de (λ, x) par cette application.

Définition 14

Soit $\mathbb{K}$ un corps. On appelle **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel, tout ensemble E muni :

- d'une loi interne $+$ telle que $(E, +)$ soit un groupe commutatif,
- d'une loi externe de $\mathbb{K}$ sur E vérifiant les 4 propriétés :
  - $\forall x \in E \quad 1_{\mathbb{K}}.x = x$;
  - $\forall x \in E \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$;
  - $\forall (x, y) \in E^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$;
  - $\forall x \in E \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad (\lambda\,\mu).x = \lambda.(\mu.x)$.

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle **vecteurs** les éléments de E et **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$.

La structure d'espace vectoriel, très importante en mathématiques, sera étudiée en détail lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dans le chapitre 19.

V Exemple : une construction de $\mathbb{C}$

À titre d'application de ce qui précède, et pour apprendre à manipuler les notions qui ont été introduites dans ce chapitre, le lecteur est invité à étudier l'exemple suivant, qui donne une construction du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. La construction étant non exigible, il pourra se contenter de traiter, sous forme d'exercices, la partie V.1.

On définit dans $\mathbb{R}^2$ deux lois de composition interne, notées $\oplus$ et $\otimes$, et respectivement appelées addition et multiplication, en posant pour tous réels x, y, x' et y' :

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$$
$$(x, y) \otimes (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y).$$

1 Structure d'anneau commutatif

p.884 **Exercice 22** Montrer que $\mathbb{R}^2$ muni de la loi $\oplus$ est un groupe commutatif.

Attention La multiplication $\otimes$ définie ici sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas la multiplication terme à terme. Le fait que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ soit un anneau n'est donc pas un cas particulier de l'exercice 2 de la page 872.

p.884 **Exercice 23** Déterminer l'élément neutre pour $\otimes$.

p.884 **Exercice 24**

Qu'est-ce qui permet, sans calcul, de voir que la loi $\otimes$ est commutative sur $\mathbb{R}^2$?

L'associativité de la multiplication n'est pas difficile : elle résulte d'un calcul élémentaire quoiqu'un peu pénible.

p.884 **Exercice 25** Si $(x,y,x',y',x'',y'') \in \mathbb{R}^6$, vérifier que $(x,y) \otimes \big((x',y') \otimes (x'',y'')\big)$ et $\big((x,y) \otimes (x',y')\big) \otimes (x'',y'')$ sont égaux.

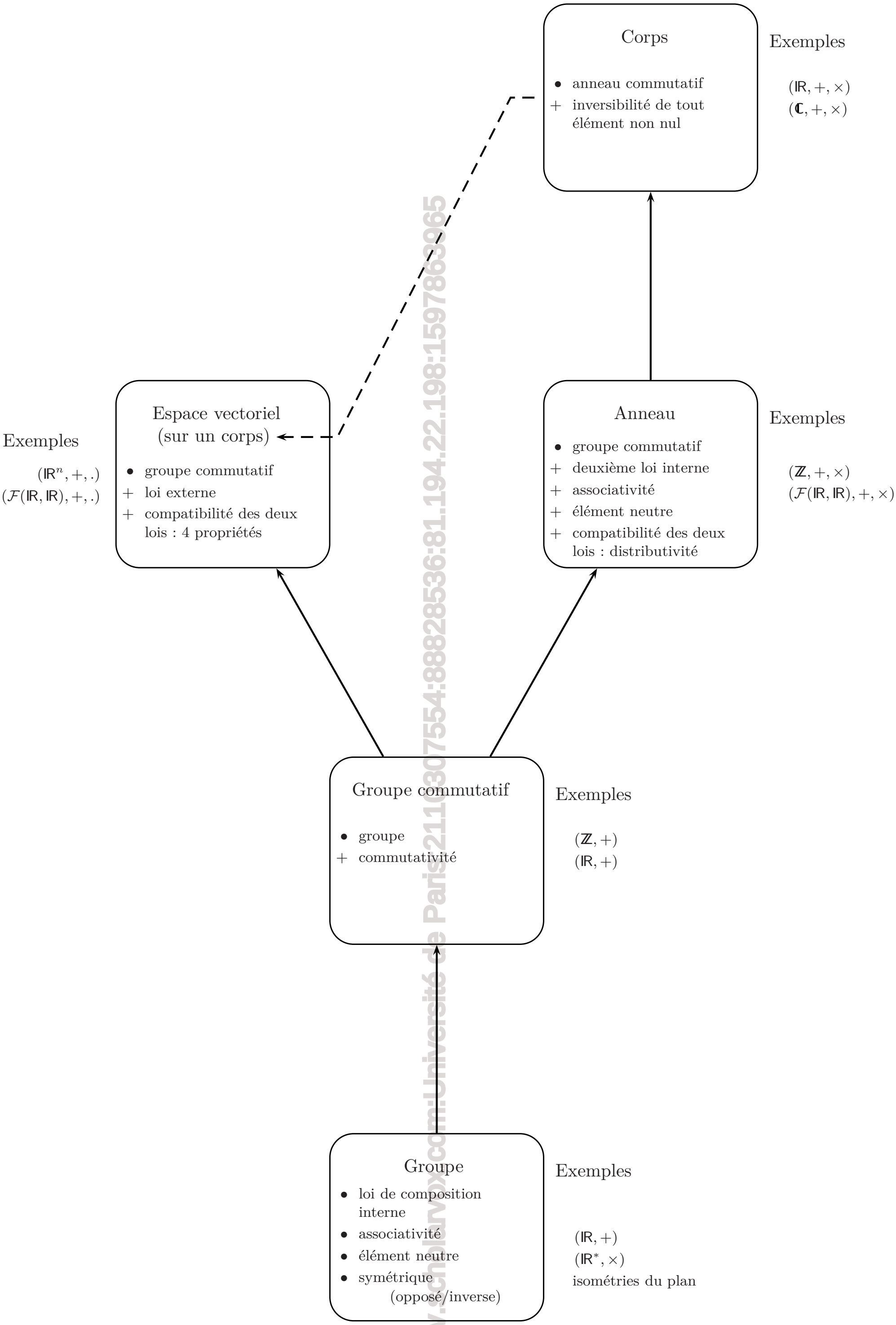
p.884 **Exercice 26** Montrer que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

p.884 **Exercice 27**

Soit $(x,y) \neq (0,0)$. Trouver un élément $(x',y') \in \mathbb{R}^2$, inverse de (x,y) pour $\otimes$.

2 Notation définitive

On définit donc $\mathbb{C}$ comme l'anneau $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$, dont les éléments sont appelés nombres complexes, et l'on cherche à retrouver l'écriture habituelle $x + iy$ pour l'élément (x,y). Il faut, pour cela, que $\mathbb{R}$ soit une partie de $\mathbb{C}$, ce qui n'est évidemment pas le cas. Nous allons donc faire ce que l'on appelle une **identification** : on identifie tout réel x au complexe $(x,0)$.
Il est nécessaire, pour cela, que les éléments $x \in \mathbb{R}$ et $(x,0) \in \mathbb{C}$ se « comportent de la même façon » vis-à-vis des opérations de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$. C'est le cas, puisque, pour tous x et x' réels, on a $(x,0) \oplus (x',0) = (x+x',0)$ et $(x,0) \otimes (x',0) = (x\,x',0)$.
Il ne reste plus qu'à poser $i = (0,1)$. Comme $(0,1) \otimes (0,1) = (-1,0)$, on a donc $i^2 = -1$ par l'identification précédente.
On voit alors que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{C}$, on a $(x,y) = (x,0) \oplus \big((0,1) \otimes (y,0)\big)$, soit $(x,y) = x \oplus i \otimes y$ après identification.
En notant plus simplement $+$ et $\times$ les opérations de $\mathbb{C}$, on retrouve bien l'ensemble des nombres complexes qui a été étudié au chapitre 3.


Corps
• anneau commutatif
+ inversibilité de tout élément non nul
Exemples
$(\mathbb{R},+,\times)$
$(\mathbb{C},+,\times)$
Espace vectoriel (sur un corps)
• groupe commutatif
+ loi externe
+ compatibilité des deux lois : 4 propriétés
Exemples
$(\mathbb{R}^n,+,.)$
$(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,.)$
Anneau
• groupe commutatif
+ deuxième loi interne
+ associativité
+ élément neutre
+ compatibilité des deux lois : distributivité
Exemples
$(\mathbb{Z},+,\times)$
$(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\times)$
Groupe commutatif
• groupe
+ commutativité
Exemples
$(\mathbb{Z},+)$
$(\mathbb{R},+)$
Groupe
• loi de composition interne
• associativité
• élément neutre
• symétrique (opposé/inverse)
Exemples
$(\mathbb{R},+)$
$(\mathbb{R}^*,\times)$
isométries du plan

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

1. On prend pour f_a l'application constante $x \mapsto a$ et pour f_b l'application constante $x \mapsto b$. Alors :
$$\forall x \in E \quad (f_b \circ f_a)(x) = f_b\big(f_a(x)\big) = f_b(a) = b$$
et de même $\forall x \in E \quad (f_a \circ f_b)(x) = a$.
En particulier, $(f_b \circ f_a)(a) = b \neq a = (f_a \circ f_b)(a)$, donc $f_b \circ f_a \neq f_a \circ f_b$.
2. Supposons que E contienne au moins 3 éléments distincts a, b et c. On prend l'application f qui échange a et b et laisse invariants les autres éléments de E et l'application g qui échange b et c et laisse invariants les autres éléments de E. Ce sont des bijections de E dans E (chacune est sa propre réciproque puisqu'il est immédiat que $f \circ f = g \circ g = \mathrm{Id}_E$) et l'on a :
$$(g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big) = g(b) = c \qquad \text{et} \qquad (f \circ g)(a) = f\big(g(a)\big) = f(a) = b$$
donc $g \circ f \neq f \circ g$.
Lorsque E n'a que deux éléments a et b, il n'y a que deux bijections de E dans E : l'identité et l'application qui échange a et b. Il est alors évident que $\mathfrak{S}_E$ est commutatif.

Exercice 2

- E est bien régulier puisque $\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad A \cap E = A$ et donc :
$$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2 \quad A \cap E = B \cap E \Longrightarrow A = B$$
(ce qui suffit puisque la loi est commutative).
- Soit A une partie de E différente de E. L'égalité $A \cap (E \setminus A) = A \cap \varnothing$, avec $E \setminus A \neq \varnothing$, montre que A n'est pas régulier.

Proposition 1 Comme e est élément neutre, on a $e * e' = e'$ et de même $e * e' = e$ puisque e' est élément neutre. On en déduit $e = e'$.

Exercice 3 Supposons qu'il existe un élément neutre e dans $\mathbb{N}^*$. Alors, en particulier, $e + 1 = 1$, ce qui donne $e = 0$ par les règles de calcul dans $\mathbb{N}$ (tout élément est régulier pour l'addition). Il y a donc une contradiction.

Exercice 4 Soit e l'élément neutre de $(E,*)$. Alors, pour tout $(x,y) \in E^2$, on a $e * x = x$ et $e * y = y$, donc :
$$e * x = e * y \Longrightarrow x = y.$$

Remarque L'exercice 2 est un cas particulier de ce résultat.

Exercice 5

(7) : $\varnothing$ est neutre pour $\cap$	(8) : E est neutre pour $\cup$
(9) : la réunion est commutative	(10) : l'intersection est commutative
(11) : la réunion est associative	(12) : l'intersection est associative
(13) : $\cap$ est distributive par rapport à $\cup$	(14) : $\cup$ est distributive par rapport à $\cap$

Proposition 2 Soit y et z de E tels que $x * y = z * x = e$. Alors :

$$z * (x * y) = z * e = z \qquad \text{et} \qquad (z * x) * y = e * y = y$$

et par associativité de la loi, on en déduit $y = z$.

Exercice 6 Une application f de E dans E est symétrisable, de symétrique g si, et seulement si, $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}_E$, c'est-à-dire si, et seulement si, f est bijective et admet pour réciproque g. Son symétrique est alors cette réciproque.

Proposition 4 Soit x inversible et y son symétrique.

Soit $(a, b) \in E^2$. On a :

$$y * (x * a) = (y * x) * a = e * a = a$$

et de même $y * (x * b) = b$.

On en déduit donc que si $x * a = x * b$, alors $a = b$.

On démontre de même l'implication $a * x = b * x \Longrightarrow a = b$.

Exercice 7 D'après l'exercice 2 de la page 866, seul E est régulier pour l'intersection. Comme il s'agit d'une loi de composition interne associative, la proposition précédente prouve qu'il ne peut pas y avoir d'autre élément symétrisable.

Exercice 8 On a immédiatement $\forall n \in \mathbb{N} \quad n+1 \geqslant 1 > 0$, donc 1 n'admet pas d'opposé dans $\mathbb{N}$ alors qu'il est régulier, comme tout élément de $(\mathbb{N}, +)$.

Proposition 5 Fixons $q \in \mathbb{N}$.

Montrons, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, la propriété H_p : « $x^{p+q} = x^p * x^q$ ».

- H_0 est immédiat puisque $x^0 = e$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$. Par définition, on a $x^{p+1+q} = x * x^{p+q}$ et $x^{p+1} * x^q = x * x^p * x^q$ (l'associativité permet de ne pas écrire les parenthèses). Donc il est clair que $H_p \Rightarrow H_{p+1}$.

Pour la deuxième formule, la démarche est la même puisque, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$:

$$(x^p)^{q+1} = x^p * (x^p)^q \qquad \text{et} \qquad x^{p(q+1)} = x^{pq+p} = x^p * x^{pq}$$

ce qui permet, à p fixé, de montrer facilement la propriété $(x^p)^q = x^{pq}$ par récurrence sur q.

Par passage à l'inverse, on en déduit les résultats pour p et q entiers relatifs quelconques si x est inversible.

Exercice 9 Soit $a \in E$. L'application constante $x \mapsto a$ n'est pas surjective si E possède au moins deux éléments, donc non bijective. L'exercice 6 montre alors qu'elle n'est pas inversible.

Proposition 6 L'exemple 4 de la page 865 montre que la composition des applications est un loi de composition interne associative sur $\mathfrak{S}_E$. L'identité est évidemment élément neutre et toute bijection de E dans E est inversible, avec pour inverse, son application réciproque.

L'exercice 1 montre que ce groupe n'est pas commutatif si E a au moins trois éléments.

Exercice 10

1. Soit f et g dans G^A. Par définition, $f * g$ est une application de A dans G, donc $*$ est bien une loi de composition interne sur G^A.
   L'application constante $\hat{e} : x \mapsto e$, où e est l'élément neutre de G vérifie :
   $$\forall f \in G^A \quad \forall x \in A \quad (f * \hat{e})(x) = f(x) * e = f(x) = (\hat{e} * f)(x)$$
   donc $\hat{e}$ est neutre dans G^A.
   Enfin, si $f \in G^A$, l'application $g : x \mapsto f(x)^{-1}$ vérifie $f * g = g * f = \hat{e}$. Donc f est inversible, d'inverse g.
2. Si G est commutatif, il est immédiat que le groupe G^A est aussi commutatif, puisque, pour tous f et g dans G^A, on a :
   $$\forall x \in A \quad f(x) * g(x) = g(x) * f(x), \quad \text{c'est-à-dire} \quad f * g = g * f.$$
   Réciproquement, supposons $(G^A, *)$ commutatif. Soit $(g_1, g_2) \in G^2$; considérons les applications constantes $f_1 : x \mapsto g_1$ et $f_2 : x \mapsto g_2$ définies sur A. Comme A est supposé non vide, on peut fixer x_0 dans A. En appliquant l'égalité $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ (qui vient de la commutativité de G^A) au point x_0, on obtient $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$.
   Donc G est commutatif.

Exercice 11

- Ce n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, puisqu'il ne contient pas son élément neutre 0.
- Ce n'est pas non plus un sous-groupe de $(\mathbb{R}, \times)$, puisque ce dernier n'est pas un groupe !
- En revanche, c'est bien un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Proposition 7 Soit H un sous–groupe d'un groupe G.

- La restriction de la loi de G à H (qui est stable par hypothèse) est évidemment associative.
- L'élément neutre de G est aussi le neutre de H.
- Si $x \in H$, son inverse x^{-1} dans G appartient à H et est alors évidemment aussi son inverse dans H.

Exercice 12 On rappelle que les similitudes directes du plan sont les applications représentées dans le plan complexe par une application du type $z \mapsto a\,z + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. C'est une bijection du plan dont la réciproque est représentée par l'application $z \mapsto (z - b)/a$ qui est donc aussi une similitude directe.

Donc l'ensemble des similitudes directes du plan est une partie du groupe des permutations du plan. Montrons qu'il en constitue un sous-groupe.

- L'identité est une similitude directe puisqu'elle est représentée par $z \mapsto z$.
- Si f et g sont deux similitudes directes, représentées respectivement par :
  $$z \mapsto a\,z + b \qquad \text{et} \qquad z \mapsto \alpha\,z + \beta,$$
  alors $g \circ f$ est représentée par $z \mapsto \alpha\,(a\,z + b) + \beta = \alpha\,a\,z + \alpha\,b + \beta$ donc est une similitude directe puisque $\alpha\,b + \beta \in \mathbb{C}$ et $\alpha\,a \in \mathbb{C}^*$ comme produit de deux nombres complexes non nuls.
- Enfin, on a vu que la réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.

Exercice 13

D'après l'exercice 10, on sait que $(\mathbb{R}^X,+)$ est un groupe commutatif dont l'élément neutre est l'application nulle.

La multiplication est associative sur $\mathbb{R}^X$ par associativité de la multiplication de $\mathbb{R}$. En effet, soit f et g dans $\mathbb{R}^X$. On a, pour tout $x \in X$:

$$f(x)\big(g(x)\,h(x)\big) = \big(f(x)\,g(x)\big)\,h(x) \qquad \text{soit} \qquad \big(f\,(g\,h)\big)(x) = \big((f\,g)\,h\big)(x).$$

La distributivité se démontre de la même façon à partir de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$.

Enfin, l'application constante $x \mapsto 1$ est élément neutre pour la multiplication.

Exercice 14 La loi $\circ$ n'est pas distributive par rapport à $+$:

- par définition de $f+g$, on a bien l'égalité $(f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h$,
- mais la relation $f\circ(g+h) = f\circ g + f\circ h$ n'est pas vraie en général (prendre par exemple $f=1$).

Exercice 15 Il faut évidemment montrer tout d'abord que l'addition et la multiplication sont des lois internes sur $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ est stable par addition et multiplication. C'est justement le résultat de la proposition 35 de la page 508.

Le même résultat prouve que si $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, alors $-f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$. Comme de plus, la fonction nulle est continue, on en déduit $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\big(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),+\big)$, donc un groupe commutatif.

La multiplication est associative et distributive par rapport à l'addition sur $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ comme elle l'est sur $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

Enfin, la fonction constante égale à 1 est élément neutre pour la multiplication.

Finalement, $\big(\mathcal{C}(I,\mathbb{R}),+,\times\big)$ est un anneau.

Proposition 8

- Pour $a \in A$, on a $a\times 0 + a\times 0 = a\times(0+0) = a\times 0 = a\times 0 + 0$.

  Puisque $(A,+)$ est un groupe, on peut simplifier par $a\times 0$, ce qui donne $a\times 0 = 0$.

  Raisonnement analogue pour montrer $0\times a = 0$.
- Soit $(a,b)\in A^2$. Montrons que $a\times(-b)$ et $a\times b$ sont opposés :

  $$a\times(-b) + a\times b = a\times(b-b) = a\times 0 = 0.$$

  Donc $a\times(-b) = -(a\times b)$. On prouve de même $(-a)\times b = -(a\times b)$.

Exercice 16 Pour tout $x\in A$, on a $x = 1_A\,x = 0_A\,x = 0_A$ et donc $A = \{0_A\}$.

Exercice 17 Prendre, par exemple, les applications :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{array}$$

Proposition 10 Soit G l'ensemble des unités de A.

- G est stable par $\times$ car si $(u,v) \in G^2$, alors $u\,v$ est inversible, d'inverse $v^{-1}\,u^{-1}$.
- $\times$ est associative sur A donc aussi sur G.
- 1_A est une unité ; c'est le neutre de G.
- Si $u \in G$, alors $u^{-1} \in G$ car u^{-1} est inversible d'inverse u.

Donc G est un groupe.

Exercice 18

1. C'est un cas particulier de l'exemple 2 de la page 872.
2. Un élément (x_1, y_1) est inversible si, et seulement s'il existe (x_2, y_2) tel que $(x_1\,x_2, y_1, y_2) = (1,1)$. Cela implique que x_1 et y_1 soient non nuls.

   Réciproquement, si x_1 et y_1 sont non nuls, alors le couple $(x_2, y_2) = (\frac{1}{x_1}, \frac{1}{y_1})$ convient.

   Le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ est donc $G = \big((\mathbb{R}^*)^2, \times\big)$.
3. Montrons que $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est un sous-groupe de G. Il est bien inclus dans G, contient l'élément neutre $(1,1)$ et est stable :
   - par produit, puisque $(x_1\,x_2, y_1\,y_2)$ appartient à $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dès que (x_1, y_1) et (x_2, y_2) appartiennent à $(\mathbb{R}_+^*)^2$,
   - par passage à l'inverse, puisque si $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, alors il en est de même de $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$.
4. On ne peut pas montrer que $\big(\mathbb{R}^* \times \{0\}, \times\big)$ est un sous-groupe de G puisqu'il n'est pas inclus dans G. En revanche, il est facile de vérifier qu'il s'agit d'un groupe : son élément neutre est $(1,0)$ et le symétrique de tout élément $(x,0)$, avec $x \neq 0$, est $(\frac{1}{x}, 0)$.

Exercice 19

- Il est nécessaire que f ne s'annule pas pour pouvoir trouver g telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)\,g(x) = 1.$$
- C'est suffisant, puisqu'alors $1/f \,:\, x \mapsto 1/f(x)$ convient.

Proposition 11 Soit x et y deux éléments d'un corps $\mathbb{K}$.

- On sait déjà (c'est vrai dans tout anneau) que si $x = 0$ ou $y = 0$, alors $x\,y = 0$.
- Supposons $x \neq 0$, donc inversible puisque $\mathbb{K}$ est un corps. Si $x\,y = 0$, alors :
$$y = 1 \times y = (x^{-1}\,x) \times y = x^{-1} \times 0 = 0.$$

Exercice 20

1. Les fonctions indicatrices de $\{a\}$ et $\{b\}$ sont non nulles mais leur produit est nul.
2. $\mathbb{R}^X$ n'est donc pas un corps d'après la proposition 11.

Exercice 21 On a bien défini ainsi deux lois de composition interne sur $\mathbb{K}$.

Montrons que $(\mathbb{K},+)$ est un groupe commutatif.

- La commutativité est évidente.
- 0 est élément neutre.
- La relation $a+(b+c)=(a+b)+c$ est immédiate si $a=0$ ou $b=0$ ou $c=0$.
  Lorsque $a=b=c=1$, on a $a+(b+c)=1+0=0+1=(a+b)+c$.
  Donc l'addition est associative.
- On vérifie que pour chacun des deux éléments x de $\mathbb{K}$, on a $x+x=0$, donc que x est son propre symétrique.

On démontre, de même, l'associativité et la commutativité de la multiplication.

L'égalité $a\,(b+c)=a\,b+a\,c$ est immédiate lorsque $a=0$ et lorsque $a=1$. D'où la distributivité.

Enfin, $\mathbb{K}$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et le seul élément non nul de $\mathbb{K}$ est 1 qui est inversible (égal à son inverse).

Exercice 22 C'est un cas particulier de l'exemple 3 de la page 870.

Exercice 23 L'élément $(1,0)$ est neutre pour la multiplication, car :

$$\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2 \quad (x,y)\otimes(1,0)=(1,0)\otimes(x,y)=(x,y).$$

Exercice 24
La symétrie en (x,y) et (x',y') du produit $(x,y)\otimes(x',y')=(xx'-yy',xy'+x'y)$, montre la commutativité de $\otimes$.

Exercice 25 On trouve qu'ils sont tous les deux égaux à :

$$(xx'x''-yx'y''-yy'x''-xy'y'',yx'x''+xx'y''+xy'x''-yy'y'').$$

Exercice 26 On vérifie, pour tout $(x,y,x',y',x'',y'')\in\mathbb{R}^6$:

$$\begin{aligned}(x,\,y)\otimes\big((x',y')\oplus(x'',y'')\big)&=(xx'-yy'+xx''-yy'',yx'+xy'+yx''+xy'')\\&=\big((x,y)\otimes(x',y')\big)\oplus\big((x,y)\otimes(x'',y'')\big).\end{aligned}$$

Exercice 27 Il suffit, évidemment, de « deviner » un tel couple (x',y'). En anticipant sur ce qui va suivre, si l'on a compris que le couple (x,y) doit représenter le nombre complexe $x+i\,y$, on voit qu'il suffit de prendre $x'=\frac{x}{x^2+y^2}$ et $y'=-\frac{y}{x^2+y^2}$ et le calcul permet de vérifier qu'il convient effectivement.

Sinon, il suffirait de résoudre, en (x',y'), le système $\left\{\begin{array}{l}x\,x'-y\,y'=1\\ y\,x'+x\,y'=0\end{array}\right.$ dont le déterminant $\begin{vmatrix}x & -y\\ y & x\end{vmatrix}=x^2+y^2>0$ est non nul, et qui admet donc une (unique) solution.

Chapitre 17 : Polynômes

I Anneau des polynômes à une indéterminée . . . 886
1 Construction de l'ensemble des polynômes 886
2 L'anneau des polynômes à une indéterminée 888
3 Degré d'un polynôme 889
4 Évaluation en un point 892
5 Composition 892
6 Représentation informatique des polynômes 893
II Divisibilité et division euclidienne 894
1 Multiples, diviseurs 894
2 Division euclidienne sur $\mathbb{K}[X]$ 895
III Fonctions polynomiales et racines 896
1 Fonction polynomiale 896
2 Racines 897
3 Formule d'interpolation de Lagrange 899
4 Détermination d'un polynôme par sa fonction polynomiale 901
5 Ordre de multiplicité d'une racine 902
6 Relations entre coefficients et racines 904
IV Dérivation 906
1 Polynôme dérivé 906
2 Dérivées successives, formule de Taylor 907
3 Caractérisation de l'ordre d'une racine 909
V Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ 910
1 Théorème de d'Alembert 910
2 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ 910
3 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ 911
VI Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ 912
1 PGCD 912
2 Caractérisation du PGCD 913
3 Algorithme d'Euclide 914
4 Coefficients de Bézout 915
5 Polynômes premiers entre eux 916
6 Extension à un nombre fini de polynômes 917
7 PPCM 918
8 Théorème de Gauss 919
9 Polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ 920
VII Une preuve du théorème de d'Alembert 922
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 924
Exercices 943

Polynômes

17

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Anneau des polynômes à une indéterminée

1 Construction de l'ensemble des polynômes

Cette construction n'est pas exigible des étudiants. Dans une première lecture, il est possible de passer directement à la partie I.2 de la page 888 et d'admettre les résultats énoncés.

Définition 1

On appelle **polynôme à une indéterminée** à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute suite presque nulle d'éléments de $\mathbb{K}$, c'est-à-dire toute suite d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang.

Notation

- Si $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un polynôme à **coefficients** dans $\mathbb{K}$, alors :

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall k > n \quad a_k = 0.$$

  On note $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$, et les nombres $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ 0,\ \ldots$ sont appelés **coefficients du polynôme** A.

- On désigne par 0 **le polynôme nul**, c'est-à-dire le polynôme associé à la suite nulle $(0, 0, \ldots)$.

Remarque Avec cette définition, il est immédiat que deux polynômes sont égaux si, et seulement s'ils ont les mêmes coefficients.

Proposition 1

Soit A et B des polynômes, λ un élément de $\mathbb{K}$. Les suites $S=(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $P=(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q=(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

- $\forall k\in\mathbb{N}\quad s_k=a_k+b_k$;
- $\forall k\in\mathbb{N}\quad q_k=\lambda\, a_k$;
- $\forall k\in\mathbb{N}\quad p_k=\sum\limits_{i=0}^{k} a_i\, b_{k-i}=\sum\limits_{i+j=k} a_i\, b_j$

sont des polynômes notés respectivement $A+B$, λA et $A\times B$ (ou $A B$).

Principe de démonstration. Il s'agit de prouver que les suites S, Q et P sont presque nulles en utilisant le fait qu'il existe des entiers naturels n et m tels que $\forall k>n\quad a_k=0$ et $\forall k>m\quad b_k=0$. En particulier, pour le produit, on prouvera que $\forall k>n+m\quad p_k=0$.

Démonstration page 924

Anneau des polynômes

Proposition 2

Muni de l'addition et de la multiplication, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un anneau commutatif.

Principe de démonstration. On vérifie que l'addition et la multiplication satisfont toutes les propriétés requises et en particulier, que les polynômes $(0,0,0,\ldots)$ et $(1,0,0,\ldots)$ sont les éléments neutres respectivement pour l'addition et la multiplication. Démonstration page 924

Attention La multiplication définie dans $\mathbb{K}[X]$ n'est pas la multiplication terme à terme des suites définie dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On verra plus tard une justification du choix de ce produit.

Notation En posant $X=(0,1,0,0,\ldots)$, on vérifie par récurrence sur $k\in\mathbb{N}^*$, que l'on a :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*\quad X^k=(\underset{\substack{\uparrow\\0}}{0},\underset{\substack{\uparrow\\1}}{0},0,\ldots,0,\underset{\substack{\uparrow\\k}}{1},0,\ldots).$$

En utilisant la convention usuelle dans les anneaux, on pose $X^0=(1,0,0,\ldots)$. On peut alors écrire :

$$A=(a_0,a_1,\ldots,a_n,0,0,\ldots)=\sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k.$$

où X s'appelle **l'indéterminée.**

2 L'anneau des polynômes à une indéterminée

Avec la notation qui vient d'être mise en place, on peut réécrire les définitions et propriétés vues précédemment.

- Si $p \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_p$ sont des éléments de $\mathbb{K}$, alors $\sum\limits_{k=0}^{p} a_k\, X^k$ est appelé **polynôme à une indéterminée** à coefficients dans $\mathbb{K}$.

  Pour un polynôme $A = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k\, X^k$, on complète parfois la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des **coefficients** de A en posant $a_n = 0$ si $n > p$. On peut alors écrire :
  $$\sum_{k=0}^{p} a_k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k.$$
  Malgré son apparence, cette dernière somme est une somme finie, car il n'y a qu'un nombre fini de coefficients a_k non nuls. Cette écriture s'avère pratique lorsqu'on ne veut pas particulariser un rang à partir duquel la suite est nulle, par exemple pour faire la somme de deux polynômes.

- Si $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ sont deux polynômes, alors :
  $$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \iff (\forall k \in \mathbb{N} \quad a_k = b_k).$$
  En particulier, le polynôme $A = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k\, X^k$ est nul si, et seulement si, tous les coefficients a_k sont nuls.

- Si $A = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, X^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $B = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k\, X^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$, alors :
  $$A + B = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k)\, X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k.$$

- Si $A = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, X^k$ et $B = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k\, X^k$, alors :
  $$A\,B = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i\, b_j \right) X^k = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i\, b_j\, X^{i+j} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i\, b_j \right) X^k.$$

- Si $A = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, X^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :
  $$\lambda A = \sum_{k=0}^{n} \lambda\, a_k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda\, a_k X^k.$$

Notation

On désigne par $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

999

Remarque Muni des opérations précédemment définies, on a vu à la proposition 2 de la page 887 que $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau commutatif. On montre de façon analogue que $(\mathbb{K}[X],+,.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 2

On appelle **polynôme constant** tout polynôme de la forme λX^0, avec $\lambda \in \mathbb{K}$, c'est-à-dire tout polynôme dont les coefficients sont nuls à partir du rang 1.

Inclusion de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}[X]$

Dans l'ensemble des polynômes constants, l'addition et la multiplication des polynômes ont « le même effet » que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{K}$. On identifie alors l'élément λ de $\mathbb{K}$ avec le polynôme constant dont les coefficients sont $(\lambda,0,0,\ldots)$, soit encore λX^0 ce qui permet d'écrire :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 X^0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n.$$

Multiplier un polynôme P par un élément λ de $\mathbb{K}$ revient à multiplier ce polynôme par le polynôme constant λ, puisque $(\lambda X^0)\, P = \lambda P$.

Inclusion de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{C}[X]$

Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ peut aussi être vu comme un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$. On a donc $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

3 Degré d'un polynôme

Soit A un polynôme non nul. L'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, majorée puisque la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang ; cet ensemble admet donc un plus grand élément. Cela nous conduit à la définition suivante.

Définition 3

Soit $A = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit le **degré** de A, noté $\deg(A)$ ou $\deg A$ par :

$$\deg(A) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}.$$

Par convention, on pose $\deg 0 = -\infty$.

Remarques et définitions

- Si $A \in \mathbb{K}[X]$ et $A \neq 0$, alors $\deg A \in \mathbb{N}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Un polynôme qui s'écrit $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, X^k$ est de degré inférieur ou égal à n, évidemment avec la convention $-\infty \leqslant n$.

  Il est de degré n si, et seulement si, $a_n \neq 0$. Dans ce cas, le coefficient a_n s'appelle le **coefficient dominant** du polynôme.
- Un polynôme (non nul) dont le coefficient dominant est égal à 1 est appelé **polynôme unitaire**.

Proposition 3

Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On a :

- $\deg(A+B) \leqslant \max(\deg A, \deg B)$;

  de plus, si $\deg A \neq \deg B$, alors $\deg(A+B) = \max(\deg A, \deg B)$;
- $\deg(A\,B) = \deg A + \deg B$.

Principe de démonstration. Distinguer d'abord le cas où A ou B est nul.

- Pour la somme, poser $n = \max(\deg A, \deg B) \in \mathbb{N}$ et montrer que les coefficients de $A+B$ sont nuls à partir du rang n ; étudier de plus près le coefficient $a_n + b_n$ de X^n.
- Pour le produit, si l'on pose $p_0 = \deg A$ et $q_0 = \deg B$, on a déjà montré que les coefficients de AB sont nuls à partir du rang $p_0 + q_0 + 1$. Il reste à déterminer le coefficient de $X^{p_0+q_0}$ et prouver qu'il est non nul. Démonstration page 924

p.925 **Exercice 1** Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathbb{K}[X]$. A-t-on $\deg(\lambda\, A) = \deg A$?

Remarque Plus généralement, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, alors :

$$\deg(\lambda\, A + \mu\, B) \leqslant \max(\deg A, \deg B).$$

Notation Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \in \mathbb{K}_n[X]$ puisque $-\infty \leqslant n$.

Proposition 4

Soit A et B des polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$. On a alors :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \lambda A + \mu B \in \mathbb{K}_n[X].$$

Démonstration. Cela résulte immédiatement des propriétés sur les degrés. □

1001 **Remarque** Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 5

Le produit de deux polynômes non nuls est non nul. Autrement dit :

$$\forall (A,B) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad A\,B = 0 \Longrightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0).$$

Démonstration. La formule $\deg(A\,B) = \deg A + \deg B$ entraîne immédiatement :

$$(A \neq 0 \quad \text{et} \quad B \neq 0) \Longrightarrow A\,B \neq 0.$$

La deuxième formulation se déduit par contraposée de la première. □

Remarque On traduit le résultat précédent en disant que l'anneau commutatif $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est **intègre** .

Corollaire 6

$$\forall (A,B,C) \in \mathbb{K}[X]^3 \quad (AC = BC \quad \text{et} \quad C \neq 0) \Longrightarrow A = B.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire $AC = BC$ sous la forme $(A-B)C = 0$ et d'appliquer la proposition 5 □

Remarque Tout polynôme non nul est donc **simplifiable** ou **régulier**.

Proposition 7

Les éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes de degré 0, soit encore les polynômes constants non nuls.

Principe de démonstration. Que peut-on dire du degré d'un polynôme A pour lequel il existe un polynôme $B \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $AB = 1$? Démonstration page 925

Point méthode

- Soit $A = \sum\limits_{k=0}^{r} A_k$ où tous les A_k sont de polynômes de degré au plus n.
  - $*$ On peut alors en déduire $\deg A \leqslant n$.
  - $*$ Même si tous les A_k sont de degré n, on ne peut pas *a priori* dire mieux.
    Si l'on veut prouver $\deg A = n$, on doit étudier le coefficient de X^n.
- Si $A = \prod\limits_{k=0}^{r} A_k$ alors on a directement $\deg A = \sum\limits_{k=0}^{r} \deg A_k$.

p.925 **Exercice 2** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré du polynôme $\prod\limits_{k=1}^{n} (X - 2k + 1)^k$.

p.925 **Exercice 3** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de :

$$P = (X-2)^n - (X+5)^n.$$

4 Évaluation en un point

Définition 4

Soit $A = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On pose $A(\alpha) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \alpha^k$. Alors :

- $A(\alpha) \in \mathbb{K}$.
- Il s'agit en fait d'une somme finie ; plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant \deg A \Longrightarrow A(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k.$$

Pour obtenir $A(\alpha)$, on dit que l'on **substitue** α à X, ou encore que l'on **évalue** A en α.

Proposition 8

Soit A et B des éléments de $\mathbb{K}[X]$ ainsi que α, λ et μ des éléments de $\mathbb{K}$. On a :

- $(\lambda\, A + \mu\, B)(\alpha) = \lambda\, A(\alpha) + \mu\, B(\alpha)$;
- $(A\, B)(\alpha) = A(\alpha)\, B(\alpha)$.

Principe de démonstration. Il s'agit d'utiliser les règles de calcul dans $\mathbb{K}$, en particulier les règles de manipulation de $\sum$. Démonstration page 925

Remarque La définition du produit sur $\mathbb{K}[X]$ a justement été choisie pour avoir ce résultat concernant les évaluations d'un produit.

5 Composition

Définition 5

Soit $A = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

On pose $A \circ P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k\, P^k$. Alors :

- $A \circ P \in \mathbb{K}[X]$.
- Il s'agit en fait d'une somme finie ; plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant \deg A \Rightarrow A \circ P = A(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, P^k.$$

Attention Comme $P^0 = 1$, pour tout entier naturel $n \geqslant \deg A$, on a :

$$A \circ P = A(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, P^k = a_0 + a_1 P + \cdots + a_n P^n.$$

Remarques

- Dans le cas particulier où $P = X$, le polynôme $A(P) = A(X)$ est donc égal à A, c'est pourquoi on utilise aussi bien A que $A(X)$ pour désigner ce dernier polynôme.
- On a des résultats analogues à ceux de la proposition 8 de la page ci-contre, à savoir pour $(A, B, P) \in (\mathbb{K}[X])^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:
$$(\lambda\, A + \mu\, B)(P) = \lambda\, A(P) + \mu\, B(P) \quad \text{et} \quad (A\, B)(P) \quad = A(P)\, B(P)$$
qui se démontrent de façon similaire.

p.926

Exercice 4 On dit qu'un polynôme A est **pair** si $A\,(-X) = A\,(X)$ et **impair** si $A\,(-X) = -A\,(X)$.

Comment caractériser la parité (respectivement l'imparité) d'un polynôme à l'aide de ces coefficients ?

p.926

Exercice 5 Soit A un polynôme et P un polynôme non constant. Quel est le degré de $A \circ P$ en fonction de ceux de A et de P ?

6 Représentation informatique des polynômes

En informatique, pour représenter un polynôme, on peut utiliser un tableau indexé à partir de 0, la case numéro i contenant le coefficient de X^i.

Un tableau indexé de 0 à n, peut représenter n'importe quel polynôme de degré inférieur ou égal à n, les cases dont les indices sont les plus grands pouvant éventuellement être nulles.

Ce n'est pas la seule représentation possible, ni la plus efficace (en particulier, un polynôme à plusieurs représentations), mais elle est assez simple à utiliser.

Opérations

À titre d'illustration, voici deux programmes, écrits en `Python 3`, permettant de calculer la somme et le produit de deux polynômes. On suppose disposer d'une fonction `deg` donnant le degré d'un polynôme, avec -1 comme degré du polynôme nul.

```
def somme(a,b):
    n_a = deg(a)
    n_b = deg(b)
    s = max(n_a+1,n_b+1)*[0]
    for i in range(deg(a)+1):
        s[i] = a[i]
    for i in range(deg(b)+1):
        s[i] += b[i]
    return s
```

```
def produit(a,b):
    n_a = deg(a)
    n_b = deg(b)
    p = (n_a+n_b+1)*[0]
    for i in range(n_a+1):
        for j in range(n_b+1):
            p[i+j] += a[i]*b[j]
    return p
```

II Divisibilité et division euclidienne

1 Multiples, diviseurs

Définition 6

Soit A et B des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que B **divise** A ou que A est **multiple** de B s'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BC$.

On dit aussi que B est **un diviseur** de A ou que A est **un multiple** de B.

On note alors $B \mid A$.

Exemple Le polynôme $(X-1)(X-2)$ divise $(X-1)^2(X-2)(X^2+X+1)$.

Remarque Si $B \mid A$ avec B non nul, alors $\deg A \geqslant \deg B$.
En effet, il existe un polynôme C non nul tel que $A = BC$, et donc :

$$\deg A = \deg B + \deg C \geqslant \deg B.$$

p.926 **Exercice 6** Quels sont les polynômes qui divisent 0 ? Qui sont divisibles par 0 ?

p.926 **Exercice 7** Le polynôme $(X-1)^2(X-2)$ divise-t-il $(X-1)(X-2)$?

Proposition 9

Étant donné des polynômes A et B, il est équivalent de dire :

(i) A divise B et B divise A ;

(ii) il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $A = \lambda B$.

Dans ce cas, A et B sont dits **associés**.

Principe de démonstration. Si $A = 0$, c'est immédiat. Sinon, si A divise B et B divise A, on écrit $A = BC_1$ et $B = AC_2$; on a alors $A = AC_1C_2$ et l'on conclut en utilisant le corollaire 6 de la page 891 et la proposition 7 de la page 891. La réciproque est immédiate.

Démonstration page 926

Remarques

1. Soit A, B et D des polynômes. On a alors :
$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad (D \mid A \quad \text{et} \quad D \mid B) \Longrightarrow D \mid PA + QB.$$

2. Soit A et B des polynômes. L'ensemble des diviseurs (respectivement multiples) de A est égal à l'ensemble des diviseurs (respectivement multiples) de B si, et seulement si, A et B sont associés, puisqu'alors A et B se divisent simultanément.

p.927 **Exercice 8** La relation de divisibilité est-elle une relation d'ordre dans $\mathbb{K}[X]$?

Remarque La relation de divisibilité restreinte à l'ensemble des polynômes unitaires est une relation d'ordre. En effet, comme deux polynômes unitaires associés sont égaux, la proposition 9 de la page précédente prouve l'antisymétrie, réflexivité et transitivité étant immédiates.

2 Division euclidienne sur $\mathbb{K}[X]$

Théorème 10

Soit A et B des polynômes avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$A = B\,Q + R \qquad \text{et} \qquad \deg R < \deg B.$$

On appelle Q le **quotient** et R le **reste** de la division euclidienne de A par B.

Déterminer le couple (Q, R) s'appelle « effectuer la division euclidienne de A par B ».

Principe de démonstration. Démonstration page 927

- Pour l'unicité, on suppose qu'il existe deux couples (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) vérifiant les conditions demandées et l'on étudie $\deg(R_2 - R_1)$.
- Pour l'existence, on fixe un polynôme B puis on prouve par récurrence la propriété H_n : « pour tout polynôme A de degré strictement inférieur à n, il existe un couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = B\,Q + R$ avec $\deg R < \deg B$. »

Proposition 11

Soit A et B des éléments de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Le polynôme B divise A si, et seulement si, le reste de la division de A par B est 0.

Démonstration page 927

p.928 **Exercice 9** Soit $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$. Montrer que l'équivalence suivante est vraie.

$$\big(\exists Q \in \mathbb{C}[X] \quad A = B\,Q\big) \iff \big(\exists Q_1 \in \mathbb{R}[X] \quad A = B\,Q_1\big).$$

Remarque Comme cela a été vu dans l'exercice 9, si A et B sont des polynômes à coefficients réels, les restes et quotients de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ sont les mêmes.

p.928 **Exercice 10** Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
Montrer que le reste de la division euclidienne de A par $X - \alpha$ est $A(\alpha)$.

Algorithme de la division euclidienne

La démonstration d'existence du théorème 10 de la page précédente fournit une méthode pour déterminer le quotient et le reste d'une division euclidienne. On a l'habitude de poser les calculs comme suit :

$$\begin{array}{lrrrrrr|ll}
A \;= & X^5 + & 4X^4 + & 2X^3 + & X^2 - & X - & 1 & X^3 - 2X + 3 & = B \\ \cline{8-8}
A_1 = A - X^2 B = & & 4X^4 + & 4X^3 - & 2X^2 - & X - & 1 & X^2 + 4X + 4 & = Q \\
A_2 = A_1 - 4X\,B = & & & 4X^3 + & 6X^2 - & 13X - & 1 & & \\
A_3 = A_2 - 4B = R = & & & & 6X^2 - & 5X - & 13 & &
\end{array}$$

On a alors :

$$X^5 + 4X^4 + 2X^3 + 2X^2 = (X^3 - 2X + 3)(X^2 + 4X + 4) + 6X^2 - 5X - 13.$$

L'algorithme de la division euclidienne peut s'écrire de la façon suivante.

Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Entrées : un polynôme A et un polynôme B non nul de degré p
Résultat : le quotient et reste de la division de A par B
début
- $R \longleftarrow A$
- $Q \longleftarrow 0$
- $n \longleftarrow \deg R$
- **tant que** $n \geqslant p$ **faire**
  - $Q \longleftarrow Q + \dfrac{a_n}{b_p}\, X^{n-p}$
  - $R \longleftarrow R - \dfrac{a_n}{b_p}\, X^{n-p}\, B$
  - $n \longleftarrow \deg R$
- **retourner** (Q, R)

III Fonctions polynomiales et racines

1 Fonction polynomiale

Définition 7

Soit A un élément de $\mathbb{K}[X]$. La fonction $\widetilde{A} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & A(x) \end{array}$

est appelée **fonction polynomiale** associée au polynôme A.

Définition 8

Soit $\mathcal{I}$ une partie de $\mathbb{K}$ et $f \in \mathbb{K}^{\mathcal{I}}$. Alors f est une fonction polynomiale s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall x \in \mathcal{I} \quad f(x) = P(x)$.

Exemples

- Il est immédiat que la fonction définie sur $\mathbb{K}$ par $x \mapsto x^4+5x+10$ est une fonction polynomiale.
- De même, pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, puisque cette fonction est la restriction à $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ de la fonction $x \mapsto x+1$, qui, elle, est clairement polynomiale.
- En revanche, il est plus délicat de dire si les fonctions suivantes sont polynomiales :

  (a) $\quad x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x+2}$; $\qquad$ (b) $\quad x \mapsto \dfrac{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}{x^2+x+1}$;

  (c) $\quad x \mapsto \sin x$; $\qquad$ (d) $\quad z \mapsto e^z$.

  On reviendra sur ces exemples page 898 dans les exercices 13, 14 et 15.

2 Racines

Définition 9

Soit A un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Un élément α de $\mathbb{K}$ est **racine** (dans $\mathbb{K}$) du polynôme A si $A(\alpha)=0$.

p.928

Exercice 11 En utilisant un résultat sur les fonctions d'une variable réelle, montrer qu'un polynôme de degré 3 de $\mathbb{R}[X]$ possède une racine réelle.

Proposition 12

Soit A un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Un élément α de $\mathbb{K}$ est racine de A si, et seulement si, $(X-\alpha)$ divise A.

Démonstration. D'après la proposition 11 de la page 895, on sait que le polynôme $(X-\alpha)$ divise A si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de A par $(X-\alpha)$ est nul. Or, on a prouvé dans l'exercice 10 de la page 895 que ce reste vaut $A(\alpha)$. D'où l'équivalence cherchée. □

Proposition 13

Soit A un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont p racines distinctes deux à deux de A, alors A est divisible par $\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)$.

Principe de démonstration. On prouve cette proposition par récurrence sur p.

Démonstration page 928

p.929

Exercice 12 Montrer que le polynôme $P=(X-2)^{2n}+(X-1)^n-1$ est divisible par $Q=X^2-3X+2$.

Corollaire 14

Soit $n \in \mathbb{N}$. Un polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes.

Démonstration. Si A est un polynôme non nul admettant p racines deux à deux distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, la proposition 13 de la page précédente montre qu'il est divisible par $\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)$. On a donc $p \leqslant \deg A$. $\square$

Corollaire 15

Un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ admettant au moins $n+1$ racines deux à deux distinctes est le polynôme nul.

Corollaire 16

Soit $\mathcal{I}$ une partie infinie de $\mathbb{K}$ et $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Alors, on a :

$$\Big(\forall x \in \mathcal{I} \quad A(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0\Big) \Longrightarrow \big(\forall k \in [\![0,n]\!] \quad a_k = 0\big).$$

Démonstration. Si un polynôme admet une infinité de racines, d'après le corollaire 15, il est nul et donc tous ses coefficients sont nuls. $\square$

Point méthode

On utilise souvent les corollaires précédents pour démontrer qu'un polynôme A est nul :

- soit en exhibant $n+1$ racines lorsque l'on sait que $\deg A \leqslant n$;
- soit, plus radicalement, en exhibant une infinité de racines de A.

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}$. On a vu (*cf.* l'exercice 14 de la page 159) qu'il existe un polynôme A tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad A(\cos x) = \cos(n\,x).$$

Montrons son unicité. S'il existe deux tels polynômes A et B, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad A(\cos x) = B(\cos x)$$

et, comme la fonction cosinus a pour image $[-1,1]$:

$$\forall u \in [-1,1] \quad (A-B)(u) = 0.$$

Le polynôme $A-B$ possédant une infinité de racines, il est nul et par suite $A = B$.

p.929 **Exercice 13** Montrer que la fonction $\sin$ n'est pas une fonction polynomiale.

p.929

Exercice 14 Les fonctions suivantes sont-elles polynomiales ?

1. f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}\cdot$
2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}{x^2+x+1}\cdot$

p.929

Exercice 15 Le but de cet exercice est de prouver que la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $z\mapsto e^z$ n'est pas une fonction polynomiale.

1. Soit $A\in\mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z\in\mathbb{C}\quad A(z)=e^z$. Montrer que $A-1$ s'annule une infinité de fois.
2. Conclure

Corollaire 17

Soit A un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Si A est de degré n et admet n racines distinctes deux à deux, notées α_1, $\alpha_2,\ldots,$ α_n, alors :

$$A=\lambda\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i),$$

où λ est le coefficient dominant de A.

Principe de démonstration. Avec ces hypothèses, il existe un polynôme Q tel que $A=Q\prod\limits_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$; on montre alors que Q est de degré 0. Démonstration page 929

Exemple Pour $n\in\mathbb{N}^*$, le polynôme unitaire X^n-1 possède n racines qui sont les n racines n-ièmes de l'unité. On a donc :

$$X^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right).$$

p.930

Exercice 16 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Décomposer X^n+1 en un produit de polynômes du premier degré.

3 Formule d'interpolation de Lagrange

Lemme 18

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit x_1, $x_2,\ldots,$ x_n des éléments de $\mathbb{K}$ distincts deux à deux. Alors, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i\in\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\deg L_i=n-1\qquad\text{et}\qquad\forall j\in[\![1,n]\!]\quad L_i(x_j)=\delta_i^j\quad\text{avec}\quad\delta_i^j=\begin{cases}1\text{ si } i=j\\0\text{ si } i\neq j.\end{cases}$$

Principe de démonstration. Interpréter les x_j, $j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}$ en tant que racines de L_i et en déduire une écriture de L_i sous forme factorisée. Démonstration page 930

Cela nous conduit à la définition d'une famille de polynômes de la manière suivante.

Définition 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x_1, x_2,..., x_n des éléments de $\mathbb{K}$ distincts deux à deux. On définit les n polynômes suivants :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad L_i = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

Ces polynômes sont appelés **polynômes de Lagrange** associés à la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Exemple Les 3 polynômes de Lagrange associés à la famille $(1,2,3)$ sont :

$$L_1 = \frac{(X-2)(X-3)}{2} \quad , \quad L_2 = \frac{(X-1)(X-3)}{-1} \quad \text{et} \quad L_3 = \frac{(X-1)(X-2)}{2}.$$

Proposition 19

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, y_1, $y_2, \ldots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ et x_1, $x_2, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ distincts deux à deux. Alors, il existe un et un seul polynôme P de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad P(x_i) = y_i.$$

Principe de démonstration. Pour l'unicité, montrer que, si P et Q conviennent, alors $P - Q = 0$; pour l'existence, considérer $P = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j L_j$ en choisissant judicieusement les a_j ...

Démonstration page 930

Remarques

- Le polynôme P de la proposition 19 s'écrit $P = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j L_j$ où les $(L_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ sont les polynômes de Lagrange associés à la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- Soit f une fonction d'une partie de $\mathcal{I}$ de $\mathbb{K}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étant donné x_1, $x_2, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathcal{I}$ distincts deux à deux, il existe un et un seul polynôme P de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :

  $$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad P(x_i) = f(x_i).$$

  Alors P est appelé **polynôme d'interpolation de Lagrange** de f associé à la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

p.931

Exercice 17

1. Déterminer le polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ qui vérifie :

$$P(1) = 2 \quad , \quad P(2) = 3 \quad \text{et} \quad P(3) = 6.$$

2. Même question avec :

$$P(1) = 1 \quad , \quad P(2) = 4 \quad \text{et} \quad P(3) = 9.$$

p.931

Exercice 18 Soit $n \geqslant 2$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels distincts deux à deux et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des réels. Trouver une condition nécessaire et suffisante simple sur les points de coordonnées $(x_i, y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ pour que le polynôme P de la proposition 19 de la page ci-contre soit de degré 1.

p.931

Exercice 19 Que vaut $\sum\limits_{j=1}^{n} L_j$ avec les notations de la définition 10 de la page précédente ?

Proposition 20

Étant donné des éléments de $\mathbb{K}$ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et des éléments de $\mathbb{K}$ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ distincts deux à deux, on note P_0 le polynôme défini dans la proposition 19 de la page ci-contre.

Les polynômes $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad Q(x_i) = y_i$ sont les polynômes :

$$P_0 + A \prod_{j=1}^{n} (X - x_j) \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{K}[X].$$

Principe de démonstration. Chercher les racines de $Q - P_0$. Démonstration page 931

4 Détermination d'un polynôme par sa fonction polynomiale

Soit A un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que la restriction de sa fonction polynomiale sur une partie infinie de $\mathbb{K}$ soit nulle. Alors, A admet une infinité de racines et est donc nul. Comme la fonction polynomiale associée à la différence des polynômes A et B est $\widetilde{A} - \widetilde{B}$, on a immédiatement la proposition suivante.

Proposition 21

Si A et B sont deux polynômes dont les fonctions polynomiales associées coïncident sur une partie infinie de $\mathbb{K}$, alors $A = B$.

Remarques

- Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est entièrement déterminé par la donnée de la fonction polynomiale associée.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Deux polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ prenant la même valeur en $n+1$ points deux à deux distincts de $\mathbb{K}$ sont égaux.
- L'application $\varphi : A \mapsto \widetilde{A}$ est une application injective de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ qui vérifie, pour tous polynômes A et B et pour tous réels α et β :
  * $\varphi(\alpha\, A + \beta\, B) = \alpha\, \varphi(A) + \beta\, \varphi(B)$;
  * $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$;
  * $\varphi(1) = \mathbb{1}$ où $\mathbb{1}$ est la fonction constante égale à 1.

  Au vu de ces propriétés, on peut se permettre de confondre un polynôme et sa fonction polynomiale associée ; on dit alors qu'on « identifie polynôme et fonction polynomiale ».

p.931 **Exercice 20** Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^*)^3$ deux à deux distincts. Montrer que les polynômes

$$P = \frac{X(X-b)(X-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{X(X-c)(X-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{X(X-a)(X-b)}{c(c-a)(c-b)}$$
$$Q = 1 + \frac{1}{abc}(X-a)(X-b)(X-c).$$

sont égaux.

p.931 **Exercice 21** Soit $\mathcal{I}$ une partie infinie de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que si f et g sont deux fonctions polynomiales de $\mathcal{I}$ dans K telles que $fg = 0$, alors $f = 0$ ou $g = 0$.
2. Ce résultat reste-t-il vrai pour des fonctions non polynomiales ?

5 Ordre de multiplicité d'une racine

Soit A un polynôme non nul et $\alpha \in \mathbb{K}$. Si α est une racine de A, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \mid (X-\alpha)^k \mid A\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (elle contient 1), majorée par $\deg A$ d'après la remarque de la page 894 ; cet ensemble admet donc un plus grand élément. Ce qui nous conduit aux définitions suivantes.

Définition 11

Soit A un polynôme non nul et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de A. **L'ordre de multiplicité** de α est le plus grand entier p tel que $(X-\alpha)^p$ divise A.

On dit alors que α est **racine d'ordre p** de A.

Remarque Si α est racine d'ordre p de A, alors $(X-\alpha)^p$ divise A et $(X-\alpha)^{p+1}$ ne divise pas A.

Définition 12

Soit A un polynôme non nul, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que α est :

- **racine multiple** de A si $(X-\alpha)^2 \mid A$;
- **racine d'ordre au moins** p de A si $(X-\alpha)^p \mid A$.

Remarques Soit A un polynôme non nul.

- Une racine de A est racine d'ordre au moins 1 de A.

  Par extension, on dit qu'un élément α de $\mathbb{K}$ est racine d'ordre 0 de A si α n'est pas racine de A.
- Les racines d'ordre 1, 2, 3 de A sont respectivement aussi appelées **racines simples, racines doubles, racines triples** de A.
- L'ordre de multiplicité d'une racine de A est inférieur ou égal à $\deg A$ d'après la remarque de la page 894.

Proposition 22

Soit A un polynôme non nul, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

- α est racine d'ordre au moins p de A si, et seulement si, il existe $B \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = (X-\alpha)^p\, B$.
- α est racine d'ordre p de A si, et seulement si, il existe $B \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = (X-\alpha)^p\, B \quad \text{et} \quad B(\alpha) \neq 0$.

Principe de démonstration. Il suffit de démontrer que α est racine de A d'ordre au moins $p+1$ si, et seulement si, $B(\alpha) = 0$.

Démonstration page 931

Exemple Une racine simple (racine d'ordre 1) de A est donc caractérisée par :

$$\exists B \in \mathbb{K}[X] \quad A(X) = (X-\alpha)\,B(X) \qquad \text{et} \qquad B(\alpha) \neq 0.$$

Proposition 23

Soit A un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont p racines distinctes de A d'ordre respectivement au moins égal à $r_1, r_2, \ldots, r_p$, alors A est divisible par $\prod_{i=1}^{p} (X-\alpha_i)^{r_i}$.

Principe de démonstration. Démonstration par récurrence sur p.

Démonstration page 932

Lorsque l'on dénombre les racines d'un polynôme, on peut :

- soit compter le nombre de racines distinctes ;
- soit compter chaque racine avec son ordre de multiplicité, c'est-à-dire autant de fois que son ordre de multiplicité ; dans ce cas, une racine d'ordre r compte comme r racines.

Exemple Le polynôme $(X-1)(X+1)^2(X-2)^3$ possède :

* 3 racines distinctes : $-1, 1, 2$;
* 6 racines comptées avec leur ordre de multiplicité : $-1, -1, 1, 2, 2, 2$.

De même que pour les racines distinctes, on a les deux résultats suivants, qui se démontrent de manière analogue.

Corollaire 24

Soit $n \in \mathbb{N}$. Un polynôme (non nul) de degré n possède au plus n racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

Corollaire 25

Un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ admettant plus de $n+1$ racines comptées avec leur ordre de multiplicité est le polynôme nul.

Corollaire 26

Soit A un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont p racines de A distinctes deux à deux, d'ordre respectivement égal à $r_1, r_2, \ldots, r_p$ et si $\deg A = \sum\limits_{k=1}^{p} r_k$, alors $A = \lambda \prod\limits_{i=1}^{p} (X-\alpha_i)^{r_i}$, où λ est le coefficient dominant de A.

6 Relations entre coefficients et racines

Définition 13

Un polynôme A de $\mathbb{K}[X]$ est dit **scindé** sur $\mathbb{K}$ s'il existe un entier naturel n non nul, un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul et des éléments $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de $\mathbb{K}$ tels que :

$$A = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X-\alpha_i).$$

Remarques

- Un polynôme scindé est donc soit un polynôme constant non nul, soit un polynôme s'écrivant sous forme de produit de polynômes de degré 1.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $A = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i) \in \mathbb{K}[X]$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$. Alors A est scindé sur $\mathbb{K}$ et les racines de A dans $\mathbb{K}$ sont les α_i ; il y en a n comptées avec leur ordre de multiplicité ; n est le degré du polynôme A et λ le coefficient dominant de ce polynôme.
- Un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ qui admet n racines dans $\mathbb{K}$ comptées avec leur ordre de multiplicité est scindé sur $\mathbb{K}$. En particulier, un polynôme de degré n qui admet n racines distinctes dans $\mathbb{K}$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit A un polynôme de degré n scindé sur $\mathbb{K}$. On dispose alors de deux écritures de A :

$$A = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \quad \text{et} \quad A = a_n \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$$

où a_1, $a_2, \ldots,$ a_n, α_1, $\alpha_2, \ldots,$ α_n sont des éléments de $\mathbb{K}$ avec $a_n \neq 0$.

Exemple Pour $n = 2$, avec les notations précédentes, si :

$$A = a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = a_2 (X - x_1)(X - x_2),$$

on obtient, par identification, les relations :

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

p.932 **Exercice 22** Sur le même principe que pour $n = 2$, quelles sont les relations liant les coefficients et les racines d'un polynôme scindé de degré 3 ?

Dans le cas général, si A est un polynôme de degré n scindé sur $\mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned} A &= a_n (X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n) \\ &= a_n \Big(X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \cdots + (-1)^p \sigma_p X^{n-p} + \cdots + (-1)^n \sigma_n \Big) \end{aligned}$$

avec :

$$\forall p \in [\![1, n]\!] \quad \sigma_p = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p},$$

et, en particulier :

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

$$\sigma_2 = \sum_{i<j} x_i x_j = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n,$$

$$\sigma_n = \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Définition 14

Les quantités σ_p sont appelées **fonctions symétriques élémentaires des racines** du polynôme A.

Exemples

1. Pour $n = 2$, il y a deux fonctions symétriques élémentaires :
$$\sigma_1 = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = x_1 x_2.$$
2. Pour $n = 3$, il y a trois fonctions symétriques élémentaires :
$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3\,;\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \quad \text{et} \quad \sigma_3 = x_1x_2x_3.$$

Les égalités :
$$\begin{aligned} A &= a_n\, X^n + a_{n-1}\, X^{n-1} + \cdots + a_0 \\ &= a_n \Big(X^n - \sigma_1\, X^{n-1} + \sigma_2\, X^{n-2} - \cdots + (-1)^p \sigma_p\, X^{n-p} + \cdots + (-1)^n \sigma_n \Big) \end{aligned}$$
permettent alors d'exprimer les fonctions symétriques élémentaires des racines du polynôme A en fonction des coefficients de A.

$\sigma_1 = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$	$\sigma_2 = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$	$\cdots$	$\sigma_p = (-1)^p \dfrac{a_{n-p}}{a_n}$	$\cdots$	$\sigma_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}\cdot$

p.932

Exercice 23 Déterminer les solutions du système :
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

p.933

Exercice 24 Soit p et q des complexes. On note x_1, x_2, x_3 les racines complexes du polynôme $X^3 + pX + q$.

1. Exprimer $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ à l'aide des fonctions symétriques élémentaires, puis en fonction de p et q. On pourra commencer par calculer $(x_1 + x_2 + x_3)^2$.
2. Exprimer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ en fonction de p et q.

p.933

Exercice 25 Retrouver les formules donnant la somme et le produit des racines n-ièmes de l'unité pour $n \geqslant 2$.

IV Dérivation

1 Polynôme dérivé

Définition 15

Soit $A = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k\, X^k \in \mathbb{K}[X]$. On définit le **polynôme dérivé** A' de A, par :
$$A' = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, a_k\, X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, X^{k-1} \quad \text{pour tout } n \geqslant \deg A.$$

Proposition 27

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. On a :

- si $\deg A > 0$, alors $\deg(A') = \deg(A) - 1$;
- le polynôme A est constant si, et seulement si, $A' = 0$.

Principe de démonstration. Il suffit d'utiliser les définitions de A' et du degré ...

Démonstration page 933

Proposition 28

Soit A et B des éléments de $\mathbb{K}[X]$, λ et μ des éléments de $\mathbb{K}$. Alors, on a :

$$(\lambda A + \mu B)' = \lambda A' + \mu B'.$$

Principe de démonstration. Utiliser la propriété similaire prouvée pour des fonctions polynomiales d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Démonstration page 933

Remarque La démonstration de la proposition précédente peut se généraliser.

- En effet, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a de façon évidente $(\widetilde{A})' = \widetilde{A'}$ et l'identification entre polynôme et fonction polynômiale permet de transférer à cette dérivation formelle des polynômes les résultats que l'on a démontrés sur les fonctions dérivables définies sur $\mathbb{R}$.
- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les résultats que l'on a démontrés sur les fonctions dérivables définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes permettent de justifier que les propriétés restent vraies pour les fonctions polynomiales ; d'après le corollaire 16 de la page 898, cela nous donne les propriétés pour la dérivation formelle des polynômes à coefficients complexes.

On énonce donc, sans besoin de plus amples justifications, les propositions 29, 30 et 31 qui suivent.

Proposition 29

Étant donné des éléments A et B de $\mathbb{K}[X]$, on a :

$$(A\,B)' = A'B + A\,B'.$$

2 Dérivées successives, formule de Taylor

Définition 16

Étant donné un polynôme A, pour $r \in \mathbb{N}$, on définit, par récurrence, le **polynôme dérivé d'ordre r** par :

$$A^{(0)} = A \qquad \text{et} \qquad \forall r \geqslant 0 \quad A^{(r+1)} = \left(A^{(r)}\right)'.$$

Proposition 30

Soit A et B des éléments de $\mathbb{K}[X]$, λ et μ des éléments de $\mathbb{K}$. Alors :

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad (\lambda\, A + \mu\, B)^{(r)} = \lambda\, A^{(r)} + \mu\, B^{(r)}.$$

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$(X^n)^{(p)} = \begin{cases} n\,(n-1)\ldots(n-p+1)\,X^{n-p} = p!\,\dbinom{n}{p}\,X^{n-p} & \text{si } p \in [\![0,n]\!] \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$$

Proposition 31 (Formule de Leibniz)

Si A et B sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, alors on a, pour tout $r \in \mathbb{N}$:

$$(A\,B)^{(r)} = \sum_{k=0}^{r} \binom{k}{r}\, A^{(k)}\, B^{(r-k)}.$$

Proposition 32 (Formule de Taylor)

Si $A \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors on a :

$$A(X) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^{(p)}(\alpha)}{p!}\,(X-\alpha)^p,$$

ainsi que :

$$A(\alpha + X) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^{(p)}(\alpha)}{p!}\,X^p.$$

Principe de démonstration. Lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$, on utilise la formule de Taylor avec reste intégral.

Démonstration page 933

Remarque Malgré les apparences, la somme $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{A^{(p)}(\alpha)}{p!}\,(X-\alpha)^p$ est finie car, pour un polynôme A fixé, tous les polynômes dérivés $A^{(p)}$ sont nuls dès que $p > \deg A$.

p.934

Exercice 26 Déterminer tous les polynômes P tels que :

$$P(1) = 1 \quad , \quad P'(1) = 3 \quad , \quad P''(1) = 8 \quad \text{et} \quad P^{(n)}(1) = 0 \text{ si } n > 2.$$

3 Caractérisation de l'ordre d'une racine

Proposition 33

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et A un polynôme non constant. Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine d'ordre r de A, alors α est racine d'ordre $r-1$ du polynôme dérivé A'.

Principe de démonstration. Dériver la relation $A(X) = (X-\alpha)^r \, B(X)$.

Démonstration page 934

Remarque Le résultat est valable même si $r=1$, puisqu'on a convenu qu'un élément de $\mathbb{K}$, qui n'est pas racine d'un polynôme, est racine d'ordre 0 de ce polynôme.

Corollaire 34

Soit A un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Un élément α de $\mathbb{K}$ est racine multiple de A si, et seulement si, $A(\alpha) = A'(\alpha) = 0$.

Démonstration page 934

Proposition 35

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N}^*$, il est équivalent de dire :

(i) α est racine d'ordre r de A ;

(ii) $A(\alpha) = A'(\alpha) = \cdots = A^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $A^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

Principe de démonstration.

Démonstration page 934

$(i) \Longrightarrow (ii)$ Appliquer la proposition 33.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Utiliser la formule de Taylor.

Point méthode

Soit A un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de A. Pour déterminer l'ordre de cette racine :

- si A est écrit sous forme factorisée, on cherche la plus grande puissance de $(X-\alpha)$ qui divise le polynôme A ;
- si A est écrit sous forme de somme, il est plus naturel de s'intéresser aux valeurs des polynômes dérivés successifs en α.

p.935

Exercice 27 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X-1)^3$.

p.935

Exercice 28 Montrer que le polynôme $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$ admet 2 pour racine. Donner son ordre de multiplicité. Déterminer les autres racines de P et leurs ordres de multiplicité.

p.935 **Exercice 29** Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ et $r \in \mathbb{N}$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que α est racine de A d'ordre r si, et seulement si, $\overline{\alpha}$ est racine de A d'ordre r.

V Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

1 Théorème de d'Alembert

On a donné l'écriture d'un polynôme lorsque l'on a des informations sur ses racines et leurs ordres de multiplicité. Se pose maintenant le problème de l'existence de ces racines. Le théorème suivant est admis. Néanmoins le lecteur en trouvera une démonstration page 922.

Théorème 36 (Théorème de d'Alembert)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

De ce théorème, on déduit alors les propriétés suivantes concernant la factorisation d'un polynôme à coefficients réels ou complexes.

2 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Proposition 37

Soit A un polynôme non nul à coefficients complexes.

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ les racines complexes deux à deux distinctes de A et $r_1, r_2, \ldots, r_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs. On a alors :

$$A = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{r_k},$$

où λ est le coefficient dominant de A.

En d'autres termes, tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Principe de démonstration. On utilise le même principe que pour la démonstration du corollaire 17 de la page 899.

Démonstration page 936

Remarques

- Ce résultat est évidemment faux dans $\mathbb{R}[X]$, puisque, par exemple, X^2+1 n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Cependant, tout polynôme à coefficients réels est aussi un polynôme à coefficients complexes et, par suite, est scindé sur $\mathbb{C}$.
- Une telle factorisation est unique à une permutation près des facteurs, puisque $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$ est alors l'ensemble des racines de A, que chaque entier r_k est l'ordre de la racine α_k, et que λ est égal au coefficient dominant du polynôme A.

Proposition 38

Soit A un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$. On désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ les racines (complexes) distinctes deux à deux de A et par $r_1, r_2, \dots, r_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ est divisible par A si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, le complexe α_k est racine de P d'ordre de multiplicité supérieur ou égal à r_k.

Principe de démonstration. On utilise la proposition 23 de la page 903.

Démonstration page 936

p.936 **Exercice 30** Montrer que X^2+X+1 divise X^8+X^4+1.

p.936 **Exercice 31** Montrer que le polynôme $B=(X^2+1)^2$ divise le polynôme A où :

$$A = 5\,X^{13}+10\,X^{11}+5\,X^9-3\,X^5+X^4-6\,X^3+2\,X^2-3\,X+1.$$

3 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition 39

Tout polynôme non nul A de $\mathbb{R}[X]$, peut s'écrire sous la forme :

$$A = \lambda \prod_{j=1}^{p} (X-\alpha_j)^{r_j} \prod_{k=1}^{q} (X^2+\beta_k\,X+\gamma_k)^{s_k}$$

où p et q sont deux entiers naturels, λ un réel et, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$ et pour tout $k \in [\![1,q]\!]$, r_j et s_k des entiers naturels non nuls et α_j, β_k et γ_k des réels vérifiant $\beta_k^2-4\gamma_k<0$.

Principe de démonstration. On utilise la proposition 37 de la page précédente et l'exercice 29 puis l'on regroupe les facteurs deux à deux conjugués.

Démonstration page 936

Exemple Pour décomposer X^4+1, on peut utiliser les racines quatrièmes de -1 :

$$\begin{aligned}
X^4+1 &= \left(X-e^{i\pi/4}\right)\left(X-e^{-i\pi/4}\right)\left(X-e^{3i\pi/4}\right)\left(X-e^{-3i\pi/4}\right)\\
&= \left(X^2-2\cos\frac{\pi}{4}X+1\right)\left(X^2-2\cos\frac{3\pi}{4}X+1\right)\\
&= (X^2-\sqrt{2}\,X+1)(X^2+\sqrt{2}\,X+1)
\end{aligned}$$

Une autre méthode consiste plus simplement à écrire :

$$X^4+1 = (X^2+1)^2-2X^2 = (X^2+\sqrt{2}\,X+1)(X^2-\sqrt{2}\,X+1).$$

Comme X^4+1 n'a pas de racines réelles, ces deux polynômes du second degré n'ont pas de racines réelles, et donc leur discriminant est strictement négatif.

p.937 **Exercice 32** Quelle est la décomposition de X^8-1 dans $\mathbb{R}[X]$?

p.937 **Exercice 33** Quelle est la décomposition de X^5+1 dans $\mathbb{R}[X]$?

VI Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Nous allons suivre ici le même plan qu'au chapitre 15.

Notation L'ensemble des diviseurs d'un polynôme A est noté $\mathcal{D}(A)$.

1 PGCD

Soit A et B des polynômes non tous les deux nuls.

- L'ensemble des diviseurs communs à A et B est une partie de $\mathbb{K}[X]$ non vide (puisqu'elle contient 1) et ne contenant pas le polynôme nul (car A ou B est non nul).
- L'ensemble des degrés des polynômes diviseurs communs de A et de B est donc une partie de $\mathbb{N}$ non vide, majorée par $\deg A$ si $A \neq 0$ ou $\deg B$) sinon. Elle possède donc un plus grand élément r dans $\mathbb{N}$.

Par suite, il existe un polynôme D de degré r tel que D soit un diviseur commun à A et B. Cela nous conduit aux définitions suivantes.

Définition 17

Soit A et B deux polynômes non tous les deux nuls. Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un **PGCD** de A et B.

Remarques

- Un PGCD de deux polynômes non tous les deux nuls est toujours non nul par définition, puisque son degré n'est pas $-\infty$.
- Des polynômes A et B non tous les deux nuls admettent une infinité de PGCD puisque, si un polynôme D convient, alors $D \neq 0$ et les polynômes λP, pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, (c'est-à-dire les polynômes associés à D) conviennent aussi.

  On va en fait prouver qu'ils sont tous de cette forme ; ce qui permettra de choisir parmi tous les PGCD l'unique polynôme unitaire.

Commençons par un exemple simple.

Exemples

1. Soit A et B des polynômes tels que $B \neq 0$ et B divise A.
   Les PGCD de A et B sont alors les polynômes associés à B.
   - En effet, les diviseurs communs à A et B sont évidemment les diviseurs de B. Le plus grand degré de ces diviseurs communs est donc $\deg B$.
   - Par suite, B, ainsi que tous ses associés, sont des PGCD de A et B.
   - Réciproquement, un PGCD de A et B est un diviseur de B de même degré que B, donc est associé à B.
2. En particulier, si B est non nul, les PGCD de B et de 0 sont les polynômes associés de B.

2 Caractérisation du PGCD

Lemme 40

Soit A, B, Q et R des polynômes tels que $A = BQ + R$. Alors :
$$\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(R).$$

Démonstration page 937

Proposition 41

Soit A et B des polynômes, l'un au moins étant non nul. Alors tout PGCD D de A et B vérifie $\mathcal{D}(D) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$, c'est-à-dire :
$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad (P \mid A \quad \text{et} \quad P \mid B) \quad \Longleftrightarrow \quad P \mid D.$$

Principe de démonstration. On démontre par récurrence sur n la propriété : « si A et B sont des polynômes non tous deux nuls vérifiant $\min(\deg A, \deg B) < n$, et si D en est un PGCD, alors $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(D)$ » en utilisant la division euclidienne. Démonstration page 937

Soit A et B des polynômes, l'un au moins étant non nul. Alors si D_1 et D_2 sont des PGCD de A et de B, comme $\mathcal{D}(D_1) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(D_2)$, les polynômes D_1 et D_2 sont associés et non nuls d'après la remarque 2 de la page 894. On en déduit alors le théorème suivant.

Théorème 42

Soit A et B des polynômes, l'un au moins étant non nul. Il existe un unique polynôme D unitaire tel que $\mathcal{D}(D) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$, c'est-à-dire tel que :
$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad (P \mid A \quad \text{et} \quad P \mid B) \Longleftrightarrow P \mid D.$$
On l'appelle **le PGCD** de A et B ; on le note $A \wedge B$.

Remarques

- Le lemme 40 nous donne alors que si A, B, Q et R sont des polynômes tels que $A = BQ + R$ et $B \neq 0$, alors $A \wedge B = B \wedge R$.
- Si A et B sont dans $\mathbb{R}[X]$, on déduit de l'unicité du quotient et du reste de la division euclidiennes (*cf.* remarque de la page 895) que le PGCD de A et B dans $\mathbb{R}[X]$ est égal au PGCD de A et B dans $\mathbb{C}[X]$.
- Comme pour les entiers, on a évidemment $A \wedge B = B \wedge A$.

p.938 **Exercice 34** Déterminer le PGCD de $A = X^2 + X - 6$ et $B = X^2 - 4$.

Point méthode

Dans la pratique, pour déterminer un PGCD de deux polynômes A et B, il suffit d'exhiber un diviseur D commun à A et B qui vérifie l'implication :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad (P \mid A \quad \text{et} \quad P \mid B) \Longrightarrow P \mid D.$$

Inutile de s'occuper de l'implication réciproque, car c'est une conséquence immédiate du fait que D divise A et B.

Remarques

- Si A et B sont des polynômes non nuls, comme un polynôme non nul admet le même ensemble de diviseurs qu'un de ces associés, chercher $A \wedge B$ revient à chercher le PGCD des polynômes unitaires associés à A et B.
- Soit A et B des polynômes unitaires. Le polynôme $A \wedge B$ est le plus grand élément de l'ensemble des diviseurs de A et B au sens de la relation de divisibilité dans l'ensemble des polynômes unitaires (*cf.* remarque de la page 895).

p.938 **Exercice 35** Si A, B et C sont des polynômes non nuls, avec C unitaire, on a :

$$(AC) \wedge (BC) = (A \wedge B)\, C.$$

3 Algorithme d'Euclide

Comme pour les entiers, l'existence du PGCD est donc fondée sur le lemme 40 de la page précédente et la division euclidienne : si B est non nul, le PGCD de A et B est le même que celui de B et du reste R de la division euclidienne de A par B. Il suffit donc de remplacer (A, B) par (B, R) et de recommencer si $R \neq 0$. D'où **l'algorithme d'Euclide** donné ci-dessous en Pseudo Code.

Algorithme d'Euclide dans $\mathbb{K}[X]$

Entrées : les polynômes A et B, avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$.
Variables : Q et λ.
Résultat : PGCD unitaire
début
  tant que $B \neq 0$ **faire**
    $Q \leftarrow$ quotient de la division de A par B
    $(A, B) \leftarrow (B, A - Q\,B)$
  $\lambda \leftarrow$ coefficient dominant de A
  $A \leftarrow A/\lambda$,
  retourner A

p.938 **Exercice 36** Calculer le PGCD des deux polynômes :

$$A = X^5 + 3X^4 - 4X^3 - 12X^2 - 7X + 14 \quad \text{et} \quad B = X^4 + 4X^3 - X^2 - 13X - 18.$$

4 Coefficients de Bézout

Proposition 43

Soit $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$, avec A ou B non nul.

Il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = A \wedge B$.

Un tel couple (U,V) est un **couple de coefficients de Bézout** de A et B.

Principe de démonstration. Démonstration page 938

On fait une récurrence similaire à celle de la proposition 41 de la page 913.

Remarques

- Dans la proposition précédente, il n'y a pas unicité du couple (U,V), puisque si (U_0,V_0) est un couple de coefficients de Bézout de A et B, alors il en est de même du couple $(U_0 + Q\,B, V_0 - Q\,A)$ pour tout polynôme Q (voir l'exercice 17.23 de la page 945 pour un résultat d'unicité).
- Comme dans le cas des entiers, le calcul du PGCD est fondé sur l'algorithme d'Euclide. En remontant l'algorithme on peut alors trouver un couple de coefficients de Bézout. Mais on peut aussi utiliser l'algorithme suivant (même démonstration que dans le cas des entiers) dit « algorithme d'Euclide étendu ».

Algorithme d'Euclide étendu dans $\mathbb{K}[X]$

Entrées : les polynômes A et B, avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$.
Variables : U_0, V_0, U_1, V_1, Q et λ.
Résultat : PGCD unitaire et coefficients de Bézout
début
- $(U_0,V_0) \leftarrow (1,0)$
- $(U_1,V_1) \leftarrow (0,1)$
- **tant que** $B \neq 0$ **faire**
  - $Q \leftarrow$ quotient de la division de A par B
  - $(A,B) \leftarrow (B, A - Q\,B)$
  - $(U_0,U_1) \leftarrow (U_1, U_0 - Q\,U_1)$
  - $(V_0,V_1) \leftarrow (V_1, V_0 - Q\,V_1)$
- $\lambda \leftarrow$ coefficient dominant de A
- $A \leftarrow A/\lambda,\ U_0 \leftarrow U_0/\lambda,\ V_0 \leftarrow V_0/\lambda$
- **retourner** (A, U_0, V_0)

5 Polynômes premiers entre eux

Définition 18

Deux polynômes A et B sont **premiers entre eux** s'ils vérifient l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

(i) A et B n'ont que les polynômes de degré 0 comme diviseurs communs,

(ii) $(A,B) \neq (0,0)$ et $A \wedge B = 1$.

On dit aussi que A **est premier avec** B.

Proposition 44 (Identité de Bézout)

Les polynômes A et B sont premiers entre eux si, et seulement s'il existe $(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $AU + BV = 1$.

Démonstration page 939

Proposition 45

Soit $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$, l'un au moins étant non nul. Si $D = A \wedge B$, il existe deux polynômes A_1 et B_1 tels que :

$$A = D\,A_1 \quad \text{et} \quad B = D\,B_1 \qquad \text{avec} \qquad A_1 \wedge B_1 = 1.$$

Principe de démonstration. Pour montrer que A_1 et B_1 sont premiers entre eux, on utilise une identité de Bézout. Démonstration page 939

Proposition 46

Soit A, B et C des polynômes. Si A et B sont premiers entre eux ainsi que A et C, alors A et BC sont premiers entre eux.

Principe de démonstration. Démonstration page 939

Multiplier des identités de Bézout correspondant aux couples (A,B) et (A,C).

p.939 **Exercice 37** Montrer que les polynômes P et Q sont premiers entre eux si, et seulement si, $P+Q$ et PQ le sont.

Corollaire 47

Un produit de polynômes est premier avec un polynôme A si, et seulement si, chacun de ses facteurs est premier avec A.

Démonstration. Il est évident que si A est premier avec un produit, il est premier avec chacun de ses facteurs. Pour la réciproque, on procède par récurrence sur le nombre de facteurs intervenant dans le produit en utilisant la proposition 46. □

On en déduit immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 48

Si A et B sont des polynômes premiers entre eux, alors on a :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad A^m \wedge B^n = 1.$$

p.939

Exercice 38

Soit a et b deux éléments distincts de $\mathbb{K}$. Si p et q sont des entiers naturels, montrer que les polynômes $A = (X-a)^p$ et $B = (X-b)^q$ sont premiers entre eux.

6 Extension à un nombre fini de polynômes

Comme dans le cas de l'arithmétique des entiers, on généralise la notion de PGCD de deux polynômes à un nombre fini de polynômes.

Proposition 49

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \ldots, A_k$ des polynômes non tous nuls. Il existe un unique polynôme unitaire D dont les diviseurs sont (exactement) les diviseurs communs à tous les A_i, c'est-à-dire un polynôme unitaire qui vérifie :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad (\forall i \in [\![1,k]\!] \quad P \mid A_i) \Longleftrightarrow P \mid D.$$

On l'appelle **PGCD** de $A_1, \ldots, A_k$ et on le note $A_1 \wedge \cdots \wedge A_k$ ou $\bigwedge\limits_{i=1}^{k} A_i$.

On a, de plus :

$$\exists (U_1, \ldots, U_k) \in \mathbb{K}[X]^k \quad D = A_1\,U_1 + \cdots + A_k\,U_k. \text{ (\textbf{identité de Bézout})}$$

Remarque Lorsque $k=1$, on a évidemment $D = \lambda^{-1} A_1$, où λ est le coefficient dominant de A_1.

Définition 19

Les polynômes non nuls $A_1, \ldots, A_k$ sont **premiers entre eux dans leur ensemble** s'ils n'ont pas de diviseurs communs autres que les polynômes constants non nuls, c'est-à-dire s'ils sont non tous nuls et que leur PGCD est égal à 1.

Attention Soit $k \geqslant 2$ et $(A_1, \ldots, A_k) \in \mathbb{K}[X]^k$. Ne pas confondre les deux énoncés suivants :

- les polynômes $A_1, \ldots, A_k$ sont premiers entre eux dans leur ensemble,
- les polynômes A_i sont **premiers entre eux deux à deux**, c'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,k]\!] \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \wedge A_j = 1.$$

Il est clair que, si les A_i sont premiers entre eux deux à deux, alors ils sont premiers entre eux dans leur ensemble, mais la réciproque est fausse.

p.939

Exercice 39

1. Donner un exemple de trois polynômes A, B et C premiers entre eux dans leur ensemble mais qui ne sont pas premiers entre eux deux à deux.
2. Montrer que l'on peut même choisir A, B et C tels que :

$$A \wedge B \neq 1 \quad , \quad A \wedge C \neq 1 \quad \text{et} \quad B \wedge C \neq 1.$$

Proposition 50 (Identité de Bézout)

Les polynômes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si, et seulement s'il existe une famille $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ de polynômes telle que :

$$\sum_{i=1}^{k} A_i U_i = 1.$$

Démonstration. L'implication directe est une conséquence de la proposition 49 de la page précédente. La réciproque est évidente. □

7 PPCM

Soit A et B deux polynômes non nuls. L'ensemble des multiples non nuls communs à A et B est une partie de $\mathbb{K}[X]$, non vide car elle contient AB. L'ensemble des degrés de ces polynômes est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle possède ainsi un plus petit élément q. Par suite, il existe un polynôme M de degré q tel que M soit un multiple commun à A et B.

Définition 20

Soit A et B deux polynômes non nuls.

Tout multiple non nul commun à A et B de degré minimal est appelé un **PPCM** de A et B.

Remarque Par définition, un PPCM de deux polynôme non nuls est toujours non nul.

Proposition 51

Soit A et B deux polynômes non nuls. Alors tout PPCM M de A et B vérifie :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad (A \mid P \quad \text{et} \quad B \mid P) \iff M \mid P.$$

Principe de démonstration. Soit M un PPCM. On montre que le reste de la division euclidienne par M de tout multiple commun à A et B est nul. Démonstration page 940

Théorème 52

Soit A et B des polynômes non nuls. Alors il existe un unique polynôme M unitaire dont les multiples sont exactement les multiples communs à A et B, c'est-à-dire tel que l'on ait :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad (A \mid P \quad \text{et} \quad B \mid P) \iff M \mid P.$$

Ce polynôme est appelé **le PPCM** de A et de B ; on le note $A \vee B$.

Démonstration. On a déjà prouvé l'existence. Pour l'unicité, de même que pour le PGCD, si M_1 et M_2 sont deux PPCM de A et de B alors ils se divisent l'un l'autre et sont donc associés. Comme ils sont non nuls, il existe un et un seul PPCM de A et de B unitaire. □

Remarques

- Un polynôme admet les mêmes multiples que ses polynômes associés. Donc, si A et B sont des polynômes non nuls, chercher $A \vee B$ revient à chercher le PPCM des polynômes unitaires associés à A et B.
- Soit A et B des polynômes unitaires. Alors $A \vee B$ est le plus petit élément de l'ensemble des multiples communs à A et B au sens de la relation de divisibilité dans l'ensemble des polynômes unitaires (*cf.* remarque de la page 895).

Point méthode

Dans la pratique, pour déterminer le PPCM de deux polynômes non nuls A et B, il suffit d'exhiber un multiple M commun à A et B qui vérifie :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad (A \mid P \quad \text{et} \quad B \mid P) \Longrightarrow M \mid P.$$

Inutile de s'occuper de l'implication réciproque, car c'est une conséquence immédiate du fait que A et B divisent M.

p.940 **Exercice 40** Étant donné des polynômes non nuls A, B et C, avec C unitaire, montrer que $(AC) \vee (BC) = (A \vee B)C$.

8 Théorème de Gauss

Théorème 53

Soit A, B et C des polynômes. Si A divise BC et si A est premier avec B, alors A divise C.

Principe de démonstration. Partir d'une relation de Bézout. Démonstration page 940

Proposition 54

Soit A et B des polynômes non nuls.

1. Si A et B sont des polynômes premiers entre eux, alors $A \vee B$ et AB sont des polynômes associés.
2. Plus généralement, les polynômes AB et $(A \wedge B)(A \vee B)$ sont associés.

Démonstration page 940

9 Polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$

Définition 21

On appelle **polynôme irréductible** de $\mathbb{K}[X]$ tout polynôme P vérifiant :

- $\deg P \geqslant 1$;
- les seuls diviseurs de P sont les éléments de $\mathbb{K}^*$ et les associés de P,

Ainsi un polynôme irréductible est un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant et tel que, pour tout $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, on ait :

$$P = A\,B \quad \Longrightarrow \quad (\deg A = 0 \quad \text{ou} \quad \deg B = 0).$$

Remarques

- On remarquera l'analogie de cette notion avec celle concernant les nombres premiers dans $\mathbb{N}$: un entier p est premier si $p \geqslant 2$ et si :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2 \quad p = a\,b \Longrightarrow (a = 1 \text{ ou } b = 1.$$

- Un polynôme P est non irréductible
  - ∗ s'il est constant
  - ∗ ou s'il peut s'écrire $P = A\,B$, avec $\deg A \geqslant 1$ et $\deg B \geqslant 1$ ou encore avec $1 \leqslant \deg A \leqslant \deg P - 1$.

Exemples

1. Tout polynôme de degré 1 est irréductible. En effet, si A est un polynôme de degré 1, considérons des polynômes B et C tels que $A = B\,C$. On a alors $\deg B + \deg C = \deg A = 1$. Comme $\deg B$ et $\deg C$ sont des entiers positifs, on en déduit $\deg B = 0$ ou $\deg C = 0$; ce qui prouve que A est irréductible.
2. Un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$ possédant une racine $\alpha \in \mathbb{K}$ est de degré 1. En effet, il est divisible par le polynôme non constant $X - \alpha$, qui lui est donc associé.

p.940

Exercice 41 Le polynôme $X^2 + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? dans $\mathbb{C}[X]$?

Mêmes questions pour $(X^2 + 1)^2$.

Proposition 55

Un polynôme P irréductible est premier avec tous les polynômes qu'il ne divise pas.

Démonstration page 941

Exemple Deux polynômes irréductibles non associés sont premiers entre eux. En particulier, deux polynômes irréductibles unitaires distincts sont premiers entre eux.

Proposition 56

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Principe de démonstration. C'est une conséquence des deux exemples ci-dessus et du théorème de d'Alembert. Démonstration page 941

Exemple Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2 est irréductible si, et seulement s'il n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$. En effet :

- s'il a une racine il n'est pas irréductible d'après l'exemple 2 ci-dessus puisqu'il est de degré 2 ;
- s'il n'est pas irréductible, il possède dans $\mathbb{R}[X]$ un diviseur de degré strictement compris entre 0 et 2, donc de degré 1. Il a ainsi une racine réelle puisque tout polynôme de degré 1 possède une racine.

Proposition 57

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :

- les polynômes de degré 1 ;
- les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Principe de démonstration. On vient de voir que c'était effectivement les irréductibles de degré inférieur ou égal à 2. Il n'y en a pas de degré strictement plus grand que 2 d'après la décomposition d'un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$. Démonstration page 941

Remarque En fait :

- la proposition 37 de la page 910, qui dit que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$,
- la proposition 39 de la page 911, qui dit que tout polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ est produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif,

signifient que tout polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ est produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$. Cela permet d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 58

Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non constant est le produit d'un élément de $\mathbb{K}^*$ et d'un produit de polynômes unitaires irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$; l'écriture est unique à l'ordre près des facteurs.

Principe de démonstration. Il reste à prouver l'unicité. Démonstration page 941

Remarques

- Si A est un polynôme non constant, cette décomposition en produit de polynômes irréductibles peut encore s'écrire $A = \lambda\, P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k}$ où λ est un scalaire non nul, les P_i des irréductibles unitaires distincts deux à deux et les α_i des entiers naturels non nuls.

- Dans l'écriture précédente, on peut même à accepter que certains P_i ne soient pas des diviseurs de A en prenant les exposants α_i correspondant nuls. Ainsi, un polynôme constant non nul peut également s'écrire sous cette forme.

- Lorsqu'il y a plusieurs polynômes à décomposer, on peut ainsi écrire leurs décompositions en utilisant les mêmes irréductibles (avec des exposants éventuellement nuls) comme on le fait par exemple ci-dessous dans l'exercice 42. On peut à nouveau noter l'analogie avec les méthodes utilisées pour décomposer plusieurs entiers en produit de nombres premiers.

p.941

Exercice 42 Soit A et B des polynômes non nuls tels que :

$$A = \lambda\, P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k} \qquad \text{et} \qquad B = \mu\, P_1^{\beta_1} P_2^{\beta_2} \dots P_k^{\beta_k},$$

où $P_1, P_2, \dots, P_k$ sont des polynômes irréductibles unitaires distincts deux à deux, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ des entiers naturels éventuellement nuls. Montrer :

1. $A \mid B \iff \forall i \in [\![1,k]\!] \quad \alpha_i \leqslant \beta_i$;

2. $A \wedge B = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} P_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)}$ et $A \vee B = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} P_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$.

Remarque

Étant donné des polynômes unitaires A et B, on retrouve la formule :

$$(A \wedge B)(A \vee B) = AB$$

puisque, pour tout couple d'entiers (α, β), on a $\max(\alpha,\beta) + \min(\alpha,\beta) = \alpha + \beta$.

p.942

Exercice 43 Soit $(a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^p$.

Montrer que le polynôme $A = (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_p)$ est premier avec tout polynôme n'admettant aucun a_i pour racine.

VII Une preuve du théorème de d'Alembert

Pour démontrer le théorème de d'Alembert, nous aurons besoin d'utiliser des outils d'analyse.

Soit A un polynôme à coefficients complexes de degré $p \geqslant 1$. Pour montrer que A possède une racine complexe, considérons $\alpha = \inf\limits_{z \in \mathbb{C}} |A(z)|$, qui existe puisque $\{|A(z)| \,;\; z \in \mathbb{C}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$, et montrons que cette borne inférieure est atteinte, puis qu'elle est nulle.

Démonstration.

- Si $A=\sum_{k=0}^{p} a_k\,X^k$ avec $a_p\neq 0$, pour $|z|=r$, on a :

$$\big|A(z)\big| \geqslant |a_p\,z^p| - \left|\sum_{k=0}^{p-1} a_k\,z^k\right| \geqslant |a_p|\,r^p - \sum_{k=0}^{p-1}|a_k|\,r^k.$$

Ce minorant définit une fonction réelle polynomiale de r, qui tend vers $+\infty$ quand r tend vers $+\infty$ puisqu'elle est équivalente à $|a_p|r^p$. Elle est donc plus grande que $\alpha+1$ au voisinage de $+\infty$, ce qui prouve qu'il existe un disque D centré en 0 en dehors duquel on a $\big|A(z)\big|\geqslant \alpha+1$.

Puisque $\alpha = \inf\limits_{z\in\mathbb{C}}\big|A(z)\big|$, on peut trouver une suite de complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\big|A(u_n)\big| = \alpha$. Cette suite est donc, à partir d'un certain rang, dans le disque D, et par suite elle est bornée. On peut donc en extraire une sous–suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un complexe z_0.

Comme :

$$A(u_{\varphi(n)}) = \sum_{k=0}^{p} a_k\,u_{\varphi(n)}^k,$$

on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} A(u_{\varphi(n)}) = A(z_0)$, ce qui donne :

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty}\big|A(u_{\varphi(n)})\big| = \big|A(z_0)\big|.$$

- Montrons par l'absurde que $A(z_0)=0$ en supposant $\alpha>0$. Quitte à considérer le polynôme $\dfrac{A(z_0+X)}{A(z_0)}$, on peut supposer $\alpha=1$ et $z_0=0$.

Le polynôme non constant A s'écrit donc :

$$A = 1 - a_q\,X^q + \sum_{k=q+1}^{p} a_k\,X^k \quad\text{avec}\quad a_q\neq 0 \quad\text{et}\quad 1\leqslant q\leqslant p.$$

Posons $a_q=\rho e^{-i\theta}$ avec $\rho\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Pour $z=re^{i\theta/q}$, avec $r>0$, on a :

$$A(z) = 1-\rho\,r^q + \sum_{k=q+1}^{p} a_k\,r^k\,e^{ik\theta/q}$$

et donc :

$$\big|A(z)\big| \leqslant |1-\rho\,r^q| + \sum_{k=q+1}^{p}|a_k|\,r^k.$$

Si l'on suppose $r\leqslant \sqrt[q]{1/\rho}$, on a $|1-\rho\,r^q| = 1-\rho\,r^q$ et donc :

$$\big|A(z)\big| - 1 \leqslant -\rho r^q + \sum_{k=q+1}^{p}|a_k|\,r^k.$$

Ce majorant définissant une fonction polynomiale de r, équivalente en 0 à $-\rho\,r^q$, il est strictement négatif au voisinage de 0.

Par conséquent, il existe $z\in\mathbb{C}$ tel que $\big|A(z)\big|<1=\alpha$, ce qui est contradictoire. □

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 1 Posons $A=(a_0,\,a_1,\,\ldots,\,a_n,\,0,\,0\,,\ldots)$ et $B=(b_0,\,b_1,\ldots,\,b_m,\,0,\,0\,,\ldots)$.

- S est un polynôme, car on a, de façon évidente : $\forall k>\max(n,m) \quad s_k=a_k+b_k=0$.
- Q est un polynôme, car on a, de façon évidente : $\forall k>n \quad q_k=\lambda\, a_k=0$.
- On prouve que P est un polynôme en montrant $\forall k>n+m \quad p_k=\sum\limits_{i+j=k} a_i\, b_j=0$.

  En effet, supposons $k>n+m$. Si (i,j) est un couple tel que $i+j=k$, on a $i>n$ ou $j>m$ (sinon $i+j\leqslant n+m$) et le terme correspondant $a_i\, b_j$ est nul. Tous les termes de la somme définissant p_k étant nuls, on en déduit $p_k=0$.

Proposition 2

- C'est un sous–groupe additif de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ car il contient la suite nulle, la somme de deux polynômes est un polynôme, et l'opposé d'un polynôme P est $-P$ qui reste un polynôme.
- La multiplication des polynômes :
  * est une loi de composition interne ;
  * est commutative, car la formule donnant les coefficients du produit de deux polynômes est symétrique ;
  * est associative, car si A, B et C sont des polynômes, alors on a, en posant $D=A\,(B\,C)$:

    $$\forall n\in\mathbb{N} \quad d_n=\sum_{i+l=n} a_i\left(\sum_{j+k=l} b_j\, c_k\right)=\sum_{i+j+k=n} a_i\, b_j\, c_k,$$

    et l'expression obtenue étant symétrique en A, B et C, on en déduit :

    $$(A\,B)\,C=(B\,C)\,A \quad \text{et} \quad A\,(BC)=C\,(AB).$$

    En utilisant la commutativité, on prouve ainsi que :

    $$(A\,B)\,C=(B\,C)\,A=A\,(B\,C) \quad \text{et} \quad A\,(BC)=C\,(AB)=(AB)\,C;$$
  * possède comme élément neutre le polynôme $(1,0,0,\ldots)$;
  * est distributive par rapport à l'addition (évident sur la formule donnant le coefficient générique du produit),

Proposition 3

- Si $A=B=0$, alors $A+B=0$ et le résultat est évident.
  Sinon, posons $n=\max(\deg A,\deg B)\in\mathbb{N}$; on peut alors écrire :

  $$A=\sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k \qquad \text{et} \qquad B=\sum_{k=0}^{n} b_k\, X^k.$$

  Cela donne $A+B=\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k+b_k)\,X^k$ et prouve que $\deg(A+B)\leqslant n$.

  De plus, le coefficient de X^n de $A+B$ est a_n+b_n. Si $\deg A\neq\deg B$, par exemple $\deg A<\deg B$, alors $a_n=0$ et $b_n\neq 0$, et par suite $a_n+b_n\neq 0$; ce qui prouve que $A+B$ est de degré n.

- Si $A = 0$ ou $B = 0$, alors $AB = 0$ et :
$$\deg(AB) = \deg(0) = -\infty = \deg A + \deg B,$$
car, avec l'extension des opérations arithmétiques sur $\overline{\mathbb{R}}$ (*cf.* page 396), on a pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$:
$$n + (-\infty) = -\infty + n = -\infty.$$
- Sinon, posons $p_0 = \deg A$ et $q_0 = \deg B$. Les calculs faits dans la démonstration de la proposition 1 prouvent que :
  * les coefficients de AB d'indice strictement supérieur à $p_0 + q_0$ sont nuls, ce qui donne $\deg(AB) \leqslant p_0 + q_0$;
  * le coefficient de AB d'indice $p_0 + q_0$ vaut $a_{p_0} b_{q_0}$ qui est donc non nul, puisque c'est le produit de deux éléments non nuls de $\mathbb{K}$. Donc $\deg(AB) = p_0 + q_0$.

Exercice 1 Pas dans tous les cas. Plus précisément :
$$\deg(\lambda A) = \begin{cases} \deg A & \text{si } \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$

Proposition 7

- Si A est un polynôme de degré 0, c'est-à-dire une constante non nulle λ, le polynôme constant λ^{-1} est l'inverse de A.
- Réciproquement, si A est un polynôme inversible, c'est-à-dire tel qu'il existe un polynôme B vérifiant $AB = 1$, alors A et B sont non nuls et l'on a :
$$0 = \deg(1) = \deg(AB) = \deg A + \deg B.$$
Comme $\deg A$ et $\deg B$ sont des entiers naturels, on en déduit $\deg A = 0$.

Exercice 2 Le polynôme $P = \prod_{k=1}^{n} (X - 2k + 1)^k$ se présente comme le produit des n polynômes $P_k = (X - 2k + 1)^k$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$; comme $\deg P_k = k$, le degré de P est égal à $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}\cdot$

Exercice 3 P est la différence de deux polynômes de degré n, donc P est de degré au plus n.
Le coefficient de X^n de chacun de ces deux polynômes vaut 1, donc le coefficient de X^n de P est nul et P est de degré au plus $n-1$.
Le coefficient de X^{n-1} de P est $-2n - 5n = -7n$ d'après la formule du binôme de Newton. Ce coefficient étant non nul, $\deg P = n - 1$.

Proposition 8 La première propriété est immédiate, compte tenu des règles de calcul dans $\mathbb{K}[X]$ et dans $\mathbb{K}$.

Pour le produit, si $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$, alors :
$$AB = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{m} a_k b_\ell X^{k+\ell}$$

et, d'après les règles de calcul dans $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}(A\,B)(\alpha) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{m} a_k\, b_\ell\, \alpha^{k+\ell}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{m} a_k\, \alpha^k\, b_\ell\, \alpha^\ell\\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, \alpha^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell\, \alpha^\ell\right)\\ &= A(\alpha)\, B(\alpha).\end{aligned}$$

Exercice 4 Si $A = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, X^n$, on a $A\,(-X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\, a_n\, X^n$.

Donc par unicité de l'écriture d'un polynôme, on obtient :

- $A(-X) = A(X) \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad (-1)^n a_n = a_n \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n+1} = 0$;
- $A(-X) = -A(X) \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad (-1)^n a_n = -a_n \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n} = 0$.

Exercice 5 On a $\deg(A \circ P) = \deg(A)\,\deg(P)$.

En effet, si A est le polynôme nul, alors $A \circ P$ l'est aussi ; donc $\deg(A\circ P) = -\infty = \deg(A)\,\deg(P)$ (car $\deg P \neq 0$). Sinon, $\deg A = n \in \mathbb{N}$ et comme $\deg P^k = k \deg P$, $A \circ P$ est la somme de $n+1$ polynômes de degrés 2 à 2 différents. Donc $A \circ P$ est de même degré que $a_n P^n$, c'est-à-dire $n \deg P = \deg A \deg P$.

Exercice 6 Le polynôme 0 est divisible par tous les polynômes mais il ne divise que lui-même.

Exercice 7 $(X-1)^2(X-2)$ ne divise pas $(X-1)(X-2)$ car le degré du premier est strictement supérieur à celui du second et ils sont non nuls.

Proposition 9

$(i) \Longrightarrow (ii)$ Avec l'hypothèse (i), on peut trouver des polynômes C_1 et C_2 tels que :

$$A = B\,C_1 \qquad \text{et} \qquad B = A\,C_2$$

et donc $A = A\,C_1\,C_2$.

- Si $A = 0$, alors la relation $B = A\,C_1$ prouve que $B = 0$, et donc toute valeur $\lambda \in \mathbb{K}^*$ convient.
- Si $A \neq 0$, on peut simplifier par A, en utilisant le corollaire 6 de la page 891, ce qui donne $C_1\,C_2 = 1$.
  D'après la proposition 7 de la page 891, on en déduit que C_2 est un polynôme de degré 0, c'est-à-dire une constante non nulle.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Immédiat.

Exercice 8 La relation de divisibilité est réflexive et transitive, mais elle n'est pas antisymétrique car $X \mid 2X$ et $2X \mid X$.

Théorème 10

Unicité. Soit $(Q_1, R_1) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que :

- $A = B\,Q_1 + R_1$ avec $\deg R_1 < \deg B$,
- $A = B\,Q_2 + R_2$ avec $\deg R_2 < \deg B$.

On a alors :

$$(Q_1 - Q_2)\,B = R_2 - R_1.$$

Si $Q_1 \neq Q_2$, alors on a, d'une part :

$$\deg(R_2 - R_1) = \deg\big((Q_1 - Q_2)\,B\big) = \deg(Q_1 - Q_2) + \deg B \geqslant \deg B$$

et, d'autre part :

$$\deg(R_2 - R_1) \leqslant \max(\deg R_1, \deg R_2) < \deg B,$$

ce qui est contradictoire. Donc $Q_1 = Q_2$ et, par suite, $R_1 = R_2$.

Existence. Le polynôme $B = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k\,X^k$ étant fixé, avec $b_m \neq 0$, démontrons par récurrence sur n la propriété H_n : « pour tout polynôme A de degré strictement inférieur à n, il existe un couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = B\,Q + R$ avec $\deg R < m$. »

- H_k est vraie pour tout entier $k < m$, car si $\deg A < m$, il suffit de prendre $R = A$ et $Q = 0$.
- Supposons H_n pour un certain $n \geqslant m$, et démontrons H_{n+1}.

  Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg A < n+1$. On a alors $A = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\,X^k$ et le polynôme :

  $$A_1 = A - a_n\,b_m^{-1}\,X^{n-m}\,B \qquad (a)$$

  appartient à $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence et trouver un couple (Q_1, R) tel que :

  $$A_1 = B\,Q_1 + R \quad \text{avec} \quad \deg R < m. \qquad (b)$$

  En posant :

  $$Q = Q_1 + a_n\,b_m^{-1}\,X^{n-m}$$

  et en utilisant (a) et (b), on obtient :

  $$A = B\,Q + R \quad \text{avec} \quad \deg R < m.$$

Proposition 11 Soit A et B des éléments de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.

- Si le reste de la division euclidienne de A par B est nul, on a $A = B\,Q$ et donc B divise A.
- Réciproquement, si B divise A, il existe un polynôme Q tel que $A = B\,Q$ et l'unicité de la division euclidienne prouve que Q et 0 sont respectivement les quotient et reste de la division euclidienne de A par B, puisque $\deg 0 = -\infty < \deg B \in \mathbb{N}$.

Exercice 9

- Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = B\,Q$.
  - $*$ Si $B = 0$, alors $A = 0$ et n'importe quel polynôme convient.
  - $*$ Sinon, effectuons la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{R}[X]$:
  $$A = B\,Q_1 + R_1 \qquad \text{avec} \qquad (Q_1, R_1) \in \mathbb{R}[X] \quad \text{et} \quad \deg R_1 < \deg B. \qquad (*)$$
  Les polynômes Q_1 et R_1 sont aussi dans $\mathbb{C}[X]$ et la relation $(*)$ est la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{C}[X]$. Par ailleurs, $A = B\,Q$ est une écriture de la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{C}[X]$; l'unicité du reste et du quotient de la division euclidienne nous donne, $R = 0$ et $Q = Q_1 \in \mathbb{R}[X]$. Donc, $A = B\,Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.
- La réciproque est immédiate puisque $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

Exercice 10 Comme le reste de la division euclidienne de A par $X-\alpha$ est un polynôme de degré strictement inférieur à $\deg(X-\alpha) = 1$, c'est un polynôme constant λ. En désignant par Q le quotient, on a alors $A(X) = (X-\alpha)\,Q(X) + \lambda$.

Si l'on substitue α à X dans cette dernière relation, les résultats de la proposition 8 de la page 892 donnent $\lambda = A(\alpha)$.

Exercice 11 Notons f la fonction polynomiale associée à un polynôme de degré 3 à coefficients réels. Cette fonction vérifie, suivant le signe du coefficient dominant :

- soit $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$;
- soit $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle s'annule. Par suite, le polynôme possède au moins une racine réelle.

Proposition 13 Démontrons par récurrence sur p qu'un polynôme qui admet p racines distinctes deux à deux, notées α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$, est divisible par $\prod\limits_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)$.

- C'est vrai pour $p = 1$ d'après la proposition 12.
- Supposons le résultat vrai pour p et démontrons-le pour $p+1$. Soit un polynôme A admettant $p+1$ racines distinctes deux à deux que l'on note α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$.

  D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un polynôme $B_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que :
  $$A = B_1 \prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i).$$
  Comme α_0 est racine de A, on a $B_1(\alpha_0)\prod\limits_{i=1}^{p}(\alpha_0-\alpha_i) = 0$, ce qui prouve $B_1(\alpha_0) = 0$ puisque $\prod\limits_{i=1}^{p}(\alpha_0-\alpha_i)$ est un élément non nul de $\mathbb{K}$.

  Il existe donc un polynôme B_2 tel que : $B_1 = (X-\alpha_0)\,B_2$. On obtient alors :
  $$A = B_2 \prod_{i=0}^{p}(X-\alpha_i).$$
  Ce qui termine la démonstration par récurrence.

Exercice 12

Méthode 1 Comme $P(1) = P(2) = 0$, P admet pour racines 1 et 2. On peut alors écrire $P = (X-1)(X-2)T$ où $T \in \mathbb{K}[X]$; donc Q divise P.

Méthode 2 Les racines du polynôme Q sont 2 et 1 puisque $Q = (X-2)(X-1)$. Pour montrer que Q divise P, il suffit de montrer que le reste de la division euclidienne de P par Q est nul. Or, ce reste s'écrit $R = aX + b$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. En calculant $P(2)$ et $P(1)$, on trouve alors que $2a+b=0$ et $a+b=0$, donc $a=b=0$. Le reste de la division euclidienne de P par Q étant nul, on en déduit que Q divise P.

Exercice 13 La fonction sin n'est pas nulle, puisque $\sin\frac{\pi}{2} = 1 \neq 0$, et néanmoins elle admet une infinité de racines : les réels de la forme $k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ car $\sin k\pi = 0$. Ce ne peut dons pas être une fonction polynomiale.

Exercice 14

1. Supposons qu'il existe un polynôme Q tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \quad \dfrac{x^2-1}{x+2} = Q(x)$.
   La fonction $x \mapsto Q(x)$ est continue donc en particulier bornée au voisinage de -2, alors que $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x+2}$ tend vers $\pm\infty$ à droite et à gauche en -2. On aboutit à une contradiction.
   Donc, f n'est pas une fonction polynomiale.
2. j et $\bar{j}$ sont les racines de $X^2 + X + 1$; ce sont aussi des racines de $X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1$ puisque $j^5 - j^4 + {}^3 - j^2 + j - 1 = j^2 - j + 1 - j^2 + j - 1 = 0$ et de même pour $\bar{j}$. Donc, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
   $$X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1 = (X-j)(X-\bar{j})Q = (X^2+X+1)Q.$$
   La fonction g est donc la fonction polynomiale associée à Q.

Exercice 15

1. Soit $A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C} \quad A(z) = e^z$. Alors le polynôme $A - 1$ posséderait pour racines tous les complexes de la forme $2ik\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; il admettrait donc une infinité de racines.
2. Le polynôme $A-1$ serait donc nul. On aurait alors $A = 1$, ce qui est impossible puisque, par exemple, $A(i\pi) = e^{i\pi} = -1$.
   La fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $z \mapsto e^z$ n'est donc pas une fonction polynomiale.

Corollaire 17 D'après la proposition 13 de la page 897, il existe un polynôme Q tel que :

$$A = Q\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i).$$

Comme les polynômes A et $\prod\limits_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$ sont de même degré n, le polynôme Q est de degré 0 donc $Q = \lambda \in \mathbb{K}^*$, et le coefficient dominant de A est alors λ.

Exercice 16 Les racines de ce polynôme unitaire sont les racines n-ièmes de -1 ; on trouve donc :

$$X^n + 1 = \prod_{k=1}^{n} \left(X - \exp\left(\frac{(2\,k+1)\,i\,\pi}{n} \right) \right).$$

Lemme 18 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le cas $n = 1$ est immédiat et on obtient alors le polynôme constant égal à 1. On suppose donc maintenant $n \geqslant 2$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

Unicité Supposons qu'il existe un polynôme $L_i \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n-1$ vérifiant :

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad L_i(x_j) = \delta_i^j.$$

Alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $j \neq i$, x_j est une racine de L_i. D'après le corollaire 17 de la page 899, L_i se présente donc sous la forme $L_i = \lambda \prod\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - x_j)$ où λ est une constante déterminée par la valeur prise par L_i en x_i. En effet, de la relation $L_i(x_i) = \lambda \prod\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)$, on tire $\lambda = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)}$.

On en déduit que $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}\cdot$ D'où l'unicité du polynôme L_i.

Existence Le polynôme L_i défini par $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant jk \leqslant n \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$ est tel que $L_i(x_i) = 0$ et $L_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$. Par ailleurs, il est de degré $n-1$ comme produit de $n-1$ polynômes de degré 1. Les polynômes ainsi définis conviennent.

Proposition 19

Unicité. Supposons qu'il existe P et Q de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tels que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad P(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad Q(x_i) = y_i.$$

Alors le polynôme $P - Q$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ qui admet pour racines les n éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $\mathbb{K}$. D'après le corollaire 15 de la page 898, le polynôme $P - Q$ est donc nul. D'où l'unicité.

Existence. Notons P le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $P = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j L_j$.

- Alors P en tant que somme de polynômes de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ appartient à $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
- Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a :

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j L_j(x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j \delta_i^j = y_i.$$

Donc, P convient.

Exercice 17

1. On reprend les polynômes de Lagrange associés au triplet $(1,2,3)$ donnés dans l'exemple de la page 900. En appliquant la proposition 19 de la page 900, on obtient :
$$P = 2L_1 + 3L_2 + 6L_3 = X^2 - 2X + 3.$$
2. On peut remarquer que le polynôme X^2 convient. C'est donc l'unique solution du problème.

Exercice 18 Il faut et il suffit que les n points soient alignés sur une droite non horizontale.

Exercice 19 Le polynôme $\sum\limits_{j=1}^{n} L_j$ prend la valeur 1 en chacun des points x_i pour $i \in [\![1,n]\!]$; par unicité de la formule d'interpolation de Lagrange, il s'agit donc du polynôme constant 1.

Proposition 20 Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad Q(x_i) = y_i$. Alors, si P_0 désigne le polynôme $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j L_j$, Q et P_0 prennent les mêmes valeurs en les points $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, x_i est racine du polynôme $Q - P_0$, et donc, d'après la proposition 13 de la page 897, $Q - P_0$ est divisible par $\prod\limits_{j=1}^{n} (X - x_j)$. On en déduit l'existence d'un polynôme A tel que $Q = P_0 + A \prod\limits_{j=1}^{n} (X - x_j)$.

La réciproque est immédiate.

Exercice 20 On va bien évidemment éviter de développer ces deux polynômes pour montrer qu'ils sont égaux.

Ce sont deux polynômes de degré au plus 3. Cherchons 4 réels en lesquelles ces deux polynômes prennent la même valeur.
Il est immédiat que $P(x) = 1 = Q(x)$ lorsque $x \in \{a,b,c\}$.
Par ailleurs, $P(0) = 0 = Q(0)$.

On a ainsi 4 racines du polynôme $P - Q$ qui est de degré au plus 3 ; $P - Q$ est donc le polynôme nul. Ce qui donne $P = Q$.

Exercice 21

1. Par application de la proposition 5 de la page 891, un produit de deux fonctions polynomiales est nul si, et seulement si, l'une des deux fonctions est nulle.
2. Non. Prendre, par exemple, f telle que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g = 1 - f$.

Proposition 22 Le premier point est immédiat à partir de la définition.

Pour le deuxième, montrons que α est racine de A d'ordre au moins $p+1$ si, et seulement si, $B(\alpha) = 0$.

- Si $B(\alpha) = 0$, on peut trouver un polynôme B_1 tel que $B(X) = (X - \alpha)\, B_1(X)$, et donc :
$$A(X) = (X - \alpha)^{p+1}\, B_1(X).$$

Cela signifie que α est une racine de A d'ordre au moins $p+1$.

- Réciproquement, si α est racine de A d'ordre au moins $p+1$, alors $(X-\alpha)^{p+1}$ divise A et on peut trouver un polynôme $B_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que :
$$(X-\alpha)^{p+1}\, B_1(X) = A(X) = (X-\alpha)^p\, B(X).$$
Le polynôme $(X-\alpha)^p$ n'étant pas nul, en appliquant le corollaire 6 de la page 891, on en déduit que $(X-\alpha)B_1(X) = B(X)$ et donc $B(\alpha) = 0$.

Proposition 23

- Si $p=1$, la propriété est vraie par définition de l'ordre d'une racine.
- Supposons la propriété vraie au rang p et considérons α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ $p+1$ racines distinctes deux à deux de A d'ordre respectivement au moins égal à r_0, $r_1, \ldots, r_p$.
D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un polynôme $B_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que :
$$A = B_1 \prod_{i=1}^{p} (X-\alpha_i)^{r_i}.$$
Soit r l'unique entier (éventuellement nul) tel que :
$$B_1 = (X-\alpha_0)^r B \qquad \text{et} \qquad B(\alpha_0) \neq 0.$$
En posant $B_2 = B \displaystyle\prod_{i=1}^{p} (X-\alpha_i)^{r_i}$, on a :
$$A = (X-\alpha_0)^r\, B_2 \qquad \text{avec} \qquad B_2(\alpha_0) \neq 0.$$
Donc α_0 est racine de A d'ordre r. Cela prouve $r \geqslant r_0$. Par suite, le polynôme $\displaystyle\prod_{i=0}^{p} (X-\alpha_i)^{r_i}$ divise $(X-\alpha_0)^r \displaystyle\prod_{i=1}^{p} (X-\alpha_i)^{r_i}$ et donc aussi A. On a ainsi montré la propriété au rang $p+1$.

Ce qui termine la démonstration par récurrence.

Exercice 22 Pour $n=3$, avec les notations du cours, si :
$$A = a_3\, X^3 + a_2\, X^2 + a_1\, X + a_0 = a_3(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3),$$
on obtient les relations :
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{a_2}{a_3} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{a_1}{a_3} \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{a_0}{a_3}. \end{aligned}$$

Exercice 23

- Soit (x,y) un couple solution du système. En désignant par $X^2 - sX + p$ le polynôme unitaire ayant pour racines x et y, on a :
$$\begin{cases} s = x + y = 3 \\ p = xy = 2 \end{cases}$$
puisque $2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2)$.
Comme $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$, les couples cherchés sont $(1,2)$ et $(2,1)$.
- Réciproquement, il est immédiat de vérifier que ces deux couples conviennent.

Exercice 24

1. On a :

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2\,(x_1\,x_2 + x_1\,x_3 + x_2\,x_3) \\ &= \sigma_1^2 - 2\,\sigma_2 = -2\,p. \end{aligned}$$

2. Comme les x_k vérifient $x_k^3 + p\,x_k + q = 0$, on trouve :

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -p\,(x_1 + x_2 + x_3) - 3\,q = -3\,q.$$

Exercice 25 Comme dans l'exemple de la page 899, on écrit :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \exp\Bigl(\frac{2ik\pi}{n}\Bigr)\right).$$

Un application immédiate des relations précédentes donne :

$$\prod_{z \in \mathbb{U}_n} z = \prod_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = (-1)^{n-1} \quad \text{et} \quad \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = 0.$$

Proposition 27

- Supposons $A = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\,X^k$ avec $\deg A = n > 0$. On a donc $a_n \neq 0$.

  Comme $A' = \sum\limits_{k=1}^{n} k\,a_k\,X^{k-1}$ avec $n\,a_n \neq 0$, on en déduit que $\deg A = n - 1$.
- Si A est un polynôme constant, alors $A' = 0$. Et si $\deg A > 0$, alors, d'après (1), on a $\deg(A') \geqslant 0$ et donc $A' \neq 0$.

Proposition 28 Soit A et B des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, λ et μ des éléments de $\mathbb{K}$. Les propriétés connues de la dérivation dans l'ensemble des fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ permettent d'affirmer que les deux fonctions polynomiales associées respectivement à $(\lambda\,A + \mu\,B)'$ et $\lambda\,A' + \mu\,B'$ sont égales sur $\mathbb{R}$. Donc, d'après le corollaire 16 de la page 898, les deux polynômes $(\lambda\,A + \mu\,B)'$ et $\lambda\,A' + \mu\,B'$ sont égaux.

Proposition 32 Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Cette formule est une application de la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction polynomiale associée à A. En effet, soit n un entier naturel tel que $\deg A \leqslant n$. Alors $\widetilde{A}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc écrire, pour tout réel x :

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(x - \alpha)^n + R_n(x)$$

où

$$R_n(x) = \int_\alpha^x \frac{(x-t)^n}{n!} A^{(n+1)}\,(t)\;\mathrm{d}t.$$

Or, $A^{(n+1)}$ est le polynôme nul. Ce qui nous donne la formule demandée.

Remarque : une autre démonstration lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$ a déjà été donnée dans le cadre de l'exercice 22 de la page 657.

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$t \mapsto A(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{A^{(k)}(t)}{k!}\,(x-t)^n.$$

est alors une fonction polynomiale en tant que somme, produit et dérivées de telles fonctions. On pose alors $B(X) = A(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{A^{(k)}(X)}{k!}\,(x-X)^n$. C'est un polynôme admettant pour racines tous les réels d'après le cas précédent ; c'est donc le polynôme nul et en particulier, $B(\alpha) = 0$. On a alors :

$$A(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{A^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(x-\alpha)^n = 0,$$

cette dernière relation étant vraie pour tout réel x.

Le polynôme $A(X) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{A^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^n$ est donc le polynôme nul puisqu'il admet une infinité de racines. On en déduit que $A(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{A^{(k)}(\alpha)}{k!}\,(X-\alpha)^n$.

Exercice 26 Par application de la formule de Taylor en 1, un tel polynôme vérifie :

$$P(X) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{P^{(p)}(1)}{p!}\,(X-1)^p = 1 + 3(X-1) + \frac{8}{2}(X-1)^2 = 2 - 5X + 4X^2.$$

Réciproquement, on vérifie que ce polynôme convient.

Proposition 33 Soit α une racine d'ordre r de $A \in \mathbb{K}[X]$. On peut écrire :

$$A(X) = (X-\alpha)^r\,B(X) \qquad \text{avec} \qquad B(\alpha) \neq 0.$$

Alors, en dérivant la relation précédente, on obtient :

$$A'(X) = (X-\alpha)^{r-1}\big(r\,B(X) + (X-\alpha)\,B'(X)\big) = (X-\alpha)^{r-1}\,B_1(X),$$

avec $B_1(\alpha) = r\,B(\alpha) \neq 0$ puisque $r \geqslant 1$ et $B(\alpha) \neq 0$. Cela prouve le résultat.

Corollaire 34

- Si A est constant, le résultat est évident.
- Sinon, soit α une racine de A ; notons r son ordre de multiplicité. Alors r appartient à $\mathbb{N}^*$ et l'on peut appliquer la proposition 33 : α est racine de A' d'ordre $r-1$. Ainsi, α est racine de A' si, et seulement si, $r \geqslant 2$, c'est-à-dire si, et seulement si, α est racine multiple de A.

Proposition 35

$(i) \Longrightarrow (ii)$ Soit α une racine d'ordre r de A. D'après la proposition 33 de la page 909, pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, le scalaire α est racine d'ordre $r-k$ de $A^{(k)}$.

Donc α est racine des polynômes A, A',..., $A^{(r-1)}$ et α est racine d'ordre 0 de $A^{(r)}$, c'est-à-dire n'est pas racine de $A^{(r)}$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ En utilisant la formule de Taylor, on peut écrire :

$$\begin{aligned} A(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k &= \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{A^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k \\ &= (X-\alpha)^r + \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{A^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^{k-r} \\ &= (X-\alpha)^r B(X), \end{aligned}$$

avec $B(X) = \sum\limits_{k=r}^{+\infty} \dfrac{A^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^{k-r}$ et donc $B(\alpha) = \dfrac{A^{(r)}(\alpha)}{r!} \neq 0$.

On en déduit que α est racine d'ordre r de A.

Exercice 27 On a :

* $P(1) = n - (n+2) + (n+2) - n = 0$.
* Du calcul de $P' = n(n+2)X^{n+1} - (n+2)(n+1)X^n + (n+2)$, on déduit que $P'(1) = n(n+2) - (n+2)(n+1) + (n+2) = (n+2)(n-(n+1)+1) = 0$.
* De la même manière, le calcul de $P'' = n(n+2)(n+1)X^n - (n+2)(n+1)nX^{n-1}$ donne que $P''(1) = n(n+2)(n+1) - (n+2)(n+1)n = 0$.

On en déduit que 1 est racine d'ordre au moins 3 de P, donc que $(X-1)^3$ divise P.

Exercice 28 On vérifie que $P(2) = 0$. Après avoir calculé P', P'' et $P^{(3)}$, on vérifie que :

$$P'(2) = P''(2) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(3)}(2) \neq 0.$$

Donc 2 est racine de P d'ordre de multiplicité 3.

Par suite, P se factorise alors sous la forme $P = (X-2)^3(aX+b)$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. En identifiant les coefficients dominants et constants des deux écritures, on obtient les équations $a = 1$ et $(-2)^3 b = 24$. Ce qui donne $a = 1$ et $b = -3$.

De l'écriture $P = (X-2)^3(X-3)$, on déduit que les racines de P sont 2, d'ordre de multiplicité 3 ainsi que 3, d'ordre de multiplicité 1.

Exercice 29 Le complexe α est racine d'ordre r de A si, et seulement si, l'on a :

$$A(\alpha) = A'(\alpha) = \cdots = A^{(r-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad A^{(r)}(\alpha) \neq 0,$$

c'est-à-dire en conjuguant :

$$\overline{A(\alpha)} = \overline{A'(\alpha)} = \cdots = \overline{A^{(r-1)}(\alpha)} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{A^{(r)}(\alpha)} \neq 0.$$

Or, si $B = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, d'après les propriétés de la conjugaison des nombres complexes, on a $\overline{B(\alpha)} = B(\overline{\alpha})$.

Comme, pour tout $k \in [\![k, r]\!]$, le polynôme $A^{(k)}$ est à coefficients réels, le complexe α est racine d'ordre r de A si, et seulement si, l'on a :

$$\overline{A}(\overline{\alpha}) = \overline{A'}(\overline{\alpha}) = \cdots = \overline{A^{(r-1)}}(\overline{\alpha}) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{A^{(r)}}(\overline{\alpha}) \neq 0.$$

C'est la caractérisation du fait que $\overline{\alpha}$ est racine d'ordre r de $\overline{A}$.

Proposition 37 Désignons par α_1, $\alpha_2, \ldots$, α_p les racines (complexes) distinctes deux à deux de A et par r_1, $r_2, \ldots$, r_p leurs ordres respectifs. D'après la proposition 23 de la page 903, il existe un polynôme Q tel que $A = Q \prod\limits_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{r_k}$.

Si Q est de degré non nul, il admet au moins une racine complexe qui est alors aussi une racine de A ; il existe donc $j \in [\![1,p]\!]$ tel que α_j soit aussi racine de Q. On a alors $(X - \alpha_j)^{r_j+1}$ divise A, ce qui contredit la définition de r_j.

Par suite, Q est une constante λ et l'on a alors :

$$A = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{r_k},$$

où λ est évidemment le coefficient dominant de A.

Proposition 38 D'après la proposition 37 de la page 910, A s'écrit :

$$A = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{r_k}.$$

- Si P est divisible par A, alors, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, le polynôme $(X - \alpha_k)^{r_k}$ divise P et donc α_k est racine de P d'ordre supérieur ou égal à r_k.
- Réciproquement, si pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, le complexe α_k est racine de P à un ordre supérieur ou égal à r_k, la proposition 23 de la page 903 montre que $\prod\limits_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{r_k}$ divise P, c'est-à-dire que A divise P.

Exercice 30 Le polynôme $X^2 + X + 1$ est de degré 2 et possède 2 racines complexes distinctes j et j^2.

Si l'on pose $B(X) = X^8 + X^4 + 1$, on trouve :

$$B(j) = j^8 + j^4 + 1 = j^2 + j + 1 = 0,$$

ainsi que $B(j^2) = B(\bar{j}) = \overline{B(j)} = 0$.

Par suite, $X^2 + X + 1$ divise $X^8 + X^4 + 1$ puisque j et j^2 sont racines de B.

Exercice 31 Comme $B = (X+i)^2(X-i)^2$, pour montrer que B divise A, il suffit de prouver que $\pm i$ sont racines d'ordre au moins 2 de A. Puisque A est à coefficients réels, d'après l'exercice 29 de la page 910, il suffit de le vérifier pour i.

Or, $A(i) = 5\,i - 10\,i + 5\,i - 3\,i + 1 + 6\,i - 2 - 3\,i + 1 = 0$.

Du calcul de $A'(X) = 65\,X^{12} + 110\,X^{10} + 45\,X^8 - 15\,X^4 + 4\,X^3 - 18\,X^2 + 4\,X - 3$, on déduit que $A'(i) = 0$.

Donc, B divise A.

Proposition 39 Puisque A est à coefficients réels, on sait d'après l'exercice 29 de la page 910 que, si ω est une racine complexe non réelle de A d'ordre s, alors $\overline{\omega}$ est aussi racine d'ordre s. Comme A est scindé sur $\mathbb{C}$, il s'écrit donc :

$$A = \lambda \prod_{j=1}^{p} (X - \alpha_j)^{r_j} \prod_{k=1}^{q} (X - \omega_k)^{s_k} \prod_{k=1}^{q} (X - \overline{\omega}_k)^{s_k}$$

où λ est le coefficient dominant de A (donc $\lambda \in \mathbb{R}$) et, pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, ω_k et $\overline{\omega}_k$ sont les racines non réelles de A et, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, α_j sont les racines réelles de A.

Le résultat s'ensuit, puisque :

$$(X - \omega_k)\,(X - \overline{\omega}_k) = (X^2 + \beta_k\, X + \gamma_k) \in \mathbb{R}[X],$$

avec $\beta_k = -\omega_k - \overline{\omega}_k = -2\,\mathrm{Re}(\omega_k) \in \mathbb{R}$ et $\gamma_k = \omega_k\,\overline{\omega}_k = |\omega_k|^2 \in \mathbb{R}$.

Le polynôme $X^2 + \beta_k\, X + \gamma_k$ n'ayant pas de racine réelle, son discriminant $\beta_k^2 - 4\gamma_k$ est strictement négatif.

Exercice 32 On pourrait passer par les racines complexes, mais il est plus rapide d'écrire :

$$\begin{aligned} X^8 - 1 &= (X^4 - 1)(X^4 + 1) \\ &= (X^2 - 1)(X^2 + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1) \\ &= (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1). \end{aligned}$$

Exercice 33 Pour décomposer $X^5 + 1$, on commence par le décomposer dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^5 + 1 = \left(X - e^{\frac{i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{5}}\right)(X + 1)\left(X - e^{\frac{7i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{\frac{9i\pi}{5}}\right),$$

puis l'on regroupe les termes conjugués deux à deux :

$$\begin{aligned} X^5 + 1 &= (X + 1)\left((X - e^{\frac{i\pi}{5}})(X - e^{\frac{9i\pi}{5}})\right)\left((X - e^{\frac{3i\pi}{5}})(X - e^{\frac{7i\pi}{5}})\right) \\ &= (X + 1)\left(X^2 - 2X\cos(\tfrac{\pi}{5}) + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos(\tfrac{3\pi}{5}) + 1\right). \end{aligned}$$

Lemme 40 En effet, la relation $A = B\,Q + R$ montre que tout diviseur commun à B et R est aussi un diviseur de A (et aussi de B évidemment !).

L'inclusion inverse provient de même de la relation $R = (-Q)\,B + A$.

Proposition 41 Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, le prédicat H_n :

« Si A et B sont des polynômes non tous deux nuls vérifiant $\min(\deg A, \deg B) < n$ et si D en est un PGCD, alors $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(D)$. »

- Soit A et B des polynômes non tous deux nuls tels que $\min(\deg A, \deg B) < 0$.
  Alors l'un d'eux est nul. Supposant, par exemple, $A = 0$, on a $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B)$.
  Comme les PGCD de A et B sont les polynômes associés à B (*cf.* exemple 2 de la page 912), on en déduit H_0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit vrai. Montrons H_{n+1}. Prenons donc deux polynômes A et B tels que $\min(\deg A, \deg B) < n + 1$. Supposons, par exemple $\deg B \leqslant \deg A$. Si $\deg B < n$, le résultat est une immédiat d'après H_n. Supposons donc $\deg B = n$, et en particulier $B \neq 0$. Soit D un PGCD de A et B.
  La division euclidienne de A par B donne :
  $$A = B\,Q + R \qquad \text{avec} \qquad \deg R < \deg B.$$

D'après le lemme 40 de la page 913, on a $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(R)$ et, en particulier, D est également un PGCD de B et R.

Comme $\deg R < \deg B$, l'hypothèse H_n nous donne l'égalité $\mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(R) = \mathcal{D}(D)$, soit $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(D)$ d'après ce qui précède. On en déduit H_{n+1}.

Exercice 34 On utilise le lemme 40 de la page 913 et la division euclidienne. A partir de la relation $A = B + (X-2)$, on obtient alors :

$$\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(X-2) = \mathcal{D}(X-2),$$

puisque $X-2$ divise B. Donc, on a $A \wedge B = X-2$.

Exercice 35 Comme C divise AC et BC, il divise leur PGCD. On peut donc trouver un polynôme D tel que $(AC) \wedge (BC) = DC$.

- Étant donné que $C \neq 0$ et que DC divise AC et BC, le corollaire 6 de la page 891 nous dit que D est un diviseur commun à A et B.
- Soit P un diviseur commun à A et B. Alors PC divise AC et BC, donc leur PGCD DC. De la même façon que précédemment, on en déduit que P divise D.

  Ainsi, D est un PGCD de A et B. Comme les polynômes $(AC) \wedge (BC)$ et C sont unitaires, D l'est aussi. Cela donne la relation souhaitée, à savoir $D = A \wedge B$.

On a alors prouvé que $(AC) \wedge (BC) = (A \wedge B)C$.

Exercice 36 À l'aide de l'algorithme d'Euclide, on trouve successivement :

$$\begin{aligned}
A &= (X-1)B + X^3 - 2X - 4\\
B &= (X^3 - 2X - 4)(X+4) + X^2 - X - 2\\
X^3 - 2X - 4 &= (X^2 - X - 2)(X+1) + X - 2\\
X^2 - X - 2 &= (X-2)(X+1)
\end{aligned}$$

On en déduit que $A \wedge B = X - 2$.

Proposition 43 Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, le prédicat H_n :

« Si A et B sont des polynômes non tous deux nuls vérifiant $\min(\deg A, \deg B) < n$, alors il existe des polynômes U et V tels que $AU + BV = A \wedge B$. »

- Soit A et B des polynômes non tous deux nuls tels que $\min(\deg A, \deg B) < 0$.

  Alors l'un d'eux est nul. Supposant, par exemple, $A = 0$, on a $B \neq 0$ et $A \wedge B = B/\lambda$, où λ est le coefficient dominant de B. Il suffit alors de prendre $U = 0$ et $V = 1/\lambda$, ce qui donne H_0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit vrai. Montrons H_{n+1}. Prenons donc deux polynômes A et B tels que $\min(\deg A, \deg B) = n+1$ (le cas où $\min(\deg A, \deg B) < n$ est directement réglé par H_n). Supposons, par exemple $\deg B \leqslant \deg A$, donc $\deg B = n$, et en particulier $B \neq 0$. Soit $D = A \wedge B$.

  Effectuons la division euclidienne de A par B :

  $$A = BQ + R \qquad \text{avec} \qquad \deg R < \deg B.$$

D'après le lemme 40 de la page 913, D est également le PGCD de B et R.

Comme $\deg R < \deg B$, l'hypothèse H_n nous donne l'existence de polynômes U_1 et V_1 tels que $B\,U_1 + R\,V_1 = D$. Reste à remplacer R par $A - BQ$ pour obtenir $D = A\,U + B\,B$, avec $U = V_1$ et $V = U_1 - Q\,V_1$.

Proposition 44

- Si A et B sont premiers entre eux, alors $A \wedge B = 1$ et, d'après la proposition 43 de la page 915, il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A\,U + B\,V = A \wedge B = 1$.
- Réciproquement, s'il existe deux polynômes U et V tels que $A\,U + B\,V = 1$, alors tout diviseur commun à A et B divisant $A\,U + B\,V$ divise 1 ; il est donc de degré 0. On en déduit que A et B sont premiers entre eux.

Proposition 45 On suppose $B \neq 0$. Comme D divise A et B, on peut trouver A_1 et B_1 tels que $A = D\,A_1$ et $B = D\,B_1$. Comme $D = A \wedge B$, il existe U et V polynômes tels que $D = AU + BV$, soit encore $D = (A_1\,U + B_1\,V)\,D$. Comme D est unitaire, D est non nul et l'on peut simplifier par D. On a alors $1 = A_1\,U + B_1\,V$. Cela prouve que A_1 et B_1 sont premiers entre eux.

Proposition 46 Supposons $A \wedge B = 1$ et $A \wedge C = 1$.

D'après l'identité de Bézout, il existe $(U_1, V_1, U_2, V_2) \in \mathbb{K}[X]^4$ tel que :

$$A\,U_1 + B\,V_1 = 1 \quad \text{et} \quad A\,U_2 + C\,V_2 = 1.$$

En multipliant membre à membre ces deux égalités on obtient immédiatement une relation du type $A\,U + B\,C\,V = 1$, avec $U = A\ U_1\ U_2 + B\ V_1\ U_2 + C\ V_2\ U_1$ et $V = V_1\ V_2$. Cela prouve que A et $B\,C$ sont premiers entre eux.

Exercice 37 Supposons P et Q premiers entre eux, alors on a :

$$(P + Q) \wedge P = 1 \quad \text{et} \quad (P + Q) \wedge Q = 1,$$

puisqu'un diviseur commun à P et à $P + Q$ divise aussi $Q = (P + Q) - P$.

On en déduit que :

$$(P + Q) \wedge PQ = 1.$$

Réciproquement, supposons que $P + Q$ et PQ soient premiers entre eux.
Alors, si D est un diviseur commun de P et Q, il divise aussi $P + Q$ et PQ ; donc D est de degré 0. Ce qui prouve que P et Q sont premiers entre eux.

Exercice 38 Si a et b sont deux éléments de $\mathbb{K}$ distincts, les polynômes $X - a$ et $X - b$ sont premiers entre eux, comme le prouve l'identité de Bézout :

$$\frac{X - a}{b - a} + \frac{X - b}{a - b} = 1.$$

On en déduit, pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, que $(X - a)^p$ et $(X - b)^q$ sont premiers entre eux.

Exercice 39

1. Par exemple : $A = (X - 1)(X + 2)$, $B = (X + 2)(X - 3)$ et $C = (X + 1)(X + 5)$.
2. $A = (X - 1)(X + 2)$, $B = (X + 2)(X - 3)$ et $C = (X - 1)(X - 3)$ conviennent.

Proposition 51 Considérons un PPCM M de A et B.

- Comme M est un multiple de A et B, ses multiples sont aussi multiples de A et B.
- Réciproquement, si P est un multiple commun à A et B, en effectuant la division euclidienne de P par M, on obtient $P = MQ + R$, avec $\deg R < \deg M$.

  Alors, $R = P - MQ$ est un multiple de A et de B. Comme il est de degré strictement plus petit que celui de M, et que M a été choisi de degré minimal par définition d'un PPCM, on en déduit $R = 0$. Donc $P = MQ$ est un multiple de M.

Exercice 40 Posons $M = A \vee B$. C'est un multiple unitaire de A et B, donc MC est un multiple unitaire de AC et BC.

Soit P un multiple de AC et BC. C'est en particulier un multiple de C et l'on peut donc écrire $P = QC$, avec $Q \in \mathbb{K}[X]$. On a donc $AC \mid QC$ et $BC \mid QC$, avec $C \neq 0$; ce qui prouve que Q est un multiple commun à A et B après simplification par C. Ainsi, Q est un multiple de $M = A \vee B$ et par suite $P = QC$ est un multiple de MC.

Donc $(AC \vee BC) = (A \vee B)\,C$.

Théorème 53 Supposons $A \wedge B = 1$ et $A \mid BC$. D'après l'identité de Bézout, il existe des polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$, ce qui implique $ACU + BCV = C$.

Comme A divise ACU et BCV, on a $A \mid ACU + BCV$ et donc $A \mid C$.

Proposition 54

1. Il est évident que les multiples de AB sont des multiples communs à A et B.

   Réciproquement, supposons $A \mid P$ et $B \mid P$; il existe donc un polynôme Q tel que $P = BQ$. Comme A divise P et qu'il est premier avec B, le théorème de Gauss nous dit que A divise Q. Il existe donc un polynôme R tel que $Q = AR$, et par suite, $P = ABR$.

   Les multiples communs à A et à B sont donc les multiples de AB, ce qui prouve le résultat.
2. On peut supposer A et B unitaires quitte à les diviser par leurs coefficients dominants (ils sont non nuls par hypothèse).

   Soit $D = A \wedge B$. Prenons A_1 et B_1 tels que $A = DA_1$ et $B = DB_1$. Alors $A_1 \wedge B_1 = 1$. Comme A_1 et B_1 sont unitaires et premiers entre eux, on a $A_1 \vee B_1 = A_1 B_1$.

   Alors $A \vee B = (A_1 \vee B_1)\,D = A_1 B_1$, et par suite $(A \vee B)\,D = AB$.

Exercice 41

- Le polynôme $X^2 + 1$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$ puisqu'il est divisible par $X - i$. En revanche, $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. En effet, n'ayant pas de racine réelle, il n'est divisible par aucun polynôme de degré 1 et ses seuls diviseurs sont donc les polynômes constants non nuls et ses associés.
- Le polynôme $(X^2 + 1)^2$ n'est irréductible ni dans $\mathbb{R}[X]$, ni dans $\mathbb{C}[X]$ puisque divisible par $X^2 + 1$.

Proposition 55 Soit P un polynôme irréductible. Les diviseurs communs à P et à un polynôme A sont des diviseurs de P, donc sont soit constants, soit associés à P. Ainsi, si P ne divise pas A, les seuls diviseurs communs à P et A sont les constantes. Par suite, $A \wedge P = 1$.

Proposition 56 En effet, l'exemple 1 de la page 920 montre que les polynômes de degré 1 sont des irréductibles. Réciproquement, un polynôme irréductible est non constant, par définition, et possède donc une racine d'après le théorème de d'Alembert. L'exemple 2 de la page 920 montre alors qu'il est de degré 1.

Proposition 57

- On vient de voir que tout polynôme de degré 1 est irréductible.
- Les polynômes de degré 2 de $\mathbb{R}[X]$ dont le discriminant est strictement négatif n'ont pas de racine et sont donc irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ d'après l'exemple précédent qui montre aussi qu'il n'y a pas d'autre irréductible de degré 2.
- Enfin, la décomposition d'un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ (*cf.* la proposition 39 de la page 911) montre qu'un polynôme de degré strictement supérieur à 2 ne peut pas être irréductible puisqu'une telle décomposition sera constituée d'au moins deux polynômes non constants.

Théorème 58 On peut adapter la démonstration de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers dans $\mathbb{N}$ en utilisant le théorème de Gauss (*cf.* le théorème 24 de la page 839). Mais on peut aussi utiliser les racines.

- Soit $A = \lambda \prod\limits_{k=1}^{p} (X - a_k)^{\alpha_k}$ un polynôme A non constant, où les a_k sont des nombres complexes distincts deux à deux, les α_k des entiers naturels non nuls et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Il y a unicité d'une telle décomposition, à l'ordre près des facteurs, puisque λ est le coefficient dominant de A, les a_k sont ses racines et les α_k leurs ordres de multiplicité.
- De même, dans $\mathbb{R}[X]$ dans une décomposition :

$$A = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - a_k)^{\alpha_k} \prod_{k=1}^{q} (X^2 + b_k X + c_k)^{\beta_k},$$

où les a_k d'une part et les (b_k, c_k) vérifiant $b_k^2 - 4c_k < 0$ d'autre part sont distincts deux à deux, les α_k et β_k des entiers naturels non nuls et λ un réel non nul :

  * les racines réelles de A sont les a_k avec l'ordre de multiplicité α_k,
  * les racines non réelles sont, pour chaque $k \in [\![1, q]\!]$, les deux racines complexes du polynôme $X^2 + b_k X + c_k$ à l'ordre de multiplicité β_k,
  * λ est le coefficient dominant de A,

ce qui donne l'unicité, à l'ordre près des facteurs, de la décomposition.

Exercice 42

1. • Si $A \mid B$, alors, comme pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $P_i^{\alpha_i}$ divise A, le polynôme $P_i^{\alpha_i}$ divise aussi B. Comme P_i est premier avec P_j pour tout $j \neq i$, on a $P_i^{\alpha_i} \wedge \prod\limits_{j \neq i} P_j^{\beta_j} = 1$ d'après le corollaire 48 de la page 917. Par application du théorème de Gauss, on obtient que $P_i^{\alpha_i}$ divise $P_i^{\beta_i}$. Ce qui montre que $\alpha_i \leqslant \beta_i$

- Réciproquement, supposons $\forall i \in [\![1,k]\!] \quad \alpha_i \leqslant \beta_i$.
  Alors $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k}$ divise $P_1^{\beta_1} P_2^{\beta_2} \dots P_k^{\beta_k}$, c'est-à-dire $A \mid B$.

2. - Les diviseurs D unitaires communs à A et à B sont :
   $$D = P_1^{\delta_1} P_2^{\delta_2} \dots P_k^{\delta_k} \qquad \text{avec} \qquad \forall i \in [\![1,k]\!] \quad \delta_i \leqslant \alpha_i \quad \text{et} \quad \delta_i \leqslant \beta_i.$$
   Le diviseur unitaire de plus grand degré commun à A et à B est obtenu lorsque :
   $$\forall i \in [\![1,k]\!] \quad \delta_i = \min(\alpha_i, \beta_i),$$
   ce qui montre la première égalité.
   - Les multiples M unitaires communs à A et à B s'écrivent :
   $$M = P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} \dots P_k^{\mu_k} \qquad \text{avec} \qquad \forall i \in [\![1,k]\!] \quad \mu_i \geqslant \alpha_i \quad \text{et} \quad \mu_i \geqslant \beta_i.$$
   Le plus petit des multiples communs à A et à B est donc obtenu lorsque :
   $$\forall i \in [\![1,k]\!] \quad \mu_i = \max(\alpha_i, \beta_i),$$
   ce qui montre la deuxième égalité.

Exercice 43 Soit B un polynôme n'admettant aucun a_i pour racine. Les diviseurs unitaires de $A = (X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_p)$ sont les polynômes de la forme $\prod\limits_{i\in I}(X-a_i)$, avec $I \subset [\![1,p]\!]$ et aucun d'eux, hormis 1 (obtenu lorsque $I = \varnothing$), ne divise B puisque A et B n'ont pas de racines communes. Donc, A et B n'admettent pour diviseur unitaire commun que le polynôme 1. Ils sont donc premiers entre eux.

S'entraîner et approfondir

17.1 Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré du polynôme :

$$P(X+1) - P(X)$$

en fonction de celui de P.

17.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Factoriser le polynôme :

$$P = 1 + \frac{X}{1} + \frac{X(X+1)}{2!} + \cdots + \frac{X(X+1)\ldots(X+n-1)}{n!}.$$

17.3 Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad P(z) = \overline{z}.$$

17.4 Calculer la valeur en $1+\sqrt{2}$ du polynôme :

$$P = 2X^5 - 4X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 5X - 4.$$

On pourra utiliser la division euclidienne de P par un polynôme à coefficients rationnels qui s'annule pour $1+\sqrt{2}$.

17.5 Soit $T \in \mathbb{C}^*$. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ dont la fonction polynomiale associée est T-périodique.

17.6 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme :

$$(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$$

est divisible par $X^2 - X + 1$.

★ **17.7** Trouver les racines complexes du polynôme $X^4 + 12X - 5$ sachant que deux de ces racines ont une somme égale à 2.

17.8 Trouver une condition nécessaire et suffisante sur n pour que le polynôme $X^{2n}+X^n+1$ soit divisible par X^2+X+1.

17.9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver le reste de la division euclidienne du polynôme :

$$X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1$$

par $(X+1)^2$.

17.10 Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et a un nombre complexe. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P et a pour que a soit racine de multiplicité 3 du polynôme :

$$Q(X) = (X-a)\big(P'(X) + P'(a)\big) - 2\big(P(X) - P(a)\big).$$

⋆ **17.11** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les racines distinctes de 1 du polynôme :
$$P(X) = nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - X - 1$$
sont de module strictement inférieur à 1 et que toutes les racines de P sont simples. On pourra considérer le polynôme $Q(X) = (X-1)P(X)$.

17.12 Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que $P\big(P(X)\big) - X$ est divisible par $P(X) - X$.

17.13 Soit n et p deux entiers naturels non nuls. On considère un polynôme $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$.

Montrer que le reste de la division euclidienne de P par $X^p - 1$ est :
$$R = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{r_k},$$
où r_k désigne le reste de la division de k par p.

17.14 On considère le polynôme $P = X^3 + pX^2 + qX + r \in \mathbb{C}[X]$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur p, q et r pour qu'une des racines de P soit la somme des deux autres.

⋆ **17.15** Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les racines complexes de l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ soient en progression arithmétique.

⋆ **17.16** Soit $q \neq 0$ et x_1, x_2, x_3 les trois racines complexes de l'équation $x^3 + p\,x + q = 0$.

1. Exprimer $(x_1 - x_2)^2$ en fonction de $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$.
   Puis l'exprimer comme fonction homographique de x_3.
2. En déduire $(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 = -(4\,p^3 + 27\,q^2)$.
3. À quelle condition l'équation $x^3 + p\,x + q = 0$ possède-t-elle une racine multiple ?

17.17 On se propose de déterminer les triplets (x, y, z) vérifiant
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20. \end{cases}$$

1. Étant donné (x, y, z) un triplet solution du système, on désigne par $t^3 + a\,t^2 + b\,t + c$ le polynôme unitaire ayant pour racines x, y et z.
   Exprimer $x + y + z$, $x^2 + y^2 + z^2$ et $x^3 + y^3 + z^3$ en fonction de a, b et c.
   Calculer a, b et c, puis résoudre l'équation $t^3 + a\,t^2 + b\,t + c = 0$.
   Que peut-on en déduire en ce qui concerne le problème initial ?
2. Résoudre ce problème.

⋆ **17.18** Soit a et b des nombres complexes avec $b \neq 0$.

Trouver les polynômes de degré 5 tel que $P(X) + a$ soit divisible par $(X + b)^3$ et $P(X) - a$ par $(X - b)^3$.

17.19 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ scindé dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Montrer que le polynôme $P^2 + \lambda^2$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

⋆ **17.20** Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \geqslant 0$;

(ii) $\exists A \in \mathbb{R}[X] \quad \exists B \in \mathbb{R}[X] \quad A^2 + B^2 = P$.

⋆ **17.21** Déterminer les polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient :

$$P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0.$$

⋆ **17.22** Soit n et p deux entiers naturels non nuls tels que $n \geqslant p$.

1. Effectuer la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^p - 1$(on donnera l'expression du quotient et du reste).
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $X^n - 1$ soit divisible par $X^p - 1$.
3. Calculer le PGCD de $X^n - 1$ et de $X^p - 1$.

17.23 Étant donné des polynômes non constants A et B premiers entre eux, montrer qu'il existe un unique couple de polynômes (U_0, V_0) tel que :

$$A\,U_0 + B\,V_0 = 1 \qquad \text{avec} \qquad \deg U_0 < \deg B \quad \text{et} \quad \deg V_0 < \deg A.$$

17.24
1. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n et $k \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que si P a k racines distinctes dans $\mathbb{C}$, alors $P \wedge P'$ est de degré $n - k$.
2. Le résultat précédent est-il vrai dans $\mathbb{R}[X]$?
3. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ de degré n tel que P' divise P, $P(1) = 0$ et $P(0) = 1$.

⋆ **17.25** Soit $n \geqslant 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple de polynômes de degrés strictement inférieurs à n tel que :
   $$(1 - X)^n P(X) + X^n Q(X) = 1.$$
2. Montrer que :
   $$P(X) = Q(1 - X) \quad \text{et} \quad Q(X) = P(1 - X).$$
3. Montrer qu'il existe une constante k telle que :
   $$(1 - X)P'(X) - nP(X) = kX^{n-1}.$$
4. En déduire les coefficients de P.

Solution des exercices

17.1 Notons n le degré de P où $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$.

Si $n \leqslant 0$, alors P est un polynôme constant et $P(X+1) - P(X)$ est nul donc de degré $-\infty$.

Sinon, $a_n \neq 0$ et on a alors :

$$\deg\big(P(X+1) - P(X)\big) \leqslant \max\Big(\deg\big(P(X+1), \deg(P(X))\big)\Big) = \deg P.$$

Or, le coefficient de X^n du polynôme $P(X+1) - P(X)$ est nul et le coefficient de X^{n-1} est $na_n + a_{n-1} - a_{n-1} = na_n \neq 0$. Cela prouve que $P(X+1) - P(X)$ est exactement de degré $n-1$.

17.2 On montre par récurrence sur n que P s'écrit :

$$P = \frac{(X+1)(X+2)\dots(X+n)}{n!}.$$

17.3 Si P vérifie la condition, alors, $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) - x = 0$. Donc $P(X) = X$ puisque le polynôme $P(X) - X$ admet une infinité de racines. Or le polynôme X n'est pas solution du problème.

17.4 Le polynôme :

$$(X - 1 - \sqrt{2})(X - 1 + \sqrt{2}) = X^2 - 2X - 1$$

admet $1 + \sqrt{2}$ comme racine.

En effectuant la division euclidienne de $P = 2X^5 - 4X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 5X - 4$ par $X^2 - 2X - 1$, on trouve que le reste vaut $X - 1$.

La valeur de P en $1 + \sqrt{2}$ est donc $\sqrt{2}$.

17.5 Soit P tel que :

$$\forall x \in \mathbb{C} \quad P(x+T) = P(x).$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad P(nT) = P(0).$$

Le polynôme $P(X) - P(0)$ a ainsi une infinité de racines donc est nul . On en déduit que P est donc constant.

Comme tout polynôme constant est solution, l'ensemble des polynômes cherché est l'ensemble des polynômes constants.

17.6 Le polynôme $X^2 - X + 1$ admet deux racines simples distinctes $-j$ et $-j^2$. Il suffit donc de montrer que $-j$ et $-j^2$ sont racines de $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$.

Or, si α désigne l'une des racines de $X^2 - X + 1$, on a :

$$(\alpha - 1)^{n+2} + \alpha^{2n+1} = \alpha^{2n+4} + \alpha^{2n+1} = \alpha^{2n+1}(\alpha^3 + 1) = 0,$$

puisque $\alpha - 1 = \alpha^2$. Ce qui prouve que $X^2 - X + 1$ divise $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$.

17.7 Comme le coefficient de X^3 est nul, la somme des quatre racines vaut 0 ; si la somme de deux racines vaut 2, la somme des deux autres vaut -2 et le polynôme s'écrit sous la forme :

$$P(X) = (X^2 + 2X + a)(X^2 - 2X + b).$$

Par identification, on trouve $a = -1$ et $b = 5$. Il reste ensuite deux équations du second degré à résoudre.

On trouve que les racines sont $-1 + \sqrt{2}$, $-1 - \sqrt{2}$, $1 + 2i$ et $1 - 2i$.

17.8 Le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$ si, et seulement si, $j^{2n} + j^n + 1 = 0$ et $(j^2)^{2n} + (j^2)^n + 1 = 0$, ce qui est le cas si, et seulement si, $n \equiv 1\ [3]$ ou $n \equiv 2\ [3]$.

17.9 Comme le reste est de degré inférieur ou égal à 1, il s'écrit $R(X) = aX + b$.

En prenant la valeur en -1, on obtient $(-1)^n + n(-1)^{n-1} + 2 = -a + b$.

En dérivant et en prenant la valeur en -1, on trouve :

$$n(-1)^{n-1} + n(n-1)(-1)^{n-2} - 2 = a.$$

D'où les valeurs de a et de b :

$$a = (-1)^n n(n-2) - 2 \quad \text{et} \quad b = (-1)^n(n^2 - 3n + 1).$$

17.10 On a :

$$Q'(X) = (X - a)P''(X) - P'(X) + P'(a)$$
$$Q''(X) = (X - a)P^{(3)}(X)$$
$$Q^{(3)}(X) = P^{(3)}(X) + (X - a)P^{(4)}(X).$$

Donc, a est racine de multiplicité exactement 3 de Q si, et seulement si, $P^{(3)}(a) \neq 0$.

17.11 Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \geqslant 1$. Alors :

$$|z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1| \leqslant n|z|^n,$$

et il ne peut y avoir égalité que si 1, z, z^2, ..., z^{n-1} sont positivement proportionnels, ce qui conduit à $z = 1$.
Après calcul, on obtient :

$$Q(X) = (X-1)P(X) = nX^{n+1} - (1+n)X^n + 1 \quad \text{et} \quad Q'(X) = n(n+1)X^{n-1}(X-1).$$

On remarque alors que 0 est éventuellement racine de Q', mais pas de Q et que 1 est racine de Q et de Q'. Le polynôme Q n'admet donc qu'une seule racine multiple, à savoir 1, qui est racine double ; toutes les autres racines éventuelles de Q sont des racines simples. On en déduit que 1 est racine simple de P et que toutes les autres racines éventuelles de P sont également des racines simples.

Toutes les racines de P sont donc simples.

17.12 On écrit que :

$$P\big(P(X)\big) - X = P\big(P(X)\big) - P(X) + P(X) - X.$$

Si $P = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k X^k$, alors $P\big(P(X)\big) - P(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \big(P(X)^k - X^k\big)$.

Or, $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad P(X) - X \mid P(X)^k - X^k = (P(X) - X) \sum\limits_{j=0}^{k-1} X^j P(x)^{k-1-j}$.

Donc, $P\big(P(X)\big) - X$ est divisible par $P(X) - X$.

17.13 Si $k = pq + r_k$, alors $X^k - X^{r_k} = X^{r_k}(X^{pq} - 1)$.

Or $X^p - 1$ divise $X^{pq} - 1 = (X^p - 1) \sum\limits_{j=0}^{q-1} X^j$, donc divise $X^k - X^{r_k}$.

On en déduit que $X^p - 1$ divise $P - R = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \big(X^k - X^{r_k}\big)$. Cela prouve le résultat puisque $\deg R < p$.

17.14 Notons x_1, x_2 et x_3 les trois racines de P dans $\mathbb{C}$. Supposons que :

$$x_1 = x_2 + x_3.$$

Alors, comme on sait que $x_1 + x_2 + x_3 = 2x_1 = -p$, on en déduit que $-\frac{p}{2}$ est racine du polynôme P.

Montrons que cette condition est suffisante. Supposons que l'une des racines soit égale à $-\frac{p}{2}$. Alors, puisque :

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p = 2x_1,$$

on a $x_2 + x_3 = x_1$, ce qui prouve que l'une des racines est égale à la somme des deux autres.

Une condition nécessaire et suffisante est donc $P\left(-\dfrac{p}{2}\right) = 0$, c'est-à-dire :

$$p^3 - 4pq + 8r = 0.$$

17.15 Notons P le polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$.

Analyse Les trois racines complexes de P sont en progression arithmétique si, et seulement s'il existe deux nombres complexes u et r tels que les trois racines soient $u - r$, u et $u + r$. Or, la somme des racines de P vérifie :

$$u - r + u + u + r = 3u = -a.$$

On en déduit que $u = -\frac{a}{3}$ est racine de P.

Synthèse Supposons que $u = -\frac{a}{3}$ soit racine de P. Alors les deux autres racines v et w sont telles que :

$$u + v + w = -a = 3u.$$

Donc, $v + w = 2u$; les trois complexes sont donc en progression arithmétique.

Conclusion : les trois racines de l'équation sont en progression arithmétique si, et seulement si, $-\frac{a}{3}$ est racine de $X^3 + aX^2 + bX + c$, ce qui est équivalent à :

$$2a^3 - 9ab + 27c = 0.$$

17.16 1. On a :

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4\,x_1\,x_2 \\ &= x_3^2 + 4\,\frac{q}{x_3} \\ &= \frac{x_3^3 + 4\,q}{x_3} \\ &= \frac{-p\,x_3 + 3\,q}{x_3}\cdot\end{aligned}$$

2. On en déduit que :

$$\begin{aligned}\Delta &= (x_1 - x_2)^2\,(x_1 - x_3)^2\,(x_2 - x_3)^2 \\ &= \left(\frac{-p\,x_1 + 3\,q}{x_1}\right)\left(\frac{-p\,x_2 + 3\,q}{x_2}\right)\left(\frac{-p\,x_3 + 3\,q}{x_3}\right) \\ &= \frac{-p^3\,\sigma_3 + 3\,q\,p^2\,\sigma_2 - 9\,q^2 p\,\sigma_1 + 27\,q^3}{\sigma_3} \\ &= -(4\,p^3 + 27\,q^2).\end{aligned}$$

3. L'équation $x^3 + p\,x + q = 0$ possède une racine multiple si, et seulement si :

$$\Delta = -(4\,p^3 + 27\,q^2) = 0.$$

17.17 1. On a directement $x + y + z = -a$, et donc $a = -2$. Ensuite on obtient :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= (x + y + z)^2 - 2\,(x\,y + x\,z + y\,z) \\ &= a^2 - 2\,b \\ &= 4 - 2\,b;\end{aligned}$$

ce qui donne $b = -5$.
Enfin, comme :

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 &= -a\,\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - b\,(x + y + z) - 3\,c \\ &= -14\,a - 2\,b - 3\,c \\ &= 38 - 3\,c,\end{aligned}$$

on obtient que $c = 6$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}(t - x)\,(t - y)\,(t - z) &= t^3 + a\,t^2 + b\,t + c \\ &= t^3 - 2\,t^2 - 5\,t + 6 \\ &= (t - 1)(t + 2)(t - 3).\end{aligned}$$

Par suite, le triplet (x, y, z) est à l'ordre près égal à $(-2, 1, 3)$.

2. Réciproquement, il est aisé de vérifier que tout triplet obtenu par permutation de $(-2, 1, 3)$ est solution du système.

17.18 Soit P un polynôme de degré 5. P est solution du problème si, et seulement si, $P'(X)$ est divisible par $(X+b)^2$ et par $(X-b)^2$, $-b$ est racine de $P(X)+a$ et b est racine de $P(X)-a$, c'est-à-dire si, et seulement si, $P'(X)$ est divisible par $(X^2-b^2)^2$, $-b$ est racine de $P(X)+a$ et b est racine de $P(X)-a$.

P est donc solution si, et seulement si, :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad P'(X) = \lambda(X^2-b^2)^2 \quad \text{et} \quad P(b)-a=0 \quad \text{et} \quad P(-b)+a=0,$$

soit, si, et seulement s'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ tel que :

$$P = \lambda\left(\frac{X^5}{5} - 2b^2\frac{X^3}{3} + b^4X\right) + \mu \quad \text{et} \quad P(b)-a=0 \quad \text{et} \quad P(-b)+a=0.$$

Le polynôme $P = \lambda\left(\frac{X^5}{5} - 2b^2\frac{X^3}{3} + b^4X\right) + \mu$ est solution si, et seulement si, :

$$\lambda\left(\frac{b^5}{5} - 2b^2\frac{b^3}{3} + b^4b\right) + \mu - a = 0 \quad \text{et} \quad \lambda\left(\frac{-b^5}{5} + 2b^2\frac{b^3}{3} - b^4b\right) + \mu + a = 0,$$

soit, si, et seulement si, :

$$\mu = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{15}{8b^5}a.$$

17.19 Remarquons que les racines de $P^2+\lambda^2$ ne sont pas réelles car :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ P(x)^2+\lambda^2 > 0$$

D'autre part, P' admet, par application du théorème de Rolle, $n-1$ racines réelles.Or :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (P^2)'(x) = 2P(x)P'(x).$$

Les racines de $(P^2)'$ sont donc nécessairement réelles, ce qui prouve que $P^2+\lambda^2$ n'a pas de racine double.

17.20 $(ii) \Longrightarrow (i)$ est évident. Montrons maintenant $(i) \Longrightarrow (ii)$.

On décompose P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = \lambda\prod_{i-1}^{r}(X-x_i)^{\lambda_i}\prod_{j=1}^{q}(X^2+b_jX+c_j)^{\mu_j},$$

où $\forall i \in [\![1,r]\!] \quad x_i\in\mathbb{R}$ et $\forall j\in[\![1,q]\!] \quad (b_j,c_j)\in\mathbb{R}^2 \quad$ avec $\quad b_j^2-4c_j<0$.

On remarque que la fonction polynomiale associée à P change de signe chaque fois que la variable prise dans $\mathbb{R}$ traverse un zéro de multiplicité impaire.
D'après (i), la fonction gardant toujours le même signe, on en déduit que tous les λ_i sont pairs.
On remarque, en outre, que $\lambda \geqslant 0$.

Décomposons le terme $\prod\limits_{j=1}^{q}(X^2+b_jX+c_j)^{\mu_j}$ sur $\mathbb{C}[X]$:

$$\prod_{jj=1}^{q}(X^2+b_jX+c_j)^{\mu_j} = \prod_{j=1}^{q}(X-z_j)^{\mu_j}\prod_{j=1}^{q}(X-\overline{z_j})^{\mu_j}.$$

Or, le polynôme $\prod_{j=1}^{q}(X-z_j)^{\mu_j}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\prod_{j=1}^{q}(X-z_j)^{\mu_j} = C + iD, \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}[X] \quad \text{et} \quad D \in \mathbb{R}[X].$$

Alors, on a :

$$\prod_{j=1}^{q}(X-\overline{z_j})^{\mu_j} = C - iD \quad \text{et} \quad \prod_{j=1}^{q}(X^2+b_jX+c_j)^{\mu_j} = (C+iD)(C-iD) = C^2+D^2.$$

Finalement, on peut écrire :

$$P = \left(\sqrt{\lambda}\prod_{i-1}^{r}(X-x_i)^{\frac{\lambda_i}{2}}C\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda}\prod_{i-1}^{r}(X-x_i)^{\frac{\lambda_i}{2}}D\right)^2,$$

ce qui est de la forme cherchée.

17.21 On remarque que, si a est racine de P, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, a^{2^p} est aussi racine. Le nombre de racines étant fini, on a nécessairement :

$$\exists p \in \mathbb{N}^* \quad \exists q \in \mathbb{N}^* \quad a^{2^p} = a^{2^q} \quad \text{et} \quad p \neq q;$$

donc $|a| = 1$ ou $a = 0$.

De plus, on remarque aussi que, si a est racine, $(a-1)^2$ est également racine. D'après ce qui précède, on doit avoir $|a-1| = 1$ ou $a = 1$. On a donc $a \in \{0, 1, -j, -j^2\}$.

Or, $-j$ ne peut pas être racine car $(-j-1)^2 = j \notin \{0, 1, -j, -j^2\}$. De même $-j^2$ ne peut pas être racine car $(-j^2-1)^2 = j^2 \notin \{0, 1, -j, -j^2\}$. Les seules racines possibles de P sont par conséquent 1 et 0, donc P est de la forme $P(X) = \lambda X^p(X-1)^q$.

En écrivant, avec un polynôme de cette forme, la relation :

$$P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0,$$

on trouve que nécessairement $\lambda = -1$ et $p = q$.

Les seuls polynômes vérifiant la condition donnée sont donc $-X^p(X-1)^p$ et on vérifie que ces polynômes conviennent.

17.22 1. Fixons p et notons $Q_n(X)$ et $R_n(X)$ respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^p - 1$.

On a :

$$X^n - 1 = (X^p - 1)X^{n-p} + X^{n-p} - 1.$$

Donc :

$$Q_n(X) = X^{n-p} + Q_{n-p}(X) \quad \text{et} \quad R_n(X) = R_{n-p}(X).$$

La division euclidienne de n par p s'écrit $n = pq + r$ avec $0 \leqslant r < p$.

Alors :

$$Q_n(X) = X^{n-p} + Q_{n-p}(X) = X^{n-p} + X^{n-2p} + \cdots + X^r + Q_r(X)$$

$$R_n(X) = R_{n-p}(X) = \cdots = R_r(X).$$

Or $Q_r(X) = 0$ et $R_r(X) = X^r - 1$.

Finalement, le quotient cherché est $X^{n-p} + X^{n-2p} + \cdots + X^r$ et le reste $X^r - 1$.

2. Le polynôme $X^n - 1$ est donc divisible par $X^p - 1$ si, et seulement si, n est divisible par p.
3. D'après l'algorithme d'Euclide, le PGCD de $X^n - 1$ et de $X^p - 1$ est le PGCD de $X^p - 1$ et $X^r - 1$ où r est le reste de la division euclidienne de n par p.
   En itérant, on obtient :
   $$(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = (X^{n \wedge p} - 1) \wedge (0) = X^{n \wedge p} - 1.$$

17.23 **Unicité.** Si (U_1, V_1) et (U_2, V_2) sont deux tels couples, on a :
$$(U_1 - U_2)\, A = (V_2 - V_1)\, B.$$
Le polynôme A divise donc $(V_2 - V_1)\, B$, et comme $A \wedge B = 1$, le théorème de Gauss entraîne $A \mid (V_2 - V_1)$.

Le polynôme $V_2 - V_1$ est alors un multiple de A de degré strictement inférieur à $\deg A$, ce qui prouve qu'il est nul.

Donc $V_1 = V_2$, et par suite $U_1 = U_2$ puisque $A \neq 0$.

Existence. Soit (U, V) un couple de coefficients de Bézout pour A et B. Notons Q le quotient de la division euclidienne de U par B.

L'égalité $A\,U + B\,V = 1$ nous donne $A\,(U - Q\,B) + B\,(V + Q\,A) = 1$, donc :
$$A\,U_0 + B\,V_0 = 1 \quad \text{avec} \quad U_0 = U - Q\,B \quad \text{et} \quad V_0 = V + Q\,A.$$
Comme U_0 est le reste de la division euclidienne de U par B, on a $\deg U_0 < \deg B$.

Puisque B n'est pas constant, le polynôme U_0 ne peut pas être nul (sinon on aurait $B\,V_0 = 1$) et donc $\deg(A\,U_0) > 0$. Alors :
$$\deg(B\,V_0) = \deg(1 - A\,U_0) = \deg(A\,U_0),$$
ce qui donne $\deg V_0 = \deg A + \deg U_0 - \deg B < \deg A$.

17.24 1. On peut écrire :
$$P(X) = \lambda(X - \alpha_1)^{\lambda_1}(X - \alpha_2)^{\lambda_2} \ldots (X - \alpha_k)^{\lambda_k},$$
où α_1, $\alpha_2, \ldots,$ α_k sont les k racines de P 2 à 2 distinctes, d'ordre de multiplicité respectifs λ_1, $\lambda_2, \ldots,$ λ_k. On sait alors que α_1, $\alpha_2, \ldots,$ α_k sont racines de P', d'ordre de multiplicité respectifs $\lambda_1 - 1$, $\lambda_2 - 1, \ldots,$ $\lambda_k - 1$. On peut alors écrire :
$$P'(X) = (X - \alpha_1)^{\lambda_1 - 1}(X - \alpha_2)^{\lambda_2 - 1} \ldots (X - \alpha_k)^{\lambda_k - 1} R(X),$$
où R est un polynôme n'admettant pas α_1, $\alpha_2, \ldots,$ α_k pour racines. En utilisant l'exercice 43 de la page 922, on a alors que $R(X)$ et $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_k)$ sont premiers entre eux.

Donc :
$$P \wedge P' = (X - \alpha_1)^{\lambda_1 - 1}(X - \alpha_2)^{\lambda_2 - 1} \ldots (X - \alpha_k)^{\lambda_k - 1},$$
polynôme qui est de degré $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_k - k = n - k$.

2. Le résultat est faux dans $\mathbb{R}[X]$. Prendre, par exemple :
$$P(X) = (X - 1)^2 (X + 1)(X^2 + 1).$$
On obtient $P \wedge P' = X - 1$ alors que P n'a que 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

3. Soit D le PGCD de P et de P'.
   Si k est le nombre de racines distinctes de P, alors D est de degré $n-k$.
   Or, si P' divise P, alors D, polynôme associé à P', est de degré $n-1$; on en déduit que $k=1$. Donc P a une seule racine, qui est nécessairement 1. Par suite P est de la forme :
   $$P=\lambda(X-1)^n.$$
   La condition $P(0)=1$ impose $\lambda=(-1)^n$.
   Finalement, $P=(1-X)^n$ est le seul polynôme solution du problème.

17.25 1. Comme $(1-X)^n$ et X^n sont premiers entre eux, il suffit de reprendre dans ce cas particulier la résolution de l'exercice 17.23 de la page 945.

2. On remplace X par $1-X$ dans $(1-X)^nP(X)+X^nQ(X)=1$ et l'on utilise l'unicité du couple (P,Q).

3. Par dérivation, on a :
   $$(1-X)^{n-1}\big(-nP(X)+(1-X)P'(X)\big)=X^{n-1}\big(-nQ(X)-XQ'(X)\big).$$
   Le polynôme $(1-X)^{n-1}\big(-nP(X)+(1-X)P'(X)\big)$ admet donc 1 et 0 comme racines d'ordre au moins $n-1$. Or, son degré est inférieur strictement à $2n-1$, donc il existe $k\in\mathbb{K}$ tel que :
   $$(1-X)^{n-1}\big(-nP(X)+(1-X)P'(X)\big)=k(1-X)^{n-1}X^{n-1}.$$
   Ce qui montre le résultat demandé, puisque $\mathbb{K}[X]$ étant intègre, on peut simplifier la relation précédente par $(1-X)^{n-1}$.

4. Posons $P=\sum\limits_{j=0}^{n-1}a_jX^j$. On a alors $P'=\sum\limits_{j=1}^{n-1}j\,a_jX^{j-1}=\sum\limits_{j=0}^{n-2}(j+1)a_{j+1}X^j$. En remplaçant dans la relation $(1-X)P'(X)-nP(X)=kX^{n-1}$, on obtient :
   $$\sum_{j=0}^{n-2}(j+1)a_{j+1}X^j-\sum_{j=1}^{n-1}j\,a_jX^j-n\sum_{j=0}^{n-1}a_jX^j=kX^{n-1},$$
   soit, encore en regroupant les termes :
   $$\sum_{j=0}^{n-2}\big((j+1)a_{j+1}-(n+j)a_j\big)X^j+a_{n-1}X^{n-1}=kX^{n-1}.$$
   Par unicité des coefficients d'un polynôme, on trouve alors :
   $$a_{n-1}=k\quad\text{et}\quad\forall j\in[\![0,n-2]\!]\quad(j+1)a_{j+1}=(n+j)a_j.$$
   Ce qui nous donne successivement $a_1=na_0$, $a_2=\frac{(n+1)n}{2}a_0$, $a_3=\frac{(n+2)(n+1)n)}{6}a_0$.
   On conjecture alors que :
   $$\forall i\in[\![1,n-1]\!]\quad a_i=\binom{i-1+n}{n-1}a_0.$$

Montrons que cette conjecture est vraie par récurrence sur j. La propriété est vraie aux rangs 1, 2, 3 ; si on suppose, pour un entier $j \in [\![1, n-2]\!]$, que $a_j = \binom{j-1+n}{n-1} a_0$, on a alors :

$$\begin{aligned} a_{j+1} &= \frac{n+j}{j+1} a_j = \frac{n+j}{j+1} \binom{j-1+n}{n-1} a_0 = \frac{(n+j)(n+j-1)!}{(j+1)j!\,(n-1)!} a_0 \\ &= \frac{(n+j)!}{(j+1)!\,(n-1)!} a_0 = \binom{j+n}{n-1} a_0 \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration par récurrence (finie).

Par ailleurs, en substituant à X la valeur 0 dans la relation $(1-X)^n P(X) + X^n Q(X) = 1$, on obtient que $P(0) = 1$, donc $a_0 = 1$.

On en déduit que :

$$P = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j-1+n}{n-1} X^j.$$

Remarque : on aurait pu également écrire :

$$\begin{aligned} 1 &= (1-X+X)^{2n-1} \\ &= (1-X)^n \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n-1}{j} (1-X)^{n-1-j} X^j \right) \\ &\quad + X^n \left(\sum_{j=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{j} (1-X)^{2n-1-j} X^{j-n} \right). \end{aligned}$$

ce qui nous donne une autre expression de P :

$$P = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n-1}{j} (1-X)^{n-1-j} X^j.$$

Chapitre 18 : Fractions rationnelles

I Corps des fractions rationnelles **956**
1 Définition, règles de calcul 956
2 Représentant irréductible d'une fraction rationnelle 957
3 Degré d'une fraction rationnelle 958
4 Racines, pôles 959
5 Fractions rationnelles paires, impaires 961
II Décomposition en éléments simples **962**
1 Partie entière 962
2 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$ 963
3 Méthodes pratiques de décomposition 968
III Primitives d'une fonction rationnelle **971**
1 Cas des éléments simples de première espèce . . . 971
2 Cas des éléments simples de deuxième espèce . . . 972
Démonstrations et solutions des exercices du cours . . **974**
Exercices **983**

Fractions rationnelles

18

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Corps des fractions rationnelles

1 Définition, règles de calcul

On admet que l'on peut définir le corps des fractions de l'anneau commutatif $\mathbb{K}[X]$, c'est-à-dire un ensemble, noté $\mathbb{K}(X)$, vérifiant les propriétés suivantes.

- Tout élément $F \in \mathbb{K}(X)$ s'écrit sous la forme :

$$F = \frac{P}{Q} \qquad \text{avec} \qquad (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \text{et} \quad Q \neq 0.$$

- Si P, Q, P_1, Q_1 sont des polynômes avec Q et Q_1 non nuls, alors :

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1} \Longleftrightarrow P\,Q_1 = P_1\,Q.$$

- L'ensemble $\mathbb{K}(X)$ contient $\mathbb{K}[X]$, en identifiant tout polynôme P à la fraction rationnelle $\dfrac{P}{1}$.
- Muni des règles de calcul suivantes :
  * $\dfrac{P}{Q} + \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P\,Q_1 + P_1\,Q}{Q\,Q_1}$,
  * $\dfrac{P}{Q}\dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P\,P_1}{Q\,Q_1}$,

  où P, Q, P_1, Q_1 sont des polynômes tels que Q et Q_1 soient non nuls, $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps commutatif, appelé **corps des fractions rationnelles** à coefficients dans $\mathbb{K}$; les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés **fractions rationnelles** à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarques

- En utilisant les règles mises en place ci-dessus, lorsque P, Q et R sont des polynômes avec Q et R non nuls, on a alors les propriétés suivantes :
$$\frac{P\,R}{Q\,R} = \frac{P}{Q} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{P}{Q}\right)^{-1} = \frac{Q}{P} \text{ si } P \text{ est non nul.}$$
- Soit $F \in \mathbb{K}[X]$. Un couple $(P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $F = \dfrac{P}{Q}$ s'appelle un **représentant** de la fraction rationnelle F ; ce couple n'est pas unique. Dans l'écriture $\dfrac{P}{Q}$, le polynôme P est appelé **numérateur** et le polynôme Q **dénominateur** de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$.

2 Représentant irréductible d'une fraction rationnelle

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. Appelons D le PGCD de P et de Q. Comme $Q \neq 0$, le polynôme D n'est pas nul. En divisant numérateur et dénominateur par D, on peut écrire $F = \dfrac{P_1}{Q_1}$ avec $P_1 \wedge Q_1 = 1$.

Cela permet d'introduire la définition suivante.

Définition 1

- On appelle **représentant irréductible** d'une fraction rationnelle F tout représentant (P,Q) de F où P et Q sont premiers entre eux. On dit aussi que, pour un tel couple, $\dfrac{P}{Q}$ est une **forme irréductible** de F.
- On appelle **représentant irréductible unitaire** d'une fraction rationnelle F tout représentant irréductible (P,Q) de F tel que Q soit un polynôme unitaire. On dit aussi que, pour un tel couple, $\dfrac{P}{Q}$ est une **forme irréductible unitaire** de la fraction rationnelle F.

Proposition 1

- Si $\dfrac{P_1}{Q_1}$ est une forme irréductible d'une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q}$, alors :
$$\exists R \in \mathbb{K}[X] \quad (P = RP_1 \quad \text{et} \quad Q = RQ_1).$$
- Si $\dfrac{P}{Q}$ et $\dfrac{P_1}{Q_1}$ sont deux formes irréductibles d'une fraction F, alors :
$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad (P_1 = \lambda P \quad \text{et} \quad Q_1 = \lambda Q).$$

Principe de démonstration. Démonstration page 974

- De l'égalité $P\,Q_1 = Q\,P_1$, on peut déduire que Q_1 divise Q, puis ...
- Si l'on a deux formes irréductibles de F, alors Q divise Q_1 et vice versa.

Proposition 2

Toute fraction rationnelle admet un représentant irréductible unitaire et un seul.

Démonstration. L'unicité est évidente d'après la proposition 1 de la page précédente.

Pour l'existence, il suffit de prendre un représentant quelconque (P,Q), de diviser P et Q par leur PGCD et de diviser le numérateur et le dénominateur par le coefficient dominant de ce dernier (qui est non nul). □

Remarque Un polynôme P admet $(P,1)$ pour représentant irréductible unitaire. En particulier, $\dfrac{0}{1}$ est la forme irréductible unitaire de la fraction rationnelle nulle.

p.974 **Exercice 1** Les fractions rationnelles suivantes sont-elles irréductibles ? Si non, donner un représentant irréductible.

1. $F_1 = \dfrac{X^2 - X - 2}{X^3 - 7X + 6}$;
2. $F_2 = \dfrac{X^3 + 2X^2 - 5X - 6}{X^2 + X - 20}$.

3 Degré d'une fraction rationnelle

Définition 2

Si F est une fraction rationnelle, la quantité $\deg P - \deg Q \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ ne dépend pas du représentant (P,Q) choisi pour la fraction rationnelle F.

On l'appelle **degré** de F et on le note $\deg(F)$ ou $\deg F$.

En particulier, on a $\deg 0 = -\infty$.

Démonstration. On peut bien définir ainsi le degré de F car :

- la quantité $\deg P - \deg Q$ a toujours un sens puisque, Q étant non nul, on a $\deg Q \neq -\infty$,
- la quantité $\deg P - \deg Q$ ne dépend pas du représentant (P,Q) choisi pour la fraction rationnelle F, car si (P_1, Q_1) est un autre représentant, on a $P\,Q_1 = Q\,P_1$ et donc :

$$\deg P + \deg Q_1 = \deg(P\,Q_1) = \deg(P_1\,Q) = \deg P_1 + \deg Q,$$

c'est-à-dire, puisque $\deg Q$ et $\deg Q_1$ sont des entiers naturels :

$$\deg P - \deg Q = \deg P_1 - \deg Q_1.$$ □

Remarque Un polynôme P étant égal à la fraction $\dfrac{P}{1}$, son degré en tant que fraction rationnelle est $\deg P$. Donc la définition du degré sur $\mathbb{K}(X)$ prolonge celle du degré défini sur $\mathbb{K}[X]$.

p.974 **Exercice 2** Une fraction rationnelle de degré $n \in \mathbb{N}$ est-elle un polynôme ?

Proposition 3

Étant donné deux fractions rationnelles F_1 et F_2 de $\mathbb{K}(X)$, on a :

- $\deg(F_1+F_2) \leqslant \max(\deg F_1, \deg F_2)$;
- $\deg(F_1F_2) = \deg F_1 + \deg F_2$.

Principe de démonstration. Posons $F_1 = \dfrac{P_1}{Q_1}$ et $F_2 = \dfrac{P_2}{Q_2}\cdot$ Calculer le degré de F_1+F_2 et celui de F_1F_2 en utilisant les règles de calcul vues pour les polynômes.

Démonstration page 974

Exemple La somme de deux fractions rationnelles de degrés strictement négatifs est une fraction rationnelle de degré strictement négatif.

p.975

Exercice 3

1. Peut-on améliorer l'inégalité de la proposition 3 ?
2. Donner une condition suffisante pour que ce soit une égalité.

4 Racines, pôles

Soit F une fraction rationnelle de forme irréductible $\dfrac{P}{Q}\cdot$

Alors la proposition 1 de la page 957 nous dit que les formes irréductibles de F sont $\dfrac{\lambda P}{\lambda Q}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Comme les racines de P (respectivement Q) sont les mêmes que celles de λP (respectivement λQ), les racines des numérateurs et dénominateurs ne dépendent donc pas du représentant irréductible de F choisi. On peut alors poser les définitions suivantes.

Définition 3

Soit F une fraction rationnelle de forme irréductible $\dfrac{P}{Q}\cdot$

- On appelle **racine** ou **zéro** de F toute racine de P ;
- on appelle **pôle** de F toute racine de Q ;
- si a est une racine (respectivement un pôle) de $F \neq 0$, l'**ordre de multiplicité** de a est l'ordre de multiplicité de a en tant que racine du polynôme P (respectivement Q).

Remarque Un élément a de $\mathbb{K}$ ne peut pas être à la fois racine et pôle d'une fraction rationnelle F. En effet, si $\dfrac{P}{Q}$ est une forme irréductible de F, alors, d'après l'identité de Bezout, il existe des polynômes U et V tels que $UP+VQ=1$. On a alors $U(a)P(a)+V(a)Q(a)=1$, ce qui assure que $P(a)$ et $Q(a)$ ne peuvent pas être nuls simultanément.

Attention Les racines (respectivement les pôles) d'une fraction rationnelle F ne peuvent être caractérisées qu'à partir d'une forme irréductible de F.

Par exemple, $F = \dfrac{X^3-1}{X^2-1}$ n'admet 1 ni comme racine ni comme pôle, car une forme irréductible est $F = \dfrac{X^2+X+1}{X+1}\cdot$

En revanche, si $\dfrac{P}{Q}$ est un représentant non nécessairement irréductible de la fraction rationnelle F, il est immédiat que les pôles de F sont *des* racines de Q.

Définition 4

Soit F une fraction rationnelle, de forme irréductible $\dfrac{P}{Q}$, dont on désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble des pôles.

- Pour $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\mathcal{A}$, on définit l'élément de $\mathbb{K}$, noté $F(\alpha)$, par $F(\alpha) = \dfrac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}\cdot$
- La fonction définie sur $\mathbb{K} \setminus \mathcal{A}$ par $x \mapsto F(x)$ est appelée **fonction rationnelle** associée à la fraction rationnelle F.

Remarque L'ensemble D_f précédent est évidemment inclus dans le complémentaire de l'ensemble des racines de Q.

Définition 5

Une fonction rationnelle complexe est une fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$:

- définie sur une partie $D_f \subset \mathbb{C}$;
- pour laquelle il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ tels que :

$$\forall z \in D_f \quad f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\cdot$$

Exemples

1. La relation $f(z) = \dfrac{z^2-4z+3}{z^2-1}$ définit une fonction rationnelle sur $D_f = \mathbb{C}\backslash\{\pm1\}$.
2. La relation $g(z) = \dfrac{z-3}{z+1}$ définit une fonction rationnelle sur $D_g = \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

Avec ces notations :

- la fonction f est évidemment une restriction de g ;
- si D est partie de $\mathbb{C}$ incluse dans le complémentaire de $\{\pm1\}$, alors ces relations définissent deux fonctions égales sur D.

Remarques

1. Si $F \in \mathbb{K}(X)$ s'écrit sous une forme $F = \dfrac{P_1}{Q_1}$ non nécessairement irréductible, et si $Q_1(\alpha) \neq 0$, alors α n'est pas pôle de F et on a :
$$F(\alpha) = \frac{P_1(\alpha)}{Q_1(\alpha)}.$$

2. Étant donné des fractions rationnelles F et G, des scalaires λ et μ, si $\alpha \in \mathbb{K}$ n'est pôle ni de F ni de G, alors α n'est pôle ni de $\lambda F + \mu G$ ni de $F G$, et on a :
$$(\lambda F + \mu G)(\alpha) = \lambda F(\alpha) + \mu G(\alpha) \quad \text{et} \quad (F G)(\alpha) = F(\alpha)\, G(\alpha).$$

5 Fractions rationnelles paires, impaires

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle avec $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.
Alors le polynôme $Q(-X)$ est non nul. On peut donc définir la fraction rationnelle $\dfrac{P(-X)}{Q(-X)}$ que l'on note $F(-X)$.
En effet, si (P_1, Q_1) est un autre représentant de la fraction F, l'égalité $P Q_1 = P_1 Q$ entraîne $P(-X)\, Q_1(-X) = P_1(-X)\, Q(-X)$ et le quotient $\dfrac{P(-X)}{Q(-X)}$ ne dépend donc pas du représentant (P, Q) choisi pour la fraction rationnelle F.

Remarque Si $F \in \mathbb{K}(X)$, la fraction rationnelle $F(X)$ est de même degré que $F(-X)$, puisque pour tout polynôme R, les degrés de R et de $R(-X)$ sont les mêmes.

Définition 6
Une fraction rationnelle F est dite **paire** (respectivement **impaire**) si $F(X) = F(-X)$ (respectivement $F(-X) = -F(X)$).

p.975

Exercice 4 Soit F une fonction rationnelle de représentant (P, Q).

1. Si P et Q sont deux polynômes pairs, vérifier que F est paire.
À quelle condition simple sur P et Q aura-t-on F impaire ?
2. Si F est paire, vérifier que le polynôme $P(X)\, Q(-X)$ est pair et qu'il existe un représentant (P_1, Q_1) de F formé de deux polynômes pairs.
3. Si F est impaire, montrer qu'alors on peut trouver un représentant (P_2, Q_2) de F avec P_2 impair et Q_2 pair.

II Décomposition en éléments simples

1 Partie entière

Proposition 4

Toute fraction rationnelle F s'écrit, de façon unique, comme la somme d'un polynôme, appelé **partie entière** de F, et d'une fraction rationnelle de degré strictement négatif.

Principe de démonstration.

Unicité. Supposons qu'il existe $(E_1, E_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(F_1, F_2) \in \mathbb{K}(X)^2$ tels que :

$$\deg F_1 < 0 \quad , \quad \deg F_2 < 0 \quad \text{et} \quad F = E_1 + F_1 = E_2 + F_2.$$

L'étude du degré de $E_1 - E_2$ va nous permettre de montrer que $E_1 = E_2$, puis d'en déduire que $F_1 = F_2$.

Existence Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ avec $Q \neq 0$. Effectuer la division euclidienne de P par Q.

Démonstration page 976

Point méthode

D'après la démonstration précédente, pour trouver la partie entière d'une fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$, il suffit de trouver le quotient de la division euclidienne du numérateur P par le dénominateur Q.

p.976

Exercice 5 Déterminer la partie entière dans les cas suivants :

1. F est une fraction rationnelle de degré strictement négatif ;
2. F est un polynôme ;
3. F est une fraction rationnelle de degré 0.

p.976

Exercice 6 Quelle est la partie entière de la fraction $\dfrac{X^5}{(X^2+X+1)^2}$?

p.976

Exercice 7

1. Montrer que la partie entière d' une fraction rationnelle paire est paire. De même, on montre que la partie entière d'une fraction rationnelle impaire est impaire.
2. Quelle est la partie entière de la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^5+X^3+X}{(X^2+1)^2}$?

2 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$

On admet le résultat suivant.

Théorème 5

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ s'écrivant sous forme irréductible unitaire $F = \dfrac{A}{B}\cdot$

Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que la décomposition en produit de facteurs irréductibles de B dans $\mathbb{K}[X]$ soit de la forme :

$$B = \prod_{i=1}^{n} Q_i^{r_i}$$

où les polynômes $Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_n$ sont des polynômes irréductibles, unitaires, distincts 2 à 2 et les entiers naturels $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n$ sont non nuls.

Alors, il existe un unique polynôme E et une unique famille de polynômes $(P_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant r_i}}$ tels que :

$$F = E + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{r_i}\frac{P_{i,j}}{Q_i^j}\right) \qquad \text{et} \qquad \deg\Big(\frac{P_{ij}}{Q_i}\Big) < 0.$$

Cette écriture s'appelle la **décomposition en éléments simples** sur $\mathbb{K}$ de la fraction rationnelle F.

Remarques

- Si Q_i est de la forme $X - a_i$ avec $a_i \in \mathbb{K}$, alors les polynômes $(P_{ij})_{1\leqslant j\leqslant r_i}$ sont des constantes et on dit que $\displaystyle\sum_{j=1}^{r_i}\frac{P_{i,j}}{(X-a_i)^j}$ est la **partie polaire** de F associée au pôle a_i.
- Dans le cas particulier où F est un polynôme, on a alors $B = 1 = \prod\limits_{i=1}^{0} Q_i^{r_i}$ en conformité avec la convention prise pour les produits lorsque $n = 0$; la décomposition en éléments simples de F est alors $F = F$, c'est-à-dire que l'on a $E = F$ et la famille des $P_{i,j}$ est vide.

Détermination de la partie polaire associé à un pôle simple

Soit F une fraction rationnelle admettant a pour pôle simple.

On écrit $F = \dfrac{P}{(X-a)\,Q_1}$ où Q_1 est un polynôme n'admettant pas a pour racine.

On cherche le scalaire λ_1 tel que $F = \dfrac{\lambda_1}{X-a} + F_0$ où F_0 est une fraction rationnelle qui n'admet pas a pour pôle.

En multipliant cette égalité par $X-a$, on obtient :

$$\frac{P}{Q_1} = \lambda_1 + (X-a)\,F_0$$

ce qui, en substituant a à X, donne $\lambda_1 = \dfrac{P(a)}{Q_1(a)}\cdot$

On obtient ainsi la proposition suivante.

Proposition 6

Soit F une fraction rationnelle admettant a pour pôle simple. On écrit F sous la forme :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(X-a)\,Q_1}\cdot$$

où Q_1 est un polynôme n'admettant pas a pour racine.

La partie polaire relative au pôle a est alors :

$$\frac{\lambda_1}{X-a} \quad \text{avec} \quad \lambda_1 = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}\cdot$$

Démonstration. En dérivant la relation $Q=(X-a)Q_1$, on obtient $Q' = (X-a)\,Q_1' + Q_1$, puis en évaluant cette égalité en a, on trouve la dernière relation. □

Point méthode

- La formule $\lambda_1 = \dfrac{P(a)}{Q_1(a)}$ est utilisée lorsque le dénominateur se factorise simplement.
- En revanche, on utilise $\lambda_1 = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$ lorsque le dénominateur est développé, donc facile à dériver.

p.977

Exercice 8 Dans les deux cas suivants, déterminer les pôles de la fraction rationnelle, puis les parties polaires associés à chacun de ces pôles :

1. $F = \dfrac{X^2+5}{X^2+X-2}$;
2. $F = \dfrac{1}{X^5-1}\cdot$

Détermination de la partie polaire associé à un pôle double

Soit F une fraction rationnelle admettant a pour pôle double.

On écrit $F = \dfrac{P}{(X-a)^2\,Q_2}$ où $Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ et $Q_2(a) \neq 0$.

On cherche les scalaires λ_1 et λ_2 tels que :

$$F = \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \frac{\lambda_1}{X-a} + F_0$$

où F_0 est une fraction rationnelle qui n'admet pas a pour pôle.
En multipliant cette égalité par $(X-a)^2$, on obtient :

$$\frac{P}{Q_2} = \lambda_2 + \lambda_1\,(X-a) + (X-a)^2\,F_0$$

ce qui, en substituant a à X, donne $\lambda_2 = \dfrac{P(a)}{Q_2(a)}\cdot$

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 7

Soit F une fraction rationnelle admettant a pour pôle double. On peut écrire $F = \dfrac{P}{(X-a)^2\,Q_2}$ où Q_2 est un polynôme n'admettant pas a pour racine. La partie polaire relative au pôle a est alors :

$$\frac{\lambda_1}{X-a} + \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} \quad \text{avec} \quad \lambda_2 = \frac{P(a)}{Q_2(a)} \quad \text{et} \quad \lambda_1 \in \mathbb{K}\cdot$$

Pour trouver λ_1, on peut alors retrancher $\dfrac{\lambda_2}{(X-a)^2}$ pour obtenir une fraction dont a n'est pas pôle ou est pôle simple, ce qui ramène au cas précédent.

p.977 **Exercice 9** Donner les parties polaires associées à chacun des pôles de la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^5+1}{X(X-1)^2}\cdot$

Remarque Cette technique se généralise facilement. Si a est pôle d'ordre n, alors on écrit $F = \dfrac{P}{(X-a)^n\,Q_n}$ avec $Q_n(a) \neq 0$, et la partie polaire relative au pôle a est :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\lambda_p}{(X-a)^p} \quad \text{avec} \quad \lambda_n = \frac{P(a)}{Q_n(a)},$$

comme on le voit en multipliant l'égalité $F = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{\lambda_p}{(X-a)^p} + F_0$ par $(X-a)^n$ et en substituant a à X.

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Dans cette partie, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Tout polynôme de degré au moins 1 est scindé dans $\mathbb{C}$; les facteurs Q_i sont tous de la forme $Q_i = X - a_i$ et les polynômes P_{ij} sont alors des constantes. On peut donc réécrire le théorème 5 de la page 963 sous la forme suivante.

Théorème 8

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ dont les pôles sont les complexes $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$ distincts deux à deux et d'ordres de multiplicité respectifs $r_1,\ r_2,\ldots,\ r_n$. Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{C}[X]$ et une unique famille de scalaires $(\lambda_{k,\ell})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant \ell\leqslant r_i}}$ tels que :

$$F = E + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\ell=1}^{r_k} \frac{\lambda_{k,\ell}}{(X-a_k)^{\ell}}\right).$$

Autrement dit, toute fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$ est la somme de sa partie entière et des parties polaires associées à chacun de ses pôles. Cette écriture s'appelle la **décomposition en éléments simples** sur $\mathbb{C}$ de F.

Remarque Si F est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ est $F = F + 0$, en conformité avec la convention prise pour les sommes et les produits indexés de $k=1$ à $k=0$.

Exemples

1. La partie entière de la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^5+1}{X(X-1)^2}$ est X^2+2X+3.

   L'exercice 9 de la page précédente nous donne donc :

$$F = X^2+2X+3+\frac{1}{X}+\frac{2}{(X-1)^2}+\frac{3}{X-1}\cdot$$

2. Le deuxième point de l'exercice 8 de la page 964 nous donne les parties polaires associées aux cinq pôles simples de la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{X^5-1}\cdot$

   Ces pôles sont 1, $\omega_1 = e^{2i\pi/5}$, $\omega_2 = e^{4i\pi/5} = \omega_1^2$, $\overline{\omega_1}$ et $\overline{\omega_2} = \overline{\omega_1}^2$. Comme la partie entière est nulle, on a :

$$F = \frac{1}{5(X-1)}+\frac{\omega_1}{5(X-\omega_1)}+\frac{\overline{\omega_1}}{5(X-\overline{\omega_1})}+\frac{\omega_1^2}{5(X-\omega_1^2)}+\frac{\overline{\omega_1}^2}{5(X-\overline{\omega_1}^2)}\cdot$$

p.977

Exercice 10 Soit P un polynôme dont les racines complexes sont $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$, d'ordres de multiplicité respectifs $r_1, r_2,\ldots,\ r_n$.

1. Exprimer P et P' à l'aide des racines de P.
2. En déduire la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}\cdot$

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Dans cette partie, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Les polynômes irréductibles sont alors, d'une part, les polynômes de degré 1 et, d'autre part, les polynômes de degré 2 sans racine réelle. Les éléments simples sont donc aussi de deux types :

- **les éléments simples de première espèce** dont les numérateurs sont des réels, correspondant aux facteurs irréductibles de degré 1 ;
- **les éléments simples de deuxième espèce** dont les numérateurs sont des polynômes de degré au plus 1, correspondant aux facteurs irréductibles de degré 2.

On peut donc réécrire le théorème 5 de la page 963 sous la forme suivante.

Théorème 9

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle admettant pour forme irréductible unitaire $F = \dfrac{A}{B}\cdot$ Il existe $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tel que la décomposition en produit de facteurs irréductibles de B soit de la forme :

$$B = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)^{r_k} \prod_{\ell=1}^{m} (X^2 + p_\ell X + q_\ell)^{t_\ell}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les racines réelles distinctes deux à deux de B, d'ordres de multiplicité respectifs $r_1, r_2, \ldots, r_n$ et $X^2 + p_1 X + q_1$, $X^2 + p_2 X + q_2, \ldots, X^2 + p_m X + q_m$ sont des polynômes deux à deux distincts sans racine réelle, $t_1, t_2, \ldots, t_m$ sont des entiers naturels non nuls.

Alors, il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{C}[X]$, une unique famille de réels $(\lambda_{k,u})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant u\leqslant r_k}}$ et une unique famille de couples de réels $(\alpha_{\ell,v}, \beta_{\ell,v})_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant m\\ 1\leqslant v\leqslant t_\ell}}$ tels que :

$$F = E + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{u=1}^{r_k} \frac{\lambda_{k,u}}{(X - a_k)^u} \right) + \sum_{\ell=1}^{m} \left(\sum_{v=1}^{r_\ell} \frac{\alpha_{\ell,v} X + \beta_{\ell,v}}{(X^2 + p_\ell X + q_\ell)^v} \right).$$

Cette écriture s'appelle la **décomposition en éléments simples** sur $\mathbb{R}$ de la fraction $F \in \mathbb{R}(X)$.

Remarque De même que dans le cas complexe, si F est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ est $F = F + 0$.

p.978 **Exercice 11** Donner la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $F = \dfrac{1}{X^4+1}\cdot$

Remarque Pour trouver la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$, on peut commencer par chercher la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et regrouper les termes conjugués deux par deux ; on peut bien évidemment utiliser aussi la forme donnée dans le théorème 9. Ces deux techniques sont mises à l'oeuvre dans les exercices qui suivent.

3 Méthodes pratiques de décomposition en éléments simples

On cherche à décomposer ici des fractions rationnelles qui ne sont pas des polynômes. On considère alors une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q}$ à coefficients complexes dont les pôles sont a_1, $a_2, \ldots$, a_n, d'ordres de multiplicité respectifs r_1, $r_2, \ldots$, r_n. La décomposition en éléments simples de F est de la forme :

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X - a_i)^j} \right).$$

- La détermination de la partie entière E se fait à l'aide de la division euclidienne de P par Q, division dont seul le quotient nous intéresse.
- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, les coefficients λ_{i,r_i} se calculent immédiatement à l'aide des formules :
$$\lambda_{i,r_i} = \frac{P(a_i)}{Q_i(a_i)}$$
avec $Q = (X - a_i)^{r_i}\, Q_i$ (*cf.* la remarque de la page 965) .
- Si tous les pôles sont simples, on a immédiatement la décomposition en éléments simples de F. Sinon, on peut retrancher à F chaque fraction $\dfrac{\lambda_{i,r_i}}{(X - a_i)^{r_i}}$ et recommencer avec la fraction ainsi obtenue. Mais il est souvent beaucoup plus rapide de déterminer les autres coefficients en utilisant certaines des méthodes qui suivent.

Si la fraction est à coefficients réels...

Si F est une fraction rationnelle à coefficients réels et si a est un pôle non réel de F d'ordre r, alors $\overline{a}$ est aussi un pôle d'ordre r et les coefficients des parties polaires associées à a et $\overline{a}$ sont conjugués deux à deux.
En effet :

- puisque le dénominateur Q de F est réel, si a est une racine non réelle de Q, alors $\overline{a}$ est aussi racine de Q avec le même ordre de multiplicité d'après l'exercice 29 de la page 910.
- Si $F = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i}{(X - a)^i} + F_1$, où a n'est pas pôle de la fraction rationnelle F_1, alors, pour tout complexe z qui n'est pas un pôle de F :
$$F(\overline{z}) = \overline{F(z)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\overline{\lambda_i}}{(\overline{z} - \overline{a})^i} + \overline{F_1(z)},$$
et la fraction rationnelle $\overline{F_1}$ n'admet pas $\overline{a}$ pour pôle. On peut en déduire

que :
$$F = \sum_{i=1}^{r} \frac{\overline{\lambda_i}}{(X-\overline{a})^i} + F_2,$$
où F_2 est une fraction rationnelle n'admettant pas $\overline{a}$ pour pôle.

Donc, par unicité de la partie polaire, la partie polaire associée au pôle $\overline{a}$ est $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{\overline{\lambda_i}}{(X-\overline{a})^i}$.

p.978

Exercice 12 Soit $F = \dfrac{1}{(X^2+1)(X^2+X+1)}$.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tels que :
$$\frac{1}{(X^2+1)(X^2+X+1)} = \frac{\alpha}{X-i} + \frac{\overline{\alpha}}{X+i} + \frac{\beta}{X-j} + \frac{\overline{\beta}}{X-j^2}.$$
2. Déterminer les valeurs de α et β.
3. Donner alors la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de F.
4. Retrouver directement cette décomposition sur $\mathbb{R}$ (sans passer par celle sur $\mathbb{C}$).

   Indication : on pourra multiplier par X^2+1 et substituer i à X, puis multiplier par X^2+X+1 et substituer $j = \exp(2i\pi/3)$ à X.

La méthode utilisée dans la dernière question de cet exercice peut se généraliser.

Point méthode

Lorsqu'une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{(X^2+pX+q)\,Q}$ admet un facteur irréductible simple X^2+pX+q au dénominateur, on peut écrire *a priori* la décomposition en éléments simples de F sous la forme $F = \dfrac{aX+b}{X^2+pX+q} + \cdots$ et multiplier cette égalité par X^2+pX+q. En substituant à X un nombre complexe ω vérifiant $\omega^2+p\omega+q$, on obtient une égalité de la forme $a\omega+b = \dfrac{P(\omega)}{Q(\omega)}$ et l'on essaie d'écrire le membre de droite sous la forme $\alpha\omega+\beta$, avec α et β réels, ce qui donne $a=\alpha$ et $b=\beta$.

Si la fraction est paire ou impaire…

Si la fraction rationnelle F est paire ou impaire et que a est un pôle de F d'ordre n, alors $-a$ est aussi pôle de F d'ordre n et la comparaison des décompositions en éléments simples de $F(X)$ et $F(-X) = \pm F(X)$ donne des relations entre les coefficients.

p.979 **Exercice 13** Déterminer la décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{4}{(X^2-1)^2}\cdot$

Si la fraction est de degré strictement négatif...

Soit F une fraction rationnelle de degré strictement négatif. Si f est la restriction à $\mathbb{R}$ privé des pôles de F de sa fonction rationnelle associée, alors la fonction $x \mapsto x^{-\deg F} f(x)$ a une limite finie en $+\infty$; on peut ainsi trouver des relations entre les coefficients des termes en $\dfrac{1}{X-a_i}$ de la décomposition en éléments simples de F.

p.979 **Exercice 14** Soit la fraction rationnelle $F = \dfrac{4X^3}{(X^2-1)^2}\cdot$

1. Montrer que :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X-1)^2} - \frac{b}{(X+1)^2} \quad \text{avec} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Déterminer les valeurs de a et b.

S'il ne reste plus qu'un ou deux coefficients à calculer...

Lorsqu'il ne reste plus qu'un ou deux coefficients à déterminer, on peut substituer à X une ou deux valeurs simples.

p.980 **Exercice 15** Soit $F = \dfrac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)}\cdot$

1. Montrer que sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ est

$$\frac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)} = 1 + \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{\overline{c}}{X+i}\cdot$$

2. Calculer c et a.
3. En déduire b à l'aide d'une substitution.
4. Quelle est la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{R}$?

III Primitives d'une fonction rationnelle

Une fonction rationnelle est continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas de pôle ; elle admet alors sur tout intervalle de ce type des primitives. Pour déterminer une de ses primitives, on peut décomposer la fonction rationnelle en éléments simples et trouver une primitive de chacun des éléments simples.

1 Cas des éléments simples de première espèce

Proposition 10

Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ et $a \in \mathbb{C}$. Sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$ ne contenant pas a :

$$x \mapsto \frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1} \text{ est une primitive de } x \mapsto (x-a)^n.$$

Proposition 11

- Si $a \in \mathbb{R}$, sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$ ne contenant pas a :

$$x \mapsto \ln|x-a| \text{ est une primitive de } x \mapsto \frac{1}{x-a}.$$

- Si $a = \alpha + i\,\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, alors, sur tout $\mathbb{R}$, la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln\big((x-\alpha)^2 + \beta^2\big) + i\ \mathrm{Arctan}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$$

  est une primitive de la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{x-a} = \frac{1}{x-\alpha-i\,\beta}.$$

Principe de démonstration. Il suffit de dériver les fonctions données.

Démonstration page 980

p.981

Exercice 16 Sur quels intervalles, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2-1)(x-2)^2}$ admet-elle des primitives ? Les calculer.

p.981

Exercice 17 Même exercice pour $f : x \mapsto \dfrac{5}{(x^2+x+1+i)}$.

p.981

Exercice 18 Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^4}$ sur $]-1,1[$.

Il sera préférable d'utiliser ici la décomposition sur $\mathbb{R}$.

2 Cas des éléments simples de deuxième espèce

Proposition 12

Soit b et c des réels tels que $b^2 - 4c > 0$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{2x+b}{x^2+bx+c}$ est $x \mapsto \ln(x^2+bx+c)$.

Proposition 13

Soit b et c des réels tels que $b^2 - 4c > 0$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+bx+c}$ est :

$$x \mapsto \frac{1}{\omega} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+b/2}{\omega}\right) \qquad \text{avec} \qquad \omega = \sqrt{c - \frac{b^2}{4}}.$$

Démonstration. Il suffit de dériver les expressions données pour les primitives. □

Remarque On retiendra que :

- la première expression $\dfrac{2x+b}{x^2+bx+c}$ est de la forme :
$$\frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{où} \quad u(x) = x^2+bx+c\ ;$$
- pour la deuxième, on met le trinôme $x^2+b\,x+c$ sous forme canonique :
$$\frac{1}{x^2+b\,x+c} = \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\omega^2} \qquad \text{avec} \qquad \omega = \sqrt{c-\frac{b^2}{4}}$$
dont on peut donner une primitive à l'aide du résultat suivant, qui est évident en dérivant :
$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad \text{si} \qquad a \in \mathbb{R}^*.$$

Pour calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{\lambda\,x+\mu}{x^2+b\,x+c}\,\mathrm{d}x$ où b et c sont réels vérifiant $b^2-4c<0$, la décomposition sur $\mathbb{C}$ donne, en général, des calculs plus compliqués que la méthode suivante qu'il est bon de savoir mettre en œuvre.

Point méthode

Pour calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{\lambda\, x+\mu}{x^2+b\,x+c}\,\mathrm{d}x$ où b et c sont des réels vérifiant $b^2-4c<0$, on peut :

- soit commencer par faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur en utilisant tous les termes en t :
$$\int_0^x \frac{\lambda\, t+\mu}{t^2+b\,t+c}\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{2}\int_0^x \frac{2t+b}{t^2+b\,t+c}\,\mathrm{d}t - \left(\frac{b\,\lambda}{2}-\mu\right)\int_0^x \frac{1}{t^2+b\,t+c}\,\mathrm{d}t\ ;$$
et utiliser ensuite les propositions précédentes pour exprimer chacune des intégrales.
- soit remarquer qu'une telle primitive s'écrit sous la forme $\alpha\, f+\beta\, g$, où :
$$f\ :\ x\mapsto \ln(x^2+b\,x+c) \qquad \text{et} \qquad g\ :\ x\mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right),$$
avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. On peut alors déterminer α et β en dérivant cette expression (méthode des coefficients indéterminés).

p.981 **Exercice 19** Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3-1}$ pour tout $x\in\,]-\infty,1[$.

p.982 **Exercice 20** Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x\mapsto \dfrac{x^3}{x^2+2x+2}$ en utilisant la méthode des coefficients indéterminés.

Remarque Pour certaines fonctions rationnelles, effectuer préalablement un changement de variables judicieusement choisi peut éviter une fastidieuse décomposition en éléments simples. C'est le cas dans l'exemple suivant.

p.982 **Exercice 21** Trouver une primitive sur $I=\,]1,+\infty[$, *sans* utiliser de décomposition en éléments simples, de la fonction $x\mapsto \dfrac{x^2}{x^3-1}\cdot$

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 1

- On a $P\,Q_1 = Q\,P_1$, et donc Q_1 divise $Q\,P_1$. Comme P_1 et Q_1 sont premiers entre eux, on en déduit, d'après le théorème de Gauß, que Q_1 divise Q.

  Il existe alors un polynôme $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = R\,Q_1$; comme $Q_1 \neq 0$, de l'égalité $P_1\,R\,Q_1 = Q_1\,P$, on déduit $P = R\,P_1$.
- Soit (P,Q) et (P_1,Q_1) deux représentants irréductibles de F. Alors, d'après le point précédent, Q divise Q_1 et Q_1 divise Q. Les polynômes Q et Q_1 sont donc associés et par conséquent, le polynôme R est une constante non nulle.

Exercice 1

1. Numérateur et dénominateur admettent -1 pour racine. Après simplification la forme irréductible de F_1 est $F_1 = \dfrac{X+1}{(X+3)(X-1)}$;
2. La fraction F_2 est bien donnée sous forme irréductible, puisque le numérateur $X^3+2X^2-5X-6 = (X-2)(X+3)(X+1)$ et le dénominateur $X^2+X-20 = (X-4)(X+5)$ sont premiers entre eux.

Exercice 2 Non, pas nécessairement ; on peut considérer, par exemple, $F = \dfrac{X+1}{X}\cdot$

Si $F \in \mathbb{K}[X]$, alors $\dfrac{1}{X} = F-1$ appartiendrait aussi à $\mathbb{K}[X]$. Ce qui est contradictoire, puisque $\deg \dfrac{1}{X} = -1$.

Proposition 3 Posons $F_1 = \dfrac{P_1}{Q_1}$ et $F_2 = \dfrac{P_2}{Q_2}\cdot$

- On a alors $F_1 + F_2 = \dfrac{P_1\,Q_2 + P_2\,Q_1}{Q_1\,Q_2}$, ce qui donne :

$$\deg(F_1+F_2) = \deg(P_1\,Q_2 + P_2\,Q_1) - \deg(Q_1\,Q_2).$$

  Supposons, par exemple, $\deg F_1 \geqslant \deg F_2$. Alors :

$$\deg P_1 - \deg Q_1 \geqslant \deg P_2 - \deg Q_2,$$

  et, puisque $\deg Q_1$ et $\deg Q_2$ sont des entiers :

$$\deg(P_1\,Q_2) = \deg P_1 + \deg Q_2 \geqslant \deg P_2 + \deg Q_1 = \deg(P_2\,Q_1).$$

  Les résultats sur le degré d'une somme de polynômes impliquent :

$$\deg(P_1Q_2 + P_2Q_1) \leqslant \max\big(\deg(P_1Q_2), \deg(P_2Q_1)\big) \leqslant \deg(P_1Q_2);$$

  ce qui donne :

$$\begin{aligned}\deg(F_1+F_2) &= \deg(P_1Q_2 + P_2Q_1) - \deg(Q_1\,Q_2)\\ &\leqslant \deg(P_1\,Q_2) - \deg(Q_1\,Q_2) = \deg P_1 - \deg Q_1\\ &\leqslant \deg F_1 = \max(\deg F_1, \deg F_2).\end{aligned}$$

- On a, de même, $F_1\,F_2 = \dfrac{P_1\,P_2}{Q_1\,Q_2}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\deg(F_1\,F_2) &= \deg(P_1\,P_2) - \deg(Q_1\,Q_2)\\ &= \deg P_1 + \deg P_2 - \deg Q_1 - \deg Q_2\\ &= \deg F_1 + \deg F_2.\end{aligned}$$

Exercice 3

1. On ne peut évidemment pas améliorer cette inégalité, puisque c'est déjà impossible de le faire avec des polynômes.
2. Montrons que si $\deg F_1 \neq \deg F_2$, alors $\deg(F_1+F_2) = \max(\deg F_1, \deg F_2)$ (c'est la même condition que pour les polynômes).

   En effet, notons $F_1 = P_1/Q_1$ et $F_2 = P_2/Q_2$, et supposons, par exemple, $\deg F_1 > \deg F_2$ c'est-à-dire $\deg P_1 - \deg Q_1 > \deg P_2 - \deg Q_2$. Cela donne :
   $$\deg(P_1\,Q_2) = \deg P_1 + \deg Q_2 > \deg P_2 + \deg Q_1 = \deg(P_2\,Q_1)$$
   et donc $\deg(P_1\,Q_2 + P_2\,Q_1) = \deg(P_1\,Q_2)$. Or :
   $$\deg(F_1+F_2) = \deg\left(\frac{P_1\,Q_2 + P_2\,Q_1}{Q_1\,Q_2}\right) = \deg(P_1\,Q_2 + P_1\,Q_1) - \deg(Q_1\,Q_2),$$
   donc $\deg(F_1+F_2) = \deg(P_1\,Q_2) - \deg(Q_1\,Q_2) = \deg \dfrac{P_1\,Q_2}{Q_1\,Q_2} = \deg F_1$ ce qui donne le résultat puisque $\deg F_1 = \max(\deg F_1, \deg F_2)$.

Exercice 4

1. Il est immédiat que lorsque P et Q sont de même parité, F est une fonction rationnelle paire et lorsque P et Q sont de parités différentes, F est une fraction rationnelle impaire.
2. Le polynôme Q n'étant pas nul, $Q(-X)$ n'est pas le polynôme nul.

   Comme $F(X) = F(-X)$, on a $\dfrac{P(X)}{Q(X)} = \dfrac{P(-X)}{Q(-X)}$.

   Donc, $(P_0, Q_0) = \big(P(-X), Q(-X)\big)$ est un autre représentant de F, ce qui entraîne $P\,Q_0 - P_0\,Q = 0$. On a alors :
   $$P(X)\,Q(-X) = P(-X)\,Q(X).$$
   Ce qui prouve que le polynôme $P(X)\,Q(-X)$ est pair.

   On peut donc écrire :
   $$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{P(X)\,Q(-X)}{Q(X)\,Q(-X)}.$$
   Par suite, le couple $(P_1, Q_1) = \big(P(X)\,Q(-X)\,,\,Q(X)\,Q(-X)\big)$ est un représentant de F formé de deux polynômes pairs.
3. Pour les mêmes raisons, $Q(-X)$ n'est pas le polynôme nul et l'on a :
   $$\frac{P(X)}{Q(X)} = -\frac{P(-X)}{Q(-X)}.$$

Donc, $(P_3, Q_3) = \big(-P(-X), Q(-X)\big)$ est un autre représentant de F, ce qui entraîne $P\,Q_3 - P_3\,Q = 0$. On a alors :

$$P(X)\,Q(-X) = -P(-X)\,Q(X)$$

Ce qui prouve que le polynôme $P(X)\,Q(-X)$ est impair.

On peut donc écrire :

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{P(X)\,Q(-X)}{Q(X)\,Q(-X)}.$$

Par suite, le couple $(P_1, Q_1) = (P(X)\,Q(-X)\,,\,Q(X)\,Q(-X))$ est un représentant de F formé d'un polynôme impair et d'un polynôme pair.

On peut remarquer que les formes exhibées ci-dessus n'ont aucune raison d'être irréductibles et ne le sont pas en général.

Proposition 4

Unicité. Supposons que :

$$F = E_1 + F_1 = E_2 + F_2,$$

avec $(E_1, E_2) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(F_1, F_2) \in \mathbb{K}(X)^2$, $\deg F_1 < 0$ et $\deg F_2 < 0$.

Alors $E_1 - E_2$ est un polynôme, et comme il est égal à $F_2 - F_1$, son degré est strictement négatif. Donc $E_1 - E_2 = 0$, c'est-à-dire $E_1 = E_2$ et par suite $F_1 = F_2$.

Existence. Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ avec $Q \neq 0$. Si l'on appelle E le quotient et R le reste de la division euclidienne de P par Q, on obtient :

$$F = E + \frac{R}{Q} \qquad \text{avec} \qquad \deg R < \deg Q,$$

ce qui constitue l'écriture cherchée.

Exercice 5 L'unicité de la partie entière nous permet d'affirmer que la partie entière de F est :

1. 0 ;
2. F ;
3. le polynôme constant, quotient du coefficient dominant du numérateur par celui du dénominateur.

Exercice 6 En effectuant la division euclidienne de X^5 par $(X^2 + X + 1)^2$, on trouve que la partie entière est $X - 2$.

Exercice 7

1. Supposons que F soit paire.
   Si $F(X) = E(X) + F_0(X)$ avec $E \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg F_0 < 0$, alors on a :
   $$F(X) = F(-X) = E(-X) + F_0(-X)$$
   avec $E(-X) \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg F_0(-X) = \deg F_0(X) < 0$ d'après la remarque de la page 961. L'unicité de la partie entière nous donne alors $E(X) = E(-X)$. Ce qui donne le résultat attendu.
   On utilise le même principe de démonstration dans le cas où F est impaire.

2. Le quotient de la division euclidienne de X^5+X^3+X par X^4+2X^2+1 est la partie entière de F, qui est alors de de la forme $X+\alpha$. Comme F est impaire, on a nécessairement $\alpha=0$. Finalement, la partie entière de F est donc X.

Exercice 8

1. On a $X^2+X-2=(X-1)(X+2)$; on en déduit que F admet deux pôles simples 1 et -2. Par application immédiate de la proposition 6 de la page 964, on trouve que :

   - la partie polaire associée au pôle 1 est $\dfrac{2}{X-1}$;
   - la partie polaire associée au pôle -2 est $\dfrac{-3}{X+2}\cdot$

2. Si ω est un pôle de F, c'est-à-dire une racine cinquième de l'unité, alors la partie polaire associée à ω est $\dfrac{\lambda}{X-\omega}$ avec :

$$\lambda=\frac{1}{5\omega^4}=\frac{\omega}{5\omega^5}=\frac{\omega}{5}\cdot$$

Exercice 9

- La partie polaire associée au pôle simple 0 est $\dfrac{\lambda_1}{X}$ avec $\lambda_1=1$.
- La partie polaire associée au pôle double 1 est $\dfrac{\lambda}{X-1}+\dfrac{\mu}{(X-1)^2}$ avec $\mu=2$.

  Comme :

$$F-\frac{2}{(X-1)^2}=\frac{X^4+X^3+X^2+X-1}{(X-1)\,X},$$

  on en déduit $\lambda=3$.

Exercice 10

1. Compte-tenu des hypothèses, on a :

$$P=\lambda\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)^{r_k}\qquad\text{avec}\qquad\lambda\in\mathbb{C}^*.$$

   En utilisant la règle de dérivée d'un produit, on obtient :

$$P'=\lambda\sum_{k=1}^{n}\left(r_k\,(X-a_k)^{r_k-1}\prod_{\ell\neq k}(X-a_\ell)^{r_\ell}\right).$$

2. La décomposition de $\dfrac{P'}{P}$ s'obtient alors directement en écrivant :

$$\frac{P'}{P}=\sum_{k=1}^{n}\frac{r_k}{X-a_k}\cdot$$

Exercice 11 En remarquant que $X^4+1 = (X^2+1)^2-2X^2 = (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$, il existe alors $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$F = \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}.$$

Remarquons que $F(-X) = F(X)$, ce qui donne

$$\frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1} = \frac{-aX+b}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{-cX+d}{X^2-\sqrt{2}X+1}.$$

L'unicité de la décomposition en éléments simples permet de conclure que :

$$c = -a \quad \text{et} \quad b = d.$$

Par ailleurs, on a $F(0) = 1 = b+d$ (donc $b = d = \frac{1}{2}$) et $F(\sqrt{2}) = \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(4a\sqrt{2}+3)$.

Finalement, on trouve $a = -c = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ et $b = d = \frac{1}{2}\cdot$. On a donc :

$$\frac{1}{X^4+1} = \frac{-\sqrt{2}X+2}{4(X^2-\sqrt{2}X+1)} + \frac{\sqrt{2}X+2}{4(X^2+\sqrt{2}X+1)}.$$

Exercice 12

1. Remarquons que $F \in \mathbb{R}[X]$, que la partie entière vaut 0 et que les pôles sont : i, $-i$, j et j^2, tous d'ordre de multiplicité 1.
   On rappelle que $1+j+j^2 = 0$, $j^3 = 1$ et $j^2 = \overline{j}$.
   En vertu de ce qui précède, il existe alors des complexes α et β tels que :
   $$\frac{1}{(X^2+1)(X^2+X+1)} = \frac{\alpha}{X-i} + \frac{\overline{\alpha}}{X+i} + \frac{\beta}{X-j} + \frac{\overline{\beta}}{X-j^2}.$$
2. On évalue $(X-i)F(X) = \dfrac{1}{(X^2+X+1)(X+i)}$ en $X = i$; on trouve $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.
   Pour β, on évalue $(X-j)F(X) = \dfrac{1}{(X^2+1)(X-j^2)}$ en $X = j$; le dénominateur est alors :
   $$(j^2+1)(j-j^2) = (-j)j(1-j) = j^2(j-1) = 1-j^2;$$
   on en déduit que $\beta = \dfrac{1}{1-j^2} = \dfrac{1-j}{3}\cdot$
3. On a donc $F = -\dfrac{1}{2(X-i)} - \dfrac{1}{2(X+i)} + \dfrac{1-j}{3(X-j)} + \dfrac{1-j^2}{3(X-j^2)}$.
   En regroupant les termes 2 à 2 conjugués, on obtient :
   $$F = -\frac{X}{X^2+1} + \frac{X+1}{X^2+X+1}.$$
4. La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de F s'écrit :
   $$F = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} \quad \text{avec} \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4.$$

En multipliant par X^2+1, on obtient :

$$\frac{1}{X^2+X+1} = a\,X+b+(X^2+1)\,\frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

ce qui, en remplaçant X par i, donne $a\,i+b=\dfrac{1}{i}=-i$ et donc $a=-1$ et $b=0$ puisque a et b sont réels.

De même, en multipliant par X^2+X+1, on obtient :

$$\frac{1}{X^2+1} = c\,X+d+(X^2+X+1)\,\frac{a\,X+b}{X^2+1}$$

et en remplaçant X par j (qui vérifie l'égalité $j^2+j+1=0$), on obtient :

$$c\,j+d=\frac{1}{j^2+1}=\frac{1}{-j}=-j^2=j+1.$$

Puisque j n'est pas réel, on en déduit $c=1$ et $d=1$.

Exercice 13 La fraction F se décompose en éléments simples sous la forme :

$$F=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{(X-1)^2}+\frac{d}{(X+1)^2} \quad \text{avec} \quad (a,b,c,d)\in\mathrm{IR}^4.$$

On a :

$$F(X)=F(-X)=\frac{a}{-X-1}+\frac{b}{-X+1}+\frac{c}{(-X-1)^2}+\frac{d}{(-X+1)^2}.$$

L'unicité de la décomposition en éléments simples nous donne alors $a=-b$ et $c=d$.

On obtient alors immédiatement $c=\dfrac{4}{(1+1)^2}=1$, donc $c=d=1$.

Pour déterminer a et b, il suffit de substituer 0 à X, ce qui donne :

$$4=-a+b+c+d=2-2a,$$

donc $a=-1$ et $b=1$. On a donc :

$$F=\frac{4}{(X^2-1)^2}=-\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{1}{(X+1)^2}.$$

Exercice 14

1. F est une fraction rationnelle de degré strictement négatif, donc sa partie entière est nulle. Ses pôles sont 1 et -1, d'ordre de multiplicité 2. Le dénominateur de F étant scindé dans IR, on en déduit l'existence de $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathrm{IR}^4$ tels que :

$$F=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\beta}{X+1}+\frac{\gamma}{(X-1)^2}-\frac{\delta}{(X+1)^2}.$$

F étant impaire, on a :

$$-F(X)=F(-X)=\frac{-\alpha}{X+1}+\frac{-\beta}{X-1}+\frac{\gamma}{(X+1)^2}-\frac{\delta}{(X-1)^2}.$$

Par unicité de la décomposition en éléments simples, on obtient alors $\alpha=\beta=a$ et $\gamma=\delta=b$.

Donc, la décomposition en éléments simples de F est bien du type :

$$F=\frac{a}{X-1}+\frac{a}{X+1}+\frac{b}{(X-1)^2}-\frac{b}{(X+1)^2} \quad \text{avec} \quad (a,b)\in\mathrm{IR}^2.$$

2. On obtient alors $b = 1$ en évaluant $(X-1)^2F(X) = \dfrac{4X^3}{(X+1)^2}$ en $X = 1$.

   Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = 4$, on a $2\,a = 4$. Donc :
$$F = \frac{2}{X-1} + \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{(X+1)^2}.$$

Exercice 15

1. Comme le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur, la partie entière est le quotient des coefficients des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur,c'est-à-dire 1.

   Les pôles de F sont -1, i et $-i$. Comme F est à coefficients réels, les parties polaires associées aux pôles i et $-i$ sont conjuguées. On a donc :
$$F = \frac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)} = 1 + \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{\overline{c}}{X+i}.$$

2. On trouve d'abord :
$$c = \frac{i^4+1}{(i+1)^2(i+i)} = \frac{2}{(2i)^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad a = \frac{1+1}{1+1} = 1.$$

3. En substituant 0 à X, on obtient :
$$1 = 1 + a + b - \frac{c}{i} + \frac{\overline{c}}{i} = 2 + b,$$
   et donc $b = -1$.

4. La décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{C}$ est alors :
$$F = \frac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)} = 1 + \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{1}{X+1} - \frac{1}{2(X-i)} - \frac{1}{2(X+i)}.$$
   En regroupant les termes conjugués, on trouve :
$$F = 1 + \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{1}{X+1} - \frac{X}{X^2+1}.$$

Proposition 11 Le cas où a est réel est évident. Pour l'autre, il suffit de dériver pour vérifier la formule, mais on peut aussi la trouver en écrivant :
$$\begin{aligned}\frac{1}{x-a} &= \frac{x-\overline{a}}{(x-a)(x-\overline{a})}\\ &= \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + i\,\frac{\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\\ &= \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + i\,\frac{1}{\beta}\,\frac{1}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}.\end{aligned}$$
Et donc, en utilisant les primitives usuelles :
$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln\big((x-\alpha)^2+\beta^2\big) + i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \text{ est une primitive de } x \mapsto \frac{1}{x-a}.$$

Exercice 16 La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(x^2-1)(x-2)^2}$ est continue sur tout intervalle I tel que :

$$I \subset \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,2\right[\cup \left]2,+\infty\right[.$$

Pour calculer une primitive sur I, on écrit :

$$\frac{1}{(x^2-1)(x-2)^2} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{18(x+1)} + \frac{1}{3(x-2)^2} - \frac{4}{9(x-2)}.$$

Et donc les primitives sur I de f sont les fonctions :

$$x \mapsto \frac{\ln|x-1|}{2} - \frac{\ln|x+1|}{18} - \frac{1}{3(x-2)} - \frac{4\ln|x-2|}{9} + k, \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 17 Pour calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

$$f : x \mapsto \frac{5}{(x^2+x+1+i)},$$

on écrit :

$$f(x) = \frac{1+2i}{x+i} - \frac{1+2i}{x+1-i}.$$

En utilisant les formules de la proposition 11 de la page 971, on trouve qu'une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est l'application :

$$x \mapsto (2-i)\operatorname{Arctan} x + (2-i)\operatorname{Arctan}(1+x) + \left(\frac{1}{2}+i\right)\ln(x^2+1) - \left(\frac{1}{2}+i\right)\ln(x^2+2x+2).$$

Exercice 18 La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ nous donne :

$$f(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1} \quad \text{avec} \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4.$$

Par les méthodes habituelles pour les pôles simples, on obtient :

$$a = \frac{-1}{4} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{4}\cdot$$

En évaluant en 0, on trouve $d = \dfrac{1}{2}$; puis, en multipliant par X et en prenant la limite en $+\infty$, on obtient $c=0$. On a finalement :

$$\frac{1}{1-X^4} = \frac{-1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X+1)} + \frac{1}{2(X^2+1)}\cdot$$

Et donc une primitive de f sur $\left]-1,+1\right[$ est :

$$x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1-t^4}\,\mathrm{d}t = -\frac{\ln(x-1)}{4} + \frac{\ln(x+1)}{4} + \frac{\operatorname{Arctan} x}{2}\cdot$$

Exercice 19 La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{a}{X-1} - \frac{bX+c}{X^2+X+1} \quad \text{avec} \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

En appliquant les méthodes usuelles, on obtient :

* $a = \dfrac{1}{3}$;

* en évaluant en 0, on obtient $-1 = -\dfrac{1}{3} + c$, donc $c = -\dfrac{2}{3}$;
* en cherchant la limite en $+\infty$ de $\dfrac{x}{x^3-1}$, on trouve que $0 = a + b$, donc $b = -\dfrac{1}{3}\cdot$

Par suite, on a :

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{X-1} - \frac{1}{3}\frac{X+2}{X^2+X+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{X-1} - \frac{1}{6}\frac{2X+1}{X^2+X+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{X2+X+1}\cdot$$

Sachant que :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{3\sqrt{3}},\end{aligned}$$

on obtient :

$$\int_0^x \frac{1}{t^3-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ln(1-x) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\cdot$$

Exercice 20 Pour calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+2x+2}$, on écrit que :

$$\frac{X^3}{X^2+2X+2} = X - 2 + \frac{\lambda X + \mu}{X^2+2X+2}\cdot$$

D'après la remarque de la page 973, on sait qu'il existe une primitive de la forme :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + a\ln(x^2+2x+2) + b\operatorname{Arctan}(x+1)$$

et, en dérivant, on doit avoir :

$$x - 2 + \frac{a\,(2x+2)+b}{x^2+2x+2} = \frac{x^3}{x^2+2x+2}\cdot$$

En prenant $x = -1$, on obtient $b = 2$, puis, avec $x = 0$, on trouve $a = 1$.

Donc, une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$x \mapsto \frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x^2+2x+2) + 2\operatorname{Arctan}(x+1) + k.$$

Exercice 21 Pour calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3-1}$, il ne faut surtout pas faire la moindre décomposition en éléments simples, car le numérateur est proportionnel à la dérivée du dénominateur. On obtient :

$$\frac{x^2}{x^3-1} = \frac{1}{3}\frac{3x^2}{x^3-1}\cdot$$

Donc, une primitive sur $]-\infty, 1[$ ou $]1, +\infty[$ est $x \mapsto \dfrac{1}{3}\ln|x^3-1|$.

S'entraîner et approfondir

18.1 Montrer que si F_1 et F_2 sont deux fractions rationnelles, la partie entière de F_1+F_2 est la somme des parties entières.

18.2 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}[X]$ les fractions suivantes :

1. $F = \dfrac{10X^3}{(X^2+1)(X^2-4)}$;
2. $F = \dfrac{X^4+1}{X^4+X^2+1}$;
3. $F = \dfrac{X^3-1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$;
4. $F = \dfrac{X^2}{(X^2+X+1)^2}$.

18.3 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$ les fractions suivantes :

1. $F_1 = \dfrac{X^4+1}{X^4+X^2+1}$;
2. $F_2 = \dfrac{X^2}{(X^2+X+1)^2}$.

18.4 Calculer les sommes suivantes, après avoir justifié leurs existences :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{k(k+3)}$;
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2}{k^3-k}$.

18.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}[X]$, les fractions :

1. $\dfrac{1}{X^n-1}$;
2. $\dfrac{X^{n-1}}{X^n-1}$;
3. $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$.

18.6 Soit une fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}[X]$ telle que $F = \dfrac{P}{Q}$ avec :

$$Q = (X-x_1)^{\lambda_1} \dots (X-x_n)^{\lambda_n},$$

la fraction n'étant pas nécessairement sous forme irréductible.
Montrer que l'on peut écrire :

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}_i = \sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{a_{i,j}}{(X-x_i)^j}.$$

Application : donner la décomposition en éléments simples de la fraction :

$$\frac{X^3+aX^2+bX+c}{(X-1)^2(X+1)}.$$

18.7 Calculer :

1. $\displaystyle\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$ pour $t \in]0,+\infty[$;
2. $\displaystyle\int_2^4 \frac{x-1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$;
3. $\displaystyle\int_{-1}^a \frac{x}{(x^2-4)^2}\,\mathrm{d}x$ pour $a \in]-\infty,-2[$;
4. $\displaystyle\int_0^a \frac{x}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$ pour $a \in \mathbb{R}$;
5. $\displaystyle\int_0^a \frac{6x}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ pour $a \in \mathbb{R}$;
6. $\displaystyle\int_a^b \frac{x^4}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$ si $1 \notin [a,b]$.

18.8 Soit a, b et c trois nombres complexes et F la fraction :

$$F(X) = \frac{aX^2+bX+c}{(X-1)^2(X-2)^2}$$

Trouver une condition suffisante sur a, b et c pour que F admette une primitive rationnelle.

18.9 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions définies par :

1. $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$;
2. $f(x) = \operatorname{Arctan} x$;
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x\cos a+1}$;
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x\operatorname{ch} a+1}$.

$\star$ **18.10** Réduire, sous la forme $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$, la fraction $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\omega_i^2}{X-\omega_i}$ où les ω_i sont les racines n-ièmes de l'unité ($n \geqslant 2$).

$\star$ **18.11** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme P tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(\cos x) = \cos(nx).$$

Quelles sont les racines de P ?

Décomposer $\dfrac{1}{P}$ en éléments simples.

$\star$ **18.12** Soit $n \in \mathbb{N}$. Décomposer en éléments simples la fraction suivante :

$$F(X) = \frac{1}{X} + \frac{1!}{X(X+1)} + \cdots + \frac{n!}{X(X+1)\ldots(X+n)}.$$

★★ **18.13** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Quel est le développement limité en 0 à l'ordre $n-1$ de $\dfrac{1}{(1-x)^n}$?
2. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction :
$$F = \frac{1}{X^n(X-1)^n}\cdot$$
3. Soit a et b deux réels distincts. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction :
$$\frac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}\cdot$$
4. Trouver un couple (U,V) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que :
$$(1-X)^n U(X) + X^n V(X) = 1.$$

★ **18.14** Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n possédant n racines simples réelles :
$$a_1 < a_2 < \ldots a_{n-1} < a_n\,.$$
On sait que P' a $n-1$ racines réelles b_1, b_2, … b_{n-1} vérifiant :
$$\forall i \in [\![1, n-1]\!] \quad a_i < b_i < a_{i+1}$$
(voir l'exercice 8 de la page 562).
On pose, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\delta_i = a_{i+1} - a_i$, montrer que :
$$a_i + \frac{\delta_i}{n} < b_i < a_{i+1} - \frac{\delta_i}{n}\cdot$$
On décomposera la fraction $\dfrac{P'}{P}$ en éléments simples.

★★ **18.15** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère a_1, a_2,… a_n et α_1, α_2, … α_n $2n$ scalaires 2 à 2 distincts.
Résoudre le système linéaire suivant :
$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{x_1}{a_1-\alpha_1} + \dfrac{x_2}{a_2-\alpha_1} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_n-\alpha_1} = 1\\[2ex]
\dfrac{x_1}{a_1-\alpha_2} + \dfrac{x_2}{a_2-\alpha_2} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_n-\alpha_2} = 1\\[2ex]
\qquad\qquad\vdots\\[2ex]
\dfrac{x_1}{a_1-\alpha_n} + \dfrac{x_2}{a_2-\alpha_n} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_n-\alpha_n} = 1.
\end{array}\right.$$

18.16 Soit a, b et c trois nombres complexes. Donner une expression simple de :
$$A = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)(b+c-a)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)(c+a-b)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(a+b-c)}\cdot$$

Solution des exercices

18.1 Écrivons :

$$F_1 = E_1 + G_1 \ , \ F_2 = E_2 + G_2$$

avec $(E_1, E_2) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2$, $(G_1, G_2) \in \big(\mathbb{K}(X)\big)^2$ tels que $\deg G_1 < 0$ et $\deg G_2 < 0$. Alors :

$$F_1 + F_2 = E_1 + E_2 + G_1 + G_2.$$

Or, $\deg(G_1 + G_2) < 0$, donc par unicité de la décomposition, la partie entière de $F_1 + F_2$ est $E_1 + E_2$.

18.2 1. Il y a quatre pôles simples i, $-i$, 2 et -2.
On trouve :

$$F = \frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i} + \frac{4}{X-2} + \frac{4}{X+2}\cdot$$

2. La partie entière est 1, il y a quatre pôles simples : j, $-j$, j^2 et $-j^2$.
On trouve :

$$F = 1 + \frac{1}{6}\frac{2+j}{X-j} - \frac{1}{6}\frac{2+j}{X+j} - \frac{1}{6}\frac{j-1}{X-j^2} + \frac{1}{6}\frac{j-1}{X+j^2}\cdot$$

3. On obtient $F = 1 + \dfrac{13}{X-3} - \dfrac{7}{X-2}\cdot$

4. La fraction a deux pôles j et j^2 d'ordre 2. La décomposition est donc de la forme suivante :

$$F = \frac{X^2}{(X^2+X+1)^2} = \frac{a}{X-j} + \frac{b}{(X-j)^2} + \frac{c}{X-j^2} + \frac{d}{(X-j^2)^2}\cdot$$

On a :

$$b = \frac{j^2}{(j-j^2)^2} = \frac{1}{(1-j)^2} = -\frac{1}{3j} = -\frac{j^2}{3}\cdot$$

La fraction étant à coefficients réels, en conjuguant, on obtient :

$$d = \overline{b} = -\frac{j}{3}\cdot$$

En multipliant par X et en prenant la limite en $+\infty$, on a $a = -c$.
Puis, en prenant la valeur en 0, on trouve :

$$F = -\frac{2}{9}\frac{(1+2j)}{X-j} - \frac{1}{3}\frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{2}{9}\frac{(1+2j)}{X-j^2} - \frac{1}{3}\frac{j}{(X-j^2)^2}\cdot$$

18.3 1. $F_1 = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{X}{X^2+X+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{X}{X^2-X+1}\cdot$

2. $F_2 = -\dfrac{X+1}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{1}{X^2+X+1}\cdot$

18.4 1. La série de terme général $u_n = \dfrac{3}{n(n+3)}$ est une série de termes positifs, convergente puisque $u_n \sim \dfrac{3}{n^2}$ et que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente.

Pour calculer la somme de cette série, on utilise la décomposition en éléments simples :

$$F = \frac{3}{X(X+3)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+3}$$

et l'on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k\,(\,k+3\,)} = -\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \frac{11}{6}\cdot$$

Donc, on obtient en prenant la limite lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{k\,(\,k+3\,)} = \frac{11}{6}\cdot$$

2. La série de terme général $v_n = \dfrac{2}{n^3 - n}$ est une série de termes positifs, convergente puisque $v_n \sim \dfrac{2}{n^3}$ et que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ est une série convergente.

Pour calculer la somme de cette série, on utilise la décomposition en éléments simples :

$$F = \frac{2}{X(X-1)(X+1)} = -\frac{2}{X} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1}\cdot$$

On trouve :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,(\,k+1\,)\,(\,k-1\,)} = -\frac{1}{(n+1)n} + \frac{1}{2}\cdot$$

Et, finalement :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k\,(\,k+1\,)\,(\,k-1\,)} = \frac{1}{2}\cdot$$

18.5 1. On note ω_k, $k \in [\![0, n-1]\!]$, les n racines n-ièmes de l'unité. Alors :

$$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - \omega_k} \quad \text{avec} \quad a_k = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n}\cdot$$

2. Avec les mêmes notations que précédemment, on trouve :

$$a_k = \frac{\omega_k^{n-1}}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{1}{n}\cdot$$

3. La fraction admet 1 comme pôle double et $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$ comme pôles simples. Or, on peut écrire :

$$F = \frac{1}{(X-1)^2(1+X+X^2\cdots+X^{n-1})}.$$

$*$ Le coefficient de $\dfrac{1}{(X-1)^2}$ est donc $\dfrac{1}{n}\cdot$

$*$ Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, le coefficient de $\dfrac{1}{X-\omega_k}$ est :

$$\frac{1}{Q'(\omega_k)} \quad \text{avec} \quad Q = (X-1)(X^n-1).$$

Donc, $Q' = (n+1)X^n - nX^{n-1} - 1$ et $Q'(\omega_k) = n+1-n\omega_k^{n-1}-1 = n(1-\omega_k^{n-1})$.

Le coefficient de $\dfrac{1}{X-\omega_k}$ vaut alors :

$$\frac{1}{n(1-\omega_k^{n-1})} = \frac{\omega_k}{n(\omega_k-1)}.$$

$*$ Déterminons le coefficient de $\dfrac{1}{X-1}$. Pour cela, calculons :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(X-1)^2(1+X+X^2\cdots+X^{n-1})} - \frac{1}{n}\frac{1}{(X-1)^2}\\
&= \frac{n-(1+X+X^2\cdots+X^{n-1})}{n(X-1)^2(1+X+X^2\cdots+X^{n-1})}\\
&= -\frac{X-1+X^2-1+\ldots+X^{n-1}-1}{n(X-1)^2(1+X+X^2\cdots+X^{n-1})}\\
&= -\frac{1+(1+X)+(1+X+X^2)+\cdots+(1+X+X^2+\cdots+X^{n-2})}{n(X-1)(1+X+X^2\cdots+X^{n-1})}.
\end{aligned}$$

En multipliant par $X-1$ et en prenant la valeur en 1, on trouve que le coefficient cherché est :

$$-\frac{1+2+\cdots+n-1}{n^2} = \frac{1-n}{2n}.$$

Finalement, on obtient :

$$F = \frac{1-n}{2n}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{n(X-1)^2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\omega_k}{(\omega_k-1)}\frac{1}{X-\omega_k}.$$

18.6 Si la fraction $\dfrac{P}{Q}$ est irréductible, c'est la décomposition en éléments simples de F.

Sinon, la forme irréductible de F est $F = \dfrac{P_1}{Q_1}$ où :

$$Q_1 = (X-x_1)^{\lambda_1'}\ldots(X-x_n)^{\lambda_n'} \quad \text{avec} \quad \forall i \in [\![1,n]\!] \quad 0 \leqslant \lambda_i' \leqslant \lambda_i.$$

On effectue la décomposition en éléments simples de F et l'on pose :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \forall j \in \{\lambda'_i + 1, \ldots, \lambda_i\} \quad a_{i,j} = 0.$$

(ce qui revient à mettre des coefficients nuls pour les termes qui n'existent pas dans la décomposition en éléments simples de F).

Application : la décomposition s'écrit :

$$F = 1 + \frac{a_1}{X-1} + \frac{a_2}{(X-1)^2} + \frac{a_3}{X+1},$$

certains termes étant susceptibles d'être nuls.

En multipliant par $(X-1)^2$ et en prenant la valeur en 1, on trouve :

$$a_2 = \frac{1+a+b+c}{2}$$

terme qui est nul si 1 est racine de $X^3 + aX^2 + bX + c$, auquel cas 1 n'est plus un pôle double.

De même, on trouve :

$$a_3 = \frac{-1+a-b+c}{4}.$$

En prenant la valeur en 0, on trouve que $c = 1 - a_1 + a_2 + a_3$ d'où :

$$a_1 = \frac{5+3a+b-c}{4}$$

terme qui est bien nul si 1 est racine double de $X^3 + aX^2 + bX + c$ (le vérifier).

18.7 1. On a $\dfrac{1}{X(X^2+1)} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{X}{X^2+1}$.

Donc, pour tout t appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$ qui ne contient pas 0, on trouve :

$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)} = \ln|t| - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \frac{1}{2}\ln(2).$$

On peut aussi écrire $\displaystyle\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)} = \int_1^t \frac{x\mathrm{d}x}{x^2(x^2+1)}$, puis poser $u = x^2$.

2. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{x-1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x &= \int_1^3 \left(-\frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{2}{(x+1)} + \ln|x+1|\right]_1^3 = -\frac{1}{2} + \ln 2.\end{aligned}$$

3. Sur l'intervalle $]-\infty, -2[$ qui ne contient ni 2 ni -2, on a :

$$\int_{-1}^a \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2-4)^2} \underset{u=x^2}{=} \frac{1}{2}\int_1^{a^2} \frac{\mathrm{d}u}{(u-4)^2} = \left[-\frac{1}{2(u-4)}\right]_1^{a^2} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2(a^2-4)}.$$

4. Pour tout réel a, on a :
$$\int_0^a \frac{x}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^a \left(\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^a$$
$$= \frac{1}{2}\ln(a^2-a+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2a-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\cdot$$

5. Effectuons une décomposition en éléments simples :
$$\frac{6X}{(X^2-X+1)^2} = -\frac{2\sqrt{3}i}{3}\frac{1}{X-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}+\frac{2\sqrt{3}i}{3}\frac{1}{X-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}$$
$$-\frac{1+\sqrt{3}i}{(X-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{(X-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})^2}\cdot$$
Comme une primitive sur $\mathbb{R}$ de :
$$x\mapsto \frac{1}{x-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}} = \frac{x-\frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$
est $x\mapsto \frac{1}{2}\ln\left|(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right|+i\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$, et qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x\mapsto \dfrac{1}{(x-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})^2}$ est $x\mapsto -\frac{1}{x-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}$, on en déduit, pour tout réel a :
$$\int_0^a \frac{6x}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2x-4}{x^2-x+1}\right]_0^a.$$

6. A partir de la décomposition en éléments simples :
$$\frac{X^4}{X^3-1} = X+\frac{1}{3(X-1)}-\frac{1}{3}\frac{X-1}{X^2+X+1},$$
on obtient :
$$\int_a^b \frac{x^4}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_a^b$$
sur tout intervalle $[a,b]$ qui ne contient pas 1.

18.8 La décomposition en éléments simples de F est de la forme :
$$F = \frac{a_1}{X-1}+\frac{a_2}{X-2}+\frac{a_3}{(X-1)^2}+\frac{a_4}{(X-2)^2}\cdot$$
Remarquons que cette forme subsiste, même si 1 ou 2 annule le polynôme aX^2+bX+c, d'après l'exercice 18.6. Après calculs, on trouve :
$$\begin{aligned} a_1 &= 4a+3b+2c\\ a_2 &= -4a-3b-2c\\ a_3 &= a+b+c\\ a_4 &= 4a+2b+c. \end{aligned}$$
Si $a_1=a_2=0$, toute primitive de F est une fonction rationnelle ; une condition suffisante est donc $4a+3b+2c=0$.

18.9 1. • Si $a \neq b$, alors la décomposition en éléments simples de f est :
$$f(x) = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b}$$
avec :
$$\alpha = \frac{1}{a-b} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{1}{b-a} = -\alpha.$$
La dérivée d'ordre n de f est alors :
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{a-b}\left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x-b)^{n+1}}\right).$$
• Si $a = b$, alors :
$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}\ ; \qquad \text{et} \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (n+1)!}{(x-a)^{n+2}}.$$

2. La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{C}$ est :
$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)\ ;$$
donc la dérivée $(n+1)$-ièmede f est :
$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{(-1)^n n!}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2i}\left[\frac{(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}}{(x^2+1)^{n+1}}\right]. \end{aligned}$$

3. On traite à part les cas où $\cos a = \pm 1$ auquel cas ± 1 est pôle double de la fraction. En posant $\alpha = e^{ia}$, on a :
$$f(x) = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})}$$
et on utilise le résultat de la première question.

4. On procède comme dans la question précédente. Si $a \neq 0$, alors :
$$f(x) = \frac{1}{(x-e^a)(x-e^{-a})}.$$

18.10 La fraction admet ω_1, ω_2 , …, ω_n comme pôles simples. Le dénominateur Q peut donc se mettre sous la forme :
$$Q(X) = \prod_{i=1}^{n}(X-\omega_i) = X^n - 1.$$
La partie entière de la fraction étant nulle puisque $n \geqslant 2$, le degré de P est strictement inférieur à n.

De plus, la forme de la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P}{Q}$ assure que :
$$\omega_i^2 = \frac{P(\omega_i)}{n\omega_i^{n-1}}\ ;$$
donc :
$$P(\omega_i) = n\omega_i.$$
Le polynôme $P(X) - nX$ admettant alors n racines et étant de degré inférieur ou égal à $n-1$, est nul. On en déduit que $F = \dfrac{nX}{X^n - 1}$.

18.11 D'après la formule de Moivre, on a :

$$\begin{aligned}\cos nx &= \mathrm{Re}(\cos x + i\sin x)^n \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}(-1)^k(1-\cos^2 x)^k \cos^{n-2k} x = P(\cos x)\end{aligned}$$

où $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}(-1)^k(1-X^2)^k X^{n-2k}$.

Montrons l'unicité d'un tel polynôme.

Soit P et Q deux polynômes satisfaisant à la condition, alors tout élément de $[-1,1]$ est racine de $P-Q$. Le polynôme $P-Q$ possède une infinité de racines, donc est nul.

Les réels $x_k = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$, avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$, sont n racines distinctes de P.

Comme $\deg P \leqslant n$, ce sont les n racines de P.

La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P}$ est donc :

$$\frac{1}{P} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{P'(x_k)(X-x_k)}.$$

En dérivant la relation $P(\cos x) = \cos(nx)$, on obtient :

$$\sin x \; P'(\cos x) = n\sin(nx)$$

d'où :

$$P'(x_k) = \frac{(-1)^k n}{\sin(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})}.$$

On obtient alors :

$$\frac{1}{P} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})}{n(X-x_k)}.$$

18.12 Notons :

$$F_p = \frac{p!}{X(X+1)\dots(X+p)}.$$

Tous les pôles de F_p sont simples, on a donc :

$$F_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{a_{k,p}}{X+k} \quad \text{avec} \quad a_{k,p} = \frac{(-1)^k p!}{k!(p-k)!} = (-1)^k \binom{p}{k}.$$

La décomposition en éléments simples de F est donc :

$$F(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{X+k},$$

avec :

$$b_k = \sum_{p=k}^{n} a_{k,p} = \sum_{p=k}^{n} (-1)^k \binom{p}{k} = (-1)^k \binom{n+1}{k+1}.$$

Remarque L'égalité $\displaystyle\sum_{p=k}^{n}\binom{p}{k}=\binom{n+1}{k+1}$ peut facilement se prouver par récurrence sur n. On en trouvera aussi une preuve à l'exercice 22 de la page 1380.

18.13 1. En écrivant $\dfrac{1}{(1-x)^n}=(1-x)^{-n}$, on obtient le développement limité :

$$\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n+j-1)!}{(n-1)!j!}x^j+\mathrm{o}(x^{n-1})=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n+j-1}{j}x^j+\mathrm{o}(x^{n-1}).$$

2. La décomposition en éléments simples est de la forme :

$$F(X)=\frac{1}{X^n(X-1)^n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{X^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{(X-1)^k}\,;$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{(X-1)^n}=\sum_{k=1}^{n}a_kX^{n-k}+X^n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{(X-1)^k}\right).$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{(x-1)^n}=\sum_{k=1}^{n}a_kx^{n-k}+\mathrm{o}(x^{n-1})$$

au voisinage de 0, puisque $x^n\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{(x-1)^k}\right)=\mathrm{o}(x^{n-1})$.

D'où, par unicité du développement limité :

$$\forall k\in[\![1,n]\!]\quad a_k=(-1)^n\binom{2n-k-1}{n-k}.$$

En utilisant la relation $F(1-X)=F(X)$, on trouve :

$$\forall k\in[\![1,n]\!]\quad b_k=(-1)^ka_k=(-1)^{n+k}\binom{2n-k-1}{n-k}.$$

3. On se ramène au cas précédent, en posant $Y=\dfrac{X-a}{b-a}$, puisqu'alors :

$$G(X)=\frac{1}{(b-a)^{2n}}F(Y).$$

4. En utilisant $1=X^n(X-1)^nF(X)$, on trouve une solution :

$$U_0(X)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}X^k$$

$$V_0(X)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}(1-X)^k.$$

18.14 D'après l'exercice 10 de la page 966, on a :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{X - a_j}.$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. En écrivant :

$$P(X) = \lambda \prod_{j=1}^{n} (X - a_j) = (X - a_i) Q_i(X),$$

on obtient alors, puisque P' a pour racines b_j, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, et a pour coefficient dominant $n\,\lambda$:

$$P'(X) = n\,\lambda \prod_{j=1}^{n-1} (X - b_j).$$

Le coefficient de $\dfrac{1}{X - a_i}$ dans la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ est $\dfrac{P'(a_i)}{Q_i(a_i)}$, donc :

$$1 = \frac{n \prod\limits_{j=1}^{n-1} (a_i - b_j)}{\prod\limits_{j \neq i} (a_i - a_j)} \qquad (*)$$

d'où :

$$\frac{1}{n} = \frac{a_i - b_i}{a_i - a_{i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{a_i - b_j}{a_i - a_j} \prod_{j=i+1}^{n-1} \frac{a_i - b_j}{a_i - a_{j+1}}.$$

Or, pour $1 \leqslant j \leqslant i-1$, on a $a_j < b_j < a_{j+1} \leqslant a_i$ donc $0 < \dfrac{a_i - b_j}{a_i - a_j} < 1$

et, pour $i+1 \leqslant j \leqslant n-1$, on a $a_i < a_{i+1} \leqslant a_j < b_j < a_{j+1}$ donc $0 < \dfrac{a_i - b_j}{a_i - a_{j+1}} < 1$.

Finalement, on obtient :

$$\frac{a_i - b_i}{a_i - a_{i+1}} > \frac{1}{n},$$

ce qui constitue le première partie de l'inégalité à démontrer.

En écrivant $(*)$ pour $i+1$ et en procédant de la même manière, on montre la deuxième partie de l'inégalité.

18.15 Soit x_1, x_2, $\ldots$ x_n des scalaires. Considérons la fraction :

$$F = \frac{x_1}{a_1 - X} + \frac{x_2}{a_2 - X} + \cdots + \frac{x_n}{a_n - X} - 1.$$

En réduisant au même dénominateur, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $F = \dfrac{P}{(a_1 - X)(a_2 - X)\cdots(a_n - X)}$; P est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^{n+1}$.

Le n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est solution du système si, et seulement si, F admet α_1, α_2, $\ldots$, α_n comme racines, c'est-à-dire, si, et seulement si, P s'écrit :

$$P = (-1)^{n+1}(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n),$$

soit encore si, et seulement si, F s'écrit :

$$F = -\frac{(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n)}{(X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_n)}\cdot$$

La décomposition de cette fraction en éléments simples donne les valeurs des x_i :

$$x_i = -\prod_{j\neq i}\frac{a_i-\alpha_j}{a_i-a_j}\cdot$$

18.16 Considérons la fraction :

$$F = \frac{X^2}{(X-a)(X-b)(X-c)}\cdot$$

Sa décomposition en éléments simples est :

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}\frac{1}{X-a} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)}\frac{1}{X-b} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\frac{1}{X-c}\cdot$$

En prenant la valeur de cette fraction en $\dfrac{a+b+c}{2}$, on trouve :

$$A = \frac{(a+b+c)^2}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}\cdot$$

Chapitre 19 : Espaces vectoriels

I	**Espaces vectoriels**	**999**
1	Définition, propriétés, exemples	999
2	Espaces vectoriels remarquables	1001
II	**Sous-espaces vectoriels**	**1001**
1	Définition et exemples	1001
2	Sous-espace vectoriel engendré	1004
III	**Applications linéaires**	**1007**
1	Définition, caractérisation	1007
2	Noyau et image d'une application linéaire	1009
3	Structure de $\mathcal{L}(E,F)$ et de $\mathcal{L}(E)$	1010
IV	**Sous-espaces affines d'un espace vectoriel**	**1012**
1	Translations	1012
2	Sous-espace affine	1013
3	Intersection de deux sous-espaces affines	1014
4	Ensemble des solutions d'une équation linéaire	1015
V	**Retour sur les sous-espaces engendrés**	**1016**
1	Combinaisons linéaires	1016
2	Sous-espace engendré par une partie quelconque	1017
3	Sous-espace engendré par une suite	1017
4	Sous-espace engendré par une famille quelconque	1017
Démonstrations et solutions des exercices du cours		**1019**
Exercices		**1029**

19 Espaces vectoriels

Dans le secondaire, que ce soit en Mathématiques ou en Physique, vous avez utilisé les vecteurs du plan ou de l'espace : vous avez déjà additionné deux vecteurs et effectué le produit d'un vecteur par un réel. Par des démonstrations élémentaires de géométrie, on peut constater certaines propriétés de ces deux opérations parmi lesquelles la commutativité et l'associativité de l'addition.

En se plaçant dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'origine O, on peut aussi :

- associer, à tout vecteur $\vec{u}$, le couple de ses deux coordonnées réelles,
- traduire les opérations précédentes sur ces couples de coordonnées et ainsi obtenir, sur les éléments de $\mathbb{R}^2$, des opérations d'addition, et de multiplication par un réel.

Enfin, dans les premiers chapitres de cet ouvrage, nous avons vu l'ensemble $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ des applications définies sur un ensemble X et à valeurs dans $\mathbb{R}$, dans lequel, l'addition de deux applications et le produit d'une application par un réel ont les mêmes propriétés que les opérations précédentes.

Remarque Bien que, dans $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, on ait aussi défini le produit de deux fonctions, nous n'utiliserons pas cette loi dans ce chapitre.

La structure d'espace vectoriel, que nous allons introduire et qui est très importante en Mathématiques, pourra paraître abstraite à première vue ; c'est pourquoi, pour l'assimiler plus facilement, il est bon, tout au long de ce qui va suivre, de garder à l'esprit les trois exemples précédents et de ne pas hésiter à les manipuler.

I Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définition, propriétés, exemples

Définition 1

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une application, appelée **loi externe** :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha.x \end{array}$$

$(E,+,.)$ est un **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$**, ou un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel**, si :

- $(E,+)$ est un groupe commutatif,
- pour tout $(x,y) \in E^2$, et pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$, on a :

(1) $1.x = x$ (3) $(\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$

(2) $\alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x$ (4) $\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$

On appelle alors **vecteurs** les éléments de E et **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$.

p.1019

Exercice 1 Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour l'addition et la loi externe définies par :

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \qquad \text{et} \qquad \alpha.(x,y) = (\alpha\, x, \alpha\, y).$$

Notation

- Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on écrit aussi $\alpha\, x$ au lieu de $\alpha.x$.
- Si $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $x \in E$, on peut « diviser x par α » : cela revient à multiplier le vecteur x par le scalaire α^{-1}. Ainsi $\frac{1}{\alpha}x$ se note aussi $\frac{x}{\alpha}$.
- Dans certains cas, pour éviter toute ambiguïté, on pourra noter 0_E le vecteur nul de E et $0_{\mathbb{K}}$ l'élément nul de $\mathbb{K}$.

Remarque

Lorsque la loi interne et la loi externe sont évidentes, ou données par l'usage, on dit : « Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel » au lieu de : « Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ».

Exemples

1. Le corps $\mathbb{K}$ muni de son addition et de sa multiplication est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En particulier, $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

2. L'ensemble $\mathbb{C}$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si on le munit de son addition et de la loi externe :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha.x \end{array}$$

3. De même que dans l'exercice 1 de la page précédente, l'ensemble $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si on le munit des lois définies par :
$$(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) + (x''_1, x''_2, \dots, x''_n) = (x'_1 + x''_1, x'_2 + x''_2, \dots, x'_n + x''_n)$$
$$\alpha.(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha\, x_1, \alpha\, x_2, \dots, \alpha\, x_n).$$

Exemples déjà rencontrés On peut maintenant facilement vérifier que :

1. si X est un ensemble non vide, l'ensemble $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ des applications de X dans $\mathbb{K}$, muni des ses lois usuelles, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;
2. en particulier $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, est donc muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;
3. l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Dans toute la suite de ce chapitre E ou $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 1

Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on a :

(i) $\quad 0_{\mathbb{K}}\, x = 0_E$ et $\alpha\, 0_E = 0_E$ $\qquad (ii)$ $\quad \alpha\,(-x) = -(\alpha\, x) = (-\alpha)\, x$.

Principe de démonstration. Démonstration page 1019

- Pour (i), partir de $(0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}})\, x = 0_{\mathbb{K}}\, x$ et de $\alpha\,(0_E + 0_E) = \alpha\, 0_E$.
- Pour (ii), calculer $\alpha(-x) + \alpha x$ et $\alpha x + (-\alpha) x$.

Proposition 2

Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on a :
$$\alpha\, x = 0_E \Longrightarrow (\alpha = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E).$$

Démonstration. Supposons $\alpha\, x = 0_E$ et $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$. Comme $\mathbb{K}$ est un corps, l'élément α est inversible et l'on en déduit :
$$x = 1\, x = \alpha^{-1}\,(\alpha\, x) = \alpha^{-1}\, 0_E = 0_E.$$
□

p.1019 **Exercice 2** Pour $a \in E$, on note $\mathbb{K}\, a = \{\lambda\, a\, ;\ \lambda \in \mathbb{K}\}$.

1. Que vaut $\mathbb{K}\, 0$?
2. Soit a et b deux éléments non nuls de E. Montrer que $b \in \mathbb{K}\, a \iff a \in \mathbb{K}\, b$.

2 Espaces vectoriels remarquables

Produit d'espaces vectoriels

Proposition 3

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors l'ensemble $E \times F$ muni des **lois produits** suivantes :

- l'addition définie par $(x', y') + (x'', y'') = (x' + x'', y' + y'')$,
- la loi externe définie par $\lambda\,(x, y) = (\lambda\,x, \lambda\,y)$,

est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ appelé **espace vectoriel produit $E \times F$**.

Démonstration page 1020

Généralisation Étant donné $p \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $E_1, E_2, \ldots, E_p$, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors **l'espace vectoriel produit** $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ désigne l'ensemble $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ muni des lois suivantes :

- l'addition définie par $(x_1, x_2, \ldots, x_p) + (x_1', x_2', \ldots, x_p') = (x_1 + x_1', \ldots, x_p + x_p')$,
- la loi externe définie par $\lambda\,(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_p)$.

Exemple On retrouve ainsi que $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Espaces de fonctions

Proposition 4

Soit E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et X un ensemble, alors l'ensemble $\mathcal{F}(X, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations suivantes :

$$\begin{array}{rcccl} f+g: & X & \longrightarrow & E \\ & t & \longmapsto & f(t)+g(t) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcccl} \alpha.f: & X & \longrightarrow & E \\ & t & \longmapsto & \alpha\,f(t). \end{array}$$

Démonstration page 1020

Exemple On retrouve en particulier que les ensembles $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^X$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, munis de leurs lois usuelles, sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

II Sous-espaces vectoriels

1 Définition et exemples

Définition 2

Soit $x \in E$ et $y \in E$. Un vecteur $z \in E$ est une **combinaison linéaire de x et de y** s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que $z = \lambda\,x + \mu\,y$.

Exemple Tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ car :

$$(x_1, x_2) = x_1\,(1, 0) + x_2\,(0, 1) = x_1\,e_1 + x_2\,e_2.$$

p.1021 **Exercice 3** Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f_a : x \mapsto \cos(x+a)$ est combinaison linéaire des fonctions $\sin$ et $\cos$.

Définition 3

Une partie F de E est un **sous-espace vectoriel** de E si :

$$0 \in F \qquad \text{et} \qquad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall (x, y) \in F^2 \quad \alpha x + \beta y \in F.$$

Autres formulations

- Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, F est stable par combinaisons linéaires (de deux vecteurs) et contient 0_E.
- La condition de stabilité par combinaisons linéaires peut se remplacer par :

  $$\forall (x, y) \in F^2 \quad x + y \in F \qquad \text{et} \qquad \forall x \in F \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha\, x \in F,$$

  qui lui est équivalente.

Attention Pour prouver que F est un sous-espace vectoriel de E, ne pas oublier de vérifier $F \subset E$ et $0 \in E$.

Remarque E et $\{0\}$ sont évidemment des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E : ce sont les **sous-espaces vectoriels triviaux de E**.

Exemples

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et l'ensemble $i\mathbb{R}$ des imaginaires purs sont deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
2. En revanche, $\mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ puisque l'on a $1 \in \mathbb{R}$ et $i = i\,1 \notin \mathbb{R}$.
3. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.

p.1021 **Exercice 4** Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On appelle E l'ensemble des suites $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n. \qquad (*)$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Comme un sous-espace vectoriel F est stable par combinaisons linéaires (*cf.* ci-dessus), on peut le munir des lois induites :

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times F & \longrightarrow & F \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda\, x \end{array}$$

Proposition 5

Muni des lois induites, tout sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Principe de démonstration. Vérifier la stabilité de F par les lois $+$ et $\cdot$ puis montrer que $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$. Les autres propriétés sont immédiates.

Démonstration page 1021

p.1021 **Exercice 5** Montrer que, dans la définition précédente d'un sous-espace vectoriel, on peut remplacer l'hypothèse $0 \in F$ par l'hypothèse $F \neq \varnothing$.

p.1021

Exercice 6

1. Montrer que l'ensemble $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. En est-il de même pour $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$?

p.1021

Exercice 7 L'ensemble $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$?

Point méthode

La façon la plus efficace de prouver qu'un ensemble est muni d'une structure d'espace vectoriel, est de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel usuel.

Exemples

1. La plupart des ensembles de fonctions, ou de suites, utilisés en analyse (fonctions continues, dérivables, suites convergentes...) sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel du type $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{F}(X, E)$.
2. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, et si $n \in \mathbb{N}^*$, alors les théorèmes généraux montrent que $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
3. Soit a une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On a montré au chapitre 5, concernant les équations différentielles linéaires, que l'ensemble des fonctions solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

p.1021

Exercice 8 Soit A un élément de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que les lois usuelles munissent l'ensemble $F_A = \{AP\,;\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ d'une structure d'espace vectoriel.

Intersection de sous-espaces vectoriels

p.1022

Exercice 9 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer qu'alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Plus généralement, l'intersection d'une famille quelconque (finie ou non) de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 6

Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille non vide de sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E, alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration page 1022

2 Sous-espace vectoriel engendré

p.1022

Exercice 10 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. $G \setminus F$ et $\complement_E F$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?
2. Soit $x \in E$ et $y \in E$ tels que $x \in F$ et $y \notin F$. Montrer que $x + y \notin F$.
3. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E si, et seulement si, l'on a $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Attention Au vu de ce qui précède, une réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est en général pas un sous-espace vectoriel, et la différence de deux sous-espaces vectoriels n'est jamais un sous-espace vectoriel. On réfléchira soigneusement, en algèbre linéaire, avant de considérer toute réunion, toute différence ou tout complémentaire de sous-espaces vectoriels.

Sous-espace vectoriel engendré par une partie, par une famille

Proposition 7

Soit $\mathcal{A}$ une partie de E. Il existe un plus petit sous-espace vectoriel contenant $\mathcal{A}$, que l'on appelle le **sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{A}$** et que l'on note $\operatorname{Vect} \mathcal{A}$.

Principe de démonstration. Considérer l'intersection de tous les sous-espaces contenant $\mathcal{A}$.

Démonstration page 1022

Remarque Dans l'énoncé précédent, le terme « plus petit » s'entend au sens de l'inclusion : le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{A}$ est contenu dans tout sous-espace vectoriel qui contient $\mathcal{A}$.

p.1022

Exercice 11 Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par $\varnothing$ est $\{0\}$.

Définition 4

Soit $A = (a_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. Le **sous-espace vectoriel engendré par A** est le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{A} = \{a_i \,;\, i \in I\}$. Il se note $\operatorname{Vect} A$, $\operatorname{Vect} \mathcal{A}$, $\operatorname{Vect}(a_i)_{i \in I}$ ou encore $\operatorname{Vect}\{a_i \,;\, i \in I\}$.

Remarque Dans la description précédente de $\mathcal{A}$, les a_i ne sont pas forcément deux à deux distincts. Ainsi, lorsque I est fini, le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{A}$ peut être strictement inférieur au nombre d'éléments de I.

Cas particulier d'une partie finie, d'une famille finie

Nous avons déjà vu que $\mathrm{Vect}\,\varnothing$ est le singleton $\{0\}$. Nous supposerons donc maintenant travailler avec des parties et des familles non vides. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $\mathcal{A}$ est une partie finie de E possédant n éléments, alors il existe une application injective $i \mapsto a_i$ (avec donc des a_i deux à deux distincts) telle que l'on ait $\mathcal{A} = \{a_i \,;\; i \in [\![1,n]\!]\}$; d'après ce qui précède, on a $\mathrm{Vect}\,\mathcal{A} = \mathrm{Vect}(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, c'est pourquoi nous allons nous limiter à décrire les sous-espaces vectoriels engendrés par des familles.
- Une famille $A = (a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est usuellement écrite sous forme d'un n-uplet $(a_1,\dots,a_n)$, ce qui introduit un ordre sur cette famille. Mais la définition de $\mathrm{Vect}\,A$ montre bien que le sous-espace vectoriel engendré par ce n-uplet ne dépend pas de l'ordre dans lequel il est écrit. Remarquons que, dans ce cas, il n'y a aucune raison que les a_i soient deux à deux distincts.

Proposition 8 (Description d'un sous-espace engendré)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $A = (a_i)_{i\in[\![1,n]\!]} = (a_1,\dots,a_n)$. Alors :

$$\mathrm{Vect}(A) = \Big\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, a_i \,;\; (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n\Big\}$$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{Vect}(A) = \Big\{x \in E \mid \exists(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, a_i\Big\}.$$

Principe de démonstration. On montre que $B = \Big\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, a_i \,;\; (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n\Big\}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant A, et que tout sous-espace vectoriel de E contenant A contient B. Démonstration page 1023

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$:
   - le sous-espace vectoriel engendré par $\{1\}$ est $\mathbb{R}$,
   - le sous-espace vectoriel engendré par $\{i\}$ est l'ensemble des imaginaires purs,
   - le sous-espace vectoriel engendré par $\{1,i\}$ est égal à $\mathbb{C}$.
2. Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ engendré par $\{1,X,\dots,X^n\}$ est $\mathbb{K}_n[X]$, puisque :

$$\mathbb{K}_n[X] = \big\{\lambda_0 + \lambda_1\,X + \dots + \lambda_n\,X^n \,;\; (\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}\big\}.$$

Droite vectorielle

- Si a est un élément non nul d'un espace vectoriel E, alors le sous-espace vectoriel engendré par a est $\mathrm{Vect}\{a\} = \{\lambda\, a \,;\; \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}\,a$. On l'appelle **droite vectorielle engendrée** par a.

- Le résultat de l'exercice 2 de la page 1000 montre que si b est un élément non nul de cette droite, alors $\mathrm{Vect}\{a\} = \mathrm{Vect}\{b\}$. Autrement dit, une droite vectorielle est engendrée par n'importe lequel de ses vecteurs non nuls.

Point méthode

Pour montrer qu'une partie de E en est un sous-espace vectoriel, il peut être efficace de mettre en évidence que c'est le sous-espace vectoriel engendré par une certaine famille.

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$, considérons $F = \{(x-2y, 2x+y, 3x-2y)\,;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.
Comme on peut écrire :

$$F = \{x\,(1,2,3) + y\,(-2,1,-2)\,;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\},$$

il est immédiat que F est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par l'ensemble des deux vecteurs $u = (1,2,3)$ et $v = (-2,1,-2)$.

Combinaisons linéaires d'une famille finie

Définition 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que x_1, x_2, ..., x_n des vecteurs de E. On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs x_1, x_2,..., x_n, ou encore combinaison linéaire de la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tout vecteur de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i \qquad \text{avec} \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Remarques

1. Il s'agit évidemment d'une généralisation de la définition d'une combinaison linéaire de deux vecteurs. De plus, un vecteur $y \in E$ est combinaison linéaire des vecteurs x_1, x_2,..., x_n si, et seulement si :

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i.$$

2. Avec cette définition, la proposition 8 de la page précédente se reformule ainsi : le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs x_1, x_2, ..., x_n est l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs.

3. Si F est un sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$, alors on a vu, dans la démonstration de la proposition précédente, que toute combinaison linéaire de ces vecteurs appartient encore à F.

III Applications linéaires

Dans toute cette partie, E, F et G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1 Définition, caractérisation

Définition 6

Une application $u : E \longrightarrow F$ est une **application linéaire** si :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2 \quad u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y).$$

Une telle application u est aussi appelée **morphisme d'espaces vectoriels**, et l'on parle :

- d'**endomorphisme** si $E = F$,
- d'**isomorphisme** si u est bijective,
- d'**automorphisme** si u est bijective et si $E = F$.

Notation On désigne par :

- $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F,
- $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Proposition 9

Si u est une application linéaire de E dans F, alors $u(0_E) = 0_F$.

Démonstration. Comme $0_E = 0_E + 0_E$, on a $u(0_E) = u(0_E) + u(0_E)$.
En ajoutant $-u(0_E)$ aux deux membres, on obtient $0_F = u(0_E)$. □

Remarque La plupart du temps, on note de la même façon les vecteurs nuls 0_E et 0_F, et le résultat précédent s'écrit alors simplement $u(0) = 0$.

Exemple L'application $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ n'est pas linéaire, puisque $u(0) \neq 0$.

Remarque Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$ et pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, u(x_i).$$

On traduit la propriété précédente en disant que *l'image, par une application linéaire, d'une combinaison linéaire, est la combinaison linéaire des images.*

Exemples

1. Soit u une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; alors u est linéaire si, et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \lambda x$. En effet, de telles applications sont évidemment linéaires, et, réciproquement, si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, alors on a :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x) = u(x\,1) = x\,u(1) = \lambda\,x \qquad \text{avec} \qquad \lambda = u(1).$$
2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda\,x \end{array}$ est une application linéaire.

   On l'appelle **homothétie** de rapport λ.

p.1023 **Exercice 12**

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. Montrer que $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y) & \longmapsto & a\,x + b\,y \end{array}$ est linéaire.
2. Montrer que toute application linéaire de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}$ est de cette forme.

   Indication : utiliser que $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$.

p.1023 **Exercice 13** Montrer que les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ sont les applications :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (ax+by, cx+dy) \end{array} \qquad \text{avec} \qquad (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4.$$

Bon nombre de propriétés établies dans les chapitres d'analyse peuvent se traduire en terme de linéarité.

Exemples

1. La dérivation $f \mapsto f'$ définit :
   - une application linéaire de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$,
   - un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
2. L'intégration sur le segment $[a,b]$: $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b u(t)\,dt \end{array}$

   est une application linéaire de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
3. On verra au chapitre 30 que, si Ω est un univers fini, alors l'ensemble des variables aléatoires définies sur Ω est un espace vectoriel. De plus, l'espérance est alors une application linéaire de cet espace vectoriel vers $\mathbb{R}$.

p.1024 **Exercice 14** Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. L'application :
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & af'' + bf' + cf \end{array}$$
est-elle une application linéaire ?

2 Noyau et image d'une application linéaire

Proposition 10

Soit u une application linéaire de E dans F.

- Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $u(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Si F' est un sous-espace vectoriel de F, alors $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

Principe de démonstration. Dans chaque cas, utiliser la caractérisation d'un sous-espace vectoriel, mais prendre garde que u n'a aucune raison d'être bijective. Démonstration page 1024

Définition 7

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle :

- **noyau** de u, et l'on note $\operatorname{Ker} u$, le sous-espace vectoriel de E :
$$\operatorname{Ker} u = u^{-1}(\{0\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0\} ;$$
- **image** de u, et l'on note $\operatorname{Im} u$, le sous-espace vectoriel de F :
$$\operatorname{Im} u = u(E) = \{u(x) ;\ x \in E\}.$$

Exemple Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et l'application linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & a\,x + b\,y. \end{array}$

- Si a et b sont nuls, alors φ est nulle et son noyau est $\mathbb{R}^2$.
- Si $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, alors $\operatorname{Ker} \varphi$ est « la droite d'équation $ax + by = 0$ ». Montrons que c'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur non nul $u = (-b, a)$.
  - ∗ Il est évident que $u \in \operatorname{Ker} \varphi$; comme $\operatorname{Ker} \varphi$ est un sous-espace vectoriel, on en déduit que $\operatorname{Vect} u \subset \operatorname{Ker} \varphi$ (puisque $\operatorname{Vect} u$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant u).
  - ∗ Réciproquement, soit $(x, y) \in \operatorname{Ker} \varphi$. On a alors $a\,x + b\,y = 0$.
    - ⋆ Si $a \neq 0$, on en déduit $x = -\frac{b}{a}\,y$ et donc $(x, y) = (-\frac{b}{a}\,y, y) = -\frac{y}{a}\,u$, ce qui prouve $(x, y) \in \operatorname{Vect} u$.
    - ⋆ Si $a = 0$ et donc $b \neq 0$, on prouve de même $(x, y) = -\frac{x}{b}\,u$.

    On en déduit $\operatorname{Ker} \varphi \subset \operatorname{Vect} u$ et donc $\operatorname{Vect} u = \operatorname{Ker} \varphi$.

Par suite, la notion de droite vectorielle est cohérente avec celle de droite donnée par une équation du type $a\,x + b\,y = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

Théorème 11

Une application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si, et seulement si, $\operatorname{Ker} u = \{0\}$.

Principe de démonstration. Si $u(x) = u(y)$, alors $u(x - y) = 0$.

Démonstration page 1024

Exemple La dérivation $D : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ est une application linéaire non injective puisque son noyau, l'ensemble des applications constantes, est non nul.

Point méthode

Pour démontrer qu'une application linéaire est injective, *systématiquement* prouver $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ ou plus simplement (puisque $\{0\} \subset \operatorname{Ker} u$) :

$$\forall x \in E \quad u(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Évidemment, il faut savoir que u est une application linéaire.

p.1025 **Exercice 15** Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (ax+by, cx+dy). \end{array}$

Montrer que si $ad - bc \neq 0$, alors φ est injective.

p.1025 **Exercice 16** Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$. Vérifier la non-injectivité de :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ f & \longmapsto & af'' + bf' + cf. \end{array}$$

p.1025 **Exercice 17** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $x_1, \dots, x_n$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$. On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ P & \longmapsto & \big(P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)\big). \end{array}$

1. Vérifier que φ est une application linéaire.
2. Montrer que sa restriction φ_n à $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est injective.
3. Préciser le noyau de φ.

3 Structure de $\mathcal{L}(E,F)$ et de $\mathcal{L}(E)$

Proposition 12

Étant donné deux applications linéaires u et v de E dans F, ainsi que deux scalaires λ et μ, l'application $\lambda\, u + \mu\, v$ est linéaire.

Démonstration page 1025

Proposition 13 (Espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$)

L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$

Démonstration. L'application nulle est linéaire.
D'après la proposition 12, l'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est stable par combinaisons linéaires.
Ainsi, $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(E,F)$. □

Proposition 14 (Composition des applications linéaires)

Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E,G)$.

Démonstration page 1025

Notation On note parfois $v\,u$ à la place de $v \circ u$ pour désigner la composée des deux applications linéaires v et u.

p.1025

Exercice 18 Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, montrer que :

$$v \circ u = 0 \iff \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v.$$

Proposition 15 (Bilinéarité de la composition)

L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G) \\ (v,u) & \longmapsto & v \circ u \end{array}$ est **bilinéaire**.

Autrement dit, pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, les applications :

$$R_u : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(F,G) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G) \\ \psi & \longmapsto & \psi \circ u \end{array} \qquad \text{et} \qquad L_v : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G) \\ \varphi & \longmapsto & v \circ \varphi \end{array}$$

sont linéaires.

Démonstration. Cela signifie que, si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$, alors :

1. si ψ_1 et ψ_2 sont deux applications linéaires de F dans G, on a :
$$(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) \circ u = \alpha\,(\psi_1 \circ u) + \beta\,(\psi_2 \circ u).$$
2. si φ_1 et φ_2 sont deux applications linéaires de E dans F, on a :
$$v \circ (\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha\,(v \circ \varphi_1) + \beta\,(v \circ \varphi_2).$$

Le premier résultat provient de la définition de $\alpha\psi_1 + \beta\psi_2$, alors que le deuxième est une conséquence de la linéarité de v. □

Proposition 16 (Anneau $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes)

Si E est un K-espace vectoriel, alors $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.

Démonstration page 1026

Remarque Cet anneau est en général non commutatif (*cf.* exercice suivant).

p.1026

Exercice 19 Soit r et s les deux applications de $\mathbb{R}^2$ définies ainsi :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad s(x,y) = (y,x) \qquad \text{et} \qquad r(x,y) = (-y,x).$$

1. Montrer que r et s appartiennent à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
2. Comparer alors $r \circ s$ et $s \circ r$.

Proposition 17 (Inverse d'un isomorphisme)

Si u est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E dans F, alors sa bijection réciproque u^{-1} est linéaire.

Démonstration page 1026

Notation $\mathcal{GL}(E)$ désigne l'ensemble des automorphismes de E.

Proposition 18 (Groupe $\mathcal{GL}(E)$ des automorphismes)

$(\mathcal{GL}(E), \circ)$ est un groupe. On l'appelle **groupe linéaire** de E.

Démonstration. C'est le groupe des unités de l'anneau $\mathcal{L}(E)$. □

Notation Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note u^k l'itéré k-ème de u pour la composition des applications. Par suite, on a $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$$
- Lorsque u est bijective, et donc inversible pour la composition, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme u^k est inversible et son inverse se note u^{-k}.

IV Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

- Le but de cette partie est d'introduire les notions rencontrées en géométrie (affine) dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, permettant d'exprimer, entre autres, que des points sont alignés ou coplanaires, que des droites ou des plans sont parallèles. Nous y reviendrons plus en détail dans le chapitre 27.
- Dans ce qui précède nous nous sommes intéressés essentiellement à des sous-espaces vectoriels, qui permettent de savoir si, par exemple, des éléments de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ sont sur une même droite vectorielle, donc *passant par l'origine*. Mais on ne sait encore rien des autres « droites ».

Nous travaillons ici dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Translations

Définition 8

Si a est un élément d'un espace vectoriel E, l'application de E dans E définie par $x \mapsto a + x$ est appelée **translation** de vecteur a. On la note t_a.

Remarque On a $t_a \in \mathcal{L}(E)$ si, et seulement si, $a = 0$ et alors $t_a = \mathrm{Id}_E$.

Proposition 19

- Pour tout $a \in E$ et $b \in E$, on a $t_a \circ t_b = t_{a+b} = t_b \circ t_a$.
- Pour tout $a \in E$, la translation t_a est bijective et $t_a^{-1} = t_{-a}$.

Démonstration.

- On constate que $t_a \circ t_b(x) = a + (b + x)$, $t_{a+b}(x) = (a + b) + x$ et $t_b \circ t_a(x) = b + (a + x)$. On conclut par associativité et commutativité de la loi $+$.
- La translation t_a est bijective et admet pour réciproque la translation t_{-a}, puisque :
$$t_a \circ t_{-a} = t_{-a} \circ t_a = t_0 = \mathrm{Id}_E\,.$$
□

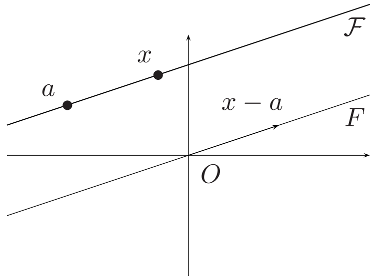
2 Sous-espace affine

Notation Pour $a \in E$, et pour F sous-espace vectoriel de E, on note :

$$a + F = \{a + x \,;\, x \in F\} = t_a(F).$$

Remarques

1. L'ensemble $\mathcal{F} = a + F$ n'est pas vide, puisque $a \in a + F$.
2. Pour $x \in E$, on a $x \in a + F$ si, et seulement si, $x - a \in F$.
3. L'exercice et le lemme suivants traduisent rigoureusement ce que l'on peut voir sur le dessin ci-contre.



p.1026

Exercice 20 Soit $a \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E.

Montrer que l'ensemble $a + F$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $a \in F$ et qu'alors on a $a + F = F$.

Lemme 20

Soit $a \in E$ et $a' \in E$ ainsi que F et F' deux sous-espaces vectoriels de E. Alors, on a $a + F = a' + F'$ si, et seulement si, $F = F'$ et $a' - a \in F$.

Démonstration page 1026

Définition 9

- Une partie $\mathcal{F}$ de E un **sous-espace affine de E** si l'on peut trouver un élément $a \in E$ et un sous-espace vectoriel F de E tels que $\mathcal{F} = a + F$.
- Une telle partie $\mathcal{F}$ est alors appelée **sous-espace affine de E passant par a et dirigé par F** et l'on a $x \in \mathcal{F} \iff x - a \in F$.
- Le sous-espace vectoriel F est appelé la **direction de $\mathcal{F}$**.

Remarques

- D'après le lemme précédent, il y a bien unicité du sous-espace vectoriel F, ce qui justifie l'utilisation des articles définis « le » et « la ».
- Un sous-espace affine est, par définition, non vide.
- Un point est un sous-espace affine dont la direction réduite au vecteur 0.

Proposition 21

Si $\mathcal{F}$ est le sous-espace affine de E passant par un $a \in E$ et dirigé par un sous-espace vectoriel F de E, alors pour tout $a' \in \mathcal{F}$, on a $\mathcal{F} = a' + F$.

Démonstration. Conséquence du lemme précédent puisque si $a' \in \mathcal{F}$ alors $a' - a \in F$. □

Droite affine Lorsque la direction F de $\mathcal{F}$ est une droite vectorielle, c'est-à-dire lorsqu'il existe un vecteur a non nul tel que $F = \mathrm{Vect}\{a\}$, le sous-espace affine $\mathcal{F}$ est appelé **droite affine**.

Exemples

1. Tout sous-espace vectoriel F de E est un sous-espace affine de E, et il est sa propre direction, comme le prouve l'égalité $F = 0 + F$. Inversement, un sous-espace affine $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel si, et seulement si, $0 \in \mathcal{F}$.
2. L'ensemble $\mathcal{F} = \big\{(1+t, -4-2t, 3t)\,;\ t \in \mathrm{IR}\big\}$ est un sous-espace affine de IR^3 : c'est le sous-espace affine passant par le point $(1,-4,0)$ et dirigé par la droite vectorielle $\mathrm{Vect}\big\{(1,-2,3)\big\}$. Ici, $\mathcal{F}$ est donc une droite affine.

p.1027

Exercice 21 Montrer que $\mathcal{F} = \big\{(x,y,z) \in \mathrm{IR}^3 \mid x+y+z=1\big\}$ est le sous-espace affine de IR^3 passant par $(1,0,0)$ et dirigé par $F = \big\{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathrm{IR}^3 \mid \alpha+\beta+\gamma=0\big\}$.

3 Intersection de deux sous-espaces affines

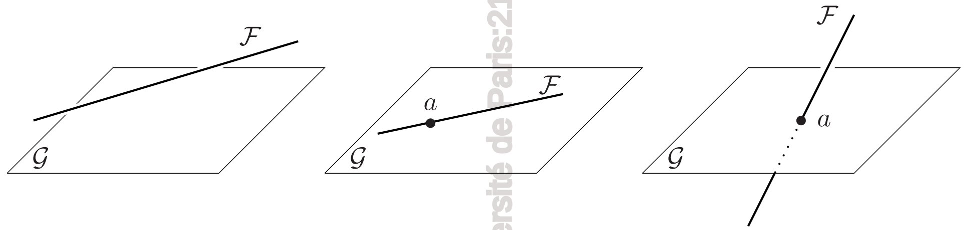
Proposition 22

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E, de directions respectives F et G. Alors :

- soit $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est vide,
- soit $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

Démonstration page 1027

Interprétation graphique dans l'espace



1. Dans le premier cas, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est vide.
2. Dans le second, on a $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. L'intersection est le sous-espace affine $\mathcal{F}$, qui est dirigé par une droite vectorielle. C'est donc une droite affine.
3. Dans le troisième cas, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est réduit à un point. Le sous-espace affine $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est donc dirigé par le sous-espace vectoriel $\{0\}$.

4 Ensemble des solutions d'une équation linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Proposition 23

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $b \in F$. Si l'ensemble $\mathcal{F}_b$ des solutions de l'équation $u(x) = b$ est non vide, alors c'est un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker} u$.

Principe de démonstration. Lorsque $\mathcal{F}_b$ est non vide, on considère un élément a de $\mathcal{F}$ et l'on montre que $\mathcal{F}_b = a + \operatorname{Ker} u$. Démonstration page 1027

On a déjà rencontré le résultat précédent dans divers contextes ; il était alors énoncé sous la forme : « pour obtenir toutes les solutions de l'équation linéaire $u(x) = b$, il suffit d'en connaître une (alors appelée solution particulière), et de lui ajouter toutes les solutions (ou encore la solution générale) de l'**équation homogène associée**, $u(x) = 0$ ». Les exemples suivants donnent une reformulation de tels contextes en termes de sous-espaces affines.

Exemples

1. Soit deux fonctions a et b continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, ainsi que l'équation différentielle linéaire du premier ordre :
$$y' + a(x)y = b(x). \tag{$*$}$$
On sait, d'après le chapitre 5, que l'équation $(*)$ possède (au moins) une solution f_0. En utilisant l'application linéaire :
$$\begin{array}{rccl} u: & \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & u(f) : x \mapsto f'(x) + a(x)f(x) \end{array}$$
le théorème précédent nous dit que l'ensemble des fonctions solutions est un sous-espace affine de l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, passant par f_0 et de direction $\operatorname{Ker} u = S_0$, ensemble des solutions de l'équation homogène associée.
Comme le sous-espace vectoriel des solutions de l'équation homogène est engendré par une solution non nulle, l'ensemble des solutions de $(*)$ est une droite affine.
2. On dispose d'un résultat analogue pour les solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sauf que le sous-espace vectoriel des solutions de l'équation homogène est, cette fois, engendré par un ensemble de deux fonctions.
3. Soit un système linéaire tel que ceux rencontrés au chapitre 2 :
$$(\mathcal{S}) \;:\; \left\{\begin{array}{l} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,j}\,x_j + \cdots + a_{1,p}\,x_p = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{i,1}\,x_1 + a_{i,2}\,x_2 + \cdots + a_{i,j}\,x_j + \cdots + a_{i,p}\,x_p = b_i \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \cdots + a_{n,j}\,x_j + \cdots + a_{n,p}\,x_p = b_n \end{array}\right.$$
où $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ (c'est ce que l'on appelle une **matrice**, voir le chapitre 22) et $(b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{K}^n$.

En utilisant l'application linéaire $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & (y_1, \ldots, y_n) \end{array}$ avec :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad y_i = a_{i,1}\, x_1 + \cdots + a_{i,p}\, x_p$$

le théorème précédent nous dit que, si le système est compatible, alors l'ensemble de ses solutions est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ passant par une solution particulière et dirigé par l'ensemble des solutions du système homogène associé.

p.1027

Exercice 22 Soit x_1, x_2, y_1 et y_2 des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $x_1 \neq x_2$.
On se propose de déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$P(x_1) = y_1 \qquad \text{et} \qquad P(x_2) = y_2.$$

1. Justifier qu'il existe un unique polynôme $P_0 \in \mathbb{K}_1[X]$ qui soit solution.
2. Donner toutes les solutions en considérant l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ P & \longmapsto & \big(P(x_1), P(x_2)\big). \end{array}$$

V Retour sur les sous-espaces engendrés

Cette partie n'est à aborder qu'en deuxième lecture.

1 Combinaisons linéaires

En utilisant la structure d'espace vectoriel, on peut faire des combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs. Toutefois, sans utiliser de notion de limite, on ne peut pas envisager de définir une somme d'un nombre infini de vecteurs. C'est ce qui explique la définition suivante.

Définition 10

Si X désigne une famille ou une partie quelconque d'éléments de E, alors un vecteur est dit **combinaison linéaire des éléments de X** s'il est combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de X.

Autrement dit, étant donné $x \in E$:

- si A est une famille quelconque d'éléments de E, alors on dit que x est combinaison linéaire des éléments de A s'il existe une sous-famille finie A' de A telle que $x \in \operatorname{Vect}(A')$;
- si $\mathcal{A}$ est une partie quelconque d'éléments de E, alors on dit que x est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{A}$ s'il existe un sous-ensemble fini $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ tel que $x \in \operatorname{Vect}(\mathcal{A}')$.

Exemple Dans $\mathbb{K}[X]$, tout polynôme est combinaison linéaire de la famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Remarque La définition précédente est une généralisation de la définition 5 de la page 1006 puisque, dans une combinaison linéaire, certains coefficients peuvent évidemment être nuls.

2 Sous-espace engendré par une partie quelconque

Proposition 24

Si $\mathcal{A}$ est une partie non vide quelconque de E, alors le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}\mathcal{A}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{A}$.

Autrement dit, $\operatorname{Vect}\mathcal{A}$ est l'ensemble : Démonstration page 1028

$$\Big\{x \in E \;\Big|\; \exists n \in \mathbb{N}^* \;\; \exists (a_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{A}^n \;\; \exists (\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n \;\; x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, a_i\Big\}.$$

Remarque Le résultat de la proposition précédente, ainsi que la description précédente, généralisent ce qui a été fait pour les parties finies.

p.1028

Exercice 23 Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}(X)$, caractériser, en termes de pôles, le sous-espace vectoriel engendré par $A = \left(X^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$.

3 Sous-espace engendré par une suite

Considérons le cas du sous-espace vectoriel engendré par une partie en bijection avec $\mathbb{N}$. On représente naturellement cette partie sous forme de famille indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire de suite. Donnons donc un énoncé uniquement en termes de suite.

Proposition 25

Si $A = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E, alors :

$$\operatorname{Vect} A = \Big\{x \in E \;\Big|\; \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists (\lambda_i)_{i\in[\![0,n]\!]} \in \mathbb{K}^{n+1} \quad x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, a_i\Big\}.$$

Démonstration. Comme toute partie finie de $\mathbb{N}$ est majorée, quitte à rajouter des coefficients nuls, toute combinaison linéaire des éléments de $A = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ peut être écrite sous la forme $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i\, a_i$. Par suite, il s'agit d'un cas particulier de la proposition précédente. □

Exemples

1. Dans $\mathbb{K}[X]$, le sous-espace vectoriel engendré par $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est $\mathbb{K}[X]$ puisque tout polynôme est combinaison linéaire d'un nombre fini de monômes X^k.
2. Dans $\mathbb{K}[X]$, le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\left(X^{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble des polynômes pairs puisqu'un polynôme est pair si, et seulement si, c'est une combinaison linéaire d'un nombre fini de monômes X^{2k}.

4 Sous-espace engendré par une famille quelconque

Dans cette partie, I est un ensemble quelconque, et l'on désigne pas $A = (a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. Pour pouvoir en faire des combinaisons linéaires, nous avons besoin de la notion de famille presque nulle.

Définition 11

Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires indexée par I.

- On appelle **support** de la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ l'ensemble $\{j \in I \mid \lambda_j \neq 0\}$.
- La famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est dite **presque nulle** lorsque son support est fini. On dit aussi que c'est une famille **à support fini**.

Notation On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles de $\mathbb{K}^I$.

Exemples

1. La suite des coefficients d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est une famille presque nulle, c'est donc un élément de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.
2. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas élément de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N}^*)}$.
3. La suite $\left(1+(-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas élément de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.
4. Une famille indexée par $\mathbb{N}$ est presque nulle si, et seulement si, elle est nulle à partir d'un certain rang, car les parties finies de $\mathbb{N}$ sont les parties majorées de $\mathbb{N}$.

Attention Même si le ridicule ne tue pas, il ne faut absolument pas parler de famille à support fini lorsqu'il est clair qu'elle est indexée par un ensemble I fini !

Définition 12

Si $(\lambda_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$ une famille presque nulle de scalaires, on définit :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i\, a_i = \sum_{i\in J} \lambda_i\, a_i,$$

où J est le support de $(\lambda_i)_{i\in I}$, voire plus généralement n'importe quelle partie finie de I contenant J.

Exemple Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et si $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ alors on peut écrire :

$$u\Big(\sum_{i\in I} \lambda_i\, x_i\Big) = \sum_{i\in I} \lambda_i\, u(x_i).$$

Les vecteurs de la forme $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, a_i$ pour $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ sont ce que l'on appelle les **combinaisons linéaires de la famille $A = (a_i)_{i\in I}$** et l'on peut alors décrire le sous-espace vectoriel engendré par A comme l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A, à savoir :

$$\operatorname{Vect} A = \Big\{ \sum_{i\in I} \lambda_i\, a_i \,;\, (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \Big\}.$$

Lorsque l'on dispose d'une partie $\mathcal{A}$, on peut indexer ses éléments par elle-même et maintenant aussi écrire :

$$\operatorname{Vect}(\mathcal{A}) = \Big\{ \sum_{a\in \mathcal{A}} \lambda_a\, a \,;\, (\lambda_a)_{a\in\mathcal{A}} \in \mathbb{K}^{(A)} \Big\}.$$

p.1028

Exercice 24 Montrer que $\mathbb{C}(X)$ est engendré par :

$$\mathcal{E} = \big\{X^k \,;\, k\in\mathbb{N}\big\} \cup \Big\{ \frac{1}{(X-a)^k} \,;\, a\in\mathbb{C} \text{ et } k\in\mathbb{N}^* \Big\}.$$

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est ainsi muni de la loi $+$, interne, et d'une loi externe.

- Pour la loi $+$, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ est un groupe commutatif, puisque cette loi est associative et commutative, d'élément neutre $(0,0)$, et que tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ admet un opposé qui est $(-x,-y)$.
- Les quatre propriétés de la loi externe découlent directement des propriétés de l'addition et de la multiplication des nombres réels. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ ainsi que $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on a :
  - pour (1) : $\alpha.\big(\beta.(x,y)\big) = \alpha.(\beta.x, \beta.y) = (\alpha\beta.x, \alpha\beta.y) = (\alpha\beta).(x,y)$;
  - pour (2) : $1.(x,y) = (1.x, 1.y) = (x,y)$;
  - pour (3) : $$\begin{aligned}(\alpha+\beta).(x,y) &= \big((\alpha+\beta).x, (\alpha+\beta).y\big)\\ &= \big(\alpha.x+\beta.x, \alpha.y+\beta.y\big)\\ &= \big(\alpha.x, \alpha.y\big) + \big(\beta.x, \beta.y\big)\\ &= \alpha.(x,y) + \beta.(x,y)\ ;\end{aligned}$$
  - pour (4) : $$\begin{aligned}\alpha.\big((x,y)+(x',y')\big) &= \alpha.\big(x+x', y+y'\big) = \big(\alpha.(x+x'), \alpha.(y+y')\big)\\ &= \big(\alpha.x+\alpha.x', \alpha.y+\alpha.y'\big) = \big(\alpha.x, \alpha.y\big) + \big(\alpha.x', \alpha.y'\big)\\ &= \alpha.(x,y) + \alpha.(x',y').\end{aligned}$$

Proposition 1 Soit $x \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

(i) Comme $0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}$, la propriété (3) nous donne :
$$0_{\mathbb{K}}\, x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}})\, x = 0_{\mathbb{K}}\, x + 0_{\mathbb{K}}\, x$$
En ajoutant aux deux membres l'opposé de $0_{\mathbb{K}}\, x$, on obtient $0_E = 0_{\mathbb{K}}\, x$.
Démonstration analogue pour $\alpha\, 0_E = 0_E$ en partant de $\alpha\, 0_E = \alpha\,(0_E + 0_E)$.

(ii) Comme :
$$\alpha\, x + (-\alpha)\, x = (\alpha - \alpha)\, x = 0_{\mathbb{K}}\, x = 0_E,$$
on en déduit que $(-\alpha)\, x$ est l'opposé de $\alpha\, x$ et donc $(-\alpha)\, x = -(\alpha\, x)$.
Démonstration analogue pour l'autre relation en partant de :
$$(-x) + \alpha x = \alpha(-x + x) = \alpha 0_E = 0_E.$$

Exercice 2

1. D'après ce qui précède, il est immédiat que $\mathbb{K}\, 0 = \{0\}$.
2. Par symétrie, il suffit de prouver l'une des deux implications.
   Supposons donc $b \in \mathbb{K}\, a$. On peut donc trouver $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $b = \lambda\, a$. Puisque $b \neq 0$, on a $\lambda \neq 0$ et donc $a = \lambda^{-1}\, b$, ce qui prouve que b appartient à $\mathbb{K}\, a$.

   Remarque Lorsque $a \neq 0$, l'ensemble $\mathbb{K}a$ est appelé **droite vectorielle**, comme on le verra page 1005.

Proposition 3

- Muni de l'addition, $E \times F$ est un groupe commutatif puisque :
  - $*$ la loi $+$ est associative : en effet l'associativité de l'addition dans E et F nous permet, pour $(x,y) \in E \times F$, $(x',y') \in E \times F$ et $(x'',y'') \in E \times F$, d'écrire :
$$\begin{aligned}\big((x,y)+(x',y')\big)+(x'',y'') &= (x+x',y+y')+(x'',y'')\\ &= \big((x+x')+x'',(y+y')+y''\big)\\ &= \big(x+(x'+x''),y+(y'+y'')\big)\\ &= (x,y)+\big((x',y')+(x'',y'')\big)\ ;\end{aligned}$$
  - $*$ on démontre, de façon similaire, que la loi $+$ est commutative ;
  - $*$ l'élément $(0_E,0_F)$ est neutre pour $+$;
  - $*$ tout élément (x,y) de $E \times F$ admet pour opposé $(-x,-y)$.
- Les quatre autres propriétés se déduisent des propriétés correspondantes sur E et F. Par exemple, si $(x,y) \in E \times F$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$, alors on a :
$$\begin{aligned}\alpha\big(\beta\,(x,y)\big) &= \alpha\,(\beta\,x,\beta\,y) && \text{multiplication par } \beta\\ &= \big(\alpha\,(\beta\,x),\alpha\,(\beta\,y)\big) && \text{multiplication par } \alpha\\ &= \big((\alpha\beta)\,x,(\alpha\beta)\,y\big) && \text{propriété (1) dans } E \text{ et } F\\ &= (\alpha\beta)\,(x,y) && \text{mise en facteur de } \alpha\beta.\end{aligned}$$

Proposition 4 L'ensemble $\mathcal{F}(X,E)$ est ainsi muni de la loi $+$, interne, et la loi externe $\cdot$.

- Comme $(E,+)$ est un groupe commutatif, d'après l'exercice 10 de la page 870 du chapitre 16, l'ensemble $\mathcal{F}(X,E)$ est un groupe commutatif pour la loi $+$; de plus :
  - $*$ l'élément neutre de ce groupe est alors la fonction nulle $0 : x \mapsto 0$;
  - $*$ une fonction f, a pour opposée la fonction $-f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & -f(x). \end{array}$
- Montrons les quatre autres propriétés. Soit f et g deux éléments de $\mathcal{F}(X,E)$ ainsi que α et β deux scalaires.
  - $*$ Pour (1), montrons $\alpha.(\beta.f) = (\alpha\beta)f$, égalité de deux applications.
    Soit donc x de E. On a alors :
$$\alpha.(\beta.f)(x) = \alpha.(\beta.f(x)) \overset{E}{=} (\alpha\beta).f(x) = \big((\alpha\beta).f\big)(x)$$
    ce qui prouve le résultat.
  - $*$ De même pour (2), on a $1.f = f$ car, pour tout $x \in E$:
$$\big(1.f\big)(x) = 1.f(x) \overset{E}{=} f(x).$$
  - $*$ Pour (3), on a $(\alpha+\beta).f = \alpha.f + \beta.f$ car, pour tout $x \in E$:
$$\big((\alpha+\beta).f\big)(x) = (\alpha+\beta).f(x) \overset{E}{=} \alpha.f(x) + \beta.f(x) = \big(\alpha f + \beta f\big)(x).$$
  - $*$ Enfin pour (4), on a $\alpha.(f+g) = \alpha.f + \alpha.g$ car, pour tout $x \in E$:
$$\alpha.(f+g)(x) = \alpha.\big((f+g)(x)\big) = \alpha.\big((f(x)+g(x)\big) \overset{E}{=} \alpha.f(x)+\alpha.g(x) = \big(\alpha.f+\alpha.g\big)(x).$$

  Dans les lignes précédentes, $\overset{E}{=}$ correspondait aux égalités qui découlant des propriétés des lois $+$ et $\cdot$ de E, les autres provenant de la définition des opérations sur $\mathcal{F}(X,E)$.

Exercice 3 L'identité :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_a(x) = \cos(x+a) = \cos a \cos x - \sin a \sin x$$

qui s'écrit aussi $f_a = \cos a \cos - \sin a \sin$, montre que la fonction f_a est combinaison linéaire des fonctions $\sin$ et $\cos$.

Exercice 4 L'ensemble E est inclus dans $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

- Il contient évidemment la suite nulle.
- Soit $(u,v) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Alors, on a $\alpha\, u + \beta\, v \in E$ car, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(\alpha\, u + \beta\, v)_{n+2} = \alpha\, u_{n+2} + \beta\, v_{n+2} &= \alpha\,(a u_{n+1} + b u_n) + \beta\,(a v_{n+1} + b v_n)\\ &= a(\alpha\, u_{n+1} + \beta\, v_{n+1}) + b(\alpha\, u_n + \beta\, v_n).\end{aligned}$$

Par suite, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

Proposition 5

1. F est un sous-groupe de E car il contient 0, il est stable par addition et, pour tout $x \in F$, on a $-x = (-1) \cdot x \in F$.
2. Toutes les autres propriétés, qui sont vraies avec x, y dans E, sont *a fortiori* vraies pour x, y dans F.

Exercice 5 Soit F est une partie de l'espace vectoriel E.

- Si F vérifie les propriétés de la définition, alors $0 \in F$ et donc $F \neq \varnothing$.
- Réciproquement, supposons F non vide et stable par combinaisons linéaires. Comme $F \neq \varnothing$, on peut prendre $x \in F$. En utilisant la stabilité avec $y = x$ ainsi que $\alpha = \beta = 0$, on en déduit $0 = 0.x + 0.x \in F$.

Exercice 6

1. - L'ensemble F contient l'élément neutre $0 = (0,0,0)$,
   - Montrons que F est stable par combinaisons linéaires. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ ainsi que $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ deux éléments de F. On a alors :

   $$\alpha\, x + \beta\, y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3).$$

   Comme :

   $$\sum_{i=1}^{3} (\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha \sum_{i=1}^{3} x_i + \beta \sum_{i=1}^{3} y_i = \alpha\, 0 + \beta\, 0 = 0,$$

   on en déduit $\alpha\, x + \beta\, y \in F$.
2. G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ puisqu'il ne contient pas 0.

Exercice 7 La partie D (c'est un disque) n'est pas stable par combinaison linéaire : par exemple, 1 appartient à $\mathcal{D}$ mais $2 = 2.1$ n'appartient pas à $\mathcal{D}$.

Par suite, D n'est ni un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, ni un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exercice 8 Montrons que F_A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

1. Le polynôme nul appartient à F, puisque $0 = A \times 0$.
2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(P_1, P_2) \in F^2$. Il existe donc $Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ et $Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P_1 = AQ_1$ et $P_2 = AQ_2$, et alors :

   $$\alpha P_1 + \beta P_2 = \alpha(AQ_1) + \beta(AQ_2) = (\alpha Q_1 + \beta Q_2)\, A.$$

   Comme $\alpha Q_1 + \beta Q_2 \in \mathbb{K}[X]$, on en déduit $\alpha P_1 + \beta P_2$ appartient à F.

Ainsi F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, et donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 9

- Comme $0 \in F$ et $0 \in G$, on a $0 \in F \cap G$.
- Soit x et y appartenant à $F \cap G$ ainsi que α et β deux scalaires. Comme x et y appartiennent à F (resp. à G) qui est un sous-espace vectoriel de E, on en déduit que $\alpha x + \beta y \in F$ (resp. $\alpha x + \beta y \in G$), et donc $\alpha x + \beta y \in F \cap G$.

Par suite, l'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 6 Posons $F = \bigcap\limits_{i \in I} F_i$.

- Chaque sous-espace vectoriel F_i contient 0, donc leur intersection F aussi.
- Soit $x \in F$ et $y \in F$ ainsi que $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$. Pour tout $i \in I$, on a $x \in F_i$, $y \in F_i$ et donc, comme F_i est un sous-espace vectoriel, $\alpha x + \beta y \in F_i$.
  Par suite, $\alpha x + \beta y \in F$.

Ainsi, l'intersection F est un sous-espace vectoriel.

Exercice 10

1. Comme 0 appartient à F, il n'appartient pas à $G \setminus F$, qui n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E. En particulier, $\complement_E F$ n'est pas un sous-espace vectoriel.
2. Soit $x \in E$ et $y \in E \setminus F$. Supposons $x + y \in F$. Comme F est stable par combinaison linéaire, on en déduit $y = (x + y) - x \in F$, ce qui est contradictoire. Par suite, on a donc $x + y \notin F$.
3.
   - Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ est évidemment un sous-espace vectoriel.
     De même, si $G \subset F$ alors $F \cup G = F$.
     Par suite, si $F \subset G$ ou $G \subset F$, alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel.
   - Supposons $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$, et montrons que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace.
     * Comme $F \not\subset G$, il existe $x \in F \setminus G$. Il existe de même $y \in G \setminus F$.
     * Comme $x \in F$ et $y \notin F$, la question précédente montre que $x + y \notin F$. On prouve de même, $x + y \notin G$. Par suite, on a $x + y \notin F \cup G$.

     Ainsi, on a $x \in F \cup G$, $y \in F \cup G$ et $x + y \notin F \cup G$, ce qui entraîne que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Proposition 7 Soit $(F_i)_{i \in I}$ la famille de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{A}$. Cette famille est non vide, car E, qui contient $\mathcal{A}$, est l'un de ses éléments. Posons $G = \bigcap\limits_{i \in I} F_i$.

- L'ensemble G contient $\mathcal{A}$, puisque chaque ensemble F_i contient $\mathcal{A}$.
- D'après la proposition 6, G est un sous-espace vectoriel de E.
- Soit H un sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{A}$. Alors, par définition de $(F_i)_{i \in I}$, il existe $i_0 \in I$ tel que $H = F_{i_0}$. Par suite, $G = \bigcap\limits_{i \in I} F_i$ est inclus dans H.

Ainsi, G est bien le plus petit sous-espace vectoriel contenant $\mathcal{A}$.

Exercice 11 Le sous-espace vectoriel $\{0\}$ contient $\varnothing$ et il est inclus dans tout sous-espace vectoriel de E, et donc, dans tout sous-espace vectoriel de E contenant $\varnothing$. Par suite, $\{0\} = \operatorname{Vect} \varnothing$.

Proposition 8 Posons $B = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \, a_i \, ; \, (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$.

On a évidemment $B \subset E$.

- Le vecteur nul appartient à B (prendre tous les λ_i nuls).
- Soit $(x, y) \in B^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
  Il existe donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \, a_i$ et $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i \, a_i$. Alors, l'égalité :
  $$\alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, a_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \mu_i \, a_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \, \lambda_i + \beta \, \mu_i) \, a_i$$
  montre que $\alpha x + \beta y \in B$. Ainsi, B est un sous-espace vectoriel de E.
- En prenant tous les scalaire λ_i nuls, sauf λ_p que l'on prend égal à 1, on voit que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on a $a_p \in B$.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant A. Puisque F est stable pour les deux lois de E, et qu'il contient tous les vecteurs a_i, une récurrence élémentaire montre que F contient tous les éléments de B. Donc $B \subset F$.

Ainsi, B est bien le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les éléments de A, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect} A$.

Exercice 12

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, $(x', y' \in \mathbb{K}^2)$ ainsi que $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\lambda' \in \mathbb{K}$. On a alors :
   $$\begin{aligned} u\big(\lambda \, (x, y) + \lambda' \, (x', y')\big) &= u\big((\lambda \, x + \lambda' \, x', \lambda \, y + \lambda' \, y')\big) \\ &= a(\lambda \, x + \lambda' \, x') + b(\lambda \, y + \lambda' \, y') \\ &= \lambda \, (ax + by) + \lambda' \, (ax' + by') \\ &= \lambda u\big((x, y)\big) + \lambda' \, u\big((x', y')\big) \end{aligned}$$
   et donc, u est linéaire.
2. Soit v une application linéaire de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, on a :
   $$v\big((x, y)\big) = v\big(x \, (1, 0) + y \, (0, 1)\big) = x \, v\big((1, 0)\big) + y \, v\big((0, 1)\big).$$
   Il suffit alors de poser $a = v\big((1, 0)\big)$ et $b = v\big((0, 1)\big)$, pour en déduire le résultat.

Exercice 13

- Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. L'application $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (ax + by, cx + dy) \end{array}$
  est linéaire car, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda' \in \mathbb{R}$, on a :
  $$\begin{aligned} u\big(\lambda \, (x, y) + \lambda' \, (x', y')\big) &= u\big((\lambda \, x + \lambda' \, x', \lambda \, y + \lambda' \, y')\big) \\ &= \big(a(\lambda \, x + \lambda' \, x') + b(\lambda \, y + \lambda' \, y'), c(\lambda \, x + \lambda' \, x') + d(\lambda \, y + \lambda' \, y')\big) \\ &= \big(\lambda \, (ax + by) + \lambda' \, (ax' + by'), \lambda \, (cx + dy) + \lambda' \, (cx' + dy')\big) \\ &= \lambda \, (ax + by, cx + dy) + \lambda' \, (ax' + by', cx' + dy') \\ &= \lambda \, u\big((x, y)\big) + \lambda' u\big((x', y')\big). \end{aligned}$$

- Réciproquement, soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{IR}^2)$. Alors, pour tout vecteur $(x,y) \in \mathrm{IR}^2$, on a :
$$u\left((x,y)\right) = u\big(x(1,0)+y(0,1)\big) = xu\left((1,0)\right) + yu\left((0,1)\right).$$
En posant $(a,c) = u\left((1,0)\right)$ et $(b,d) = u\left((0,1)\right)$, on trouve alors :
$$u\left((x,y)\right) = x(a,c)+y(b,d) = (ax+by, cx+dy).$$

Exercice 14 Montrons que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^2(\mathrm{IR},\mathrm{IR}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathrm{IR},\mathrm{IR}) \\ f & \longmapsto & af''+bf'+cf \end{array}$ est linéaire.

Cette application est bien définie car $f \in \mathcal{C}^2(\mathrm{IR},\mathrm{IR})$ et elle à valeurs dans $\mathcal{C}^0(\mathrm{IR},\mathrm{IR})$. Montrons qu'elle est linéaire. Soit donc $(f,g) \in \mathcal{C}^2(\mathrm{IR},\mathrm{IR})^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathrm{IR}^2$. Alors :
$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha f+\beta g) &= a(\alpha f+\beta g)''+b(\alpha f+\beta g)'+c(\alpha f+\beta g)\\
&= a(\alpha f''+\beta g'')+b(\alpha f'+\beta g')+c(\alpha f+\beta g) \text{ (linéarité de la dérivation)}\\
&= \alpha(af''+bf'+cf)+\beta(ag''+bg'+cg)\\
&= \alpha\varphi(f)+\beta\varphi(g).
\end{aligned}$$
Ainsi, l'application φ est une application linéaire de $\mathcal{C}^2(\mathrm{IR},\mathrm{IR})$ vers $\mathcal{C}^0(\mathrm{IR},\mathrm{IR})$.

Proposition 10

- Soit E' un sous-espace vectoriel de E ; posons $F' = u(E')$.
  - On a bien $F' \subset F$.
  - Puisque $0 \in E'$, on a $0 = u(0) \in F'$.
  - Soit $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathrm{IK}^2$ et $(y_1,y_2) \in F'^2$.
    Il existe donc $(x_1,x_2) \in E'^2$ tel que $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$ et alors :
    $$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) = u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2).$$
    Comme E' est un sous-espace vectoriel de E, on a $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in E'$, et donc $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in F'$.

  Par suite, $F' = u(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Soit F' un sous-espace vectoriel de F ; posons $E' = u^{-1}(F') = \{x \mid u(x) \in F'\}$.
  - On a bien $E' \subset E$.
  - Comme u est linéaire, on a $u(0) = 0 \in F'$ et donc $0 \in E'$.
  - Soit $(x_1,x_2) \in E'^2$ et $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathrm{IK}^2$. On a alors :
    $$u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2).$$
    Étant donné que $u(x_1) \in F'$, $u(x_2) \in F'$ et que F' est un sous-espace vectoriel, on en déduit que $u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in F'$ et donc que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in E'$.

  Par suite, $E' = u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 11

- Supposons u injective et considérons $x \in \operatorname{Ker} u$; on a alors $u(x) = 0 = u(0)$.
  Comme u est injective, il s'ensuit $x = 0$; par suite $\operatorname{Ker} u \subset \{0\}$.
  On en déduit $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ puisque $\operatorname{Ker} u$, qui est un sous-espace vectoriel, contient 0.
- Supposons $\operatorname{Ker} u = \{0\}$. Soit $(x,y) \in E^2$ vérifiant $u(x) = u(y)$. On a alors :
  $$u(x-y) = u(x) - u(y) = 0,$$
  Comme $\operatorname{Ker} u = \{0\}$, on en déduit $x - y = 0$ et donc $x = y$; ainsi u est injective.

Exercice 15 On a déjà montré que φ est linéaire. Soit $(x, y) \in \operatorname{Ker} \varphi$. On a alors :

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}.$$

Comme $ad - bc \neq 0$, d'après la proposition 8 de la page 114, ce système n'admet que $(0,0)$ comme solution. Par suite, φ est injective.

Exercice 16 D'après les résultats du chapitre 5, cette équation admet (au moins) une solution non nulle. Par suite, l'application linéaire φ n'est pas injective.

Exercice 17

1. La linéarité de φ est immédiate, puisque pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $Q \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\beta \in \mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{K}$, on a $(\alpha\, P + \beta\, Q)(a) = \alpha\, P(a) + \beta\, Q(a)$.
2. La restriction φ_n de φ à $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ reste une application linéaire. Soit $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ un élément de $\operatorname{Ker} \varphi_n$. Chacun des x_i est donc racine de P ; ces nombres étant deux à deux distincts, le polynôme P possède n racines. Comme $\deg P \leqslant n - 1$, on a $P = 0$ et donc $\operatorname{Ker} \varphi_n = \{0\}$. Ainsi φ_n est injective.
3. Un polynôme P appartient au noyau de φ si, et seulement s'il admet chaque x_i pour racine. Comme ce sont des scalaires distincts deux à deux, cela revient à dire que P est divisible par $A = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$. Ainsi $\operatorname{Ker} \Phi = \big\{A\, Q\, ;\ Q \in \mathbb{K}[X]\big\}$.

Proposition 12 $\lambda\, u + \mu\, v$ est linéaire car pour $(x, y) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, on a :

$$\begin{aligned} (\lambda\, u + \mu\, v)(\alpha\, x + \beta\, y) &= \lambda\, u(\alpha\, x + \beta\, y) + \mu\, v(\alpha\, x + \beta\, y) && (1) \\ &= \lambda\, \big(\alpha\, u(x) + \beta\, u(y)\big) + \mu\, \big(\alpha\, v(x) + \beta\, v(y)\big) && (2) \\ &= \alpha\, \big((\lambda\, u + \mu\, v)(x)\big) + \beta\, \big((\lambda\, u + \mu\, v)(y)\big) && (3) \end{aligned}$$

Les égalités (1) et (3) proviennent de la définition de $\lambda\, u + \mu\, v$; quant à l'égalité (2), elle provient de la linéarité de u et de v.

Proposition 14 Pour $(x, y) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, on a :

$$\begin{aligned} (v \circ u)(\alpha\, x + \beta\, y) &= v\big(u(\alpha\, x + \beta\, y)\big) \\ &= v\big(\alpha\, u(x) + \beta\, u(y)\big) && \text{(par linéarité de } u\text{)} \\ &= \alpha\, v\big(u(x)\big) + \beta\, v\big(u(y)\big) && \text{(par linéarité de } v\text{)} \\ &= \alpha\, (v \circ u)(x) + \beta\, (v \circ u)(y) \end{aligned}$$

ce qui prouve que $v \circ u$ est linéaire.

Exercice 18 Ici, $v \circ u = 0$ signifie que $v \circ u$ est l'application nulle de E dans G.

- Supposons que $v \circ u = 0$. Soit $y \in \operatorname{Im} u$; il existe alors $x \in E$ tel que $y = u(x)$, et donc $v(y) = v(u(x)) = (v \circ u)(x) = 0$. Ainsi, $y \in \operatorname{Ker} v$ et donc $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$.
- Supposons que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$. Alors pour tout $x \in E$, on a $(v \circ u)(x) = v\,(u(x)) = 0$ puisque $u(x) \in \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$; ainsi, $v \circ u$ est l'application nulle de E dans G.

Proposition 16

- $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel (proposition 13 de la page 1010) donc un groupe commutatif pour l'addition.
- Il est stable pour la composition des applications (proposition 14 de la page 1010).
- Il contient l'identité qui est un élément neutre pour la loi $\circ$.
- La composition des applications est associative, donc celle des applications linéaires l'est *a fortiori*.
- La distributivité de $\circ$ par rapport à $+$, s'écrit : pour tout $(u, v, w) \in \mathcal{L}(E)^3$,

  $$(u+v)\circ w = (u\circ w) + (v\circ w) \qquad \text{et} \qquad u\circ(v+w) = (u\circ v) + (u\circ w).$$

  C'est une conséquence de la proposition précédente.

Exercice 19

1. On a déjà montré (*cf.* exercice 13 de la page 1008) que les applications de ce type sont linéaires. On peut aussi le prouver directement avec la même démarche.
2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(r\circ s)(x,y) = r\left(s(x,y)\right) = r(y,x) = (-x,y),$$
$$(s\circ r)(x,y) = s\left(r(x,y)\right) = s(-y,x) = (x,-y).$$

Les applications $r\circ s$ et $s\circ r$ sont donc différentes puisque $(r\circ s)(1,1) \neq (s\circ r)(1,1)$

Proposition 17

Comme u est bijective, u^{-1} l'est aussi. Il reste à montrer la linéarité de u^{-1}.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et $(y_1, y_2) \in F^2$. Posons $x_1 = u^{-1}(y_1)$ et $x_2 = u^{-1}(y_2)$. Alors :

$$\begin{aligned} u^{-1}(\lambda_1\, y_1 + \lambda_2\, y_2) &= u^{-1}\big(\lambda_1\, u(x_1) + \lambda_2\, u(x_2)\big) \\ &= u^{-1}\big(u(\lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2)\big) \\ &= (u^{-1}\circ u)(\lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2) \\ &= \lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2 \\ &= \lambda_1\, u^{-1}(y_1) + \lambda_2\, u^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

Exercice 20 Supposons que $a+F$ soit un sous-espace vectoriel. Alors il contient 0 et il existe alors $f \in F$ tel que $a+f=0$ et donc $a=-f$; on en déduit $a \in F$.

Réciproquement, supposons $a \in F$. Alors :

- tout $a+f$ avec $f \in F$ est élément de F puisque F est un sous-espace vectoriel ;
- si $f \in F$, alors l'écriture $f = a + (f-a)$ montre que $f \in F$.

On en déduit que $a+F=F$, ce qui prouve la réciproque ainsi que la dernière affirmation.

Lemme 20

1. Supposons $a+F = a'+F$.
   - Comme $a' \in a'+F' = a+F$, on a $a' \in a+F$ et donc $a'-a \in F$.
     Par symétrie, on a aussi $a-a' \in F'$.

- Montrons que $F' \subset F$. Soit $x' \in F'$. On a alors $a' + x' \in a' + F'$ et donc $a' + x' \in a + F$. Par suite, il existe $x \in F$ tel que $x' + a' = a + x$ et donc $x' = a - a' + x$. Comme $a' - a$ et x' sont éléments du sous-espace vectoriel F', on en déduit $x \in F'$.
  Par symétrie, on obtient $F \subset F'$, ce qui entraîne $F = F'$.

2. Réciproquement, supposons $F = F'$ et $a' - a \in F$. On a alors $a' - a \in F'$.
   - Montrons $a + F \subset a' + F'$. Soit $x \in a + F$. Il existe alors $y \in F$ tel que $x = a + y$ et donc $x = a' + (a - a' + y)$. Comme $a' - a$ et y sont deux éléments du sous-espace vectoriel $F = F'$, on en déduit $a - a' + y \in F'$ et donc $x \in a' + F'$.
   - Par symétrie, on obtient $a' + F' \subset a + F$, ce qui entraîne $a' + F' = a + F$.

Exercice 21 On a déjà vu que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \mathcal{F} &\Longleftrightarrow x + y + z = 1\\ &\Longleftrightarrow (x - 1) + y + z = 0\\ &\Longleftrightarrow \big((x, y, z) - (1, 0, 0)\big) \in F,\end{aligned}$$

qui est ce que l'on voulait démontrer.

Proposition 22 Supposons $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$; soit donc $a \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Pour tout x de E, on a :

$$x \in \mathcal{F} \Leftrightarrow x - a \in F \qquad \text{et} \qquad x \in \mathcal{G} \Leftrightarrow x - a \in G.$$

Ainsi, $x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \Leftrightarrow x - a \in F \cap G$. On en déduit que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = a + F \cap G$.

Proposition 23 Supposons l'ensemble $\mathcal{F}_b$ non vide ; soit alors a une solution de (E_b). Soit $x \in E$. L'élément x appartient à $\mathcal{F}_b$ si, et seulement si, on a $u(x) = b$. Cela équivaut encore à $u(x) = u(a)$, c'est-à-dire, par linéarité de u, à $u(x - a) = 0$. Ainsi :

$$x \in \mathcal{F}_b \Leftrightarrow x - a \in \operatorname{Ker} u.$$

On a donc $\mathcal{F}_b = a + \operatorname{Ker} u$.
Remarquons que $\operatorname{Ker} u = \mathcal{F}_0$ par définition du noyau d'une application linéaire.

Exercice 22

1. Chercher $P_0 = a\,X + b$ revient à chercher $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

$$\begin{cases} P_0(x_1) = a\,x_1 + b = y_1\\ P_0(x_2) = a\,x_2 + b = y_2\end{cases}$$

   Ce système linéaire, de deux équations à deux inconnues, a pour déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & 1\\ x_2 & 1\end{vmatrix} = x_1 - x_2 \neq 0\ ;$$

   ainsi, il possède un unique couple (a, b) solution, d'où l'existence et l'unicité de P_0.

2. On veut résoudre l'équation $\varphi(P) = (y_1, y_2)$.
   - Le polynôme P_0 en est une solution particulière.
   - On a vu dans l'exercice 17 de la page 1010 que φ est une application linéaire de noyau $\operatorname{Ker}\varphi = \{(X - x_1)(X - x_2)Q\ ;\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$.
     Par suite, d'après la proposition 23 de la page 1015, l'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(P) = (y_1, y_2)$ est le sous-espace affine :

$$P_0 + \operatorname{Ker}\varphi = \{P_0 + (X - x_1)(X - x_2)Q\ ;\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

Proposition 24 Appelons B l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{A}$.
On a évidemment $B \subset E$.

- Le vecteur nul appartient à B (prendre $n = 1$, $a_1 \in \mathcal{A}$ et $\lambda_1 = 0$).
- Soit $(x', x'') \in B^2$ et $(\alpha', \alpha'') \in \mathbb{K}^2$.
  Il existe donc des entiers $n' \in \mathbb{N}^*$ et $n'' \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $(a'_i)_{i\in[\![1,n']\!]} \in \mathcal{A}^{n'}$, $(a''_i)_{i\in[\![1,n'']\!]} \in \mathcal{A}^{n''}$, $(\lambda'_i)_{i\in[\![1,n']\!]} \in \mathbb{K}^{n'}$ et $(\lambda''_i)_{i\in[\![1,n'']\!]} \in \mathbb{K}^{n''}$ tels que :
  $$x' = \sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i\, a'_i \quad \text{et} \quad x'' = \sum_{i=1}^{n''} \lambda''_i\, a''_i.$$
  Quitte à ajouter des coefficients nuls, en posant
  $$\{a'_i\,;\ i \in [\![1,n']\!]\} \cup \{a''_i\,;\ i \in [\![1,n'']\!]\} = \{a_i\,;\ i \in [\![1,n]\!]\},$$
  il existe donc $(\mu'_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu''_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$ tels que :
  $$x' = \sum_{i=1}^{n} {\mu'}_i\, a_i, \quad x'' = \sum_{i=1}^{n} {\mu''}_i\, a_i \quad \text{et donc} \quad \alpha'\, x' + \alpha''\, x'' = \sum_{i=1}^{n} (\alpha' \mu'_i + \alpha'' \mu''_i)\, a_i.$$
  Ainsi $\alpha'\, x' + \alpha''\, x'' \in B$, et B est donc un sous-espace vectoriel de E.
- Tout élément $a \in \mathcal{A}$ est élément de B (prendre $n = 1$, $a_1 = a$ et $\lambda_1 = 1$).
- Enfin, tout sous-espace vectoriel F de E contenant $\mathcal{A}$ contient B puisqu'un tel sous-espace vectoriel est stable par combinaisons linéaires.

Ainsi, B est bien le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les éléments de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect} \mathcal{A}$. [2]

Exercice 23 Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}(X)$ engendré par $A = (X^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est l'ensemble des fractions rationnelles n'admettant pas d'autre pôle que 0 puisque :

- toute combinaison linéaire d'éléments de A est une fraction rationnelle qui n'admet aucun pôle non nul ;
- réciproquement, si une fraction rationnelle n'a pas d'autre pôle que 0, alors sa décomposition en éléments simples s'écrit comme somme d'un polynôme et d'une combinaison linéaire des X^{-k} pour $k \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire comme combinaison linéaire des X^k pour $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 24

- L'ensemble $\mathcal{E}$ est inclus dans $\mathbb{C}(X)$.
- Soit à présent $R \in \mathbb{C}(X)$. Le théorème de décomposition en éléments simples nous dit qu'il existe un polynôme P, un ensemble fini $A \subset \mathbb{C}$ et une famille presque nulle de complexes $(\lambda_{a,k})_{(a,k)\in A\times\mathbb{N}}$ tels que :
  $$R = P + \sum_{a\in A} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_{a,k}}{(X-a)^k}.$$
  Comme P est lui-même combinaison linéaire de monômes de la forme X^k, on a :
  $$R = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_k X^k + \sum_{a\in A} \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_{a,k} \frac{1}{(X-a)^k} \quad \text{avec} \quad (\mu_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}.$$
  Par suite, R est combinaison linéaire des élément de $\mathcal{E}$.

On en déduit que $\mathbb{C}(X)$ est engendré par $\mathcal{E}$.

S'entraîner et approfondir

19.1 Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. On définit une autre loi externe sur E, notée $\star$, par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall x \in E \quad \lambda \star x = \mathrm{Re}(\lambda) \cdot x.$$

Montrer que $(E, +, \star)$ n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

19.2 On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, .)$. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

1. L'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble des fonctions prenant une valeur non nulle en 0.

$\star$ **19.3** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}^3$, on considère l'ensemble :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 2xz = 0\}.$$

Est-ce un sous-espace vectoriel :

1. si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?
2. si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

19.4 Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que :

1. $\mathrm{Ker}\, g \circ f = f^{-1}(\mathrm{Ker}\, g)$,
2. $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$,
3. $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$.

19.5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E. Montrer que, si $f \circ g = g \circ f$, alors $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont stables par g.

19.6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et f et g deux applications linéaires de E vers $\mathbb{K}$, telles que :

$$\forall x \in E \quad f(x)g(x) = 0.$$

Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

19.7 Soit E un $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f un endomorphisme de E. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f \iff \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = 0.$$

19.8 Sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit l'application φ par $\varphi(f) = g$, où :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x t f(t) \mathrm{d}t. \end{array}$$

Montrer que φ est un endomorphisme de E. Est-il injectif, surjectif ?

19.9 Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de directions respectives F et G, et contenant respectivement les points a et b. Montrer que :

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing \iff b - a \in F + G.$$

⋆ **19.10** Quel est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$ engendré par l'ensemble des fonctions indicatrices des intervalles inclus dans $[a,b]$?

⋆⋆ **19.11** Donner une partie génératrice de $\mathbb{R}(X)$.
(penser à la décomposition en éléments simples.)

Solution des exercices

19.1 Soit x un vecteur non nul de E. Alors $i \star x = \mathrm{Re}(i) \cdot x = 0$, donc $i \star (i \star x) = 0$. Par ailleurs, on a $(i^2) \star x = -x$. Ainsi, $i \star (i \star x) \neq (i^2) \star x$. Si E n'est pas réduit à $\{0\}$, alors l'ensemble $(E, +, \star)$ n'est donc pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

19.2 1. La fonction nulle est dérivable, et toute combinaison linéaire de fonctions dérivables est aussi dérivable. Ainsi l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. L'ensemble des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E. En effet, il contient les fonctions monotones $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x$, mais pas leur différence $x \mapsto x^3 - x$.

3. L'ensemble des fonctions prenant une valeur non nulle en 0 n'est pas un sous-espace vectoriel de E, puisqu'il ne contient pas la fonction nulle.

19.3 1. Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On écrit :

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 2xz = (x - y + z)^2 + z^2.$$

On a donc, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(x-y+z)^2 + z^2 = 0 &\Longleftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

L'ensemble F est donc l'ensemble des vecteurs $(x, x, 0)$, avec $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit, on a $F = \mathrm{Vect}\{(1,1,0)\}$. Il s'agit donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors on a :

$$(x-y+z)^2 + z^2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y + z = iz \\ \text{ou} \\ x - y + z = -iz. \end{cases}$$

Ce n'est pas un sous-espace vectoriel, car il contient les vecteurs $(1, 0, i)$ et $(1, 0, -i)$ mais pas leur somme $(2, 0, 0)$.

19.4 1. Raisonnons par équivalence. Soit $x \in E$. Alors $x \in f^{-1}(\mathrm{Ker}\, g)$ si, et seulement si, $f(x) \in \mathrm{Ker}\, g$, c'est-à-dire si, et seulement si $g\big(f(x)\big) = 0$. C'est par définition équivalent à $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$. D'où l'égalité.

2. Si $x \in \mathrm{Ker}\, f$, alors $f(x) = 0$ donc $g\big(f(x)\big) = 0$ puisque g est linéaire. Ainsi, le vecteur x appartient à $\mathrm{Ker}(g \circ f)$.

3. Soit $z \in \mathrm{Im}(g \circ f)$. Prenons $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x)$. Posons $y = f(x)$; alors $z = g(y)$, donc $z \in \mathrm{Im}\, g$.

19.5 • Soit $y \in \operatorname{Im} f$, et soit $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors :

$$g(y) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) \in \operatorname{Im} f,$$

ce qui montre que $\operatorname{Im} f$ est stable par g.

• Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. On a alors $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big) = 0$. Par conséquent, $g(x) \in \operatorname{Ker} f$, ce qui montre que $\operatorname{Ker} f$ est stable par g.

19.6 Supposons les applications linéaires f et g non nulles. Soit $(x, y) \in E^2$ tels que $f(x) \neq 0$ et $g(y) \neq 0$. Puisque $f(x)g(x) = f(y)g(y) = 0$, on a $f(y) = 0$ et $g(x) = 0$. Or, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ donc $f(x + y) = f(x) \neq 0$. De même, $g(x + y) \neq 0$. Ainsi $f(x + y)g(x + y) \neq 0$, contradiction.

19.7 Remarquons que l'on a toujours $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$. En effet, si $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $f(x) = 0$, donc, par linéarité de f, on a $f\big(f(x)\big) = 0$ et donc $x \in \operatorname{Ker} f^2$.

• Supposons $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$, et montrons $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Soit $y \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$: il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi :

$$f^2(x) = f(y) = 0$$

puisque $y \in \operatorname{Ker} f$; donc $x \in \operatorname{Ker} f^2$. Or, par hypothèse, $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$, donc $x \in \operatorname{Ker} f$. Finalement :

$$y = f(x) = 0.$$

Par conséquent, on a $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

• Supposons $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ et montrons $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$.

Soit $x \in \operatorname{Ker} f^2$. Alors, puisque $f\big(f(x)\big) = 0$, on a $f(x) \in \operatorname{Ker} f$. De plus, on a par définition $f(x) \in \operatorname{Im} f$. On a donc :

$$f(x) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$$

d'où $f(x) = 0$. Ainsi $x \in \operatorname{Ker} f$.

19.8 • Pour toute fonction continue f, la fonction $\varphi(f)$ est dérivable (c'est l'unique primitive de $t \mapsto tf(t)$ qui s'annule en 0), donc en particulier continue. Ainsi, φ est bien une application de E vers E. C'est aussi une application linéaire : la linéarité de φ résulte de la linéarité de l'intégration.

• On a fait remarquer que, pour toute fonction continue f, la fonction $\varphi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Or, il existe sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues non dérivables. Ainsi φ n'est pas surjective.

• Soit $f \in \operatorname{Ker} \varphi$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)\, dt = 0$. En dérivant, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad xf(x) = 0.$$

Cela entraîne que $f(x) = 0$ pour tout x non nul, puis pour tout x par continuité de f en 0. Ainsi $f = 0$. Le noyau de φ est donc réduit à $\{0\}$. Ainsi, φ est injective.

19.9 Supposons que $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\neq\varnothing$. Soit c un élément de $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$. On a alors :

$$b-a=(c-a)+(b-c)\in F+G.$$

Réciproquement, si $b-a\in F+G$, alors il existe u et v respectivement dans F et G tels que $b-a=u-v$ d'où :

$$\underbrace{a+u}_{\in\mathcal{F}}=\underbrace{b+v}_{\in\mathcal{G}}.$$

Ainsi $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\neq\varnothing$.

19.10 Toute fonction indicatrice d'intervalle est une fonction en escalier. Or on a vu à la proposition 4 de la page 615 que l'ensemble $\mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ des fonctions en escalier était stable par combinaison linéaire. Comme il contient évidemment la fonction nulle, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Donc toute combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'intervalle est dans $\mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

Réciproquement, si f est dans $\mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$, il existe une subdivision $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ adaptée à f. En notant v_i la valeur constante de f sur $]x_{i-1},x_i[$, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a :

$$f=\sum_{i=1}^{n} v_i\,\mathbb{1}_{]x_{i-1},x_i[}+\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\mathbb{1}_{[x_i,x_i]}$$

ce qui prouve que f est combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'intervalles.

Le sous-espace vectoriel recherché est donc $\mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

19.11 La décomposition en éléments simples nous dit que toute fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$ est somme :

- d'un polynôme, lui-même combinaison linéaire des $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- d'éléments simples de première espèce de la forme $\dfrac{\lambda}{(X-a)^n}$, avec $n\in\mathbb{N}^*$, $a\in\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$;
- d'éléments simples de deuxième espèce de la forme $\dfrac{\lambda X+\mu}{(X^2+pX+q)^n}$, avec $n\in\mathbb{N}^*$, $(p,q)\in\mathbb{R}^2$ tels que $p^2-4q<0$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Une partie génératrice de $\mathbb{R}(X)$ est donc donnée par la réunion des ensembles :

$$\big\{X^n\,;\ n\in\mathbb{N}\big\}\qquad\left\{\frac{1}{(X-a)^n}\,;\ a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{(X^2+pX+q)^n}\,;\ (p,q)\in\mathbb{R}^2,\ p^2-4q<0,\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

$$\left\{\frac{X}{(X^2+pX+q)^n}\,;\ (p,q)\in\mathbb{R}^2,\ p^2-4q<0,\ n\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

Chapitre 20 : Décompositions en algèbre linéaire

I Familles et parties génératrices 1037
- 1 Définitions 1037
- 2 Familles et parties génératrices finies 1037
- 3 Familles et parties génératrices quelconques 1038
- 4 Propriétés des familles génératrices 1039

II Familles et parties libres 1040
- 1 Familles libres finies 1040
- 2 Propriétés des familles libres finies 1042
- 3 Familles libres quelconques 1045
- 4 Parties libres 1046

III Bases d'un espace vectoriel 1047
- 1 Définition 1047
- 2 Décomposition dans une base finie 1047
- 3 Décomposition dans une base quelconque 1049
- 4 Bases et applications linéaires 1050

IV Sommes de sous-espaces vectoriels 1052
- 1 Somme de deux sous-espaces vectoriels 1052
- 2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels . . 1053
- 3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires 1054
- 4 Détermination d'une application linéaire par ses restrictions à des sous-espaces supplémentaires . . 1056
- 5 Projections et symétries 1057
- 6 Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels 1061

V Formes linéaires et hyperplans 1064
- 1 Formes linéaires 1064
- 2 Hyperplans vectoriels 1065
- 3 Hyperplans affines 1066

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 1067

Exercices 1083

Décompositions en algèbre linéaire

20

En algèbre, on considère souvent des décompositions de structures données en structures plus simples. Ces décompositions permettent généralement de mieux comprendre et manipuler les objets étudiés.
Concernant par exemple l'arithmétique, on sait décomposer tout nombre entier en produit de nombres premiers. On peut voir ces derniers comme des « briques » permettant de reconstituer tous les autres entiers naturels.

Pour les espaces vectoriels, on utilise surtout deux types de décompositions :

- la décomposition de tout vecteur de l'espace, ou d'un sous-espace vectoriel, comme combinaison linéaire d'éléments d'une famille donnée de vecteurs ;
- la décomposition de tout vecteur de l'espace, ou d'un sous-espace vectoriel, comme somme d'éléments d'une famille donnée de sous-espaces vectoriels.

Pour chacune de ces décompositions, deux questions peuvent se poser.

- Une telle décomposition existe-t-elle ? Les notions correspondantes sont celles de famille génératrice pour les familles de vecteurs, et de somme pour les sous-espaces vectoriels.
- Une telle décomposition est-elle unique ? Cela correspond aux notions de famille libre pour les vecteurs, et de somme directe pour les sous-espaces.

Dans tout ce chapitre,

- $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes ;
- E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$;
- n est un entier naturel non nul et I un ensemble (d'indces) quelconque ;
- $\mathbb{K}^{(I)}$ désigne l'ensemble des familles presque nulles d'éléments de $\mathbb{K}^I$.

I Familles et parties génératrices

1 Définitions

Définition 1

- On dit que $\mathbf{g}$ est une **famille génératrice de $\boldsymbol{E}$**, si $\mathbf{g}$ est une famille d'éléments de E telle que $E = \mathrm{Vect}(\mathbf{g})$.
- On dit que $\mathcal{G}$ est une **partie génératrice de $\boldsymbol{E}$** si $\mathcal{G}$ est une partie de E telle que $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$.

Remarque Si une partie ou une famille est génératrice de E, on dit aussi qu'elle **engendre** l'espace vectoriel E.

Point méthode

Comme $\mathrm{Vect}(\mathbf{g})$ et $\mathrm{Vect}(\mathcal{G})$ sont, par définition, des sous-espaces vectoriels de E, pour démontrer les égalités ci-dessus, il suffit en pratique de prouver les inclusions $E \subset \mathrm{Vect}(\mathbf{g})$ ou $E \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$.

2 Familles et parties génératrices finies

D'après le chapitre précédent, nous pouvons énoncer les résultats suivants.

- $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ est une famille génératrice de E si, et seulement si :

$$(\forall i \in [\![1, n]\!] \quad g_i \in E) \quad \text{et} \quad \forall x \in E \quad \exists (\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, g_i.$$

  Dans la mesure où l'on écrit généralement une famille finie sous la forme d'un n-uplet, si $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ est une famille génératrice de E, alors il en est de même pour tout n-uplet obtenu en permutant les éléments.

- $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_n\}$ est une partie génératrice de E si, et seulement si :

$$\mathcal{G} \subset E \quad \text{et} \quad \forall x \in E \quad \exists (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, g_i.$$

Exemples

1. La famille $(1, i)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définie par :

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

   est une famille génératrice de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, puisque, pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

3. Géométriquement, on « voit » que :
   - deux vecteurs non colinéaires du plan en forment une partie génératrice ;
   - trois vecteurs non coplanaires de l'espace en forment une partie génératrice.
4. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $(1, X, \ldots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ puisque pour tout polynôme P de degré au plus n, il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k.$$

3 Familles et parties génératrices quelconques (à garder pour une seconde lecture)

D'après le chapitre précédent, nous pouvons énoncer les résultats suivants.

- Dans le cas d'une suite : $\mathbf{g} = (g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice de E si, et seulement si :

  $$(\forall i \in \mathbb{N} \quad g_i \in E) \quad \text{et} \quad \forall x \in E \;\; \exists n \in \mathbb{N} \;\; \exists (\lambda_i)_{i \in [\![0,n]\!]} \in \mathbb{K}^{n+1} \quad x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, g_i.$$

  Contrairement à ce qui se passe dans le cas fini, ici, le « n » dépend de x.
- Dans le cas d'une partie : $\mathcal{G}$ est une partie génératrice de l'espace vectoriel E si, et seulement si, $\mathcal{G} \subset E$ et :

  $$\forall x \in E \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad \exists (g_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{G}^n \quad \exists (\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, g_i.$$

- Enfin dans le cas d'une famille quelconque (et seulement dans ce cas), on doit utiliser les familles à support fini. Une famille $\mathbf{g} = (g_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E si, et seulement si :

  $$(\forall i \in I \quad g_i \in E) \quad \text{et} \quad \forall x \in E \quad \exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \quad x = \sum_{i \in I} \lambda_i\, g_i.$$

Exemples

1. La suite $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{K}[X]$, puisque tout polynôme est combinaison linéaire (finie) de monômes de la forme X^k avec $k \in \mathbb{N}$.
2. Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par l'ensemble $\{\mathbb{1}_a\,;\ a \in \mathbb{R}\}$, des fonctions indicatrices de chaque singleton de $\mathbb{R}$, est l'ensemble des $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vérifiant :

   $$\exists n \in \mathbb{N}^* \quad \exists (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \quad \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \quad f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, \mathbb{1}_{a_k}.$$

   Il s'agit donc des fonctions f nulles sauf en un nombre fini de réels.

4 Propriétés des familles génératrices

Proposition 1

- Soit $\mathcal{G} \subset E$ et $\mathcal{G}' \subset E$. Si $\mathcal{G}$ est une partie génératrice de E et si $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$, alors $\mathcal{G}'$ est une partie génératrice de E.
- Soit $\mathbf{g}$ et $\mathbf{g}'$ deux familles de vecteurs de E. Si $\mathbf{g}$ est génératrice de E et si $\mathbf{g}$ est une sous-famille de $\mathbf{g}'$, alors $\mathbf{g}'$ engendre aussi E.

Démonstration.

- On a $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}' \subset \operatorname{Vect} \mathcal{G}'$. Étant donné que $\operatorname{Vect} \mathcal{G}'$ est un sous-espace vectoriel de E et que $\operatorname{Vect} \mathcal{G}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{G}$, on en déduit $E = \operatorname{Vect} \mathcal{G} \subset \operatorname{Vect}(\mathcal{G}')$. Ainsi $\mathcal{G}'$ est une partie génératrice de E.
- Conséquence du premier point puisque l'on a $\operatorname{Vect} \mathbf{g} = \operatorname{Vect} \mathcal{G}$ et $\operatorname{Vect} \mathbf{g}' = \operatorname{Vect} \mathcal{G}'$ où $\mathcal{G}$ (respectivement $\mathcal{G}'$) est l'ensemble des éléments de $\mathbf{g}$ (respectivement $\mathbf{g}'$), avec donc $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$. □

Exemple

- Comme la famille $(1, X, X^2)$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $\mathbb{K}_2[X]$, la sur-famille $(1, X, X^2, X^2 - 3X + 1)$ est aussi une famille génératrice de $\mathbb{K}_2[X]$.
- Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la partie $\{1, i, 1+i\}$ est génératrice puisqu'elle contient $\{1, i\}$ qui est déjà génératrice.

Proposition 2

Soit $\mathbf{g}$ une famille génératrice de E et $\mathbf{g}'$ une famille d'éléments de E. Alors, la famille $\mathbf{g}'$ est génératrice de E si, et seulement si, tout élément de $\mathbf{g}$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathbf{g}'$.

Principe de démonstration. Dans le sens non trivial, utiliser que $\operatorname{Vect}(\mathbf{g})$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les éléments de $\mathbf{g}$. Démonstration page 1067

Point méthode

Si l'on dispose d'une famille génératrice $\mathbf{g}'$ de E, alors, pour montrer qu'une famille $\mathbf{g}$ engendre E, il suffit de prouver que tout élément de $\mathbf{g}'$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathbf{g}$.

Nous verrons d'autres méthodes plus efficaces dans le chapitre 21.

Exemple Si $j = e^{2i\pi/3}$, alors $\mathbf{g} = (1, j)$ engendre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. En effet :

- $\mathbf{g}$ est une famille de deux éléments de $\mathbb{C}$;
- les éléments de la famille génératrice $(1, i)$ sont combinaisons linéaires des éléments de $\mathbf{g}$ $\left(\text{c'est évident pour } 1 \text{ et l'on a } i = \frac{2}{\sqrt{3}}.j + \frac{1}{\sqrt{3}}.1\right)$.

p.1067 **Exercice 1** Montrer que $(1, X+1, X^2+X+1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_2[X]$.

p.1067 **Exercice 2** Soit n un entier naturel ainsi que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$, telle que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!] \quad \deg P_i = i.$$

Montrer, par récurrence, que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$.

II Familles et parties libres

Si $\mathbf{g}$ est une famille d'éléments de E, nous avons vu que tout vecteur de $\mathrm{Vect}(\mathbf{g})$ s'écrit comme une combinaison linéaire des éléments de $\mathbf{g}$. Dans cette partie nous allons étudier dans quelle mesure la famille des coefficients intervenant dans une telle décomposition est unique.

1 Familles libres finies

Définition 2

Soit x_1, x_2, …, x_n des éléments de E.

- On dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une **famille libre de E**, si :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, x_i = 0 \Longrightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \lambda_i = 0).$$

- Dans le cas contraire, on dit que **la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée**. Cela signifie donc que l'on peut trouver une famille $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de scalaires *non tous nuls* vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, x_i = 0$.

Remarques

- Lorsque la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre (respectivement liée), on dit aussi que les vecteurs x_1, $x_2, \ldots$, x_n sont **linéairement indépendants** (respectivement **linéairement dépendants**).
- Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre (respectivement liée) de E, alors il en est de même pour tout n-uplet obtenu en permutant les éléments.

Exemples

1. Toute famille $(x_1, \ldots, x_n)$ contentant le vecteur nul est liée : en effet, si $x_j = 0$, alors en prenant $\lambda_i = 0$ pour $i \neq j$, et $\lambda_j = 1$, on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, x_i = 0$.

2. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la famille $(1,i)$ est libre, puisque pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ on a $a+i\,b=0 \Longrightarrow a=b=0$.

3. En revanche, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel, la famille $(1,i)$ est liée, puisque $i.1+(-1).i=0$.

4. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la famille $(1,j)$ est libre. En effet, si $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ vérifie $a+b\,j=0$, alors l'égalité des parties imaginaires donne $b\operatorname{Im} j=0$ et donc $b=0$; il est alors immédiat que $a=0$.

5. Dans $\mathbb{K}^3$, les vecteurs $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$ forment une famille libre. En effet pour $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{K}^3$, on a :
$$\lambda_1\,e_1+\lambda_2\,e_2+\lambda_3\,e_3=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),$$
et $\lambda_1\,e_1+\lambda_2\,e_2+\lambda_3\,e_3=(0,0,0)$ entraîne donc immédiatement $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

6. Plus généralement, dans $\mathbb{K}^n$, où n est un entier naturel non nul, les vecteurs :
$$e_1=(1,0,0,\dots,0)\,,\ e_2=(0,1,0,\dots,0)\,,\ \dots\,,\ e_n=(0,0,\dots,0,1)$$
forment une famille libre.

7. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la famille $(1,X,\dots,X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$ puisque si $\lambda_0\,,\,\dots\,,\,\lambda_n$ sont des scalaires vérifiant $\sum\limits_{p=0}^{n}\lambda_p\,X^p=0$, alors ils sont tous nuls.

Point méthode

Pour montrer qu'une famille finie est libre, on commence par écrire une combinaison linéaire quelconque de ses éléments que l'on suppose nulle. Il reste alors à prouver que tous les scalaires utilisés sont nuls.

p.1068 **Exercice 3** Soit $x_1=(1,1,1)$, $x_2=(-1,1,-1)$ et $x_3=(1,-1,-1)$. Montrer que (x_1,x_2,x_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

p.1068 **Exercice 4** Dans $\mathbb{K}^3$, les éléments $x_1=(-1,1,0)$, $x_2=(0,-1,1)$ et $x_3=(1,0-1)$ forment-ils une famille libre ou une famille liée ?

p.1068 **Exercice 5** Soit $\omega\in\mathbb{C}$. Montrer que $(1,\omega)$ est libre si, et seulement si, $\operatorname{Im}\omega\neq 0$.

p.1068 **Exercice 6** Montrer que $(\sin,\cos)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Cas particulier des familles à un vecteur

Une famille (x) à un vecteur est libre si, et seulement si, $x \neq 0$. En effet :

- si $x = 0$, alors $1\,x = 0$, et comme $1 \neq 0$, la famille (x) est liée,
- si $x \neq 0$, alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda\,x = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$ (*cf.* page 1000), et (x) est donc libre.

Cas particulier des familles de deux vecteurs

Définition 3

Deux éléments $x \in E$ et $y \in E$ sont **proportionnels**, ou **colinéaires**, si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} \quad x = \lambda\,y \quad \text{ou} \quad y = \lambda\,x.$$

Attention Pour traduire que deux vecteurs x et y sont colinéaires, on ne peut pas, *a priori*, écrire $x = \lambda\,y$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$. En effet, si x est non nul et $y = 0$, alors x et y sont proportionnels puisque $y = 0.x$, mais il est clair que l'on ne peut pas trouver de scalaire λ tel que $x = \lambda\,y$.

p.1068 **Exercice 7** Soit $x \in E$ et $y \in E \setminus \{0\}$. Montrer que les vecteurs x et y sont proportionnels si, et seulement si, $\exists \lambda \in \mathbb{K} \quad x = \lambda\,y$.

Proposition 3

Deux éléments x et y de l'espace vectoriel E sont colinéaires si, et seulement si, la famille (x, y) est liée.

Démonstration page 1068

Point méthode

Il est souvent évident de « voir » si deux vecteurs sont proportionnels ou non, et donc si la famille qu'ils forment est liée ou libre. Ne pas s'en priver !

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $u = (1, -1, 3)$, $v = (2, -2, 6)$ et $w = (1, 1, 1)$.

1. Il est évident que l'on a $v = 2\,u$. La famille (u, v) est donc liée.
2. Les vecteurs u et w ne sont évidemment pas proportionnels.
   Par suite, la famille (u, w) est libre.

2 Propriétés des familles libres finies

Proposition 4

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Principe de démonstration.

- Montrer que si $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre et $p \leqslant n$, alors $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.
- Le second point découle du premier.

Démonstration page 1069

Exemple

- On retrouve qu'une famille est liée dès qu'elle contient le vecteur nul puisque la famille réduite au vecteur nul est liée.
- Une famille contenant deux vecteurs proportionnels, (en particulier, deux vecteurs égaux), est liée puisque deux vecteurs proportionnels forment une famille liée.

Remarque Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une libre, alors elle ne peut pas contenir deux vecteurs égaux, ce qui veut dire que l'application $i \mapsto x_i$ est injective.

p.1069

Exercice 8 La famille $(1, \sin, \cos, \sin^2, \cos^2)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

p.1069

Exercice 9 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, exhiber une famille liée de trois vecteurs deux à deux non colinéaires.

Attention L'exercice précédent montre qu'une famille de plus de deux vecteurs peut être liée sans posséder deux vecteurs colinéaires. Ce n'est donc pas en s'intéressant aux couples de vecteurs proportionnels que l'on peut prouver qu'une telle famille est libre.

Proposition 5

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille libre d'éléments de E. Pour tout $x \in E$, la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$ est liée si, et seulement si :

$$x \in \operatorname{Vect}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

c'est-à-dire si, et seulement si, x est combinaison linéaire de x_1, x_2, …, x_n.

Principe de démonstration. Démonstration page 1069

Si $\alpha\, x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i = 0$ avec α non nul, alors $x = -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i$.

Remarque Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille d'éléments de E telle que :

$$x_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![2, n]\!] \quad x_k \notin \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_{k-1}).$$

La proposition précédente permet de démontrer que cette famille est libre.

- On peut faire une démonstration par récurrence, l'hypothèse $x_1 \neq 0$ permettant l'initialisation.
- On peut aussi considérer le plus grand entier $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $(x_1, \ldots, x_p)$ soit libre et montrer que $p = n$. Un tel p existe car l'ensemble des $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $(x_1, \ldots, x_k)$ est libre constitue une partie de $\mathbb{N}$ non vide (elle contient 1 puisque $x_1 \neq 0$) et majorée par n.

p.1070

Exercice 10 Soit $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ **échelonnée en degré**, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad 0 \leqslant \deg P_{i-1} < \deg P_i.$$

En utilisant chacune des deux méthodes précédentes, montrer qu'elle est libre.

Théorème 6 (Unicité de la décomposition)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille libre d'éléments de E. Pour tout $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$ et tout $(\mu_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, x_i\right) \Longrightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \lambda_i = \mu_i).$$

Démonstration. Immédiat puisque $\sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i)\, x_i = 0 \Longrightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \lambda_i = \mu_i)$. □

Pour terminer, montrons que, dans un espace vectoriel engendré par famille à n éléments, on ne peut pas trouver de famille libre possédant strictement plus de n éléments. Ce résultat sera utile dans le chapitre suivant pour définir la dimension d'un espace vectoriel.

p.1070

Exercice 11 Soit $g_1 \in E$ ainsi que $x_0 \in \mathrm{Vect}(g_1)$ et $x_1 \in \mathrm{Vect}(g_1)$. Montrer que la famille (x_0, x_1) est liée.

Proposition 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{G} = (g_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de n éléments de E.

Toute famille $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de $n+1$ éléments de $\mathrm{Vect}(\mathbf{g})$ est liée.

Principe de démonstration. Raisonner par récurrence sur n.

Pour l'hérédité, considérer $(x_0, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs tous combinaisons linéaires d'une famille $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_n)$. Construire alors une famille $(y_1, \ldots, y_n)$, avec $y_k = x_k - \lambda_k x_0$, tous combinaisons linéaires de $\mathcal{G}' = (g_1, \ldots, g_{n-1})$

Démonstration page 1070

Corollaire 8

Si E est un espace vectoriel engendré par une famille finie de n éléments, alors toute famille libre de E est finie, et possède au plus n éléments.

Démonstration page 1071

3 Familles libres quelconques (à garder pour une seconde lecture)

Définition 4

Une famille d'éléments de E est libre si toutes ses sous-famille finies sont libres. Elle est **liée** si elle possède une sous-famille finie liée.

Par convention, la famille vide est libre. On peut vérifier que tout ce qui a été dit précédemment concernant les familles $(x_1, \ldots, x_n)$ reste correct quand $n = 0$.

Remarque D'après la proposition 4 de la page 1042, il s'agit bien d'une généralisation de la définition donnée pour une famille finie. Il est immédiat de vérifier que cette proposition 4 se généralise aux familles quelconques.

Point méthode

Pour montrer qu'une suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est libre, il suffit de vérifier que toutes les familles de la forme $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ sont libres car toute partie finie de $\mathbb{N}$ est contenue dans un intervalle de la forme $[\![0,n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}$.

- La famille $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est donc libre si, et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (\lambda_i)_{i \in [\![0,n]\!]} \in \mathbb{K}^{n+1} \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, x_i = 0 \Longrightarrow (\lambda_i)_{i \in [\![0,n]\!]} = 0.$$

- Elle est liée si, et seulement si, l'on peut trouver un $n \in \mathbb{N}$ et une famille $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ de scalaires non tous nuls et tels que :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, x_i = 0.$$

Exemple La famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$ puisque, pour tout $n \geqslant 0$, la famille finie $(X^k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est libre, comme on l'a déjà montré plus haut.

Dans le cas d'une famille quelconque, on peut énoncer le théorème d'unicité de décomposition à l'aide de familles à support fini.

Théorème 9

Étant donné une famille libre $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E et deux familles de scalaires presque nulles $(\lambda_i)_{i \in I}$ et $(\mu_i)_{i \in I}$, on a :

$$\Big(\sum_{i \in I} \lambda_i\, x_i = \sum_{i \in I} \mu_i\, x_i\Big) \Longrightarrow (\forall i \in I \quad \lambda_i = \mu_i)\,.$$

Démonstration. Conséquence immédiate du théorème 6 de la page ci-contre puisque toutes les sommes intervenant dans cette propriété sont, en fait, finies. □

Point méthode

Pour montrer qu'une famille (infinie) est libre, on part d'une combinaison linéaire (finie) nulle, puis on démontre que tous les coefficients sont nuls.

p.1071 **Exercice 12** Pour tout réel a on pose $\varphi_a : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{ax}. \end{array}$

1. Montrer que la famille $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.
   Indication : introduire un polynôme possédant une infinité de racines.
2. Montrer que la famille $(\varphi_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.
   Indication : utiliser une limite en $\pm\infty$.

4 Parties libres (à garder pour une seconde lecture)

Définition 5

Une partie A non vide de E est **libre** si la famille $(a)_{a\in A}$ est libre. Dans le cas contraire, elle est **liée**.

Par convention, $\varnothing$ est une partie libre de E.

Remarque Pour montrer qu'une partie A est libre, il suffit de vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour toute partie $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de n éléments (donc deux à deux distincts), la famille $(a_1, \ldots, a_n)$ est libre.

Exemple La famille des fonctions indicatrices $(\mathbb{1}_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre : en effet si $(a_1, \ldots, a_n)$ sont n réels distincts et si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_k \, \mathbb{1}_{a_i} = 0$, alors on a :

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad \lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_k \, \mathbb{1}_{a_i}(a_j) = 0.$$

Remarques

- Lorsque A est une partie finie non vide de E, on peut noter $a_1, \ldots, a_n$ ses éléments (supposés distincts deux à deux). La partie A est alors libre si, et seulement si, la famille $(a_1, \ldots, a_n)$ est libre.
- En revanche, si $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments quelconques de E, il se peut que la famille $(a_1, \ldots, a_n)$ soit liée tandis que la partie $\{a_1, \ldots, a_n\}$ est libre. Par exemple, si a est un vecteur non nul de E, alors la famille (a, a) est liée alors que $\{a, a\} = \{a\}$ est libre.

Propriétés Les propriétés des familles libres se traduisent naturellement en terme de parties libres. En particulier :

- tout sous-ensemble d'une partie libre de E est une partie libre ;
- tout sous-ensemble de E contenant une partie liée est lié.

Ainsi, la convention sur l'ensemble vide est cohérente, puisqu'il s'agit d'un sous-ensemble de n'importe quelle partie libre.

Point méthode

Pour exprimer qu'une partie A est liée, on peut dire qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, des éléments $a_1, \ldots, a_n$ de A deux à deux distincts et une famille de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_k a_k = 0$.

p.1072 **Exercice 13** Montrer que dans le point méthode précédent, on peut remplacer « non tous nuls » par « tous non nuls ».

III Bases d'un espace vectoriel

1 Définition

Soit $\mathbf{e} = (e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E. On a vu que :

- tout élément du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathbf{e})$ se décompose sous la forme d'une combinaison linéaire des e_i ;
- si la famille $\mathbf{e}$ est libre, alors cette décomposition est unique.

Nous allons relier ces deux propriétés grâce à la notion de base.

Définition 6

Une **base** de E est une famille libre et génératrice de E.

2 Décomposition dans une base finie

Théorème 10 (Décomposition d'un vecteur dans une base finie)

Supposons que E possède une base $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors, pour tout $x \in E$, il existe une unique famille $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

Démonstration. L'existence de la décomposition provient de ce que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ engendre E. L'unicité est conséquence du fait que cette famille est libre. □

Définition 7

Avec les notations précédentes :

- la famille $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est appelée famille des **composantes**, ou famille des **coordonnées**, de x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$;
- pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le scalaire λ_i est la i-ème composante, ou la i-ème coordonnée, de x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Remarques

- Lorsque, pour $x \in E$, on écrit l'égalité $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i$, on dit aussi que l'on **décompose** le vecteur x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.
- Une fois choisie une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, il arrive souvent que l'on identifie chaque vecteur $x \in E$ avec le n-uplet de ses composantes. C'est pourquoi, une base doit être une famille (ordonnée) et non un ensemble.

  Par exemple, si $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E, alors le vecteur de composantes $(1, 2, 3)$ dans $\mathbf{e}$ est $e_1 + 2\, e_2 + 3\, e_3$ et non pas $e_2 + 2\, e_1 + 3\, e_3$.

Exemples

1. La famille $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, puisqu'elle est libre et qu'elle est génératrice de $\mathbb{C}$ comme on l'a vu précédemment. Les composantes d'un nombre complexe dans la base $(1, i)$ sont ses parties réelle et imaginaire.
2. Plus généralement, si $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors la famille $(1, \omega)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, car elle est libre et engendre cet espace vectoriel.
3. La famille $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ définie par :
   $$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)\,,\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)\,,\ \ldots\,,\ e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$
   est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée **base canonique** de $\mathbb{K}^n$. L'égalité :
   $$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$$
   montre que les composantes du vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans cette base canonique $\mathbf{e}$ sont les coefficients du n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
4. La famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$. Ici aussi, les composantes dans cette base d'un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ sont les coefficients de ce polynôme.

p.1072

Exercice 14 Dans $\mathbb{K}_n[X]$, on considère une famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de polynômes, tels que : $\forall k \in [\![0, n]\!] \quad \deg(P_k) = k$. Montrer que c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque La famille vide est une base de $\{0\}$, puisqu'elle est libre et que le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est $\{0\}$.

Rappel Nous avons déjà rencontré (*cf.* page 1005) la notion de droite vectorielle. On peut maintenant dire qu'une droite vectorielle est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel possédant une base formée d'un seul vecteur. On a aussi prouvé (*cf.* exercice 2 de la page 1000) que tout vecteur non nul d'une droite vectorielle en est une base.

Définition 8

Un **plan vectoriel** est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ayant une base de 2 vecteurs.

Exemples

1. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est un plan vectoriel.

2. L'exemple de la page 1006 montre que le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$:
$$F = \{(x-2y\,,\,2x+y\,,\,3x-2y)\,;\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$$
est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $u=(1,2,3)$ et $v=(-2,1,-2)$.

p.1072

Exercice 15 Soit E un plan vectoriel sur $\mathbb{K}$ dont (a,b) est une base. Étant donné quatre scalaire $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{K}^4$, on pose $c=\alpha\,a+\beta\,b$ et $d=\gamma\,a+\delta\,b$.
Montrer que (c,d) est une base de E si, et seulement si, $\begin{vmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{vmatrix}\neq 0$.
Indication : utiliser les résultats du chapitre 2 sur les systèmes 2×2.

Remarque On dit qu'un sous-espace affine d'un espace vectoriel est un **plan affine** si sa direction est un plan vectoriel.

3 Décomposition dans une base quelconque (à garder pour une seconde lecture)

Dans le cas d'une famille quelconque, on peut énoncer le théorème de décomposition (analogue au théorème 10) à l'aide de familles à support fini.

Théorème 11 (Décomposition dans une base quelconque)

Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, alors, pour tout vecteur $x\in E$, il existe une unique famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^{(I)}$ telle que :
$$x=\sum_{i\in I}\lambda_i\,e_i.$$

La famille à support finie $(\lambda_i)_{i\in I}$ ci-dessus est aussi appelée famille des **composantes** (ou **coordonnées**) de x dans la base $(e_i)_{i\in I}$.

Exemple

- La famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}[X]$.

  Les coefficients d'un polynôme $P\in\mathbb{K}[X]$ sont les composantes de ce polynôme dans la base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

- La famille vide est une base de $\{0\}$ et c'est la famille vide de scalaires qui permet de décomposer le vecteur 0 dans cette base.

4 Bases et applications linéaires

En première lecture, on peut se limiter au cas où I est fini, avec $I = [\![1, n]\!]$.

Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

Proposition 12

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors l'image par u de $\text{Vect}\,\big((e_i)_{i\in I}\big)$ est le sous-espace vectoriel de F engendré par $\big(u(e_i)\big)_{i\in I}$.

Démonstration. Soit E' le sous-espace vectoriel engendré la famille $(e_i)_{i\in I}$. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires des $(e_i)_{i\in I}$. Par suite $u(E')$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des $(u(e_i))_{i\in I}$ c'est-à-dire le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\big(u(e_i)\big)_{i\in I}$ □

Corollaire 13

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

- la famille $\big(u(e_i)\big)_{i\in I}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$;
- l'application u est surjective si, et seulement si, $\big(u(e_i)\big)_{i\in I}$ engendre F.

Démonstration. Conséquence de la proposition précédente. En effet :

- on a $\operatorname{Im} u = u(E)$ et $E = \text{Vect}\,\big((e_i)_{i\in I}\big)$;
- l'application u est surjective si, et seulement si, $u(E) = F$. □

Proposition 14

1. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille libre de E. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective, alors la famille $\big(u(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre.
2. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Alors $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si, et seulement si, la famille $\big(u(e_i)\big)_{i\in I}$ est libre.

Démonstration page 1072

Corollaire 15

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors l'application u est bijective si, et seulement si, la famille $\big(u(e_i)\big)_{i\in I}$ est une base de F.

Démonstration. Conséquence du corollaire et de la proposition précédents. □

Exemple En utilisant le résultat de l'exercice 14, montrons la bijectivité de :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}_2[X] \\ (a, b, c) & \longmapsto & aX^2 + (a+b)X + a + b + c. \end{array}$$

- On vérifie facilement que cette application est linéaire.
- L'image de la base canonique de $\mathbb{K}^3$ par l'application linéaire u est la famille $(X^2 + X + 1, X + 1, 1)$. C'est une famille de polynômes de $\mathbb{K}_2[X]$, de degrés respectifs 2, 1 et 0 ; en utilisant le résultat de l'exercice cité, on en déduit que c'est une base de $\mathbb{K}_2[X]$. Par suite, l'application linéaire u est un isomorphisme.

p.1073

Exercice 16 Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille d'éléments de E ainsi que :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, x_i. \end{array}$$

1. Montrer que l'application u est linéaire.
2. Vérifier que u est injective si, et seulement si, la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.
3. Vérifier que u est surjective si, et seulement si, $(x_1, \dots, x_n)$ engendre E.
4. Montrer que u est bijective si, et seulement si, $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E.

Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base

Théorème 16

Étant donné une base $\mathbf{e} = (e_i)_{i \in I}$ de E et une famille quelconque $(f_i)_{i \in I}$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F, il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que :

$$\forall i \in I \quad u(e_i) = f_i.$$

Principe de démonstration. Travailler par analyse-synthèse. Démonstration page 1073

Remarque On fait souvent référence au résultat précédent en disant qu'une application linéaire est caractérisée par l'image d'une base.

Point méthode

- Pour définir une application linéaire partant d'un espace vectoriel E possédant une base, il suffit de donner les images des vecteurs de cette base.
- Pour prouver que $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(E, F)$ sont égales, il suffit de montrer qu'elles coïncident sur une base $\mathbf{e} = (e_i)_{i \in I}$ de E.

  En particulier, on a $u = 0$ si, et seulement si, $\forall i \in I \quad u(e_i) = 0$.

Remarque Comme on peut le voir dans la démonstration du théorème précédent, il suffit que la famille $\mathbf{e}$ soit génératrice pour pouvoir conclure à l'unicité d'une telle application linéaire.

p.1074

Exercice 17 Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^3$. Considérons l'unique $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ telle que $u(e_1) = e_3$, $u(e_2) = -e_2$ et $u(e_3) = e_1$.
Donner l'expression de $u\big((x_1, x_2, x_3)\big)$ pour tout vecteur $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$.

Exemple avec une base infinie Soit $a \in \mathbb{K}$. On peut démontrer la formule de Taylor :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad P(a+X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k \tag{$*$}$$

en utilisant les applications :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(a+X) \end{array} \qquad \text{et} \qquad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k \end{array}$$

- L'application u est linéaire d'après les résultats de substitution.
- L'application v est bien définie puisque, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, il n'y a qu'un nombre fini de $P^{(k)}$ non nuls, et elle est linéaire par linéarité de la dérivation.

La formule du binôme de Newton permet de vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u(X^n) = (a+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!\, a^{n-k}}{(n-k)!\, k!} X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(X^n)^{(k)}(a)}{k!} X^k = v(X^n).$$

Comme $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, on en déduit $u = v$ et donc $(*)$.

IV Sommes de sous-espaces vectoriels

Attention Dans cette partie, les espaces vectoriels utilisés sont quelconques et n'ont aucune raison d'avoir une base.

1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Rappel Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cup G$ n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E (*cf.* exercice 10 de la page 1004).

Définition

Proposition 17

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G est :

$$H = \{y + z\,;\ (y, z) \in F \times G\}.$$

On l'appelle **somme** de F et G et on le note $F + G$.

Principe de démonstration. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E puis qu'il est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant F et G. Démonstration page 1074

p.1075 **Exercice 18** Soit F un sous-espace d'un espace vectoriel E.
Que peut-on dire de $F + \{0\}$, de $F + E$ et de $F + F$?

Exemples Soit a_1, a_2 et a_3 trois éléments de E. On peut vérifier facilement que :

- si $F = \mathrm{Vect}(a_1)$ et $G = \mathrm{Vect}(a_2)$, alors $F + G = \mathrm{Vect}(a_1, a_2)$ puisque :

$$\mathrm{Vect}(a_1, a_2) = \{\lambda_1\, a_1 + \lambda_2\, a_2\,;\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\} = F + G\ ;$$

- si $F = \mathrm{Vect}(a_1)$ et $G = \mathrm{Vect}(a_2, a_3)$ alors $F + G = \mathrm{Vect}(a_1, a_2, a_3)$ puisque :
$$\mathrm{Vect}(a_1, a_2, a_3) = \{\lambda_1\, a_1 + \lambda_2\, a_2 + \lambda_3\, a_3\,;\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3\} = F + G.$$

p.1075 **Exercice 19** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les deux sous-espaces vectoriels :
$$F = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\big\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 1)\}.$$
Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.

Indication : lors de la justification de $\mathbb{R}^3 \subset F+G$, qui conduit à prouver l'existence d'une décomposition, on peut, avec profit, commencer par une phase d'analyse.

p.1075 **Exercice 20** Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :
$$F + G = F \cup G \Longleftrightarrow \big(F \subset G \text{ ou } G \subset F\big).$$

2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition 9

Les sous-espaces F et G sont **en somme directe** si, pour tout $z \in F + G$, la décomposition $z = x + y$, avec $x \in F$ et $y \in G$, est unique.

Notation Lorsque F et G sont en somme directe, on dit aussi que **la somme $F + G$ est directe** ; on écrit alors $F + G$ sous la forme $F \oplus G$.

Proposition 18

Les sous-espaces F et G sont en somme directe si, et seulement si :
$$F \cap G = \{0\}.$$

Principe de démonstration. Travailler par double implication. Démonstration page 1075

Point méthode

Pour démontrer que F et G sont en somme directe, on prouve essentiellement la propriété $F \cap G = \{0\}$. Mais, étant donné que $F \cap G$, comme tout sous-espace vectoriel, contient 0, on ne démontre que $F \cap G \subset \{0\}$ et c'est-à-dire :
$$\forall x \in E \quad x \in F \cap G \Longrightarrow x = 0.$$

Exemple Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, le sous-espace vectoriel F des fonctions constantes et le sous-espace vectoriel G des fonctions nulles en 0 sont en somme directe puisqu'une fonction constante et nulle en 0 est nécessairement la fonction nulle.

p.1076 **Exercice 21** Soit a et b deux vecteurs non proportionnels de E.

Montrer que $F = \mathrm{Vect}(a)$ et $G = \mathrm{Vect}(b)$ sont en somme directe.

p.1076

Exercice 22 Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on pose :

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in E \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}\{(1,1,1)\}.$$

Montrer que F et G sont en somme directe.

3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Dans cette partie F et G désignent deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition 10

On dit que F et G sont deux **sous-espaces vectoriels supplémentaires de E** lorsque l'on a $E = F \oplus G$.

Proposition 19

La propriété $E = F \oplus G$ se traduit par l'un des énoncés équivalents suivants :

(i) Pour tout $x \in E$, il existe un unique $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$.

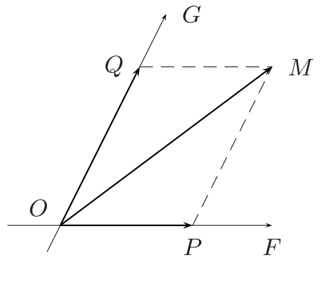
(ii) La somme $F + G$ est directe et elle est égale à E.

(iii) On a $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$;

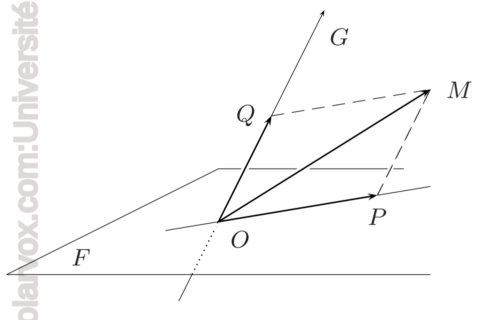
Démonstration. L'équivalence de (i) et (ii) est évidente avec les définitions. L'équivalence de (iii) avec les autres est une conséquence de la proposition 18 de la page précédente. □

Exemples

1. En géométrie, on peut se convaincre visuellement que :
   - dans le plan, deux droites vectorielles distinctes sont supplémentaires ;
   - dans l'espace, deux droites vectorielles ne sont pas supplémentaires car leur somme ne peut pas être égale à l'espace vectoriel ;
   - dans l'espace, deux plans vectoriels ne sont pas supplémentaires car leur intersection contient au moins une droite ;
   - dans l'espace, un plan vectoriel et une droite vectorielle non contenue dans ce plan, sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.



Droites supplémentaires dans le plan usuel



Droite et plan supplémentaires dans l'espace usuel

2. Dans $E = \mathbb{R}^3$, les sous-espaces vectoriels :

$$F = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in E \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\big\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$$

sont supplémentaires, puisque l'on a démontré que $E \subset F + G$ et $F \cap G \subset \{0\}$.

3. Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions paires et l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels, et ils sont supplémentaires puisque (*cf.* exercice 17 de la page 325) toute fonction $f \in E$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

4. Plaçons-nous dans $E = \mathbb{K}^2$.

   - Les deux sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}\big\{(1,0)\big\}$ et $G_1 = \mathrm{Vect}\big\{(0,1)\big\}$ sont supplémentaires car tout élément $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ s'écrit de manière unique sous la forme $\alpha\,(1,0) + \beta\,(0,1)$, avec $\alpha = x$ et $\beta = y$.
   - Les deux sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}\big\{(1,0)\big\}$ et $G_2 = \mathrm{Vect}\big\{(1,1)\big\}$ sont supplémentaires puisque :
     - ∗ pour tout $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, on a $(a, b) = (a - b, 0) + (b, b)$ donc $(a, b) \in F + G$.
     - ∗ si $x = (a, 0) = (b, b)$ est élément de $F \cap G$, alors on a $b = 0$ puis $a = 0$, ce qui entraîne $x = 0$.

   Par suite un sous-espace vectoriel de E peut avoir plusieurs supplémentaires.

Attention

- Comme on le voit dans l'exemple précédent, *un sous-espace vectoriel de E a en général plusieurs supplémentaires dans E*. Donc, ne jamais parler « du supplémentaire de F » (article défini) mais uniquement « d'un supplémentaire de F » (article indéfini).
- Ne pas confondre cette notion de supplémentaire avec celle de complémentaire : le complémentaire d'un sous-espace vectoriel de E n'est jamais un sous-espace vectoriel de E puisqu'il ne contient pas 0.

Point méthode (Pour démontrer $E = F \oplus G$)

- Il ne faut pas oublier de commencer par vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
- Ensuite, on démontre généralement $F \cap G = \{0\}$ et $E = F + G$, *i.e.* :

$$\forall x \in E \quad (x \in F \text{ et } x \in G) \Rightarrow x = 0$$

et :

$$\forall x \in E \quad \exists (y, z) \in F \times G \quad x = y + z.$$

Nous verrons au chapitre suivant une autre méthode utilisant la dimension.

p.1076

Exercice 23 Soit u une application linéaire de E dans un espace vectoriel E', ainsi que F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Établir que l'on a $u(F+G) = u(F) + u(G)$.
2. Montrer que, si F et G sont en somme directe et si l'application u est injective, alors les sous-espaces vectoriels images sont en somme directe.
3. En déduire que, si F et G sont supplémentaires et si l'application u est bijective, alors les sous-espaces vectoriels images sont supplémentaires dans E'.

Point méthode

On peut parfois démontrer $E = F \oplus G$ directement en utilisant la propriété (i) de la proposition 19 de la page 1054.

p.1076

Exercice 24 Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Montrer que les ensembles :

$$F = \{Q \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(Q) < \deg(P)\} \qquad \text{et} \qquad G = \{P\,Q\,;\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}[X]$.

p.1076

Exercice 25 Reformuler l'existence et l'unicité de la partie entière d'une fraction rationnelle en termes de sous-espaces vectoriels supplémentaires.

4 Détermination d'une application linéaire par ses restrictions à des sous-espaces supplémentaires

De même que l'on peut définir une application linéaire par l'image d'une base de l'espace de départ, il est possible de la définir par sa restriction à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Théorème 20

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, ainsi qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E'. Pour tout $v \in \mathcal{L}(F, E')$ et tout $w \in \mathcal{L}(G, E')$, il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, E')$ telle que :

$$u_{|_F} = v \qquad \text{et} \qquad u_{|_G} = w.$$

Principe de démonstration. Raisonner par analyse-synthèse à partir de la décomposition d'un vecteur $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times G$. Démonstration page 1077

Point méthode

- Pour définir une application linéaire sur E, il suffit de la définir sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
- Deux applications linéaires, définies sur E, sont égales, dès qu'elle coïncident sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

p.1077 **Exercice 26** Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels $F = \mathbb{K}^2 \times \{0\}$ et $G = \operatorname{Vect}\{(1,1,1)\}$.

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
2. Vérifier qu'il existe un endomorphisme u de E tel que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{K}^2 \quad u\big((a,b,0)\big) = (-b,a,0) \quad \text{et} \quad \forall c \in \mathbb{K} \quad u\big((c,c,c)\big) = -(c,c,c)$$

3. Prouver que $u^4 = \mathrm{Id}_E$.
   Rappel : u^4 désigne $u \circ u \circ u \circ u$ (cf. notation de la page 1012).

5 Projections et symétries

Projections, projecteurs

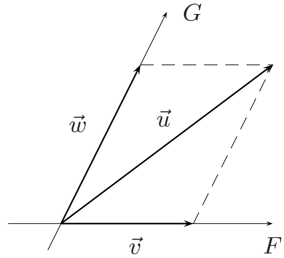
En géométrie on rencontre souvent des projections.

- Dans le plan usuel, si F et G sont deux droites vectorielles distinctes, alors l'application p qui, à tout vecteur $\vec{u}$ du plan, associe $\vec{v}$ tel que :

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$$

avec :

$$\vec{v} \in F \quad \text{et} \quad \vec{w} \in G,$$



est une application, de l'ensemble des vecteurs du plan dans lui-même, appelée projection sur F parallèlement à G.

  * Si $\vec{u}$ est un vecteur de F, alors $p(\vec{u}) = \vec{u}$.
  * Si $\vec{u}$ est un vecteur de G, alors $p(\vec{u}) = 0$.

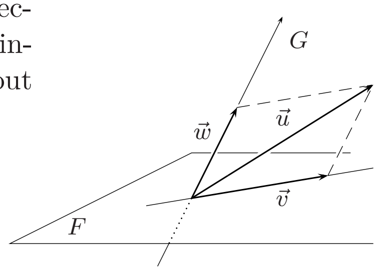
Avec les hypothèses précédentes, on peut aussi considérer l'application $\vec{u} \mapsto \vec{w}$ appelée projection sur G parallèlement à F.

- Dans l'espace usuel, considérons un plan vectoriel F et une droite vectorielle G non incluse dans F ; alors l'application qui, à tout vecteur $\vec{u}$, associe le vecteur $\vec{v}$ tel que :

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$$

avec :

$$\vec{v} \in F \quad \text{et} \quad \vec{w} \in G,$$



est une application, de l'ensemble des vecteurs de l'espace dans lui-même, appelée projection sur F parallèlement à G.

  * Si $\vec{u}$ est un vecteur de F, alors $p(\vec{u}) = \vec{u}$.
  * Si $\vec{u}$ est un vecteur de G, alors $p(\vec{u}) = 0$.

Avec les hypothèses précédentes, on peut aussi considérer l'application $\vec{u} \mapsto \vec{w}$ appelée projection sur la droite G parallèlement au plan F.

Dans la suite de cette partie, nous allons unifier ces notions et les généraliser à un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E quelconque.

Définition 11

Supposons $E = F \oplus G$. L'unique endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in F \quad p(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in G \quad p(x) = 0$$

est appelé **projection sur F parallèlement à G**.

Démonstration. L'existence et l'unicité de cette projection sont garanties par le théorème 20 de la page 1056, qui permet de définir une application linéaire par ses restrictions à un couple de sous-espaces vectoriels supplémentaires. □

Caractérisation Avec les notations précédentes, pour tout x de E, il existe un unique couple $(y,z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$ et l'on a alors $p(x) = y$.

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, l'application $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \operatorname{Re} z \end{array}$ est la projection sur le sous-espace $\mathbb{R}$ parallèlement au sous-espace $i\mathbb{R}$.
2. Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions paires et l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. Alors :
   - la projection p de E sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$,
   - la projection q de E sur $\mathcal{I}$ parallèlement à $\mathcal{P}$,

   sont respectivement données par :

$$p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \left(x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}\right) \end{array} \qquad \text{et} \qquad q : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \left(x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}\right) \end{array}.$$

Remarque La projection p sur F parallèlement à G est définie comme un élément de $\mathcal{L}(E)$, ce qui permet de parler de la composée $p \circ p$, aussi notée p^2.

Proposition 21

Soit p la projection sur F parallèlement à G. On a $p^2 = p \circ p = p$ ainsi que :

$$G = \operatorname{Ker} p \qquad \text{et} \qquad F = \operatorname{Im} p = \{x \in E \mid p(x) = x\}.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 1078

Pour la seconde relation, commencer par prouver $F \subset \{x \in E \mid p(x) = x\} \subset \operatorname{Im} p$.

Définition 12

Une application linéaire $p \in \mathcal{L}(E)$ est appelée **projection** ou **projecteur** si l'on peut trouver deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E tels que p soit la projection de E sur F parallèlement à G.

Remarque D'après la proposition précédente, l'image d'un projecteur p est l'ensemble de ses vecteurs invariants c'est-à-dire $\{x \in E \mid p(x) = x\}$.

Proposition 22

Un endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ p = p$.
Plus précisément, c'est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$ et donc :

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p.$$

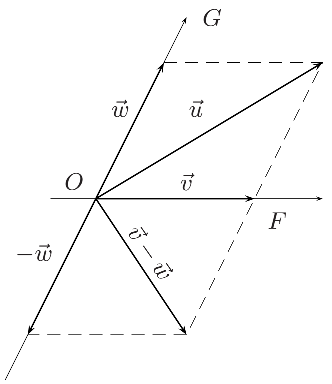
Principe de démonstration. Démonstration page 1078

Pour le sens non trivial, il faut essentiellement prouver que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

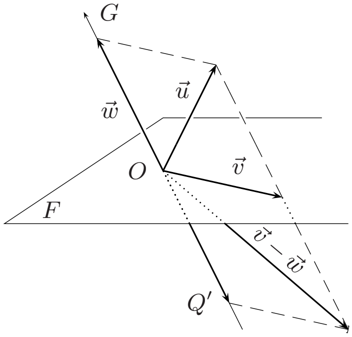
Symétries

En géométrie on rencontre souvent des symétrie.

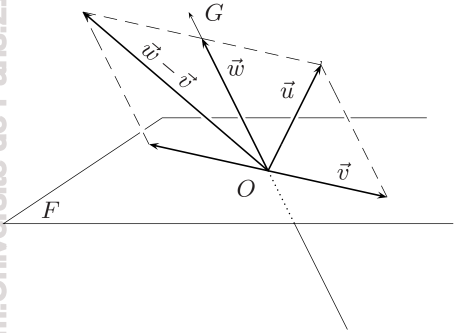
- Dans le plan usuel, considérons F et G deux droites vectorielles distinctes.
  Alors on peut, de manière unique, décomposer tout vecteur $\vec{u}$ en la somme $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} \in F$ et $\vec{w} \in G$.
  L'application s qui, au vecteur $\vec{u}$, associe le vecteur $\vec{u}\,' = \vec{v} - \vec{w}$ est une application de l'ensemble des vecteurs du plan dans lui même que l'on appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G.



- Dans l'espace usuel, considérons un plan vectoriel F et une droite vectorielle G non incluse dans F. Alors on peut, de manière unique, décomposer tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace en la somme $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} \in F$ et $\vec{w} \in G$.
  * L'application s' qui, à $\vec{u}$, associe le vecteur $\vec{u}\,' = \vec{v} - \vec{w}$, est une application de l'ensemble des vecteurs de l'espace dans lui même que l'on appelle symétrie par rapport au plan F parallèlement à la droite G.



Symétrie par rapport à un plan parallèlement à une droite



Symétrie par rapport à une droite parallèlement à un plan

  * L'application s'' qui à $\vec{u}$ associe le vecteur $\vec{u}\,'' = \vec{w} - \vec{v}$ est une application de l'ensemble des vecteurs de l'espace dans lui même que l'on appelle symétrie par rapport à la droite G parallèlement au plan F.

Dans la suite de cette partie, nous allons unifier ces notions et les généraliser à un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E quelconque.

Définition 13

Supposons $E = F \oplus G$. La **symétrie** par rapport à F parallèlement à G, est l'unique endomorphisme de E tel que :

$$\forall x \in F \quad s(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in G \quad s(x) = -x.$$

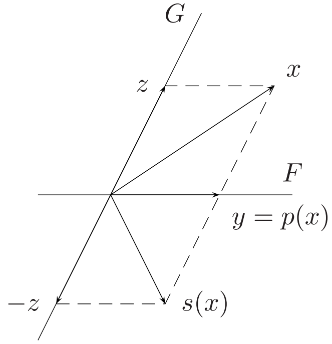
Démonstration. L'existence et l'unicité de cette symétrie sont garanties par le théorème 20 de la page 1056, qui permet de définir une application linéaire par ses restrictions à un couple de sous-espaces vectoriels supplémentaires. □

Caractérisation Avec les notations ci-dessus, pour tout vecteur x de l'espace vectoriel E, il existe un unique couple $(y, z) \in F \times G$ tel que :

$$x = y + z$$

et l'on a alors :

$$s(x) = y - z.$$



Remarque Avec les notations ci-dessus, en désignant par p la projection sur F parallèlement à G, on a $y = p(x)$ ainsi que $z = x - p(x)$ et donc :

$$s(x) = y - z = 2\,p(x) - x$$

ce qui donne l'égalité d'applications $s = 2\,p - \mathrm{Id}_E$.

Proposition 23

Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Principe de démonstration. Utiliser les restrictions à F et G. Démonstration page 1079

Définition 14

Une application linéaire $s \in \mathcal{L}(E)$ est appelée **symétrie** si l'on peut trouver deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E tels que s soit la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Remarque D'après la proposition précédente, une symétrie s est donc une involution ($s \circ s = \mathrm{Id}_E$) ; par suite, elle est bijective et $s^{-1} = s$.

Proposition 24

Un endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si, et seulement si, $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Plus précisément, c'est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ et donc $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Principe de démonstration. Démonstration page 1079

Pour le sens non trivial, il faut essentiellement prouver $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

p.1079

Exercice 27

1. Soit s et p deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.
   Montrer que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ si, et seulement si, $p \circ p = p$.
2. En déduire une autre démonstration du résultat précédent.

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la conjugaison est la symétrie par rapport à $\mathbb{R}$ parallèlement à $i\mathbb{R}$.
2. L'application $P(X) \mapsto P(-X)$ est un endomorphisme involutif de $\mathbb{K}[X]$.
   - C'est donc une symétrie.
   - Plus précisément, c'est la symétrie par rapport au sous-espace vectoriel des polynômes pairs parallèlement au sous-espace vectoriel des polynômes impairs, qui sont donc deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}[X]$.

6 Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels (à garder pour une seconde lecture)

Nous allons ici généraliser les notions vues dans les parties IV.1 et IV.2.
On considère un entier naturel p vérifiant la plupart du temps $p \geqslant 2$.

Somme de p sous-espaces vectoriels

Proposition 25

Soit E_1, E_2, …, E_p des sous-espaces vectoriels de E. Alors le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les E_i est :

$$H = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_p\,;\ (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p\}.$$

On l'appelle **somme** des sous-espaces vectoriels E_1, E_2, …, E_p, et on le note $E_1 + E_2 + \cdots + E_p$ ou encore $\sum\limits_{i=1}^{p} E_i$.

Démonstration. Comme pour une somme de deux sous-espaces vectoriels, on prouve :

- que H est un sous-espace vectoriel de E ;
- que H contient chacun des E_i ;
- que H est contenu dans tout sous-espace vectoriel de E contenant tous les E_i. □

Remarques

- Si $p = 1$, on a évidemment $H = E_1$; pour $p = 2$, on retrouve la notion de somme de deux sous-espaces vectoriels vue dans la partie IV.1.
- Si les sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_p$ sont inclus dans un sous-espace vectoriel F de E, alors on a $E_1 + \cdots + E_p \subset F$ puisque la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant chaque E_i. En particulier, pour tout entier naturel $q \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$E_1 + \cdots + E_q \subset E_1 + \cdots + E_p.$$

Exemple Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, les trois droites vectorielles :

$$E_1 = \mathbb{R}\,, \quad E_2 = i\mathbb{R} \quad \text{et} \quad E_3 = \mathrm{Vect}\{1+i\} = (1+i)\mathbb{R}$$

sont telles $E_1 + E_2 + E_3 = \mathbb{C}$ puisque $\mathbb{C} = E_1 + E_2 \subset E_1 + E_2 + E_3$.

p.1079 **Exercice 28** Si a_1, ..., a_p sont p vecteurs d'un espace vectoriel E, montrer que :

$$\mathrm{Vect}(a_1, a_2, \ldots, a_p) = \mathrm{Vect}(a_1) + \cdots + \mathrm{Vect}(a_p).$$

Remarques

- De l'exercice précédent, on déduit que si $E_1 = \mathrm{Vect}(a_1)$, $E_2 = \mathrm{Vect}(a_2)$, et $E_3 = \mathrm{Vect}(a_3)$, alors :
$$E_1 + E_2 + E_3 = E_1 + (E_2 + E_3) = (E_1 + E_2) + E_3.$$
- Plus généralement, avec des sous-espaces vectoriels E_1,..., E_p quelconques, il résulte de l'associativité de l'addition que, pour tout $q \leqslant p-1$, on a :
$$E_1 + E_2 + \cdots + E_p = (E_1 + E_2 + \cdots + E_q) + (E_{q+1} + \cdots + E_p)\,.$$
- De même, la commutativité de l'addition nous permet d'affirmer que le sous-espace vectoriel $E_1 + \cdots + E_p$ ne dépend pas de l'ordre des éléments de la famille $(E_1, \ldots, E_p)$.

Somme directe de p sous-espaces vectoriels

Définition 15

On dit que les sous-espaces $(E_1, E_2, \ldots, E_p)$ sont **en somme directe** si, pour tout $x \in \sum\limits_{i=1}^{p} E_i$, il y a unicité de la décomposition $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$, avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

Notation Lorsque les sous-espaces vectoriels $E_1, E_2, \ldots, E_p$ sont en somme directe, on dit aussi que **la somme $\boldsymbol{E_1 + E_2 + \ldots + E_n}$ est directe** et, pour le traduire, on écrit $\sum\limits_{i=1}^{p} E_i$ sous la forme $E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$ ou encore $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_i$.

Proposition 26

Les sous-espaces $E_1, \ldots, E_p$ sont en somme directe si, et seulement si :

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i \qquad x_1 + \cdots + x_p = 0 \Longrightarrow (x_1 = \cdots = x_p = 0).$$

Démonstration page 1080

p.1080

Exercice 29 Soit p vecteurs non nuls a_1, ..., a_p de l'espace vectoriel E.
Montrer que la somme $F = \mathrm{Vect}(a_1) + \mathrm{Vect}(a_2) + \cdots + \mathrm{Vect}(a_p)$ est directe si, et seulement si, la famille $(a_1, \ldots, a_p)$ est libre.

p.1080

Exercice 30

1. Soit E_1, E_2 et E_3 trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
   Montrer que la somme $E_1 + E_2 + E_3$ est directe si, et seulement si :
   $$E_1 \cap (E_2 + E_3) = E_2 \cap (E_1 + E_3) = E_3 \cap (E_1 + E_2) = \{0\}.$$
2. Interpréter géométriquement la caractérisation précédente lorsque E_1, E_2 et E_3 sont des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$, deux à deux distinctes.
3. Donner un exemple de trois sous-espaces vectoriels E_1, E_2 et E_3 d'un espace vectoriel E, qui ne sont pas en somme directe mais qui vérifient :
   $$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_3 = E_3 \cap E_1 = \{0\}.$$

Attention Comme on l'a vu dans l'exercice précédent, la condition :
$$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_3 = E_1 \cap E_3 = \{0\}$$
n'est pas suffisante pour que la somme $E_1 + E_2 + E_3$ soit directe.

Remarque Supposons $p \geqslant 3$; si la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe, alors il est immédiat d'après la proposition précédente, que la somme $E_1 + \cdots + E_{p-1}$ est également directe. Une « sous-somme » d'une somme directe est donc directe, de la même façon qu'une sous-famille d'une famille libre est libre.

p.1081

Exercice 31

- Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si la somme $F + G$ est directe, et s'il existe p sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_p$ vérifiant l'égalité $F = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, montrer que la somme $E_1 + \cdots + E_p + G$ est directe.
- Soit $p+1$ sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_{p+1}$ de E. Si la somme $E_1 + \cdots + E_{p+1}$ est directe, et si l'on pose $F = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$, montrer que les sous-espaces vectoriels F et E_{p+1} sont en somme directe.

Conséquence Soit $p+1$ sous-espaces vectoriels E_1, ..., E_{p+1} de E. Alors ceux-ci sont en somme directe si, et seulement si, les deux assertions suivantes sont simultanément vérifiées :

- les p sous-espaces vectoriels E_1, ..., E_p sont en somme directe,
- les deux sous-espaces $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ et E_{p+1} sont en somme directe.

Pour finir, généralisons le théorème 20 de la page 1056 : comme dans le cas de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, une application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ peut être définie par ses restrictions à une famille de p sous-espaces vectoriels en somme directe et de somme E. La démonstration est laissée au lecteur.

Théorème 27

Soit p sous-espaces vectoriels $E_1,\dots,E_p$ de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ ainsi que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, une application $u_i \in \mathcal{L}(E_i,F)$.

Alors il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que :

$$\forall i \in [\![1,p]\!] \quad u_{|E_i} = u_i.$$

V Formes linéaires et hyperplans

1 Formes linéaires

Définition 16

On appelle **forme linéaire sur** $\boldsymbol{E}$ toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemples

1. Si $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y) & \longmapsto & ax+by \end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^2$.
2. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, l'intégrale sur $[a,b]$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$:
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t. \end{array}$$
3. Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, l'application $P \mapsto P(\alpha)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$.

Notation L'ensemble $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires sur E se note E^*.

p.1081 **Exercice 32** Si $\varphi \in E^*$, montrer que $\varphi = 0$ ou que φ est surjective.

Définition 17

Soit $\mathbf{e} = (e_i)_{i \in I}$ une base de l'espace vectoriel E. Pour chacun des $i \in I$, on note e_i^* l'unique forme linéaire sur E vérifiant :

$$e_i^*(e_i) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall j \in I \setminus \{i\} \quad e_i^*(e_j) = 0 \;;$$

c'est la **forme linéaire coordonnée** d'indice i relative à la base $(e_i)_{i \in I}$.

Remarque Pour chaque $i \in I$, il y a bien existence et unicité de l'application linéaire e_i^* (qui est définie par les images des vecteurs de la base $\mathbf{e}$).

Exemple Si l'on utilise la base canonique $(e_1,\dots,e_n)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ alors, pour tout $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ et pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a :

$$e_i^*(x)=e_i^*\left(\sum_{k=1}^n x_k\,e_k\right)=\sum_{k=1}^n x_k\,e_i^*(e_k)=x_i$$

puisque $e_i^*(e_i)=1$ et que, pour tout $k\neq i$, on a $e_i^*(e_k)=0$. Ainsi, la forme linéaire e_i^* associe au vecteur x sa i-ème composante dans la base $(e_1,\dots,e_n)$.

Proposition 28

Soit $\mathbf{e}=(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout $i\in I$, la forme linéaire e_i^* associe à tout vecteur de E sa composante d'indice i dans la base $\mathbf{e}$.

Principe de démonstration. Procéder comme dans l'exemple précédent.

Démonstration page 1081

Exemple Si l'on munit l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ de sa base canonique $\mathbf{e}=(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$, alors, pour tout $i\in\mathbb{N}$ et pour tout polynôme $P=\sum\limits_{k=0}^n\lambda_kX^k$, on a $e_i^*(P)=\lambda_i$.

2 Hyperplans vectoriels

p.1081 **Exercice 33** Soit $\varphi\in E^*$. Comment traduire que $\varphi\neq 0$:

(i) $\forall x\in E\quad \varphi(x)\neq 0$? (ii) $\exists x\in E\quad \varphi(x)\neq 0$? (iii) Autrement ?

Proposition 29

Si H est un sous-espace de E, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe une droite vectorielle D telle que $E=H\oplus D$,

(ii) il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H=\operatorname{Ker}\varphi$.

On appelle **hyperplan vectoriel** (ou **hyperplan**) de E tout sous-espace vectoriel H de E vérifiant l'une de ces conditions.

Principe de démonstration.

Démonstration page 1082

$(i)\Longrightarrow(ii)$ Définir φ sur D et sur H (sous-espaces vectoriels supplémentaires de E).

$(ii)\Longrightarrow(i)$ Dès que $a\notin H$, alors $D=\operatorname{Vect}(a)$ convient.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^3$, le noyau de la forme linéaire non nulle $(x,y,z)\mapsto x+y+z$ est l'hyperplan $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+y+z=0\}$. Nous démontrerons dans le chapitre suivant que c'est un plan vectoriel (d'où la terminologie d'hyperplan).
2. L'ensemble $\mathbb{R}$ est un hyperplan de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$, puisque $\mathbb{R}\oplus i\mathbb{R}=\mathbb{C}$.
3. Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites vectorielles.
4. Soit $\alpha\in\mathbb{K}$. L'ensemble des polynômes dont α est racine est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$ puisque c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $\varphi:P\mapsto P(\alpha)$.

Corollaire 30

Si H est un hyperplan de E, et si D est une droite vectorielle qui n'est pas incluse dans H, alors $E = H \oplus D$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la démonstration précédente puisque (en utilisant les mêmes notations) $D \subset H$ est équivalente à $a \in H$. □

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons à nouveau l'hyperplan $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$. On a alors $H \oplus \mathrm{Vect}\{(1,0,0)\} = \mathbb{R}^3$ puisque $(1,0,0)$ n'appartient pas à H.
2. L'ensemble $\mathbb{R}$ est un hyperplan de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$; pour tout complexe non réel ω, on a donc $\mathbb{R} \oplus \omega\mathbb{R} = \mathbb{C}$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Dans $\mathbb{K}[X]$, l'hyperplan $H = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ a pour supplémentaire $\mathrm{Vect}(1)$ et, plus généralement, tout sous-espace vectoriel de la forme $\mathrm{Vect}(A)$ où A est un polynôme dont α n'est pas racine.

p.1082

Exercice 34 Montrer que $F = \left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et en donner un supplémentaire.

Proposition 31

Soit φ et ψ deux formes linéaires non nulles.

Si $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\psi$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\varphi = \lambda\,\psi$.

Principe de démonstration. Si x_0 est tel que $\varphi(x_0) \neq 0$ et $\psi(x_0) \neq 0$, poser $\lambda = \dfrac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}$. Montrer alors que φ et $\lambda\psi$ coïncident sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Démonstration page 1082

Remarque Par conséquent, si H est un hyperplan de E, alors les formes linéaires (non nulles) dont H est le noyau sont toutes proportionnelles.

3 Hyperplans affines

Définition 18

Un sous-espace affine de direction F est appelé **hyperplan affine** si sa direction F est un hyperplan vectoriel.

Exemples Dans $\mathbb{R}^3$, considérons l'ensemble $\mathcal{H} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1\}$. C'est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ dirigé par l'hyperplan vectoriel :

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$$

et passant par le point $(1,0,0)$. L'ensemble $\mathcal{H}$ est donc un hyperplan affine de $\mathbb{R}^3$.

p.1082

Exercice 35 Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que l'ensemble :

$$\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(\alpha) = 1\}$$

est un hyperplan affine dont on donnera la direction et un point.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 2

- Supposons la famille $\mathbf{g}'$ génératrice de E. Tout vecteur de E est alors combinaison linéaire des éléments de $\mathbf{g}'$, et *a fortiori* tout vecteur de $\mathbf{g}$.
- Supposons tout élément de $\mathbf{g}$ combinaison linéaire des éléments de $\mathbf{g}'$. On en déduit que tout élément de $\mathbf{g}$ appartient à $\mathrm{Vect}(\mathbf{g}')$ et donc que $\mathrm{Vect}(\mathbf{g}) \subset \mathrm{Vect}(\mathbf{g}')$ puisque $\mathrm{Vect}(\mathbf{g})$ est le plus petit sous-espace contenant tous les éléments de $\mathbf{g}$. Comme on a $\mathrm{Vect}(\mathbf{g}) = E$, on en déduit $E \subset \mathrm{Vect}(\mathbf{g}')$ et donc $E = \mathrm{Vect}(\mathbf{g}')$.

Exercice 1

- Chaque vecteur de cette famille appartient bien à $\mathbb{K}_2[X]$.
- Les égalités $X = (X+1) - 1$ et $X^2 = (X^2+X+1) - (X+1)$, montrent que tout vecteur de la famille $(1, X, X^2)$ est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(1, X+1, X^2+X+1)$.
- Comme $(1, X, X^2)$ engendre $\mathbb{K}_2[X]$, il en est de même de $(1, X+1, X^2+X+1)$.

Exercice 2

Soit H_n la propriété à prouver.

- Montrons H_0. Soit donc P_0 de degré 0. Par suite, c'est un polynôme constant non nul et tout polynôme constant est proportionnel à P_0 qui est une constante. Ainsi, la famille (P_0) engendre $\mathbb{K}_0[X]$.
- Soit un entier $n \geqslant 1$. Supposons H_{n-1} et montrons H_n.

  Soit donc $(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$, tels que :

  $$\forall i \in [\![0, n]\!] \quad \deg P_i = i.$$

  * D'après l'hypothèse de récurrence H_{n-1}, les polynômes X^0, $X^1, \ldots,$ X^{n-1} sont tous combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1})$. Ils sont donc combinaisons linéaires des éléments de $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$.

  * Comme P_n est de degré n, il existe $a_n \in \mathbb{K}^*$ et $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tels que l'on ait $P_n = a_n X^n + Q$. On peut alors écrire :

  $$X^n = a_n^{-1} P_n - a_n^{-1} Q.$$

  Puisque $a_n^{-1} Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, la propriété H_{n-1} nous dit qu'il est combinaison linéaire des polynômes P_0, $P_1, \ldots,$ P_{n-1}. Par suite, le polynôme X^n est combinaison linéaire des éléments de la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$.

  Étant donné que la famille $(X^0, X^1, \ldots, X^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$, et que l'on a prouvé que chacun de ses vecteurs est combinaison linéaire des polynômes P_0, $P_1, \ldots,$ P_n, tous éléments de $\mathbb{K}_n[X]$, on en déduit que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$; ainsi H_n est vrai, ce qui termine la démonstration de la récurrence.

Remarque Après avoir étudié la notion de dimension, nous verrons une justification bien plus efficace de ce résultat.

Exercice 3 Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3\,,\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3\,,\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3).$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

En sommant les deux premières lignes, on obtient $\lambda_1 = 0$. La somme des deux dernières lignes donne alors $\lambda_3 = 0$, et on en déduit $\lambda_2 = 0$; la famille est donc libre.

Exercice 4 Comme $x_1 + x_2 + x_3 = (0,0,0)$ la famille donnée est liée.

Remarque Même si, lors de la recherche, vous avez essayé de prouver que la famille était libre en partant de $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$, il ne sert à rien de faire apparaître le système correspondant dans la rédaction de la solution : il suffit d'exhiber un triplet $(\lambda_1, \lambda_2\, \lambda_3)$ non nul qui est apparu comme solution du système.

Exercice 5

- Supposons $\operatorname{Im}\omega \neq 0$ et montrons que $(1,\omega)$ est libre. Soit donc $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a + b\,\omega = 0$. En prenant les parties imaginaires, on obtient $b \operatorname{Im}\omega = 0$ et donc $b = 0$ car $\operatorname{Im}\omega \neq 0$. On en déduit alors $a = 0$, et la famille est donc libre.
- Supposons $\operatorname{Im}\omega = 0$ et donc $\omega \in \mathbb{R}$. Alors, la combinaison linéaire non triviale (à coefficients réels) $\omega.1 - 1.\omega = 0$ montre que la famille est liée.

Par suite, on a démontré l'équivalence demandée.

Exercice 6 Soit a et b deux réels tels que $a\cos + b\sin = 0$. On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\cos x + b\sin x = 0.$$

- En remplaçant x par 0, on en déduit $a = 0$.
- En remplaçant x par $\frac{\pi}{2}$, on en déduit $b = 0$.

Ainsi, on a donc $(a,b) = (0,0)$ et la famille $(\sin, \cos)$ est donc libre.

Exercice 7

- S'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$, alors x et y sont proportionnels.
- Réciproquement, supposons x et y proportionnels.
  Alors on peut trouver $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $x = \mu y \quad$ ou $\quad y = \mu x$.
  - Si l'on a $x = \mu y$, alors en prenant $\lambda = \mu$, on a $x = \lambda y$.
  - Si l'on a $y = \mu x$, alors, comme $y \neq 0$, on a $\mu \neq 0$; en prenant alors $\lambda = \mu^{-1}$, on a $x = \lambda y$.

  Par suite, on a trouvé un scalaire λ tel que $x = \lambda y$.

Proposition 3 Supposons d'abord les vecteurs x et y colinéaires.

- Dans le cas où il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$, on a $1\,x - \lambda y = 0$.
- Dans le cas où il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$, on a $-\lambda x + 1\,y = 0$.

Dans chacun des cas, il y a (au moins) un coefficient non nul, et la famille est donc liée.

Réciproquement, si la famille (x, y) est liée, alors il existe deux scalaires α et β, non tous deux nuls, tels que $\alpha\, x + \beta\, y = 0$.

- Si $\alpha \neq 0$, alors on a $x = (-\beta/\alpha)\, y$.
- Sinon, on a $\beta \neq 0$ et alors $y = (-\alpha/\beta)\, x$.

Donc les vecteurs x et y sont colinéaires.

Proposition 4

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre d'éléments de E. Comme l'indépendance d'un n-uplet ne dépend pas de l'ordre de ses éléments, on peut supposer que la sous-famille qui nous intéresse est $(x_1, \ldots, x_p)$ avec $p \in [\![1, n]\!]$.

  Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ une famille telle que $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i\, x_i = 0$.

  Pour tout $i \in [\![p+1, n]\!]$, posons $\lambda_i = 0$. On obtient alors $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i = 0$.

  Puisque $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre, on en déduit que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et en particulier pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a $\lambda_i = 0$. Par suite, $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.
- C'est la contraposée du résultat précédent.

Exercice 8 Étant donné que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

on a $(-1).1 + 1.\cos^2 + 1.\sin^2 = 0$, ce qui entraîne que la famille $(1, \sin^2, \cos^2)$ est liée. On en déduit que la famille donnée est liée.

Exercice 9 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la famille $(1, i, 1+i)$ est liée, et pourtant elle ne contient aucun couple de vecteurs colinéaires : en effet aucun des quotients que l'on peut former avec deux de ses éléments n'est réel.

Proposition 5

- Supposons que x soit combinaison linéaire des vecteurs x_1, x_2, ..., x_n. Il existe alors des scalaires λ_1, λ_2, ..., λ_n tels que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i$. On a alors $1\, x + \sum\limits_{i=1}^{n} (-\lambda_i)\, x_i = 0$; par suite, la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$ est liée.
- Supposons la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$ liée.
  Alors il existe des scalaires α, λ_1, λ_2, ..., λ_n non tous nuls tels que :
  $$\alpha\, x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i = 0.$$
  * Si $\alpha = 0$, alors on a $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i = 0$ avec les λ_i non tous nuls, ce qui est impossible puisque la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre.
  * Par suite, α est non nul et l'on peut alors écrire :
  $$x = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\alpha}\, x_i,$$
  ce qui prouve $x \in \operatorname{Vect}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Exercice 10

- **Méthode par récurrence**
  Comme $\deg P_0 \geqslant 0$, on a $P_0 \neq 0$, et donc la famille (P_0) est libre.
  Une considération élémentaire de degré prouve que l'on a :
  $$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad P_k \notin \operatorname{Vect}(P_0,\ldots,P_{k-1}).$$
  Par récurrence finie, la proposition précédente permet alors de prouver que la famille $(P_0,P_1,\ldots,P_k)$ est libre pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.
- **Deuxième méthode**
  Considérons l'ensemble $A = \big\{k \in [\![0,n]\!] \;\big|\; (P_0,\ldots,P_k) \text{ libre}\big\}$. C'est une partie de $\mathbb{N}$, majorée par n et non vide puisqu'elle contient 0 (le polynôme P_0 étant non nul, la famille (P_0) est libre). Soit $p = \max A$.
  Supposons $p < n$. Alors, par définition de A, la famille $(P_0,\ldots,P_p)$ est libre et $(P_0,\ldots,P_{p+1})$ est liée. La proposition 5 de la page 1043 prouve alors que P_{p+1} est combinaison linéaire des éléments de la famille $(P_0,\ldots,P_p)$, ce qui est impossible pour des raisons de degré.
  On a donc $p = n$, ce qui prouve que la famille $(P_0,\ldots,P_n)$ est libre.

Exercice 11 D'après l'hypothèse, il existe $(\alpha_0,\alpha_1) \in \mathbb{K}^2$ tels que :
$$x_0 = \alpha_0\, g_1 \quad \text{et} \quad x_1 = \alpha_1\, g_1.$$

- Si $\alpha_0 = 0$, alors (x_0,x_1), qui contient le vecteur nul, est donc liée.
- Sinon, on a $\alpha_0\, x_1 - \alpha_1\, x_0 = 0$; comme $\alpha_0 \neq 0$, la famille (x_0,x_1) est liée.

Proposition 7 Soit H_n la propriété à démontrer. Procédons par récurrence sur l'entier n.

- H_1 a été justifiée dans l'exercice précédent.
- Soit $n \geqslant 2$ tel que H_{n-1} soit vraie. Montrons H_n.
  Soit donc $\mathcal{G} = (g_1,\ldots,g_n)$ une famille d'éléments de E et $(x_0,\ldots,x_n)$ une famille de vecteurs tous combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{G}$.
  Par suite, pour $k \in [\![0,n]\!]$, il existe $\alpha_k \in \mathbb{K}$ et $z_k \in \operatorname{Vect}\{g_1,\ldots,g_{n-1}\}$ tels que :
  $$x_k = z_k + \alpha_k\, g_n.$$
  * Si tous les scalaires α_k sont nuls, alors $(x_1,\ldots,x_n)$ est une famille de n combinaisons linéaires de $(g_1,\ldots,g_{n-1})$. Elle est donc liée d'après H_{n-1}. A fortiori, la sur-famille $(x_0,\ldots,x_n)$ est liée.
  * Sinon, l'un des α_k est non nul. Quitte à permuter les vecteurs, on peut alors supposer $\alpha_0 \neq 0$.
    Si, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $y_k = x_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} x_0$, on a alors :
    $$y_k = (z_k + \alpha_k\, g_n) - \frac{\alpha_k}{\alpha_0}(z_0 + \alpha_0\, g_n) = z_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_0}\, z_0.$$
    Par suite, $(y_1,\ldots,y_n)$ est une famille de vecteurs tous combinaisons linéaires de g_1, ..., g_{n-1}. D'après H_{n-1}, cette famille est liée et il existe donc des scalaires λ_1, ..., λ_n non tous nuls tels que :
    $$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, y_k = 0.$$

On a alors :
$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, x_k = 0 \quad \Big(\text{en posant } \lambda_0 = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \lambda_k}{\alpha_0}\Big).$$
Puisqu'au moins l'un des n derniers éléments de la famille $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est non nul, la famille $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est liée, ce qui prouve H_n et termine la récurrence.

Corollaire 8 Considérons $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ une famille génératrice de E. D'après la proposition qui précède, toute famille ayant au moins $n+1$ éléments est liée. Par suite, toute famille libre de E admet au plus n éléments.

Exercice 12

1. Pour prouver que $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(\varphi_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre .

   Soit donc $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k = 0$ et donc telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, e^{kx} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, (e^x)^k = 0. \tag{$*$}$$
   Posons alors $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$. La relation $(*)$ s'écrit alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(e^x) = 0$.

   Comme l'image de la fonction exp est $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit $\forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad P(y) = 0$.

   Ainsi P a une infinité de racines, et donc $P = 0$. Par suite, ses coefficients sont tous nuls, ce qui prouve que la famille $(\varphi_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre.
2. Pour prouver que $(\varphi_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, il suffit de montrer que chacune de ses sous-familles finies est libre.

   Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que n réels $a_1, \ldots, a_n$ distincts, que l'on suppose rangés par ordre strictement croissant $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Montrons, par l'absurde, que la famille $(\varphi_{a_k})_{k\in[\![1,n]\!]}$ est libre. Supposons donc qu'il existe une famille de réels $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, non tous nuls, tels que :
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_{a_k} = 0$$
   et posons $p = \max\big\{k \in [\![1,n]\!] \mid \lambda_k \neq 0\big\}$. La relation précédente devient alors :
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi_{a_k} = 0.$$
   En multipliant par la fonction φ_{-a_p}, on obtient :
$$\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \varphi_{(a_k - a_p)} = -\lambda_p.$$
   Pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, on a $a_k - a_p < 0$, et donc le membre de gauche tend vers 0 en $+\infty$. Ainsi, en passant à la limite, on obtient $\lambda_p = 0$, ce qui est impossible. Par suite, la famille $(\varphi_{a_k})_{k\in[\![1,n]\!]}$ est donc libre. Ainsi, $(\varphi_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre.

Exercice 13 Il est immédiat que si l'on peut trouver une telle famille $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de scalaires tous non nuls, alors il s'agit de scalaires non tous nuls puisque $\lambda_1 \neq 0$.

Réciproquement, si les λ_i ne sont pas tous nuls, alors on peut prendre la sous-famille constituée de ceux qui sont non nuls et considérer les a_i correspondant.

Exercice 14 En effet :

- dans l'exercice 2, nous avons prouvé qu'une telle famille engendre $\mathbb{K}_n[X]$.
- dans l'exercice 10, nous avons prouvé qu'une telle famille est libre.

Par suite, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 15 Soit (x,y) un élément quelconque de E. Si λ et μ sont des scalaires, alors l'unicité de la décomposition d'un vecteur de E sur la base (a,b) montre que :

$$(x,y) = \lambda\, c + \mu\, d \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha\,\lambda + \gamma\,\mu = x \\ \beta\,\lambda + \delta\,\mu = y \end{cases}$$

Posons $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$.

- Supposons $\Delta \neq 0$. Alors le système précédent est un système de Cramer.
  - $*$ Pour tout (x,y), il possède une solution, ce qui entraîne que (c,d) engendre E.
  - $*$ Pour $(x,y) = (0,0)$, il ne possède que la solution triviale, ce qui entraîne que la famille (c,d) est libre.

  Par suite (c,d) est une base.
- Supposons $\Delta = 0$. Alors, on sait que pour $(x,y) = (0,0)$, le système (homogène) ci-dessus possède une solution non triviale. Par suite (c,d) n'est pas libre ; ce n'est donc pas une base.

Proposition 14 Démonstration dans le cas où I est fini

1. Supposons u injective et montrons que la famille $\big(u(e_i)\big)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est libre.

   Soit $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$ vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, u(e_i) = 0$. Puisque u est linéaire, on a :

   $$u\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i\Big) = 0 \quad \text{et donc} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i \in \operatorname{Ker} u.$$

   L'application u étant injective, on a $\operatorname{Ker} u = \{0\}$, ce qui entraîne $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i = 0$.

   La famille $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ étant libre, on en déduit que tous les scalaires λ_i sont nuls, et donc que la famille $\big(u(e_i)\big)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est libre.

2. D'après le premier point, si u est injective, alors l'image par u de la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre, puisque toute base est une famille libre.

Réciproquement, supposons $\big(u(e_i)\big)_{i\in[\![1,n]\!]}$ libre et montrons que u est injective.

Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. Il existe donc $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$ telle que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i$. Alors :

$$0 = u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, u(e_i).$$

Comme la famille $\big(u(e_i)\big)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre, on en déduit que la famille $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est nulle, et donc que $x = 0$. Par suite, l'application linéaire u est injective.

Démonstration dans le cas général : analogue, en remplaçant les sommes $\sum\limits_{i=1}^{n}$ par des somme $\sum\limits_{i\in I}$ et en utilisant donc des familles $(\lambda_i)_{i\in I}$ à suport fini. .

Exercice 16

1. Montrons que l'application u est linéaire.
   Pour $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $(\mu_1,\dots,\mu_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$, on a :
   $$\begin{aligned} u\big(\alpha\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n) + \beta\,(\mu_1,\dots,\mu_n)\big) &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha\,\lambda_i + \beta\,\mu_i)\,x_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \mu_i\,x_i \\ &= \alpha\,u(\lambda_1,\dots,\lambda_n) + \beta\,u(\mu_1,\dots,\mu_n). \end{aligned}$$
   L'application u est donc linéaire.
2. La famille $(x_1,\dots,x_n)$ est libre si, et seulement si :
   $$\forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,x_i = 0 \Longrightarrow (\lambda_1,\dots,\lambda_n) = 0.$$
   La relation précédente traduit aussi que $\operatorname{Ker} u$ est réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire que l'application linéaire u est injective. D'où le résultat.
3. Par définition de u, on a :
   $$\operatorname{Im} u = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,x_i\,;\ (\lambda_1 \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \Big\} = \operatorname{Vect}(x_1, x_2 \dots, x_n).$$
   Ainsi l'application linéaire u est surjective si, et seulement si, $\operatorname{Im} u = E$, c'est-à-dire si, et seulement si, la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est génératrice de E.
4. Conséquence des deux questions précédentes

Théorème 16 Procédons par analyse-synthèse.

Unicité-Analyse Soit u une telle application linéaire.

Considérons $x \in E$ dont la décomposition dans la base **e** est $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, e_i$.

La linéarité de u nous donne $u(x) = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, u(e_i) = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i f_i$.

On en déduit l'unicité d'une telle application linéaire u (ainsi que sa seule expression possible, d'où la suite).

Existence Soit $x \in E$. En utilisant sa décomposition (unique) dans la base $\mathbf{e}$ que nous notons $x = \sum_{i \in I} \lambda_i\, e_i$, posons $u(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i\, f_i$.

On a ainsi défini une application u de E dans F.

- Montrons qu'elle est linéaire. Soit donc $x \in E$, $y \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$.
  En décomposant x et y dans la base $\mathbf{e}$ sous la forme $x = \sum_{i \in I} \lambda_i\, e_i$ et $y = \sum_{i \in I} \mu_i\, e_i$, on a alors $\alpha\, x + \beta\, y = \sum_{i \in I} (\alpha\, \lambda_i + \beta\, \mu_i)\, e_i$ et donc :

$$\begin{aligned} u(\alpha\, x + \beta\, y) &= \sum_{i \in I} (\alpha\, \lambda_i + \beta\, \mu_i)\, f_i \\ &= \alpha \Big(\sum_{i \in I} \lambda_i\, f_i \Big) + \beta \Big(\sum_{i \in I} \mu_i\, f_i \Big) \\ &= \alpha\, u(x) + \beta\, u(y), \end{aligned}$$

  ce qui prouve la linéarité de u.
- De plus, pour tout $i \in I$, on a $u(e_i) = f_i$ puisque les composantes de e_i dans la base $\mathbf{e}$ sont toute nulles, hormis celle d'indice i, qui vaut 1.

On en déduit l'existence d'une telle application linéaire u.

Exercice 17 Pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$, on a :

$$\begin{aligned} u\big((x_1, x_2, x_3)\big) &= u\,(x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + x_3\, e_3) \\ &= x_1\, u(e_1) + x_2\, u(e_2) + x_3\, u(e_3) \\ &= x_1\, e_3 + x_2\,(-e_2) + x_3\, e_1 \\ &= (x_3, -x_2, x_1). \end{aligned}$$

Proposition 17 Par construction, H est inclus dans E.

- On a $F \subset H$ car tout $y \in F$ s'écrit $y = y + 0$ avec $0 \in G$.
  On prouve de même $G \subset H$. On en déduit en particulier $0 \in H$.
- Montrons que H est stable par combinaisons linéaires.
  Soit $(x_1, x_2) \in H^2$. Il existe donc $(y_1, y_2) \in F^2$ et $(z_1, z_2) \in G^2$ tels que :

$$x_1 = y_1 + z_1 \quad \text{et} \quad x_2 = y_2 + z_2.$$

  Pour $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$, on a alors :

$$\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2 = (\alpha_1\, y_1 + \alpha_2\, y_2) + (\alpha_1\, z_1 + \alpha_2\, z_2).$$

  Comme $\alpha_1\, y_1 + \alpha_2\, y_2 \in F$ et $\alpha_1\, z_1 + \alpha_2\, z_2 \in G$ puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels, on en déduit que $\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2 \in H$.
- Soit H' un sous-espace vectoriel de E contenant F et G. Étant donné que H' est stable par combinaisons linéaires et qu'il contient tous les éléments $y \in F$ et tous les éléments $z \in G$, il contient évidemment tous les éléments de H.

Ainsi, H est un sous-espace vectoriel de E contenu dans tout sous-espace contenant F et G ; par suite c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G.

Exercice 18

- Par définition, on a : $F + \{0\} = \{x + 0\,;\ x \in F\} = F$.
- Par définition, $E + F$ contient E. Comme c'est un sous-espace vectoriel de E, on en déduit $F + F = E$.
- En utilisant le résultat précédent avec $E = F$, on obtient directement $F + F = F$.

Exercice 19 Comme, par définition, on a $F + G \subset \mathbb{R}^3$, démontrons $\mathbb{R}^3 \subset F + G$.
Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; posons $s = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$. Alors :

- on a évidemment $z = s(1,1,1) \in G$;
- un calcul immédiat montre que $y = x - s(1,1,1) = (x_1 - s, x_2 - s, x_3 - s) \in F$.

Par suite, on a trouvé $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$, et donc $\mathbb{R}^3 \subset F + G$.

Remarque La décomposition précédente peut paraître miraculeuse mais si l'on suppose avoir une décomposition :

$$(x_1, x_2, x_3) = x = y + z = (y_1, y_2, y_3) + k(1,1,1) = (y_1 + k, y_2 + k, y_3 + k)$$

on obtient la seule valeur possible de k en faisant la somme des composantes. D'où la rédaction précédente de la solution.

Exercice 20

- Supposons $F + G = F \cup G$. Alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E ; donc, d'après l'exercice 10 de la page 1004, on a $F \subset G$ ou $G \subset F$.
- Réciproquement, supposons l'un des deux sous-espaces vectoriels inclus dans l'autre, par exemple $F \subset G$. Alors on a évidemment :

  $$G = F \cup G \qquad \text{et} \qquad F + G \subset G.$$

  Comme on sait que $G \subset F + G$, on en déduit $F + G = G = F \cup G$.

Proposition 18

- Supposons $F \cap G = \{0\}$. Soit $x \in F + G$ ayant deux décompositions :

  $$x = y' + z' \quad \text{et} \quad x = y'' + z'' \quad \text{avec} \quad (y', y'') \in F^2 \quad \text{et} \quad (z', z'') \in G^2.$$

  Comme F et G sont des sous-espaces de E, on a :

  $$y' - y'' \in F \quad \text{et} \quad z'' - z' \in G.$$

  Par suite, $y' - y'' = z'' - z' \in F \cap G$ et donc $y' - y'' = z'' - z' = 0$;
  on en déduit $y' = y''$ et $z' = z''$, ce qui prouve l'unicité de la décomposition.
- Réciproquement, supposons F et G en somme directe et montrons $F \cap G = \{0\}$.
  Soit donc $x \in F \cap G$. Alors x peut s'écrire :

  $$x = 0 + x = x + 0 \quad \text{avec} \quad (0, x) \in F \times G \quad \text{et} \quad (x, 0) \in F \times G$$

  L'unicité de la décomposition de x comme somme d'un élément de F et d'un élément de G implique $x = 0$. On en déduit $F \cap G = \{0\}$.

Exercice 21 Soit $x \in F \cap G$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ tels que :

$$x = \alpha\, a = \beta\, b.$$

On en déduit $\alpha\, a - \beta\, b = 0$, ce qui entraîne $\alpha = \beta = 0$ puisque la famille (a, b) est libre. Ainsi, on a $x = 0$, ce qui prouve que F et G sont en somme directe.

Exercice 22 Soit $x \in F \cap G$. Comme $x \in G$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $x = a(1,1,1)$. Comme $x \in F$, on a alors $3a = 0$ et donc $a = 0$; par suite, on a $x = 0$, ce qui prouve que la somme $F + G$ est directe.

Exercice 23 On sait que $u(F)$ et $u(G)$ sont des sous-espaces vectoriels de E'.

1. Soit $x' \in u(F+G)$. Il existe donc $(y,z) \in F \times G$ tels que $x' = u(y+z)$ et donc $x' = u(y) + u(z)$. Par suite, on a $x' \in u(F) + u(G)$, ce qui donne l'inclusion $u(F+G) \subset u(F) + u(G)$.

   Réciproquement, soit $x' \in u(F) + u(G)$. il existe donc $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x' = u(y) + u(z) = u(y+z)$. Puisque $y + z \in F + G$, on a $x' \in u(F+G)$, ce qui prouve l'inclusion réciproque.
2. Supposons F et G en somme directe et u injective. Soit $x' \in u(F) \cap u(G)$. Il existe donc $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x' = u(y)$ et $x' = u(z)$. Puisque u est injective, on a $y = z$ et donc $y \in F \cap G$. Comme, par hypothèse, $F \cap G = \{0\}$, on a alors $y = 0$ et donc $x' = u(0) = 0$. Par suite, $u(F)$ et $u(G)$ sont en somme directe.
3. Supposons $E = F \oplus G$ et u bijective.
   - Étant donné que u est injective et que F et G sont en somme directe, la question précédente nous dit que $u(F)$ et $u(G)$ sont aussi en somme directe.
   - D'après la première question, on a $u(F) + u(G) = u(F+G) = u(E)$; comme u est surjective, on a aussi $u(E) = E'$. On en déduit $u(F) + u(G) = E'$.

   Ainsi, $u(F)$ et $u(G)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 24

- On sait que $F = \mathbb{K}_{\deg(P)-1}[X]$ est un espace vectoriel.
- Comme l'application $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ Q & \longmapsto & PQ \end{array}$ est linéaire, il est immédiat que l'ensemble $G = \operatorname{Im} u$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

La division euclidienne prouve que tout élément de E s'écrit de façon unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G. Donc F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 25 L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ d'une part, et l'ensemble des fractions rationnelles de degré strictement négatif d'autre part, sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}(X)$. L'existence et l'unicité de la partie entière d'une fraction rationnelle peuvent s'exprimer en disant que ce sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}(X)$.

Théorème 20

Analyse - Unicité. Soit u une application linéaire telle que :

$$u_{|F} = v \quad \text{et} \quad u_{|G} = w.$$

Pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$, et donc :

$$u(x) = u(y+z) = u(y) + u(z) = v(y) + w(z).$$

Cela prouve l'unicité d'une telle application linéaire u.

Synthèse - Existence. Pour tout $x \in E$, désignons par (y,z) l'unique couple de $F \times G$ tel que $x = y + z$; on peut alors poser :

$$u(x) = v(y) + w(z),$$

ce qui définit une application u de E dans E.

- Montrons que u est linéaire. Soit $(x,x') \in E^2$. Prenons $(y,z) \in F \times G$ ainsi que $(y',z') \in F \times G$ tels que :

  $$x = y + z \quad \text{et} \quad x' = y' + z'.$$

  Pour tout $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$, on a alors :

  $$\lambda\, x + \lambda'\, x' = (\lambda\, y + \lambda'\, y') + (\lambda\, z + \lambda'\, z')$$

  et, comme $\lambda\, y + \lambda'\, y' \in F$ et $\lambda\, z + \lambda'\, z' \in G$, on a donc :

  $$\begin{aligned} u(\lambda\, x + \lambda'\, x') &= v(\lambda\, y + \lambda'\, y') + w(\lambda\, z + \lambda'\, z') \\ &= \big(\lambda\, v(y) + \lambda'\, v(y')\big) + \big(\lambda\, w(z) + \lambda'\, w(z')\big) \\ &= \lambda\,\big(v(y) + w(z)\big) + \lambda'\,\big(v(y') + w(z')\big) \\ &= \lambda\, u(x) + \lambda'\, u(x'). \end{aligned}$$

- Pour $x \in F$, la décomposition $x = x + 0$, avec $0 \in G$, montre que $u(x) = v(x)$. Par suite, on a $u_{|F} = v$. On démontre de même $u_{|G} = w$.

Ainsi, l'application u répond bien au problème, ce qui prouve l'existence.

Exercice 26

1. Soit $F = \mathbb{K}^2 \times \{0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$.
   - G est un sous-espace de E par définition d'un sous-espace vectoriel engendré. F est un sous-espace vectoriel de E puisqu'il est inclus dans E et que c'est un espace vectoriel produit. On aurait pu aussi dire $F = \mathrm{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.
   - On a $F \cap G = \{0\}$. En effet, si $x \in F \cap G$, alors il existe trois éléments a, b et c de $\mathbb{K}$ tels que $x = (a,b,0) = (c,c,c)$ et l'on a donc $c = 0$, puis $a = b = 0$ et, par suite, $x = 0$.
   - Enfin, pour $(a,b,c) \in E$ l'égalité $(a,b,c) = \underbrace{(a-c, b-c, 0)}_{F} + \underbrace{(c,c,c)}_{G}$

     montre que $E = F + G$.

   Par suite, on a $E = F \oplus G$.

2. Étant donné que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E et que :

$$v: \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ (a,b,0) & \longmapsto & (-b,a,0) \end{array} \qquad \text{et} \qquad w: \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & E \\ (c,c,c) & \longmapsto & -(c,c,c). \end{array}$$

sont deux applications linéaires, il existe donc un unique endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dont les restrictions à F et G sont respectivement v et w.

3. Comme pour tout $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, on a :

$$u^2\left((a,b,0)\right) = u\left((b,-a,0)\right) = (-a,-b,0),$$

on en déduit :

$$\forall x \in F \quad u^2(x) = -x \quad \text{et donc} \quad \forall x \in F \quad u^4(x) = x.$$

On a d'autre part :

$$\forall x \in G \quad u^2(x) = x \quad \text{et donc} \quad \forall x \in G \quad u^4(x) = x.$$

Ainsi, l'application linéaire u^4 coïncide avec l'identité sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ; par suite on a $u^4 = \mathrm{Id}_E$.

Proposition 21

- Pour $x \in G$, on a $x = 0 + x$ avec $(0,x) \in F \times G$ et donc $p(x) = 0$.

  Réciproquement, soit $x \in E$ tel que $p(x) = 0$. Comme on a $x = p(x) + z$, et donc $x = z$, avec $z \in G$, on a $x \in G$. Par suite, on a prouvé $\operatorname{Ker} p = G$.
- Soit $x \in F$. Alors la décomposition $x = x + 0$ avec $(x,0) \in F \times G$ montre que $x = p(x)$; on en déduit $F \subset \{x \in E \mid p(x) = x\}$.
  L'inclusion $\{x \in E \mid p(x) = x\} \subset \operatorname{Im} p$ étant évidente, on a $F \subset \{x \in E \mid p(x) = x\} \subset \operatorname{Im} p$.
  Comme, par définition, on a $\operatorname{Im} p \subset F$, on en déduit la double égalité :

$$F = \operatorname{Im} p = \{x \in E \mid p(x) = x\}.$$

- Pour tout $x \in E$, on a $p(x) \in F$ et donc $p\big(p(x)\big) = p(x)$. On en déduit $p \circ p = p$.

Proposition 22 On a déjà prouvé que, si p et une projection, alors $p^2 = p$ et $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$. Montrons la réciproque.

- Les ensembles $G = \operatorname{Ker} p$ et $F = \operatorname{Im} p$, qui sont respectivement noyau et image de l'endomorphisme p, sont donc des sous-espaces vectoriels de E.
- Soit $y \in F \cap G$.
  * Comme $y \in F = \operatorname{Im} p$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$.
  * Comme $p \circ p = p$ et $y \in G = \operatorname{Ker} p$, on a $0 = p(y) = (p \circ p)(x) = p(x) = y$, et donc $y = 0$. Par suite, on a $F \cap G = \{0\}$.
- Soit $x \in E$. On a alors :

$$x = p(x) + \big(x - p(x)\big). \tag{$*$}$$

  Comme $p\big(x - p(x)\big) = p(x) - (p \circ p)(x) = 0$, on a $x - p(x) \in G$, et il est immédiat que $p(x) \in F = \operatorname{Im} p$. Ainsi, on a $x \in F + G$, et donc $E = F + G$.

On en déduit que $E = F \oplus G$, et la relation $(*)$ montre alors que l'application p est la projection sur F parallèlement à G.

Proposition 23 Étant donné que l'endomorphisme u vérifie :

$$\forall x \in F \quad (s \circ s)(x) = s(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in G \quad (s \circ s)(x) = -s(x) = x$$

et que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de E, on a donc $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Proposition 24
On a déjà prouvé qu'une symétrie s est un endomorphisme de E vérifiant $s^2 = s$. Montrons la réciproque. Soit donc $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s^2 = s$.

Posons $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. Comme $s - \mathrm{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$ et $s + \mathrm{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$, leurs noyaux respectifs, F et G, sont des sous-espaces de E.

Par construction, on a :

$$F = \{x \in E \mid s(x) = x\} \quad \text{et} \quad G = \{x \in E \mid s(x) = -x\}.$$

Pour prouver que s est une symétrie, il reste donc à prouver $E = F \oplus G$.

- Soit $x \in F \cap G$. On a alors $x = s(x) = -x$ et donc $x = 0$.
- Soit $x \in E$. Si l'on pose :

$$y = \frac{1}{2}\big(x + s(x)\big) \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{2}\big(x - s(x)\big),$$

  alors il est immédiat que $x = y + z$; de plus, l'égalité $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ et la linéarité de s nous donnent immédiatement $s(y) = y$ et $s(z) = -z$, ou encore $y \in F$ et $z \in G$.

Ainsi, on a $E = F \oplus G$, et s est donc la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 27

1. Dans l'anneau $\big(\mathcal{L}(E), +, \circ\big)$, où les composées $s \circ s$ et $p \circ p$ se notent aussi s^2 et p^2, un calcul rapide nous donne :

$$s^2 - \mathrm{Id}_E = (2\,p - \mathrm{Id}_E)^2 - \mathrm{Id}_E = (4\,p^2 - 4\,p + \mathrm{Id}_E) - \mathrm{Id}_E = 4\,(p^2 - p)$$

   d'où le résultat demandé.

   Remarque On a pu, ci-dessus, utiliser la formule du binôme de Newton pour développer $(2\,p - \mathrm{Id}_E)^2$ puisque Id_E commute avec p.

2. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Posons $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$.
   - D'après la question précédente, p est un projecteur. On sait alors que $F = \mathrm{Im}\,p$ et $G = \mathrm{Ker}\,p$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
   - Comme $s = 2\,p - \mathrm{Id}_E$,
     * la relation $\forall x \in F \quad p(x) = x$ nous donne : $\forall x \in F \quad s(x) = x$;
     * la relation $\forall x \in G \quad p(x) = 0$ nous donne : $\forall x \in G \quad s(x) = -x$.

   On en déduit que s est la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.

Exercice 28

- Montrons $\mathrm{Vect}(a_1 \ldots, a_p) \subset \mathrm{Vect}(a_1) + \cdots + \mathrm{Vect}(a_p)$. Comme :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad a_i \in \mathrm{Vect}(a_i) \subset \mathrm{Vect}(a_1) + \cdots + \mathrm{Vect}(a_p),$$

  le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(a_1) + \cdots + \mathrm{Vect}(a_p)$ contient chaque a_i. Il contient donc $\mathrm{Vect}(a_1, \ldots, a_p)$, plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les a_i.

- Montrons l'inclusion réciproque. Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(a_1,\ldots,a_n)$ contient a_i et donc $\mathrm{Vect}(a_i)$ qui est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant a_i. Comme $\mathrm{Vect}(a_1)+\cdots+\mathrm{Vect}(a_p)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les $\mathrm{Vect}(a_i)$, on a :
$$\mathrm{Vect}(a_1)+\cdots+\mathrm{Vect}(a_p)\subset \mathrm{Vect}(a_1,a_2,\ldots,a_p).$$

On en déduit l'égalité.

Proposition 26

- Supposons $E_1,E_2,\ldots,E_p$ en somme directe. Le résultat est alors immédiat, puisque l'on a $0+0+\cdots+0=0$ et que cette décomposition est, par hypothèse, unique.
- Montrons la réciproque. Soit donc $x\in E_1+\cdots+E_p$ pour lequel il existe $(x_1,\ldots,x_p)$ et $(x_1',\ldots,x_p')$ appartenant à $E_1\times\cdots\times E_p$ vérifiant :
$$x=x_1+\cdots+x_p \qquad \text{et} \qquad x=x_1'+\cdots+x_p'.$$
Par différence, on obtient $(x_1-x_1')+\cdots+(x_p-x_p')=0$. Or, pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, on a $x_i-x_i'\in E_i$ puisque E_i est stable par combinaisons linéaires. L'hypothèse nous donne alors $x_i-x_i'=0$ et donc $x_i=x_i'$, qui prouve l'unicité de la décomposition.

Exercice 29

- Supposons la somme $\mathrm{Vect}(a_1)+\cdots+\mathrm{Vect}(a_p)$ directe. Soit $(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i a_i=0$. Étant donné que, pour chaque $i\in[\![1,p]\!]$, on a $\lambda_i a_i\in\mathrm{Vect}(a_i)$ et que la somme $\mathrm{Vect}(a_1)+\cdots+\mathrm{Vect}(a_p)$ est directe, chacun des vecteurs $\lambda_i a_i$ est nul. Comme $a_i\neq 0$ chacun des $\lambda_i=0$ est nul. Par suite, $(a_1,\ldots,a_p)$ est libre.
- Supposons $(a_1,\ldots,a_p)$ libre, et montrons que $\mathrm{Vect}(a_1)+\cdots+\mathrm{Vect}(a_p)$ est directe.
Soit donc $(x_1,\ \ldots,\ x_p)\in\mathrm{Vect}(a_1)\times\cdots\times\mathrm{Vect}(a_p)$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$.
Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, il existe $\lambda_i\in\mathbb{K}$ tel que $x_i=\lambda_i a_i$, et l'on a donc $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i a_i=0$.
Comme $(a_1,\ldots,a_p)$ est libre, tous les scalaires λ_i sont nuls, ainsi donc que les x_i.
Par suite, la somme $\mathrm{Vect}(a_1)+\cdots+\mathrm{Vect}(a_p)$ est directe.

Exercice 30

1. - Supposons la somme $E_1+E_2+E_3$ directe. Soit $x\in E_1\cap(E_2+E_3)$.
On peut alors trouver $x_2\in E_2$ et $x_3\in E_3$ tels que $x=x_2+x_3$.
En posant $x_1=-x$, on a alors :
$$x_1+x_2+x_3=0 \qquad \text{avec} \qquad (x_1,x_2,x_3)\in E_1\times E_2\times E_3.$$
Comme ces sous-espaces vectoriels sont en somme directe, on en déduit $x_1=0$ et donc $x=0$. Ainsi, on a prouvé $E_1\cap(E_2+E_3)=\{0\}$.
Par symétrie, on obtient $E_2\cap(E_1+E_3)=E_3\cap(E_1+E_2)=\{0\}$.
   - Supposons $E_1\cap(E_2+E_3)=E_2\cap(E_1+E_3)=E_3\cap(E_1+E_2)=\{0\}$ et montrons que la somme $E_1+E_2+E_3$ est directe.
Soit donc $(x_1,x_2,x_3)\in E_1\times E_2\times E_3$ tel que $x_1+x_2+x_3=0$, ou encore :
$$-x_1=x_2+x_3 \quad \text{avec donc} \quad (-x_1,x_2,x_3)\in E_1\times E_2\times E_3.$$
Comme $E_1\cap(E_2+E_3)=\{0\}$, on en déduit $x_1=0$. En utilisant les deux autres parties de l'hypothèse, on obtient de même $x_2=x_3=0$.

2. Soit E_1, E_2 et E_3 des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$, deux à deux distinctes. Par suite, chacun des couples de deux droites engendre un plan vectoriel. La relation :
$$E_1 \cap (E_2 + E_3) = E_2 \cap (E_1 + E_3) = E_3 \cap (E_1 + E_2) = \{0\}.$$
signifie que l'intersection de chacune de ces droites avec le plan vectoriel engendré par les deux autres est réduite à $\{0\}$, ou encore qu'aucune de ces droite n'est incluse dans le plan vectoriel engendré par les deux autres.
3. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, les trois droites vectorielles :
$$E_1 = \mathbb{R}, \quad E_2 = i\mathbb{R} \quad \text{et} \quad E_3 = \mathrm{Vect}\{1+i\} = (1+i)\mathbb{R}$$
vérifient :
$$E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_1 = E_3 \cap E_1 = \{0\}$$
mais ne sont pas en somme directe puisque $E_3 \cap (E_1 + E_2) = E_3 \neq \{0\}$.

Exercice 31

- Supposons que la somme F et G soit directe ainsi que la somme $F = E_1 + \cdots + E_p$.

  Soit $(x_1, \ldots, x_p, y) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p \times G$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{p} x_i + y = 0$.

  Étant donné que $F = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ et G sont en somme directe et que l'on a $y \in G$ ainsi que $x_1 + \cdots + x_p \in F$ et, on en déduit :
$$\sum_{i=1}^{p} x_i = 0 \qquad \text{et} \qquad y = 0.$$
  Comme la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe, tous les x_i sont nuls. On en déduit que la somme $E_1 + \cdots + E_p + G$ est directe.
- Supposons la somme $E_1 + E_2 + \cdots + E_p + E_{p+1}$ directe. Alors, d'après la remarque précédente, la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe. Montrons que les sous-espaces vectoriels $F = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ et E_{p+1} sont en somme directe.

  Soit donc $x \in F \cap E_{p+1}$. On peut alors trouver $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i$ ou encore $x_1 + \cdots + x_p + (-x) = 0$ avec $-x \in E_{p+1}$.

  Comme la somme $E_1 + E_2 + \cdots + E_p + E_{p+1}$ est directe, on en déduit :
$$x_1 = x_2 = \cdots = x_p = -x = 0$$
  et donc $x = 0$, d'où la conclusion.

Exercice 32 Supposons $\varphi \neq 0$. Alors on peut trouver $x \in E$ tel que $\varphi(x) \neq 0$. Si l'on pose $a = \varphi(x)$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda = \varphi\big(\lambda \, \frac{x}{a}\big)$, ce qui prouve que φ est surjective et termine la démonstration.

Proposition 28 Soit x un vecteur de E et $(\lambda_i)_{i \in I}$ la famille (presque nulle) de ses composantes dans la base $\mathbf{e}$. Alors, pour tout $i \in I$, on a :
$$e_i^*(x) = e_i^*\left(\sum_{j \in I} \lambda_j \, e_j\right) = \sum_{j \in I} \lambda_j \, e_i^*(e_j) = \lambda_i$$
puisque $e_i^*(e_j) = 0$ si $j \neq i$, et $e_i^*(e_i) = 1$. Ainsi, l'application linéaire e_i^* associe au vecteur x sa composante d'indice i dans la base $\mathbf{e}$.

Exercice 33 La condition $\varphi = 0$ s'écrivant aussi $\forall x \in E \quad \varphi(x) = 0$, c'est évidemment (ii) qui convient pour traduire $\varphi \neq 0$.

Proposition 29

$(i) \Longrightarrow (ii)$ Puisque D est une droite vectorielle, il existe $a \in D$ tel que $D = \mathrm{Vect}(a)$.

- Soit v l'application nulle de H dans $\mathbb{K}$,
- Soit w l'application linéaire de D dans $\mathbb{K}$ telle que $w(a) = 1$; cette application est bien définie puisque (a) est une base du sous-espace vectoriel D.

Comme D et H sont supplémentaires, il existe une unique $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que :

$$\varphi_{|H} = v \qquad \text{et} \qquad \varphi_{|D} = w.$$

- Par construction, on a $H \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$.
- Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Comme $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$, il existe $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels quel $x = h + \lambda\, a$. On a alors :

$$0 = \varphi(x) = \varphi(h) + \lambda\varphi(a) = \lambda.$$

Ainsi $x = h$ et donc $x \in H$, ce qui prouve l'inclusion réciproque.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Comme φ n'est pas l'application nulle, on peut trouver un élément a de E tel que $\varphi(a) \neq 0$. Posons $D = \mathrm{Vect}(a)$ et montrons que $E = H \oplus D$.

- Montrons $H \cap D = \{0\}$ ou, en fait, $H \cap D \subset \{0\}$. Soit donc $x \in H \cap D$.
  - $*$ Étant donné que $x \in H$, on a $\varphi(x) = 0$.
  - $*$ Vu que $x \in \mathrm{Vect}(a)$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda\, a$; alors $\varphi(x) = \lambda\, \varphi(a)$.

  Comme $\varphi(a) \neq 0$, l'égalité $\varphi(x) = 0$ entraîne $\lambda = 0$ et donc $x = 0$.
- Montrons $E = H + D$ ou, en fait, $E \subset H + D$. Soit donc $x \in E$.
  Posons $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}$ et $h = x - \lambda\, a$. On a alors $x = h + \lambda\, a$, et la linéarité de φ donne $\varphi(h) = 0$, ce qui termine la démonstration.

Exercice 34 En notant E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a déjà vu que :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

est une forme linéaire sur E.

- Elle est non nulle puisque $\varphi(1) = 1$; par suite, son noyau F est un hyperplan.
- Soit g la fonction constante 1 et $D = \mathrm{Vect}\{g\}$. Puisque g appartient à $E \setminus F$, et que F est un hyperplan, on a $F \oplus D = E$. Ainsi, l'ensemble D des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F.

Proposition 31 Comme $\varphi \neq 0$ le sous-espace vectoriel $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$ est un hyperplan et, si l'on prend $x_0 \in E \setminus H$, alors $D = \mathrm{Vect}(x_0)$ est un supplémentaire de H.

Puisque $x_0 \notin \mathrm{Ker}\,\varphi$ et $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\psi$, on a aussi $\psi(x_0) \neq 0$.

Posons alors $\lambda = \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} \neq 0$. Ainsi, les applications linéaires φ et $\lambda\psi$:

- coïncident sur H, puisque leurs restrictions à H sont nulles,
- coïncident sur D, par définition de λ, comme on peut le vérifier facilement.

Par suite, les applications linéaires φ et $\lambda\psi$, qui coïncident sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, sont égales.

Exercice 35 Le polynôme 1 appartient à $\mathcal{H}$, et l'on constate que :

$$P \in \mathcal{H} \iff P - 1 \in H$$

où H est l'hyperplan vectoriel $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(\alpha) = 0\}$.

Ainsi, $\mathcal{H}$ est l'hyperplan affine dirigé par H et passant par le vecteur 1.

S'entraîner et approfondir

20.1 Soit (x_1, x_2, x_3) une famille libre d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.
Montrer que la famille $(x_2 + x_3\,,\ x_3 + x_1, x_1 + x_2)$ est libre.

20.2 Soit (x_1, x_2, x_3, x_4) une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
La famille :

$$\big(y_1 = x_1 + x_2\,,\ y_2 = x_2 + x_3\,,\ y_3 = x_3 + x_4\,,\ y_4 = x_4 + x_1\big)$$

est-elle libre ?

20.3 Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$.
Peut-on faire mieux que cette inclusion et prouver une égalité ?

20.4 Soit F l'ensemble des vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Montrer que F est une droite vectorielle.

⋆ **20.5** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on pose $f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x - k| \end{array}$.

Montrer que $(f_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

20.6 Dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$, on considère les trois formes linéaires f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$f_1(x, y, z) = -x + y + z$$

$$f_2(x, y, z) = 2x - y - z$$

$$f_3(x, y, z) = x + 2y + z.$$

La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle libre ?

20.7 Soit a et b deux complexes distincts. Montrer que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 4, et dont a et b sont des racines, est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_4[X]$ et en donner une base.

20.8 Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ on définit :

$$A_n = \mathrm{Vect}\left(u_0 : x \mapsto 1,\ u_1 : x \mapsto \cos x,\ u_2 : x \mapsto \cos^2 x, \ldots,\ u_n : x \mapsto \cos^n x\right)$$

$$B_n = \mathrm{Vect}\left(v_0 : x \mapsto 1,\ v_1 : x \mapsto \cos x,\ v_2 : x \mapsto \cos 2x, \ldots,\ v_n : x \mapsto \cos nx\right).$$

Montrer que ces sous-espaces vectoriels sont égaux.

20.9 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on définit $f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin kx \end{array}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Indication : dériver deux fois.

20.10 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que, pour tout vecteur $x \in E$, les vecteurs x et $f(x)$ soient proportionnels.
Montrer que l'application f est une homothétie.

20.11 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ ainsi que p un projecteur de E. Montrer que $p \circ f = f \circ p$ si, et seulement si les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont stables par f.

20.12 Soit p et q deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) p et q sont deux projecteurs ayant même noyau,

(ii) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

Solution des exercices

20.1 Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\lambda_1 (x_2 + x_3) + \lambda_2 (x_3 + x_1) + \lambda_3 (x_1 + x_2) = 0,$$

ce qui s'écrit encore :

$$(\lambda_2 + \lambda_3)\ x_1 + (\lambda_3 + \lambda_1)\ x_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\ x_3 = 0.$$

Comme (x_1, x_2, x_3) est libre on en déduit :

$$\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_3 + \lambda_1 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

Par somme de ces trois égalités, on obtient :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

Par différence avec chacune des premières égalités, on en déduit :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Par suite, $(x_2 + x_3\ ,\ x_3 + x_1, x_1 + x_2)$ est une famille libre.

20.2 La famille donnée n'est pas libre car :

$$y_1 + y_3 = y_2 + y_4 \quad \text{ou encore} \quad y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 0.$$

20.3 Puisque G et H sont inclus dans $G + H$, on a :

$$F \cap G \subset F \cap (G + H) \qquad \text{et} \qquad F \cap H \subset F \cap (G + H).$$

Comme $(F \cap G) + (F \cap H)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant les sous-espaces vectoriels $(F \cap G)$ et $(F \cap H)$, on en déduit :

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H).$$

Pour montrer que l'on ne peut pas faire mieux (égalité) donnons un contre-exemple. Il suffit de considérer dans $\mathbb{R}^2$ les sous-espaces vectoriels :

$$F = \operatorname{Vect}\big((1,1)\big), \quad G = \operatorname{Vect}\big((1,0)\big) \quad \text{et} \quad H = \operatorname{Vect}\big((0,1)\big).$$

On a $G + H = \operatorname{Vect}\big((0,1),(1,0)\big) = \mathbb{R}^2$ et donc $F \cap (G + H) = F$.

En revanche, on a $(F \cap G) = (F \cap H) = \{0\}$ et donc $(F \cap G) + (F \cap H) = \{0\}$.

20.4 Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \iff \left(x = -\frac{2}{3}z \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{3}z\right)$$

Ainsi, $(x, y, z) \in F$ si, et seulement s'il s'écrit sous la forme :

$$(x, y, z) = \frac{z}{3}(-2, -1, 3) \quad \text{avec} \quad z \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, on a $F = \operatorname{Vect}\{(-2, -1, 3)\}$, ce qui prouve que F est un sous-espace vectoriel de E ; comme le vecteur $(-2, -1, 3)$ est non nul, F est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(-2, -1, 3)$.

20.5 Montrons que $(f_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est libre.

Soit donc $(\lambda_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, f_k = 0$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Supposons $\lambda_k \neq 0$.

- Alors en divisant la relation précédente par λ_k, on en déduit que f_k est combinaison linéaire des $n-1$ autres fonctions.
- Comme $f_1, \ldots, f_{k-1}, f_{k+1}, f_n$ sont toutes dérivables en k, il s'ensuit, par combinaison linéaire, que f_k est aussi dérivable en k, ce qui est faux.

Par suite, on a $\lambda_k = 0$ et, comme k est quelconque, cela prouve que la famille $(f_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est libre.

20.6 Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$. Montrons que les scalaires λ_1, λ_2 et λ_3 sont nuls. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\lambda_1 f_1(x,y,z) + \lambda_2 f_2(x,y,z) + \lambda_3 f_3(x,y,z) = 0. \qquad (*)$$

- Comme $f_1(0,1,-1) = f_2(0,1,-1) = 0$ et $f_2(0,1,-1) = 1$, en appliquant la relation $(*)$ avec $(x,y,z) = (0,1,-1)$, on obtient $\lambda_3 = 0$.
- En appliquant alors $(*)$ avec $(2,1,1)$, on obtient $\lambda_2 = 0$.
- Comme f_1 n'est pas l'application nulle, on en déduit $\lambda_1 = 0$.

Par suite, la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

20.7 Soit F l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}_4[X]$ tels que $P(a) = P(b) = 0$. Les complexes a et b étant distincts, F est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}_4[X]$ divisibles par $(X-a)(X-b)$. Comme le degré d'un tel polynôme est au plus 4, on a :

$$F = \left\{(X-a)(X-b)(\alpha + \beta X + \gamma X^2)\,;\ (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{C}^3\right\}.$$

et donc :

$$F = \left\{\alpha(X-a)(X-b) + \beta(X-a)(X-b)X + \gamma(X-a)(X-b)X^2\,;\ (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{C}^3\right\}$$

ou encore :

$$F = \mathrm{Vect}\Big((X-a)(X-b), (X-a)(X-b)X, (X-a)(X-b)X^2\Big).$$

Par conséquent :

- L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_4[X]$.
- Comme la famille $\big((X-a)(X-b), (X-a)(X-b)X, (X-a)(X-b)X^2\big)$ est libre, car échelonnée en degré (*cf.* exercice 10 de la page 1044), c'est une base de F.

20.8 • En utilisant la formule de Moivre, on peut justifier que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la fonction v_k est combinaison linéaire des fonctions $u_0,\dots,u_k$. Par suite :

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad v_k \in A_n$$

et donc $B_n \subset A_n$.

• En utilisant les formules d'Euler, on peut justifier que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la fonction u_k est combinaison linéaire des fonctions $v_0,\dots,v_k$. Par suite :

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad u_k \in B_n$$

et donc $A_n \subset B_n$.

On en déduit l'égalité des deux sous-espaces vectoriels.

20.9 Soit H_n la propriété à montrer. Prouvons-la récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$.

• Le résultat est vrai si $n = 1$, puisque la fonction sin est non nulle.

• Soit $n \geqslant 2$; supposons H_{n-1} vraie et montrons H_n.
Considérons n réels λ_1, λ_2, ..., λ_n, tels que :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0. \qquad (i)$$

En dérivant deux fois cette égalité de fonctions, on obtient :

$$-\lambda_1 f_1 - 4\,\lambda_2 f_2 + \cdots - n^2\lambda_n f_n = 0. \qquad (ii)$$

En multipliant (i) par n^2 et en l'additionnant à (ii), on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - k^2)\, f_k = 0.$$

L'hypothèse de récurrence H_{n-1} nous donne alors :

$$\forall k \in \{1,\dots,n-1\} \quad (n^2-k^2)\lambda_k = 0.$$

Comme $n^2 - k^2 \neq 0$, on en déduit :

$$\forall k \in \{1,\dots,n-1\} \quad \lambda_k = 0.$$

En reportant dans la relation (i), on a alors $\lambda_n f_n = 0$, ce qui conduit à $\lambda_n = 0$ puisque f_n n'est pas la fonction nulle. Ainsi H_n est vraie, ce qui termine la démonstration par récurrence.

20.10 Si $E = \{0\}$, le résultat est évident. Supposons donc $E \neq \{0\}$.

Fixons nous un vecteur non nul x_0 de E. Par hypothèse, x_0 et $f(x_0)$ sont proportionnels et, comme $x_0 \neq 0$, on peut donc trouver $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tel que $f(x_0) = \lambda_0\, x_0$.

Montrons que, pour tout $x \in E$, on a $f(x) = \lambda_0\, x$. Soit donc x un vecteur de E.

• Si la famille (x, x_0) est liée, alors il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $x = \mu\, x_0$ et :

$$f(x) = \mu\, f(x_0) = \mu\,\lambda_0\, x_0 = \lambda_0\, x.$$

- Sinon, la famille (x_0, x) est libre et l'on a $x \neq 0$ ainsi que $x + x_0 \neq 0$.

  Étant donné que $x \neq 0$ et que x et $f(x)$ sont supposés proportionnels, il existe donc un scalaire λ de $\mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda\, x$.

  Il existe de même $\mu \in \mathbb{K}$ que $f(x_0 + x) = \mu\,(x_0 + x)$. On a alors :
  $$f(x_0 + x) = f(x_0) + f(x) = \lambda_0\, x_0 + \lambda\, x$$
  ainsi que :
  $$f(x_0 + x) = \mu\,(x_0 + x) = \mu\, x_0 + \mu\, x$$
  ce qui entraîne :
  $$\lambda_0\, x_0 + \lambda\, x = \mu\, x_0 + \mu\, x.$$
  Comme, la famille (x_0, x) est libre, on en déduit $\lambda_0 = \mu = \lambda$ et donc $f(x) = \lambda_0\, x$.

Finalement, f est donc une homothétie de rapport λ_0.

20.11
- Supposons que $p \circ f = f \circ p$.
  - ∗ Soit $x \in \operatorname{Im} p$; alors on a $p(x) = x$ et donc :
    $$p\big(f(x)\big) = (p \circ f)(x) = (f \circ p) = f\big(p(x)\big) = f(x),$$
    ce qui prouve que $f(x) \in \operatorname{Im} p$.
  - ∗ Soit $x \in \operatorname{Ker} p$; alors on a : $p\big(f(x)\big) = f\big(p(x)\big) = f(0) = 0$ et donc $f(x) \in \operatorname{Ker} p$.

  Ainsi les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f.
- Supposons $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ stables par f.
  - ∗ Soit $x \in \operatorname{Ker} p$. On a alors $f(x) \in \operatorname{Ker} p$ et donc $p\big(f(x)\big) = 0 = f(0) = f\big(p(x)\big)$.
  - ∗ Soit $x \in \operatorname{Im} p$. Puisque x et $f(x)$ sont dans $\operatorname{Im} p$, on a :
    $$p(x) = x \quad \text{et} \quad p\big(f(x)\big) = f(x), \quad \text{et donc} \quad f\big(p(x)\big) = f(x) = p\big(f(x)\big).$$

  Par suite, les applications linéaires $f \circ p$ et $p \circ f$, qui coïncident sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, sont égales ; d'où le résultat.

20.12 Supposons (i).
- Soit $x \in \operatorname{Ker} p$. Alors $p(x) = 0$ et comme $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} p$, on a $(p \circ q)(x) = 0$. Ainsi $p \circ q(x) = p(x)$.
- Soit $x \in \operatorname{Im} p$. Alors $p(x) = x$. D'autre part, on peut décomposer x sous la forme $x = a + b$, avec $a \in \operatorname{Im} q$ et $b \in \operatorname{Ker} q$ puisque ce sont deux sous espaces supplémentaires. Ainsi $(p \circ q)(x) = (p \circ q)(a) = p(a)$ et $p(x) = p(a + b) = p(a)$ puisque $b \in \operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} p$.

Ainsi, $p \circ q$ et p coïncident sur deux sous espaces supplémentaires ; ces endomorphismes sont donc égaux. Par symétrie, on a donc aussi $q \circ p = q$.

Supposons (ii).
- Tout d'abord, p est un projecteur puisque :
  $$p \circ p = (p \circ q) \circ p = p \circ (q \circ p) = p \circ q = p.$$
  Par symétrie, q est aussi un projecteur.
- Il est clair que $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker}(p \circ q)$ et $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker}(q \circ p)$. Donc les égalités $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$ montrent que $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Ker} q$ sont inclus l'un dans l'autre, donc égaux. Ainsi, p et q sont deux projecteurs ayant même noyau.

Chapitre 21 : Dimension finie

I	**Dimension d'un espace vectoriel**		**1090**
	1	Espace vectoriel de dimension finie	1090
	2	Définition de la dimension	1092
	3	Caractérisation des bases en dimension finie	1094
	4	Sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie	1096
	5	Rang d'une famille finie de vecteurs	1096
II	**Relations entre les dimensions**		**1097**
	1	Produit d'espaces vectoriels	1097
	2	Sommes de sous-espaces vectoriels, base adaptée	1098
III	**Applications linéaires et dimension finie**		**1102**
	1	Dimension finie et isomorphismes	1102
	2	Rang d'une application linéaire, théorème du rang	1102
	3	Isomorphismes et endomorphismes en dimension finie	1104
	4	Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$	1106
IV	**Formes linéaires et hyperplans**		**1106**
	1	Expression d'une forme linéaire dans une base	1106
	2	Hyperplans vectoriels et dimension finie	1107
Démonstrations et solutions des exercices du cours			**1110**
Exercices			**1127**

Dimension finie 21

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes, n est un entier naturel et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I Dimension d'un espace vectoriel

1 Espace vectoriel de dimension finie

Définition 1

On dit que E est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de **dimension infinie**.

Exemples

1. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est de dimension finie, puisqu'il est engendré par $(1, i)$.
2. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie puisqu'il admet une base finie (sa base canonique, par exemple).
3. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ est également de dimension finie.
4. Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel réduit au vecteur nul est de dimension finie.
5. Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E quelconque, alors $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Remarque D'après le corollaire 8 de la page 1044, toute famille libre de E est finie et ne peut posséder strictement plus d'éléments qu'une famille génératrice.

p.1110 **Exercice 1** Montrer que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

Proposition 1

Soit $\mathbf{g}$ une famille génératrice finie de E. Toute sous-famille libre $\boldsymbol{\ell}$ de $\mathbf{g}$ peut, à l'aide d'éléments de $\mathbf{g}$, être complétée en une base de E.

Principe de démonstration. Considérer une sous-famille libre de $\mathbf{g}$ contenant $\boldsymbol{\ell}$ et de cardinal maximal, et montrer qu'elle est génératrice de E.

Démonstration page 1110

Théorème 2 (Théorème de la base extraite)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base de E.

Démonstration. Soit $\mathbf{g}$ une famille génératrice finie de E. En utilisant la proposition précédente, on peut compléter la famille vide (qui est une sous-famille de $\mathbf{g}$), en une base de E à l'aide d'éléments de $\mathbf{g}$; on obtient ainsi une base de E constituée d'éléments de $\mathbf{g}$. □

Corollaire 3

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie admet une base finie.

Théorème 4 (Théorème de la base incomplète)

Toute famille libre (finie) d'un espace vectoriel E de dimension finie peut être complétée en une base de E.

Démonstration. Soit $\boldsymbol{\ell}$ une famille libre (finie). Puisque E est de dimension finie, on dispose d'une famille génératrice finie $\mathbf{g}$. En adjoignant les éléments de $\boldsymbol{\ell}$ à ceux de $\mathbf{g}$, on obtient une sur-famille finie $\mathbf{g}'$, donc génératrice de E, et contenant $\boldsymbol{\ell}$. D'après la proposition 1 de la page précédente, on peut alors compléter $\boldsymbol{\ell}$ en une base de E. □

Exemple $\mathbb{R}_3[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, puisqu'il est engendré par la famille finie $\mathbf{g} = (1, X, X^2, X^3)$. Considérons $\boldsymbol{\ell} = \big((X-1), (X-1)^2\big)$. Cette famille est libre car les deux polynômes ne sont pas proportionnels.
Montrons comment compléter $\boldsymbol{\ell}$ en une base de $\mathbb{R}_3[X]$ à l'aide de vecteurs de $\mathbf{g}$.
En partant de $\boldsymbol{\ell}_0 = \boldsymbol{\ell}$, on va construire des sur-familles $\boldsymbol{\ell}_1$, $\boldsymbol{\ell}_2, \ldots$ en examinant successivement tous les vecteurs de $\mathbf{g}$ et en n'ajoutant X^k à $\boldsymbol{\ell}_i$ que s'il n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\boldsymbol{\ell}_i$.

- Le premier élément de $\mathbf{g}$, qui est le polynôme 1, n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $(X-1)$ et $(X-1)^2$ puisque toute combinaison linéaire de ces deux polynôme admet 1 pour racine.
  On complète donc la famille $\boldsymbol{\ell}$ en la famille (libre) $\boldsymbol{\ell}_1 = \big((X-1), (X-1)^2, 1\big)$.
- Comme $X = (X-1) + 1$, le deuxième vecteur de $\mathbf{g}$ est élément de $\operatorname{Vect}(\boldsymbol{\ell}_1)$; on ne l'ajoute donc pas à $\boldsymbol{\ell}_1$.
- Il est de même, inutile d'ajouter X^2 à $\boldsymbol{\ell}_1$, puisque :
$$X^2 = (X-1)^2 + 2(X-1) + 1.$$
- Pour des raisons de degré, on a évidemment $X^3 \notin \operatorname{Vect}(\boldsymbol{\ell}_1)$. On complète donc $\boldsymbol{\ell}_1$ en la famille $\boldsymbol{\ell}_2 = \big((X-1), (X-1)^2, 1, X^3\big)$ qui est libre.

Le processus s'arrête alors puisque l'on a épuisé tous les vecteurs de $\mathbf{g}$. La famille libre $\boldsymbol{\ell}_2$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ puisque tout élément de $\mathbf{g}$ appartient à $\operatorname{Vect}(\boldsymbol{\ell}_2)$. On peut remarquer que $\boldsymbol{\ell}_2$ contient quatre vecteurs comme la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Remarque Lors de l'utilisation de la méthode précédente, on pourra choisir judicieusement la famille $\mathbf{g}$ où l'on puise les vecteurs.

2 Définition de la dimension

Dans les exemples déjà rencontrés, lorsque nous avons exhibé plus d'une base d'un espace vectoriel donné, elles avaient toutes le même nombre d'éléments. Pour le justifier dans le cas général, on utilise le corollaire 8 de la page 1044 qui montre qu'une famille génératrice de E possède au moins autant d'éléments que toute famille libre de E.

Théorème 5

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les bases de E sont finies et ont le même nombre d'éléments n. Cet entier n est alors appelé **dimension de E sur $\mathbb{K}$**, ou plus simplement **dimension** de E.

Démonstration. Soit $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ deux bases de E. Comme $\mathbf{e}_1$ est libre et $\mathbf{e}_2$ génératrice de E, il y a au moins le même nombre d'éléments dans $\mathbf{e}_2$ que dans $\mathbf{e}_1$. Vu les rôles symétriques joués par ces deux bases, on a l'inégalité inverse et donc l'égalité. □

Notation

La dimension du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E se note $\dim E$ voire $\dim_{\mathbb{K}} E$.

Exemples

1. L'espace vectoriel $\mathbb{K}$ est de dimension 1 sur $\mathbb{K}$. Il admet pour base (1) et plus généralement toute famille formée d'un unique élément non nul.
2. L'espace vectoriel $\mathbb{C}$ est de dimension 2 sur $\mathbb{R}$; il admet pour base $(1, i)$. Mais, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 d'après l'exemple qui précède.

Point méthode

- Quand on a décrit une partie F d'un espace vectoriel E comme l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille $(e_1, \ldots, e_p) \in E^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, cela donne $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et prouve directement que F est un espace vectoriel de dimension finie inférieure ou égale à p.
- Dans le cas où la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre, on a $\dim F = p$ puisqu'alors $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F.

Exemple Dans $E = \mathbb{R}^4$, considérons le sous-espace vectoriel :

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

Un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ appartient à F si, et seulement s'il s'écrit :

$$x = (x_1, x_2, x_3, -x_1 - x_2 - x_3) = x_1\, f_1 + x_2\, f_2 + x_3\, f_3,$$

avec $f_1 = (1, 0, 0, -1)$, $f_2 = (0, 1, 0, -1)$ et $f_3 = (0, 0, 1, -1)$.

- Par conséquent, on a $F = \mathrm{Vect}\{f_1, f_2, f_3\}$.
- De plus, la famille (f_1, f_2, f_3) est libre puisque si $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ est telle que $x_1\, f_1 + x_2\, f_2 + x_3\, f_3 = 0$, alors le calcul ci-dessus montre $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Ainsi, les vecteurs f_1, f_2 et f_3 forment une base de F, et donc $\dim F = 3$.

p.1110

Exercice 2 Dans $E = \mathbb{R}^4$, considérons le sous-espace vectoriel :

$$F = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\big\}.$$

Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E et donner sa dimension.

p.1110

Exercice 3 On considère l'ensemble F :

$$F = \big\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = A\cos(x + \varphi)\big\}.$$

Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

p.1111

Exercice 4 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On munit E d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel par restriction à $\mathbb{R}$ de sa loi externe.

1. Montrer que l'on obtient ainsi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
2. En désignant par $\dim_{\mathbb{C}} E$ et $\dim_{\mathbb{R}} E$ leurs dimensions respectives, montrer :

$$\dim_{\mathbb{R}} E = 2 \dim_{\mathbb{C}} E.$$

Exemples de référence pouvant être utilisés tels quels

1. L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, puisque sa base canonique est constituée des vecteurs :

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

2. L'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$ sur $\mathbb{K}$, puisqu'il admet pour base (canonique) la famille $(X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

Au sujet des espaces vectoriels de dimension 0, 1 et 2

1. Rappelons que $\{0\} = \mathrm{Vect}(\varnothing)$, et que $\mathrm{card}\, \varnothing = 0$. Ainsi, l'espace vectoriel $\{0\}$ est de dimension 0. Dans un espace vectoriel E, le seul sous-espace vectoriel de dimension 0 est le sous-espace vectoriel réduit à $\{0\}$.

   Lorsque l'on considérera un espace vectoriel E de dimension finie $p \in \mathbb{N}$, muni d'une base $(e_1, \ldots, e_p)$, nous conviendrons, lorsque $p = 0$, que la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ désigne la base vide de l'espace vectoriel $\{0\}$.

2. Les espaces vectoriels de dimension 1 sont ceux admettant une base formée d'un vecteur (non nul) : ce sont donc les droites vectorielles.

3. Les espaces vectoriels de dimension 2 sont ceux admettant une base formée de deux vecteurs : ce sont donc les plans vectoriels.

Cardinal d'une famille génératrice, d'une famille libre

Proposition 6

Si E est un espace vectoriel de dimension n, alors :

- toute famille génératrice a au minimum n éléments,
- toute famille libre est finie, et a au maximum n éléments.

Démonstration page 1111

Par contraposée, on en déduit que si E est un espace vectoriel de dimension n et si $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille de p éléments de E, alors :

- si $p > n$, la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est liée ;
- si $p < n$, la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ n'est pas génératrice de E.

Exemple Trois vecteurs d'un même plan vectoriel forment donc une famille liée.

Proposition 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) E est de dimension infinie,

(ii) il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui est libre,

(iii) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une famille de n éléments de E qui est libre.

Principe de démonstration. Si E est de dimension infinie, on peut construire par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ répondant au problème. Démonstration page 1111

Exemple $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie puisque la famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.

p.1112 **Exercice 5** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Montrer que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est de dimension infinie.

Indication : utiliser des fonctions polynomiales.

3 Caractérisation des bases en dimension finie

Théorème 8

Soit $\mathbf{e}$ une famille d'éléments d'un espace vectoriel E de dimension n.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) La famille $\mathbf{e}$ est une base de E,

(ii) La famille $\mathbf{e}$ est libre et possède n éléments,

(iii) La famille $\mathbf{e}$ engendre E et possède n éléments.

Principe de démonstration. Démonstration page 1112

Penser au théorème de la base incomplète et au théorème de la base extraite.

Point méthode

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel *dont on sait qu'il est de dimension* n. Pour montrer qu'une famille $\mathbf{e}$ est une base de E, on vérifie le plus souvent que $\mathbf{e}$ est une famille libre de n éléments de E.

Remarque On peut aussi démontrer que $\mathbf{e}$ est une famille génératrice de E possédant n éléments, mais c'est beaucoup moins fréquent.

Exemples

1. Si E est un plan vectoriel, alors toute famille libre formée de deux vecteurs non colinéaires est une base de E.
2. Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$, considérons $n+1$ polynômes P_0, P_1, ..., P_n tels que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on ait $\deg P_k = k$.
   - Il est facile de prouver que cette famille, échelonnée en degré, est libre (voir éventuellement l'exercice page 10 de la page 1044).
   - Comme $\dim K_n[X] = n+1$, on en déduit immédiatement que cette famille de $n+1$ éléments de $\mathbb{K}_n[X]$ en est une base (on pourra comparer avec la solution de l'exercice 2 de la page 1040 du chapitre 20).

p.1112 **Exercice 6** Pour $a \in \mathbb{K}$, on considère la famille :

$$\Big(1, (X-a), (X-a)^2, (X-a)^3, \ldots, (X-a)^n\Big).$$

1. Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. En déduire une nouvelle démonstration de la formule de Taylor polynomiale.

Reformulation de certains résultats d'analyse grâce à la dimension

Exemple Soit a une application continue sur un intervalle I. Si l'on désigne par A une primitive de la fonction continue a sur l'intervalle I et si l'on pose :

$$y_0 : x \mapsto \exp\big(A(x)\big)$$

alors, on sait depuis le chapitre 5 que l'équation différentielle homogène :

$$y' - a(x)y = 0.$$

a pour ensemble de solutions $S = \{k\,y_0\,;\ k \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\big(y_0\big)$.
L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est donc la droite vectorielle (sous-espace vectoriel de dimension 1) engendrée par la fonction non nulle y_0.

p.1113 **Exercice 7** Soit l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants $y'' + a\,y' + b\,y = 0$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Que peut-on dire, en terme de dimension, de l'ensemble de ses solutions réelles ?

4 Sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie

p.1113 **Exercice 8** Soit E un espace vectoriel de dimension finie dont on connaît une base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$. Si F est un sous-espace de E non réduit à $\{0\}$, justifier qu'il n'est pas toujours possible d'extraire de $\mathbf{e}$ une base de F.

Théorème 9

Si E est de dimension n, alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie $p \leqslant n$. De plus, F est égal à E si, et seulement si, $p = n$.

Principe de démonstration. Considérer une famille libre de F de cardinal maximal et montrer que tout vecteur de F est combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

Démonstration page 1113

p.1113 **Exercice 9** Que penser de la démonstration suivante du début du théorème 9 ? « Toute base de F est une famille libre de E donc possède au maximum n éléments, ce qui prouve que la dimension de F est inférieure ou égale à celle de E. »

Point méthode

Pour prouver que deux espaces vectoriels de dimensions finies sont égaux, il suffit de montrer une inclusion et l'égalité des dimensions.

Exemple Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, montrons l'égalité des sous-espaces vectoriels :

$$F = \mathrm{Vect}\{(1,1,-2),(-2,1,1)\} \quad \text{et} \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}.$$

- Les vecteurs $(1,1,-2)$ et $(-2,1,1)$ appartenant évidemment à G, le sous-espace vectoriel F qu'ils engendrent est donc inclus dans G.
- Comme les vecteurs $(1,1,-2)$ et $(-2,1,1)$ ne sont pas proportionnels, ils forment une base du sous-espace vectoriel F qu'ils engendrent, et donc $\dim F = 2$.
- Comme $F \subset G \subset \mathbb{R}^3$, on a $\dim F \leqslant \dim G \leqslant \dim \mathbb{R}^3$ et donc $2 \leqslant \dim G \leqslant 3$. Ainsi, le nombre entier $\dim G$ vaut 2 ou 3. Si l'on avait $\dim G = 3$, alors on aurait $\dim G = \dim \mathbb{R}^3$ donc $G = \mathbb{R}^3$, ce qui est absurde puisque $(1,1,1) \notin G$. Par suite, on a $\dim F = \dim G = 2$, et donc $F = G$ puisque $F \subset G$.

p.1113 **Exercice 10** Montrer que $\mathbb{K}$ n'a que deux sous-espaces vectoriels.

5 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 2

Soit $\mathbf{x}$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle **rang de x** la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathbf{x}$. On le note $\mathrm{rg}(\mathbf{x})$ ou $\mathrm{rg}\,\mathbf{x}$.

Propriétés Soit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. Comme la famille $\mathbf{x}$ est génératrice de l'espace vectoriel $\operatorname{Vect}(\mathbf{x})$, on peut en extraire une base de $\operatorname{Vect}(\mathbf{x})$. Par suite, on a $\operatorname{rg}(\mathbf{x}) \leqslant n$, avec égalité si, et seulement si, la famille $\mathbf{x}$ est libre.
2. Supposons E de dimension finie. Comme l'ensemble $\operatorname{Vect}\mathbf{x}$ est un sous-espace vectoriel de E, on a $\operatorname{rg}\mathbf{x} \leqslant \dim E$, avec égalité si, et seulement si, la famille $\mathbf{x}$ est génératrice de E.
3. Si $\mathbf{x}$ contient r vecteurs linéairement indépendants, alors on a $\operatorname{rg}\mathbf{x} \geqslant r$, avec égalité si, et seulement si, ces vecteurs engendrent $\operatorname{Vect}\mathbf{x}$, c'est-à-dire si, et seulement si, tout élément de la famille $\mathbf{x}$ est combinaison linéaire de ces r vecteurs.

Exemple Calculons le rang de la famille $\big((1,2,3),(3,2,1),(1,1,1)\big)$ dans $\mathbb{R}^3$.
Comme $(1,2,3)+(3,2,1) = 4.(1,1,1)$, on en déduit que :

$$\operatorname{Vect}\big((1,2,3),(3,2,1),(1,1,1)\big) = \operatorname{Vect}\big((1,2,3),(3,2,1)\big)$$

Les vecteurs $(1,2,3)$ et $(3,2,1)$ n'étant pas proportionnels, on a alors :

$$\dim\big(\operatorname{Vect}\big((1,2,3),(3,2,1)\big)\big) = 2,$$

et le rang de la famille initiale vaut aussi 2.

II Relations entre les dimensions

1 Produit d'espaces vectoriels

Proposition 10

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, alors $E \times F$ est de dimension finie et :

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

Principe de démonstration. Prendre $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ base de E et $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ base de F, puis montrer que $\mathbf{g} = \big((e_1,0),\dots,(e_n,0),(0,f_1),\dots,(0,f_p)\big)$ est une base de $E \times F$.

Démonstration page 1114

Exemple L'ensemble $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Cet exemple anodin permet, en cas de doute (dans les jours de stress), de trancher entre $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$ et $\dim(E \times F) = \dim E \times \dim F$.

La démonstration qui précède s'adapte au cas de plusieurs espaces vectoriels :

Proposition 11

Soit un entier $p \geqslant 2$. Si $E_1, \dots, E_p$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, alors $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ est de dimension finie, et l'on a :

$$\dim(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = \dim E_1 + \dim E_2 + \cdots + \dim E_p.$$

Principe de démonstration. Même démarche que pour la proposition précédente. Pour simplifier, on peut se limiter au cas de trois espaces vectoriels.

Démonstration page 1114

Corollaire 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'espace vectoriel E^p est de dimension finie, et l'on a $\dim E^p = p \dim E$.

Exemple On retrouve ainsi que $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

2 Sommes de sous-espaces vectoriels, base adaptée

Base adaptée à une somme directe

Proposition 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit $p \in [\![0, n]\!]$.

1. Soit $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ; de plus $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E_1, et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est une base de E_2.
2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base de F et $(g_1, \ldots, g_q)$ une base de G, alors la famille $(f_1 \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une base de E.

   Une telle base est dite **adaptée** à la décomposition $E = F \oplus G$.

Principe de démonstration.

1. Montrer $E = E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ en utilisant que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base.
2. Montrer que $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est libre et génératrice. Démonstration page 1115

Point méthode

- En « réunissant » les bases de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, on obtient une base de E.
- En « séparant » en deux une base de E, on obtient des bases de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Existence d'un supplémentaire

Proposition 14

Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

Principe de démonstration. Compléter une base de F en une base de E et considérer le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs que l'on a ajoutés. Démonstration page 1116

Définition 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. On appelle **base de E adaptée à F** toute base de E dont l'une des sous-familles est une base de F.

Remarque La démonstration de la proposition précédente montre si F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie E, alors il existe une base de E adaptée à F.

Exemple Dans l'exercice 2 de la page 1093, on a considéré :

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{IR}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}.$$

et montré que c'est un sous-espace vectoriel de $E = \mathrm{IR}^4$; c'est le plan vectoriel engendré par les deux vecteurs non proportionnels $f_1 = (1, -1, 0, 0)$ et $f_2 = (0, 0, -1, 1)$.
Complétons cette famille libre en une base de E, à partir de la base canonique de IR^4.
Grâce à la présence de nombreux 0 dans les composantes :

- on vérifie facilement que le vecteur $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs f_1 et f_2 ; donc la famille (f_1, f_2, e_1) est libre;
- on peut aussi justifier que le vecteur $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ n'est pas combinaison linéaire des trois vecteurs f_1, f_2 et e_1 ; ainsi, la famille (f_1, f_2, e_1, e_4) est libre.

Comme $\dim E = 4$, cette famille est une base de E ; de plus elle est adaptée à F, puisque la famille (f_1, f_2) est une base de F.

Dimension d'une somme directe, d'une somme

Proposition 15

Soit E un IK-espace vectoriel de dimension finie ainsi que F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Alors on a :

$$\dim E = \dim F + \dim G.$$

Principe de démonstration. Conséquence de la proposition 13 de la page ci-contre.

Démonstration page 1116

Remarque On aurait aussi pu dire : si $E = F \oplus G$ et si F et G sont de dimension finie, alors E est de dimension finie et $\dim E = \dim F + \dim G$.

Exemple Soit E un espace vectoriel de dimension n. Par définition, un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si, et seulement s'il possède un supplémentaire de dimension 1. Ainsi, H est un hyperplan si, et seulement si, $\dim H = n - 1$. On retrouvera ce résultat à la proposition 31 de la page 1107.

Proposition 16 (Formule de Grassmann)

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels, de dimensions finies, d'un IK-espace vectoriel E, alors on a :

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G.$$

Principe de démonstration. Prendre $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $F \cap G$ puis la compléter en une base $(e_1, \ldots, e_p, u_1, \ldots, u_r)$ de F, ainsi qu'en une base $(e_1, \ldots, e_p, v_1, \ldots, v_s)$ de G. Montrer alors que $(e_1, \ldots, e_p, u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s)$ est une base de $F + G$.

Démonstration page 1116

Exemple Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère :

$$E_1 = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0\big\}$$

$$E_2 = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 + x_4 = 0\big\}.$$

- Le sous-espace vectoriel E_1 est un hyperplan en tant que noyau de la forme linéaire non nulle $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 + x_2$. Par suite, il est de dimension 3 (*cf.* exemple de la page 1099). On a de même $\dim E_2 = 3$.
- Puisque E_2 n'est pas inclus dans E_1, le sous-espace vectoriel $E_1 + E_2$ contient strictement E_1. On a donc $\dim(E_1 + E_2) > \dim E_1$. Ainsi, $\dim(E_1 + E_2) = 4$, donc $E_1 + E_2 = E$.
- En utilisant la formule de Grassmann, on obtient alors $\dim(E_1 \cap E_2) = 2$.

On retrouve ainsi (sans exhiber de base) que le sous-espace vectoriel :

$$E_1 \cap E_2 = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\big\},$$

vu dans l'exercice 2 de la page 1093, est un plan vectoriel.

p.1117 **Exercice 11** Montrer qu'en dimension 3, deux plans vectoriels ont toujours un vecteur non nul en commun. Que peut-on dire plus précisément de leur intersection ?

Corollaire 17

Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. On a alors $\dim(E_1 + E_2) \leqslant \dim E_1 + \dim E_2$;
2. De plus, E_1 et E_2 sont en somme directe si, et seulement si :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$

Démonstration page 1117

Proposition 18

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, ainsi que F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = F \oplus G$;

(ii) $F \cap G = \{0\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$;

(iii) $F + G = E$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.

Principe de démonstration. Utiliser la formule de Grassmann. Démonstration page 1118

Point méthode

Lorsque E est un espace vectoriel de dimension finie et que l'on a des informations sur $\dim E$, $\dim F$ et $\dim G$, alors, pour justifier $E = F \oplus G$, on utilise le plus souvent (ii) mais aussi parfois (iii).

Exemple On a $\mathbb{K}^2 = \mathrm{Vect}\{(1,0)\} \oplus \mathrm{Vect}\{(1,1)\}$ car :

- ces deux sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$ sont de dimension 1, et donc la somme de leurs dimensions est égale à celle de $\mathbb{K}^2$;
- ils sont en somme directe car les vecteurs $(1,0)$ et $(1,1)$ ne sont pas proportionnels.

Cas de plusieurs sous-espaces vectoriels

Proposition 19

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

1. Soit $\mathbf{e} = (e_1 \ldots, e_n)$ une base de E et $(n_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ une famille d'entiers naturels tels que $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_p = n$. Si pour $i \in [\![1,p]\!]$, on pose $E_i = \mathrm{Vect}\{e_{n_{i-1}+1}, e_{n_{i-1}+2}, \ldots, e_{n_i}\}$, alors les sous-espaces vectoriels E_1, E_2, …, E_p vérifient $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_i = E$.

2. Soit p sous-espaces vectoriels E_1, E_2, …, E_p vérifiant $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_i = E$.

   Si, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, la famille $\mathbf{e}^i = (e_1^i, e_2^i, \ldots, e_{d_i}^i)$ est une base de E_i avec donc $d_i = \dim E_i$, alors la famille :
   $$\mathbf{e} = (e_1^1, \ldots, e_{d_1}^1, e_1^2, \ldots, e_{d_2}^2, \ldots, e_1^p, \ldots, e_{d_p}^p)$$
   est une base de E.

Une telle base est dite **adaptée** à la décomposition $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_i$.

Démonstration page 1118

Remarque En particulier, on a $\dim\left(\bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{p} \dim(E_i)$.

Proposition 20

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ainsi que p sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_p$, tous de dimensions finies. Alors leur somme est de dimension finie, et l'on a :
$$\dim(E_1 + E_2 + \cdots + E_p) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$$
avec égalité si, et seulement si, la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe.

Démonstration page 1119

p.1119 **Exercice 12** Montrer qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est somme directe de plans vectoriels si, et seulement si, sa dimension est paire.

III Applications linéaires et dimension finie

1 Dimension finie et isomorphismes

Proposition 21

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si E est de dimension finie, alors F est isomorphe à E si, et seulement si, F est de dimension finie et $\dim F = \dim E$.

Principe de démonstration. L'image d'une base par un isomorphisme est une base.

Démonstration page 1119

p.1120

Exercice 13 Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. On considère E l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant la récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

1. Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ u & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$ est un isomorphisme.
2. En déduire que E est de dimension finie, et donner la dimension de E.

Corollaire 22

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Rappelons (*cf.* exercice 16 de la page 1051) que si $\mathbf{e}$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension n, alors l'application qui, à tout $x \in E$, fait correspondre ses composantes dans la base $\mathbf{e}$, est un isomorphisme de E sur $\mathbb{K}^n$.

2 Rang d'une application linéaire, théorème du rang

Rang d'une application linéaire

Définition 4

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels quelconques et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
On dit que u est de **rang fini**, lorsque son image $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie.
On appelle alors **rang** de u, noté $\operatorname{rg}(u)$ ou $\operatorname{rg} u$, la dimension de $\operatorname{Im} u$.

Remarques Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini, et l'on a $\operatorname{rg}(u) \leqslant \dim E$, avec égalité si, et seulement si, u est injective.
2. Si F est de dimension finie, alors u est de rang fini, et l'on a $\operatorname{rg}(u) \leqslant \dim F$, avec égalité si, et seulement si, u est surjective.

p.1120 **Exercice 14** Justifier les deux affirmations précédentes.

Composition d'applications linéaires et rang

Proposition 23

Soit E, F et G des espaces vectoriels, ainsi que $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.

- Si u est un isomorphisme et si v est de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini, et $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$.
- Si v est un isomorphisme et si u est de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini, et $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.

Principe de démonstration. Utiliser que $\operatorname{Im}(v \circ u) = v(\operatorname{Im} u)$. Démonstration page 1120

p.1120 **Exercice 15** Soit E, F et G trois espaces vectoriels ainsi que $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$ deux applications linéaires de rang fini. Montrer que $v \circ u$ est de rang fini et que :

$$\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg} v, \operatorname{rg} u).$$

Théorème du rang

Proposition 24

Soit E et F deux espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E_0 est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de E_0 sur $\operatorname{Im} u$.

Principe de démonstration. Utiliser l'application linéaire $v : \begin{array}{ccc} E_0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ x & \longmapsto & u(x). \end{array}$

Démonstration page 1121

Théorème 25 (Théorème du rang ou formule du rang)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u une application linéaire de E dans un espace vectoriel F. Alors u est de rang fini, et l'on a :

$$\dim E = \operatorname{rg} u + \dim(\operatorname{Ker} u).$$

Principe de démonstration. Utiliser un supplémentaire E_0 de $\operatorname{Ker} u$ dans E.

Démonstration page 1121

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons l'endomorphisme Δ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

- Il est évident que $\mathbb{R}_0[X] \subset \operatorname{Ker}\Delta$. Montrons l'inclusion réciproque.

  Soit donc $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta(P) = 0$. Alors on a $P(X+1) = P(X)$ et le polynôme $P(X) - P(0)$ possède tous les entiers pour racines.

  Par suite, il est nul et P est constant. Ainsi, on a $\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X]$.

- D'après la formule du rang, on a $\dim \operatorname{Im}\Delta = n$. Comme $\operatorname{Im}\Delta$ est évidemment incluse dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, qui est aussi de dimension n, on en déduit $\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

p.1121 **Exercice 16** Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire de $\mathbb{R}^5$ vers $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est une droite vectorielle.

p.1121 **Exercice 17** Soit E un espace vectoriel de dimension finie ainsi que E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. En considérant l'application :

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E_1 + E_2. \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2, \end{array}$$

retrouver la formule de Grassmann.

p.1121 **Exercice 18** Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, ainsi que $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. En appliquant la formule du rang à la restriction de v à $\operatorname{Im} u$, montrer que :

$$\operatorname{rg} v \circ u = \operatorname{rg} u - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v)$$

2. En déduire que $\operatorname{rg}(v \circ u) \geqslant \operatorname{rg} v + \operatorname{rg} u - \dim F$.
3. Montrer que $\dim\big(\operatorname{Ker}(v \circ u)\big) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Ker} u)$.

3 Isomorphismes et endomorphismes en dimension finie

Théorème 26

Étant donné deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F de *même dimension finie*, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est injective (ou encore $\operatorname{Ker} u = \{0\}$),

(ii) u est surjective (ou encore $\operatorname{Im} u = F$),

(iii) u est bijective (ou encore u est un isomorphisme de E sur F).

Principe de démonstration. Utiliser le théorème du rang. Démonstration page 1122

Point méthode

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels *dont on sait qu'ils ont même dimension finie*, pour démontrer que $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est un isomorphisme de E sur F, il suffit de prouver, au choix, soit que u est injectif, soit que u est surjectif. Le plus souvent on prouve que u est injectif.

Exemple Donnons une autre démonstration de la proposition 19 du chapitre 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $x_1,\ldots,x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ distincts deux à deux. Montrons que pour tout $(y_1,\ldots,\ y_n) \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad P(x_i) = y_i.$$

Pour cela, considérons l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ P & \longmapsto & \big(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)\big). \end{array}$

- L'application φ est clairement linéaire.
- Elle est injective : en effet, si $P \in \operatorname{Ker} \varphi$, alors P possède n racines distinctes et, comme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, on en déduit $P = 0$.
- Comme $\dim \mathbb{K}_{n-1}[X] = n = \dim \mathbb{K}^n$, l'application linéaire φ est donc bijective, ce qui équivaut à l'assertion que l'on voulait établir.

Corollaire 27

Si u est un *endomorphisme* d'un espace vectoriel *de dimension finie*, il est équivalent de dire que u est injectif, que u est surjectif ou que u est bijectif (ou encore que u est un automorphisme de E).

p.1122

Exercice 19 On considère sur $\mathbb{R}[X]$ les deux applications :

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & X\,P(X) \end{array} \qquad \text{et} \qquad v : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P'(X). \end{array}$$

S'agit-il d'endomorphismes ? injectifs ? surjectifs ? bijectifs ?

Attention Comme le prouve l'exercice précédent, lorsqu'un espace vectoriel E n'est pas de dimension finie :

- un endomorphisme de E peut être injectif sans être surjectif,
- un endomorphisme de E peut être surjectif sans être injectif.

Corollaire 28

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est inversible (ou encore u est un automorphisme de E) ;

(ii) u est inversible à gauche (*i.e.* il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$) ;

(iii) u est inversible à droite (*i.e.* il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_E$).

Principe de démonstration. Les relations $v \circ u = \mathrm{Id}_E$ et $u \circ v = \mathrm{Id}_E$ entraînent respectivement l'injectivité et la surjectivité de u.

Démonstration page 1122

4 Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$

p.1123

Exercice 20 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est un base de E, montrer que les applications $u_i : x \mapsto x e_i$ forment une base de $\mathcal{L}(\mathbb{K}, E)$. En déduire sa dimension.
2. Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E, montrer que la famille $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ des applications linéaires coordonnées (*cf.* la définition 17 de la page 1064) est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. En déduire la dimension de $\mathcal{L}(E,F)$.

Les résultats de cet exercice sont un cas particulier du théorème suivant.

Théorème 29

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimensions finies. Alors le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et l'on a :

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Principe de démonstration. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F, montrer que les applications $u_{i,j} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & e_i^*(x) f_j \end{array}$ forment une base de $\mathcal{L}(E,F)$.

Démonstration page 1124

Remarque On peut démontrer beaucoup plus simplement le résultat précédent en utilisant les matrices (*cf.* le corollaire 15 de la page 1148). L'exercice suivant en fournit aussi une démonstration plus théorique.

p.1125

Exercice 21 Si $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, montrer que l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & F^n \\ u & \longmapsto & \big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et retrouver la dimension de $\mathcal{L}(E,F)$.

IV Formes linéaires et hyperplans

1 Expression d'une forme linéaire dans une base

Dans cette partie, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Rappels L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,K)$ se note E^*. Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E, alors on désigne par e_1^*, e_2^*, ..., e_n^* les formes linéaires coordonnées (*cf.* la définition 17 de la page 1064).

Proposition 30

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de l'espace vectoriel E. Une application φ de E dans $\mathbb{K}$ est une forme linéaire si, et seulement s'il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\, e_i^*$, ce qui équivaut à :

$$\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i \Longrightarrow \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i.$$

Démonstration. Conséquence de ce que $(e_i^*)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de E^*. □

Remarques

- Avec les notations de la proposition précédente, l'application $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\, e_i^*$ est aussi la seule forme linéaire telle que $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \varphi(e_i) = a_i$.
- L'écriture $\forall x \in E \quad \varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ est appelée **l'expression de la forme linéaire φ dans la base** $(e_1, \dots, e_n)$.
- Cette forme linéaire est nulle si, et seulement si, $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad a_i = 0$.

p.1125

Exercice 22 Soit f la forme linéaire : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2. \end{array}$

Donner l'expression de f dans la base $\big((1,1), (1,-1)\big)$.

Attention Comme le montre l'exercice précédent, l'expression d'une forme linéaire dans une base dépend effectivement de la base fixée.

2 Hyperplans vectoriels et dimension finie

Dimension

Proposition 31

Un sous-espace vectoriel H de l'espace vectoriel E est un hyperplan (vectoriel) de E si, et seulement si, $\dim H = \dim E - 1$.

Démonstration page 1125

Exemples

1. En dimension 2, les hyperplans sont les droites vectorielles.
2. En dimension 3, les hyperplans sont les sous-espaces vectoriels de dimension 2, et donc les plans vectoriels, d'où leur nom en dimension quelconque.

p.1125

Exercice 23 Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\dim F < \dim E$, si, et seulement si, F est inclus dans un hyperplan de E.

Équation

Dans toute cette partie E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, et pour tout $x \in E$, on note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ses coordonnées dans $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$.

Corollaire 32

Une partie H de E est un hyperplan si, et seulement si, il existe une famille $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ de scalaires non tous nuls telle que :

$$\forall x \in E \quad \Big(x \in H \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i = 0\Big).$$

Démonstration. Conséquence du fait qu'un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle et de l'expression d'une forme linéaire dans la base $\mathbf{e}$. □

Remarque On dit aussi que H admet dans $\mathbf{e}$ une équation du type :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i = 0 \quad \text{où } a_1, \ldots, a_n \text{ sont des scalaires non tous nuls.}$$

Exemple On peut maintenant relier les deux notions de plans utilisées en dimension 3

- On a déjà rencontré, dans cet ouvrage, le plan vectoriel : c'est un sous-espace vectoriel possédant une base de deux vecteurs.
- Mais, en dimension 3, un tel plan est aussi le noyau d'une forme linéaire non nulle, et possède donc une équation de la forme $a\,x + b\,y + c\,z = 0$ avec $(a, b, c) \neq 0$.

De la proposition 31 de la page 1066, on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 33

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$.

Les hyperplans, d'équations respectives :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i\, x_i = 0$$

sont égaux si, et seulement si, $\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad (b_1, \ldots, b_n) = \lambda\, (a_1, \ldots, a_n)$.

Démonstration page 1125

Remarque On dit aussi qu'en dimension finie, deux hyperplans sont égaux si, et seulement si, leurs équations sont proportionnelles.

Exemple Si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est telle que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad a\,x + b\,y + c\,z = 0 \Longrightarrow x + 2\,y + 3\,z = 0$$

alors on peut en déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $a = \lambda$, $b = 2\,\lambda$ et $c = 3\,\lambda$.

Intersection d'hyperplans

Proposition 34

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $H_1, \dots, H_m$ des hyperplans de E. Alors :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) \geqslant \dim E - m.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 1126

Utiliser le rang de u : $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ x & \longmapsto & \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)\big) \end{array}$ avec $H_i = \operatorname{Ker} \varphi_i$.

p.1126 **Exercice 24** Avec les notations précédentes, montrer que :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) = \dim E - m$$

si, et seulement si, la famille de formes linéaires $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est libre.

Indication : la famille de formes linéaires $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est liée si, et seulement si, l'image de l'application u ci-dessus est incluse dans un hyperplan.

Proposition 35

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - m$, alors il existe m hyperplans H_1, H_2, …, H_m de E tels que $F = \bigcap_{i=1}^{m} H_i$.

Principe de démonstration. Partir d'une base de F. Démonstration page 1126

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 En supposant que $\mathbb{K}[X]$ est de dimension finie et possède une famille génératrice $\mathbf{g}$ ayant n éléments, on aboutit à une contradiction puisque $(1, X, \ldots, X^n)$ est une famille libre ayant $n+1$ éléments.

Proposition 1 Soit $\mathbf{g} = (g_i)_{i \in I}$ une famille génératrice finie de E (donc avec I fini) ainsi que $\boldsymbol{\ell} = (g_i)_{i \in I'}$ une sous-famille libre de $\mathbf{g}$ (avec donc $I' \subset I$).

Soit $\mathcal{S} = \{\operatorname{card} J \mid I' \subset J \subset I \text{ et } (g_i)_{i \in J} \text{ libre}\}$.

- C'est une partie de $\mathbb{N}$, majorée par $\operatorname{card} I$ puisque si $J \subset I$, alors $\operatorname{card} J \leqslant \operatorname{card} I$.
- Comme $\boldsymbol{\ell} = (g_i)_{i \in I'}$ est libre, on a $\operatorname{card} I' \in \mathcal{S}$ et donc $\mathcal{S} \neq \varnothing$.

Par suite, $\mathcal{S}$ possède un plus grand élément r.

Il existe donc une partie J telle que $I' \subset J \subset I$, $\operatorname{card} J = r$ et $\mathbf{e} = (g_i)_{i \in J}$ libre.

Montrons que $\mathbf{e}$ est génératrice. Pour cela, il suffit, d'après la proposition 2 de la page 1039, de montrer que tout élément de $\mathbf{g}$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathbf{e}$.

Soit donc $i \in I$.

- Si $i \in J$, alors g_i est dans $\mathbf{e}$ et le résultat est évident.
- Sinon, posons $J' = J \cup \{i\}$. Comme $\operatorname{card} J' > r$ et $I' \subset J' \subset I$, la famille $(g_i)_{i \in J'}$ n'est pas libre. On en déduit donc, d'après la proposition 5 de la page 1043, que g_i est combinaison linéaire des éléments de $\mathbf{e}$.

Par suite $\mathbf{e}$ est une base dont $\boldsymbol{\ell}$ est une sous-famille.

Exercice 2 Les éléments de F sont les vecteurs de la forme $(x_1, -x_1, -x_4, x_4)$ et donc :

$$F = \operatorname{Vect}\{f_1, f_2\} \quad \text{avec} \quad f_1 = (1, -1, 0, 0) \quad \text{et} \quad f_2 = (0, 0, -1, 1).$$

Ainsi, F est donc bien un sous-espace vectoriel de E. De plus, la famille (f_1, f_2) est libre, car ses deux vecteurs ne sont pas proportionnels. Ainsi (f_1, f_2) est une base de F, et $\dim F = 2$. Le sous-espace vectoriel F est donc un plan vectoriel.

Exercice 3

- Soit $(A, \varphi) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $x \mapsto A\cos(x + \varphi)$ est combinaison linéaire des fonctions sin et cos puisque :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad A\cos(x + \varphi) = (A\cos\varphi)\cos x + (-A\sin\varphi)\sin x.$$
Ainsi, l'ensemble F est inclus dans $\operatorname{Vect}\{\cos, \sin\}$.
- Réciproquement, soit $f \in \operatorname{Vect}\{\cos, \sin\}$.
Il existe donc deux réels a et b tels que $f = a\,\cos + b\,\sin$.
  - $*$ Si $a = b = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = 0\cos(x + 0)$ donc $f \in F$.
  - $*$ Sinon, alors a ou b est non nul et on a montré au chapitre 1 (exercice 63 de la page 60) qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\,\cos x + b\,\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\,\cos(x - \theta).$$
En posant $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\varphi = -\theta$, on en déduit que f est égale à la fonction $x \mapsto A\cos(x + \varphi)$ et donc que $f \in F$.

  Par conséquent, on a $F = \operatorname{Vect}\{\sin, \cos\}$.

- On a déjà démontré (*cf.* exercice de la page 1041) que les fonctions sin et cos forment une famille libre. Par suite, la famille $(\sin, \cos)$ est une base de F, qui est donc de dimension finie égale à 2. L'ensemble F est donc un plan vectoriel.

Exercice 4

1. Posons $n = \dim_{\mathbb{C}} E$ et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.
   Soit $x \in E$. Il existe donc $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :
   $$x = \sum_{k=1}^{n} z_k\, e_k.$$
   Si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $x_k = \operatorname{Re} z_k$ et $y_k = \operatorname{Im} z_k$, alors :
   $$x = \sum_{k=1}^{n} (x_k + i\, y_k)\, e_k = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k + \sum_{k=1}^{n} y_k (i\ e_k)$$
   Par suite, $(e_1, \dots, e_n, i\, e_1, \dots, i\, e_n) \in E^{2n}$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E qui est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
2. Pour prouver le résultat demandé, il suffit de montrer que $(e_1, \dots, e_n, i\, e_1, \dots, i\, e_n)$ une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et donc qu'elle est libre.
   Soit donc $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que :
   $$0 = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k + \sum_{k=1}^{n} y_k (i\ e_k) = \sum_{k=1}^{n} (x_k + i\, y_k)\, e_k.$$
   Comme $(e_1, \dots, e_n)$ une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E, on en déduit :
   $$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad x_k + i\, y_k = 0 \quad \text{et donc} \quad \forall k \in [\![1, n]\!] \quad x_k = y_k = 0,$$
   ce qui termine la démonstration.

Proposition 6 D'après le corollaire 8 de la page 1044, toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie est finie, et le cardinal d'une famille libre est inférieur au cardinal de toute famille génératrice. Or une base est à la fois libre et génératrice, donc :

- toute famille génératrice a au moins autant d'éléments qu'une base, c'est-à-dire au moins n éléments,
- toute famille libre a au plus autant d'éléments qu'une base, c'est-à-dire n éléments.

Proposition 7

$(i) \Rightarrow (ii)$ Supposons E de dimension infinie et construisons une suite par récurrence.

- Puisque E n'est pas de dimension finie, il n'est pas réduit à $\{0\}$ et l'on peut y trouver un élément x_0 non nul. Ainsi (x_0) est libre.
- Supposons construite une famille libre $(x_0, \dots, x_k)$. Comme E n'est pas de dimension finie, ce n'est pas une famille génératrice de E. Il existe donc un $x_{k+1} \in E$ tel que $x_{k+1} \notin \operatorname{Vect}(x_0, \dots, x_k)$. Par suite, $(x_0, \dots, x_{k+1})$ est libre.

On construit ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ qui est libre puisque, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(x_0, \dots, x_k)$ est libre.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Supposons disposer d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ qui est libre. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(x_0, \dots, x_{n-1})$ est libre, ce qui prouve (iii).

$(iii) \Rightarrow (i)$ C'est la contraposée du corollaire 8 de la page 1044, puisqu'une famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie ne peut contenir strictement plus d'éléments que la dimension de l'espace.

Exercice 5 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $p_k : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^k. \end{array}$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(p_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est libre.

Soit donc n réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k p_k = 0$, ce qui donne :

$$\forall x \in I \quad \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x^k = 0.$$

Posons $P = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$. Comme I est un ensemble infini, le polynôme P admet une infinité de racines, et il est donc nul. Par suite, tous ses coefficients sont nuls, ce qui prouve que la famille $(p_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est libre.

Ainsi, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est de dimension infinie.

Théorème 8

$(i) \Rightarrow \big((ii)$ **et** $(iii)\big)$ Comme $\mathbf{e}$ est une base de E, elle contient n éléments, c'est une famille libre et elle engendre E.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Comme $\mathbf{e}$ est une famille libre à n éléments, on peut la compléter en une base $\mathbf{e}'$ de E, qui est donc une famille à n éléments. On n'a donc rien ajouté et $\mathbf{e} = \mathbf{e}'$ est une base de E.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Puisque $\mathbf{e}$ est une famille génératrice à n éléments, on peut en extraire une base $\mathbf{e}'$ de E, qui est donc aussi une famille à n éléments. Les familles $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ sont alors identiques, et la famille $\mathbf{e}$ est donc une base de E.

Exercice 6

1. La famille donnée est libre car elle est échelonnée en degré. Comme c'est une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$, de dimension $n+1$, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. D'après la question précédente, il existe $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ telle que :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, (X-a)^k.$$

Pour $j \in [\![0,n]\!]$, la dérivée j–ème du polynôme P est alors :

$$P^{(j)}(X) = \sum_{k=j}^{n} a_k \, k(k-1)\cdots(k-j+1)(X-a)^{k-j}.$$

En remplaçant X par a, on a $P^{(j)}(a) = a_j \times j!$ et donc :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}.$$

Exercice 7 Utilisons les résultats vus sur les équations différentielles (*cf.* page 269).

- L'ensemble S est inclus dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. L'équation étant homogène, la fonction nulle en est solution et toute combinaison linéaire de solutions est solution. Par suite, S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- On a exhibé deux solutions de cette de l'équation telles que toute solution soit combinaison linéaire de ces deux-là. Ainsi, on connaît une famille génératrice de S à deux éléments.
- Selon les cas, ces deux solutions sont de la forme :
  * $x \mapsto e^{r_1 x}$ et $x \mapsto e^{r_2 x}$, avec $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ et $r_1 \neq r_2$.
  * $x \mapsto e^{rx}$ et $x \mapsto x\, e^{rx}$, avec $r \in \mathbb{R}$,
  * $x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\beta\, x)$ et $x \mapsto e^{\alpha x} \sin(\beta\, x)$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

  Dans chacun des trois cas, on peut montrer que ces deux solutions ne sont pas proportionnelles. Ainsi, elles forment donc aussi une famille libre de S.

Par suite S est un espace vectoriel de dimension 2.

Exercice 8 Si l'on réussit à extraire de $\mathbf{e}$ une base de F, alors les vecteurs retenus doivent être des vecteurs de F. Or l'exemple :

$$E = \mathbb{R}^2 \text{ avec } e_1 = (1,0) \text{ et } e_2 = (0,1) \quad \text{et} \quad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$

montre qu'il est possible d'avoir une base de E sans vecteur de F. Ainsi, partant d'une base quelconque de E, rien ne dit que l'on peut en extraire une base de F.

Théorème 9

- Toute famille libre de F admet au plus n éléments. Il en existe donc une de cardinal maximal noté p. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une famille libre de F ayant p éléments.
- Pour tout élément x de F, la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p, x)$ possède $p+1$ éléments ; elle n'est donc pas libre d'après la définition de p. La proposition 5 de la page 1043 montre alors que le vecteur x est combinaison linéaire des vecteurs x_1, x_2, ..., x_p.

  Ainsi, tout vecteur x de F est combinaison linéaire des vecteurs x_1, x_2, ..., x_p. Par suite, la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est aussi génératrice de F ; il s'agit donc d'une base de F. Le sous-espace vectoriel F est donc de dimension finie $p \leqslant n$.
- Si $E = F$, alors leurs dimensions sont égales, et donc $n = p$.
- Réciproquement, supposons $n = p$. Une base $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de F est alors une famille libre de E possédant n vecteurs. Il s'agit donc d'une base de E, puisque E est de dimension n. Par suite, les espaces vectoriels E et F admettent $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ comme base commune et sont donc égaux.

Exercice 9 La démonstration est incorrecte, puisque l'on ne sait pas que F possède une base tant que l'on n'a pas démontré qu'il est de dimension finie. Le point non évident du résultat est justement de montrer que F est de dimension finie.

Exercice 10 Puisque $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1, ses sous-espaces sont de dimension 0 ou 1. Donc $\mathbb{K}$ n'a que deux sous-espaces vectoriels, car :

- $\{0\}$ est le seul sous-espace vectoriel de dimension 0 ;
- tout sous-espace vectoriel de dimension 1 inclus dans $\mathbb{K}$ (qui est aussi de dimension 1) est égal à $\mathbb{K}$.

Proposition 10 Posons $n = \dim E$ et $p = \dim F$. Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E et $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une base de F. Montrons que la famille :

$$\mathbf{g} = \big((e_1,0),(e_2,0),\dots,(e_n,0),(0,f_1),(0,f_2),\dots,(0,f_p)\big)$$

est une base de $E\times F$.

- Montrons que $\mathbf{g}$ engendre $E\times F$. Si $(x,y)\in E\times F$, alors les vecteurs x et y se décomposent dans les bases respectives $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{i=1}^{p} \mu_i\, f_i$$

  et donc :

$$\begin{aligned}(x,y) = (x,0)+(0,y) &= \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, e_i, 0\right) + \left(0, \sum_{i=1}^{p}\mu_i\, f_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,(e_i,0) + \sum_{i=1}^{p}\mu_i\,(0,f_i).\end{aligned}$$

  Donc $\mathbf{g}$ est une famille génératrice de $E\times F$.

- Montrons que $\mathbf{g}$ est libre. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p$ des scalaires tels que :

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(e_i,0) + \sum_{i=1}^{p}\mu_i(0,f_i) = 0. \qquad (*)$$

  Si l'on pose $x = \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\, e_i$ et $y = \sum\limits_{i=1}^{p}\mu_i\, f_i$, alors la relation $(*)$ s'écrit $(x,y) = (0,0)$, ce qui implique :

$$0 = x = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, e_i \qquad \text{et} \qquad 0 = y = \sum_{i=1}^{p}\mu_i\, f_i.$$

  Puisque les familles $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ sont libres, on en déduit :

$$\forall i\in[\![1,n]\!] \quad \lambda_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i\in[\![1,p]\!] \quad \mu_i = 0.$$

  Donc $\mathbf{g}$ est une famille libre.

Par suite, la famille $\mathbf{g}$ est une base de $E\times F$, qui est de dimension $n+p$.

Proposition 11 Par souci de simplicité, nous faisons la démonstration seulement lorsque $p=3$. Dans le cas général, elle est analogue.

Pour tout $k\in[\![1,3]\!]$, posons $n_k = \dim E_k$, et notons $(e_i^k)_{1\leqslant i\leqslant n_k}$ une base de E_k. Montrons que la famille :

$$\mathbf{g} = \big((e_1^1,0,0),\dots,(e_{n_1}^1,0,0),(0,e_1^2,0),\dots,(0,e_{n_2}^2,0),(0,0,e_1^3),\dots,(0,0,e_{n_3}^3)\big)$$

est une base de $E_1\times E_2\times E_3$.

- Soit (x_1,x_2,x_3) un élément de $E_1\times E_2\times E_3$. Pour tout entier $k\in[\![1,3]\!]$, le vecteur x_k se décompose dans la base $(e_i^k)_{1\leqslant i\leqslant n_k}$ sous la forme :

$$x_k = \sum_{i=1}^{n_k}\lambda_{i,k}\, e_i^k.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3) &= (x_1,0,0)+(0,x_2,0)+(0,0,x_3)\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n_1}\lambda_{i,1}\,e_i^1,0,0\right)+\left(0,\sum_{i=1}^{n_2}\lambda_{i,2}\,e_i^2,0\right)+\left(0,0,\sum_{i=1}^{n_3}\lambda_{i,3}\,e_i^3\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n_1}\lambda_{i,1}\,(e_i^1,0,0)+\sum_{i=1}^{n_2}\lambda_{i,2}\,(0,e_i^2,0)+\sum_{i=1}^{n_3}\lambda_{i,3}\,(0,0,e_i^3).\end{aligned}$$

Donc $\mathbf{g}$ est une famille génératrice de $E_1\times E_2\times E_3$.

- Montrons que $\mathbf{g}$ est libre. Soit $(\lambda_{i,k})_{1\leqslant i\leqslant n_k,1\leqslant k\leqslant 3}$ une famille de scalaires tels que :

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{n_k}\lambda_{i,k}e_i^k=0. \qquad (*)$$

Pour tout $k\in[\![1,3]\!]$, posons $x_k=\sum\limits_{i=1}^{n_k}\lambda_{i,k}e_i^k$. Alors la relation $(*)$ s'écrit :

$$(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)$$

ce qui implique :

$$\forall k\in[\![1,3]\!]\quad 0=x_k=\sum_{i=1}^{n_k}\lambda_i\,e_i^k.$$

Pour tout $k\in[\![1,3]\!]$, puisque la famille $(e_i^k)_{1\leqslant i\leqslant n_k}$ est libre, on en déduit :

$$\forall i\in[\![1,n_k]\!]\quad \lambda_{i,k}=0.$$

Donc $\mathbf{g}$ est une famille libre.

Par suite, la famille $\mathbf{g}$ est une base de $E_1\times E_2\times E_3$, qui est de dimension $n_1+n_2+n_3$.

Proposition 13

1. Les familles $(e_1,\dots,e_p)$ et $(e_{p+1},\dots,e_n)$, sous-familles d'une base, sont toutes deux libres et sont donc des bases des sous-espaces vectoriels de E qu'elles engendrent. Montrons que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E.
   - Soit $x\in E$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ la famille de ses composantes dans la base $(e_1,\dots,e_n)$.

     On a alors $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ie_i$. Posons $y=\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_ie_i$ et $z=\sum\limits_{i=p+1}^{n}\lambda_ie_i$.

     On a alors $x=y+z$, avec $y\in E_1$ et $z\in E_2$. On en déduit $E_1+E_2=E$.
   - Soit $x\in E_1\cap E_2$. Notons $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ ses composantes dans la base $(e_1,\dots,e_p)$ et $(\mu_{p+1},\dots,\mu_n)$ ses composantes dans la base $(e_{p+1},\dots,e_n)$. On a alors :

     $$x=\sum_{i=1}^{p}\lambda_ie_i,\quad x=\sum_{j=p+1}^{n}\mu_ie_i\quad\text{et donc}\quad\sum_{i=1}^{p}\lambda_ie_i=\sum_{j=p+1}^{n}\mu_ie_i.$$

     En posant $\lambda_i=-\mu_i$ pour tout $i\in[\![p+1,n]\!]$, on a alors $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ie_i=0$.

     Comme la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est libre, on en déduit que tous les λ_i sont nuls et donc $x=0$. Par suite, on a $E_1\cap E_2=\{0\}$.

   Ainsi, on a démontré $E=E_1\oplus E_2$.

2. Montrons que $\mathbf{e} = (f_1 \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une base de E.
   - Soit $x \in E$. Comme $E = F \oplus G$, il existe $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$. Alors y est combinaison linéaire des éléments de $(f_1, \ldots, f_p)$, et z de ceux de $(g_1, \ldots, g_q)$. Par suite x est combinaison linéaire des éléments de $\mathbf{e}$, qui est donc une famille génératrice de E.
   - Montrons que $\mathbf{e}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{K}^q$ tels que :

   $$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i + \sum_{i=1}^{q} \mu_i g_i = 0.$$

   Posons $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, f_i$ et $z = \sum_{i=1}^{q} \mu_i\, g_i$. On a alors $y+z = 0$, avec $y \in F$ et $z \in G$. Puisque F et G sont en somme directe, on a donc $y = 0$ et $z = 0$, c'est-à-dire :

   $$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{q} \mu_i g_i = 0.$$

   Chacune des familles $(f_1, \ldots, f_p)$ et $(g_1, \ldots, g_q)$ étant libre, on en déduit que tous les coefficients sont nuls. Ainsi la famille $\mathbf{e}$ est libre.

   Par suite, $\mathbf{e}$ est une base de E.

Proposition 14 Soit E de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

- On sait que F est de dimension finie. Posons $p = \dim F$ et considérons $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de F. C'est donc une famille libre de E.
- Complétons-la en une base $\mathbf{e}$ de E de la forme $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$. D'après le premier point de la proposition précédente, $G = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est un supplémentaire de F.

Proposition 15 On a vu que si $(f_1 \ldots, f_p)$ est une base de F et $(g_1, \ldots, g_q)$ une base de G, alors $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots g_q)$ est une base de E. On en déduit le résultat.

Proposition 16 Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base du sous-espace vectoriel $F \cap G$.

- C'est une famille libre de F (qui est dimension finie) ; complétons-la donc en une base de F à savoir $(e_1, \ldots, e_p, u_1, \ldots, u_r)$.
- De même, complétons-la en une base $(e_1, \ldots, e_p, v_1, \ldots, v_s)$ de G.

Montrons qu'alors la famille :

$$(e_1, \ldots, e_p, u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s)$$

est une base du sous-espace vectoriel $F + G$.

- Soit $x \in F+G$ avec donc $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y+z$. Comme y est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \ldots, e_p, u_1, \ldots, u_r$, et z des vecteurs $e_1, \ldots, e_p, v_1, \ldots, v_s$, il est immédiat que x est combinaison linéaire des vecteurs de la famille :

  $$(e_1, \ldots, e_p, u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s).$$

  Par suite, cette famille est génératrice de $F + G$.

- Montrons que la famille $(e_1, \ldots, e_p, u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s)$ est libre.
  Soit donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_r, \nu_1, \ldots, \nu_s) \in \mathbb{K}^{p+r+s}$ tel que :
  $$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k + \sum_{k=1}^{r} \mu_k u_k + \sum_{k=1}^{s} \nu_k v_k = 0,$$
  ce qui s'écrit aussi :
  $$\underbrace{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k + \sum_{k=1}^{r} \mu_k u_k}_{\text{dans } F} = -\underbrace{\sum_{k=1}^{s} \nu_k v_k}_{\text{dans } G}. \qquad (*)$$
  Ainsi, chacun des deux membres de l'égalité $(*)$ appartient donc à $F \cap G$; par suite, il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :
  $$\sum_{k=1}^{s} \nu_k v_k = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k$$
  Comme la famille $(e_1, \ldots, e_p, v_1, \ldots, v_s)$ est libre, on en déduit :
  $$\forall k \in [\![1, s]\!] \quad \nu_k = 0.$$
  La relation $(*)$ devient alors :
  $$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k + \sum_{k=1}^{r} \mu_k u_k = 0$$
  et, comme $(e_1, \ldots, e_p, u_1, \ldots, u_r)$ est libre, on en déduit que tous les coefficients sont nuls. Ainsi, la famille $(e_1, \ldots, e_p, u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s)$ est donc libre.

Cette famille est donc une base de $F + G$, ce qui entraîne $\dim(F+G) = p + r + s$.

Comme $\dim(F \cap G) = p$, $\dim F = p + r$ et $\dim G = p + s$, on en déduit :
$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Exercice 11 Soit E de dimension 3 ainsi que P_1 et P_2 deux plans vectoriels de E.

Comme $P_1 + P_2 \subset E$, on a $\dim(P_1 + P_2) \leqslant 3$, donc :
$$\dim(P_1 \cap P_2) = \dim P_1 + \dim P_2 - \dim(P_1 + P_2) \geqslant 2 + 2 - 3 = 1 \qquad (*)$$
ce qui prouve que $P_1 \cap P_2$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Plus précisément :

- si $P_1 = P_2$, alors $P_1 \cap P_2 = P_1 = P_2$ est un plan,
- sinon, P_1 est inclus strictement dans $P_1 + P_2$, donc $\dim(P_1 + P_2) > \dim P_1$, ce qui prouve que $P_1 + P_2$ est de dimension 3. L'inégalité de $(*)$ est alors une égalité, ce qui donne $\dim(P_1 \cap P_2) = 1$. Donc $P_1 \cap P_2$ est une droite.

Corollaire 17 E_1 et E_2 étant de dimension finie, on a :
$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).$$

1. Le premier résultat vient de $\dim(E_1 \cap E_2) \geqslant 0$.
2. Le second vient de ce que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ si, et seulement si, $\dim E_1 \cap E_2 = 0$.

Proposition 18

- L'assertion (i) entraîne immédiatement (ii) et (iii) d'après ce que l'on a vu sur les dimensions de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
- Supposons (ii) et donc $F \cap G = \{0\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$; alors on a :
$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = \dim E.$$
Comme $F+G$ est un sous-espace de E, on en déduit $F+G=E$ et donc (i).
- Supposons (iii) et donc $F+G=E$ et $\dim E = \dim F + \dim G$; alors on a :
$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G) = 0$$
et donc $F \cap G = \{0\}$, ce qui entraîne (i).

Proposition 19

1. - Tout vecteur $x \in E$ se décompose sur la base $\mathbf{e}$. Par définition des E_i, Une telle décomposition montre directement que x est élément de $\sum\limits_{i=1}^{p} E_i$.
   - Montrons que la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe.

     Considérons donc $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E_1 \times \ldots \times E_p$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{p} x_i = 0$.

     Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on a $x_i \in E_i$, et il existe donc des scalaires $\alpha_{n_{i-1}+1}, \ldots, \alpha_{n_i}$ tels que $x_i = \sum\limits_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} \alpha_k e_k$. La relation $\sum\limits_{i=1}^{p} x_i = 0$ donne alors :
$$0 = \sum_{i=1}^{p} \Bigg(\sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} \alpha_k e_k \Bigg) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k.$$
     Puisque la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est libre, on en déduit que tous les coefficients α_k sont nuls, et donc que tous les x_i sont nuls.
     Ainsi, la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est bien directe.

2. - Comme $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_i = E$, tout vecteur $x \in E$ peut se décomposer en $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i$ avec $x_i \in E_i$. Comme x_i peut alors se décomposer sur la base $\mathbf{e}_i$, on en déduit que $\mathbf{e}$ est une famille génératrice de E.
   - Montrons que $\mathbf{e}$ est libre. Soit donc :
$$\alpha = \Big(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_{d_1}^1, \alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_{d_2}^2, \ldots, \alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots, \alpha_{d_p}^p\Big)$$
     une famille de scalaires tels que : $\sum\limits_{i=1}^{p} \sum\limits_{j=1}^{d_i} \alpha_j^i e_j^i = 0$.

     Si, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on pose $x_i = \sum\limits_{j=1}^{d_i} \alpha_j^i e_j^i$, alors $x_i \in E_i$ et $\sum\limits_{i=1}^{p} x_i = 0$.

     Comme la somme $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_i$ est directe, on a donc :
$$\forall i \in [\![1,p]\!] \quad 0 = x_i = \sum_{j=1}^{d_i} \alpha_j^i e_j^i = 0$$
     d'où la nullité de tous les coefficients de la famille $(\alpha_j^i)_{1 \leqslant j \leqslant d_i}$, puisque la famille $(e_1^i, e_2^i, \ldots, e_{d_i}^i)$ est une base de E_i.

     Par suite, tous les α_i^j sont nuls et $\mathbf{e}$ est donc libre.

Proposition 20

- La première inégalité se déduit par récurrence du premier résultat du corollaire 17 de la page 1100, en utilisant l'associativité de la somme de sous-espaces vectoriels.
- D'après la démonstration de la proposition précédente, si la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe, alors on a $\dim\Big(\sum\limits_{i=1}^{p} E_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{p} \dim E_i$.
- Supposons que la somme $E_1 + \cdots + E_p$ ne soit pas directe. Alors, il existe une famille $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ non tous nuls tels que $\sum\limits_{i=1}^{p} x_i = 0$.

  Par suite, avec les notations de la proposition précédente, la famille **e** n'est pas une famille libre et donc $\operatorname{rg}\mathbf{e} < \sum\limits_{i=1}^{p} \dim E_i$.

  Comme cette famille **e** reste une famille génératrice de $\sum\limits_{i=1}^{p} E_i$, on en déduit

$$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} E_i\Big) < \sum_{i=1}^{p} \dim E_i.$$

Exercice 12 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

- Supposons-le somme directe de plans vectoriels. Il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$$

  avec $\dim F_i = 2$ pour tout i. On a alors :

$$\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim F_i = 2p$$

  et la dimension de E est paire et non nulle.
- Réciproquement, supposons E de dimension finie paire. L'espace vectoriel E possède donc une base de la forme $(e_1, e_2, \ldots, e_{2p})$ avec $p \in \mathbb{N}$. Si, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on pose $F_i = \operatorname{Vect}\{e_{2i-1}, e_{2i}\}$, alors les sous-espaces vectoriels F_i sont des plans vectoriels et $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$. De plus, la base $(e_1, e_2, \ldots, e_{2p})$ est adaptée aux sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$.

Proposition 21

- S'il existe un isomorphisme u de E dans F et si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E, alors d'après la proposition 15 de la page 1050, la famille $\big(u(e_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de F, donc F est de dimension finie n.
- Supposons $\dim E = \dim F = n$. Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E et $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de F. Il existe une (unique) application linéaire u de E dans F telle que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad u(e_i) = f_i.$$

  Comme $\big(u(e_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de F, d'après la proposition 15 de la page 1050, l'application linéaire u est bijective, et c'est donc est un isomorphisme de E dans F.

Exercice 13

1. Montrons que l'application φ est linéaire. Ses ensembles de départ et d'arrivée sont bien des espaces vectoriels. De plus, pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et tout $(u,v)\in E^2$, on a $(\alpha u+\beta v)_0=\alpha u_0+\beta v_0$ et $(\alpha u+\beta v)_1=\alpha u_1+\beta v_1$, et donc :
$$\varphi(\alpha u+\beta v)=\alpha\varphi(u)+\beta\varphi(v).$$
Comme une suite u de E est caractérisée par ses deux premiers termes u_0 et u_1, pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, il existe une unique suite $u\in E$ telle que $u_0=\alpha$ et $u_1=\beta$, et donc un unique $u\in E$ tel que $\varphi(u)=(\alpha,\beta)$. Par suite φ est bijective.
2. D'après ce qui précède, les deux espaces vectoriels E et $\mathbb{K}^2$ sont isomorphes, et ainsi la dimension de E est donc égale à 2.

Remarque Pour trouver tous les éléments de E, il suffit donc d'en connaître deux non proportionnels. L'idée est de chercher ces éléments sous la forme de suites géométrique. Voir à la page 427 pour une description complète des solutions dans les deux cas : $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

Exercice 14

1. Soit n la dimension de E et $\mathbf{e}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On a vu au corollaire 13 de la page 1050 que $\operatorname{Im} u$ est le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\big(u(e_1),\dots,u(e_n)\big)$, ce qui montre que le rang de u est fini.
De plus, puisque le rang de u est égal au rang de la famille $\big(u(e_1),\dots,u(e_n)\big)$, il est inférieur ou égal à n avec égalité si, et seulement si, $\big(u(e_1),\dots,u(e_n)\big)$ est libre, c'est-à-dire si, et seulement si, l'application linéaire u est injective (*cf.* second point de la proposition 14 de la page 1050).
2. Comme $\operatorname{Im} u\subset F$, on a $\dim(\operatorname{Im} u)\leqslant\dim F$ et donc $\operatorname{rg} u\leqslant\dim F$. De plus, on a alors $\dim\operatorname{Im} u=\dim F$ si, et seulement si, $\operatorname{Im} u=F$, c'est-à-dire si, et seulement si, u est surjective.

Proposition 23 On a $\operatorname{Im}(v\circ u)=\big\{v\big(u(x)\big)\,;\ x\in E\big\}=\big\{v(y)\,;\ y\in\operatorname{Im} u\big\}=v(\operatorname{Im} u)$.

- Si u est bijective, alors $\operatorname{Im} u=F$ et donc $\operatorname{Im}(v\circ u)=\operatorname{Im} v$.
L'égalité des rangs s'ensuit.
- Si v est bijective, alors v induit un isomorphisme de $\operatorname{Im} u$ sur $v(\operatorname{Im} u)$. Ces deux sous-espaces vectoriels ont donc même dimension, ce qui donne le résultat.

Exercice 15 Comme dans la proposition précédente, on a :
$$\operatorname{Im}(v\circ u)=v\big(u(E)\big)\subset v(F)=\operatorname{Im} v.$$

- Comme $\operatorname{Im}(v\circ u)\subset\operatorname{Im} v$, l'application $v\circ u$ est de rang fini et $\operatorname{rg}(v\circ u)\leqslant\operatorname{rg} v$.
- Comme $\operatorname{Im}(v\circ u)=v\left(u(E)\right)$, on a $\operatorname{rg}(v\circ u)\leqslant\dim u(E)=\operatorname{rg} u$.
On obtient l'inégalité précédente en appliquant à l'application $\begin{array}{ccc}\operatorname{Im} u & \longrightarrow & G\\ y & \longmapsto & v(y)\end{array}$ la première remarque qui suit la définition 4 de la page 1102.

Proposition 24

Comme, pour tout $x \in E$, on a $u(x) \in \operatorname{Im} u$, considérons $v : \begin{array}{rcl} E_0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$

L'application v est évidemment linéaire ; montrons qu'elle est bijective.

- Le noyau de v est :
$$\operatorname{Ker} v = \big\{x \in E_0 \mid u(x) = 0\big\} = E_0 \cap \operatorname{Ker} u.$$
Comme $E = E_0 \oplus \operatorname{Ker} u$, on a $E_0 \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$; par suite, v est injective.
- Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Puisque $E = E_0 \oplus \operatorname{Ker} u$, il existe $x_1 \in E_0$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} u$ tels que $x = x_1 + x_2$. On a alors :
$$y = u(x) = u(x_1) + u(x_2) = u(x_1) = v(x_1) \quad \text{avec} \quad x_1 \in E_0,$$
ce qui montre la surjectivité de v.

Par suite v est un isomorphisme de E_0 sur $\operatorname{Im} u$.

Théorème 25

- Comme E est de dimension finie, l'application linéaire u est de rang fini.
- Soit E_0 un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E. D'après la proposition précédente, les sous-espaces vectoriels E_0 et $\operatorname{Im} u$ sont isomorphes, et ont donc même dimension finie. Par suite :
$$\dim E = \dim E_0 + \dim(\operatorname{Ker} u) = \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Ker} u),$$
ce qui prouve le résultat.

Exercice 16 Supposons, par l'absurde, qu'il existe une application linéaire de $\mathbb{R}^5$ vers $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est une droite vectorielle. On a alors :
$$\dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Im} u) = \dim(\mathbb{R}^5) = 5.$$
Si $\dim \operatorname{Ker} u = 1$, alors $\dim(\operatorname{Im} u) = 4$, ce qui est impossible pour un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Par suite, il n'existe pas de telle application linéaire.

Exercice 17 Considérons l'application $f : \begin{array}{rcl} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E_1 + E_2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2. \end{array}$

- On vérifie facilement qu'elle est linéaire.
- Par définition de $E_1 + E_2$, son image est $E_1 + E_2$.
- On vérifie facilement que son noyau est $\operatorname{Ker} f = \big\{(x, -x)\,;\ x \in E_1 \cap E_2\big\}$.
- L'application $x \mapsto (x, -x)$ permet de prouver que $\operatorname{Ker} f$ est isomorphe à $E_1 \cap E_2$. On a donc $\dim(E_1 \cap E_2) = \dim(\operatorname{Ker} u)$ et la formule du rang nous donne alors :
$$\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2).$$
Comme $\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$, on en déduit le résultat.

Exercice 18

1. Soit $w : \begin{array}{rcl} \operatorname{Im} u & \longrightarrow & G \\ y & \longmapsto & v(y). \end{array}$ qui est évidemment linéaire.

   Comme on a :
   - $\operatorname{rg} w = \dim\big(w(\operatorname{Im} u)\big) = \dim\big(v(\operatorname{Im} u)\big) = \dim(\operatorname{Im} v \circ u)$, et donc $\operatorname{rg} w = \operatorname{rg} v \circ u$,
   - $\operatorname{Ker} w = \operatorname{Ker}(v_{|\operatorname{Im} u}) = \{y \in \operatorname{Im} u \mid v(y) = 0\} = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v$,

le théorème du rang nous donne :
$$\dim \operatorname{Im} u = \operatorname{rg} w + \dim(\operatorname{Ker} w) \quad \text{et donc} \quad \operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(v \circ u) + \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v).$$

2. Comme $(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v) \subset \operatorname{Ker} v$, on a $\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} v)$.
En utilisant l'égalité de la première question, on en déduit :
$$\operatorname{rg} u \leqslant \operatorname{rg}(v \circ u) + \dim(\operatorname{Ker} v).$$
Comme (d'après la formule du rang) $\dim(\operatorname{Ker} v) = \dim F - \operatorname{rg} v$, on en déduit :
$$\operatorname{rg} u \leqslant \operatorname{rg}(v \circ u) + \dim F - \operatorname{rg} v.$$

3. La formule du rang donne :
$$\dim(\operatorname{Ker} u) = \dim E - \operatorname{rg} u \qquad \dim(\operatorname{Ker} v) = \dim F - \operatorname{rg} v$$
$$\text{et} \quad \dim\big(\operatorname{Ker}(v \circ u)\big) = \dim E - \operatorname{rg}(v \circ u).$$
En reportant dans l'inégalité précédente, on obtient immédiatement :
$$\dim\big(\operatorname{Ker}(v \circ u)\big) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Ker} u).$$

Théorème 26 Il suffit de montrer que (i) et (ii) sont équivalentes. D'après le théorème du rang et l'égalité des dimensions de E et de F, on a :
$$\dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Ker} u) = \dim E = \dim F. \qquad (*)$$
Comme
- l'application u est injective si, et seulement si, $\dim \operatorname{Ker} u = 0$,
- l'application u est surjective si, et seulement si, $\dim \operatorname{Im} u = \dim F$,

il est évident avec $(*)$ que ces deux conditions sont équivalentes.

Exercice 19

- L'application u est linéaire par propriété de la multiplication des polynômes.
l'application v est linéaire d'après la linéarité de la dérivation.
Ces deux applications linéaires u et v sont donc des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.
- Si $P \in \operatorname{Ker} u$ vérifie donc $XP = 0$, alors, par intégrité de $\mathbb{K}[X]$ (*cf.* la proposition 5 de la page 891), on a $P = 0$. Ainsi l'application linéaire u est injective.
En revanche, tout polynôme de la forme XP possède 0 comme racine, et donc on a $1 \notin \operatorname{Im} u$. Par suite u n'est pas surjective.
- L'application v est surjective, puisque tout polynôme $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ a au moins un antécédent par v, par exemple $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{k+1} X^{k+1}$.
En revanche, $\operatorname{Ker} v$ contient le polynôme non nul 1, et v n'est donc pas injective.

Corollaire 28 Il suffit de montrer $(ii) \Longrightarrow (i)$ et $(iii) \Longrightarrow (i)$.

- $(ii) \Longrightarrow (i)$. Supposons qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = \operatorname{Id}_E$ et montrons que u est injectif. Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. Alors $v \circ u(x) = 0$ donc $x = 0$. Par suite, u est bijectif, puisque u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
- $(iii) \Longrightarrow (i)$ Supposons qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = \operatorname{Id}_E$. Alors u est surjectif, puisque, pour tout $x \in E$, on a $x = u\big(v(x)\big)$. Par suite, u est bijectif, puisque u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 20

1. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'application :

$$u_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & xe_i \end{array}$$

est clairement linéaire et appartient donc à $\mathcal{L}(\mathbb{K}, E)$.
Montrons que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{K}, E)$.

- Montrons qu'elle est libre. Soit donc $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i u_i = 0$.

  Alors pour tout $x \in \mathbb{K}$ on a $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x e_i = 0$, et en particulier pour $x = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = 0.$$

  Comme $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre, on en déduit $a_1 = \dots = a_n = 0$, ce qui prouve que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.
- Montrons que $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice de $\mathcal{L}(\mathbb{K}, E)$. Soit donc $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, E)$. En notant $(a_1, \dots, a_n)$ les coordonnées du vecteur $u(1)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, on a donc $u(1) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i u_i\Big)(1)$, et les deux applications linéaires u et $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i u_i$ sont égales, puisqu'elles coïncident sur une base de $\mathbb{K}$.

Par suite $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{K}, E)$ et $\dim \mathcal{L}(\mathbb{K}, E) = \dim E$.

2. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Par définition, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$e_i^*(e_i) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\} \quad e_i^*(e_j) = 0.$$

Montrons que la famille $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

- Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i^* = 0$.

  Alors on a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$: $a_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i^*(e_j) = 0$.

  La famille $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est donc libre.
- Montrons qu'elle est génératrice de E^*. Soit donc $u \in E^*$.
  Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, posons $a_i = u(e_i)$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a alors :

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*\Big)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*(e_j) = a_j$$

  et les deux applications linéaires u et $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i^*$ sont égales puisqu'elles coïncident sur une base de E.

Ainsi, la famille $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Cet espace vectoriel est donc de dimension finie, et sa dimension est égale à celle de E.

Théorème 29 Notons $n = \dim E$ et $p = \dim F$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, considérons :

$$u_{i,j} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & e_i^*(x) f_j. \end{array}$$

Montrons que la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathcal{L}(E,F)$.

- Montrons que cette famille est libre.
  Soit donc une famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ de scalaires tels que :

  $$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u_{i,j} = 0 \quad \text{et donc} \quad \forall x \in E \quad \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u_{i,j}(x) = 0.$$

  Soit $k \in [\![1,n]\!]$. En utilisant la relation précédente avec $x = e_k$, on a :

  $$0 = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u_{i,j}(e_k) = \sum_{j=1}^{p} a_{k,j} f_j.$$

  La famille $(f_1, \dots, f_p)$ étant libre, on en déduit que tous les $a_{k,j}$ sont nuls. Donc :

  $$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad \forall j \in [\![1,p]\!] \quad a_{k,j} = 0,$$

  ce qui prouve que $(u_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est libre.

- Montrons que $(u_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est génératrice de $\mathcal{L}(E,F)$.

  Soit donc $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, notons $(a_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant p}$ la famille des coordonnées du vecteur $u(e_i)$ dans la base $(f_1, \dots, f_p)$, et posons alors :

  $$v = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u_{i,j}.$$

  On a évidemment $v \in \mathcal{L}(E,F)$ ainsi que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

  $$v(e_k) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u_{i,j}(e_k) = \sum_{j=1}^{p} a_{k,j} f_j = u(e_k).$$

  Ainsi, u et v sont deux applications linéaires de E dans F qui coïncident sur la base $(e_1, \dots, e_n)$. Par suite, elles sont égales et :

  $$u = v = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u_{i,j}$$

  ce qui prouve que $(u_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ engendre $\mathcal{L}(E,F)$.

Ainsi, la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathcal{L}(E,F)$.

Par suite, $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim(E) \times \dim(F)$.

Exercice 21 Soit $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Considérons :

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & F^n \\ & u & \longmapsto & \big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big). \end{array}$$

Il est facile de vérifier que Φ est linéaire.

Cette application est bijective puisque, pour tout $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in F^n$, il existe une unique application linéaire u telle que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad u(e_i) = a_i \qquad \text{ou encore} \qquad \Phi(u) = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

En utilisant le corollaire 12 de la page 1098, on a donc :

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim F^n = n \dim F = \dim(E) \times \dim(F).$$

Exercice 22

- La famille $\big((1,1),(1,-1)\big)$ est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires. Étant donné qu'elle a deux éléments et que $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, c'est une base de $\mathbb{R}^2$.
- On a $f(1,1) = 2$ et $f(1,-1) = 0$. Donc :

$$\text{si} \quad x = (x_1, x_2) = x_1'\,(1,1) + x_2'\,(1,-1), \quad \text{alors} \quad f(x) = 2x_1'.$$

Proposition 31 Par définition H est un hyperplan de E si, et seulement si, H possède un supplémentaire de dimension 1.

Étant donné qu'en dimension finie, tout sous-espace vectoriel possède un supplémentaire et que la dimension d'une somme directe est la somme des dimensions, on en déduit que H est un hyperplan si, et seulement si, $\dim H = \dim E - 1$.

Exercice 23

- Supposons qu'il existe un hyperplan H de E contenant F. On a alors :

$$\dim F \leqslant \dim H = \dim E - 1 < \dim E.$$

- Réciproquement, soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension $p < n$. Prenons $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F et complétons-la en $(e_1, \dots, e_n)$ base de E. Le sous-espace vectoriel :

$$H = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$$

est un hyperplan de E, et il contient F puisque $p \leqslant n - 1$.

Corollaire 33 Soit φ et ψ les deux formes linéaires non nulles définies sur E par :

$$\forall x \in E \quad \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i \quad \text{et} \quad \psi(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i\, x_i,$$

ce qui s'écrit encore :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i\, e_i^* \qquad \text{et} \qquad \psi = \sum_{i=1}^{n} b_i\, e_i^*.$$

On sait (*cf.* la proposition 31 de la page 1066) que les deux hyperplans d'équations respectives $\varphi(x) = 0$ et $\psi(x) = 0$ sont égaux si, et seulement si, les formes linéaires φ et ψ sont proportionnelles. On en déduit le résultat puisque $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ sont les composantes respectives de φ et de ψ dans la base $(e_i^*)_{i \in [\![1,n]\!]}$.

Proposition 34 Pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, soit $\varphi_i \in E^*$ tel que $H_i = \operatorname{Ker}\varphi_i$.

Considérons l'application $u: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ x & \longmapsto & \big(\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x)\big). \end{array}$

Il est facile de vérifier que u est linéaire et que $\operatorname{Ker} u = \bigcap\limits_{i=1}^{m} H_i$.

Comme $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{K}^m$, on a $\operatorname{rg} u \leqslant m$, et le théorème du rang nous donne alors :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) = \dim(\operatorname{Ker} u) = \dim E - \operatorname{rg} u \geqslant \dim E - m.$$

Exercice 24 Démontrons la contraposée du résultat demandé, c'est-à-dire que l'on a :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) > \dim E - m \qquad (*)$$

si, et seulement si,la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_m)$ est liée.

- D'après la démonstration de la proposition précédente, la relation $(*)$ est équivalente à $\operatorname{rg} u < m$ et donc à $\dim(\operatorname{Im} u) < \dim \mathbb{K}^m$.
- D'après l'exercice 23 de la page 1107, cela équivaut à dire que $\operatorname{Im} u$ est inclus dans un hyperplan U de $\mathbb{K}^m$.

Supposons qu'une équation de U soit de la forme :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\, x_i = 0 \qquad \text{avec} \qquad (a_1,\dots,a_m) \in \mathbb{K}^m \setminus \big\{0_{\mathbb{K}^m}\big\}.$$

Ainsi, $(*)$ est équivalent à :

$$\forall x \in E \quad \sum_{i=1}^{m} a_i\, \varphi_i(x) = 0$$

et donc à :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\, \varphi_i = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}.$$

Comme $(a_1,\dots,a_m)$ est une famille d'éléments non tous nuls, cela équivaut à dire que la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_m)$ est liée.

Proposition 35 Soit $(e_1,\dots,e_m)$ une base de F. Complétons-la en une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E. On peut alors construire la famille des application linéaires coordonnées $(e_1^*,\dots,e_n^*)$. Pour $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, e_i$, on a alors $x \in F$ si, et seulement si :

$$\forall i \in [\![n+1,m]\!] \quad x_i = 0,$$

ce qui équivaut à :

$$\forall i \in [\![n+1,m]\!] \quad e_i^*(x) = 0.$$

Par suite, on a $F = \bigcap\limits_{i=m+1}^{n} \operatorname{Ker} e_i^*$, où chaque e_i^* est une forme linéaire non nulle.

Ainsi, F est l'intersection de la famille des hyperplans $(\operatorname{Ker} e_i^*)_{i\in[\![m+1,n]\!]}$.

S'entraîner et approfondir

21.1 Dans $\mathbb{R}^3$, considérons les vecteurs $u = (1,1,-1)$, $v = (-1,1,1)$ et $w = (1,-1,1)$.

1. Montrer que u, v, w forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner les coordonnées du vecteur $(2,1,3)$ dans cette base.

21.2 Déterminer le rang des familles suivantes :

1. dans $\mathbb{R}^4$: $(e_1,e_2,e_3,e_4) = \big((1,0,1,0),(1,1,0,0),(-1,-1,1,0),(0,0,2,0)\big)$.
2. dans $\mathbb{C}[X]$: $(P_1,P_2,P_3,P_4) = \big((X^2+X+1\,,\ X^2+3X+1\,,\ 2X\,,\ X^3+3\big)$.
3. dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R})$, la famille $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)$ où, pour tout $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$:

$$\varphi_1(x,y,z,t) = x+z \qquad \varphi_2(x,y,z,t) = -x+2y$$
$$\varphi_3(x,y,z,t) = x+y-z+t \qquad \varphi_4(x,y,z,t) = y+t.$$

21.3 Soit $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux familles finies de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que :

$$\max\big(\operatorname{rg}(\mathcal{F}_1),\operatorname{rg}(\mathcal{F}_2)\big) \leqslant \operatorname{rg}(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2) \leqslant \operatorname{rg}(\mathcal{F}_1)+\operatorname{rg}(\mathcal{F}_2).$$

21.4 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n=2p$ paire. Montrer :

$$\big(f^2=0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rg} f = p\big) \Longleftrightarrow (\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f).$$

21.5 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On suppose que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\big(x_0, f(x_0),\ldots,f^{n-1}(x_0)\big)$ soit une base de E.

21.6 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$u^2+3u+2\operatorname{Id}_E = 0.$$

Montrer qu'il existe deux sous-espaces supplémentaires F et G de E tels que :

$$\forall x\in F \quad u(x) = -x \quad \text{et} \quad \forall x\in G \quad u(x) = -2\,x.$$

(*on pourra considérer* $v = u+2\operatorname{Id}_E$ *et calculer* v^2).

21.7 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$K_p = \operatorname{Ker} f^p \quad \text{et} \quad I_p = \operatorname{Im} f^p.$$

1. Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad K_p \subset K_{p+1}$$

   et que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad I_{p+1} \subset I_p.$$

2. Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leqslant n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.
3. Montrer que :

$$I_r = I_{r+1}$$

   et que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad K_r = K_{r+p} \quad \text{et} \quad I_r = I_{r+p}.$$

4. Montrer que :

$$E = K_r \oplus I_r.$$

21.8 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n ainsi que u et v deux endomorphismes de E vérifiant $u + v = \mathrm{Id}_E$ et $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leqslant n$.
Montrer que u et v sont des projecteurs vérifiant $u \circ v = v \circ u = 0$.

21.9 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et G un sous-espace vectoriel de E. On définit l'ensemble $\mathcal{H}$ par :

$$\mathcal{H} = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid G \subset \operatorname{Ker} u\}.$$

Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ et donner $\dim H$.

⋆ **21.10** Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note E^* l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

1. Soit $x \in E$ tel que $\forall \varphi \in E^* \quad \varphi(x) = 0$. Montrer que x est nul.
2. On considère une base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de E^*.
   Montrer qu'il existe une base $\mathbf{e}$ de E pour laquelle les formes linéaires coordonnées sont les φ_i. *Considérer l'application* $\Phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & \big(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\big). \end{array}$

Solution des exercices

21.1 1. On remarque que :

$$(1,0,0) = \frac{1}{2}(u+w)\ ,\ (0,1,0) = \frac{1}{2}(u+v)\ ,\ (0,0,1) = \frac{1}{2}(v+w)$$

ce qui prouve que la famille est génératrice. C'est donc bien une base puisqu'elle est constituée de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3.

2. On a $(2,1,3) = 2\times(1,0,0) + (0,1,0) + 3\times(0,0,1) = \dfrac{3}{2}u + 2v + \dfrac{5}{2}w$.

Ainsi, les coordonnées du vecteur $(2,1,3)$ dans la base (u,v,w) sont $(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2})$.

21.2 1. On a $e_3 = -e_2 + \frac{1}{2}e_4$. Donc $\operatorname{rg}(e_1,e_2,e_3,e_4) = \operatorname{rg}(e_1,e_2,e_4)$.
Les vecteurs e_1 et e_4, non colinéaires, forment une famille libre. Il est évident, grâce à la deuxième composante, que e_2 ne peut être combinaison linéaire de (e_1,e_2). Par suite, (e_1,e_2,e_4) est libre et donc $\operatorname{rg}(e_1,e_2,e_3,e_4) = 3$.

2. On a $P_3 = P_2 - P_1$ et donc $\operatorname{rg}(P_1,P_2,P_3,P_4) = \operatorname{rg}(P_1,P_2,P_4)$.
Les polynômes P_1 et P_2, non colinéaires, forment une famille libre. Il est évident, grâce au degré, que P_4 ne peut être combinaison linéaire de (P_1,P_2).
Par suite, (P_1,P_2,P_4) est libre et $\operatorname{rg}(P_1,P_2,P_3,P_4) = 3$.

3. Montrons que la famille est libre, et donc que son rang est 4.
Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3 + \alpha_4\varphi_4 = 0$. Alors, pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)x + (2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)y + (\alpha_1 - \alpha_3)z + (\alpha_3 + \alpha_4)t = 0.$$

En évaluant cette expression pour les quatre vecteurs de la base canonique, on a :

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

On déduit de la deuxième et de la quatrième ligne que α_2 est nul. Les premières et troisième lignes montrent alors que $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$. Enfin on a $\alpha_4 = 0$. La famille $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)$ est donc libre. Par conséquent, son rang est 4.

21.3 Appelons respectivement F_1 et F_2 les sous-espaces vectoriels engendrés par $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Alors $F_1 + F_2$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. On a clairement :

$$F_1 \subset F_1 + F_2 \quad \text{et} \quad F_2 \subset F_1 + F_2$$

ce qui montre que $\max\big(\operatorname{rg}(\mathcal{F}_1), \operatorname{rg}(\mathcal{F}_2)\big) \leqslant \operatorname{rg}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$.

De plus, si $(e_1,e_2,\ldots,e_p)$ est une base de F_1 et $(f_1,f_2,\ldots,f_q)$ une base de F_2, alors la famille $(e_1,e_2,\ldots,e_p,f_1,f_2,\ldots,f_q)$ est génératrice de F_1+F_2, donc :

$$\operatorname{rg}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \dim(F_1+F_2) \leqslant p + q = \operatorname{rg}(\mathcal{F}_1) + \operatorname{rg}(\mathcal{F}_2).$$

21.4 • Supposons $f^2 = 0$ et $\operatorname{rg} f = p$. Comme $f \circ f = 0$, on a $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
De plus, d'après la formule du rang, on a :

$$\dim \operatorname{Im} f = n - \dim \operatorname{Ker} f = 2p - \dim \operatorname{Ker} f.$$

Puisque $\dim \operatorname{Im} f = p$, on a aussi $\dim \operatorname{Ker} f = p$. Ainsi $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f$; on en déduit $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ (car on a déjà $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$).

• Supposons $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$. On a en particulier $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ et donc $f^2 = 0$. De plus, on a la formule du rang : $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = n$. Puisque $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$, on a $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f = p$.

21.5 Soit $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$. Montrons que la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$ est un base de E. Comme elle compte n éléments , il suffit de montrer qu'elle est libre. Considérons donc $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0. \qquad (*)$$

En appliquant f^{n-1} à cette égalité, on obtient :

$$\lambda_0 f^{n-1}(x_0) + \lambda_1 f^n(x_0) + \lambda_2 f^{n+1}(x_0) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{2n-2}(x_0) = 0$$

soit $\lambda_0 f^{n-1}(x_0) = 0$ puisque $f^n = f^{n+1} = \cdots = 0$. D'où $\lambda_0 = 0$ car $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.
On applique alors successivement $f^{n-2}, \ldots, f$, Id_E à la relation $(*)$, pour montrer, de proche en proche, que tous les λ_i sont nuls. Ainsi, la famille est libre.

21.6 Comme indiqué dans l'énoncé, posons $v = u + 2\operatorname{Id}_E$ et calculons v^2. On a :

$$\begin{aligned} v^2 &= (u + 2\operatorname{Id}_E)^2 \\ &= u^2 + 4u + 4\operatorname{Id}_E && (\text{ car } u \text{ et } 2\operatorname{Id}_E \text{ commutent }) \\ &= (u^2 + 3u + 2\operatorname{Id}_E) + u + 2\operatorname{Id}_E && (\text{ on fait apparaître } u^2 + 3u + 2\operatorname{Id}_E) \\ &= u + 2\operatorname{Id}_E = v. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $v \circ v = v$. L'endomorphisme v est donc un projecteur de E.
Plus précisément, c'est la projection sur l'espace $F = \operatorname{Im} v$ parallèlement à $G = \operatorname{Ker} v$, qui sont donc deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. Comme $v = u + 2\operatorname{Id}_E$, on a aussi :

$$G = \operatorname{Ker}(u + 2\operatorname{Id}_E) \quad \text{et} \quad F = \operatorname{Ker}(v - \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(u + \operatorname{Id}_E).$$

On a donc les relations :

$$\forall x \in F \quad u(x) = x - 2x = -x \quad \text{et} \quad \forall x \in G \quad u(x) = -2x.$$

ce que l'on voulait démontrer.

21.7 1. Soit $x \in K_p$. On a $f^p(x) = 0$ donc $f\big(f^p(x)\big) = 0$ d'où $x \in K_{p+1}$. Donc $K_p \subset K_{p+1}$.
Soit $y \in I_{p+1}$. Alors :

$$\exists x \in E \quad y = f^{p+1}(x) = f^p\big(f(x)\big)$$

et donc $y \in I_p$. Par suite, on a bien $I_{p+1} \subset I_p$

2. Supposons par l'absurde que :
$$\forall r \in \{0,1,\ldots,n\} \quad K_r \neq K_{r+1}.$$
Comme les espaces K_p sont inclus les uns dans les autres, on aurait alors :
$$0 = \dim K_0 < \dim K_1 < \cdots < \dim K_p < \cdots < \dim K_n < \dim K_{n+1}$$
et, par suite, $\dim K_{n+1} \geqslant n+1$, ce qui est impossible.
L'ensemble $\left\{p \in [\![0,n]\!] \;\middle|\; K_p = K_{p+1}\right\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$. On note r son plus petit élément, et l'on a $K_r = K_{r+1}$.
3. D'après le théorème du rang, on a, pour tout entier naturel p :
$$\dim I_p = \dim E - \dim K_p.$$
Ainsi, $\dim I_r = \dim E - \dim K_r = \dim E - \dim K_{r+1} = \dim I_{r+1}$. Puisque l'on a prouvé $I_{r+1} \subset I_r$, on en déduit $I_r = I_{r+1}$.
Montrons par récurrence sur l'entier $p \geqslant 1$ la propriété H_p suivante :
$$\forall p \in \mathbb{N} \quad K_r = K_{r+p}.$$
On a déjà vu que H_1 est vraie. De plus, supposons la propriété H_p vraie pour un certain entier p. On a donc $K_{r+p} = K_r$. Soit $x \in K_{r+p+1}$ (avec $p \geqslant 1$).
On a alors $f^{r+p+1}(x) = 0$. Ainsi, $f^{r+1}\big(f^p(x)\big) = 0$ et donc $f^p(x) \in K_{r+1}$.
Comme $K_{r+1} = K_r$, on a donc $f^r\big(f^p(x)\big) = 0$, c'est-à-dire $f^{r+p}(x) = 0$.
Ainsi, $x \in K_{p+r}$ puis $x \in K_r$.
On a donc montré que $K_{r+p+1} \subset K_r$ et d'après la première question, l'autre inclusion est vraie donc :
$$K_{r+p+1} = K_r.$$
La propriété H_p est donc initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $p \geqslant 1$.
Soit p un entier naturel. Montrons maintenant que $I_p = I_{r+p}$ pour tout entier naturel p. Les sous-espaces vectoriels K_{r+p+1} et K_r ont même dimension. D'après le théorème du rang, on a donc $\dim I_r = \dim I_{r+p}$. Or, $I_{p+r} \subset I_r$ donc :
$$\forall p \in \mathbb{N} \quad I_r = I_{r+p}.$$
4. Pour montrer que :
$$E = K_r \oplus I_r$$
il suffit, d'après le théorème du rang, de montrer que $K_r \cap I_r = \{0\}$. Considérons donc y un élément de $K_r \cap I_r$. Soit $x \in E$ tel que $y = f^r(x)$. Puisque $f^r(y) = 0$, on a $f^{r+r}(x) = 0$. Ainsi $x \in K_{2r}$. Or, $K_{2r} = K_r$ et donc $f^r(x) = 0$, soit $y = 0$.

21.8 On a évidemment :
$$\operatorname{Im}(u+v) = \{u(x) + v(x)\,;\ x \in E\} \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v.$$
Comme $u + v = \mathrm{Id}_E$, on en déduit $E = \operatorname{Im}(u+v) = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$.
La formule de Grassmann et l'hypothèse $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leqslant n$ nous donnent alors :
$$\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0\} \quad \text{et donc} \quad E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v.$$
- Soit $x \in \operatorname{Im} u$. On a alors :
$$x + 0 = x = (u+v)(x) = u(x) + v(x).$$
Comme $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0\}$, on en déduit $u(x) = x$ et $v(x) = 0$.

- De même, pour tout $x \in \operatorname{Im} v$, on prouve $v(x) = x$ et $u(x) = 0$.

Soit p le projecteur sur $\operatorname{Im} u$ parallèlement à $\operatorname{Im} v$. Comme u et p coïncident sur $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} v$ (deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E), on a $u = p$.
Par suite, $v = \mathrm{Id}_E - u$ est le projecteur associé, ce qui entraîne $u \circ v = v \circ u = 0$.

21.9 Notons $n = \dim E$ et $p = \dim G$. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de G.

Complétons cette famille libre en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.

Considérons l'application $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & F^p \\ u & \longmapsto & (u(e_1), \ldots, u(e_p)). \end{array}$

Puisque u est une application linéaire, cette application Ψ est également linéaire. Or :

- On a $\operatorname{Ker} \Psi = \mathcal{H}$. En effet, une application linéaire u s'annule sur G si, et seulement si, $\Psi(u) = (0, 0, \ldots, 0)$ puisque $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base de G.
- On a $\operatorname{Im} \Psi = F^p$. En effet, soit $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in F^p$. Il existe une (unique) application linéaire u de E vers F telle que :
$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad u(e_i) = x_i \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![p+1, n]\!] \quad u(e_i) = 0.$$
Ainsi, $\Psi(u) = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et donc $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \operatorname{Im} \Psi$.

Par suite, $\mathcal{H}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$, puisque c'est le noyau d'une application linéaire. De plus, d'après le théorème du rang on a :
$$\underbrace{\dim \mathcal{L}(E,F)}_{=\dim E \dim F} = \underbrace{\dim(\operatorname{Ker} \Psi)}_{=\dim \mathcal{H}} + \underbrace{\dim(\operatorname{Im} \Psi)}_{=\dim(F^p) = \dim G \dim F}.$$

Ainsi, on a $\dim \mathcal{H} = \dim F \times (\dim E - \dim G)$.

21.10 1. Supposons x non nul. Posons $e_1 = x$ et complétons cette famille libre (e_1) en une base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. La première forme linéaire coordonnée e_1^* dans $\mathbf{e}$ vérifie alors $e_1^*(x) = 1 \neq 0$. Le résultat demandé s'ensuit par contraposée.

2. L'application Φ est linéaire par linéarité des φ_i. Montrons qu'elle est injective : si $x \in \operatorname{Ker} \Phi$, alors x annule tous les φ_i donc toutes leurs combinaisons linéaires, c'est-à-dire toutes les formes linéaires puisque $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de E^*. Par conséquent, $x = 0$ d'après la première question.
Comme $\dim E = \dim \mathbb{K}^n$, on en déduit que Φ est un isomorphisme. Les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ admettent donc des antécédents par Φ, ce qui donne des vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ de E tels que :
$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j} \quad \text{(symbole de Kronecker)}.$$
Pour tout $x = \sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j$ de E, on a alors :
$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, \varphi_i(x_j) = x_i,$$
ce qui donne le résultat.

Chapitre 22 : Matrices

I Calcul matriciel **1134**

1 Définitions 1134

2 Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ 1136

3 Produit de matrices 1138

4 Anneau des matrices carrées d'ordre n 1141

5 Une autre construction de $\mathbb{C}$ 1144

II Représentations matricielles **1145**

1 Matrice d'une famille finie de vecteurs 1145

2 Matrice d'une application linéaire 1145

3 Relations entre matrices et applications linéaires . 1148

4 Matrice de changement de base 1152

5 Changement de bases et applications linéaires . . . 1154

6 Trace 1155

III Écriture par blocs **1156**

1 Cas particulier d'une matrice 2×2 par blocs . . . 1156

2 Généralisation 1158

IV Rang d'une matrice **1159**

1 Rang de la famille des vecteurs colonnes 1159

2 Autres caractérisations 1159

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . **1162**

Exercices **1178**

Matrices

22

Dans tout ce chapitre, n, p et q désignent des entiers naturels non nuls, et $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$.

I Calcul matriciel

1 Définitions

Définition 1

On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. On dit aussi **matrice de type (n,p)**, **matrice de taille (n,p)** ou encore **matrice $n \times p$**.

Remarque Si A est une matrice à n lignes et p colonnes, on écrit donc :

$$A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \qquad \text{ou} \qquad A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

ou encore :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

écriture dans laquelle le premier indice désigne le numéro de la ligne et le second celui de la colonne. Cette représentation sous forme de tableau rectangulaire explique les définitions suivantes.

Soit A une matrice à n lignes et p colonnes.

- Pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, on appelle :
  - $*$ i-ème **vecteur ligne** de A, le vecteur $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,p})$ de $\mathbb{K}^p$.
  - $*$ j-ème **vecteur colonne** de A, le vecteur $(a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j})$ de $\mathbb{K}^n$;
- Si $n = p$, on dit que A est une **matrice carrée** et, dans ce cas, on utilise aussi la notation $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

- Si $p = 1$, on dit que A est une **matrice colonne**. Nous verrons dans la suite que l'on identifie souvent un élément $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\mathbb{K}^n$ avec la matrice colonne $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.
- Si $n = 1$, on dit que A est une **matrice ligne**.
- Lorsque A est une matrice carrée, on dit qu'elle est :
  * **triangulaire supérieure** si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ *i.e.* si :
  $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i > j \Longrightarrow a_{i,j} = 0 \ ;$$
  * **triangulaire inférieure** si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ *i.e.* si :
  $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i < j \Longrightarrow a_{i,j} = 0 \ ;$$
  * **diagonale** si elle s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$;

    c'est-à-dire si :
    $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i \neq j \Longrightarrow m_{i,j} = 0 \ ;$$
    une telle matrice se note aussi $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
- Une **matrice scalaire** est une matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux. $\mathrm{Diag}(1, 1, \dots, 1)$, la matrice scalaire $n \times n$ dont tous les éléments diagonaux valent 1, est notée I_n.
- Une **sous–matrice** de A est une restriction de A à une partie non vide $I' \times J'$, avec $I' \subset [\![1,n]\!]$ et $J' \subset [\![1,p]\!]$. Visuellement (et par abus de langage) on peut dire que c'est une matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes de la matrice A.
- La **transposée** de A est la matrice A', notée ${}^tA$ (ou encore parfois A^T), possédant p lignes et n colonnes, dont l'élément générique $m'_{i,j}$ vaut $a_{j,i}$.
  * On a évidemment ${}^t({}^tA) = A$.
  * L'application $A \mapsto {}^tA$ est appelée **transposition**.
  * De plus, A est une matrice triangulaire supérieure si, et seulement si, la matrice ${}^tA$ est triangulaire inférieure.

- Une matrice *carrée* $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est dite :
  - **symétrique** si ${}^tA = A$, soit encore $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad a_{i,j} = a_{j,i}$;
  - **antisymétrique** si ${}^tA = -A$, soit encore $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad a_{i,j} = -a_{j,i}$.

Notations On note :
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$,
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$,
- $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Résultats
- Toute matrice diagonale est symétrique.
- Une matrice triangulaire est symétrique si, et seulement si, elle est diagonale.
- Si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique, alors tous ses éléments diagonaux sont nuls, *i.e.* pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $a_{i,i} = -a_{i,i} = 0$.

Exemple Pour un système de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y = c_1 \\ a_2\,x + b_2\,y = c_2 \end{cases}$ on utilise la matrice du système $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ et la matrice second membre $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

2 Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 2

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- On appelle **somme** $A+B$ la matrice $S = (s_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ telle que :
$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \forall j \in [\![1,p]\!] \quad s_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$
L'opération $(A,B) \mapsto A+B$ s'appelle **addition des matrices**.
- Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on désigne par $\lambda\, A$ la matrice $P = (p_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ telle que :
$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \forall j \in [\![1,p]\!] \quad p_{i,j} = \lambda\, a_{i,j}.$$
L'opération $(\lambda, A) \mapsto \lambda\, A$ s'appelle **produit d'une matrice par un élément de $\mathbb{K}$**, ou encore **produit d'une matrice par un scalaire**.

- Ces opérations, qui ne sont qu'une réécriture des lois sur l'ensemble des applications de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$, munissent naturellement $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- L'élément neutre additif de $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls ; elle se note 0, voire $0_{n,p}$ si l'on veut préciser le type (c'est-à-dire la taille) de la matrice.

Notation Quand on travaille dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on désigne par $E_{i,j}$ la matrice de type $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.

Exemple Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, il y a 6 matrices $E_{i,j}$, qui sont :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 1

La famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, que l'on appelle **base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$**. L'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes est donc de dimension np.

Démonstration. Si $(\lambda_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une famille de scalaires, alors on a :

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \lambda_{i,j}\, E_{i,j} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,p} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \dots & \lambda_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \dots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix}.$$

On en déduit facilement que toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des $E_{i,j}$, ce qui prouve que $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. □

Résultats

- $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$. C'est donc un sous-espace vectoriel de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par $(E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$. C'est donc un sous-espace vectoriel de dimension n.

Proposition 2

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$, alors on a :

$${}^t(\alpha\, A + \beta\, B) = \alpha\, {}^tA + \beta\, {}^tB.$$

La transposition $A \to {}^tA$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Principe de démonstration. Démonstration page 1162

- Pour l'égalité, regarder les éléments des deux matrices.
- Pour la bijectivité, exhiber « l'application réciproque ».

p.1162

Exercice 1

1. Montrer que la transposition est une symétrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Quel est l'ensemble des matrices invariantes (respectivement transformées en leur opposée) par cette symétrie ?
3. Que peut-on en déduire sur ces sous-espaces vectoriels ?

3 Produit de matrices

Définition

Définition 3

Étant donné deux matrices $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$, on appelle **produit** $A\,B$ la matrice :

$$M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \qquad \text{avec} \qquad m_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\, b_{k,j}.$$

L'opération $(A,B) \mapsto A\,B$ s'appelle **multiplication des matrices**.

Attention Pour pouvoir faire le produit $A\,B$ il faut donc que le nombre de colonnes de la matrice A soit égal au nombre de lignes de la matrice B.
Dans le calcul de $c_{i,k}$ interviennent les coefficients de la i-ème ligne de A et ceux de la k-ème colonne de B, ce que l'on peut visualiser de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & \boxed{\begin{matrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{k,j} \\ \vdots \\ b_{p,j}\end{matrix}} & \dots & b_{1,q} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{k,1} & & & & b_{k,q} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{p,1} & \dots & & \dots & b_{p,q} \end{pmatrix} \\
 & & \downarrow \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \boxed{a_{i,1} \quad \dots \quad a_{i,k} \quad \dots \quad a_{i,p}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & & \dots & m_{1,q} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & \boxed{m_{i,j}} & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & & \dots & m_{n,q} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Exemple Si l'on pose $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, alors le système de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 = b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 = b_2 \end{cases}$ s'écrit $A\,X = B$.

p.1162

Exercice 2 Étudier les produits de matrices suivants :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

p.1162

Exercice 3 Étudier les produits de matrices suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

p.1162

Exercice 4 Calculer le produit : $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}$.

Proposition 3

Si $A = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $B = \mathrm{Diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, alors :

$$A\,B = B\,A = \mathrm{Diag}(\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n).$$

Démonstration. Généralisation de l'exercice précédent. □

p.1163

Exercice 5 Soit $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ avec $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$.

- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = D\,A$, expliquer comment les lignes de B se déduisent des lignes de A.
- Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $C = A\,D$, que dire d'analogue ?

Remarque Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $I_n\,A = A$ et $A\,I_p = A$.

Proposition 4

Si $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, $(E'_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}$ et $(E''_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]}$ sont respectivement les bases canoniques de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, alors :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \forall j \in [\![1,q]\!] \quad \forall (k,\ell) \in [\![1,p]\!]^2 \quad E_{i,k}\,E'_{\ell,j} = \delta_{k,\ell}\,E''_{i,j},$$

où $\delta_{k,\ell}$ est le **symbole de Kronecker** qui vaut 1 si $k = l$, et 0 sinon.

Principe de démonstration. Il est évident que la plupart des coefficients sont nuls.

Démonstration page 1163

Remarque Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il est inutile de distinguer les diverses bases canoniques, et la relation précédente devient :

$$\forall (i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4 \quad E_{i,k}\,E_{\ell,j} = \delta_{k,\ell}\,E_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell \\ E_{i,j} & \text{si } k = \ell \end{cases}.$$

Propriétés du produit de matrices

Proposition 5 (bilinéarité de la multiplication)

- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(B,C) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$, on a pour $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$:
$$A\,(\lambda\,B + \mu\,C) = \lambda\,(A\,B) + \mu\,(A\,C).$$
- Si $(B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a pour $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$:
$$(\lambda\,B + \mu\,C)\,A = \lambda\,(B\,A) + \mu\,(C\,A).$$

Démonstration. Évident en écrivant les termes d'indice (i,j) des matrices. □

Remarques

- Le résultat précédent traduit :
  - ∗ pour A donnée, la linéarité de l'application $B \mapsto A\,B$,
  - ∗ pour B donnée, la linéarité de l'application $A \mapsto A\,B$,

  c'est-à-dire la bilinéarité de $(A,B) \mapsto A\,B$.
- En particulier dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la multiplication des matrices est distributive par rapport à l'addition.
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et si λ est un scalaire, alors on a :
$$(\lambda\,A)\,B = \lambda\,(A\,B) = A\,(\lambda\,B).$$

Proposition 6

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, alors $A\,(B\,C) = (A\,B)\,C$.

Principe de démonstration. Démonstration page 1163

Exprimer l'élément générique de $A(BC)$ sous la forme d'une somme double.

Remarque En particulier dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la multiplication est associative.

Proposition 7

Étant donné $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a ${}^t(A\,B) = {}^tB\,{}^tA$.

Démonstration page 1163

Exemple Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On vérifie facilement que le produit matriciel ${}^tX\,A\,Y$ est défini. Comme c'est une matrice 1×1, elle est égale à sa transposée, et l'on a donc :

$$ {}^tX\,A\,Y = {}^tY\,{}^tA\,X.$$

1287 Dans le chapitre 25, nous utiliserons souvent de tels produits matriciels en les identifiant avec le seul scalaire que contient ${}^tX\,A\,Y$.

p.1164 **Exercice 6** Avec les notations précédentes, que pensez-vous de $X\,A\,{}^tY$?

4 Anneau des matrices carrées d'ordre n

Structure d'anneau

Proposition 8

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau. Il est non commutatif dès que $n \geqslant 2$.

Principe de démonstration. Pour la non commutativité, penser à $E_{1,2}$ et $E_{2,1}$.

Démonstration page 1164

Remarque Pour $n=1$, l'anneau précédent s'identifie avec le corps $\mathbb{K}$.

Attention Pour $n \geqslant 2$, l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ possède des « curiosités » que l'on ne rencontre pas dans les anneaux de nombres avec lesquels nous avons l'habitude de travailler, comme $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- L'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ contient des **diviseurs de zéro**, c'est-à-dire que l'on peut trouver deux matrices non nulles dont le produit est la matrice nulle, comme le montre par exemple l'égalité $E_{1,1}\,E_{2,2}=0$.
- On peut même trouver dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ une matrice non nulle, dont le carré est la matrice nulle. C'est par exemple le cas de la matrice $E_{1,n}$ dont le carré est la matrice nulle puisque $n \neq 1$.

p.1164 **Exercice 7** Si A est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, que pensez-vous de :

$$\forall (B,C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad A\,B = A\,C \Longrightarrow B = C \ ?$$

Remarque Comme dans tout anneau, pour $n \in \mathbb{N}$, l'itéré n-ème d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour la multiplication est appelé puissance n-ème de A, et se note A^n. Ne pas oublier que A^0 est alors l'élément neutre, *i.e.* $A^0 = I_n$.

p.1164 **Exercice 8** Soit $U \in \mathcal{M}_n(K)$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. En calculer toutes les puissances (positives).

Définition 4

Une matrice A est **nilpotente** si $\exists k \in \mathbb{N}^* \quad A^k = 0$.

p.1164 **Exercice 9** Quelles sont les matrices $E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont nilpotentes ?

Produit de matrices triangulaires

Proposition 9

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) $n \times n$ est une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure).

Principe de démonstration.

- Pour les triangulaires supérieures, le terme générique du produit est nul si $i > j$.
- Pour les triangulaires inférieures, utiliser la transposition.

Démonstration page 1164

Remarque D'après cette démonstration, si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures (ou deux matrices triangulaires inférieures), alors la diagonale du produit $A\,B$ est le produit terme à terme des deux diagonales.

p.1165

Exercice 10 Calculer les puissances positives de $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Formule du binôme et factorisation

Proposition 10

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $A\,B = B\,A$, alors :

- pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k\,B^{p-k}$;
- pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $A^p - B^p = (A-B)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k\,B^{p-1-k}\right)$.

Démonstration. Voir le chapitre 16 page 873. □

Attention On ne peut appliquer ces formules que si $A\,B = B\,A$.

Exemple Si A et B commutent, alors on a :

$$A^2 - B^2 = (A+B)\,(A-B) = (A-B)\,(A+B)$$

$$A^3 - B^3 = (A-B)\,(A^2 + A\,B + B^2) = (A^2 + A\,B + B^2)\,(A-B)$$

p.1165

Exercice 11 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En utilisant la matrice J de l'exercice 10, calculer M^n pour $n \geqslant 3$.

Éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: le groupe $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

Définition 5

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe une matrice B vérifiant :

$$A\,B = B\,A = I_n,$$

i.e. si elle est inversible dans l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

Notations

- Une matrice B vérifiant la double égalité ci-dessus est unique. On l'appelle **l'inverse de $\boldsymbol{A}$**, et on la note A^{-1}.
- On désigne par $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. C'est le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

Proposition 11

- Si A et B sont deux matrices inversibles de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$, alors $A\,B$ est inversible et $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$.
- $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe (non commutatif pour $n \geqslant 2$).

Démonstration. C'est un cas particulier de ce que l'on a vu sur les anneaux. □

Attention Prendre garde à l'ordre dans le produit, qui est ici très important dans la mesure où $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ n'est pas un anneau commutatif.

Exemple On peut aisément résoudre le système $A\,X = B$ de l'exemple de la page 1138 dès que l'on sait que la matrice A est inversible. En effet, les règles de calcul sur les matrices permettent de prouver l'équivalence :

$$A\,X = B \iff X = A^{-1}\,B.$$

Évidemment cela suppose que l'on sache calculer A^{-1} !

p.1165

Exercice 12 Soit $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si tous les coefficients diagonaux de A sont non nuls, alors A est inversible.

p.1165

Exercice 13 En utilisant la matrice J de l'exercice 10, montrer que la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible, en exhibant B telle que $A\,B = B\,A = I_4 = I_4 - J^4$.

Proposition 12

Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors ${}^tA \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et on a alors $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Par suite, on note cette matrice ${}^tA^{-1}$.

Démonstration page 1165

5 Une autre construction de $\mathbb{C}$

Dans le chapitre sur les complexes, nous avons admis l'existence d'un corps,

- contenant $\mathbb{R}$ et un élément i vérifiant $i^2 = -1$,
- qui est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont $(1, i)$ est une base.

Nous allons démontrer ce résultat en utilisant le calcul matriciel.

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, posons $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et :

$$\mathcal{C} = \left\{ M(a,b) \, ; \; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathbb{R}\, I_2 + \mathbb{R}\, J \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de dimension 2 et admettant (I_2, J) pour base. Un calcul élémentaire prouve $J^2 = -I$ et donc :

$$M(a,b)\, M(c,d) = M(a\,c - b\,d\,,\, a\,d + b\,c).$$

Par suite,

- la multiplication laisse stable $\mathcal{C}$, et elle est commutative sur $\mathcal{C}$;
- ainsi, muni des lois induites par celles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble $\mathcal{C}$ est un anneau commutatif ;
- l'application injective $\lambda \mapsto \lambda I$ permet alors d'identifier tout réel λ avec la matrice scalaire λI ;
- l'égalité $M(a,b)\, {}^tM(a,b) = {}^tM(a,b)\, M(a,b) = (a^2+b^2)\, I$ prouve que tout élément non nul de $\mathcal{C}$ est inversible et a pour inverse $\dfrac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
- en posant $i = J$, on obtient alors un corps répondant au problème.

Remarques

- Par cette construction, la conjugaison des complexes correspond à la transposition des matrices.
- 1226 Le module d'un nombre complexe est la racine carrée de son déterminant.

II Représentations matricielles

1 Matrice d'une famille finie de vecteurs

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E. Si v est un vecteur de E, alors les composantes de v sont habituellement manipulées à l'aide d'une matrice colonne que l'on appelle **matrice des composantes du vecteur v dans la base $\mathbf{e}$**. Cette matrice colonne se note $\operatorname{Mat}_{\mathbf{e}}(v)$.

Définition 6

Soit $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une famille de vecteurs de E. La **matrice dans la base $\mathbf{e}$ de $\mathbf{f}$** est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $\operatorname{Mat}_{\mathbf{e}}(f_1, f_2, \ldots, f_p)$, ou $\operatorname{Mat}_{\mathbf{e}}(\mathbf{f})$, dont, pour $j \in [\![1,p]\!]$, la j-ème colonne est égale à $\operatorname{Mat}_{\mathbf{e}}(f_j)$, c'est-à-dire qu'elle est formée des composantes de f_j dans la base $\mathbf{e}$.

Point méthode

La matrice $\operatorname{Mat}_{\mathbf{e}}(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est donc la matrice à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,j} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$

telle que :

$$\forall j \in [\![1,p]\!] \quad f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i.$$

Exemple La matrice $\operatorname{Mat}_{\mathbf{e}}(\mathbf{e})$ est la matrice I_n.

2 Matrice d'une application linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, ainsi que $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une base de F. Rappelons qu'une application linéaire u de E dans F est entièrement définie par la donnée de la famille de vecteurs $\big(u(e_j)\big)_{j\in[\![1,p]\!]}$.

Définition 7

Avec ces notations, la **matrice de u par rapport aux bases $\mathbf{e}$** et $\mathbf{f}$, notée $\operatorname{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u)$, est la matrice de la famille $\big(u(e_j)\big)_{j\in[\![1,p]\!]}$ dans la base $\mathbf{f}$, ou encore la matrice de la famille $u(\mathbf{e})$ dans la base $\mathbf{f}$.

Point méthode

Avec les notations précédentes, la matrice de u par rapport aux bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$ est la matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ dont la j-ème colonne, pour $j \in [\![1,p]\!]$, est formée des composantes de $u(e_j)$ dans la base $\mathbf{f}$, ou encore telle que :

$$\forall j \in [\![1,p]\!] \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, f_i.$$

Cette matrice permet d'écrire analytiquement l'application u.

Proposition 13

Avec les notations précédentes, si, pour $x \in E$, on pose $y = u(x)$ ainsi que

$$X = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad Y = \mathrm{Mat}_{\mathbf{f}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u)$$

alors on a $Y = A\,X$ ou encore :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, x_j.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 1166

Partir de $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\, f_i = u\Big(\sum\limits_{j=1}^{p} x_j\, e_j\Big) = \sum\limits_{j=1}^{p} x_j\, u(e_j)$.

Réciproquement, si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une matrice à n lignes et p colonnes, alors on peut lui associer l'application u qui, au vecteur x de composantes $(x_1, x_2, \dots x_p)$ dans la base $\mathbf{e}$, associe le vecteur y dont les composantes $(y_1, y_2, \dots y_n)$ dans la base $\mathbf{f}$ sont données par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, x_j. \qquad (*)$$

Alors u est une application linéaire de E dans F dont A est la matrice par rapport aux bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$.

p.1166 **Exercice 14** Justifier ce dernier résultat.

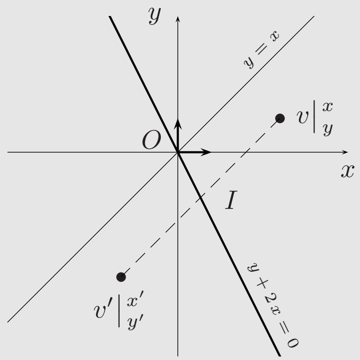
- **Dans le cas où u est un endomorphisme** de E, on prend le plus souvent $\mathbf{f} = \mathbf{e}$; la matrice correspondante s'appelle alors **matrice de u par rapport à $\mathbf{e}$**, et se note $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(u)$.
- **Dans le cas où u est une forme linéaire** définie sur E, on utilise habituellement la famille (1) comme base $\mathbf{f}$ de $\mathbb{K}$, et la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u)$ est appelée matrice de la forme linéaire par rapport à la base $\mathbf{e}$. C'est une matrice à une seule ligne $L = (\ell_1, \ell_2, \dots \ell_p)$ avec $\ell_j = u(e_j)$, et pour x de composantes $(x_1, x_2, \dots x_p)$ on a $u(x) = \sum\limits_{j=1}^{p} \ell_j\, x_j$.

p.1166 **Exercice 15** En Physique ou en SI, vous avez déjà utilisé des rotations de centre O : ce sont des applications linéaires. Le plan vectoriel euclidien étant rapporté à une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on désigne par r une telle rotation de centre O et d'angle θ.

1. Exprimer $r(\vec{\imath})$ et $r(\vec{\jmath})$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
2. En déduire la matrice M de r par rapport à $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
3. Étant donné $v = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ et $v' = x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath}$ son image par r, exprimer x' et y' en fonction de x et y.

p.1166 **Exercice 16**

Dans $\mathbb{R}^2$, on désigne par s la symétrie d'axe la droite D, d'équation $2\,x+y=0$, et de direction D', d'équation $y=x$.



1. Si $v=(x,y)$ a pour image $v'=(x',y')$, vérifier :
$$\exists t \in \mathbb{R} \quad x' = x+t \quad \text{et} \quad y' = y+t$$
et en déduire x' et y' en fonction de x et y.
2. Donner alors la matrice de s par rapport à la base canonique $\mathbf{e}$ de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer la matrice de s par rapport à une base (f_1, f_2) avec $f_1 \in D$ et $f_2 \in D'$.

p.1167 **Exercice 17** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(u)$.

1. Montrer que A est diagonale si, et seulement si, chaque sous-espace $\mathbb{K}e_i$ est stable par u, ce qui équivaut à $u(e_i) \in \mathbb{K}e_i$.
2. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $E_i = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$. Montrer que A est triangulaire supérieure si, et seulement si, chaque sous-espace E_i est stable par u, c'est-à-dire vérifie $u(E_i) \subset E_i$.
3. En déduire une autre démonstration de la stabilité par multiplication de l'ensemble $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures.

p.1167 **Exercice 18** Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u)$. Si A_1 est la sous-matrice formée des r premières colonnes de A, montrer que A_1 représente une restriction de u.

Remarque On dit qu'une matrice A représente une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ ou encore que $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est représentée par la matrice A, s'il existe une base $\mathbf{e}$ de E et une base $\mathbf{f}$ de F telles que $A = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u)$.

3 Relations entre matrices et applications linéaires

Isomorphisme d'espaces vectoriels

Proposition 14

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, rapportés respectivement à des bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$, alors l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Principe de démonstration. Montrer que φ est linéaire puis bijective.

Démonstration page 1167

L'isomorphisme précédent permet d'avoir une justification plus visuelle d'un résultat que nous avons déjà démontré au chapitre 21.

Corollaire 15

Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.

Composition, inversibilité

Proposition 16

Si E, F, G sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, respectivement munis des bases $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$, et si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{g}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}(v)\ \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u).$$

Démonstration page 1168

Remarque En particulier, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathbf{e}$, et si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(v)\ \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(u).$$

Proposition 17

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension n rapportés respectivement à des bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$. Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective si, et seulement si, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u)$ est inversible, et l'on a alors :

$$\big(\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u)\big)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(u^{-1}).$$

Principe de démonstration.

- Si u est bijective, on dispose de u^{-1} et donc de $\mathrm{Mat}_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(u^{-1})$.
- Si $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u)$ est inversible, on dispose de sa matrice inverse qui représente ...

Démonstration page 1169

Remarque En particulier, si E est un espace vectoriel de dimension finie rapporté à une base $\mathbf{e}$, un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est bijectif si, et seulement si, la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathbf{e}}(u)$ est inversible, et on a alors $\big(\operatorname{Mat}_{\mathbf{e}}(u)\big)^{-1} = \operatorname{Mat}_{\mathbf{e}}(u^{-1})$.

p.1169

Exercice 19 Soit $M \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ telle que, si $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, alors $m_{i,j} = \dbinom{j-1}{i-1}$.

1. Dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on pose $u : P(X) \mapsto P(X+1)$.
   Montrer que c'est un automorphisme et donner u^{-1}.
2. En déduire que M est inversible et donner M^{-1}.

Proposition 18

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et muni d'une base $\mathbf{e}$. Une famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n vecteurs de E est une base de E si et seulement si la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathbf{e}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est inversible.

Principe de démonstration. Introduire $u \in \mathcal{L}(E)$ représenté par cette matrice.

Démonstration page 1169

Application linéaire canoniquement associée

Définition 8

Lorsque $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont A est la matrice par rapport aux bases canoniques respectives est appelée **l'application linéaire canoniquement associée à** A.

Point méthode

L'application linéaire canoniquement associée à $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & (y_1, \ldots, y_n) \end{array} \quad \text{avec} \quad \forall i \in [\![1,n]\!] \quad y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, x_j.$$

En identifiant respectivement les vecteurs $(x_1, \ldots, x_p)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ avec les matrices $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, cette application est $X \mapsto A\,X$.

p.1169

Exercice 20 Si $y = (y_1, y_2)$ est l'image de $x = (x_1, x_2, x_3)$ par l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, exprimer les y_i en fonction des x_j.

p.1169 **Exercice 21** En utilisant l'application linéaire canoniquement associée, calculer les puissances positives de $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 9

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et u l'application linéaire canoniquement associée à A.

- Le **noyau** de A est le noyau de u (c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$).
- L'**image** de A est l'image de u (c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$).

Désignons respectivement par $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$ les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

- Comme A est la matrice de u par rapport aux bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$, le j-ème vecteur colonne de A est formé des composantes, dans $\mathbf{f}$, du vecteur $u(e_j)$; dans ce cas, il s'agit donc du vecteur $u(e_j)$.
- Un vecteur $(x_1, \ldots, x_p)$ appartient au noyau de A si, et seulement si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, x_j = 0.$$

Point méthode

- L'image de A est engendrée par les vecteurs colonnes de A.
- Les lignes de A fournissent un système d'équations du noyau de A.

p.1170 **Exercice 22** Donner une base de l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Point méthode

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- D'après la proposition 17 de la page 1148, la matrice A est donc inversible si, et seulement si, ses vecteurs colonnes forment une base de $\mathbb{K}^n$; comme il y en a n, cela équivaut à dire qu'ils forment une famille libre.
- Comme d'après la proposition 12 de la page 1144, la matrice A est inversible si, et seulement si, ${}^tA$ est inversible, on en déduit que A est inversible si, et seulement si, ses vecteurs lignes forment une famille libre.

Proposition 19

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad A\,X = 0 \Longrightarrow X = 0, \tag{$*$}$$

alors A est une matrice inversible.

Principe de démonstration. Utiliser l'endomorphisme canoniquement associé.

Démonstration page 1170

Attention Dans le théorème précédent, l'hypothèse « A carrée » est essentielle puisque toute matrice inversible est carrée et qu'il existe (*cf.* exercice suivant) des matrices A non carrées vérifiant $(*)$.

p.1170

Exercice 23 Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, avec $n \neq p$, vérifiant :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \quad A\,X = 0 \Longrightarrow X = 0.$$

Point méthode

Pour démontrer que $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est un élément inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et exhiber son inverse, il suffit de montrer que, pour tout $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$, le système d'équations linéaires :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,x_j = y_i$$

possède au plus une solution $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et d'exprimer cette solution.

p.1170

Exercice 24 Justifier l'affirmation précédente.

p.1170

Exercice 25 Prouver que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et en donner l'inverse.

Proposition 20

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $A\,B = I_n$, alors les matrices A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Principe de démonstration. L'endomorphisme canoniquement associé à A est surjectif.

Démonstration page 1171

Proposition 21

- Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, tous ses éléments diagonaux sont non nuls.
- L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure) inversible est une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure).

Principe de démonstration. Commencer par supposer $A \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.

- Si $a_{i,i}$ est nul, alors la famille de vecteurs colonnes $(C_1, \ldots C_i)$ est liée, et donc ...
- Si tous les coefficients diagonaux sont non nuls, alors on peut inverser l'application linéaire canoniquement associée ...

Démonstration page 1171

Comme une matrice diagonale est à la fois une matrice triangulaire supérieure et une matrice triangulaire inférieure, on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 22

Une matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est inversible si, et seulement si, tous les λ_i sont non nuls ; son inverse est alors $\mathrm{Diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$.

4 Matrice de changement de base

Soit E un espace vectoriel de dimension n que l'on rapporte successivement :

- à la base $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ appelée dans la suite « première base »,
- à la base $\mathbf{e}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ appelée dans la suite « seconde base ».

Définition 10

Avec les notations précédentes, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}')$ est appelée **matrice de passage de la base e à la base e′**. On la note aussi $\mathrm{P}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'}$.

Point méthode

Avec les notations précédentes, la matrice de passage de la base $\mathbf{e}$ à la base $\mathbf{e}'$ est la matrice carrée $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dont la j-ème colonne, pour $j \in [\![1, n]\!]$, est formée des composantes de e'_j dans la base $\mathbf{e}$, ou encore telle que :

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}\, e_i.$$

Cette matrice permet d'écrire **les formules de changement de base**.

Proposition 23

Avec les notations précédentes, si, pour $x \in E$, on pose $X = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}'}(x)$, alors on a $X = P\,X'$.

Principe de démonstration. Partir de $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, e_i = x = \sum\limits_{j=1}^{n} x'_j\, e'_j$.

Démonstration page 1171

Attention La matrice de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{e}'$ s'obtient en écrivant (en colonnes) les composantes des éléments de la seconde base $\mathbf{e}'$ par rapport à la première base $\mathbf{e}$, ce qui paraît logique. En revanche, pour un vecteur x quelconque de E, elle permet de calculer les composantes de x dans la première base en fonction de ses composantes dans la seconde, ce qui paraît moins naturel, mais qu'il est indispensable de retenir.

p.1171 **Exercice 26** Dans $\mathbb{R}^2$, exprimer la matrice de passage de la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ à la base $(\vec{I}, \vec{J})$ définie par $\vec{I} = (2,3)$ et $\vec{J} = (4,5)$.

Donner une équation cartésienne dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$ de la courbe Γ dont une équation cartésienne dans $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $17\,x^2 - 26\,x\,y + 10\,y^2 = 1$

Lemme 24

Avec les notations précédentes, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie :

$$\forall x \in E \quad \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(x) = A\ \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}'}(x),$$

alors on a $A = \mathrm{P}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'}$.

Démonstration page 1172

Proposition 25

Si $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ sont deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie, alors la matrice de passage $\mathrm{P}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'}$ est inversible et son inverse est la matrice $\mathrm{P}_{\mathbf{e}'}^{\mathbf{e}}$.

Démonstration page 1172

Remarques

- Contrairement à ce qui se passe pour une application linéaire, on ne peut pas associer de changement de base à n'importe quelle matrice, seulement à une matrice inversible.
- En revanche, si $\mathbf{e}$ est une base de E et si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors d'après la proposition 18 de la page 1149 :
  - ∗ il existe une base $\mathbf{e}'$ telle que $A = \mathrm{P}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'}$;
  - ∗ comme la matrice A^{-1} est aussi inversible, il existe une base $\mathbf{e}''$ telle que $A^{-1} = \mathrm{P}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}''}$ et c'est-à-dire telle que $A = \mathrm{P}_{\mathbf{e}''}^{\mathbf{e}}$.
- On peut aussi démontrer la proposition précédente en disant que $\mathrm{P}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'}$ est la matrice de Id_E par rapport aux bases $\mathbf{e}'$ et $\mathbf{e}$. Comme Id_E est une application linéaire bijective, cette matrice est inversible, et son inverse est la matrice de $\mathrm{Id}_E^{-1} = \mathrm{Id}_E$ par rapport aux bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$, c'est-à-dire $\mathrm{P}_{\mathbf{e}'}^{\mathbf{e}}$.

5 Changement de bases et applications linéaires

Cas général : matrice équivalentes

Proposition 26

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$, ainsi que u une application linéaire de E dans F. Si

- $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ sont deux bases de E, et P la matrice de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{e}'$,
- $\mathbf{f}$ et $\mathbf{f}'$ sont deux bases de F, et Q la matrice de passage de $\mathbf{f}$ à $\mathbf{f}'$,
- $A = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}',\mathbf{f}'}(u)$,

alors on a $A' = Q^{-1}\,A\,P$.

Démonstration page 1172

Définition 11

Les matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont **équivalentes** lorsqu'il existe $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $B = M\,A\,N$.

p.1172 **Exercice 27** Montrer que l'on définit ainsi une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

D'après la proposition précédente, deux matrices représentant la même application linéaire sont équivalentes. Montrons la réciproque.

Proposition 27

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ représentant $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Si $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice équivalente à A, alors B représente aussi l'application u.

Démonstration page 1173

Cas des endomorphismes : matrices semblables

Corollaire 28

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie ainsi que $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ deux bases de E. Si l'on note A (respectivement A') la matrice de u dans la base $\mathbf{e}$ (respectivement $\mathbf{e}'$), alors on a :

$$A' = P^{-1}\,A\,P$$

où P est la matrice de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{e}'$.

Démonstration. Conséquence immédiate la proposition 26. □

p.1173 **Exercice 28** Vérifier le résultat précédent pour la symétrie de l'exercice 16 et les deux matrices que l'on a trouvées.

Définition 12

Les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** lorsqu'il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

Remarque Il s'agit d'une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

p.1173 **Exercice 29** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose connaître $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A = P\,D\,P^{-1}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer A^k en fonction de D^k et de P.

Corollaire 29

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. S'il existe une base $\mathbf{e}$ de E telle que l'on ait $A = \operatorname{Mat}_{\mathbf{e}}(u)$ et si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice semblable à A, alors il existe une base $\mathbf{f}$ de E telle que $B = \operatorname{Mat}_{\mathbf{f}}(u)$.

Démonstration. Conséquence immédiate la proposition 27 de la page précédente. □

6 Trace

Définition 13

La **trace** d'une matrice carrée A, notée $\operatorname{Tr} A$, est la somme de ses coefficients diagonaux ; donc si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, alors on a $\operatorname{Tr} A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Notation Pour la trace de A, on rencontre aussi la notation $\operatorname{tr} A$.

Proposition 30

L'application $\operatorname{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Évident en introduisant les coefficients des matrices. □

Proposition 31

- Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{Tr}\left(P^{-1} A\,P\right) = \operatorname{Tr} A$.
  Autrement dit, deux matrices semblables ont même trace.

Principe de démonstration. Pour le premier point, exprimer la trace comme une somme double. Le second point se déduit aisément du premier. Démonstration page 1173

Remarque Dans le premier point de la proposition précédente, $A\,B$ et $B\,A$ peuvent être de tailles différentes puisque $A\,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B\,A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Proposition 32

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Si u est un endomorphisme de E, alors il existe un unique scalaire, noté $\operatorname{Tr} u$ et appelé **trace de u**, tel que, pour toute base $\mathbf{e}$ de E, on ait $\operatorname{Tr} u = \operatorname{Tr}\left(\operatorname{Mat}_{\mathbf{e}}(u)\right)$.

L'application $\operatorname{Tr} : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}$ ainsi définie est une forme linéaire qui vérifie :

$$\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad \operatorname{Tr}(u \circ v) = \operatorname{Tr}(v \circ u)\,.$$

Principe de démonstration. Conséquence immédiate de la proposition précédente.

Démonstration page 1174

p.1174 **Exercice 30** Montrer que la trace d'un projecteur est égale à son rang.

III Écriture par blocs

Il est parfois pratique d'écrire une matrice en utilisant certaines de ses sous-matrices. C'est ce que l'on appelle **écriture par blocs de la matrice**.

1 Cas particulier d'une matrice 2×2 par blocs

Par exemple, si $n_1 \in [\![1, n-1]\!]$ et $p_1 \in [\![1, p-1]\!]$, la matrice :

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} m_{1,1} & \dots & m_{1,p_1} & m_{1,p_1+1} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n_1,1} & \dots & m_{n_1,p_1} & m_{n_1,p_1+1} & \dots & m_{n_1,p} \\ \hline m_{n_1+1,1} & \dots & m_{n_1+1,p_1} & m_{n_1+1,p_1+1} & \dots & m_{n_1+1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,p_1} & m_{n,p_1+1} & \dots & m_{n,p} \end{array}\right)$$

se divise, comme indiqué ci-dessus, en quatre « blocs » ; si l'on pose alors :

$$A = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,p_1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n_1,1} & \dots & m_{n_1,p_1} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} m_{1,p_1+1} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n_1,p_1+1} & \dots & m_{n_1,p} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} m_{n_1+1,1} & \dots & m_{n_1+1,p_1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,p_1} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} m_{n_1+1,p_1+1} & \dots & m_{n_1+1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,p_1+1} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix}$$

alors, par convention la matrice M s'écrit $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$.

Remarque Dans une telle écriture, le type de la matrice A (nombre de lignes et de colonnes) détermine celui des matrices B, C et D.

p.1174

Exercice 31 Soit π un projecteur d'un espace E de dimension n. Montrer que si $\pi \neq 0$ et $\pi \neq \mathrm{Id}_E$, alors il existe $r \in [\![1, n-1]\!]$ et une base $\mathbf{e}$ de E tels que $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(\pi) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, écriture où chacun des 0 désigne la matrice nulle *ad-hoc*.

p.1174 **Exercice 32** Soit s une symétrie d'un espace E de dimension n telle que $s \neq \pm \mathrm{Id}_E$. Montrer qu'il existe $r \in [\![1, n-1]\!]$ et une base $\mathbf{e}$ de E tels que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Proposition 33

Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $r \in [\![1, n-1]\!]$ et :

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{K})$$

alors, en posant $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$:

- F est stable par u si, et seulement si, $B = 0$;
- G est stable par u si, et seulement si, $C = 0$.

Principe de démonstration. Regarder $u(e_j)$ pour $j \in [\![1, r]\!]$. Démonstration page 1174

Remarque Dans le cas où $B = 0$, alors F est stable par u, et A est la matrice par rapport à $(e_1, \ldots, e_p)$ de l'endomorphisme induit $\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x). \end{array}$

Proposition 34 (Produit par blocs)

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $M' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ écrites par blocs sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}.$$

Si le produit AA' existe, alors le produit $M\,M'$ existe et :

$$M\,M' = \begin{pmatrix} AA' + CB' & AC' + CD' \\ BA' + DB' & BC' + DD' \end{pmatrix}.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 1175

- En supposant que le produit AA' existe, vérifier que l'on peut écrire les produits et les sommes de la matrice de droite tels que $AA' + CB'$, $AC' + CD'$ ....
- Chacun des termes du produit $M\,M'$ est alors une somme qui se scinde en deux ....

Point méthode

Le produit par blocs précédent s'effectue comme un produit usuel de deux matrices 2×2 mais, comme le produit matriciel n'est pas commutatif, il est impératif de faire attention à l'ordre de chaque produit de matrices.

2 Généralisation

Avec d'autres écritures par blocs, on peut établir des résultats analogues concernant les produits.

Exemples

- Si $M = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix}$ avec des matrices de tailles compatibles, alors, on a : $M\,M' = \begin{pmatrix} AA' + BB' \end{pmatrix}$ ou plus simplement $M\,M' = AA' + BB'$.
- Si $M = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \end{pmatrix}$ avec des matrices de tailles compatibles, alors, on a l'écriture par blocs : $M\,M' = \begin{pmatrix} AA' & AB' \\ BA' & BB' \end{pmatrix}$.
- On peut écrire $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ en utilisant ses lignes ou ses colonnes :
$$M = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M = \begin{pmatrix} C_1\ C_2\ \dots\ C_p \end{pmatrix}.$$
Avec une telle écriture, si $n = p$ et $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :
$$M\,M' = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'\ C_2'\ \dots\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1C_1' & L_1C_2' & \dots & L_1C_n' \\ L_2C_1' & L_2C_2' & \dots & L_2C_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_nC_1' & L_nC_2' & \dots & L_nC_n' \end{pmatrix}$$
ainsi que :
$$M\,M' = \begin{pmatrix} C_1\ C_2\ \dots\ C_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1' \\ L_2' \\ \vdots \\ L_n' \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} C_k\, L_k'.$$
- Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Pour $C_1, \dots C_r$ éléments de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a :
$$M(C_1\ \dots\ C_r) = (M\,C_1\ \dots\ M\,C_r).$$
- Si $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ et si $\mathbf{e}$ est une base adaptée à cette somme directe, alors la définition de la matrice d'une application linéaire par rapport à une base montre que la matrice d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\mathbf{e}$ est de la forme :
$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_r \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \forall i \in [\![1, r]\!] \quad A_i \in \mathcal{M}_{\dim E_i}(\mathbb{K})$$
si, et seulement si, les E_i sont stables par u.
On dit qu'une telle matrice est **diagonale par blocs** et on la note fréquemment $\operatorname{Diag}(A_1, \dots, A_r)$. Le bloc A_i est alors la matrice de l'endomorphisme u_{E_i}, induit par u sur E_i, par rapport à la partie de $\mathbf{e}$ qui engendre E_i.
Le produit de deux matrices diagonales par blocs, avec des blocs de tailles compatibles, est donné par :
$$\operatorname{Diag}(A_1, \dots, A_r)\operatorname{Diag}(A_1', \dots, A_r') = \operatorname{Diag}(A_1A_1', \dots, A_rA_r').$$

IV Rang d'une matrice

1 Rang de la famille des vecteurs colonnes

Définition 14

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle **rang** de A, noté $\operatorname{rg} A$, le rang de la famille des vecteurs colonnes de A (qui sont des vecteurs de $\mathbb{K}^n$).

Proposition 35

1. Étant donné une base $\mathbf{e}$ d'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E de dimension finie, le rang d'une famille de vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de E est égal au rang de la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathbf{e}}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.
2. Soit E et F deux $\mathbb{K}$–espaces vectoriels de dimension finie rapportés respectivement à des bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$. Le rang d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est égal au rang de la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u)$.

Principe de démonstration.

1. Utiliser l'isomorphisme $$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\xi_i)_{i \in [\![1,n]\!]} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i. \end{array}$$
2. Conséquence immédiate du point précédent.

Démonstration page 1175

p.1175 **Exercice 33** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \operatorname{rg} A = n$.

p.1175 **Exercice 34** Montrer que le rang de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est au plus égal à $\min(n, p)$.

2 Autres caractérisations

Notation Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Pour r entier vérifiant $r \leqslant \min(n,p)$, on note J_r la matrice, écrite par blocs, $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec les cas limites :

$r = 0$	$r = p < n$	$r = n < p$	$r = n = p$
$J_r = 0$	$J_r = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$	$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix}$	$J_r = I_r$

Remarque Dans le cas général, la matrice J_r ci-dessus s'écrit sous la forme :

$$J_r = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right] r \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right] n-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad\qquad}_{r} & \underbrace{\qquad\qquad}_{p-r} \end{array} \end{array}$$

Les r premières colonnes de J_r sont les r premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et les dernières sont nulles. Par suite le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de J_r est de dimension r, et J_r est donc de rang r.

Proposition 36

Une matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si, et seulement si, elle est équivalente à J_r, *i.e.* il existe $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $M = Q\,J_r\,P$.

Principe de démonstration. Démonstration page 1175

- Supposer $\operatorname{rg} M = r$ et construire **e**, base de E, et **f**, base de F, telles que $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u) = J_r$.
- Supposer $M = Q\,J_r\,P$ et utiliser les applications linéaires canoniquement associées.

Corollaire 37

Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles ont même rang.

Proposition 38

Le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée.

Principe de démonstration. Utiliser la proposition précédente dans les deux sens.

Démonstration page 1176

La transposition échangeant les rôles des lignes et des colonnes, on déduit de ce qui précède les diverses caractérisations du rang d'une matrice.

Proposition 39

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est égal :

- au rang de la famille de ses vecteurs colonnes,
- au rang de la famille de ses vecteurs lignes,
- au rang de toute application linéaire qu'elle représente,
- au rang de toute famille de vecteurs qu'elle représente.

p.1176 **Exercice 35** Montrer que pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{rg}(A\,B) \leqslant \operatorname{rg} A$ et $\operatorname{rg}(A\,B) \leqslant \operatorname{rg} B$.

Proposition 40

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice de rang r, alors toute sous-matrice de A est de rang au plus r.

Démonstration page 1176

Proposition 41

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A est égal à r si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées :

(1) on peut trouver dans A une sous-matrice $r \times r$ inversible,

(2) si $s > r$, alors aucune sous-matrice $s \times s$ de A, n'est inversible.

Principe de démonstration.

- Commencer par supposer $\operatorname{rg} A = r$.
  - ∗ Pour (1), on peut trouver une famille de r vecteurs colonnes libre, et donc une sous-matrice $p \times r$ de rang r, dont les lignes ...
  - ∗ quant à (2), c'est une conséquence de la proposition précédente.
- Réciproquement, supposer (i) et (ii), poser $s = \operatorname{rg}(A)$ et envisager $s > r$ puis $r < s$.

Démonstration page 1177

Autrement dit, le rang de A est égal à la plus grande taille des sous-matrices carrées inversibles extraites de A.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$. Posons

$$\alpha\, A + \beta\, B = M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \quad \text{et} \quad \alpha\, {}^t\!A + \beta\, {}^t\!B = M' = (m'_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]}$$

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, il est alors évident que :

$$m_{i,j} = \alpha a_{i,j} + \beta b_{i,j} \quad \text{et} \quad m'_{j,i} = \alpha a_{i,j} + \beta b_{i,j} = m_{i,j},$$

ce qui prouve l'égalité des matrices.

Par suite, la transposition des matrices est une application linéaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Elle est bijective, d'application réciproque la transposition de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ car :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad {}^t({}^t\!A) = A \quad \text{et} \quad \forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \quad {}^t({}^t\!B) = B.$$

Exercice 1

1. D'après la démonstration de la proposition précédente, la transposition est une application linéaire involutive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; c'est donc une symétrie.
2. L'ensemble des éléments invariants est $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$; l'ensemble des éléments transformés en leur opposé est $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
3. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2 On a :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 9 & -4 \\ 12 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

alors que

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

n'a pas de sens puisque le nombre de colonnes de la matrice de gauche est différent du nombre de lignes de la matrice de droite.

Exercice 3 On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (14) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 On a $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3\beta_3 \end{pmatrix}.$

Exercice 5

- Multiplier A, à gauche, par la matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ revient à multiplier les lignes de A respectivement par λ_1, $\lambda_2, \dots$, λ_n. En effet, en notant $a_{i,j}$, $d_{i,j}$ et $b_{i,j}$ les coefficients respectifs des matrices A, D et $B = D\,A$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on a :

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} d_{i,k}\, a_{k,j} = d_{i,i}\, a_{i,j} = \lambda_i\, a_{i,j}.$$

- De même, multiplier A, à droite, par la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ revient à multiplier les colonnes de A respectivement par λ_1, $\lambda_2, \dots$, λ_n.

Proposition 4 Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $j \in [\![1,q]\!]$ et $(k,l) \in [\![1,p]\!]^2$.

- Soit r un entier différent de i. Comme la r-ème ligne de la matrice $E_{i,k}$ est nulle, il est évident que chaque élément de la ligne d'indice r de la matrice produit est nul.
- De même pour $r \neq j$, la colonne d'indice r de la matrice $E'_{l,j}$ étant nulle, chaque élément de la colonne d'indice r de la matrice produit est nul.
- Il reste donc à calculer le terme $m_{i,j}$ du produit.

  Comme dans $m_{i,j} = \sum\limits_{r=1}^{p} e_{i,r}\, e'_{r,j}$, seuls sont non nuls $e_{i,k}$ et $e'_{l,j}$, on en déduit :

  $*$ si $k \neq l$, alors $m_{i,j} = 0$ et donc $E_{i,k}\, E'_{l,j} = 0$;

  $*$ si $k = l$, alors $m_{i,j} = 1$ et donc $E_{i,k}\, E'_{l,j} = E''_{i,j}$;

Proposition 6 Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ et $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q \\ 1\leqslant j\leqslant r}}$.

Posons $BC = P = (p_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,r]\!]}$ et $A(BC) = Q = (q_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,r]\!]}$.

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!]$, on a alors :

$$q_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\, p_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \left(\sum_{\ell=1}^{q} b_{k,\ell}\, c_{\ell,j} \right) = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant p \\ 1\leqslant \ell\leqslant q}} a_{i,k}\, b_{k,\ell}\, c_{\ell,j}.$$

Un calcul similaire avec $(AB)C$ donne le même résultat, et prouve l'égalité des matrices.

Proposition 7 Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ et $B = (b_{j,k})_{(j,k)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}$.

La matrice $C = A\,B$ possède n lignes et q colonnes, donc $C' = {}^t(A\,B)$ possède q lignes et n colonnes et, pour $(k,i) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]$, on a :

$$c'_{k,i} = c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, b_{j,k}.$$

Comme ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathrm{I\!K})$ et ${}^tB \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathrm{I\!K})$, le produit $D = {}^tB\,{}^tA$ existe et possède lui aussi q lignes et n colonnes. En notant ${}^tA = A'$ et ${}^tB = B'$, les relations :

$$\forall (k,i) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!] \quad d_{k,i} = \sum_{j=1}^{p} b'_{k,j}\, a'_{j,i} = \sum_{j=1}^{p} b_{j,k}\, a_{i,j} = c'_{k,i}$$

prouvent alors que les matrices ${}^tB\,{}^tA$ et ${}^t(A\,B)$ sont égales.

Exercice 6 En général, ce n'est pas défini. Pour pouvoir faire ce produit, il faudrait avoir $n = p = 1$, ce qui est d'un intérêt très limité.

Proposition 8

- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ est un espace vectoriel, et donc en particulier, $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +\big)$ est un groupe commutatif.
- La seconde loi, $\times$, est interne, associative et distributive par rapport à la première.
- La matrice scalaire I_n est élément neutre puisque $\forall A \in \mathcal{M}_n \quad A\,I_n = I_n\,A = A$.

Enfin, la multiplication de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ n'est pas commutative puisque, par exemple, on a $E_{1,2}\,E_{2,1} = E_{1,1}$ alors que $E_{2,1}\,E_{1,2} = E_{2,2}$.

Exercice 7 C'est vrai si $n = 1$ mais c'est faux dès que $n \geqslant 2$, comme on peut le vérifier en prenant $B = 0$, $A = E_{1,2}$ et $C = E_{1,1}$.

Exercice 8

- La formule donnant le terme général d'un produit de matrice montre immédiatement que chaque coefficient de U^2 vaut n, ce qui s'écrit $U^2 = n\,U$.
- À l'aide de cette dernière formule et des règles de calcul dans un anneau, on déduit, par une récurrence élémentaire :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad U^p = n^{p-1}U.$$

Exercice 9

- Si $i \neq j$, alors $E_{i,j}$ est nilpotente puisque $E_{i,j}^2 = 0$.
- Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$, et une récurrence élémentaire donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad E_{i,i}^k = E_{i,i}.$$

  On en déduit que $E_{i,i}$ n'est pas nilpotente.

Proposition 9

Soit $(A,B) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})^2$ et $C = A\,B$. Alors pour $1 \leqslant k < i \leqslant n$, on a :

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,b_{j,k}. \qquad (*)$$

- Si $j > k$, alors $b_{j,k} = 0$ car B est triangulaire supérieure.
- Si $j \leqslant k$, alors $j < i$ (puisque $k < i$) et donc $a_{i,j} = 0$ car $A \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.

Donc tous les termes intervenant dans la somme de la relation $(*)$ sont nuls, et l'on en déduit que $c_{i,k}$ est nul. Par suite, C est une matrice triangulaire supérieure.

De plus, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a : $c_{i,i} = a_{i,i}\,b_{i,i}$.

Remarque On aurait pu aussi décomposer A et B sur la base $\big(E_{i,j}\big)_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$.

Si A et B sont triangulaires inférieures, alors la relation $A\,B = {}^t\big({}^t(A\,B)\big) = {}^t({}^tB\,{}^tA)$ et le premier résultat permettent de conclure directement.

Exercice 10 Pour calculer J^2, on pourrait calculer chaque terme du produit, ce qui fait quand même 16 calculs, faciles à faire mais pénibles à rédiger. À titre d'exercice, utilisons la base canonique de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Comme $J = E_{1,2} + E_{2,3} + E_{3,4}$, on a $J^2 = (E_{1,2} + E_{2,3} + E_{3,4})\,(E_{1,2} + E_{2,3} + E_{3,4})$. Par distributivité, la plupart des produits étant nuls, on obtient :

$$J^2 = E_{1,2}\,E_{2,3} + E_{2,3}\,E_{3,4} = E_{1,3} + E_{2,4}$$

On peut alors écrire :

$$J^3 = (E_{1,2} + E_{2,3} + E_{3,4})\,(E_{1,3} + E_{2,4}) = E_{2,4}$$

On en déduit $J^4 = 0$. Finalement, on a $J^0 = I_4$ ainsi que :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 4 \quad J^n = 0.$$

Remarque Nous verrons une justification plus simple à l'exercice 21 de la page 1150.

Exercice 11 Étant donné que $M = I_4 + J$ et que I_4 commute avec toute matrice, on peut utiliser la formule du binôme ; pour $n \geqslant 3$, on a donc :

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k = I_4 + n\,J + \frac{n(n-1)}{2}\,J^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\,J^3$$

et donc $M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 Si $A = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, avec des α_i tous non nuls, alors il est évident que $B = \mathrm{Diag}(\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1})$ vérifie la relation $A\,B = B\,A = I_n$.

Exercice 13 Étant donné que $J^4 = 0$ et que I commute avec J, on a :

$$I_4 = I_4^4 - J^4 = (I_4 - J)(I_4 + J + J^2 + J^3) = (I_4 + J + J^2 + J^3)(I_4 - J).$$

Ainsi $M = I_4 - J$ est inversible, et $M^{-1} = I_4 + J + J^2 + J^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 12 Les relations :

$${}^t(A^{-1})\,{}^tA = {}^t(A\,A^{-1}) = {}^tI_n = I_n \quad \text{et} \quad {}^tA\,{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}\,A) = {}^tI_n = I_n$$

prouvent que ${}^tA$ est inversible et que son inverse est ${}^t(A^{-1})$.

Proposition 13 On peut écrire :

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i\, f_i = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j\, e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j\, u(e_j)$$

et donc :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\, f_i = \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, f_i\right) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} x_j\, a_{i,j}\, f_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} x_j\, a_{i,j}\right) f_i,$$

ce qui donne le résultat annoncé d'après l'unicité de la décomposition dans la base **f**.

Exercice 14 Il est assez simple de prouver que u est linéaire.

Comme e_j est le vecteur dont toutes les composantes dans $\mathbf{e}$ sont nulles, à l'exception de la j-ème qui vaut 1, les composantes de $u(e_j)$ dans la base $\mathbf{f}$ sont les coefficients de la j-ème colonne de la matrice A. Par suite, A est la matrice de u par rapport aux bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$.

Exercice 15

1. Comme $r(\vec\imath)$ est unitaire et fait un angle de θ avec $\vec\imath$, on a :

$$r(\vec\imath) = \cos\theta\,\vec\imath + \sin\theta\,\vec\jmath.$$

Par rotation de $\frac{\pi}{2}$, on en déduit $r(\vec\jmath) = \cos(\theta+\frac{\pi}{2})\vec\imath + \sin(\theta+\frac{\pi}{2})\,\vec\jmath = -\sin\theta\,\vec\imath + \cos\theta\,\vec\jmath$.

2. Par suite la matrice demandée est $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

3. Si le vecteur $v = x\,\vec\imath + y\,\vec\jmath$ a pour image le vecteur $v' = x'\,\vec\imath + y'\,\vec\jmath$, alors on a :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et donc :

$$x' = x\,\cos\theta - y\,\sin\theta \quad \text{et} \quad y' = x\,\sin\theta + y\,\cos\theta.$$

Remarque Comme ce calcul est valable dès que $(\vec\imath, \vec\jmath)$ est une base orthonormée directe du plan, on en déduit que la rotation de centre O et d'angle θ a même matrice par rapport à toutes les bases orthonormées directes du plan.

Exercice 16

1. Si le vecteur $v = (x, y)$ a pour image le vecteur $v' = (x', y')$, alors on a $v' - v \in D'$ et l'on peut donc trouver un réel t tel que :

$$\begin{cases} x' = x + t \\ y' = y + t \end{cases}$$

Comme le milieu de v et de v' est sur D, on en déduit :

$$0 = 2\left(\frac{x + x'}{2}\right) + \left(\frac{y + y'}{2}\right) = 2\left(x + \frac{t}{2}\right) + \left(y + \frac{t}{2}\right)$$

ce qui entraîne $t = -\dfrac{4}{3}\,x - \dfrac{2}{3}\,y$, et permet d'avoir $\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}\,x - \frac{2}{3}\,y \\ y' = -\frac{4}{3}\,x + \frac{1}{3}\,y \end{cases}$

2. Les relations précédentes, qui s'écrivent aussi :
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
entraînent que l'on a $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

3. La matrice de s par rapport à la base (f_1, f_2) peut s'obtenir en exprimant (en colonnes) les composantes par rapport (f_1, f_2) de $s\,(f_1)$ et de $s\,(f_2)$. Par définition d'une symétrie, on obtient immédiatement :
$$\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque On voit, dans ce cas, que la matrice d'une application linéaire peut dépendre de la base (ou des bases) que l'on utilise.

Exercice 17

1. Par définition, pour $i \in [\![1,n]\!]$, on a $u(e_i) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i}\, e_k$. D'après l'unicité de la décomposition dans une base, le vecteur $u(e_i)$ est proportionnel à e_i si, et seulement si, tous les $a_{k,i}$ sont nuls pour $k \neq i$.

   Par suite, A est diagonale si, et seulement si, chaque $u(e_i)$ est colinéaire à e_i, ce qui équivaut à dire que chaque sous-espace $\mathbb{K}e_i$ est stable par u.

2. Comme pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a :
$$E_i = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i) \quad \text{et} \quad u(E_i) = \mathrm{Vect}\big(u(e_1), \ldots, u(e_i)\big),$$
chacun des sous-espaces vectoriels E_i est stable par u si, et seulement si :
$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad u(e_i) \in E_i = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i),$$
ce qui équivaut à :
$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad u(e_i) = \sum_{k=1}^{i} a_{k,i}\, e_k$$
et exprime que la matrice A est triangulaire supérieure.

3. Soit A et B deux matrices triangulaires supérieures. Prenons $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathbf{e}$ sa base canonique. Comme A et B sont triangulaires supérieures, leurs endomorphismes canoniquement associés u et v laissent invariant chacun des E_i ; il en est donc de même de $v \circ u$, ce qui entraîne que $B\,A$ est triangulaire supérieure.

Exercice 18 Notons $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_p)$. Soit $\mathbf{e}' = (e_1, \ldots, e_r)$ et $E' = \mathrm{Vect}(\mathbf{e}')$. Ainsi $\mathbf{e}'$ est une base de E', et, par définition de la matrice d'une application linéaire par rapport à deux bases, la matrice A_1 est la matrice par rapport aux bases $\mathbf{e}'$ et $\mathbf{f}$ de la restriction de u à E'.

Proposition 14

- Notons $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ et $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Étant donné u et v deux éléments de $\mathcal{L}(E,F)$ ainsi que λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$, posons :
$$A = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u) = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$
$$B = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(v) = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$
$$C = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\lambda\, u + \mu\, v) = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}\,.$$

Soit $j \in [\![1,p]\!]$. Par définition de C, on a :

$$(\lambda\, u + \mu\, v)\,(e_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j}\, f_i.$$

Mais, par définition d'une combinaison linéaire d'applications linéaires ainsi que des matrices A et B, on a :

$$\begin{aligned}(\lambda\, u + \mu\, v)\,(e_j) = \lambda\, u\,(e_j) + \mu\, v\,(e_j) &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, f_i + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,j}\, f_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda\, a_{i,j} \, + \mu\, b_{i,j})\, f_i.\end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition dans une base, on en déduit :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \quad c_{i,j} = \lambda\, a_{i,j} \, + \mu\, b_{i,j}.$$

Il en résulte donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\lambda\, u + \mu\, v) = C = \lambda\, A + \mu\, B = \lambda\ \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u) + \mu\ \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(v),$$

ce qui prouve que φ est une application linéaire.

- Comme on sait que, pour toute famille de scalaires $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, il existe une unique application linéaire u vérifiant :

$$\forall j \in [\![1,p]\!] \quad u\,(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, f_i$$

l'application φ est bien une bijection de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition 16 Soit $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ et $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_q)$ des bases respectives de E, F et G. Posons :

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u) = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \\ B &= \mathrm{Mat}_{\mathbf{f},\mathbf{g}}(v) = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,n]\!]} \\ C &= \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{g}}(v\circ u) = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,p]\!]}\,. \end{aligned}$$

La matrice par rapport aux bases **e** et **g** de la composée $v \circ u$ est une matrice à q lignes et p colonnes. Soit $k \in [\![1,p]\!]$. On a alors :

$$\begin{aligned} v\circ u\,(e_k) = v\left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,k}\, f_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} a_{j,k}\, v\,(f_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} \left(\sum_{i=1}^{q} b_{i,j}\, g_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{q} a_{j,k}\, b_{i,j}\, g_i = \sum_{i=1}^{q}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}\, a_{j,k}\right) g_i \end{aligned}$$

Comme $c_{i,k} = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{i,j}\ a_{j,k}$ est le terme se trouvant en i-ème ligne et k-ème colonne de la matrice produit $B\,A$, on en déduit $C = B\,A$, autre écriture du résultat à prouver.

Proposition 17

- Si u est bijective, alors on peut écrire :

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u)\ \mathrm{Mat}_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(u^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathbf{f},\mathbf{f}}(u \circ u^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathbf{f},\mathbf{f}}(\mathrm{Id}_F) = I_n$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(u^{-1})\ \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(u^{-1} \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$$

ce qui prouve que $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u)$ est inversible et que $\big(\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u)\big)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(u^{-1})$.

- Réciproquement, supposons $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u)$ inversible et considérons v l'application linéaire de F dans E dont $(\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u))^{-1}$ est la matrice par rapport aux bases **f** et **e**. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{f},\mathbf{f}}(u \circ v) = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u)\ \mathrm{Mat}_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(v) = I_n = \mathrm{Mat}_{\mathbf{f},\mathbf{f}}(\mathrm{Id}_F) \quad \text{et donc} \quad u \circ v = \mathrm{Id}_F,$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(v)\ \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u) = I_n = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(\mathrm{Id}_E) \quad \text{et donc} \quad v \circ u = \mathrm{Id}_E.$$

On en déduit que u est une application bijective et que $u^{-1} = v$.

Exercice 19

1. u est évidemment une application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans lui-même.
Comme $v : P(X) \mapsto P(X-1)$ vérifie évidemment $u \circ v = v \circ u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$, on en déduit que u est bijectif. Ainsi $u \in \mathcal{GL}\big(\mathbb{R}_{n-1}[X]\big)$.
2. La matrice donnée est la matrice de l'endomorphisme u par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comme $u \in \mathcal{GL}\big(\mathbb{R}_{n-1}[X]\big)$, la matrice M est inversible et a pour inverse la matrice de u^{-1} par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Par suite, M^{-1} est la matrice de terme général :
$$m'_{i,j} = (-1)^{i+j}\binom{j-1}{i-1}.$$

Proposition 18 La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est la matrice par rapport à la base **e** de l'endomorphisme de E qui transforme **e** en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. On sait que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base de E si, et seulement si, cet endomorphisme est bijectif et donc si, et seulement si, $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est inversible (*cf.* proposition précédente).

Exercice 20 La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ permet de définir $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ qui, au vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$, associe le vecteur $y = (y_1, y_2)$ défini par :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$y_1 = x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 \quad \text{et} \quad y_2 = x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3.$$

Exercice 21 L'endomorphisme u canoniquement associé à J et ses itérés transforment, comme suit, la base canonique de $\mathbb{R}^4$, notée (e_1, e_2, e_3, e_4) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & u & & u & & u & & u & \\
e_1 & \mapsto & 0 & \mapsto & 0 & \mapsto & 0 & \mapsto & 0 \\
e_2 & \mapsto & e_1 & \mapsto & 0 & \mapsto & 0 & \mapsto & 0 \\
e_3 & \mapsto & e_2 & \mapsto & e_1 & \mapsto & 0 & \mapsto & 0 \\
e_4 & \mapsto & e_3 & \mapsto & e_2 & \mapsto & e_1 & \mapsto & 0
\end{array}$$

On en déduit immédiatement :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 4 \quad J^n = 0.$$

Exercice 22 Étant donné que l'image de A est engendrée par ses vecteurs colonnes, qui sont tous proportionnels au vecteur $(1,1)$, on peut prendre la famille $\big((1,1)\big)$ comme base de l'image de A.

Proposition 19 La relation donnée signifie que l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est injectif et donc bijectif puisque c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. On en déduit que A est inversible.

Exercice 23 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}^2)$ vérifie :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x_1 = x_2 = 0$$

et, pourtant, elle n'est pas inversible (puisque non carrée).

Exercice 24 En effet, en prouvant ce qui est annoncé, on montre que l'endomorphisme u canoniquement associé à A est injectif ; comme c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il est bijectif ; par suite, A est inversible.

Comme on obtient l'inverse de u en résolvant le système $AX = Y$, l'expression de $x_1, \ldots, x_n$ en fonction de $y_1, \ldots, y_n$ donne l'expression analytique de l'application réciproque et donc la matrice A^{-1} (voir exercice suivant).

Exercice 25 Soit $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{K}^3$. Considérons le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & y_1 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & y_2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & = & y_3 \end{array} \right.$$

Si (x_1, x_2, x_3) est solution, alors, en faisant la somme des 3 équations, on obtient :

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4},$$

et par différence avec chacune des équations, on a alors :

$$x_1 = \frac{3\,y_1 - y_2 - y_3}{4}, \quad x_2 = \frac{-\,y_1 + 3\,y_2 - y_3}{4} \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{-\,y_1 - y_2 + 3\,y_3}{4}.$$

On en déduit l'injectivité de l'application linéaire canoniquement associée à A, ce qui prouve que A est inversible. L'écriture matricielle de la solution :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

nous donne :

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Proposition 20 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = I_n$.

Désignons par u et v les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés respectivement à A et B. Alors l'hypothèse entraîne $u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$.

L'application u est donc surjective et, comme c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit qu'elle est bijective. Par suite A est inversible et, en multipliant la relation $AB = I_n$ par A^{-1}, on obtient $A^{-1} = B$. On en déduit immédiatement que B est inversible et que $B^{-1} = A$.

Proposition 21 Soit $A \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.

- Supposons $a_{i,i} = 0$. Alors la famille de vecteurs colonnes $(C_1, C_2, \ldots C_i)$ est liée car c'est une famille de i vecteurs, tous combinaisons linéaires des $i-1$ premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Par suite, la sur-famille $(C_1, C_2, \ldots C_n)$ est liée, et la matrice A est non inversible.
- Soit une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Pour inverser l'application canoniquement associée, résolvons le système :

$$\left\{ \begin{aligned} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,n}\,x_n &= y_1 \\ a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,n}\,x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ a_{n,n}\,x_n &= y_n \end{aligned} \right.$$

Supposons $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ solution. Alors :

* comme $a_{n,n} \neq 0$, le scalaire x_n est unique et vaut $x_n = \frac{y_n}{a_{n,n}}$;
* pour i allant de n à 1, on peut alors prouver par récurrence que x_i est unique est qu'il s'exprime en fonction de y_i, y_{i+1}, $\ldots, y_n$.

Ainsi l'endomorphisme canoniquement associé à A est injectif et donc bijectif ; par suite, A est inversible. Comme, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, le scalaire x_i s'exprime en fonction de y_i, y_{i+1}, $\ldots, y_n$, la matrice A^{-1} est triangulaire supérieure.

Si A est triangulaire inférieure, alors on peut appliquer le résultat du précédent à ${}^tA$, puis utiliser la relation $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Proposition 23 On peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\,e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j\,e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\,e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,x'_j \right) e_i$$

ce qui donne le résultat annoncé d'après l'unicité de la décomposition dans la base $\mathbf{e}$.

Exercice 26 La famille $(\vec{I}, \vec{J})$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$ car ses deux vecteurs ne sont pas proportionnels. La matrice de passage de la $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ à $(\vec{I}, \vec{J})$ est $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

D'après ce qui précède, les formules permettant, pour un vecteur v, de passer de ses composantes (X, Y) dans $(\vec{I}, \vec{J})$ à ses composantes (x, y) dans $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, sont :

$$\left\{ \begin{aligned} x &= 2X + 4Y \\ y &= 3X + 5Y \end{aligned} \right.$$

Les formules ci-dessus, donnant (x,y) en fonction de (X,Y) permettent aisément de transformer l'équation cartésienne de Γ : il suffit de remplacer x et y en fonction de X et Y. On obtient :

$$17\,(2\,X+4\,Y)^2-26\,(2\,X+4\,Y)\,(3\,X+5\,Y)+10\,(3\,X+5\,Y)^2=1$$

soit encore $2\,X^2+2\,Y^2=1$.

Lemme 24 Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall x\in E \quad \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(x)=A\ \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}'}(x)$.

Soit $j\in[\![1,n]\!]$. On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(e'_j)=A\ \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}'}(e'_j)$.

- Comme la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}'}(e'_j)$ a tous ses coefficients nuls sauf le j-ème qui vaut 1, le produit $A\ \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}'}(e'_j)$ est égal à la j-ème colonne de la matrice A ;
- Comme, par hypothèse, ce doit être aussi la j-ème colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(e'_j)$, on en déduit que $A=\mathrm{P}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'}$.

Proposition 25 La matrice $P=\mathrm{P}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'}$ est la matrice de la famille $\mathbf{e}'$ par rapport à la base $\mathbf{e}$; elle est donc inversible d'après la proposition 18 de la page 1149.

Posons $P=\mathrm{P}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'}$. Pour tout vecteur $x\in E$, on a alors $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(x)=P\ \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}'}(x)$ et, en multipliant les deux membres à gauche par P^{-1}, on a donc $P^{-1}\ \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(x)=\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}'}(x)$. D'après le résultat précédent, on en déduit que $P^{-1}=\mathrm{P}_{\mathbf{e}'}^{\mathbf{e}}$.

Proposition 26 Pour tout $x\in E$ et $y\in F$, posons $X=\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(x)$, $X'=\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}'}(x)$, $Y=\mathrm{Mat}_{\mathbf{f}}(y)$ et $Y'=\mathrm{Mat}_{\mathbf{f}'}(y)$. On a alors :

$$X=P\,X' \quad et \quad Y=Q\,Y'.$$

Lorsque $y=u\,(x)$ on peut écrire $Y=A\,X$ et donc $Q\,Y'=A\,P\,X'$.

Comme Q est inversible, on en déduit $Y'=Q^{-1}A\,P\,X'$, ce qui donne le résultat, d'après la réciproque de la proposition 13 de la page 1146.

Exercice 27 Montrons que l'on a bien une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Elle est réflexive puisque $A=I_n\,A\,I_p$ et que $I_p\in\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et $I_n\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.
- Supposons $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ équivalentes.
  Alors il existe $M\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $N\in\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $B=M\,A\,N$.
  Comme les matrices M et N sont inversibles, on en déduit $A=M^{-1}\,B\,N^{-1}$, avec $M^{-1}\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $N^{-1}\in\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$. Par suite la relation est symétrique.
- Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  Supposons A et B équivalentes, ainsi que B et C.
  On peut alors trouver $M\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $N\in\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$, $M_1\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $N_1\in\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $B=M\,A\,N$ et $C=M_1\,B\,N_1$. On en déduit :
  $$C=M_1\,(M\,A\,N)\,N_1=(M_1\,M)\,A(\,N\,N_1)$$
  ce qui montre que A et C sont équivalentes puisque $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ sont stables par produit. Cette relation est donc transitive.

Il s'agit donc bien d'une relation d'équivalence.

Proposition 27 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices équivalentes. On peut donc trouver $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $B = M\,A\,N$.

Soit $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$, bases respectives de E et F, telles que $A = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u)$.

- N étant inversible, la famille $\mathbf{e}'$ telle que $N = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}')$ est une base de E, et $N = \mathrm{P}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'}$.
- La matrice M étant inversible, la matrice M^{-1} est aussi inversible, et il existe donc une base $\mathbf{f}'$ de F telle que $M^{-1} = \mathrm{P}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{f}'}$

D'après la proposition précédente, en écrivant $B = (M^{-1})^{-1}\,A\,N$, on en déduit que B est égale à $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}',\mathbf{f}'}(u)$.

Exercice 28 Pour cette symétrie, on a vu que :

- sa matrice par rapport à la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$;
- sa matrice par rapport à la base (f_1, f_2) est $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
- la matrice de passage de la première à la seconde base est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut alors vérifier que l'on a $A' = P^{-1} A\,P$ ou encore, ce qui est équivalent et évite de calculer une matrice inverse, $P\,A' = A\,P$.

Exercice 29 Si $A = P\,D\,P^{-1}$, alors on peut montrer par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k = P\,D^k\,P^{-1}.$$

Si D^k est aisée à calculer, par exemple si elle est diagonale, on peut alors obtenir facilement l'expression de A^k.

Proposition 31

- Posons $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, $B = \left(c_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ et $C = AB = \left(c_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

  Alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $c_{i,i} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{i,k}\,b_{k,i}$ et donc :

  $$\mathrm{Tr}\,(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\,b_{k,i} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant k\leqslant p}} a_{i,k}\,b_{k,i}.$$

  Un calcul analogue donnerait :

  $$\mathrm{Tr}\,(BA) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant k\leqslant p}} b_{i,k}\,a_{k,i}.$$

  Comme ces deux sommes sont égales, on a $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$.
- On en déduit immédiatement :

  $$\mathrm{Tr}\left(P^{-1}A\,P\right) = \mathrm{Tr}\left((P^{-1}A)\,P\right) = \mathrm{Tr}\left(P\,(P^{-1}A)\right) = \mathrm{Tr}\left((P\,P^{-1})\,A\right) = \mathrm{Tr}\,A.$$

Proposition 32 Les matrices A et A' représentant $u \in \mathcal{L}(E)$ dans des bases **e** et **e'** sont reliées par $A' = P^{-1}AP$. Elles ont donc même trace. On peut donc définir la trace de u comme la valeur commune des traces des matrices qui le représentent.

L'application $\operatorname{Tr} : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}$ vérifie donc $\operatorname{Tr} u = \operatorname{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}} u)$ pour toute base **e** de E.

La linéarité et le dernière propriété découlent immédiatement des propriétés correspondantes de la trace des matrices.

Exercice 30

- Soit π un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension n. Posons $E' = \mathrm{Im}\pi$ et $E'' = \operatorname{Ker}\pi$. Si $r = \operatorname{rg}\pi$, alors on peut trouver une base $\mathbf{e}' = (e_1, \ldots, e_r)$ de E' et une base $\mathbf{e}'' = (e_{r+1}, \ldots, e_n)$ de E''.
- La matrice de π dans la base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E est alors une matrice diagonale dont les r premiers termes diagonaux valent 1, et les autres 0.
- Il est alors immédiat que la trace de cette matrice vaut $r = \operatorname{rg}\pi$; il en est donc de même de la trace de π.

Exercice 31 Avec les hypothèses, on a $r \neq 0$ et $r \neq n$; les résultat demandé n'est alors qu'une simple réécriture par blocs de la matrice utilisée dans l'exercice 30. Pour préciser, on peut faire apparaître la taille des matrices « 0 », en écrivant :

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(\pi) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Exercice 32 Soit s une symétrie d'un espace vectoriel E de dimension n.

Posons $E' = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $E'' = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id})$. Ces sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Si $r = \dim E'$, alors prenons $\mathbf{e}' = (e_1, \ldots, e_r)$ base de E' et $\mathbf{e}'' = (e_{r+1}, \ldots, e_n)$ base de E''. La matrice de s dans la base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E est alors une matrice diagonale dont les r premiers termes diagonaux valent 1, les autres valant -1, ce qui est une autre écriture de $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

Remarque On aurait pu utiliser l'exercice précédent et la relation $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

Proposition 33

- Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{r+1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant r}}$. Par définition de la matrice d'une application linéaire, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, on a :

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j}\, e_j + \sum_{i=p+1}^{n} b_{i,j}\, e_j.$$

  Comme $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base de F, ce sous-espace vectoriel est stable par u si, et seulement si, chacun des ces $u(e_j)$ est élément de F, ce qui revient à dire que, pour $i \in [\![p+1, n]\!]$, on a $b_{i,j} = 0$ et donc que $B = 0$.
- Démonstration analogue pour la stabilité de G.

Proposition 34 Soit (r,s) et (r',s') tels que $A \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$ et $A' \in \mathcal{M}_{r',s'}(\mathbb{K})$.

Pour pouvoir faire le produit AA', il faut $s = r'$, ce que nous supposons donc.

- Alors $AA' \in \mathcal{M}_{r,s'}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{r,p-s}(\mathbb{K})$ et $B' \in \mathcal{M}_{p-s,s'}(\mathbb{K})$; donc CB' existe et l'on a $CB' \in \mathcal{M}_{r,s'}(\mathbb{K})$. Par suite, $AA' + CB'$ existe.

  Démonstration similaire pour chacun des trois autres termes de $M\,M'$.

- Soit $\mu_{i,j}$ le terme générique du produit $M\,M'$.

  * Pour $(i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,s']\!]$, on a :
  $$\mu_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} m_{i,k} m'_{k,j} = \sum_{k=1}^{s} a_{i,k}\, a'_{k,j} + \sum_{k=s+1}^{p} c_{i,k}\, b'_{k,j}$$
  ce qui est bien le terme d'indice (i,j) du produit $AA' + CB'$.
  * Démonstration similaire pour chacun des trois autres termes de $M\,M'$.

Proposition 35

1. Si $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, alors l'application linéaire :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\xi_i)_{i\in[\![1,n]\!]} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i. \end{array}$$
est un isomorphisme, puisque l'image de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est la base $\mathbf{e}$.

   Cet isomorphisme transforme la famille des vecteurs colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ en la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, et donc le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ en $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.

   Ces deux sous-espaces vectoriels ont donc même dimension, d'où le résultat.

2. Conséquence du point précédent puisque $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathbf{f}}\big(u(\mathbf{e})\big)$ et que :
$$\mathrm{rg}\, u = \dim(\mathrm{Im}\, u) = \dim \mathrm{Vect}\,\big(u(\mathbf{e})\big).$$

Exercice 33 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on sait que l'endomorphisme canoniquement associé à A est bijectif si, et seulement s'il est surjectif c'est-à-dire si, et seulement si, son rang est n. Donc A est inversible si, et seulement si, son rang est égal à n.

Exercice 34 Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors le rang de A est :

- inférieur ou égal à p car la famille des vecteurs colonnes est indexée par $[\![1,p]\!]$,
- inférieur ou égal à n car les vecteurs colonnes sont éléments de $\mathbb{K}^n$.

Par suite, le rang de A est au plus égal à $\min(n,p)$.

Proposition 36

- Supposons M de rang r et désignons par u l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à M. D'après la proposition 35 de la page 1159, elle est de rang r et son noyau est donc de dimension $p - r$.

  Soit $(e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}\, u$. Complétons cette famille libre en une base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_p)$ de E à l'aide d'une base d'un supplémentaire E_0 de $\mathrm{Ker}\, u$ et posons $f_1 = u(e_1)$, $f_2 = u(e_2)$,..., $f_r = u(e_r)$.

Comme u induit un isomorphisme de E_0 sur $\operatorname{Im} u$ (proposition 24 de la page 1103), la famille $(f_1, \ldots, f_r)$, image d'une base de E_0 par cet isomorphisme, est libre. On peut donc la compléter en une base $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_r, f_{r+1}, \ldots, f_n)$ de F.

Par construction, on a donc $\operatorname{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(u) = J_r$, ce qui, d'après la formule de changement de bases, donne le résultat annoncé : en prenant pour P l'inverse de la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^p$ à $\mathbf{e}$, et pour Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à $\mathbf{f}$, on a $M = Q\, J_r\, P$.

- Réciproquement, supposons $M = Q\, J_r\, P$ et désignons par :
  - $*$ p l'automorphisme de $\mathbb{K}^p$ canoniquement associé à la matrice inversible P,
  - $*$ q l'automorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice inversible Q,
  - $*$ j l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à J_r.

  Alors $Q\, J_r\, P$ est la matrice par rapport aux bases canoniques de $q \circ j \circ p$. Comme p et q sont des isomorphismes, le rang de $q \circ j \circ p$ est, d'après la proposition 23 de la page 1103, égal à celui de j, c'est-à-dire à r.

Proposition 38 Dans cette démonstration, nous noterons $J_{n,p,r}$ la matrice J_r de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit r le rang de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. D'après la proposition précédente, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ tels que $A = P\, J_{n,p,r}\, Q$. Par transposition, on en déduit :

$$^t\!A = {}^t\!Q\, {}^t\!J_{n,p,r}\, {}^t\!P = {}^t\!Q\, J_{p,n,r}\, {}^t\!P.$$

Les matrices ${}^t\!P$ et ${}^t\!Q$, transposées de matrices inversibles, étant inversibles, d'après la proposition précédente, le rang de ${}^t\!A$ est le rang de $J_{p,n,r}$. Il est donc égal à r c'est-à-dire au rang de A.

Exercice 35 En notant f et g les applications linéaires canoniquement associées respectivement à Aet B, on a $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f$, $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} g$ et $\operatorname{rg}(A\,B) = \operatorname{rg}(f \circ g)$.

- Comme $\operatorname{Im}(f \circ g) \subset \operatorname{Im}(f)$ de façon évidente, on a $\operatorname{rg}(f \circ g) \leqslant \operatorname{rg} f$.
- L'inclusion $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker}(f \circ g)$ donne, par le théorème du rang :

$$r - \operatorname{rg} g = \dim \operatorname{Ker} g \leqslant \dim \operatorname{Ker}(f \circ g) = r - \operatorname{rg}(f \circ g),$$

  d'où $\operatorname{rg} g \geqslant \operatorname{rg}(f \circ g)$.

On en déduit les deux inégalités demandées.

Remarque On aurait pu montrer la deuxième inégalité à partir de la première par transposition. En effet :

$$\operatorname{rg}(A\,B) = \operatorname{rg}\big({}^t(A\,B)\big) = \operatorname{rg}({}^t\!B\, {}^t\!A)$$

ce qui donne $\operatorname{rg}(A\,B) \leqslant \operatorname{rg}({}^t\!B) = \operatorname{rg} B$ en appliquant la première inégalité aux matrices ${}^t\!B$ et ${}^t\!A$.

Proposition 40 Soit A' une sous-matrice de A. Pour former A', commençons par former A_1, obtenue en choisissant les colonnes de A qui figurent dans A'. Par suite, le rang de la famille des vecteurs colonnes de A_1 est au plus r. Ensuite, pour former A', il suffit d'extraire des lignes de A_1 et, en raisonnant sur les lignes, on a alors $\operatorname{rg} A' \leqslant \operatorname{rg} A_1 \leqslant \operatorname{rg} A$.

Proposition 41

- Supposons $\operatorname{rg} A = r$.
  - $*$ On peut alors trouver une famille libre de r vecteurs colonnes de A.
    Par suite, il existe une sous-matrice A_1 extraite de A de taille $n \times r$ et de rang r, dont les vecteurs colonnes forment une famille libre. On a donc $\operatorname{rg} A_1 = r$.
    Comme r est aussi le rang des vecteurs lignes de A_1, on peut trouver r lignes de A_1 formant une famille libre. En extrayant la matrice $r \times r$ correspondante, on obtient une matrice carrée d'ordre r et de rang r, qui est donc inversible.
  - $*$ D'après la proposition précédente, toute matrice extraite de A est de rang au plus r. Donc une matrice carrée d'ordre $k > r$ ne peut pas être inversible.
- Réciproquement, supposons $(1.)$ ainsi que $(2.)$, et posons $s = \operatorname{rg}(A)$.
  - $*$ Si $s > r$, alors, d'après la partie directe, on peut extraire, de A, une matrice carrée inversible d'ordre s, ce qui est incompatible avec (ii).
  - $*$ Si $s < r$, alors, d'après la partie directe, toute matrice d'ordre r extraite de A, est une matrice non inversible, ce qui est incompatible avec (i).

  On en déduit $r = s$, ce qui termine la démonstration.

S'entraîner et approfondir

22.1 Calculer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1 = \big((1,2,1),(2,3,3),(3,7,1)\big)$ à la base $\mathcal{B}_2 = \big((3,1,4),(5,3,2),(1,-1,7)\big)$.

22.2 Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer AB, BA, $A^2 - B^2$ et $(A+B)(A-B)$.

22.3 Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on prend $e_1 = (1,1)$, $e_2 = (1,-1)$ et l'on pose $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1)$ ainsi que $E_2 = \mathrm{Vect}(e_2)$. On considère alors :

- p la projection de $\mathbb{R}^2$ sur E_1 parallèlement à E_2,
- s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

1. Déterminer les matrices de p et de s par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$, puis par rapport à la base (e_1, e_2).
2. Évaluer toutes les puissances de ces diverses matrices.

⋆ **22.4** Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et M sa matrice par rapport à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$.
   Quelle est la matrice de u par rapport à $\mathcal{B}_1 = (-e_1, e_2, \dots e_n)$?
   Quelle est la matrice de u par rapport à $\mathcal{B}_2 = (e_2, e_1, e_3, e_4, \dots e_n)$?
2. Quels sont les endomorphismes de l'espace vectoriel E dont les matrices sont indépendantes de la base choisie ?
3. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{GL}_n(K)$?

22.5
1. Déterminer toutes les puissances positives de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. On considère deux suites réelles définies par la donnée de u_0 et v_0 et par les relations :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = -u_n.$$
   Déterminer une expression de u_n et v_n en fonction de n.

22.6 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Établir $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$.
2. L'endomorphisme u est il un projecteur ?
3. Déterminer toutes les puissances de A.

⋆ **22.7** Soit $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
2. Quels sont les endomorphismes qui commutent avec u ? Montrer qu'ils forment un anneau et un espace vectoriel de dimension 3.

22.8 Calculer toutes les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} a^2 & a\,b & a\,c \\ a\,b & b^2 & b\,c \\ a\,c & b\,c & c^2 \end{pmatrix}$.

⋆⋆ **22.9** Structure pour les lois usuelles de chacun des ensembles suivants :

1. $\mathcal{A} = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & 4\,y \\ -y & x-y \end{pmatrix} \; ; \; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
2. $\mathcal{B} = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -\overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix} \; ; \; (x,y) \in \mathbb{C}^2 \right\}$

22.10 Déterminer les puissances de $A = \begin{pmatrix} -a\cos t + b\sin t & -a\sin t + b\cos t \\ -a\sin t + b\cos t & a\cos t - b\sin t \end{pmatrix}$.

22.11 Calculer l'inverse, s'il existe, de chacune des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ où $j = \exp(2i\pi/3)$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$

22.12 Calculer toutes les puissances de $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Introduire J, matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients valent 1.

22.13 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les dimensions des deux sous-espaces vectoriels $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A\,M = 0\}$ et de $\{A\,M\,;\; M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\}$.

⋆ **22.14** Étant donné un entier $n \geqslant 2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on appelle $M(a,b)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

et on pose $\mathcal{E} = \left\{M(a,b)\,;\; (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel dont une base est $I = M(1,0)$ et $J = M(1,1)$.
2. Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication.
3. Montrer que la famille $\big(M(a,b),\; M(a,b)^2, I\big)$ est liée.
   Exhiber une relation linéaire entre ces matrices.
4. En déduire une condition pour que $M(a,b)$ soit inversible et déterminer son inverse lorsqu'il existe.

⋆⋆ **22.15** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$.

Déterminer l'inverse de la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $m_{k,j} = \omega^{(k-1)(j-1)}$.

⋆ **22.16** On travaille dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$.

1. Montrer que la famille :
   $$\mathcal{B} = \big((X-1)^3, (X-1)^2(X+1), (X-1)(X+1)^2, (X+1)^3\big)$$
   est une base de E.
2. Déterminer la matrice de passage M de la base canonique de E à $\mathcal{B}$.
3. Quel est son inverse ?
4. Retrouver ce dernier résultat en utilisant l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ qui transforme la base canonique en $\mathcal{B}$.

Solution des exercices

22.1 Méthode utilisant un système

On peut commencer par essayer d'exprimer tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}_1 = (e_1 = (1, 2, 1),\ e_2 = (2, 3, 3),\ e_3 = (3, 7, 1))$.

La condition $(x, y, z) = a\, e_1 + b\, e_2 + c\, e_3$ correspond au système :

$$\begin{cases} a + 2\,b + 3\,c = x \\ 2\,a + 3\,b + 7\,c = y \\ a + 3\,b + c = z \end{cases}$$

que l'on peut résoudre par la méthode de Gauss.

- Les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent :
$$\begin{cases} a + 2\,b + 3\,c = x \\ \quad - \ b + \ c = y - 2\,x \\ \qquad b - 2\,c = z - x \end{cases}$$
- L'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ donne alors :
$$\begin{cases} a + 2\,b + 3\,c = x \\ \quad - \ b + \ c = y - 2\,x \\ \qquad\quad - \ c = -3\,x + y + z \end{cases}$$
- Par suite le système est un système de Cramer et sa solution est :
$$c = 3\,x - y - z\,, \quad b = 5\,x - 2\,y - z \quad \text{et} \quad a = -18\,x + 7\,y + 5z. \qquad (*)$$

En particulier, cela montre que la famille $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Pour obtenir la matrice de la famille $\mathcal{B}_2$ par rapport à $\mathcal{B}_1$ il suffit d'utiliser les formules $(*)$ pour chacun des vecteurs de $\mathcal{B}_2$; on obtient alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} -27 & -59 & 10 \\ 9 & 17 & 0 \\ 4 & 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

Il reste évidemment à vérifier que cette matrice est inversible ou que $\mathcal{B}_2$ est une base.

Méthode utilisant les matrices de passage

- Soit $\mathcal{B}_1 = \ ((1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1))$.

  La matrice de $\mathcal{B}_1$ par rapport à la base canonique $\mathcal{B}_0$ est :
$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
  Cette matrice est inversible car :

  * les deux premiers vecteurs colonnes ne sont par proportionnels ;
  * il est facile (en posant un système) de vérifier que le troisième n'est pas combinaison linéaire des deux premiers.

  Par suite, $\mathcal{B}_1$ est une base et la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$ est P_1.

- Soit $\mathcal{B}_2 = ((3,1,4),(5,3,2),(1,-1,7))$.
  On prouve de même que la matrice de $\mathcal{B}_2$ par rapport à $\mathcal{B}_0$,
  $$P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$
  est une matrice inversible.

Si un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ a pour matrice de composantes X_0 par rapport à $\mathcal{B}_0$ ainsi que X_1 par rapport à $\mathcal{B}_1$ et X_2 par rapport à $\mathcal{B}_2$, alors :
$$X_0 = P_1\, X_1 \quad \text{et} \quad X_0 = P_2\, X_2$$
ce qui entraîne :
$$X_1 = P_1^{-1} P_2\, X_0$$
et prouve que la matrice cherchée est $P_1^{-1} P_2$. On peut calculer P_1^{-1} en résolvant un système d'équations. On en déduit :
$$P_1^{-1} P_2 = \begin{pmatrix} -27 & -59 & 10 \\ 9 & 17 & 0 \\ 4 & 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

22.2 Un calcul direct donne $A\,B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B\,A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ainsi que :
$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A+B)\,(A-B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
On peut ici vérifier que :
$$A^2 - B^2 \neq (A+B)\,(A-B),$$
ce qui n'a rien d'étonnant car $A\,B \neq B\,A$.

22.3 1. **Matrice de p par rapport à la base canonique** : si $v = (x,y)$ a pour image $v' = (x',y')$ alors, on peut trouver $k \in \mathbb{R}$ tel que $v' = v + k\,e_2$ et donc :
$$\begin{cases} x' = x + k \\ y' = y - k \end{cases} \quad \text{avec} \quad x' = y'.$$
On en déduit immédiatement $k = \frac{1}{2}(y-x)$ et donc :
$$x' = \frac{1}{2}(x+y) \quad \text{et} \quad y' = \frac{1}{2}(x+y).$$
La matrice recherchée est donc $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Matrice de s par rapport à la base canonique :
Méthode 1 : Par une méthode élémentaire indépendante du résultat précédent, si $v = (x,y)$ a pour image $v' = (x',y')$, alors on peut trouver $k \in \mathbb{R}$ tel que $v' = v + k\,e_2$ et $\frac{1}{2}(v+v') \in \mathrm{Vect}(e_1)$, ou encore :
$$\begin{cases} x' = x + k \\ y' = y - k \end{cases} \quad \text{avec} \quad \frac{x+x'}{2} = \frac{y+y'}{2}.$$

On en déduit immédiatement $k = y - x$ et donc :

$$x' = y \quad \text{et} \quad y' = x$$

La matrice recherchée est donc $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Méthode 2 : On peut dire plus rapidement que l'on a $s = 2\,p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$; comme l'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{B_0}(u)$ est linéaire, on a $S = 2\,P - I_2$ et donc :

$$S = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices de p et s par rapport à la base (e_1, e_2) se trouvent vectoriellement sans calcul (en regardant les images des vecteurs de cette base) et sont respectivement $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. L'endomorphisme p étant un projecteur, on a $p^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p^n = p$.
   En utilisant l'isomorphisme $u \mapsto \mathrm{Mat}_{B_0}(u)$ on en déduit :

   $$P^0 = I_2 \quad \text{et, pour } n \geqslant 1, \quad P^n = P.$$

   Il est *exclu de parler des puissances négatives* de P car, p n'étant pas bijectif, la matrice P, qui le représente, n'est donc pas inversible.

   En ce qui concerne s, on a $\forall n \in \mathbb{Z} \quad s^{2n} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ et $s^{2n+1} = s$.
   Pour les matrices correspondantes, on en déduit :

   $$S^{2n} = I_2 \quad \text{et} \quad S^{2n+1} = S.$$

   Dans ce cas n peut prendre des valeurs négatives car s est bijective et S est donc inversible.

22.4 1. La matrice de u par rapport à $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) = (-e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est la matrice des vecteurs $(-u(e_1), u(e_2), \ldots u(e_n))$ par rapport à la base $(-e_1, e_2, \ldots e_n)$.
   En exprimant $\big(u(e'_1), u(e'_2), \ldots u(e'_n)\big)$ en fonction de $(e'_1, e'_2, \ldots e'_n)$ on voit qu'elle elle est obtenue, à partir de M, en multipliant la première colonne par -1, *puis* en multipliant la première ligne par -1.
   De même la matrice de u par rapport à $\mathcal{B}_2 = (e_2, e_1, e_3, e_4, \ldots e_n)$ est obtenue, à partir de M, en permutant les deux premières colonnes, *puis* en permutant les deux premières lignes.

2. Soit u un endomorphisme répondant au problème ainsi que M sa matrice par rapport à la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots e_n)$.
   Comme sa matrice par rapport à $\mathcal{B}_1$ doit être égale à M, tous les coefficients non diagonaux de la première ligne et de la première colonne doivent être nuls.
   En utilisant la base obtenue en multipliant par -1 le i-ème vecteur de la base initiale on trouve un résultat similaire pour toute ligne et toute colonne.

Par suite la matrice M est diagonale.

Comme la matrice de u par rapport à $\mathcal{B}_2$ est aussi doit être égale à M, on en déduit que $m_{1,1} = m_{2,2}$.

En utilisant la base obtenue en permutant e_1 avec e_i, on obtient $m_{1,1} = m_{i,i}$.

Par suite, la matrice M est donc scalaire *i.e.* u est une homothétie.

Réciproquement, il est évident que toute homothétie répond au problème.

3. Soit M vérifiant la propriété. Toute matrice $P \in \mathcal{GL}_n(K)$ est aussi une matrice de changement de base, et la relation $PM = MP$ peut encore s'écrire $M = P^{-1}MP$.

   Par suite, si M commute avec toute matrice inversible P, alors l'endomorphisme canoniquement associé à M a même matrice dans toute base et, d'après la question précédente, c'est une homothétie. Par suite, M est une matrice scalaire.

   Réciproque évidente.

22.5 1. On voit directement par calcul $A^3 = -I_3$, et donc $\forall p \in \mathbb{N} \quad A^{3p} = (-1)^p I_3$.

On en déduit directement :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad A^{3p+1} = (-1)^p A \quad \text{et} \quad A^{3p+2} = (-1)^p A^2 = (-1)^p \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. La relation vérifiée par les suite u et v s'écrivant aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

une récurrence élémentaire montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on en déduit alors :

$$\begin{cases} u_{3p} = (-1)^p\, u_0 \\ v_{3p} = (-1)^p\, v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{3p+1} = (-1)^p\,(u_0 + v_0) \\ v_{3p+1} = (-1)^{p+1}\, u_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{3p+2} = (-1)^p\, v_0 \\ v_{3p+2} = (-1)^{p+1}\,(u_0 + v_0) \end{cases}$$

22.6 1. • Prouvons $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$.

Soit $y = (y_1, y_2, y_3) \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$.

Il existe donc $x = (x_1, x_2, x_3)$ tel que $y = u(x)$, on a

$$y_1 = -x_2 + x_3\,, \quad y_2 = +x_1 - x_3 \quad y_3 = -x_1 + x_2$$

et donc $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. (a)

Comme $y \in \operatorname{Ker} u$, on a $-y_2 + y_3 = y_1 - y_3 = -y_1 + y_2 = 0$ et donc :

$$y_1 = y_2 = y_3. \qquad (b)$$

Des relations (a) et (b) on déduit $y = 0$, ce qui donne :

$$\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}.$$

• Étant donné que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$ et que $\dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u = dim\mathbb{R}^3$, on en déduit que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} u \oplus \dim \operatorname{Im} u$.

2. Comme $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \neq A$, on voit que A n'est pas la matrice d'un projecteur.
3. Comme $\operatorname{Ker} u \neq \{0\}$, l'application u n'est pas injective. Elle n'est donc pas bijective et, par suite, il n'est pas question de calculer des puissances négatives.

   Un calcul direct donne :
$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = -3\,A,$$
   et, par une récurrence élémentaire, on obtient pour $p \geqslant 1$:
$$A^{2p+1} = (-3)^{p-1}\,A \qquad \text{et} \qquad A^{2p} = (-3)^{p-1}\,A^2.$$

22.7 1. L'hypothèse $u^2 \neq 0$ nout dit qu'il existe $a \in \mathrm{IR}^3$ tel que $u^2(a) \neq 0$.

Montrons que la famille $\big(a, u(a), u^2(a)\big)$ est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{IR}^3$ tel que :
$$\alpha\, a + \beta\, u(a) + \gamma\, u^2(a) = 0.$$

- En appliquant u^2 à cette relation, on obtient $\alpha\, u^2(a) = 0$ et, comme $u^2(a) \neq 0$, on en déduit $\alpha = 0$.
- En transformant alors la relation initiale par u on obtient : $\beta\, u^2(a) = 0$ et, comme $u^2(a) \neq 0$, on en déduit $\beta = 0$.
- On a alors $\gamma\, u^2(a) = 0$, qui entraîne $\gamma = 0$.

Ainsi la famille $\big(a, u(a), u^2(a)\big)$ est libre.

Comme c'est une famille de 3 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, on en déduit immédiatement que c'est une base de IR^3 ; la matrice de u dans cette base répond évidemment au problème.

2. Soit $v \in \mathcal{L}(\mathrm{IR}^3)$ commutant avec u.

   Étant donné que $\big(a, u(a), u^2(a)\big)$ est une base de IR^3 et que $v(a) \in \mathrm{IR}^3$, on peut trouver $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathrm{IR}^3$ tels que :
$$v(a) = \lambda\, a + \mu\, u(a) + \nu\, u^2(a).$$
   Posons $w = \lambda\, \mathrm{Id}_E + \mu\, u + \nu\, u^2$. En utilisant $v \circ u = u \circ v$, on a alors
$$\begin{aligned} v(u(a)) &= u\big(v(a)\big) \\ &= u\big(\lambda\, a + \mu\, u(a) + \nu\, u^2(a)\big) \\ &= \lambda\, u(a) + \mu\, u^2(a) + \nu\, u^3(a) = w\big(u(a)\big). \end{aligned}$$
   On prouve de même $v\big(u^2(a)\big) = w\big(u^2(a)\big)$.

   Comme elles coïncident sur une base, les applications linéaires v et w sont donc égales. Par suite v, et donc toute application linéaire commutant avec u, est élément du sous-espace vectoriel engendré par $\big(\mathrm{Id}_E, u, u^2\big)$.

La réciproque étant évidente, l'ensemble qui nous intéresse est donc :

$$\operatorname{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, u, u^2\right) = \left\{\lambda\,\mathrm{Id}_E + \mu\,u + \nu\,u^2\,;\ (\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3\right\}.$$

Comme Id_E est élément de l'ensemble, pour prouver que c'est un anneau, il suffit d'en vérifier la stabilité pour la composition des applications. Soit donc $v_1 = \lambda_1\,\mathrm{Id}_E + \mu_1\,u + \nu_1\,u^2$ et $v_2 = \lambda_2\,\mathrm{Id}_E + \mu_2\,u + \nu_2\,u^2$. Comme $u^3 = u^4 = 0$, un calcul direct dans l'anneau $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ donne :

$$\begin{aligned} v_2 \circ v_1 &= (\lambda_2\,\mathrm{Id}_E + \mu_2\,u + \nu_2\,u^2) \circ (\lambda_1\,\mathrm{Id}_E + \mu_1\,u + \nu_1\,u^2) \\ &= \lambda_1\,\lambda_2\,\mathrm{Id}_E + (\lambda_1\,\mu_2 + \lambda_2\,\mu_1)\,u + (\lambda_1\,\nu_2 + \mu_1\mu_2 + \lambda_2\,\nu_1)\,u^2 \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

22.8 Comme $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ on a :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \left(a^2+b^2+c^2\right) \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \left(a^2+b^2+c^2\right) A. \end{aligned}$$

Une récurrence immédiate donne :

$$\forall n \geqslant 1 \quad A^n = \left(a^2+b^2+c^2\right)^{n-1} A.$$

Il ne peut être question de calculer les puissances négatives car le rang de cette matrice est au plus égal à 1.

22.9 1. En posant $J = M(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $M(x,y) = x\,I_2 + y\,J$.

- Comme $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on en déduit que $\mathcal{A}$ est le sous-espace vectoriel engendré par (I_2, J).
- Comme I_2 et J ne sont manifestement par proportionnelles, la famille (I_2, J) est une base de $\mathcal{A}$ et donc $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Soit $M(x,y) = x\,I_2 + y\,J$ et $M(x',y') = x'\,I_2 + y'\,J$ deux éléments de $\mathcal{A}$. Alors :

$$\begin{aligned} M(x,y)\,M(x',y') &= (x\,I_2 + y\,J)\,(x'\,I_2 + y'\,J) \\ &= x\,x'\,I_2 + (x\,y' + x'\,y)\,J + y\,y'\,J^2. \end{aligned}$$

Comme :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -3\,I_2,$$

on en déduit

$$M(x,y)\,M(x',y') = (x\,x' - 3\,y\,y')\,I_2 + (x\,y' + x'\,y)\,J,$$

ce qui prouve que $\mathcal{A}$ est stable pour la multiplication des matrices.

Étant donné que la multiplication des matrices est associative et distributive par rapport à l'addition, et que $I_2 \in \mathcal{A}$, on en déduit que $\mathcal{A}$ est un anneau.

Au vu de la formule précédente, on a :

$$M(x,y)\,M(x',y') = M(x',y')\,M(x,y)$$

et donc $(\mathcal{A},+,\times)$ est un anneau commutatif.

Pour finir, montrons que $\mathcal{A}$ est un corps, c'est-à-dire que tout élément non nul de $\mathcal{A}$ possède un inverse pour la multiplication. Soit $M(x,y) = x\,I_2 + y\,J$ avec $(x,y) \neq (0,0)$ et cherchons $M(x',y') = x'\,I_2 + y'\,J$ tel que :

$$M(x,y)\,M(x',y') = (x\,x' - 3\,y\,y')\,I_2 + (x\,y' + x'\,y)\,J = I_2,$$

ce qui, comme (I,J) est libre, est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{l} x\,x' - 3\,y\,y' = 1 \\ y\,x' + \,x\,y' = 0 \end{array}\right. .$$

Ce système 2×2 ayant comme déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & -3\,y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + 3\,y^2 \neq 0,$$

il possède donc une unique solution, ce qui prouve que $(\mathcal{A},+,\times)$ est un corps.

2. Remarquons que $\mathcal{B}$ n'est pas un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ car il n'est pas stable par multiplication par i. En revanche :
   - $\mathcal{B}$ est contenu dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$;
   - bien que ce ne soit pas nécessaire ici, on peut signaler que $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 8 dont une base est :

$$\Big\{E_{k,l}\,;\ (k,l) \in [\![1,2]\!]^2\Big\} \cup \Big\{i\,E_{k,l}\,;\ (k,l) \in [\![1,2]\!]^2\Big\} \ ;$$

   - on a :

$$M(x,y) = (\operatorname{Re} x)\,I_2 + (\operatorname{Im} x)\,J + (\operatorname{Re} y)\,K + (\operatorname{Im} y)\,L$$

   avec :

$$J = M(i,0) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$K = M(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = M(0,i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   ce qui permet de prouver que :

$$\mathcal{B} = \big\{\alpha\,I_2 + \beta\,J + \gamma\,K + \delta\,L\,;\ (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4\big\}$$

   est un sous-espace vectoriel de dimension 4 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Pour vérifier la stabilité multiplicative, calculons :

$$\begin{aligned}
M(x,y)\,M(x',y') &= \begin{pmatrix} x & y \\ -\overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' & y' \\ -\overline{y'} & \overline{x'} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x\,x' - y\,\overline{y'} & x\,y' + y\,\overline{x'} \\ -\overline{y}\,x' - \overline{x}\,\overline{y'} & -\overline{y}\,y' + \overline{x}\,\overline{x'} \end{pmatrix} \\
&= M(x\,x' - y\,\overline{y'}, x\,y' + y\,\overline{x'}).
\end{aligned}$$

On en déduit que la multiplication est interne dans $\mathcal{B}$ mais qu'elle n'est pas commutative puisque :

$$L\,K = M(0,i)\,M(0,1) = M(-i,0) = -J$$

et :

$$K\,L = M(0,1)\,M(0,i) = M(i,0) = J.$$

Par suite $(\mathcal{B},+,\times)$ est un anneau non commutatif.

On peut alors vérifier que si la matrice $M(x,y)$ est non nulle, alors elle possède un inverse dans l'ensemble, en résolvant le système :

$$\begin{cases} x\,x' - y\,\overline{y'} = 1 \\ -\overline{y}\,x' - \overline{x}\,\overline{y'} = 0 \end{cases}$$

Ce système, où les inconnues sont x' et $\overline{y'}$, a pour déterminant $|x|^2 + |y|^2$ qui est non nul lorsque $M(x,y)$ est non nulle. Par suite, tout élément non nul est inversible.

Avec les définitions actuelles, on ne peut toutefois pas dire que cet ensemble est un corps car il n'est pas commutatif.

22.10 Un calcul direct donne $A^2 = \left(b^2 + a^2 - 2\,a\,b\,\sin 2\,t\right) I_2$.

Par suite, une récurrence élémentaire donne :

$\forall p \in \mathbb{N} \quad A^{2p} = \left(b^2 + a^2 - 2\,a\,b\,\sin 2\,t\right)^p I_2$ et $A^{2p+1} = \left(b^2 + a^2 - 2\,a\,b\,\sin 2\,t\right)^p A.$

22.11
1. Cette matrice n'est pas carrée donc pas inversible.
2. En désignant par $(C_k)_{k\in[\![1,3]\!]}$ les trois vecteurs colonnes de cette matrice, on a $C_1 + C_3 = 2\,C_2$ et donc son rang est au plus 2 ; par suite, cette matrice n'est pas inversible.
3. Pour cette matrice M, l'équation $Y = M\,X$ est équivalente à :

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + \ x_3 = y_1 & L_1 \\ x_1 + j\ \ x_2 + j^2\,x_3 = y_2 & L_2 \\ x_1 + j^2\,x_2 + j\ \ x_3 = y_3 & L_2 \end{cases}$$

En raisonnant par implication on trouve que, si (x_1,x_2,x_3) est solution, alors :

- la combinaison linéaire $L_1 + L_2 + (L_3)$ donne :

$$x_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3};$$

- la combinaison linéaire $L_1 + j^2 L_2 + j L_3$ donne :

$$x_2 = \frac{y_1 + j^2\, y_2 + j\, y_3}{3};$$

- la combinaison linéaire $L_1 + j L_2 + j^2 L_3$ donne :

$$x_3 = \frac{y_1 + j\, y_2 + j^2\, y_3}{3}.$$

On en déduit :

- que l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice est injectif et donc bijectif (puisque c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3) ;
- que la matrice M est inversible et que $M^{-1} = \dfrac{1}{3}\overline{M}$.

4. Pour cette matrice M, l'équation $Y = M\, X$ est équivalente à :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 & L_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = y_2 & L_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = y_3 & L_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = y_4 & L_4 \end{cases}$$

En raisonnant par implication, on trouve que, si (x_1, x_2, x_3, x_4) est solution du système, alors :

- la combinaison $L_1 + L_4$ donne $2\, x_1 = y_1 + y_4$;
- la combinaison $L_2 - L_4$ donne $2\, x_2 = y_2 - y_4$;
- la combinaison $L_3 - L_4$ donne $2\, x_3 = y_3 - y_4$;
- la combinaison $L_1 - L_2 - (L_3 - L_4)$ donne $2\, x_4 = y_1 - y_2 - y_3 + y_4$.

On en déduit que le système possède au plus une solution et donc que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à cette matrice est injectif et donc surjectif, ce qui prouve que la matrice est inversible ; les formules donnant les x_i en fonction des y_i permettent alors de donner la matrice inverse (en la remplissant en ligne) à savoir :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Cette matrice, notée M, est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, ce qui prouve qu'elle est inversible.

Pour trouver son inverse, résolvons le système :

$$\left\{\begin{array}{lllllllll}
x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 + \ldots & & & \ldots + & x_n = & y_1 \\
 & 2\,x_2 + & x_3 + & x_4 + \ldots & & & \ldots + & x_n = & y_2 \\
 & & 3\,x_3 + & x_4 + \ldots & & & \ldots & x_n = & y_3 \\
 & & & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & (n-2)\,x_{n-2} + & & x_{n-1} + & x_n = & y_{n-2} \\
 & & & & & \ddots & (n-1)\,x_{n-1} + & x_n = & y_{n-1} \\
 & & & & & & & n\,x_n = & y_n
\end{array}\right.$$

Si, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on retranche la $(k+1)$-ème équation de la k-ème, on obtient :

$$k\,(x_k - x_{k+1}) = y_k - y_{k+1}$$

et donc :

$$x_k - x_{k+1} = \frac{1}{k}\,(y_k - y_{k+1})\,.$$

En sommant ces relations pour $k \in [\![i, n-1]\!]$ on obtient :

$$\begin{aligned}
x_i - x_n &= \sum_{k=i}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) \\
&= \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{k}\,(y_k - y_{k+1}) \\
&= \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{k} y_k - \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{k} y_{k+1} \\
&= \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{k} y_k - \sum_{k=i+1}^{n} \frac{1}{k-1} y_k \qquad \text{(par changement d'indice).}
\end{aligned}$$

Comme on a évidemment $x_n = y_n/n$, on en déduit :

$$x_i = \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k} y_k - \sum_{k=i+1}^{n} \frac{1}{k-1} y_k$$

et donc :

$$x_i = \frac{y_i}{i} + \sum_{k=i+1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) y_k = \frac{y_i}{i} - \sum_{k=i+1}^{n} \frac{1}{k(k-1)} y_k$$

ce qui permet de remplir (en lignes) la matrice inverse M^{-1} :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \cdots & -\frac{1}{n(n-1)} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & & -\frac{1}{n(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{1}{4} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & -\frac{1}{n(n-1)} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

22.12 Soit J la matrice carrée d'ordre 3 la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. On a alors $C = 2\,I_3 - J$ et, de façon évidente, $J^2 = 3\,J$, ce qui entraîne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad J^n = 3^{n-1}\,J.$$

Comme I et J commutent on peut utiliser la formule du binôme de Newton, ce qui, pour $n \geqslant 1$, donne :

$$\begin{aligned} C^n &= (2\,I - J)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k}\,J^k \\ &= 2^n\,I + \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k}\,3^{k-1}\right) J. \end{aligned}$$

En posant $S = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k}\,3^{k-1}$ on a :

$$3\,S + 2^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k}\,3^k = (-1)^n$$

et donc :

$$C^n = 2^n\,I + \left(\frac{(-1)^n - 2^n}{3}\right) J.$$

De plus, on peut vérifier que cette formule est aussi valable pour $n = 0$. On peut prouver que la matrice est inversible et vérifier la formule reste valable pour les puissances négatives en établissant la relation :

$$\left(2^n\,I + \left(\frac{(-1)^n - 2^n}{3}\right) J\right)\left(2^{-n}\,I + \left(\frac{(-1)^{-n} - 2^{-n}}{3}\right) J\right) = I,$$

(le calcul se faisant directement dans l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sans introduire le moindre coefficient« descendre » au niveau des coefficients).

22.13 L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$

- est évidemment linéaire car ;
- a pour image $\mathcal{E}_1 = \{AM \ ; \ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\}$;
- a pour noyau $\mathcal{E}_2 = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = 0\}$.

Comme $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = 9$ on a $\dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 = 9$.

Comme $\mathcal{E}_2 = \Big\{M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,3]\!]^2} \mid \forall j \in [\![1,3]\!],\ m_{3,j} = -m_{1,j} - m_{2,j}\Big\}$ on en déduit que $\mathcal{E}_2$ est engendré par les 6 matrices :

$$(E_{1,1} - E_{3,1}, E_{2,1} - E_{3,1}, E_{1,2} - E_{3,2}, E_{2,2} - E_{3,2}, E_{1,3} - E_{3,3}, E_{2,3} - E_{3,3}).$$

Après avoir justifié que ces matrices forment une famille libre, on en déduit que $\dim \mathcal{E}_2 = 6$ et donc $\dim \mathcal{E}_1 = 3$.

22.14 1. On a $\mathcal{E} = \big\{a\,M(1,0) + b\,M(0,1)\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\big\}$.

- Comme par définition $\mathcal{E}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $M(1,0) = I$ et de $M(0,1)$, c'est donc le sous-espace vectoriel engendré par I et $M(0,1)$.
- Comme ces deux matrices ne sont pas proportionnelles, elles forment une base de $\mathcal{E}$. Par suite, $\mathcal{E}$ est donc un sous-espace vectorielde dimension 2.

En posant $J = M(0,1) + I = M(1,1)$ alors (I,J) est une famille de 2 vecteurs non proportionnels de $\mathcal{E}$. Comme $\mathcal{E}$ est de dimension 2, ils en forment donc une base.

2. On a évidemment $J^2 = n\,J$. Donc, pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{aligned} M(a,b)M(c,d) &= \big(b\,J + (a-b)I\big)\big(d\,J + (c-d)\,I\big) \\ &= (a-b)\,(c-d)\,I + \big(b\,(c-d) + d\,(a-b) + n\,b\,d\big)\,J, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication.

3. La famille $\big(M(a,b),\ M(a,b)^2, I\big)$ est une famille de 3 éléments d'un espace vectoriel de dimension 2, donc c'est une famille liée.

En reprenant le calcul précédent, et en posant $M = M(a,b)$, on a

$$\begin{aligned} M^2 &= (a-b)^2\,I + \big(2\,(a-b) + n\,b\big)\,b\,J \\ &= (a-b)^2\,I + \big(2\,(a-b) + n\,b\big)\,\big(M - (a-b)\,I\big) \\ &= -\,(a-b)\,(a + (n-1)\,b)\,I + \big(2\,(a-b) + n\,b\big)\,M \end{aligned}$$

et donc :

$$M^2 - \big(2\,(a-b) + n\,b\big)\,M = -\,(a-b)\,\big(a + (n-1)\,b\big)\,I \qquad (*)$$

qui est bien une relation de dépendance non triviale en ces matrices puisque le coefficient de M^2 est non nul.

4. La condition cherchée est $(a-b)\big(a+(n-1)\,b\big) \neq 0$, car :
   - si $(a-b)\,(a+(n-1)\,b) \neq 0$, alors en posant :
   $$M_1 = \frac{-1}{(a-b)\,(a+(n-1)\,b)}\Big(M - \big(2\,(a-b)+n\,b\big)\,I\Big)$$
   la relation $(*)$ s'écrit $M\,M_1 = I$, ce qui prouve que M est inversible et que M_1 est son inverse ;
   - si $a=b$, alors M est de rang au plus 1 et ne peut donc pas être inversible ;
   - si $a+(n-1)\,b=0$, alors la somme des n vecteurs colonnes de M est nulle et ils ne forment donc pas une famille libre. Par suite M n'est pas inversible ;

22.15 Pour cette matrice M, l'équation $Y = M\,X$ est équivalente à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_0 & + & x_1 & + & x_2 & + & \cdots & + & x_{n-1} & = & y_0 \\ x_0 & + & \omega\;\, x_1 & + & \omega^2\, x_2 & + & \cdots & + & \omega^{n-1}\, x_{n-1} & = & y_1 \\ x_0 & + & \omega^2\, x_1 & + & \omega^4\, x_2 & + & \cdots & + & \omega^{2(n-1)}\, x_{n-1} & = & y_2 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ x_0 & + & \omega^{n-1}\, x_1 & + & \omega^{(n-1)\,2}\, x_2 & + & \cdots & + & \omega^{(n-1)^2}\, x_{n-1} & = & y_{n-1} \end{array}\right.$$

Comme ω est une racine n-ème de l'unité, on sait que, pour $r \in \mathbb{Z}$:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{si } \omega^{\,r} \neq 1 \text{ , alors } \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega^{k\,r} = 0, \\ \text{si } \omega^{\,r} = 1 \text{ , alors } \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega^{k\,r} = n. \end{array}\right.$$

En faisant la somme des équations du système, on en déduit :

$$x_0 = \frac{1}{n}\,(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})\,.$$

De même, la combinaison $L_0 + \omega^{-1}\,L_1 + \omega^{-2}\,L_2 + \cdots + \omega^{-(n-1)}\,L_{n-1}$ donne :

$$x_1 = \frac{1}{n}\,\Big(y_0 + \omega^{-1}\,y_1 + \omega^{-2}\,y_2 + \cdots + \omega^{-(n-1)}\,y_{n-1}\Big)\,.$$

Plus généralement si, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on calcule $\sum\limits_{r=0}^{n-1} \omega^{-r\,k} L_r$, alors :

- le coefficient de x_k vaut n ;
- pour $l \neq k$, le coefficient de x_l vaut $\sum\limits_{r=0}^{n-1} \omega^{-r\,k}\omega^{r\,l} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega^{r\,(l-k)} = 0$;

et donc :

$$x_k = \frac{1}{n}\,\Big(y_0 + \omega^{-k}\,y_1 + \omega^{-2\,k}\,y_2 + \cdots + \omega^{-(n-1)\,k}\,y_{n-1}\Big)\,.$$

Le calcul précédent montre l'unicité de la solution du système linéaire, donc l'injectivité et par suite la bijectivité de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice. Cette matrice est donc inversible et, comme $\omega^{-1} = \bar{\omega}$, son inverse est :

$$M^{-1} = \frac{1}{n}\,\overline{M}.$$

22.16 1. Étant donné que $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$ et que cette famille contient 4 vecteurs, il suffit de prouver qu'elle est libre. Soit a, b, c et d tels que

$$a(X-1)^3 + b\,(X-1)^2(X+1) + c\,(X-1)(X+1)^2 + d\,(X+1)^3 = 0.$$

En remplaçant X par 1 puis par -1, on trouve successivement :

$$d = 0 \text{ et } a = 0.$$

On a donc

$$0 = b\,(X-1)^2(X+1) + c\,(X-1)(X+1)^2 = (X-1)\big(b\,(X-1) + c\,(X+1)\big)$$

Comme un produit de polynômes est nul si, et seulement si, l'un des deux est nuls, on en déduit $b\,(X-1) + c\,(X+1) = 0$, et une substitution de -1 et de 1 à X donne alors $b = c = 0$.

Par suite cette famille est libre ; comme elle possède 4 éléments, c'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$ qui est de dimension 4.

2. La matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ s'obtient en écrivant en colonnes les composantes des éléments de $\mathcal{B}$ dans la base canonique, ce qui donne :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. En résolvant le système d'équation associé, on trouve :

$$M^{-1} = \frac{1}{8}\,M.$$

4. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ transformant la base canonique en $\mathcal{B}$, c'est-à-dire tel que :

$$u(1) = (X-1)^3$$

$$u(X) = (X-1)^2\,(X+1)$$

$$u(X^2) = (X-1)\,(X+1)^2$$

$$u(X^3) = (X+1)^3$$

Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, si on pose $u(P) = P_1$ et $u(P_1) = P_2$, on a alors :

$$P_1(X) = (X-1)^3\,P\left(\frac{X+1}{X-1}\right)$$

$$\begin{aligned} P_2(X) &= (X-1)^3\,P_1\left(\frac{X+1}{X-1}\right) \\ &= (X-1)^3\left(\frac{X+1}{X-1} - 1\right)^3 P\left(\frac{\frac{X+1}{X-1} + 1}{\frac{X+1}{X-1} - 1}\right) \\ &= 2^3 P(X). \end{aligned}$$

Par suite $P_2 = u^2(P) = 2^3\,P$. Comme la relation précédente est vraie pour tout P, on en déduit $u^2 = 2^3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}$ et donc $M^2 = 2^3\,I$, ce qui entraîne que M est inversible et que son inverse est $\frac{1}{8}\,M$.

Chapitre 23 : Opérations élémentaires, Systèmes linéaires

I Opérations élémentaires 1196
- 1 Généralités 1196
- 2 Traduction en terme de produit matriciel 1198
- 3 Application au calcul du rang 1198
- 4 Méthode du pivot de Gauss 1199

II Systèmes linéaires 1201
- 1 Définitions 1201
- 2 Interprétations d'un système linéaire 1202

III Systèmes de Cramer 1205
- 1 Définition 1205
- 2 Résolution d'un système de Cramer par la méthode du pivot de Gauß 1206

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 1209

Exercices 1215

Opérations élémentaires, Systèmes linéaires

23

Dans tout ce chapitre, n et p sont des entiers naturels non nuls, et $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

I Opérations élémentaires

Dans cette section, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1 Généralités

Dans le chapitre 2 nous avons déjà rencontré la notion d'opération élémentaire sur les systèmes d'équation. Nous allons ici la généraliser aux matrices. On appelle **opération élémentaire** sur les lignes (resp. colonnes) d'une matrice l'une des trois opérations suivantes :

- addition d'un multiple d'une ligne (resp. d'une colonne) à une autre ligne (resp. une autre colonne) ;
- multiplication d'une ligne (resp. d'une colonne) par un scalaire non nul ;
- échange de deux lignes (resp. de deux colonnes).

Étant donné une matrice dont les lignes sont désignées par $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, si i et j sont deux entiers distincts compris entre 1 et n et $\lambda \in \mathbb{K}$, on convient des codages suivants :

addition de $\lambda\, L_j$ à la ligne L_i	$L_i \leftarrow L_i + \lambda\, L_j$
multiplication de la ligne L_i par $\lambda \neq 0$	$L_i \leftarrow \lambda\, L_i$
échange des lignes L_i et L_j	$L_i \leftrightarrow L_j$

On utilise un codage analogue pour les colonnes en remplaçant L par C.

Si A' est déduite de A par une opération élémentaire, alors A peut se déduire de A' par une opération élémentaire. Par exemple, pour des opérations sur les lignes on a les correspondances suivantes :

Passage de A à A'	Passage de A' à A
$L_i \leftarrow L_i + \lambda\, L_j$	$L_i \leftarrow L_i - \lambda\, L_j$
$L_i \leftarrow \lambda\, L_i$	$L_i \leftarrow \lambda^{-1}\, L_i$
$L_i \leftrightarrow L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$

Proposition 1

Deux matrices déduites l'une de l'autre par une opération élémentaire (et donc aussi par un nombre fini d'opérations élémentaires) ont même rang.

Principe de démonstration. Dans le cas d'un opération sur les colonnes, commencer par prouver que le sous-espace vectoriel F engendré par les colonnes de la matrice initiale est inclus dans celui engendré par les colonnes de la matrice obtenue. Démonstration page 1209

Proposition 2

1. Si une matrice A' se déduit d'une matrice A par opérations élémentaires sur les colonnes, alors les matrices A et A' ont même image.
2. Si une matrice A' se déduit d'une matrice A par opérations élémentaires sur les lignes, alors les matrices A et A' ont même noyau.

Démonstration.

1. Évident puisque le sous-espace vectoriel F (engendré par les colonnes de A) utilisé dans la démonstration précédente est l'image de A.
2. Le noyau de la matrice A est l'ensemble des $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $A\,X = 0$, et l'on a vu (*cf.* page 121) que cet ensemble est invariant par opérations élémentaires sur les équations du système, donc sur les lignes de la matrice. □

Remarque En général, comme nous le verrons dans les exemples suivants, on transforme une matrice par une suite d'opérations élémentaires. Formellement on obtient une suite de matrices qui n'ont aucune raison d'être égales, mais dont on sait maintenant qu'elles ont le même rang. En revanche, à chaque étape, les lignes (resp. les colonnes) de la matrice courante seront toujours désignées par les mêmes lettres $L_1, \ldots, L_n$ (resp. $C_1, \ldots, C_p$).

p.1209 **Exercice 1** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Que devient A si on lui applique $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$?

Attention On ne fait qu'une opération élémentaire à la fois, même si l'on n'a pas besoin de recopier la matrice après chaque opération élémentaire. Prendre garde par exemple que, si l'on passe de A à A' par :

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \quad \text{puis} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2,$$

alors les deux premières lignes de A' ne sont pas nécessairement égales.

2 Traduction en terme de produit matriciel

Proposition 3

- Si l'on passe de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ à A' par une opération élémentaire sur les lignes, alors il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P\,A$.
- Si l'on passe de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ à A' par une opération élémentaire sur les colonnes, alors il existe $Q \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que $A' = A\,Q$.

Principe de démonstration. Démonstration page 1209

- Commencer par exhiber les matrices P et Q (elles contiennent beaucoup de 0).
- Pour l'inversibilité, remarquer que ces matrices se « déduisent » de I_n ou de I_p.

Remarque Soient A et A' deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telles que l'on passe de A à A' par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. Si ces opérations sont successivement associées aux multiplications par les matrices P_1, $P_2, \ldots, P_s$, alors on a :

$$A' = P_s \ldots P_2\,P_1\,A.$$

p.1210 **Exercice 2** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe une suite d'opérations élémentaires transformant A en une matrice triangulaire T dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls. Montrer que A est inversible.

3 Application au calcul du rang

Lemme 4

Soit $n \geqslant 2$, $p \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. S'il existe $A' \in \mathcal{M}_{n-1,p-1}(\mathbb{K})$ tel que la matrice A s'écrive par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & L \\ 0 & A' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a_{1,1} \neq 0,$$

alors on a $\operatorname{rg} A = 1 + \operatorname{rg} A'$.

Principe de démonstration. Démontrer le résultat en utilisant :

- d'abord le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ engendré par les lignes de A,
- puis le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{n-1}$ engendré par les colonnes de A'.

Démonstration page 1210

Point méthode

On dispose donc d'un algorithme pour déterminer le rang d'une matrice A.

- Si $A = 0$, alors son rang est égal à 0.
- Sinon, A possède au moins un coefficient non nul ; quitte à permuter ses lignes et/ou ses colonnes (ce sont des opérations élémentaires, donc cela ne change pas le rang), on peut supposer $a_{1,1} \neq 0$. En retranchant, aux $n-1$ dernières lignes, un multiple judicieux de la première, on obtient une matrice du type :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{1,1} & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad \text{et donc} \qquad \operatorname{rg} A = 1 + \operatorname{rg} A'.$$

- On se ramène ainsi à une matrice $(n-1) \times (p-1)$ et il suffit d'itérer le procédé jusqu'à obtenir une matrice nulle, voire une matrice dont le rang est évident.

p.1210 **Exercice 3** Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer le rang de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

Point méthode

La méthode précédente, de type algorithmique, donne le rang de toute matrice, mais il faut en user avec modération, car parfois le rang saute aux yeux, ce qui peut faire gagner du temps.

p.1211 **Exercice 4** Pour $n \geqslant 2$, déterminer le rang de la matrice $A = (i+j-1)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

4 Méthode du pivot de Gauss

Remarque D'après ce qui précède, si, par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, on peut transformer une matrice (carrée) A en une matrice triangulaire dont tous les termes diagonaux sont non nuls, alors la matrice A est inversible.

Exemple Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$.

- Les opérations $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$ donnent $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{pmatrix}$.

- Avec $\begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3\,L_2 \end{cases}$ on obtient $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$.

- Enfin $L_4 \leftarrow L_4 - 3\,L_3$ donne $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme la matrice A_3 est triangulaire, avec des éléments tous non nuls sur sa diagonale, elle est inversible, et il en est donc de même de A.

La proposition qui suit nous fournit une réciproque.

Proposition 5

Par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, on peut transformer toute matrice inversible en une matrice triangulaire supérieure (inversible).

Démonstration. Procédons par récurrence sur n.

- Si $n = 1$, la matrice est déjà triangulaire.
- Soit un entier $n \geqslant 2$. Supposons le résultat vrai pour $n-1$.
  Considérons alors une matrice A inversible de taille n. Comme A est inversible, sa première colonne est non nulle et, quitte à permuter les lignes, on peut supposer $a_{1,1} \neq 0$ (le pivot). En retranchant, aux $n-1$ dernières lignes, un multiple judicieux de la première, on obtient une matrice de la forme :

$$B = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{1,1} & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

  Le lemme de la page 1198 nous donne alors $n = \operatorname{rg} A = 1 + \operatorname{rg} A'$; par suite, A' est inversible.

  D'après l'hypothèse de récurrence, on peut donc, par des opérations élémentaires sur les lignes de A', transformer A' en une matrice triangulaire, et la forme de B montre que cela revient à faire les opérations correspondantes sur la matrice B, qui se transforme alors en matrice triangulaire supérieure. $\square$

Point méthode

La démonstration précédente donne une méthode, la **méthode du pivot de Gauß**, permettant de transformer, par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, une matrice inversible A en matrice triangulaire supérieure.

Remarque En fait, on peut appliquer la méthode du pivot de Gauss à toute matrice carrée A.

- Si l'on arrive à transformer A en une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls, alors A est inversible.
- Sinon, c'est parce qu'après l'une des étapes, la r-ième par exemple, la sous-matrice d'ordre $n-r$ obtenue a une première colonne formée uniquement de 0. Dans ce cas, les $r+1$ premières colonnes de la matrice $n \times n$ sont alors combinaisons linéaires des r premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$; par suite, ils forment une famille liée, et cette matrice n'est donc pas inversible ; il en est donc de même de la matrice A.

II Systèmes linéaires

1 Définitions

Étant donné deux entiers naturels n et p non nuls, on appelle système linéaire de n équations à p inconnues x_1, x_2,..., x_p tout système $(\mathcal{S})$ du type :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,j}\,x_j + \cdots + a_{1,p}\,x_p = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{i,1}\,x_1 + a_{i,2}\,x_2 + \cdots + a_{i,j}\,x_j + \cdots + a_{i,p}\,x_p = b_i \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \cdots + a_{n,j}\,x_j + \cdots + a_{n,p}\,x_p = b_n \end{array}\right.$$

avec $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$.

- La matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ s'appelle la **matrice du système**.
- Le n–uplet $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est appelé le **second membre** du système.
- Lorsque $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ on dit que le système est **homogène**, ou que le système est **sans second membre**.
- On appelle **solution du système** toute p–liste $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant les n équations de $(\mathcal{S})$.
- Le système $(\mathcal{S})$ est dit **compatible** s'il admet au moins une solution. Tout système homogène est compatible puisqu'il admet au moins la solution $(0, 0, \ldots, 0)$.

- On appelle **rang du système** $(\mathcal{S})$ le rang de la matrice A.
- Le système $(\mathcal{S}_0)$ obtenu en remplaçant tous les b_i par 0 est appelé **système homogène associé** à $(\mathcal{S})$.

2 Interprétations d'un système linéaire

Soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire de n équations à p inconnues x_1, x_2,..., x_p :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, x_j = b_i.$$

Interprétation matricielle

- Si A est la matrice de $(\mathcal{S})$, alors en posant :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

  le système $(\mathcal{S})$ s'écrit $A\,X = B$.

- Si l'on se donne $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, la recherche d'une matrice $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $A\,X = B$ se traduit par un système linéaire.

Avec cette interprétation il est évident que, si la matrice A est inversible (et donc carrée), alors le système $(\mathcal{S})$ possède une solution unique qui est donnée par $X = A^{-1}\,B$.

Interprétation vectorielle

- Si C_1, C_2, ..., C_p désignent les vecteurs colonnes de la matrice A et si B désigne le vecteur $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$, alors le système peut s'écrire :

$$\sum_{j=1}^{p} x_j\, C_j = B.$$

- Si v_1, v_2,..., v_p et b sont $p+1$ vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n, la recherche de p scalaires x_1, x_2,..., x_p tels que :

$$\sum_{j=1}^{p} x_j\, v_j = b$$

  peut se traduire, dans une base $\mathbf{e}$, par un système linéaire de n équations à p inconnues.

Avec cette interprétation il est évident que :

1. le système $(\mathcal{S})$ est compatible si, et seulement si, B appartient au sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}\{C_1, C_2\,, \ldots, C_p\}$ de $\mathbb{K}^n$;
2. le rang de $(\mathcal{S})$ est égal au rang de $(C_1, C_2, \ldots, C_p)$;
3. si la famille $(C_1, C_2, \ldots, C_p)$ est libre alors le système possède au plus une solution ;
4. si la famille $(C_1, C_2, \ldots, C_p)$ engendre $\mathbb{K}^n$ alors le système est compatible ;
5. si $n = p$ et si la famille $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ alors pour tout B le système possède une unique solution, correspondant aux composantes de B dans la base $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Interprétation à l'aide d'une application linéaire

- Soit u l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à la matrice A du système. Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, alors le système $(\mathcal{S})$ s'écrit $u(x) = b$.
- Étant donné deux $\mathbb{K}$–espaces vectoriels E et F de dimensions respectives p et n, ainsi qu'une application linéaire u de E dans F et un vecteur b de F, la recherche des x tels que $u(x) = b$ peut se traduire par un système linéaire de n équations à p inconnues.

Avec cette interprétation il est évident que :

1. le système est compatible si, et seulement si, b appartient à $\operatorname{Im} u$;
2. si u est injective, alors le système possède au plus une solution ;
3. si u est surjective, alors le système est compatible ;
4. si u est bijective, alors le système possède une solution et une seule ;
5. si x_0 est une solution de $(\mathcal{S})$, alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est :
$$x_0 + \operatorname{Ker} u = \{x_0 + h\,;\ h \in \operatorname{Ker} u\}\,;$$
6. le rang de $(\mathcal{S})$ est égal au rang de u ;
7. si $(\mathcal{S})$ est un système homogène de rang r, alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$, et le théorème du rang nous dit que ce sous-espace vectoriel est de dimension $p - r$.

Interprétation à l'aide de formes linéaires

- Soit $\varphi_1\,,\ \varphi_2, \ldots,\ \varphi_n$ les formes linéaires sur $\mathbb{K}^p$ canoniquement associées aux lignes de A. Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, alors le système SS peut s'écrire :
$$\varphi_1(x) = b_1,\ \varphi_2(x) = b_2,\ \ldots,\ \varphi_n(x) = b_n.$$

- Étant donné un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E de dimension p, ainsi que des formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sur E, la recherche des $x \in E$ vérifiant un système du type :
$$\varphi_1(x) = b_1, \; \varphi_2(x) = b_2, \; \ldots, \; \varphi_n(x) = b_n$$
peut se traduire par un système linéaire de n équations à p inconnues.

Avec cette interprétation, il est évident que :

1. l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est l'intersection de n hyperplans affines ;
2. l'ensemble des solutions du système (SS_0) est l'intersection des noyaux des formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ et φ_n, c'est-à-dire de n hyperplans vectoriels ;
3. l'intersection de n hyperplans vectoriels, noyaux de formes linéaires sur un espace vectoriel de dimension p, est un sous-espace vectoriel ; d'après le théorème du rang, il de dimension $p-r$ où r est le rang de la famille des formes linéaires, ou encore, le rang des vecteurs lignes de la matrice A ; si les formes linéaires sont indépendantes, il est de dimension $p-n$.

p.1211

Exercice 5 (Autre exemple d'interprétation)
Soit a, b et c trois complexes deux à deux distincts.

À tout triplet $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$ on associe le polynôme $P_{(x,y,z)}(T) = x + y\,T + z\,T^2$.

On peut vérifier que $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}_2[X] \\ (x,y,z) & \longmapsto & P_{(x,y,z)} \end{array}$ est un isomorphisme.

1. Exprimer, à l'aide de $P_{(x,y,z)}$, que (x,y,z) est solution de
$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & a\,y & + & a^2\,z & = & u_1 \\ x & + & b\,y & + & b^2\,z & = & u_2 \\ x & + & c\,y & + & c^2\,z & = & u_3 \end{array} \right.$$
2. En déduire que $(\mathcal{S})$ possède une unique solution et l'exprimer.
Indication : penser à la formule d'interpolation de Lagrange !

p.1211

Exercice 6 Soit $(\mathcal{S})$ un système de n équations à p inconnues.

1. Si $p > n$:
   (a) peut-on affirmer que $(\mathcal{S})$ est compatible ? et lorsqu'il est homogène ?
   (b) que peut-on dire de plus lorsque $(\mathcal{S})$ est homogène ?
2. Si $p < n$:
   (a) peut-on affirmer que $(\mathcal{S})$ est incompatible ?
   (b) que peut-on dire de l'ensemble des seconds membres pour lesquels $(\mathcal{S})$ est compatible ?

III Systèmes de Cramer

1 Définition

Proposition 6

Si $(\mathcal{S})$ est un système linéaire de n équations à n inconnues, il est équivalent de dire :

(i) le système $(\mathcal{S})$ admet une solution et une seule,

(ii) le système $(\mathcal{S}_0)$ ne possède que la solution triviale $(0, 0, \ldots, 0)$,

(iii) la matrice du système est inversible.

On appelle **système de Cramer** tout système linéaire de n équations à n inconnues vérifiant l'une des propriétés précédentes.

Démonstration page 1212

p.1212 **Exercice 7** Soit $(\mathcal{S})$ un système triangulaire de n équations à n inconnues, c'est-à-dire un système dont la matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est triangulaire.

$$\left\{\begin{aligned} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,i}\,x_i + \cdots + a_{1,n-1}\,x_{n-1} + a_{1,n}\,x_n &= b_1 \\ &\ \ \vdots \\ a_{i,i}\,x_i + \cdots + a_{i,n-1}\,x_{n-1} + a_{i,n}\,x_n &= b_i \\ &\ \ \vdots \\ a_{n,n}\,x_n &= b_n \end{aligned}\right.$$

À quelle condition $(\mathcal{S})$ est-il un système de Cramer ? Comment alors le résoudre ?

p.1212 **Exercice 8** Montrer que le système de l'exercice 5 est un système de Cramer si, et seulement si, les scalaire a, b et c sont deux à deux distincts.

Point méthode

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si, par conditions nécessaires (par implications), on peut montrer que, pour tout $Y \in \mathbb{K}^n$, le système $A\,X = Y$ possède au plus une solution, alors l'endomorphisme canoniquement associé à A est injectif et donc bijectif. Par suite, le système $A\,X = Y$ est un système de Cramer.

p.1213 **Exercice 9** Pour $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{C}^4$, résoudre le système :

$$\left\{\begin{aligned} 2\,x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= y_1 \\ x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_4 &= y_2 \\ x_1 + x_2 + 2\,x_3 + x_4 &= y_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2\,x_4 &= y_4 \end{aligned}\right.$$

p.1213

Exercice 10 Soit $(\mathcal{S})$ un système de n équations à n inconnues.

1. Si $(\mathcal{S})$ possède une solution, peut-il en avoir plusieurs ?
2. Si $(\mathcal{S})$ possède au plus une solution, peut-on en conclure qu'il est compatible ?
3. Modifier les deux questions précédentes pour avoir une réponse plus constructive.

2 Résolution d'un système de Cramer par la méthode du pivot de Gauß

- Soit $(\mathcal{S})$ un système de Cramer, d'écriture matricielle $A\,X = B$, avec donc une matrice A inversible. Nous avons vu que la méthode du pivot de Gauss permet, par des opérations élémentaires sur les lignes, de transformer la matrice A en une matrice triangulaire.

- En faisant les mêmes opérations sur les lignes du second membre B, on obtient, comme démontré au chapitre 2, un système équivalent à $(\mathcal{S})$. Ce dernier étant triangulaire avec des coefficients non nuls sur la diagonale, on sait le résoudre de proche en proche (*cf.*. exercice 7 de la page précédente).

- Cette méthode, algorithmique, sera programmée en informatique.

p.1213

Exercice 11 Inverser $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$ en résolvant le système associé.

Point méthode

Bien que la méthode du pivot de Gauß permette de résoudre tout système de Cramer, il est parfois préférable, lorsque le système présente une certaine symétrie, de résoudre par combinaisons linéaires en ne raisonnant que par conditions nécessaires. À titre d'expérience, essayer de résoudre par la méthode de Gauß le système de l'exercice 9.

Remarque On a vu que les combinaisons linéaires utilisées dans la méthode du pivot de Gauß transforment un système en un système équivalent. Donc :

- si le système est carré et si l'on peut à l'aide de cette méthode le transformer en un système de Cramer triangulaire, cela permet à la fois de prouver que c'est un système de Cramer et d'en donner la solution ;

- sinon, cela permet d'échelonner le système et de discuter plus simplement de l'ensemble de ses solutions, comme l'exercice et l'exemple ci-dessous.

p.1214

Exercice 12 Soit m étant un paramètre complexe et $(\mathcal{S}_m)$ le système :

$$(\mathcal{S}_m) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & m+1 \\ mx & + & y & + & (m-1)\,z & = & m \\ x & + & my & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

À l'aide de deux opérations élémentaires, montrer que si $m \neq 1$, alors $(\mathcal{S}_m)$ est un système de Cramer. Que peut-on dire dans le cas $m = 1$?

Exemple Soit m étant un paramètre complexe et $(\mathcal{S}_m)$ le système :

$$(\mathcal{S}_m) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2\,x & - & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & 2\,y & - & z & + & 4\,t & = & 2 \\ x & + & 7\,y & - & 4\,z & + & 11\,t & = & m \end{array} \right.$$

Par les opérations indiquées à gauche, le système donné est successivement équivalent aux systèmes suivants :

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2\,y & - & z & + & 4\,t & = & 2 \\ 2\,x & - & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & 7\,y & - & 4\,z & + & 11\,t & = & m \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2\,y & - & z & + & 4\,t & = & 2 \\ & - & 5\,y & + & 3\,z & - & 7\,t & = & -3 \\ & & 5\,y & - & 3\,z & + & 7\,t & = & m-2 \end{array} \right.$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2\,y & - & z & + & 4\,t & = & 2 \\ & - & 5\,y & + & 3\,z & - & 7\,t & = & -3 \\ & & & & & & 0 & = & m-5 \end{array} \right.$$

Par suite :

- si $m \neq 5$, alors $(\mathcal{S}_m)$ est incompatible ;
- si $m = 5$, alors le dernier système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2\,y & - & z & + & 4\,t & = & 2 \\ & - & 5\,y & + & 3\,z & - & 7\,t & = & -3 \end{array} \right.$$

  Alors, quelles que soient les valeurs données à z et t, il est possible de déterminer un couple (x,y) tel que (x,y,z,t) soit solution du système, puisqu'il suffit pour cela de résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 2\,y & = & 2+z-4\,t \\ & - & 5\,y & = & -3-3\,z+7\,t \end{array} \right.$$

  qui est un système de Cramer car sa matrice est triangulaire avec des coefficients non nuls sur la diagonale. On trouve alors :

$$x = -\frac{1}{5}\,z - \frac{6}{5}\,t + \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad y = \frac{3}{5}\,z - \frac{7}{5}\,t + \frac{3}{5}.$$

On obtient ainsi ce que l'on appelle **une représentation paramétrique** de l'ensemble S des solutions du système :

$$S = \left\{ \left(-\tfrac{1}{5}\,z - \tfrac{6}{5}\,t + \tfrac{4}{5}\,,\ \tfrac{3}{5}\,z - \tfrac{7}{5}\,t + \tfrac{3}{5}\,,\ z\,,\ t \right)\,;\ (z,t) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

Avec la méthode de résolution utilisée, on dit que x et y sont les **inconnues principales** alors que z et t sont les **inconnues secondaires** ou **inconnues non principales**. Il est évident que l'on aurait pu ici faire un autre choix pour les inconnues secondaires (et donc pour les principales), mais nous avons fait le choix qui nous laissait un système triangulaire, ce qui est le plus simple.

En écrivant S sous la forme :

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, 0, 0\right) + z\left(-\tfrac{1}{5}, \tfrac{3}{5}, 1, 0\right) + t\left(-\tfrac{6}{5}, -\tfrac{7}{5}, 0, 1\right)\,;\ (z,t) \in \mathbb{K}^2 \right\}. \\ &= \left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, 0, 0\right) + \operatorname{Vect}\Big(\left(-\tfrac{1}{5}, \tfrac{3}{5}, 1, 0\right), \left(-\tfrac{6}{5}, -\tfrac{7}{5}, 0, 1\right)\Big) \end{aligned}$$

on met en évidence sa structure d'espace affine, ici de dimension 2, ce qui correspond au nombre d'inconnues non principales.

Remarque

Comme dans l'exemple précédent, on peut résoudre un système quelconque par la méthode du pivot de Gauß. En effet, en utilisant la méthode de la page 1199, on peut par des opérations élémentaires sur les lignes et des permutations de colonnes (ce qui revient à permuter les inconnues), transformer la matrice du système en :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{1,p} \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha_{r,r} \ \cdots & \alpha_{r,p} \\ \vdots & & & 0 \ \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \ \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_{1,1}\,\alpha_{2,2}\ldots\alpha_{r,r} \neq 0$. Le système est alors **échelonné**.

On voit ainsi que le système a une solution si, et seulement si, les $n-r$ dernières équations ainsi transformées ont un second membre nul.

On peut alors donner des valeurs arbitraires aux $p-r$ dernières inconnues (alors appelées inconnues secondaires) et en déduire les autres (alors appelées inconnues principales), qui s'expriment en fonction des inconnues secondaires (attention : les inconnues ne sont pas nécessairement dans l'ordre initial).

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 1

Par récurrence, il suffit de montrer le résultat pour une opération élémentaire, et, quitte à transposer les matrices, on peut supposer qu'il s'agit d'une opération sur les colonnes.

Supposons A' déduit de A par une opération élémentaire sur les colonnes, et notons F (respectivement F') le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A (resp. par les colonnes de A'). On a $F' \subset F$ puisque chaque colonne de A' est évidemment combinaison linéaire des colonnes de A.

Comme on passe de A' à A par une opération élémentaire, on a donc aussi $F \subset F'$. Ainsi, les sous-espaces vectoriels F et F' étant alors égaux, ils ont donc même dimension.

Exercice 1

- Après la première opération, on a : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.
- Après la seconde opération, on a : $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Proposition 3

- On vérifie que le passage de A à A' par chaque opération élémentaire sur les lignes correspond à la relation $A' = P\,A$, selon le tableau suivant :

Opération élémentaire	Matrice P
$L_i \leftarrow L_i + \lambda\, L_j$	$I_n + \lambda\, E_{i,j}$
$L_i \leftarrow \lambda\, L_i$	$I_n - E_{i,i} + \lambda\, E_{i,i}$
$L_i \leftrightarrow L_j$	$I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$

Dans le tableau précédent, l'écriture « en ligne » des matrices P est compacte mais pas très visuelle. En particulier, pour les des deux dernières opérations de ce tableau, les matrices P s'écrivent respectivement :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & & \vdots & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

On pourrait, dans chaque cas, démontrer directement que la matrice P est inversible, mais on peut remarquer qu'elle se déduit de la matrice I_n par la même opération élémentaire que celle qui permet de passer de A à A'. D'après la proposition précédente, la matrice P est donc de même rang que I_n et, par suite, inversible.

- On vérifie de même que chaque opération élémentaire sur les colonnes correspond à la multiplication à droite par la matrice Q selon le tableau suivant :

Opération élémentaire	Matrice Q
$C_i \leftarrow C_i + \lambda\, C_j$	$I_p + \lambda\, E_{j,i}$
$C_i \leftarrow \lambda\, C_i$	$I_p - E_{i,i} + \lambda\, E_{i,i}$
$C_i \leftrightarrow C_j$	$I_p - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$

Ces matrices Q, qui doivent aussi être visualisées sous forme développée comme dans le cas du tableau précédent, sont inversibles puisque chacune se déduit de la matrice I_p par une opération élémentaire.

Exercice 2 Comme les coefficients diagonaux de $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont non nuls, la matrice T est inversible et donc de rang n. Par suite, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est aussi de rang n et donc inversible.

Lemme 4 Avec les hypothèses, la matrice A s'écrit :

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Notons F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ engendré par les lignes $(L_1, \ldots, L_n)$ de A.

Comme $a_{1,1} \neq 0$, le vecteur L_1 ne peut pas appartenir à $\mathrm{Vect}(L_2, \ldots, L_n)$, et donc on a $\dim F = 1 + \dim \mathrm{Vect}(L_2, \ldots, L_n)$, c'est-à-dire :

$$\operatorname{rg} A = 1 + \operatorname{rg} \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right)$$

ce qui prouve le résultat, puisque le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de cette dernière matrice est le même que celui engendré par les colonnes de A'.

Exercice 3 En effectuant les opérations :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \quad \text{et} \quad L_4 \leftarrow L_4 - a\, L_1,$$

on obtient la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & b - 2\,a & c - 3\,a & d - 4\,a \end{pmatrix}$$

et donc $\operatorname{rg} A = 1 + \operatorname{rg} A_1$ avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ b - 2\,a & c - 3\,a & d - 4\,a \end{pmatrix}.$$

En effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - (b-2a)\,L_1$, on obtient :

$$\operatorname{rg} A_1 = 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a+c-2b & 2a+d-3b \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

- si $a+c=2b$ et $2a+d=3b$, alors $\operatorname{rg} A_1 = 1$ et donc $\operatorname{rg} A = 2$,
- sinon, $\operatorname{rg} A_1 = 2$ et donc $\operatorname{rg} A = 3$.

Exercice 4 Dès que l'on explicite cette matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-2 & 2n-1 \end{pmatrix}$$

on se rend compte que ses vecteurs colonnes sont tous combinaisons linéaires de C_1 et du vecteur $C_0 = (1,1,1,\dots,1)$. Avec la définition initiale, il est d'ailleurs évident de vérifier que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $C_i = C_1 + (i-1)C_0$.

Par suite, le rang de la famille des vecteurs colonnes est au plus 2, et, comme les deux premiers ne sont pas proportionnels, le rang de A est donc égal à 2.

Exercice 5

1. Le triplet $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$ est solution de $(\mathcal{S})$ si, et seulement si, $P_{(x,y,z)}$ vérifie

$$P_{(x,y,z)}(a) = u_1, \quad P_{(x,y,z)}(b) = u_2, \quad P_{(x,y,z)}(c) = u_3.$$

2. Comme les scalaires a, b et c sont distincts, on sait que ce dernier problème possède une solution unique donnée par la formule d'interpolation de Lagrange :

$$P_{(x,y,z)}(T) = u_1\frac{(T-b)(T-c)}{(a-b)(a-c)} + u_2\frac{(T-c)(T-a)}{(b-c)(b-a)} + u_3\frac{(T-a)(T-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

En développant le polynôme précédent et en identifiant, on obtient directement :

$$x = \frac{b\,c\,u_1}{(a-b)(a-c)} + \frac{c\,a\,u_2}{(b-c)(b-a)} + \frac{a\,b\,u_3}{(c-a)(c-b)},$$
$$y = -\frac{(b+c)\,u_1}{(a-b)(a-c)} - \frac{(c+a)\,u_2}{(b-c)(b-a)} - \frac{(a+b)\,u_3}{(c-a)(c-b)},$$
$$z = \frac{u_1}{(a-b)(a-c)} + \frac{u_2}{(b-c)(b-a)} + \frac{u_3}{(c-a)(c-b)}.$$

Exercice 6

1. (a) Non, comme le prouve l'exemple de $(\mathcal{S})\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ qui est manifestement incompatible.
Si $\mathcal{S}$ est homogène, il est évidemment compatible puisqu'il possède la solution triviale.

(b) Lorsque $p > n$, tout système *homogène* de n équations à p inconnues possède (au moins) une solution non triviale : c'est évident avec l'interprétation vectorielle puisque les p vecteurs colonnes de la matrice du système, qui sont éléments de $\mathbb{K}^n$, en forment nécessairement une famille liée.

2. (a) Non, comme le prouve l'exemple de $(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{r} x = 1 \\ 2\,x = 2 \end{array} \right.$ qui possède évidemment la solution $x = 1$.

(b) L'application linéaire u canoniquement associée à la matrice du système est une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, avec $p < n$, donc n'est pas surjective. On en déduit qu'il existe des seconds membres pour lesquels le système est incompatible.

Proposition 6 Notons A la matrice du système et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à cette matrice A.

$(i) \Longrightarrow (ii)$ Soit X l'unique solution de $(\mathcal{S})$. Si X_0 est solution de $(\mathcal{S}_0)$, alors $X + X_0$ est solution de $(\mathcal{S})$ donc égal à X. Par suite $X_0 = (0, 0, \ldots, 0)$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Comme $(\mathcal{S}_0)$ ne possède que la solution triviale, le noyau u est réduit à $\{0\}$. Alors u est un endomorphisme injectif de $\mathbb{K}^n$; par suite, il est bijectif, et sa matrice A est inversible.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Comme la matrice A est inversible, le système $(\mathcal{S})$ admet une solution et une seule, qui est $X = A^{-1} B$.

Exercice 7 La matrice A est inversible, et donc $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer, si, et seulement si, tous les coefficients diagonaux sont non nuls.

Dans un tel cas l'unique solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ peut être déterminée :

- en calculant x_n grâce à la dernière équation,
- puis en calculant x_{n-1} grâce à l'avant dernière équation, etc.
- pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, en supposant avoir calculé x_n, x_{n-1}, $\ldots x_{i+1}$, on peut obtenir la valeur de x_i à l'aide de la i-ème équation car le coefficient $a_{i,i}$ est non nul.

Exercice 8 Le système donné est un système de Cramer si, et seulement si, le système homogène associé n'admet que la solution nulle, c'est-à-dire si, et seulement si, le problème :

$$P \in \mathbb{R}_2[T], \quad P(a) = 0, \quad P(b) = 0, \quad P(c) = 0$$

n'a comme solution que le polynôme nul.

- Supposons que a, b et c soient deux à deux distincts. Si $P \in \mathbb{R}_2[T]$ vérifie $P(a) = 0$, $P(b) = 0$ et $P(c) = 0$ alors P, qui est de degré au plus 2, possède 3 racines distinctes et donc $P = 0$.
- Réciproquement, si par exemple $a = b$, alors le polynôme $(T - a)\,(T - c)$ est un polynôme non nul vérifiant $P(a) = 0$, $P(b) = 0$ et $P(c) = 0$.

  Remarque On peut aussi dire que la matrice du système, qui possède deux lignes égales, est alors de rang au plus 2 et qu'elle n'est donc pas inversible.

Par suite on a prouvé l'équivalence demandée.

Exercice 9 Soit $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{K}^4$ une solution du système. En faisant la somme des relations précédentes, on obtient :

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = \frac{1}{5}\,(y_1+y_2+y_3+y_4)\,.$$

En retranchant cette nouvelle relation à chacune des précédentes, on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1}{5}\,(4\,y_1-y_2-y_3-y_4) \\ x_2 & = & \frac{1}{5}\,(-y_1+4\,y_2-y_3-y_4) \\ x_3 & = & \frac{1}{5}\,(-y_1-y_2+4\,y_3-y_4) \\ x_4 & = & \frac{1}{5}\,(-y_1-y_2-y_3+4\,y_4) \end{array}\right.$$

Par suite pour tout $(y_1,y_2,y_3,y_4) \in \mathbb{K}^4$ le système, possède au plus une solution, et l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice du système est injectif donc bijectif.

- Il s'agit donc d'un système de Cramer.
- La solution en est donnée par les formules précédentes.
- On peut en déduire l'inverse de la matrice du système qui est :

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10

1. Bien sûr, comme le prouve l'exemple de $(\mathcal{S})\left\{\begin{array}{r} x+\ \ y=1 \\ 2\,x+2\,y=2 \end{array}\right.$

   dont l'ensemble des solutions est $S=\big\{(x,1-x)\,;\ x\in\mathbb{K}\big\}$.
2. Non, comme le prouve l'exemple de $(\mathcal{S})\left\{\begin{array}{r} x+\ \ y=1 \\ 2\,x+2\,y=1 \end{array}\right.$

   qui ne possède pas de solution, et donc en possède au plus une.
3. En revanche, pour un système $(\mathcal{S})$ de n équations à n inconnues, alors :
   - si, pour tout second membre, $(\mathcal{S})$ possède au plus une solution,
   - ou si, pour tout second membre, $(\mathcal{S})$ possède au moins une solution,

   alors, on peut en déduire que, pour tout second membre, le système $(\mathcal{S})$ possède une unique solution. En effet la première hypothèse (resp. la seconde) nous dit que l'application linéaire canoniquement associée à la matrice est injective (resp. surjective), ce qui entraîne qu'elle est bijective car c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 11 Le système associé à A est :

$$\left\{\begin{array}{l} x+\ \ y+\ \ \ \ z+\ \ \ \ t = X \\ x+2y+\ \ 3z+\ \ 4t = Y \\ x+3y+\ \ 6z+10t = Z \\ x+4y+10z+20t = T \end{array}\right.$$

Les opérations :

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1, \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_1$$

donnent le système équivalent :

$$\begin{cases} x + \ y + \ z + \ \ t = X \\ \qquad y + 2z + \ 3t = Y - X \\ \qquad 2y + 5z + \ 9t = Z - X \\ \qquad 3y + 9z + 19t = T - X \end{cases}$$

Avec $L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_2$, $L_4 \leftarrow L_4 - 3\,L_2$, on obtient :

$$\begin{cases} x + y + \ z + \ \ t = X \\ \qquad y + 2z + \ 3t = Y - X \\ \qquad\qquad z + \ 3t = Z + X - 2Y \\ \qquad\qquad 3z + 10t = T + 2X - 3Y \end{cases}$$

Enfin $L_4 \leftarrow L_4 - 3\,L_3$ donne :

$$\begin{cases} x + y + \ z + \ t = X \\ \qquad y + 2z + 3t = Y - X \\ \qquad\qquad z + 3t = Z + X - 2Y \\ \qquad\qquad\qquad t = -X + 3Y - 3Z + T \end{cases}$$

En résolvant de proche en proche, on obtient :

$$\begin{cases} t = -X + 3Y - 3Z + T \\ z = Z + X - 2Y - 3t = 4X - 11Y + 10Z - 3T \\ y = Y - X - 2z - 3t = -6X + 14Y - 11Z + 3T \\ x = X - y - z - t = 4X - 6Y + 4Z - T \end{cases}$$

et l'inverse de A est donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 12 Avec les deux opérations élémentaires :

$$L_2 \longleftarrow L_2 - m\,L_1 \quad \text{et} \quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_1,$$

on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} x + y + z = m + 1 \\ (1-m)y - z = -m^2 \\ (m-1)y = -m \end{cases}$$

- Si $m \neq 1$, alors c'est un système, triangulaire en (x, z, y), qui possède une solution unique, donnée par :

$$y = \frac{m}{1-m}, \qquad z = m + m^2 \quad \text{et} \quad x = \frac{-2\,m + m^3 - m^2 + 1}{1-m}\cdot$$

- Si $m = 1$, alors il est incompatible puisque la dernière équation s'écrit $0\,y = -1$..

S'entraîner et approfondir

23.1 Étant donné un paramètre complexe m, déterminer le rang de :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & m & -1 & 3 \\ m & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

⋆ **23.2** Étant donné n points de $\mathbb{R}^2$, on voudrait savoir si l'on peut trouver un polygone à n côtés dont ces points soient les milieux des côtés.

1. Résoudre le problème pour $n = 3$.
2. Résoudre le problème pour $n = 4$.
3. Résoudre le problème dans le cas général.
4. Déterminer, si possible, l'inverse de la matrice du système rencontré.

Indication : introduire les affixes des points.

23.3 Étant donné $(y_k)_{k\in[\![1,4]\!]} \in \mathbb{R}^4$, on considère :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 2 \\ 2 & 5 & 12 & -7 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 2 & y_1 \\ 2 & 5 & 12 & -7 & y_2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & y_3 \\ -2 & 4 & 6 & -2 & y_4 \end{pmatrix}$$

et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

1. À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, déterminer une matrice triangulaire de même rang que A.
   Quel est le rang de A ? Donner une base de $\operatorname{Im} u$.
2. Appliquer à S la suite d'opérations élémentaires précédente et en déduire des équations (les plus simples possibles) de $\operatorname{Ker} u$ ainsi que de $\operatorname{Im} u$.

23.4 Rang des matrices carrées d'ordre n suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \dots & \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots & (n+1)^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & \dots & (n+2)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 & \dots & \end{pmatrix}$

★ **23.5** Étant donné n un entier naturel, résoudre :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \vdots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$$

★ **23.6** Étant donné quatre complexes distincts a, b, c et d, résoudre les systèmes suivants :

1. $$\begin{cases} x + a\,y + a^2\,z + a^3\,t = a^4 \\ x + b\,y + b^2\,z + b^3\,t = b^4 \\ x + c\,y + c^2\,z + c^3\,t = c^4 \\ x + d\,y + d^2\,z + d^3\,t = d^4 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x + a\,y + a^2\,z + a^3\,t = a^4 \\ x + b\,y + b^2\,z + b^3\,t = b^4 \\ y + 2\,a\,z + 3\,a^2\,t = 4\,a^3 \\ y + 2\,b\,z + 3\,b^2\,t = 4\,b^3 \end{cases}$$

23.7 Étant donné deux complexes distincts a et b, résoudre le système :

$$\begin{cases} x + a\,y + a^2\,z + a^3\,t = 0 \\ x + b\,y + b^2\,z + b^3\,t = 0 \\ y + 2\,a\,z + 3\,a^2\,t = 1 \\ y + 2\,b\,z + 3\,b^2\,t = 1 \end{cases}$$

23.8 Étant donné six complexes distincts a, b, c, α, β et γ, résoudre le système :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a-\alpha} + \dfrac{y}{a-\beta} + \dfrac{z}{a-\gamma} = 1 \\[2mm] \dfrac{x}{b-\alpha} + \dfrac{y}{b-\beta} + \dfrac{z}{b-\gamma} = 1 \\[2mm] \dfrac{x}{c-\alpha} + \dfrac{y}{c-\beta} + \dfrac{z}{c-\gamma} = 1 \end{cases}$$

On pourra utiliser la fraction $R(t) = \dfrac{x}{t-\alpha} + \dfrac{y}{t-\beta} + \dfrac{z}{t-\gamma} - 1$.

Solution des exercices

23.1 En réalisant les opérations suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} L_2 & \leftarrow & L_2 - 3\,L_1, & L_3 \leftarrow L_3 - m\,L_1, & L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \\ L_2 & \longleftrightarrow & L_4, & L_3 \leftarrow L_3 + (m-3)\,L_2, & L_4 \leftarrow L_4 - (m-3)\,L_2 \end{array}$$

on voit que M est équivalente à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2\,m-8 & 3\,m-12 \\ 0 & 0 & 5-2\,m & 12-4\,m \end{pmatrix}$$

À ce niveau, on pourrait discuter selon que $m = 4$ ou non pour continuer strictement la méthode du pivot, mais il est préférable de faire $L_3 \leftarrow L_3 + L_4$ pour éliminer le m du pivot. En continuant avec $L_4 \leftarrow L_4 + \frac{(5-2m)}{3}\,L_3$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -\,m \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

avec :

$$k = \frac{1}{3}\left(2\,m^2 - 17\,m + 36\right) = \frac{1}{3}(m-4)\,(2\,m-9).$$

Par suite, si $m = 4$ ou $m = 9/2$, alors le rang vaut 3 ; dans les autres cas il vaut 4.

23.2 1. Pour $n = 3$, si $(\alpha_k)_{k\in[\![1,3]\!]}$ sont les affixes des points donnés et $(z_k)_{k\in[\![1,3]\!]}$ les affixes des points cherchés, le problème se traduit par le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\,z_1 + \frac{1}{2}\,z_2 = \alpha_1 \\[2ex] \frac{1}{2}\,z_2 + \frac{1}{2}\,z_3 = \alpha_2 \\[2ex] \frac{1}{2}\,z_3 + \frac{1}{2}\,z_1 = \alpha_3 \end{cases}$$

En sommant toutes ces équations, on trouve :

$$z_1 + z_2 + z_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

et en retranchant à chaque équation , on trouve :

$$\begin{array}{rcl} z_1 & = & \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ z_2 & = & \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ z_3 & = & -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{array}$$

ce qui prouve l'unicité et donc l'existence de la solution du système et, de plus, en donne l'expression.

2. Pour $n=4$, le système est :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\,z_1+\frac{1}{2}\,z_2=\alpha_1 \\ \frac{1}{2}\,z_2+\frac{1}{2}\,z_3=\alpha_2 \\ \frac{1}{2}\,z_3+\frac{1}{2}\,z_4=\alpha_3 \\ \frac{1}{2}\,z_4+\frac{1}{2}\,z_1=\alpha_4 \end{cases}$$

La compatibilité du système impose :

$$z_1+z_2+z_3+z_4=\alpha_1+\alpha_3=\alpha_2+\alpha_4.$$

Par suite, si $\alpha_1+\alpha_3\neq\alpha_2+\alpha_4$ alors le système est incompatible.
En revanche, si $\alpha_1+\alpha_3=\alpha_2+\alpha_4$, alors le système est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\,z_1+\frac{1}{2}\,z_2=\alpha_1 \\ \frac{1}{2}\,z_2+\frac{1}{2}\,z_3=\alpha_2 \\ \frac{1}{2}\,z_3+\frac{1}{2}\,z_4=\alpha_3 \end{cases}$$

qui présente une indétermination d'ordre 1 car pour tout choix de z_4, on peut calculer z_1, z_2 et z_3.

3. • Lorsque n est impair, le système est

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\,z_1+\frac{1}{2}\,z_2=\alpha_1 \\ \frac{1}{2}\,z_2+\frac{1}{2}\,z_3=\alpha_2 \\ \quad\cdots \\ \frac{1}{2}\,z_n+\frac{1}{2}\,z_1=\alpha_n \end{cases}$$

La combinaison linéaire $L_1-L_2+L_3-\cdots-L_{n-1}+L_n$ donne :

$$z_1=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4+\cdots+\alpha_n$$

Par permutations circulaires, on en déduit :

$$\begin{array}{rcl} z_2 & = & \alpha_2-\alpha_3+\alpha_4-\cdots-\alpha_n+\alpha_1 \\ z_3 & = & \alpha_3-\alpha_4+\cdots+\alpha_n-\alpha_1+\alpha_2 \\ z_4 & = & \alpha_4-\alpha_5+\cdots-\alpha_n+\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3 \\ & & \cdots \\ z_n & = & \alpha_n-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\cdots-\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1} \end{array}$$

ce qui prouve l'unicité et donc l'existence de la solution du système et, de plus, donne cette solution.

• Lorsque n est pair la combinaison linéaire $L_1-L_2+L_3-\cdots+L_{n-1}-L_n$ impose la condition :

$$0=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4+\cdots+\alpha_n.$$

Lorsque cette condition est remplie le système est équivalent au système constitué des $n-1$ premières équations. En fixant z_n (indétermination d'ordre 1), il se résout donc comme celui du cas précédent.

4. • Lorsque n est pair, on a trouvé une combinaison linéaire non triviale entre les lignes de la matrice, elle n'est donc par inversible.
   • Lorsque n est impair, on déduit cette matrice inverse de la résolution précédente du système, ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & & & -1 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 1 & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 1 & & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

23.3 1. Avec les opérations :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1, \quad L_4 \leftarrow L_4 + 2\,L_1,$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{11}\,L_2, \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_2, \quad L_4 \leftarrow 8l_4 + 2\,L_2$$

on obtient la matrice triangulaire $A' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice A est donc, comme A', de rang 2.

L'image de u, de dimension 2, est donc engendrée par les deux premiers vecteurs colonnes de A (car il ne sont pas proportionnels).

2. En utilisant la même suite d'opérations élémentaires, on obtient :

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 2 & y_1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \frac{1}{11}\,y_2 - \frac{2}{11}\,y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{11}\,y_1 + \frac{2}{11}\,y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{18}{11}\,y_1 + \frac{2}{11}\,y_2 + y_4 \end{pmatrix}$$

   • Un vecteur $(x_k)_{k\in[\![1,4]\!]} \in \mathbb{R}^4$ est dans $\operatorname{Ker} u$ si, et seulement si, $A\,X = 0$, ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} x_1 - 3\,x_2 - 5\,x_3 + 2\,x_4 = 0 \\ x_2 + 2\,x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

   c'est un système de rang 2 qui définit $\operatorname{Ker} u$.

- Un vecteur $(y_k)_{k\in[\![1,4]\!]}$ est dans $\operatorname{Im} u$ si, et seulement si, le système $A\,X = Y$ est compatible ; or ce système est équivalent au système :

$$\begin{cases} x_1 - 3\,x_2 - 5\,x_3 - 3\,x_4 &= y_1 \\ x_2 + 2\,x_3 - x_4 &= \frac{1}{11}\,y_2 - \frac{2}{11}\,y_1 \\ 0 &= \frac{7}{11}\,y_1 + \frac{2}{11}\,y_2 + y_3 \\ 0 &= \frac{18}{11}\,y_1 + \frac{2}{11}\,y_2 + y_4 \end{cases}$$

Pour que ce système soit possible, il faut :

$$\begin{cases} \frac{7}{11}\,y_1 + \frac{2}{11}\,y_2 + y_3 = 0 \\ \frac{18}{11}\,y_1 + \frac{2}{11}\,y_2 + y_4 = 0 \end{cases}$$

Il est alors possible (avec indétermination d'ordre 2) puisque, pour tout couple (x_3, x_4), on peut trouver x_1 et x_2 vérifiant le système.
Les relations précédentes forment un système d'équations de $\operatorname{Im} u$.

23.4 1. Si $n = 1$, alors la matrice A est de rang 1. Supposons donc $n \geqslant 2$.
- Les vecteurs colonnes de cette matrice sont combinaisons linéaires de C_1 et de $C_2 - C_1$. Donc le rang de A est inférieur à 2.
- Comme C_1 et C_2 ne sont pas proportionnels, le rang de A est 2.

2. Supposons $n \geqslant 3$. Si pour k allant de n à 2, on effectue l'opération $C_k \leftarrow C_k - C_{k-1}$, on obtient une matrice de même rang qui est :

$$\begin{pmatrix} 1^2 & 3 & 5 & \dots & 2\,n-1 \\ 2^2 & 5 & 7 & \dots & 2\,n+1 \\ 3^2 & 7 & 9 & \dots & 2\,n+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 & 2\,n+1 & 2\,n+3 & \dots & 4\,n-3 \end{pmatrix}.$$

Si pour k allant de n à 3, on effectue alors $C_k \leftarrow C_k - C_{k-1}$, on obtient une matrice de même rang qui est :

$$\begin{pmatrix} 1^2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2^2 & 5 & 2 & \dots & 2 \\ 3^2 & 7 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 & 2\,n+1 & 2 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace vectoriel engendré par la vecteurs colonnes de cette dernière matrice est donc le même que celui engendré par les vecteurs colonnes de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1^2 & 3 & 2 \\ 2^2 & 5 & 2 \\ 3^2 & 7 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n^2 & 2\,n+1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est de rang 3 : en effet, il est aisé de prouver que ses 3 vecteurs colonne forment une famille libre, en résolvant le système :

$$\begin{cases} 1^2\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 = 0 \\ 2^2\,x_1 + 5\,x_2 + 2\,x_3 = 0 \\ 3^2\,x_1 + 7\,x_2 + 2\,x_3 = 0 \end{cases}$$

qui se triangule facilement.

Pour $n \leqslant 2$, on peut vérifier que le rang de B est n.

23.5 Analyse En résolvant de proche en proche, on trouve :

$$\begin{aligned} &x_2 = -x_1, \\ &x_3 = 0, \\ &x_4 = -x_2 = x_1, \\ &x_5 = -x_4 = -x_1 \ \ldots \end{aligned}$$

Démonstration

Soit $(x_1, x_2, \ldots)$ une solution du système. Une récurrence élémentaire montre :

$$(p \geqslant 1 \text{ et } 3\,p \leqslant n) \Longrightarrow (x_{3p-2} = x_1,\ x_{3\,p-1} = -x_1,\ x_{3\,p} = 0) \qquad (*)$$

- Si $n \equiv 0\ [3]$, *i.e.* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3\,r$, la propriété $(*)$ est vraie jusqu'au rang $p = r$ et la dernière équation donne alors :

$$0 = x_{n-1} + x_n = x_{3\,r-1} = -x_1.$$

  Par suite le système ne possède que la solution triviale.
- Si $n \equiv 1\ [3]$, *i.e.* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3\,r + 1$, la propriété $(*)$ est vraie jusqu'au rang $p = r$.
  * L'avant dernière équation donne alors :

$$x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = -x_1 + x_n = 0$$

    et donc $x_n = x_1$.
  * La dernière équation donne alors $x_n = 0$ et entraîne $x_1 = 0$.

  Par suite le système ne possède que la solution triviale.
- Si $n \equiv 2\ [3]$, *i.e.* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3\,r + 2$, un raisonnement analogue aux précédents montre que les seules solutions possibles du système sont de la forme :

$$(x_1, -x_1, 0, x_1, -x_1, 0, \ldots x_1, -x_1, 0, x_1, -x_1)\,.$$

  On vérifie immédiatement que tous ces vecteurs sont solutions, ce qui prouve que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1.

23.6 1. Le problème est équivalent à la recherche d'un polynôme :

$$P(u) = u^4 - t\,u^3 - z\,u^2 - y\,u - x$$

qui s'annule en a, b, c et d ; comme P est unitaire, cela équivaut à :

$$P(u) = (u-a)\,(u-b)\,(u-c)\,(u-d) = u^4 - \sigma_1\,u^3 + \sigma_2\,u^2 - \sigma_3\,u + \sigma_4$$

où σ_1, σ_2, σ_3 et σ_4 sont les fonctions symétriques élémentaires de a, b, c et d. Par suite, le système donné possède un unique solution qui est :

$$x = -\sigma_4, \quad y = \sigma_3, \quad z = -\sigma_2, \quad t = \sigma_1.$$

2. Le problème est équivalent à la recherche d'un polynôme unitaire :

$$P(u) = u^4 - t\,u^3 - z\,u^2 - y\,u - x$$

qui possède a et b comme racines doubles.
Par suite, le seul polynôme P répondant au problème est :

$$P(u) = (u-a)^2\,(u-b)^2.$$

En le développant, on obtient la seule solution du système donné.

23.7 Résoudre ce système équivaut à rechercher un polynôme :

$$P(u) = t\,u^3 + z\,u^2 + y\,u + x$$

vérifiant :

$$P(a) = P(b) = 0 \text{ et } P'(a) = P'(b) = 1.$$

Ce polynôme est donc de la forme :

$$P(u) = (u-a)\,(u-b)\,(\alpha\,u + \beta)$$

avec les conditions :

$$P'(a) = (a-b)(\alpha\,a + \beta) = 1$$

$$P'(b) = (b-a)(\alpha\,b + \beta) = 1$$

ce qui donne :

$$\alpha = \frac{2}{(a-b)^2} \quad \text{et } \beta = -\frac{b+a}{(a-b)^2}$$

et donc :

$$\begin{aligned} P(u) &= \frac{1}{(a-b)^2}\,(u-a)\,(u-b)\,(2\,u - (a+b)) \\ &= \frac{1}{(a-b)^2}\,\big(2\,u^3 - 3\,(a+b)\,u^2 + (a^2 + 4\,a\,b + b^2)\,u - a\,b\,(a+b)\big)\,. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$x = \frac{-a\,b\,(a+b)}{(a-b)^2},\ y = \frac{a^2 + 4\,a\,b + b^2}{(a-b)^2},\ z = \frac{-3\,(a+b)}{(a-b)^2},\ t = \frac{2}{(a-b)^2}.$$

23.8 Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et :

$$R(t) = \frac{x}{t-\alpha} + \frac{y}{t-\beta} + \frac{z}{t-\gamma} - 1.$$

En réduisant au même dénominateur, (x, y, z) est solution du système si, et seulement si :

$$R(t) = \frac{-P(t)}{(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)}$$

où $P(t)$ est un polynôme unitaire de degré 3 vérifiant $P(a) = P(b) = P(c) = 0$. Par suite :

$$R(t) = \frac{-(t-a)\,(t-b)\,(t-c)}{(t-\alpha)\,(t-\beta)\,(t-\gamma)}.$$

Il suffit de décomposer cette fraction en éléments simples pour obtenir les valeurs de x, y et z.

Chapitre 24 : Déterminants

I Groupe symétrique 1226

1 Définition 1226

2 Décomposition d'une permutation 1228

3 Signature 1231

II Formes p–linéaires alternées 1232

1 Formes 2–linéaires ou bilinéaires 1232

2 Formes 3–linéaires ou trilinéaires 1233

3 Formes p–linéaires 1234

4 Formes n–linéaires alternées en dimension n . . . 1235

5 Propriétés des formes n–linéaires alternées 1236

6 Expression d'une forme n-linéaire alternée 1237

III Déterminant d'une famille de vecteurs 1237

1 Définition 1237

2 Propriétés 1238

3 Application : orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . 1239

IV Déterminant d'un endomorphisme 1241

1 Définition 1241

2 Propriétés 1242

V Déterminant d'une matrice carrée 1242

1 Définition 1242

2 Propriétés 1244

VI Calcul des déterminants 1246

1 Opérations sur les lignes ou les colonnes 1246

2 Développement d'un déterminant suivant une colonne ou une ligne 1247

3 Étude de déterminants particuliers 1249

VII Comatrice 1251

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 1252

Exercices 1269

Déterminants 24

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Groupe symétrique

1 Définition

Notation Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ dans lui–même. Si $n = 1$, on a $\mathfrak{S}_1 = \{\mathrm{Id}\}$. Dans toute la suite, nous supposerons $n \geqslant 2$.

Proposition 1

Muni de la composition des applications, $\mathfrak{S}_n$ est un groupe de cardinal $n!$, que l'on appelle **groupe symétrique**..

Si $n \geqslant 3$, le groupe $\mathfrak{S}_n$ n'est pas commutatif.

Démonstration. Ceci est une conséquence immédiate de la proposition 6 de la page 870 $\square$

Notations

1. Si $(\sigma, \tau) \in \mathfrak{S}_n^2$, la composée $\sigma \circ \tau$ est notée $\sigma\tau$ et appelée produit des éléments σ et τ.
2. Lorsque $p \in \mathbb{Z}$, on notera également σ^p la permutation :

$$\begin{cases} \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma}_{p \text{ fois}} & \text{si } p > 0 \\ \left(\sigma^{-1}\right)^{-p} & \text{si } p < 0 \\ \mathrm{Id} & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

3. Une permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ pourra se noter de la manière suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

p.1252

Exercice 1 On considère la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_6$ définie par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer σ^{-1}.

Peut-on trouver un entier naturel p non nul tel que $\sigma^p = \mathrm{Id}_{[\![1,6]\!]}$?

Définition 1

Étant donné un entier $p \geqslant 2$, ainsi que des éléments de $[\![1,n]\!]$ $a_1, a_2, \ldots, a_p$ distincts 2 à 2, l'application σ définie sur $[\![1,n]\!]$ par :

$$\begin{aligned} \forall x \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_p\} \quad & \sigma(x) = x, \\ \forall i \in [\![1, p-1]\!] \quad & \sigma(a_i) = a_{i+1}, \\ & \sigma(a_p) = a_1, \end{aligned}$$

est une permutation de $[\![1,n]\!]$ que l'on note $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$.

Une telle permutation est appelée $\boldsymbol{p}$**–cycle** ou **cycle d'ordre** $\boldsymbol{p}$.

On appelle **support** du cycle σ l'ensemble $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$.

Définition 2

Un 2-cycle τ de $\mathfrak{S}_n$ est appelée **transposition**. Il existe alors deux éléments distincts i et j de $[\![1,n]\!]$ tels que

$$\tau(i) = j \quad , \quad \tau(j) = i \quad \text{et} \quad \forall x \notin \{i,j\} \quad \tau(x) = x.$$

Remarques

1. Une transposition τ vérifie $\tau^2 = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$; on a donc $\tau^{-1} = \tau$ (on dit que τ est une **involution**).
2. Il y a plusieurs façons d'écrire le même p–cycle. Par exemple, les cycles suivants sont identiques :
$$(a_1, a_2, \ldots, a_p), (a_2, a_3, \ldots, a_p, a_1), \ldots, (a_p, a_1, \ldots, a_{p-1}).$$
3. Le support d'un cycle est l'ensemble des éléments $x \in [\![1,n]\!]$ tels que :
$$\sigma(x) \neq x.$$

p.1252

Exercice 2 Quel est l'inverse du p–cycle $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$?

p.1252

Exercice 3 Justifier que la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas un cycle.

p.1252 **Exercice 4** Soit a, b et c des éléments de $[\![1,n]\!]$, 2 à 2 distincts.

Montrer que $(a,b)(b,c)$ est un cycle.

Étude de $\mathfrak{S}_2$

On a $\mathfrak{S}_2 = \{\mathrm{Id}, (1,2)\}$. En notant $\tau = (1,2)$, on obtient la table suivante :

$\circ$	Id	τ
Id	Id	τ
τ	τ	Id

On remarque qu'alors la loi $\circ$ est commutative dans $\mathfrak{S}_2$ et que toute permutation de $\mathfrak{S}_2$ peut trivialement s'écrire sous forme de produit de transpositions.

Étude de $\mathfrak{S}_3$

Les 6 éléments de $\mathfrak{S}_3$ sont :
- l'application identité notée Id ;
- les transpositions $\tau_1 = (2,3)$, $\tau_2 = (1,3)$ et $\tau_3 = (1,2)$;
- les 3–cycles $\sigma_1 = (1,2,3)$ et $\sigma_2 = (1,3,2)$.

La construction de la table de la loi $\circ$ dans $\mathfrak{S}_3$ est faite dans l'exercice 24.1 de la page 1269.

p.1252 **Exercice 5** Soit $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des éléments de $[\![1,n]\!]$ distincts 2 à 2.

Montrer que :

$$(a_1,a_2)(a_2,a_3)\cdots(a_{p-1},a_p) = (a_1,a_2,\cdots,a_p),$$

et, plus généralement, pour tout $q \in]\!]1,p]\!]$, que :

$$(a_1,a_2,\ldots,a_q)(a_q,a_{q+1},\ldots,a_p) = (a_1,a_2,\ldots,a_p).$$

2 Décomposition d'une permutation

Proposition 2

Deux cycles à supports disjoints commutent.

Principe de démonstration. Soit c_1 et c_2 des cycles à supports respectifs A_1 et A_2. On suppose que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Soit $x \in [\![1,n]\!]$. Montrer que $c_1 \circ c_2(x) = c_1(x) = c_2 \circ c_1(x)$ en distinguant les cas où $x \notin A_1 \cup A_2$ et $x \in A_1 \cup A_2$. Démonstration page 1253

Remarque Soit c_1, c_2, $\ldots$, c_r des cycles à supports disjoints deux à deux. Comme ces permutations commutent entre elles, la permutation obtenue en composant tous ces cycles peut s'écrire $\prod_{i=1}^{r} c_i$ et on peut l'évaluer en effectuant les composées dans l'ordre que l'on souhaite.

p.1253

Exercice 6 Trouver un entier naturel q non nul tel que $\sigma^q = \mathrm{Id}_{[\![1,8]\!]}$ où :

$$\sigma = (1,2,3,4)(5,6,7).$$

Proposition 3

Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$. On définit sur $[\![1,n]\!]$ la relation suivante :

$$x\,\mathcal{R}_\sigma\,y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad y = \sigma^k(x).$$

La relation $\mathcal{R}_\sigma$ est alors une relation d'équivalence sur $[\![1,n]\!]$.

Démonstration page 1253

Proposition 4

Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$ et $x \in [\![1,n]\!]$.

Il existe un entier naturel non nul p tel que :

$$x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{p-1}(x) \text{ soient deux à deux distincts} \quad \text{et} \quad \sigma^p(x) = x.$$

La classe d'équivalence de x pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}_\sigma$ est alors l'ensemble $\{x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{p-1}(x)\}$, appelé **orbite** de x.

Principe de démonstration.

Démonstration page 1253

Montrer que le plus petit élément de l'ensemble $\{q \in \mathbb{N}^* | \sigma^q(x) = x\}$ convient.

p.1254

Exercice 7 Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

Déterminer toutes les classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}_\sigma$.

Vérifier que $\sigma = (1,2,3,4)(5,6,7)$.

Y-a-t-il un lien entre cette écriture et les orbites de σ ?

Cet exercice est, en fait, une application du théorème suivant.

Théorème 5 (décomposition en produit de cycles à support disjoints)

Toute permutation différente de l'identité se décompose, de manière unique à l'ordre près des facteurs, en un produit de cycles à support deux à deux disjoints.

Démonstration (non exigible) page 1254

Point méthode

Pour décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints, on considère les orbites de σ de cardinal au moins égal à 2 ; puis on construit les cycles associés. On peut alors vérifier que σ est le produit des cycles ainsi construits.

Ce procédé de décomposition suit le principe utilisé dans la démonstration du théorème 5 de la page précédente.

p.1255

Exercice 8 Décomposer en produit de cycles à supports disjoints la permutation de l'exercice 1 de la page 1227.

p.1255

Exercice 9 Soit $\tau = (a,b) \in \mathfrak{S}_n$ et $\sigma = (a, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ un cycle de longueur $p+1$ de $\mathfrak{S}_n$. Donner la décomposition sous forme de produit de cycles à supports disjoints de la permutation $\tau\sigma$.

Comparer le nombre d'orbites de σ et celui de $\tau\sigma$.

Proposition 6 (Décomposition en produit de transpositions)

Toute permutation de $[\![1,n]\!]$ est un produit de transpositions.

Démonstration page 1255

Remarque On peut démontrer la proposition 6 sans utiliser la décomposition en produit de cycles. On se référera à l'exercice 24.2 de la page 1269.

Attention La décomposition en produit de transpositions n'est pas unique. Par exemple, $(1,2,3) = (1,3)(1,2) = (1,2)(2,3)$.

Point méthode

Pour décomposer une permutation en produit de transpositions, on peut d'abord décomposer la permutation en produit de cycles, puis utiliser l'écriture d'un cycle sous forme de produit de transpositions de l'exercice 5 de la page 1228.

p.1255

Exercice 10 Décomposer en produit de transpositions la permutation de l'exercice 1 de la page 1227.

3 Signature

Théorème 7

Il existe une et une seule application ε de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1,+1\}$ telle que :

- $\varepsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ ;
- $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ'.

On appelle **signature** cette application.

Démonstration (non exigible) page 1256

Corollaire 8

Si $\sigma = \tau_1\,\tau_2\ldots\tau_p$ est une décomposition en produit de transpositions de la permutation σ, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.

Remarque Pour une permutation σ, il n'y a pas unicité de la décomposition en produit de transpositions. En revanche, la parité du nombre de transpositions intervenant dans un tel produit est indépendante de la décomposition.

Exemple La signature du p–cycle $(a_1,a_2,\ldots,a_p)$ est $(-1)^{p-1}$, car on peut écrire :

$$(a_1,a_2,\ldots,a_p) = (a_1,a_2)(a_2,a_3)\ldots(a_{p-1},a_p).$$

On en déduit alors, aisément, le corollaire qui suit.

Corollaire 9

Soit c_1, c_2, ..., c_p des cycles à supports disjoints de longueurs respectives ℓ_1, ℓ_2, ..., ℓ_p. Alors la permutation $\sigma = c_1\,c_2\ldots c_p$ a pour signature :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{p}(l_i-1)}.$$

Point méthode

Pour déterminer la signature d'une permutation, il suffit donc de décomposer la permutation en un produit de cycles ou de transpositions.

p.1257

Exercice 11

Quelle est la signature de la permutation de l'exercice 1 de la page 1227 ?

II Formes p–linéaires alternées

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1 Formes 2–linéaires ou bilinéaires

Définition 3

Une **forme 2–linéaire** ou **bilinéaire** sur E est une application f de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ telle que :

1. pour tout x fixé dans E, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ y & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$ soit linéaire ;
2. pour tout y fixé dans E, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$ soit linéaire.

p.1257 **Exercice 12** Soit f une forme bilinéaire sur E et $(x,y) \in E^2$.

Exprimer $f(x+y, x+y)$ en fonction de $f(x,x)$, $f(y,x)$, $f(x,y)$ et $f(y,y)$.

Exemples

1. L'application :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) & \longmapsto & x_1\,y_1 + x_2\,y_2 \end{array}$$
est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$, qui définit le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.
De la même manière, l'application :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) & \longmapsto & x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3 y_3 \end{array}$$
est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$, qui définit le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$.
2. Si E est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension 2 et (e_1,e_2) une base de E, l'application :
$$(x_1\,e_1 + x_2\,e_2, y_1\,e_1 + y_2\,e_2) \longmapsto x_1\,y_2 - x_2\,y_1$$
est une forme bilinéaire sur E.
3. Soit q un entier naturel non nul. L'application :
$$\begin{array}{ccc} \big(\mathcal{M}_q(\mathbb{K})\big)^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (A,B) & \longmapsto & \mathrm{Tr}(AB) \end{array}$$
est une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.
4. L'application qui, à des fonctions f et g continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, associe l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

Expression d'une forme bilinéaire dans une base de E.

Soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Soit f une forme bilinéaire sur E. Si u et v sont des vecteurs de E, il existe des familles de scalaires $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ telles que :

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i\, e_i \qquad \text{et} \qquad v = \sum_{i=1}^{n} b_i\, e_i.$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} f(u,v) &= f\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\, e_k, \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell\, e_\ell\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k\, f\Big(e_k, \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell\, e_\ell\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k\, \Big(\sum_{\ell=1}^{n} b_\ell\, f(e_k,e_\ell)\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_k\, b_\ell\, f(e_k,e_\ell). \end{aligned}$$

Réciproquement, si $(y_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une famille de scalaires, l'application :

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\, e_i, \sum_{i=1}^{n} b_i\, e_i\Big) \longmapsto \sum_{(k,l)\in[\![1,n]\!]^2} a_k\, b_l\, y_{k,l}$$

est une forme bilinéaire sur E.

2 Formes 3–linéaires ou trilinéaires

Définition 4

Une **forme 3–linéaire** ou **trilinéaire** sur E est une application f de $E\times E\times E$ dans $\mathbb{K}$ telle que :

1. pour tous x et y dans E, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ z & \longmapsto & f(x,y,z) \end{array}$ soit linéaire ;
2. pour tous x et z dans E, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ y & \longmapsto & f(x,y,z) \end{array}$ soit linéaire ;
3. pour tous y et z dans E, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x,y,z) \end{array}$ soit linéaire.

p.1257

Exercice 13 Soit f une forme trilinéaire sur E et $(x,y)\in E^2$.

Développer l'expression $f(x+y,x+y,x+y)$.

Exemples

1. L'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3),(z_1,z_2,z_3)\big) & \longmapsto & x_1\,y_2\,z_3 \end{array}$$

   est une forme trilinéaire sur $\mathbb{R}^3$.

2. Soit q un entier naturel non nul. L'application :

$$\begin{array}{rcl} \big(\mathcal{M}_q(\mathbb{K})\big)^3 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (A,B,C) & \longmapsto & \operatorname{Tr}(ABC) \end{array}$$

   est une forme trilinéaire sur $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.

Expression d'une forme trilinéaire dans une base de E

Soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Soit f une forme trilinéaire sur E. Si u_1, u_2 et u_3 sont des vecteurs de E, il existe une famille de scalaires $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que :

$$\forall j \in [\![1,3]\!] \quad u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i.$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} f(u_1,u_2,u_3) &= f\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,1}\,e_k, \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell,2}\,e_\ell, \sum_{m=1}^{n} a_{m,3}\,e_m\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{k,1}\, f\left(e_k, \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell,2}\,e_\ell, \sum_{m=1}^{n} a_{m,3}\,e_m\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{k,1}\left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell,2}\, f\Big(e_k, e_\ell, \sum_{m=1}^{n} a_{m,3}\,e_m\Big)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{k,1}\left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell,2}\Big(\sum_{m=1}^{n} a_{m,3}\, f(e_k,e_\ell,e_m)\Big)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_{k,1}\,a_{\ell,2}\,a_{m,3}\, f(e_k,e_\ell,e_m). \end{aligned}$$

3 Formes p–linéaires

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Définition 5

Une **forme p–linéaire** sur E est une application f de E^p dans $\mathbb{K}$ telle que, pour toute famille $(u_1,u_2,\dots,u_p) \in E^p$ et pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, l'application :

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(u_1,u_2,\dots,u_{i-1},x,u_{i+1},\dots,u_p) \end{array}$$

soit une application linéaire.

Exemples

1. Les formes 1–linéaires sont les formes linéaires.
2. L'application :
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f_1,f_2,\dots,f_p) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \prod_{k=1}^p f_k(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$
   est une forme p–linéaire sur $E=\mathcal{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

Expression d'une forme p–linéaire en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Proposition 10

Soit f une forme p–linéaire sur E. Si u_1, u_2, …, u_p sont des vecteurs de E, il existe une famille de scalaires $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que :
$$\forall j\in[\![1,p]\!]\quad u_j=\sum_{i=1}^n a_{i,j}\,e_i.$$
Alors, on a :
$$f(u_1,u_2,\dots,u_p)=\sum_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant n\\ 1\leqslant i_2\leqslant n\\ \dots\\ 1\leqslant i_p\leqslant n}} a_{i_1,1}\,a_{i_2,2}\dots a_{i_p,p}\,f(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_p}).$$

Démonstration page 1257

Réciproquement, si $(y_\varphi)_{\varphi\in[\![1,n]\!]^{[\![1,p]\!]}}$ est une famille de scalaires, l'application :
$$\left(\sum_{i=1}^n a_{i,1}\,e_i,\sum_{i=1}^n a_{i,2}\,e_i,\dots,\sum_{i=1}^n a_{i,p}\,e_i\right)\longmapsto\sum_{\varphi\in[\![1,n]\!]^{[\![1,p]\!]}} a_{\varphi(1),1}\,a_{\varphi(2),2}\cdots a_{\varphi(p),p}\,y_\varphi,$$
est une forme p–linéaire sur E.

4 Formes n–linéaires alternées en dimension n

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel de dimension n.

Définition 6

Une forme n–linéaire f sur E est dite **alternée** si, pour tous vecteurs u_1, u_2, …, u_n de E et pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ avec $i\neq j$, on a :
$$u_i=u_j\Longrightarrow f(u_1,u_2,\dots,u_n)=0.$$

Proposition 11

Si f est une forme n–linéaire alternée, alors elle est **antisymétrique**, c'est-à-dire qu'elle vérifie, pour tout $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$ et pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant i < j \leqslant n$:

$$f(u_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ème}}}{u_i}, \ldots \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-ème}}}{u_j}, \ldots, u_n) = -f(u_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ème}}}{u_j}, \ldots \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-ème}}}{u_i}, \ldots, u_n).$$

Principe de démonstration. Pour un n-uplet $(u_1, \ldots, u_n)$ de E^n tel que $u_i = u_j$ avec $i < j$, calculer $f(u_1, \ldots, \underbrace{u_i + u_j}_{\substack{\uparrow \\ i\text{-ème}}}, \ldots \underbrace{u_j + u_i}_{\substack{\uparrow \\ j\text{-ème}}}, \ldots, u_n)$. Démonstration page 1258

p.1258 **Exercice 14** Montrer que la réciproque de la proposition précédente est vraie.

5 Propriétés des formes n–linéaires alternées

La proposition 11 implique que, si f est une forme n–linéaire alternée sur E, alors, pour toute transposition $\tau \in \mathcal{S}_n$ et pour tout $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$, on a $f(u_{\tau(1)}, u_{\tau(2)}, \ldots, u_{\tau(n)}) = -f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, c'est-à-dire :

$$f(u_{\tau(1)}, u_{\tau(2)}, \ldots, u_{\tau(n)}) = \varepsilon(\tau)\, f(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

avec ε la signature de $\mathfrak{S}_n$.
Comme toute permutation s'écrit comme un produit de transpositions et en utilisant le corollaire 8 de la page 1231, on obtient la proposition suivante.

Proposition 12

Étant donné une forme n–linéaire alternée f sur E et une permutation σ de $\mathfrak{S}_n$, on a :

$$\forall (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n \quad f(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \ldots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\, f(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Proposition 13

Soit f une forme n–linéaire alternée sur E. Si $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une famille liée de vecteurs de E, alors $f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$.

Principe de démonstration. La famille étant liée, un des vecteurs est combinaison linéaire des autres et on utilise alors le caractère « n–linéaire alterné » de f. Démonstration page 1258

Corollaire 14

Étant donné une forme n–linéaire alternée f sur E et $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$, le scalaire $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est inchangé si l'on ajoute à l'un des vecteurs de la famille une combinaison linéaire des autres.

Principe de démonstration. Remarquer que, si x est une combinaison linéaire de la famille :

$$(u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n),$$

on a alors, d'après la proposition précédente, $f(u_1, \ldots, u_{j-1}, x, u_{j+1}, \ldots, u_n) = 0$.

Démonstration page 1259

6 Expression d'une forme n-linéaire alternée

Soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Soit φ une forme n–linéaire alternée sur E et u_1, $u_2, \ldots$, u_n des vecteurs de E. On peut écrire :

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \quad u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i \quad \text{avec} \quad (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Alors on a, d'après la proposition 10 de la page 1235 :

$$\begin{aligned}
\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= \sum_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant n\\ 1\leqslant i_2\leqslant n\\ \cdots\\ 1\leqslant i_n\leqslant n}} a_{i_1,1}\, a_{i_2,2} \ldots a_{i_n,n}\, \varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})\\
&= \sum_{\sigma\in[\![1,n]\!]^{[\![1,n]\!]}} a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}\, \varphi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)})\\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}\, \varphi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)}),
\end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que, lorsque σ n'est pas une permutation, la famille $(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$ possède au moins deux vecteurs égaux et qu'alors son image par l'application n–linéaire alternée φ est nulle.
La proposition 12 de la page ci-contre nous donne alors :

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}\, \varphi(e_1, e_2, \ldots, e_n). \qquad (*)$$

III Déterminant d'une famille de vecteurs

1 Définition

Théorème 15

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.

- Il existe une unique forme n–linéaire alternée φ_0 sur E telle que :
$$\varphi_0(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1.$$
- Toute forme n–linéaire alternée sur E est proportionnelle à φ_0.

Principe de démonstration. La démonstration de l'existence n'est pas exigible. Pour l'unicité et le deuxième point, utiliser l'expression d'une forme n–linéaire alternée.

Démonstration page 1259

Définition 7

Soit $\mathbf{e}$ une base de E et φ_0 l'unique forme n–linéaire alternée sur E telle que $\varphi_0(\mathbf{e}) = 1$. Si $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une famille de vecteurs de E, le scalaire $\varphi_0(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ s'appelle **déterminant de la famille de vecteurs** $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ **par rapport à la base** $\mathbf{e}$ et se note $\det_{\mathbf{e}}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

On note $\det_{\mathbf{e}}$ l'application de E^n dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) \mapsto \det_{\mathbf{e}}(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

En reprenant la formule $(*)$ de la page précédente, on obtient la proposition suivante.

Proposition 16

Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si $u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n$ sont des vecteurs de E, il existe une famille de scalaires $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ tels que :

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i.$$

Alors on a :

$$\det_{\mathbf{e}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}.$$

Exemples Reprenons les notations de la proposition précédente :

* Pour $n = 2$, $\det_{\mathbf{e}}(u_1, u_2) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$.

  On notera $\det_{\mathbf{e}}(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$.

* Pour $n = 3$, $\det_{\mathbf{e}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{array}{l} \ \ a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} + a_{1,2}\, a_{2,3}\, a_{3,1} + a_{1,3}\, a_{2,1}\, a_{3,2} \\ -a_{1,1}\, a_{2,3}\, a_{3,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}\, a_{3,3} - a_{1,3}\, a_{2,2}\, a_{3,1}. \end{array}$

Ce résultat se retiendra très facilement grâce à la règle de Sarrus de la page 1243, mais on évitera de l'utiliser en pratique.

2 Propriétés

En reprenant les propriétés des formes n–linéaires alternées de la page 1236, on obtient les deux propositions suivantes.

Proposition 17

Soit $\mathbf{e}$ une base de E.
Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et pour tout $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$, on a :

$$\det_{\mathbf{e}}(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \ldots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\ \det_{\mathbf{e}}(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Proposition 18

Soit $\mathbf{e}$ une base de E.

Si $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$, le scalaire $\det_{\mathbf{e}}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est inchangé si l'on ajoute à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.

Proposition 19

Soit $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ des bases de E.
Alors les formes linéaires $\det_{\mathbf{e}}$ et $\det_{\mathbf{e}'}$ sont proportionnelles. Plus précisément :

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n \quad \det_{\mathbf{e}'}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det_{\mathbf{e}'}(\mathbf{e}) \det_{\mathbf{e}}(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Principe de démonstration. Toute forme n-linéaire alternée est proportionnelle à $\det_{\mathbf{e}}$ et en particulier la forme $\det_{\mathbf{e}'}$. Il existe donc un scalaire λ tel que $\det_{\mathbf{e}'} = \lambda \det_{\mathbf{e}}$ et l'on trouve la valeur de λ en appliquant cette égalité à... Démonstration page 1260

Corollaire 20

Soit $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ des bases de E. Alors $\det_{\mathbf{e}'}(\mathbf{e}) \det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}') = 1$.

Démonstration.

Il suffit de prendre, dans la relation de la proposition précédente, $(u_1, u_2, \dots, u_n) = \mathbf{e}'$. □

Théorème 21

Si $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille de vecteurs de E (de dimension n) muni d'une base $\mathbf{e}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E ;

(ii) $\det_{\mathbf{e}}(u_1, u_2, \dots, u_n) \neq 0$.

Principe de démonstration.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Si $\mathbf{e}' = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E, écrire que les formes linéaires $\det_{\mathbf{e}}$ et $\det_{\mathbf{e}'}$ sont proportionnelles et non nulles.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Utiliser la proposition 13 de la page 1236. Démonstration page 1260

3 Application : orientation d'un IR-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Soit $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Le réel $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}')$ est alors non nul.
On définit sur l'ensemble des bases de E la relation suivante :

$$\mathbf{e}\,\mathcal{R}\,\mathbf{e}' \iff \det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}') > 0.$$

La relation $\mathcal{R}$ est alors une relation d'équivalence. En effet :

1. la relation $\mathcal{R}$ est réflexive puisque, pour toute base $\mathbf{e}$, on a $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}) = 1$, donc $\mathbf{e}\,\mathcal{R}\,\mathbf{e}$;
2. la relation $\mathcal{R}$ est symétrique puisque, pour toutes bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$, les réels $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}')$ et $\det_{\mathbf{e}'}(\mathbf{e})$ sont non nuls et inverses l'un de l'autre, donc de même signe ;
3. la relation $\mathcal{R}$ est transitive ; cette propriété repose sur la proposition 19 que l'on écrit ici sous la forme : $\det_{\mathbf{e}''}(\mathbf{e}) = \det_{\mathbf{e}'}(\mathbf{e}) \det_{\mathbf{e}''}(\mathbf{e}')$.

Choisissons une base $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E, il n'y a que deux classes d'équivalence : la classe de $\mathbf{e}$ et celle de $\mathbf{e}'$ où $\mathbf{e}' = (-e_1, e_2, \ldots, e_n)$ puisque $\det_{\mathbf{e}} \mathbf{e}' = -1$.
Choisir une orientation pour le IR-espace vectoriel E, c'est choisir une classe d'équivalence et donc un représentant de cette classe, par exemple $\mathbf{e}_{ref}$. Une fois l'orientation fixée, une base $\mathbf{e}$ est dite **directe** lorsqu'elle appartient à la classe d'équivalence de $\mathbf{e}_{ref}$; on a alors pour une telle base $\det_{\mathbf{e}_{ref}}(\mathbf{e}) > 0$. Sinon, on dira que c'est une base **indirecte**. Le choix de $\mathbf{e}_{ref}$ est purement arbitraire.
En pratique dans IR^n, on choisit toujours l'orientation de la base canonique.

p.1260

Exercice 15 L'espace IR^2 est orienté par sa base canonique $\mathbf{e} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Justifier que $(\vec{\imath} - \vec{\jmath}, \vec{\imath} + \vec{\jmath})$ est une base de IR^2. Est-elle directe ou indirecte ?

p.1261

Exercice 16 L'espace IR^3 est orienté par sa base canonique $\mathbf{e} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Montrer que la base $(\vec{\jmath}, \vec{k}, \vec{\imath})$ est directe et que la base $(-\vec{\imath}, -\vec{\jmath}, -\vec{k})$ est indirecte.

Combien peut-on, par permutation des vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$,$\vec{k}$, construire de bases directes ? indirectes ?

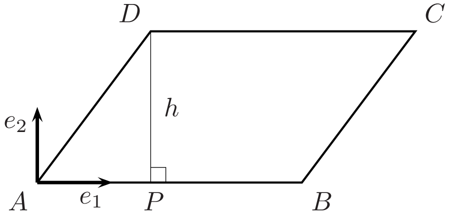
Remarque Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base directe de IR^n et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
Alors $(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$ est une base directe de IR^n si, et seulement si, $\varepsilon(\sigma) = 1$.

p.1261

Exercice 17 Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de E et $\theta \in \mathrm{IR}$. On pose $\vec{u} = \cos(\theta)\ \vec{\imath} + \sin(\theta)\ \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -\sin(\theta)\ \vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath}$. Représenter les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et vérifier que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base directe de IR^2.

Interprétation géométrique

On considère un parallélogramme $ABCD$ du plan IR^2.



On pose $e_1 = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ et l'on note e_2 le vecteur du plan tel que (e_1, e_2) soit une base orthonormale directe de IR^2.

Notons P le projeté orthogonal de D sur la droite (AB) et $h = \|\overrightarrow{AP}\|$.

On a alors $\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| e_1$ et $\overrightarrow{PD} = \begin{cases} h\ e_2 & \text{si } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \text{ est une base directe} \\ -h\ e_2 & \text{sinon.} \end{cases}$

L'aire géométrique du parallélogramme $ABCD$ est donnée par $h\|\overrightarrow{AB}\|$.

$$\begin{aligned}\det_{(e_1,e_2)}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) &= \det_{(e_1,e_2)}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PD})\\ &= \det_{(e_1,e_2)}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}) + \det_{(e_1,e_2)}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{PD})\\ &= \det_{(e_1,e_2)}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{PD})\\ &= \begin{vmatrix} \|\overrightarrow{AB}\| & 0\\ 0 & \pm h\end{vmatrix} = \pm h\|\overrightarrow{AB}\|.\end{aligned}$$

Soit (e_1',e_2') une autre base orthonormale directe de $\mathbb{R}^2$. D'après l'exercice 17 de la page précédente, $\det_{(e_1',e_2')}(e_1,e_2)=1$.

Donc, $\det_{(e_1',e_2')}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \det_{(e_1,e_2)}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.

On en déduit que le réel $\det_{(e_1',e_2')}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ est indépendant de la base orthonormale directe (e_1',e_2') dans laquelle on le calcule. On l'appelle **aire orientée du parallélogramme $ABCD$.**

Remarque De même, si A, B, C, D sont quatre points de l'espace $\mathbb{R}^3$ et si $\mathbf{e}$ est une base orthonormale directe, $\det_{\mathbf{e}}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ ne dépend pas de la base orthonormale $\mathbf{e}$ choisie. Ce réel est alors le volume orienté du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ (voir l'exemple de la page 1355).

IV Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

1 Définition

Proposition 22

Soit f un endomorphisme de E. Il existe alors un unique scalaire λ, appelé **déterminant** de f, tel que pour toute base $\mathbf{e}$ de E et, pour tout $(u_1,u_2,\dots,u_n)\in E^n$, on ait :

$$\det_{\mathbf{e}}(f(u_1),f(u_2),\dots,f(u_n)) = \lambda\det_{\mathbf{e}}(u_1,u_2,\dots,u_n).$$

Le déterminant de f se note $\det(f)$ ou $\det f$ et, pour toute base $\mathbf{e}$ de E, on a :

$$\det f = \det_{\mathbf{e}}(f(\mathbf{e})).$$

Principe de démonstration. La démonstration repose sur le fait que les deux formes $n-$linéaires alternées de E^n $(u_1,u_2,\dots,u_n)\longmapsto \det_{\mathbf{e}'}\big(f(u_1),f(u_2),\dots,f(u_n)\big)$ et $\det_{\mathbf{e}}$ sont proportionnelles.

Démonstration page 1261

Exemples

1. Comme $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}) = 1$, on obtient que $\det \mathrm{Id}_E = 1$.
2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. L'endomorphisme de E défini par :
$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad f(e_i) = e_{\sigma(i)}$$
a pour déterminant $\det f = \det_{\mathbf{e}}(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)$.

p.1261 **Exercice 18** Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Montrer que $\det s = (-1)^{\dim G}$.

2 Propriétés

Proposition 23

Étant donné deux endomorphismes f et g de E (de dimension n) et un scalaire λ, on a :

- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$;
- $\det(f \circ g) = \det f \det g$.

Démonstration page 1262

Proposition 24

Un endomorphisme de E est un automorphisme si, et seulement si, son déterminant est non nul et l'on a alors :
$$\det\left(f^{-1}\right) = (\det f)^{-1}.$$

Principe de démonstration. Il suffit de se souvenir qu'un endomorphisme f de E est bijectif si, et seulement si, l'image des vecteurs d'une base de E par f est une base de E.

Démonstration page 1262

p.1262 **Exercice 19** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Que peut-on dire de la dimension de E s'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 = -\mathrm{Id}_E$?

V Déterminant d'une matrice carrée

1 Définition

Définition 8

On appelle **déterminant d'une matrice carrée** d'ordre n, le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On le note $\det(A)$ ou $\det A$.

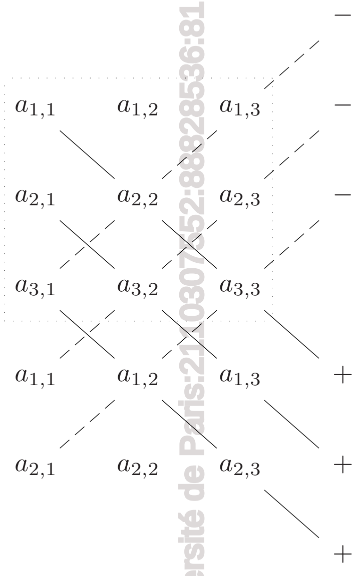
Notation Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, le déterminant de A se note :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Exemples

1. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

2. $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{3,3} + a_{1,2}\,a_{2,3}\,a_{3,1} + a_{1,3}\,a_{2,1}\,a_{3,2} \\ -a_{1,1}\,a_{2,3}\,a_{3,2} - a_{1,2}\,a_{2,1}\,a_{3,3} - a_{1,3}\,a_{2,2}\,a_{3,1}. \end{array}$ Cette formule peut se retrouver à l'aide de la *méthode* dite *de Sarrus* ; on recopie les deux premières lignes de la matrice sous la troisième et on effectue les produits en diagonale, chacun étant affecté du signe $+$ ou $-$ selon le schéma suivant.



Attention Cette méthode n'est pas généralisable à des matrices d'ordre différent de 3.

Proposition 25

Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice carrée d'ordre n, on a :

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Démonstration. C'est la formule démontrée à la page 1259. □

Corollaire 26

Si $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille de n vecteurs de E dont A est la matrice dans une base $\mathbf{e} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, alors $\det A = \det_{\mathbf{e}}(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Démonstration. Ce résultat est une conséquence de la formule trouvée dans la démonstration du théorème 15 de la page 1237. □

Exemple Si D est une matrice diagonale d'éléments diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, on a :

$$\det D = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

En effet, D est la matrice de la famille $(\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n)$ par rapport à la base $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et on a donc :

$$\begin{aligned}\det D &= \det_{\mathbf{e}}(\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n)\\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \det_{\mathbf{e}}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.\end{aligned}$$

En particulier, $\det I_n = 1$.

p.1262 **Exercice 20** Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \det(A + xI_n)$ est une fonction polynomiale de degré au plus n.

Proposition 27

Soit f un endomorphisme de E et $\mathbf{e} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. Si A est la matrice de f par rapport à la base $\mathbf{e}$, alors $\det f = \det A$.

Démonstration. Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, on a :

$$\det A = \det_{\mathbf{e}}(\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(f)) = \det_{\mathbf{e}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det f.$$ □

2 Propriétés

Proposition 28

Étant donné deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et un scalaire λ, on a :

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$;
- $\det(AB) = \det A \det B$.

Principe de démonstration. Démonstration page 1262

Il suffit de considérer les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés aux matrices A et B.

Proposition 29

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, $\det A \neq 0$ et l'on a alors :

$$\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 1262

Utiliser une propriété similaire démontrée pour les endomorphismes.

Proposition 30

Le déterminant d'une matrice est une forme n–linéaire alternée de ses lignes.

Démonstration. La formule :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}$$

montre que le déterminant d'une matrice est une forme n–linéaire de ses lignes, puisque dans tous les produits ci–dessus intervient un et un seul élément de chaque ligne. Or, si deux lignes sont égales, alors la matrice n'est pas inversible et donc son déterminant est nul, ce qui prouve le résultat. □

Corollaire 31

Étant donné une matrice carrée A d'ordre n, on a $\det A = \det\left({}^tA\right)$.

Démonstration. Les applications :

$$(C_1, C_2, \ldots, C_n) \mapsto \det(C_1 \ldots C_n) \quad \text{et} \quad (C_1, C_2, \ldots, C_n) \mapsto \det \begin{pmatrix} {}^tC_1 \\ \vdots \\ {}^tC_n \end{pmatrix}$$

sont des formes n–linéaires alternées non nulles sur l'espace vectoriel des matrices colonnes. Elles sont donc proportionnelles, ce qui prouve l'existence d'un scalaire λ tel que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \det A = \lambda \det\left({}^tA\right).$$

En prenant $A = I_n$, on en déduit $\lambda = 1$. Cela donne la formule cherchée. □

Remarques

- La relation $\det A = \det({}^tA)$ s'écrit aussi :

  $$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2}\, \ldots\, a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)}\, a_{2,\sigma(2)}\, \ldots\, a_{n,\sigma(n)};$$

  elle peut donc se retrouver en remarquant que, pour $\sigma \in S_n$, on a :

  $$a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2}\, \ldots\, a_{\sigma(n),n} = a_{1,\sigma^{-1}(1)}\, a_{2,\sigma^{-1}(2)}\, \ldots\, a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

  par permutation des termes dans le produit et, comme $s \mapsto s^{-1}$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ sur lui-même, on peut effectuer le changement d'indices $\sigma' = \sigma^{-1}$ dans la somme.

- Par définition, le déterminant d'une matrice est aussi une forme n–linéaire alternée de ses colonnes.

p.1263 **Exercice 21** Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul. Cela reste-t-il vrai pour une matrice d'ordre pair ?

VI Calcul des déterminants

Comme on l'a vu à la section précédente, l'évaluation du déterminant d'une famille de vecteurs par rapport à une base ou du déterminant d'un endomorphisme, peut se ramener au calcul du déterminant d'une matrice carrée que, dans cette section, nous appellerons simplement déterminant.

1 Opérations sur les lignes ou les colonnes

Le déterminant d'une matrice étant une forme n−linéaire alternée des colonnes ou des lignes de cette matrice, les propriétés des formes n−linéaires alternées permettent d'énoncer les règles suivantes.

- Un déterminant qui a deux colonnes (respectivement deux lignes) identiques est nul.
- L'échange de deux colonnes d'un déterminant (respectivement deux lignes) multiplie le déterminant par -1.
- Un déterminant dont une colonne (respectivement une ligne) est combinaison linéaire des **autres** colonnes (respectivement des **autres** lignes) est nul.
- Un déterminant dont une colonne (respectivement une ligne) est formée de 0 est nul.
- La valeur d'un déterminant est inchangée si l'on ajoute à une colonne (respectivement à une ligne) une combinaison linéaire des **autres** colonnes (respectivement des **autres** lignes).
- Si l'on multiplie une colonne (respectivement une ligne) d'un déterminant par un scalaire λ, le déterminant est multiplié par λ.

  Donc, si l'on multiplie par λ tous les coefficients d'une matrice $n \times n$, le déterminant est multiplié par λ^n.

Point méthode

Ces règles de transformation d'un déterminant permettent :

- soit de prouver qu'il est nul ;
- soit d'introduire dans une colonne (respectivement une ligne) un maximum de 0 afin d'utiliser avec profit les résultats qui vont suivre, à savoir développer par rapport à une ligne ou une colonne.

p.1263 **Exercice 22**

Sans les calculer explicitement, justifier que les déterminants suivants sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

2 Développement d'un déterminant suivant une colonne ou une ligne

On suppose dans cette partie $n \geqslant 2$.

Proposition 32

Soit A est une matrice carrée de la forme :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline * & \cdots & * & a_{n,n} \end{array}\right).$$

Alors $\det A = a_{n,n} \det A'$.

Principe de démonstration. On utilise la formule de la proposition 16 de la page 1238 en distinguant les permutations σ telles que $\sigma(n) = n$ des autres. Démonstration page 1263

Corollaire 33

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors on a :

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Démonstration.

- Comme le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée, il suffit de démontrer le résultat pour les matrices triangulaires inférieures.
- Si A est triangulaire inférieure, la proposition précédente nous donne :

$$\det A = a_{n,n} \det A'$$

où A' est la matrice A privée de sa dernière ligne et de sa dernière colonne. Le résultat est alors immédiat par récurrence. □

p.1263

Exercice 23 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On note $D(a,b,c)$ le déterminant d'ordre n suivant :

$$D(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & c & \cdots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}.$$

1. On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & D(a+x, b+x, c+x). \end{array}$

   Montrer que f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. En déduire la valeur de $D(a,b,c)$ pour $b \neq c$.

Définition 9

Étant donné une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ainsi que des entiers i et j de $[\![1,n]\!]$, on appelle :

- **mineur** de $a_{i,j}$ le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice extraite de A obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A,
- **cofacteur** de $a_{i,j}$ le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Remarque Les matrices obtenues à partir de la matrice A dans la définition précédente sont des matrices carrées d'ordre $n-1$, ce qui justifie l'existence de $\Delta_{i,j}$.

Théorème 34 (Développement suivant une colonne)

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \quad \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

Démonstration page 1265

En appliquant ce résultat à la transposée, on obtient le théorème suivant.

Théorème 35 (Développement suivant une ligne)

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

Exemple Soit a, b et c trois scalaires. On va chercher une expression factorisée du déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

On a successivement :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} && \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} && \text{mise en facteur dans } L_2 \text{ et } L_3 \\
&= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
&= (b-a)(c-a)(c-b) && \text{d'après le corollaire 33.}
\end{aligned}$$

p.1266

Exercice 24 Soit $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$.

1. Calculer sous forme factorisée le déterminant suivant :
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}.$$

2. À quelle condition la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

p.1266

Exercice 25 Retrouver la formule donnant le déterminant 3×3 en développant selon une ligne ou une colonne.

3 Étude de déterminants particuliers

Matrices triangulaires par blocs

Proposition 36

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose que M peut s'écrire sous la forme suivante :
$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$
où $A \in \mathcal{M}_{n'}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n',n-n'}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n-n'}(\mathbb{K})$. On a alors :
$$\det M = \det A \det B.$$

Principe de démonstration. Remarquer que $M = \begin{pmatrix} I_{n'} & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-n'} \end{pmatrix}$ et calculer le déterminant de chacune de ces matrices.

Démonstration page 1266

Remarque On retrouve ainsi le cas particulier des matrices triangulaires et des matrices diagonales dont le déterminant est égal au produit des termes de la diagonale (*cf.* le corollaire 33 de la page 1247)

p.1266

Exercice 26 Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$

p.1266 **Exercice 27** Soit $n \geqslant 1$. Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminant de Vandermonde

Proposition 37

Étant donné des scalaires x_0, x_1,..., x_n, on note $V(x_0, x_1, \dots, x_n)$ le déterminant d'ordre $n+1$ défini par :

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

On a :

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

Principe de démonstration. Démonstration par récurrence sur n, en remarquant que l'application $x \mapsto V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x)$ est une fonction polynomiale en x, de degré inférieur ou égal à n et dont le coefficient de degré n est $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. Démonstration page 1266

Remarque L'exemple de la page 1248 est un cas particulier de calcul de déterminant de Vandermonde.

Point méthode

Si x_0, x_1,..., x_n sont des scalaires deux à deux distincts, la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

est inversible.

Remarque La réciproque est vraie mais évidente par contraposée, puisque si deux des x_i sont égaux, la matrice a deux colonnes identiques.

p.1267 **Exercice 28** Redémontrer directement le résultat du point méthode précédent en considérant le système homogène associé à la matrice ${}^tA$.

VII Comatrice

Définition 10

Étant donné une matrice $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle **comatrice** de A, notée $\mathrm{Com}(A)$ ou $\mathrm{Com}\,A$, la matrice des cofacteurs de A, c'est-à-dire la matrice $B=(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ où $b_{i,j}$ est le cofacteur de $a_{i,j}$ dans A.

Proposition 38

Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A\,{}^t\mathrm{Com}(A)={}^t\mathrm{Com}(A)\,A=(\det A)\,I_n.$$

Principe de démonstration. Posons $A\,{}^t\mathrm{Com}(A)=(c_{i,k})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant k\leqslant n}}$.

On interprète les coefficients $c_{i,k}$ comme étant le résultat du développement selon une ligne du déterminant d'une matrice judicieusement construite. Démonstration page 1268

Corollaire 39

Pour toute matrice $A\in GL_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{Com}(A).$$

Exemple

Si $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ est une matrice inversible, alors il est utile de retenir que :

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}.$$

Remarque En pratique, à l'exception de ce cas des matrices 2×2, on utilise rarement la formule précédente pour inverser une matrice. La plupart du temps, il est préférable de résoudre un système d'équations linéaires. Néanmoins cette formule peut-être utile pour résoudre des questions d'ordre théorique.

p.1268 **Exercice 29** Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que $\det A\in\mathbb{Z}$.
2. Prouver l'équivalence suivante :

$$\big(\exists B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})\quad A\,B=I_n\big)\iff\det A=\pm1.$$

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 Les images par σ^{-1} des éléments de $[\![1,6]\!]$ s'obtiennent en lisant le tableau donnant σ de bas en haut. Il suffit donc de permuter les deux lignes et de réordonner la première. On obtient ainsi :

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour tout $x \in [\![1,6]\!]$, on calcule $\sigma^2(x) = \sigma(\sigma(x))$ et l'on constate alors que l'on a $\sigma^2(x) = \sigma^{-1}(x)$. On en conclut que $\sigma^2 = \sigma^{-1}$, et donc $\sigma^3 = \mathrm{Id}_{[\![1,6]\!]}$.

Exercice 2 Comme pour tout $i \in [\![1,p-1]\!]$, $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ et $\sigma(a_p) = a_1$, σ^{-1} vérifie :

$$\forall i \in [\![2,p]\!] \quad \sigma^{-1}(a_i) = a_{i-1} \quad \text{et} \quad \sigma^{-1}(a_1) = a_p;$$

les éléments de $[\![1,n]\!]$ autres que les $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ étant fixes par σ et donc aussi par σ^{-1}.

On en déduit que σ^{-1} est le p–cycle $(a_p,\ldots,a_2,a_1)$.

Exercice 3 Si σ était un cycle, comme $\sigma(1) = 2$ et $\sigma(2) = 1$, ce devrait être le cycle de support $\{1,2\}$. Or, 3 n'est pas invariant par σ alors qu'il le serait par la transposition $(1,2)$. D'où la contradiction.

Exercice 4 On obtient $(a,b)(b,c) = (a,b,c)$ puisque l'on a, en notant $\tau = (a,b)$ et $\tau' = (b,c)$:

$$\begin{cases} a \overset{\tau'}{\mapsto} a \overset{\tau}{\mapsto} b \\ b \overset{\tau'}{\mapsto} c \overset{\tau}{\mapsto} c \\ c \overset{\tau'}{\mapsto} b \overset{\tau}{\mapsto} a \\ x \overset{\tau'}{\mapsto} x \overset{\tau}{\mapsto} x \quad \text{si } x \notin \{a,b,c\}. \end{cases}$$

Exercice 5

Soit $\sigma = (a_1,a_2,\ldots,a_p)$ un p–cycle de $\mathfrak{S}_n$. Notons alors :

$$\sigma_1 = (a_1,a_2)(a_2,a_3)\cdots(a_{p-1},a_p) \quad \text{et} \quad \sigma_2 = (a_1,a_2,\ldots,a_q)(a_q,a_{q+1},\ldots,a_p).$$

Les éléments de $[\![1,n]\!] \setminus \{a_1,a_2,\cdots,a_p\}$ sont fixes par ces 3 permutations.

Soit $j \in [\![1,p]\!]$. Cherchons l'image par σ_1 et σ_2 de a_j.

- On obtient :
  - $*$ si $j \neq 1$ et $j \neq p$, alors $\sigma_1(a_j) = \left(\prod_{i=1}^{j}(a_i,a_{i+1})\right)(a_j) = a_{j+1} = \sigma(a_j)$;
  - $*$ si $j = 1$, alors $\sigma_1(a_1) = (a_1,a_2)(a_1) = a_2 = \sigma(a_1)$;
  - $*$ si $j = p$, alors on montre par récurrence sur p que :

$$\sigma_1(a_p) = \left(\prod_{i=1}^{j-1}(a_i,a_{i+1})\right)(a_{p-1}) = a_1 = \sigma(a_p).$$

- De la même manière, on obtient :
  - $*$ si $j \in [\![q,p-1]\!]$, alors $\sigma_2(a_j) = (a_1,a_2,\ldots,a_q)(a_{j+1}) = a_{j+1} = \sigma(a_j)$;
  - $*$ si $j = p$, alors $\sigma_2(a_j) = (a_1,a_2,\ldots,a_q)(a_q) = a_1 = \sigma(a_p)$;
  - $*$ si $j \in [\![1,q-1]\!]$, alors $\sigma_2(a_j) = (a_1,a_2,\ldots,a_q)(a_j) = a_{j+1} = \sigma(a_j)$.

On a donc bien prouvé que $\forall x \in [\![1,n]\!] \quad \sigma_1(x) = \sigma_2(x) = \sigma(x)$. Les trois applications sont en fait égales.

Proposition 2 Soit c_1 et c_2 des cycles à supports respectifs A_1 et A_2. On suppose que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Soit $x \in [\![1, n]\!]$.

Premier cas : $x \notin A_1 \cup A_2$. Alors x est invariant par c_1 et c_2, donc aussi par la composée de ces deux permutations. Dans ce cas :

$$c_1 \circ c_2(x) = x = c_2 \circ c_1(x).$$

Deuxième cas : $x \in A_1 \cup A_2$. Alors x est dans l'un de ces deux ensembles, mais pas dans l'autre. Supposons, par exemple, que $x \in A_1$ et $x \notin A_2$.

Alors, $c_2(x) = x$ et $c_1 \circ c_2(x) = c_1(x)$.

Par ailleurs, $c_1(x) \neq x$, donc $c_1 \circ c_1(x) \neq c_1(x)$ par injectivité de c_1 ; ce qui implique que $c_1(x) \in A_1$ et donc $c_1(x) \notin A_2$. On a alors $c_2 \circ c_1(x) = c_1(x)$.

Dans ce cas :

$$c_1 \circ c_2(x) = c_1(x) = c_2 \circ c_1(x).$$

L'étude des deux cas précédents permet alors de conclure que $c_1 \circ c_2 = c_2 \circ c_1$.

Exercice 6 Les deux cycles apparaissant dans l'écriture de σ étant à supports disjoints, ils commutent. On a alors, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\sigma^k = (1, 2, 3, 4)^k (5, 6, 7)^k.$$

Or, $(1, 2, 3, 4)^k = \mathrm{Id}_{[\![1,8]\!]} \iff k \equiv 0\ [4]$ et $(5, 6, 7)^k = \mathrm{Id}_{[\![1,8]\!]} \iff k \equiv 0\ [3]$.

En choisissant $q = 12$, on a bien $\sigma^q = \mathrm{Id}_{[\![1,8]\!]}$.

Remarque : on pourrait montrer que cette valeur est le plus petit entier qui convient car $12 = 3 \vee 4$.

Proposition 3 La relation $\mathcal{R}_\sigma$ vérifie les propriétés suivantes :

réflexivité : pour tout $x \in [\![1, n]\!]$, $x \mathcal{R}_\sigma x$ puisque $x = \sigma^0(x)$.

symétrie : pour tout x et y appartenant à $[\![1, n]\!]$ tels que $x \mathcal{R}_\sigma y$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = \sigma^k(x)$; on a alors $x = \sigma^{-k}(y)$ avec $-k \in \mathbb{Z}$; donc, $y \mathcal{R}_\sigma x$.

transitivité : pour tout x, y et z appartenant à $[\![1, n]\!]$ tels que $x \mathcal{R}_\sigma y$ et $y \mathcal{R}_\sigma z$, il existe k et k' entiers relatifs tels que $y = \sigma^k(x)$ et $z = \sigma^{k'}(y)$; on a alors $z = \sigma^{k+k'}(x)$ avec $k + k' \in \mathbb{Z}$; par suite, $x \mathcal{R}_\sigma z$.

Donc, $\mathcal{R}_\sigma$ est une relation d'équivalence.

Proposition 4 L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & [\![1, n]\!] \\ k & \longmapsto & \sigma^k(x) \end{array}$ est une application non injective puisque $\mathbb{N}$ est un ensemble de cardinal infini.

Par suite, il existe deux entiers k et ℓ différents tels que $\sigma^k(x) = \sigma^\ell(x)$. Quitte à échanger k et ℓ, on peut supposer que $k < \ell$. Dans ce cas, on a :

$$\sigma^{\ell - k}(x) = x \quad \text{avec} \quad \ell - k \in \mathbb{N}^*.$$

L'ensemble $A = \{q \in \mathbb{N}^* | \sigma^q(x) = x\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}^*$; il admet alors un plus petit élément que l'on notera p.

L'entier p vérifie alors les propriétés suivantes :

- comme $p \in A$, $\sigma^p(x) = x$;
- les éléments x, $\sigma(x), \ldots, \sigma^{p-1}(x)$ sont deux à deux distincts. En effet, si l'on avait des entiers i et j tels que $0 \leqslant i < j \leqslant p - 1$ avec $\sigma^i(x) = \sigma^j(x)$, alors $\sigma^{j-i}(x) = x$ avec $0 < j - i < p$; ce qui contredirait la définition de p.

Les éléments de l'orbite de x sont bien dans la classe d'équivalence de x pour la relation $\mathcal{R}_\sigma$. Réciproquement, si y appartient à la classe d'équivalence de x, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = \sigma^k(x)$. Appelons r le reste de la division euclidienne de k par p et q le quotient. Alors :

$$y = \sigma^{pq+r}(x) = \sigma^r\big(\sigma^{pq}(x)\big) = \sigma^r(x) \quad \text{et} \quad r \in [\![0, p-1]\!].$$

Donc, y est dans l'orbite de x.

L'orbite de x est donc bien aussi la classe d'équivalence de x pour la relation $\mathcal{R}_\sigma$.

Exercice 7 Pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}_\sigma$, on a, en notant $cl(x)$ la classe d'équivalence de x :

$$cl(1) = \{1,2,3,4\} = cl(2) = cl(3) = cl(4)\,;$$
$$cl(5) = \{5,6,7\} = cl(6) = cl(7)\,;$$
$$cl(8) = \{8\}.$$

Tout élément de $[\![1,8]\!]$ a la même image par σ et par $(1,2,3,4)(5,6,7)$; ces applications sont donc égales.

Les cycles apparaissant dans la décomposition de σ ont pour support les orbites de σ non réduites à un point.

Théorème 5 Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$ autre que l'identité.

Unicité Supposons qu'il existe des cycles c_1, $c_2, \ldots,$ c_r à supports disjoints deux à deux, d'ordres respectifs p_1, $p_2, \ldots,$ p_r tels que $\sigma = \prod_{i=1}^{r} c_i$.

Soit $j \in [\![1,r]\!]$. Considérons un élément $x \in [\![1,n]\!]$ tel que $c_j(x) \neq x$. On a alors $c_i(x) = x$ si $i \neq j$. Donc, $\sigma(x) = \big(\prod_{i=1}^{r} c_i\big)(x) = c_j\big(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ i\neq j}} c_i(x)\big) = c_j(x)$.

Ainsi x ayant alors la même image par c_j et par σ, l'orbite de x par chacune de ces applications est la même et c_j est le cycle $(x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{p_j-1}(x))$.

On en déduit l'unicité de r (nombre d'orbites de σ) et l'unicité des cycles $(c_j)_{1\leqslant j\leqslant r}$ (restrictions de σ à ses orbites non réduites à un point).

Les cycles étant ici à supports disjoints, ils commutent ; ce qui justifie l'unicité de la décomposition à l'ordre près des facteurs.

Existence Considérons les orbites de σ de cardinal supérieur à 2 (il y a au moins une puisque $\sigma \neq \mathrm{Id}$). Notons r le nombre de ces orbites. On définit alors la restriction de σ à chacune de ces orbites. D'après la proposition 4 de la page 1229, on définit ainsi r cycles $(c_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ dont les supports sont des orbites de σ. Par définition des orbites (classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}_\sigma$), les supports de ces cycles sont deux à deux disjoints.

Notons $\sigma' = \prod_{i=1}^{r} c_i$.

Soit $x \in [\![1,n]\!]$ invariant par σ. Alors l'orbite de x étant réduite à $\{x\}$, l'élément x n'appartient à aucun support des cycles définis ci-dessus et donc, x est invariant par $\sigma' = \prod_{i=1}^{r} c_i$. On a alors $\sigma(x) = x = \sigma'(x)$.

Soit $x \in [\![1,n]\!]$ non invariant par σ. Alors x appartient au support d'un (et un seul) cycle c_{i_0}. On obtient alors :

$$\sigma'(x) = c_{i_0}\Big(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ i\neq i_0}} c_i(x)\Big) = c_{i_0}(x) = \sigma(x).$$

On en déduit que $\sigma = \sigma' = \prod_{i=1}^{r} c_i$.

Exercice 8 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,6)(3,4,5) = (3,4,5)(1,2,6)$.

Exercice 9 En utilisant les calculs faits dans l'exercice 5 de la page 1228, on obtient les résultats qui suivent.

- Supposons que $b \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$. Alors :
  $$\tau\sigma = (b,a)(a,a_1,a_2,\ldots,a_p) = (b,a,a_1,a_2,\ldots,a_p) = (a,a_1,a_2,\ldots,a_p,b).$$
  Ainsi, σ est un cycle de longueur $p+1$, donc il possède $n-(p+1)+1$ orbites, soit $n-p$. Donc, $\tau\sigma$ est un cycle de longueur $p+2$ et donc possède $n-p-1$ orbites, une de moins que la permutation σ.
- Supposons que $b \in \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$. Par exemple, $b = a_j$. Alors :
  $$\begin{aligned}\tau\sigma &= (a,b)(a,a_1,\ldots,a_{j-1},b,a_{j+1},\ldots,a_n)\\ &= (a,b)(a,a_1,\ldots,a_{j-1},b)(b,a_{j+1},\ldots,a_n)\\ &= (a,b)(b,a,a_1,\ldots,a_{j-1})(b,a_{j+1},\ldots,a_n)\\ &= (a,b)(b,a)(a,a_1,\ldots,a_{j-1})(b,a_{j+1},\ldots,a_n)\\ &= (a,a_1,\ldots,a_{j-1})(b,a_{j+1},\ldots,a_n)\end{aligned}$$
  Donc, $\tau\sigma$ possède 2 orbites non réduites à un point et $n-(p+1)$ orbites réduites à un point, soit $n-p+1$ orbites, une de plus que σ.

Proposition 6 Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $n \geqslant 2$.

- Si $\sigma = \mathrm{Id}$, alors $\mathrm{Id} = (1,2)(1,2)$.
- Si σ est un cycle de longueur p, alors, en reprenant les calculs faits dans l'exercice 5, on obtient que $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ se décompose en :
  $$\sigma = (a_1,a_2)(a_2,a_3)\ldots(a_{p-1},a_p).$$
  Donc, σ est bien un produit de transpositions, même lorsque $p=2$, auquel cas la relation est évidente.
- Dans le cas général, on décompose alors σ en produit de cycles en utilisant le théorème 5 de la page 1229. D'après le point précédent, chaque cycle s'écrit alors comme un produit de transpositions et finalement on obtient l'écriture de la permutation σ sous forme d'un produit de transpositions, éventuellement vide.

Exercice 10 Une décomposition possible est :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,6)(3,4,5) = (1,2)(2,6)(3,4)(4,5).$$

En utilisant l'algorithme mis en place dans l'exercice 24.2 de la page 1269, on obtient la décomposition $(1,6)(5,3)(4,3)(1,2)$.

Théorème 7 La démonstration utilise les exercices 9 de la page 1230 et 5 de la page 1228.

Unicité Supposons qu'il existe une application ε vérifiant les propriétés du théorème 7 de la page 1231. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. La permutation σ se décompose en produit de transpositions sous la forme $\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_r$. Cela donne $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)\cdots\varepsilon(\tau_r) = (-1)^r$.

L'application ε est alors définie de manière unique.

Existence Soit σ une permutation. Notons $nb(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ.

En posant $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-nb(\sigma)}$, on définit une application ε de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1,+1\}$.

- Toute transposition admet $n-1$ orbites. Donc, $\varepsilon(\tau) = (-1)^{n-nb(\tau)} = -1$.
- Soit $\tau = (a,b)$ une transposition et σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$ dont la décomposition en produit de cycles à supports disjoints est $\sigma = \prod_{i=1}^{r} c_i$. Remarquons qu'alors $nb(\sigma) = r + k$, où k est le nombre de points fixes de σ.

  * Si a et b sont fixes par σ, alors $\tau\sigma$ est une décomposition en produit de cycles à supports disjoints ; il y a donc un cycle de plus dans la décomposition en produits de cycles à supports disjoints de $\tau\sigma$ que dans celle de σ, mais $\tau\sigma$ a une orbite de moins que σ puisque a et b ne sont plus des points fixes de $\tau\sigma$. On a alors :
  $$\varepsilon(\tau\sigma) = -\varepsilon(\sigma).$$
  * Si b est fixe par σ, mais pas a, alors quitte à permuter l'ordre des cycles apparaissant dans la décomposition de σ, on peut supposer que a appartient au support de c_1 (et uniquement à celui-ci). Alors $(a,b)c_1$ est un cycle d'après l'exercice 9 ; le nombre de cycles intervenant dans la décomposition de $\tau\sigma$ et de σ est le même, mais on perd un point fixe. Donc, $nb(\tau\sigma) = nb(\sigma) - 1$. On a alors $\varepsilon(\tau\sigma) = -\varepsilon(\sigma)$.
  * Si ni a ni b ne sont des points fixes de σ, on est amené à distinguer deux cas.
    ⋆ Si a et b appartiennent au support du même cycle, alors, d'après l'exercice 9, $nb(\tau\sigma) = nb(\sigma) + 1$. On a alors $\varepsilon(\tau\sigma) = -\varepsilon(\sigma)$.
    ⋆ Si a et b appartiennent aux supports de deux cycles différents, et quitte à réordonner les cycles dans le produit, on peut supposer que $c_1 = (a, x_1, \ldots, x_p)$ et $c_2 = (b, y_1, \ldots y_q)$. Alors en utilisant les résultats de l'exercice 5, on obtient :
    $$\begin{aligned}(a,b)\ (a,x_1,\ldots,x_p)\ (b,y_1,\ldots y_q) &= (a,x_1,\ldots,x_p,b)\ (b,y_1,\ldots y_q)\\ &= (a,x_1,\ldots,x_p,b,y_1,\ldots y_q).\end{aligned}$$
    La décomposition en produit de cycles de $\tau\sigma$ comporte donc un cycle de moins que celle de σ, le nombre de points fixes est le même.
    On a alors $\varepsilon(\tau\sigma) = -\varepsilon(\sigma)$.

  Dans tous les cas de figure, $\varepsilon(\tau\sigma) = -\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)$.

- Soit σ et σ' des permutations de $\mathfrak{S}_n$. En décomposant σ' en produit de transpositions, on montre alors, de proche en proche, que :

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma'\sigma) &= \varepsilon(\tau_1\tau_2\dots\tau_p\sigma)\\ &= -\varepsilon(\tau_2\dots\tau_p\sigma)\\ &= (-1)^p\varepsilon(\sigma).\end{aligned}$$

où $\tau_1\tau_2\dots\tau_p$ est une décomposition en produit de transpositions de σ'.
Donc, $\varepsilon(\sigma'\sigma) = \varepsilon(\sigma')\varepsilon(\sigma)$.

L'application ε vérifie donc les conditions du théorème 7 de la page 1231.

Exercice 11 À l'aide de la décomposition en produit de cycles trouvée dans l'exercice 8 de la page 1230, on obtient que la signature est 1.

Exercice 12

$$\begin{aligned}f(x+y,x+y) &= f(x+y,x)+f(x+y,y) && \text{point 1 de la définition}\\ &= f(x,x)+f(y,x)+f(x,y)+f(y,y) && \text{point 2 de la définition.}\end{aligned}$$

Exercice 13

$$\begin{aligned}f(x+y,x+y,x+y) &= f(x,x+y,x+y)+f(y,x+y,x+y)\\ &= f(x,x,x+y)+f(x,y,x+y)+f(y,x,x+y)+f(y,y,x+y)\\ &= f(x,x,x)+f(x,x,y)+f(x,y,x)+f(x,y,y)+f(y,x,x)\\ &\quad+f(y,x,y)+f(y,y,x)+f(y,y,y).\end{aligned}$$

Proposition 10 Vérifions cette formule par récurrence sur p.

- Soit f une forme 1–linéaire sur E, c'est-à-dire une forme linéaire sur E.

  Si $u_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,1}\, e_i$, on a $f(u_1) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,1}\, f(e_i)$, ce qui démontre la relation pour $p=1$.
- Supposons la formule vérifiée au rang $p-1$, avec $p \geqslant 2$. Soit f une forme p–linéaire sur E. Si u_1, u_2,..., u_p sont des vecteurs de E, il existe des scalaires $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ tels que :

  $$\forall j \in [\![1,p]\!] \quad u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i.$$

  La linéarité de l'application $x \mapsto f(u_1,u_2,\dots,u_{p-1},x)$ implique :

  $$f(u_1,u_2,\dots,u_p) = \sum_{i_p=1}^{n} a_{i_p,p}\, f(u_1,u_2,\dots,u_{p-1},e_{i_p}). \qquad (*)$$

  Pour tout entier $i_p \in [\![1,n]\!]$, l'application :

  $$(x_1,x_2,\dots,x_{p-1}) \mapsto f(x_1,x_2,\dots,x_{p-1},e_{i_p})$$

  est une application $(p-1)$–linéaire et l'hypothèse de récurrence montre alors :

  $$f(u_1,u_2,\dots,u_{p-1},e_{i_p}) = \sum_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant n\\ 1\leqslant i_2\leqslant n\\ \dots\\ 1\leqslant i_{p-1}\leqslant n}} a_{i_1,1}\, a_{i_2,2}\dots a_{i_{p-1},p-1}\, f(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_p})$$

ce qui, en remplaçant dans l'égalité $(*)$, donne :

$$f(u_1,u_2,\dots,u_p)=\sum_{i_p=1}^{n} a_{i_p,p}\Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant n\\ 1\leqslant i_2\leqslant n\\ \cdots\\ 1\leqslant i_{p-1}\leqslant n}} a_{i_1,1}\,a_{i_2,2}\dots a_{i_{p-1},p-1}\,f(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_p})\Bigg)$$

et prouve la relation au rang p.

Proposition 11 Étant donné i et j tels que $1\leqslant i<j\leqslant n$, fixons u_1, u_2,..., u_n dans E. L'application g :

$$\begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ (x,y) & \longmapsto & f(u_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{-ème}}}{x},\dots \underset{\substack{\uparrow\\ j\text{-ème}}}{y},\dots,u_n)\end{array}$$

est une application bilinéaire de E dans F vérifiant :

$$\forall x\in E\quad g(x,x)=0.$$

Montrons que :

$$g(u_i,u_j)=-g(u_j,u_i).$$

La bilinéarité de g nous donne :

$$g(u_i+u_j,u_i+u_j)=g(u_i,u_i)+g(u_i,u_j)+g(u_j,u_i)+g(u_j,u_j).$$

Ce qui prouve le résultat, puisque :

$$g(u_i,u_i)=g(u_j,u_j)=g(u_i+u_j,u_i+u_j)=0.$$

Exercice 14 Soit f une forme n−linéaire antisymétrique et soit $(u_1,\dots,u_n)\in E^n$. Si $1\leqslant i<j\leqslant n$, alors :

$$f(u_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{-ème}}}{u_i},\dots \underset{\substack{\uparrow\\ j\text{-ème}}}{u_j},\dots,u_n)=-f(u_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{-ème}}}{u_j},\dots \underset{\substack{\uparrow\\ j\text{-ème}}}{u_i},\dots,u_n).$$

Par ailleurs, si $u_i=u_j$,

$$f(u_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{-ème}}}{u_i},\dots \underset{\substack{\uparrow\\ j\text{-ème}}}{u_j},\dots,u_n)=f(u_1,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{-ème}}}{u_j},\dots \underset{\substack{\uparrow\\ j\text{-ème}}}{u_i},\dots,u_n).$$

On a donc ainsi $f(u_1,\dots,u_i,\dots u_j,\dots,u_n)=0$; ce qui prouve que f est alternée.

Proposition 13 Comme la famille $(u_1,u_2,\dots,u_n)$ est liée, il existe $i\in[\![1,n]\!]$ tel que u_i soit combinaison linéaire des autres vecteurs. En écrivant que $u_i=\sum\limits_{k\neq i}\lambda_k\,u_k$ où $\lambda_k\in\mathbb{K}$, on obtient :

$$\begin{aligned}f(u_1,u_2,\dots,u_n)&=f\big(u_1,\dots,u_{i-1},\sum_{k\neq i}\lambda_k\,u_k,u_{i+1},\dots,u_n\big)\\&=\sum_{k\neq i}\lambda_k\,f(u_1,\dots,u_{i-1},u_k,u_{i+1},\dots u_n).\end{aligned}$$

Les familles $(u_1,\dots,u_{i-1},u_k,u_{i+1},\dots,u_n)$, pour $k\neq i$, contiennent deux vecteurs égaux ; par suite, comme f est alternée, $f(u_1,\dots,u_{i-1},u_k,u_{i+1},\dots,u_n)=0$.

Donc, d'après l'égalité précédente, $f(u_1,u_2,\dots,u_n)=0$.

Corollaire 14 Si x est une combinaison linéaire de la famille :

$$(u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n),$$

alors, d'après la proposition précédente :

$$f(u_1, \ldots, u_{j-1}, x, u_{j+1}, \ldots, u_n) = 0,$$

et, par n–linéarité de f, on a :

$$\begin{aligned} f(u_1, \ldots, u_{j-1}, u_j + x, u_{j+1}, \ldots, u_n) =& f(u_1, \ldots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\ &+ f(u_1, \ldots, u_{j-1}, x, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\ =& f(u_1, \ldots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n). \end{aligned}$$

Théorème 15 Soit $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$. Il existe alors une famille de scalaires $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ telle que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$.

- Si l'on note φ_0 l'application de E^n dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$\varphi_0(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n},$$

  la formule $(*)$ de la page 1237 montre que toute forme n–linéaire alternée φ est proportionnelle à φ_0, et plus précisément que l'on a :

$$\varphi = \varphi(e_1, e_2, \ldots, e_n)\, \varphi_0.$$

  En particulier, si $\varphi(e_1, e_2, \ldots e_n) = 1$, on a $\varphi = \varphi_0$, ce qui prouve l'unicité.
- Il ne reste plus qu'à montrer que φ_0 est une forme n–linéaire alternée et qu'elle vérifie $\varphi_0(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$. Cette partie de la démonstration n'est pas exigible des étudiants.
  - $*$ L'expression de φ_0 prouve que c'est une forme n–linéaire.
  - $*$ Montrons que si, pour $i \neq j$, l'on a $u_i = u_j$, alors $\varphi_0(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$. Notons $\mathfrak{A}_n$ l'ensemble des permutations de signature 1. Soit τ une transposition de $\mathfrak{S}_n$. L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \\ \sigma' & \longmapsto & \sigma'\tau \end{array}$$

    est une involution. Sa restriction à $\mathfrak{A}_n$ est encore injective et définit une bijection de $\mathfrak{A}_n$ sur son image, qui est l'ensemble des permutations de signature -1. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \varphi_0(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \varepsilon(\sigma)=1}} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} + \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \varepsilon(\sigma)=-1}} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} - \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma\tau(k),k}. \end{aligned}$$

Or, on a, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ fixé :

$$a_{\sigma\tau(i),i} = a_{\sigma(j),i} = a_{\sigma(j),j} \qquad \text{et} \qquad a_{\sigma\tau(j),j} = a_{\sigma(i),j} = a_{\sigma(i),i}$$

puisque $u_i = u_j$ et $a_{\sigma\tau(k),k} = a_{\sigma(k),k}$ pour $k \notin \{i,j\}$.
Donc :

$$\prod_{k=1}^{n} a_{\sigma\tau(k),k} = \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k}$$

et, par suite, $\varphi_0(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$.

* Enfin, vérifions que $\varphi_0(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$. Par définition de φ_0, on a :

$$\varphi_0(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, \delta_{\sigma(1),1}\, \delta_{\sigma(2),2} \ldots \delta_{\sigma(n),n},$$

où $(\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la matrice des composantes de e_1, $e_2, \ldots$, e_n dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, c'est-à-dire est égale à I_n.
Dans la somme précédente :

  * si σ n'est pas l'identité, alors il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(i) \neq i$ et donc $\delta_{\sigma(i),i} = 0$. Par suite, le produit $\varepsilon(\sigma)\, \delta_{\sigma(1),1}\, \delta_{\sigma(2),2} \ldots \delta_{\sigma(n),n}$ est nul ;
  * si $\sigma = \mathrm{Id}$, alors on a $\varepsilon(\sigma)\, \delta_{\sigma(1),1}\, \delta_{\sigma(2),2} \ldots \delta_{\sigma(n),n} = 1$.

Donc $\varphi_0(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$.

Proposition 19 Comme $\mathbf{e}$ est une base de E, d'après le théorème 15 de la page 1237 et la définition 7 de la page 1238, toute forme n-linéaire alternée est proportionnelle à $\det_{\mathbf{e}}$ et en particulier la forme n–linéaire alternée $\det_{\mathbf{e}'}$.

Il existe donc un scalaire λ tel que $\det_{\mathbf{e}'} = \lambda \det_{\mathbf{e}}$, c'est-à-dire :

$$\forall (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n \quad \det_{\mathbf{e}'}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \lambda \det_{\mathbf{e}}(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

En prenant $(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathbf{e}$, on obtient $\lambda = \det_{\mathbf{e}'}(\mathbf{e})$.

Théorème 21

$(i) \Rightarrow (ii)$ Si $\mathbf{e}' = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E, par application de la proposition 19 de la page 1239, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_{\mathbf{e}'} = \lambda \det_{\mathbf{e}}$, c'est-à-dire :

$$\forall (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E^n \quad \det_{\mathbf{e}'}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \lambda \det_{\mathbf{e}}(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

En particulier :

$$\det_{\mathbf{e}'}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \lambda \det_{\mathbf{e}}(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

et, puisque $\det_{\mathbf{e}'}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 1$, on en déduit que :

$$\det_{\mathbf{e}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) \neq 0.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Puisque E est de dimension n, si $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille libre de E, alors $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E. Par la contraposée, si $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ n'est pas une base de E, la famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est liée et en utilisant la proposition 13 de la page 1236, on obtient $\det_{\mathbf{e}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$.

Exercice 15 Comme $\det_{\mathbf{e}}(\vec{\imath} - \vec{\jmath}, \vec{\imath} + \vec{\jmath}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $(\vec{\imath} - \vec{\jmath}, \vec{\imath} + \vec{\jmath})$ est une base et c'est une base directe de $\mathbb{R}^2$.

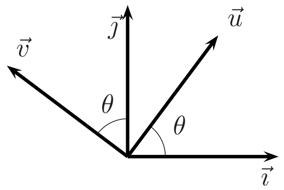
Exercice 16 $\det_{\mathbf{e}}(\vec{\jmath},\vec{k},\vec{\imath}) = -\det_{\mathbf{e}}(\vec{\jmath},\vec{\imath},\vec{k}) = \det_{\mathbf{e}}(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}) = 1$. Cette base est donc bien directe.

Comme $\det_{\mathbf{e}}(-\vec{\imath},-\vec{\jmath},-\vec{k}) = (-1)^3 \det_{\mathbf{e}}(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}) = -1$, la base $(-\vec{\imath},-\vec{\jmath},-\vec{k})$ est donc bien une base indirecte.

Dans $\mathfrak{S}_3$, il y a trois permutations de signature 1 : Id, $(1,2,3)$, $(1,3,2)$ et trois permutations de signature -1 : $(1,2)$, $(1,3)$ et $(2,3)$. On aura donc en utilisant la proposition 12 de la page 1236 :

* 3 bases directes : $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, $(\vec{\jmath},\vec{k},\vec{\imath})$ et $(\vec{k},\vec{\imath},\vec{\jmath})$;
* 3 bases indirectes : $(\vec{\jmath},\vec{\imath},\vec{k})$, $(\vec{k},\vec{\jmath},\vec{\imath})$ et $(\vec{\imath},\vec{k},\vec{\jmath})$.

Exercice 17



$$\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$
$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Donc, $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et c'est une base directe.

Proposition 22 Soit $\mathbf{e}$ une base fixée de E.

Unicité. Si λ convient, alors on a :

$$\forall (u_1,u_2,\dots,u_n)\in E^n \quad \det_{\mathbf{e}}\big(f(u_1),f(u_2),\dots,f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathbf{e}}(u_1,u_2,\dots,u_n)$$

et, en particulier, pour $(u_1,u_2,\dots,u_n) = \mathbf{e}$, on obtient $\lambda = \det_{\mathbf{e}}\big(f(\mathbf{e})\big)$.

Cela prouve l'unicité.

Existence.

* Par linéarité de f, l'application de E^n dans $\mathbb{K}$:
$$(u_1,u_2,\dots,u_n) \longmapsto \det_{\mathbf{e}}\big(f(u_1),f(u_2),\dots,f(u_n)\big)$$
est clairement une forme n–linéaire alternée ; elle est donc proportionnelle à $\det_{\mathbf{e}}$.
Par suite, il existe un scalaire λ tel que, pour tout $(u_1,u_2,\dots,u_n)\in E^n$, on ait :
$$\det_{\mathbf{e}}\big(f(u_1),f(u_2),\dots,f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathbf{e}}(u_1,u_2,\dots,u_n). \qquad (*)$$
* Soit $\mathbf{e}'$ une base quelconque de E. La forme n–linéaire $\det_{\mathbf{e}'}$ est proportionnelle à $\det_{\mathbf{e}}$ et donc il existe un scalaire α tel que $\det_{\mathbf{e}'} = \alpha \det_{\mathbf{e}}$.
En multipliant la relation $(*)$ par α, on obtient, pour tout $(u_1,u_2,\dots,u_n)\in E^n$:
$$\det_{\mathbf{e}'}\big(f(u_1),f(u_2),\dots,f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathbf{e}'}(u_1,u_2,\dots,u_n)\,;$$
ce qui prouve le résultat.

Exercice 18 Soit $(e_1,e_2,\dots,e_p)$ une base de F et $(e_{p+1},e_{p+2},\dots,e_n)$ une base de G.

La famille $\mathbf{e} = (e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base de E et on a alors :

$$\begin{aligned}\det s &= \det_{\mathbf{e}}\big(s(e_1),\dots,s(e_n)\big)\\ &= \det_{\mathbf{e}}(e_1,\dots,e_p,-e_{p+1},\dots,-e_n)\\ &= (-1)^{n-p} = (-1)^{\dim G}.\end{aligned}$$

Proposition 23 Soit $\mathbf{e} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. On a :

$$\begin{aligned} \det(\lambda f) &= \det_{\mathbf{e}}\big(\lambda f(e_1), \lambda f(e_2), \ldots, \lambda f(e_n)\big) \\ &= \lambda^n \det_{\mathbf{e}}\big(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\big) \\ &= \lambda^n \det f. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(f \circ g) &= \det_{\mathbf{e}}\Big(f \circ g(e_1), f \circ g(e_2), \ldots, f \circ g(e_n)\Big) \\ &= \det_{\mathbf{e}}\Big(f\big(g(e_1)\big), f\big(g(e_2)\big), \ldots, f\big(g(e_n)\big)\Big) \\ &= \det f \, \det_{\mathbf{e}}\big(g(e_1), g(e_2), \ldots, g(e_n)\big) \\ &= \det f \, \det g. \end{aligned}$$

Proposition 24 Soit $\mathbf{e} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. On a :

$$\det f = \det_{\mathbf{e}}\big(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\big).$$

Donc, d'après le théorème 21 de la page 1239, le scalaire $\det f$ est non nul si, et seulement si, $\big(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\big)$ est une base de E ; c'est-à-dire si, et seulement si, f est un automorphisme de E. La proposition 23 de la page 1242 permet alors d'écrire :

$$\det(f) \ \det\left(f^{-1}\right) = \det(\mathrm{Id}_E) = 1,$$

et donc $\det\left(f^{-1}\right) = (\det f)^{-1}$.

Exercice 19 D'une part, on a $\det f^2 = \big(\det f\big)^2 \geqslant 0$ et d'autre part, par hypothèse, $\det f^2 = \det(-\mathrm{Id}_E) = (-1)^n$. On en déduit que n est pair.

Exercice 20 Par définition, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\det(A + xI_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, b_{\sigma(1),1}\, b_{\sigma(2),2} \ldots b_{\sigma(n),n} \quad \text{ou} \quad b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i \neq j \\ a_{i,i} + x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, $x \mapsto \det(A + xI_n)$ s'exprime comme une somme finie de produits de n fonctions polynomiales en x de degré au plus 1. Par suite, $x \mapsto \det(A + xI_n)$ est bien une fonction polynomiale de degré au plus n.

Proposition 28
Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés à A et à B.

- La matrice de λf par rapport à la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est λA et l'on a :
$$\det(\lambda A) = \det(\lambda f) = \lambda^n \det f = \lambda^n \det A.$$
- La matrice de $f \circ g$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est AB et l'on a :
$$\det(AB) = \det(f \circ g) = \det f \det g = \det A \det B.$$

Proposition 29 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. On sait déjà que $\det A = \det f$ et que A est inversible si, et seulement si, f est bijectif. Grâce au résultat précédent, on en déduit que A est inversible si, et seulement si, $\det A \neq 0$. La proposition 28 de la page 1244 permet alors d'écrire :

$$\det A \ \det\left(A^{-1}\right) = \det I_n = 1$$

et donc $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$.

Exercice 21 Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec$n$ impair. On a alors $\det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$. Donc $\det A = 0$.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique et $\det A = 1$. Plus généralement, en utilisant les produits par blocs de la page 1249, la matrice diagonale ayant pour blocs diagonaux A est une matrice antisymétrique de déterminant 1. Le résultat n'est donc plus vrai si l'ordre de la matrice est pair.

Exercice 22 Le premier déterminant est nul, puisque la matrice a deux colonnes proportionnelles.

Le second aussi, puisque la deuxième ligne est la demi–somme des deux autres.

Proposition 32 On a,par définition :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n},$$

et, comme par hypothèse :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad \sigma(n) \neq n \Longrightarrow a_{\sigma(n),n} = 0,$$

la relation précédente s'écrit :

$$\det A = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(n) = n}} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n-1),n-1}\, a_{n,n}.$$

Or, la restriction à $[\![1, n-1]\!]$ de toute permutation σ vérifiant $\sigma(n) = n$ est une permutation s de $[\![1, n-1]\!]$. Réciproquement, en prolongeant une permutation $s \in \mathfrak{S}_{n-1}$ par $s(n) = n$, on obtient une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. De plus, on a alors $\varepsilon(s) = \varepsilon(\sigma)$ puisqu'une décomposition de s en produit de k transpositions donne également une décomposition de σ en produit de k transpositions.

On a alors :

$$\det A = \sum_{s \in \mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(s)\, a_{s(1),1}\, a_{s(2),2} \dots a_{s(n-1),n-1}\, a_{n,n} = a_{n,n} \det A'.$$

Exercice 23

1. Si l'on retranche la première colonne à chacune des autres colonnes, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c-a & \cdots & \cdots & c-a \\ b+x & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-a \\ b+x & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

Le déterminant d'une matrice est une forme $n-$linéaire de ses colonnes. en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne, on obtient :

$$f(x) = \begin{vmatrix} a & c-a & \cdots & \cdots & c-a \\ b & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-a \\ b & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & c-a & \cdots & \cdots & c-a \\ x & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-a \\ x & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant ne dépend pas de x, notons-le α.

Le deuxième peut se réécrire, en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne, sous la forme :

$$x \begin{vmatrix} 1 & c-a & \cdots & \cdots & c-a \\ 1 & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-a \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

Il est donc de la forme βx où β est un réel indépendant de x.

On en déduit que $f(x) = D(a+x, b+x, c+x) = \alpha + x\beta$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Donc, f est bien une fonction polynomiale de degré au plus 1.

2. Ainsi, $D(a,b,c) = f(0)$. On va donc chercher à déterminer les valeurs de α et β définis précédemment. Remarquons que :

$$f(-c) = \begin{vmatrix} a-c & 0 & \cdots & 0 \\ b-c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b-c & \cdots & b-c & a-c \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant étant celui d'une matrice triangulaire, il est égal au produit des termes de la diagonale.

$$f(-c) = (a-c)^n.$$

De la même manière, $f(-b) = (a-b)^n$.

Il ne reste plus qu'à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha - \beta c &= (a-c)^n \\ \alpha - \beta b &= (a-b)^n. \end{cases}$$

On obtient, après résolution, comme $b \neq c$:

$$\alpha = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{(a-c)^n - (a-b)^n}{b-c}.$$

Ce qui nous donne finalement :

$$D(a,b,c) = f(0) = \alpha = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}.$$

Théorème 34 Désignons par **e** la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et par C_1, C_2,..., C_n les colonnes de A. Pour tout entier $j \in [\![1,n]\!]$, on a $C_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i$; ce qui donne :

$$\begin{aligned}\det A &= \det_{\mathbf{e}}\left(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i, C_{j+1}, \ldots, C_n\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \det_{\mathbf{e}}(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \ldots, C_n).\end{aligned}$$

Notons, pour i et j fixés dans $[\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned}D_{i,j} &= \det_{\mathbf{e}}(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \ldots, C_n)\\ &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n}\\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n}\\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

On peut opérer sur $D_{i,j}$ une suite de $n-j$ échanges de colonnes pour amener la j-ème en dernière position, puis une suite de $n-i$ échanges de lignes pour amener la i-ème en dernière position. Le déterminant est alors multiplié par $(-1)^{n-j}(-1)^{n-i} = (-1)^{i+j}$ et l'on a :

$$D_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & 0\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & 0\\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} & 0\\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} & 1 \end{vmatrix}.$$

Cela entraîne, d'après la proposition 32 de la page 1247, $D_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ et donc :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\,(-1)^{i+j}\,\Delta_{i,j}.$$

Exercice 24

1. On effectue successivement les opérations suivantes :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & c-b & c-a \\ ab & a(c-b) & b(c-a) \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array}$$

$$= (c-b)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & 1 & 1 \\ ab & a & b \end{vmatrix} \qquad \text{mise en facteur dans } C_2 \text{ et } C_3$$

$$= (c-b)(c-a)(b-a) \qquad \text{développement par rapport à } L_1.$$

2. La matrice A est inversible si, et seulement si, les scalaires a, b et c sont deux à deux distincts.

Exercice 25 Par exemple, en développant par rapport à la première ligne, on a :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}.$$

Proposition 36 En utilisant les produits par blocs, on peut écrire :

$$M = \begin{pmatrix} I_{n'} & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-n'} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de M est alors le produit des déterminants de ces deux matrices.

On calcule le déterminant de $\begin{pmatrix} I_{n'} & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ en développant n' fois de suite par rapport à la première colonne jusqu'à obtenir :

$$\det \begin{pmatrix} I_{n'} & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det B.$$

De la même manière, en développant $n - n'$ fois de suite par rapport à la dernière ligne, on obtient :

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-n'} \end{pmatrix} = \det A.$$

On a donc ainsi prouvé que :

$$\det M = \det A \ \det B.$$

Exercice 26 En notant $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \det A \ \det({}^tA) = (-2)^2 = 4$.

Exercice 27 En échangeant la i-ème colonne et la $(n+i)$-ième pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{vmatrix} = (-1)^{2n} = 1.$$

Proposition 37 Démontrons par récurrence sur n la propriété H_n :

$$« \forall (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j). »$$

- La propriété H_1 est vraie car, si x_0 et x_1 sont des scalaires, on a :

$$V(x_0,x_1)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_0 & x_1\end{vmatrix}=x_1-x_0.$$

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que H_{n-1} soit vraie et prenons des scalaires $x_0,x_1,\dots,x_n$.

  * Si les scalaires $x_0,x_1,\dots,x_n$ ne sont pas distincts deux à deux, le déterminant $V(x_0,x_1,\dots,x_n)$ a deux colonnes identiques et donc il est nul. Dans ce cas la formule $V(x_0,x_1,\dots,x_n)=\prod\limits_{0\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$ est vérifiée.
  * Si les scalaires $x_0,x_1,\dots,x_n$ sont distincts deux à deux, le développement par rapport à la dernière colonne du déterminant $V(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x)$ montre que ce dernier est une fonction f polynomiale en x, de degré inférieur ou égal à n et dont le coefficient de degré n est $V(x_0,x_1,\dots,x_{n-1})$.
    D'après H_{n-1}, on a :

$$V(x_0,x_1,\dots,x_{n-1})=\prod_{0\leqslant j<i\leqslant n-1}(x_i-x_j);$$

    ce coefficient est donc non nul, puisque les scalaires $x_0,x_1,\dots,x_{n-1}$ sont deux à deux distincts, et par suite, f est une fonction polynomiale de degré n.
    De plus, f admet comme racines $x_0,x_1,\dots,x_{n-1}$ car, pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, la quantité $f(x_i)$ est un déterminant admettant deux colonnes identiques. Puisque f est un polynôme de degré n dont le coefficient dominant est $V(x_0,x_1,\dots,x_{n-1})$ et qui admet pour racines les scalaires distincts $x_0,x_1,\dots,x_{n-1}$, on a l'égalité :

$$\forall x\in\mathbb{K}\quad V(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x)=V(x_0,x_1,\dots,x_{n-1})\prod_{j=0}^{n-1}(x-x_j);$$

    ce qui implique :

$$V(x_0,x_1,\dots,x_n)=\prod_{0\leqslant j<i\leqslant n-1}(x_i-x_j)\prod_{j=0}^{n-1}(x_n-x_j)=\prod_{0\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j);$$

    On a ainsi établi la propriété H_n.

  Ce qui termine la démonstration par récurrence.

Exercice 28 Soit $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_0\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Supposons ${}^tA\,\Lambda=0$, ce qui se traduit par les égalités :

$$P(x_0)=P(x_1)=\cdots=P(x_n)=0$$

où P est le polynôme $\lambda_0+\lambda_1X+\cdots+\lambda_nX^n$.

Il s'agit donc d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet $n+1$ racines distinctes, donc qui est nul. Par suite, tous ses coefficients λ_i sont nuls.

On a donc l'implication ${}^tA\,\Lambda=0\Longrightarrow\Lambda=0$, ce qui prouve que la matrice *carrée* ${}^tA$ est inversible et donc aussi A.

Proposition 38

- Posons $A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

  Étant donné deux entiers i et k de $[\![1,n]\!]$, on a, par définition :
  $$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{k,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} \Delta_{k,j}\, a_{i,j}.$$

  * Si $k = i$, alors la dernière somme ci–dessus représente le développement du déterminant de A suivant la i-ème ligne, ce qui implique $c_{i,i} = \det A$.
  * Si $k \neq i$, alors on considère la matrice $A' = (a'_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ obtenue à partir de A en recopiant la i-ème ligne dans la k-ième ligne. Comme A' admet deux lignes identiques, son déterminant est nul et en développant ce déterminant suivant sa k-ième ligne, on a :
  $$0 = \det A' = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} \Delta'_{k,j}\, a'_{k,j}.$$
  Par construction, on a $a'_{k,j} = a_{i,j}$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, et, puisque les lignes de A et de A' autres que les k-ièmes sont identiques, on a $\Delta'_{k,j} = \Delta_{k,j}$. Par suite, la relation précédente devient :
  $$0 = \det A' = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{j+k} \Delta_{k,j} = c_{i,k}.$$

  On a donc l'égalité $A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = (\det A)\, I_n$.
- On démontre de manière analogue, en utilisant des développements par rapport aux colonnes, la relation ${}^t\mathrm{Com}(A)\, A = (\det A)\, I_n$.

Exercice 29

1. Si $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors $\det A = \sum\limits_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$ est une somme finie de termes construits comme étant des produits d'entiers relatifs. Par suite, $\det A \in \mathbb{Z}$.
2. On va procéder par double implication.
   - On suppose tout d'abord qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $A\,B = I_n$. Les matrices A et B sont alors telles que $\det A \in \mathbb{Z}$ et $\det B \in \mathbb{Z}$ d'après la question précédente.
     Par ailleurs, $\det A \det B = \det I_n = 1$.
     Les seuls éléments inversibles de $\mathbb{Z}$ étant $+1$ et -1, on en déduit alors que $\det A = 1$ ou $\det A = -1$.
   - Réciproquement, on suppose que $\det A = \pm 1$. Donc, $\det A \neq 0$; A est une matrice inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$. On sait qu'alors :
     $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\,\mathrm{Com}\,A \quad \text{où} \quad \mathrm{Com}\,A \text{ est la comatrice de } A.$$
     Par définition de la comatrice et en menant le même raisonnement que dans la première question, les coefficients de la comatrice de A sont tous dans $\mathbb{Z}$.
     De la relation $A^{-1} = \pm\,{}^t\,\mathrm{Com}\,A$, on obtient immédiatement que A^{-1} est à coefficients entiers.

Remarque On vient de démontrer que les inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ sont les matrices de déterminant ± 1.

S'entraîner et approfondir

24.1 On notera les 6 éléments de $\mathfrak{S}_3$ de la manière suivante :

- Id
- les transpositions $\tau_1 = (2,3)$, $\tau_2 = (1,3)$ et $\tau_3 = (1,2)$
- les 3–cycles $\sigma_1 = (1,2,3)$ et $\sigma_2 = (1,3,2)$.

Le but de cet exercice est de compléter la table suivante, en indiquant sur la ligne de s et la colonne de s' le résultat $s \circ s'$:

	Id	σ_1	σ_2	τ_1	τ_2	τ_3
Id	?	?	?			
σ_1	?	?	?			
σ_2	?	?	?			
τ_1				?	?	?
τ_2				?	?	?
τ_3				?	?	?

Pour ce faire, on pourra utiliser les étapes suivantes.

1. Une ligne et une colonne se complètent facilement ;
2. Positionner toutes les occurrences de Id dans le tableau ;
3. Peut-on trouver sur une même ligne (ou une même colonne) deux fois le même élément de $\mathfrak{S}_3$?
4. Montrer, en utilisant la signature, que le produit de deux transpositions est un cycle de longueur 3 ou l'identité. De la même manière, que peut-on dire du produit de deux cycles de longueur 3 ? D'une transposition et d'un cycle de longueur 3 ?

   Remplacer alors les points d'interrogation du tableau précédent par le bon élément de $\mathfrak{S}_3$.
5. En remarquant que $\sigma_1 = \tau_1\tau_2$, trouver la valeur de $\sigma_1\tau_2$.

On complétera alors le tableau à la manière d'un « sudoku ».

24.2 Soit $n \geqslant 2$.

1. Démontrer, par récurrence sur $k \in [\![1,n]\!]$, la propriété H_k : « toute permutation de $[\![1,n]\!]$ laissant fixes k, $k+1$,..., et n est un produit de transpositions. »
2. En déduire que toute permutation de $[\![1,n]\!]$ se décompose sous la forme d'un produit de transpositions.

   On retrouve ainsi le résultat vu en cours sans passer par la décomposition en produit de cycles.

⋆ **24.3** Montrer que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme le produit de transpositions de la forme $(1,i)$, $i \in \{2,\dots,n\}$.

⋆⋆ **24.4** Même question que dans l'exercice précédent avec les transpositions :

$$(i, i+1), \quad i \in \{1,\dots,n-1\}.$$

★ **24.5** Dans $\mathfrak{S}_n$, on considère le cycle :

$$\sigma = (1, 2, \ldots, n-1, n)$$

et la transposition :

$$\tau = (1, 2).$$

Montrer que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme un produit où n'apparaissent que les permutations τ et σ. On utilisera l'exercice précédent.

★ **24.6** Soit $n \geqslant 3$. Montrer que toute permutation de signature 1 de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme le produit de cycles d'ordre 3.

24.7 Soit $n \geqslant 5$.Montrer que si (a, b, c) et (a', b', c') sont deux cycles d'ordre 3 dans $\mathfrak{S}_n$, alors il existe une permutation σ de signature 1 telle que :

$$\sigma \circ (a, b, c) \circ \sigma^{-1} = (a', b', c').$$

24.8 Soit $n \geqslant 3$. Chercher l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ commutant avec tous les éléments de $\mathfrak{S}_n$.

24.9 Soit τ et τ' deux transpositions de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que l'on a :

$$\tau\tau' = \mathrm{Id} \quad \text{ou} \quad (\tau\tau')^2 = \mathrm{Id} \quad \text{ou} \quad (\tau\tau')^3 = \mathrm{Id}\,.$$

24.10 Exprimer sous forme factorisée les déterminants suivants, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

1. $A = \begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix}$; 2. $B = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$;

3. $C = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$; 4. $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$.

★ **24.11** Démontrer, sans le calculer, que le nombre :

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

est divisible par 13×8 (on commencera par remarquer que 156, 260 et 325 sont divisibles par 13).

★★ **24.12** Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}$ est un polynôme en x divisible par $(x-1)^3$. Quel est la valeur de ce déterminant ?

24.13 Soit $a \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

(on trouvera une relation de récurrence vérifiée par D_n).

24.14 Calculer le déterminant suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

24.15 Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix}.$$

On pourra commencer par simplifier $\binom{n+i-1}{j-1} - \binom{n+i-2}{j-1}$ pour $i \in [\![2,p]\!]$ et $j \in [\![2,p]\!]$.

24.16 Étant donné $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^n$, calculer le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix}.$$

24.17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a_0, a_1, $\dots$ a_n, b, $n+2$ éléments de $\mathbb{R}$.
Calculer :

$$D = \begin{vmatrix} \cos a_0 & \cos(a_0+b) & \dots & \cos(a_0+nb) \\ \cos a_1 & \cos(a_1+b) & \dots & \cos(a_1+nb) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos a_n & \cos(a_n+b) & \dots & \cos(a_n+nb) \end{vmatrix}.$$

$\star$ **24.18** Soit $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré k avec $n \geqslant k+2$.
Montrer que le déterminant d'ordre n :

$$D = \begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \dots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \dots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \dots & P(2n-1) \end{vmatrix}$$

est nul.
On pourra utiliser l'application Δ définie par $\Delta(P) = P(X) - P(X-1)$.

24.19 Soient n et p deux entiers non nuls avec $n > p$.
Que vaut $\det(AB)$ pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$?

24.20 Soit $(z_0, z_1, \dots z_n)$ $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille :

$$\big((X-z_0)^n, (X-z_1)^n, \dots, (X-z_n)^n\big)$$

est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

$\star$ **24.21** On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par :

$$\varphi(M) = {}^tM.$$

Calculer le déterminant de φ.

24.22 Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{C}$ pour que la matrice :

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

soit inversible. Déterminer lorsqu'elle existe, la matrice A^{-1}.

$\star$ **24.23** Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $\det M = \det(A+iB)\ \det(A-iB)$.
2. En déduire que $\det M \geqslant 0$.
3. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2+B^2) \geqslant 0$.
4. Chercher A, B ne commutant pas telles que $\det(A^2+B^2) < 0$.

⋆ **24.24** Soit a_1, $a_2, \ldots$, a_n n nombres complexes, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & & \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ 1 & \omega & \ldots\ldots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \ldots\ldots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \ldots\ldots & \left(\omega^{n-1}\right)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calculer AM et en déduire $\det A$.

⋆ **24.25** Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe P dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$, et l'on veut montrer qu'il existe Q dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = Q^{-1}AQ$.

Montrer que, si l'on écrit $P = R + iS$ où R et S sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $RB = AR$ et $SB = AS$.

En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad (R + tS)B = A(R + tS).$$

Conclure.

24.26 Dans $\mathbb{R}^2$, soit D_1, D_2 et D_3 trois droites d'équations respectives :

$$u_i x + v_i y + h_i = 0.$$

Montrer que les trois droites sont concourantes ou parallèles si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0.$$

24.27 Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\det(\operatorname{Com} A) = (\det A)^{n-1}.$$

⋆ **24.28** Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = \operatorname{Com}(X).$$

Solution des exercices

24.1

	Id	σ_1	σ_2	τ_1	τ_2	τ_3
Id	Id	σ_1	σ_2	τ_1	τ_2	τ_3
σ_1	σ_1	σ_2	Id	τ_3	τ_1	τ_2
σ_2	σ_2	Id	σ_1	τ_2	τ_3	τ_1
τ_1	τ_1	τ_2	τ_3	Id	σ_1	σ_2
τ_2	τ_2	τ_3	τ_1	σ_2	Id	σ_1
τ_3	τ_3	τ_1	τ_2	σ_1	σ_2	Id

24.2 1. • H_1 est vérifiée, puisque seule l'identité laisse fixe tous les éléments de $[\![1,n]\!]$ et que $\mathrm{Id} = (1,2)(1,2)$ (on rappelle que $n \geqslant 2$).

- Supposons H_k pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et prenons une permutation σ de $[\![1,n]\!]$ laissant fixes $k+1,\ k+2,\ldots,\ n$.
  * Si $\sigma(k) = k$, alors d'après l'hypothèse de récurrence, σ est un produit de transpositions.
  * Sinon, on a $\sigma(k) < k$ puisque $k+1,\ k+2,\ldots,\ n$ sont leurs propres antécédents, et en posant $\tau_0 = \big(k, \sigma(k)\big)$, la permutation $\sigma' = \tau_0\, \sigma$ laisse fixes $k,\ k+1,\ldots,\ n$ et d'après H_k s'écrit donc :
  $$\sigma' = \tau_1\, \tau_2 \ldots \tau_p,$$
  où les τ_i sont des transpositions. On a alors $\sigma = \tau_0\, \sigma' = \tau_0\, \tau_1 \ldots \tau_p$.

  D'où H_{k+1}.

Ce qui termine la démonstration par récurrence.

2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Si $\sigma(n) = n$, alors σ peut s'écrire comme un produit de transpositions d'après ce qui précède. Sinon, $(n, \sigma(n))\ \sigma$ est une permutation de $[\![1,n]\!]$ qui laisse n invariant ; on peut alors l'écrire comme produit de transpositions et en composant cette écriture par $(n, \sigma(n))$ à gauche, on en déduit que σ est un produit de transpositions.

24.3 Soit (i,j) une transposition quelconque ($i \neq j$), on écrit :
$$(i,j) = (1,i) \circ (1,j) \circ (1,i).$$
Toute permutation pouvant s'écrire comme produit de transpositions, on en déduit le résultat annoncé.

24.4 Soit (i,j) une transposition quelconque. On peut supposer par exemple que $j > i$. Alors :
$$(i,j) = (i,i+1)(i+1,i+2)\cdots(j-1,j)(j-2,j-1)\cdots(i,i+1).$$

24.5 On vérifie que :
$$\forall i \in \{1,\ldots,n-2\} \quad \sigma^i \circ \tau \circ \sigma^{-i} = (i+1,i+2).$$
Toute transposition de la forme $(i,i+1)$ s'écrit donc comme un produit des permutations τ et σ. On conclut à l'aide de l'exercice précédent.

24.6 Soit σ une permutation de signature 1. Si σ est l'application identité, il suffit de choisir un cycle c d'ordre 3 (possible puisque $n \geqslant 3$) et alors $\sigma = c^3$. Sinon, en décomposant σ en produit de transpositions, σ peut s'écrire comme le produit d'un nombre pair de transpositions puisque la signature de σ vaut 1 ; il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma = \prod_{j=1}^{p} \tau_j \tau'_j$ où, pour tout $j \in [\![1, p[\![$, les permutations τ_j et τ'_j sont des transpositions que l'on peut supposer distinctes.

Reste maintenant à prouver que le produit de deux transpositions distinctes peut s'écrire comme le produit de cycles d'ordre 3.

- Si a, b, c sont trois éléments distincts 2 à 2 de $[\![1, n]\!]$, alors :
$$(a, b) \circ (b, c) = (a, b, c),$$
qui est un cycle d 'ordre 3.
- Si a, b, c, d sont quatre éléments distincts 2 à 2 de $[\![1, n]\!]$, alors :
$$(a, b) \circ (c, d) = (a, b) \circ (b, c) \circ (b, c) \circ (c, d) = (a, b, c) \circ (b, c, d),$$
qui est le produit de deux cycles.

On a ainsi prouvé la propriété demandée.

24.7 On remarque d'abord que, si σ est une permutation de $\mathfrak{S}_n$, alors :
$$\sigma \circ (a, b, c) \circ \sigma^{-1} = \big(\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)\big).$$
Soit σ dans $\mathfrak{S}_n$ telle que :
$$\sigma(a) = a' \quad , \quad \sigma(b) = b' \quad \text{et} \quad \sigma(c) = c'.$$
Si σ est paire, on a trouvé une permutation répondant au problème.

Sinon, puisque $n \geqslant 5$, il est possible de trouver une transposition τ laissant a', b' et c' fixes ; la permutation $\tau\sigma$ convient (elle est de signature 1).

24.8 Soit σ commutant avec toutes les permutations et $i \in [\![1, n]\!]$.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$ différent de i. Notons τ la transposition (i, j).

Soit $x \in [\![1, n]\!]$ avec $x \neq i$ et $x \neq j$. Alors :
$$\sigma(x) = \sigma \circ \tau(x) = \tau\big(\sigma(x)\big).$$
Donc, $\sigma(x) \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$ et σ étant une bijection, on a $\sigma(\{i, j\}) = \{i, j\}$; on en déduit que $\sigma(i) = i$ ou $\sigma(i) = j$.

Comme j a été choisi de manière arbitraire, $\sigma(i) = i$ et finalement, σ est égale à l'identité.

24.9 Notons $\tau = (i, j)$ et $\tau' = (k, l)$.

- Si $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \varnothing$, alors on trouve que $(\tau\tau')^2 = \mathrm{Id}$.
- Si $\{i, j\} \cap \{k, l\}$ a un seul élément, alors $(\tau\tau')^3 = \mathrm{Id}$.
- Si $\{i, j\} \cap \{k, l\}$ a deux éléments, c'est-à-dire $\tau = \tau'$ alors $\tau\tau' = \mathrm{Id}$.

24.10 1. Les opérations $L_3 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$, puis $L_1 \leftarrow L_1 - 2aL_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 2bL_3$ donnent :

$$A = \begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & -a-b-c \\ 0 & -a-b-c & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{développement par rapport à } C_1$$

$$= -(a+b+c)^3;$$

2. Les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$, puis $C_1 \leftarrow C_1 - C_4$ donnent :

$$B = (a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & c & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & -1 & a & c \\ -1 & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & c & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & 0 & a+b & 2c \\ 0 & 0 & 2c & a+b \end{vmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & 2c \\ 2c & a+b \end{vmatrix} \qquad \text{déterminant par blocs}$$

$$= (a-b)^2(a+b-2c)(a+b+2c);$$

3. L'opération $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3$ donne :

$$C = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b+c & c \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 + C_1 - C_3 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{matrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \qquad C2 \leftarrow C_2 - C_3$$

$$= 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2abc \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} C2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{matrix}$$

$$= 2abc(b-a)(c-b)(c-a);$$

4. Les opérations $L-3 \leftarrow L_3 - L_4$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$ donnent :

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -b^2 & a^2-c^2 & b^2 \\ 0 & a^2-b^2 & -c^2 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -b^2 & a^2-c^2 & b^2 \\ a^2-b^2 & -c^2 & c^2 \end{vmatrix} && \text{développement par rapport à } L_1 \\
&= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2b^2 & a^2-c^2-b^2 & b^2 \\ a^2-b^2-c^2 & -2c^2 & c^2 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} C1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ C2 \leftarrow C_2 - C_3 \end{array} \\
&= -\big(4b^2c^2 - (a^2-b^2-c^2)\big) && \text{développement par rapport à } L_1 \\
&= (a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc) \\
&= (a-b+c)(a+b-c)(a-b-c)(a+b+c).
\end{aligned}$$

24.11 L'opération $C_3 \leftarrow C_3 + 10C_2 + 100C_1$ donne :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6+5\times 10+1\times 100 \\ 2 & 6 & 0+6\times 10+2\times 100 \\ 3 & 2 & 5+2\times 10+3\times 100 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 13\times 12 \\ 2 & 6 & 13\times 20 \\ 3 & 2 & 13\times 25 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 12 \\ 2 & 6 & 20 \\ 3 & 2 & 25 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

De même 312, 256 et 560 sont divisibles par 8 et en opérant de manière analogue sur les lignes, on montre que le déterminant est divisible par 8.

13 et 8 étant premiers entre eux, le déterminant est divisible par 13×8.

24.12 En développant selon la première ligne, on obtient :

$$\Delta(x) = \Delta_{11} - x\Delta_{12} + x^2\Delta_{13} - x^3\Delta_{14}.$$

Comme les mineurs Δ_{1j}, pour $1 \leqslant j \leqslant 4$, sont des constantes vis à vis de la variable x, la formule précédente permet d'affirmer que Δ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3.

Par ailleurs, en utilisant l'opération $C_4 \leftarrow C_4 - 3C_3 + 3C_2 - C_1$ et la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & (x-1)^3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

On en déduit que $\Delta(x) = -(x-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \end{vmatrix}$. On reconnait alors un déterminant de Vandermonde. Donc, $\Delta(x) = -2(x-1)^3$.

24.13 En développant par rapport à la première ligne, pour $n \geqslant 2$, on obtient :

$$D_n = aD_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Et en développant le deuxième déterminant par rapport à la première colonne, on a :

$$D_n = aD_{n-1} - D_{n-2}.$$

De plus :

$$D_1 = a \quad \text{et} \quad D_2 = a^2 - 1.$$

On peut poser $D_0 = 1$ et alors la relation de récurrence est vérifiée pour $n \geqslant 2$.

L'équation caractéristique $r^2 - ar + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = a^2 - 4$. En notant r et s les racines, éventuellement confondues, du polynôme $X^2 - aX + 1$, on trouve :

- si $r \neq s$ (c'est-à-dire $a^2 \neq 4$), alors $D_n = \dfrac{r^{n+1} - s^{n+1}}{r - s}$,
- si $r = s$, alors $D_n = (1+n)r^n$.

24.14 En ajoutant à la première colonne les autres colonnes, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Puis, en retranchant la première colonne aux autres, on obtient :

$$D_n = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}$$

puisque le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes diagonaux.

24.15 Soit $i \in [\![2, p]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$.

$$\binom{n+i-1}{j-1} - \binom{n+i-2}{j-1} = \binom{n+i-2}{j-2}.$$

Ce calcul nous incite à retrancher à chaque ligne la précédente, sauf pour la première.

On obtient alors :

$$\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \ldots & \binom{n}{p-1} \\ 0 & \binom{n}{0} & \ldots & \binom{n}{p-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \binom{n+p-2}{0} & \ldots & \binom{n+p-2}{p-2} \end{vmatrix}.$$

Ce qui, en développant par rapport à la première colonne, donne :

$$\Delta_{n,p} = \Delta_{n,p-1}.$$

D'où, par récurrence sur p :

$$\Delta_{n,p} = \Delta_{n,1} = 1.$$

24.16 On retranche la première ligne aux autres, alors :

$$D = \begin{vmatrix} s_1 & \ldots & \ldots & s_1 \\ 0 & s_2 - s_1 & \ldots & s_2 - s_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & s_2 - s_1 & \ldots & s_n - s_1 \end{vmatrix}$$

$$= s_1 \begin{vmatrix} s_2 - s_1 & \ldots & s_2 - s_1 \\ \vdots & & \vdots \\ s_2 - s_1 & \ldots & s_n - s_1 \end{vmatrix}.$$

Donc, par récurrence : $D = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2)\ldots(s_n - s_{n-1})$.

24.17 Dans un premier temps, on écrit :

$$D = \begin{vmatrix} \cos a_0 & \cos a_0 \cos(b) - \sin a_0 \sin(b) & \ldots & \cos(a_0 + nb) \\ \cos a_1 & \cos a_1 \cos(b) - \sin a_1 \sin(b) & \ldots & \cos(a_1 + nb) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos a_n & \cos a_n \cos(b) - \sin a_n \sin(b) & \ldots & \cos(a_n + nb) \end{vmatrix},$$

puis en utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la deuxième colonne, on trouve que :

$$D = \begin{vmatrix} \cos a_0 & \cos a_0 \cos b & \ldots & \cos(a_0 + nb) \\ \cos a_1 & \cos a_1 \cos b & \ldots & \cos(a_1 + nb) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos a_n & \cos a_n \cos b & \ldots & \cos(a_n + nb) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \cos a_0 & -\sin a_0 \sin b & \ldots & \cos(a_0 + nb) \\ \cos a_1 & -\sin a_1 \sin b & \ldots & \cos(a_1 + nb) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos a_n & -\sin a_n \sin b & \ldots & \cos(a_n + nb) \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant est nul, puisque les deux premières colonnes sont proportionnelles. On obtient alors :

$$D = -\sin b \begin{vmatrix} \cos a_0 & \sin a_0 & \dots & \cos(a_0+nb) \\ \cos a_1 & \sin a_1 & \dots & \cos(a_1+nb) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos a_n & \sin a_n & \dots & \cos(a_n+nb) \end{vmatrix}.$$

En réitérant ce procédé avec les autres colonnes, on trouve finalement :

$$D = (-1)^n \sin b \sin 2b \dots \sin nb \begin{vmatrix} \cos a_0 & \sin a_0 & \dots & \sin a_0 \\ \cos a_1 & \sin a_1 & \dots & \sin a_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \cos a_n & \sin a_n & \dots & \sin a_n \end{vmatrix}.$$

Donc :

- si $n \geqslant 2$, alors $D = 0$;
- si $n = 2$, alors $D = -\sin b \sin(a_1 - a_0)$.

24.18 En retranchant à chaque colonne (à l'exception de la première) la première colonne, on obtient :

$$\begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \dots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \dots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \dots & P(2n-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P(1) & \Delta(P)(2) & \dots & \Delta(P)(n) \\ P(2) & \Delta(P)(3) & \dots & \Delta(P)(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & \Delta(P)(n+1) & \dots & \Delta(P)(2n-1) \end{vmatrix}.$$

En itérant le procédé $n-1$ fois , on trouve :

$$D = \begin{vmatrix} P(1) & \Delta(P)(2) & \dots & \Delta^k(P)(k+1) & \dots & \Delta^{n-1}(P)(n) \\ P(2) & \Delta(P)(3) & \dots & \Delta^k(P)(k+2) & \dots & \Delta^{n-1}(P)(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P(n) & \Delta(P)(n+1) & \dots & \Delta^k(P)(k+n) & \dots & \Delta^{n-1}(P)(2n-1) \end{vmatrix}.$$

Or, si $Q \in \mathbb{K}[X]$, $\deg\big(\Delta(Q)\big) = \deg Q - 1$ si Q est non constant et $\Delta(Q) = 0$ sinon ; on en déduit que $\Delta^{\deg Q+1}(Q) = 0$. Donc $\Delta^{n-1}(P) = 0$ puisque $n-1 \geqslant k+1$.
La dernière colonne du déterminant étant nulle, celui-ci est nul.

24.19 On a $\operatorname{rg}(AB) \leqslant \operatorname{rg} A$ (voir par exemple l'exercice 35 de la page 1161).

Or $\operatorname{rg} A \leqslant p < n$ puisque $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, donc AB est une matrice carrée de taille n et de rang strictement inférieur à n, donc non inversible. On en déduit $\det(AB) = 0$.

24.20 $\mathbb{C}_n[X]$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n+1$.

$$\forall i \in [\![0,n]\!] \quad (X - z_i)^n = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} z_i^{n-j} X^j.$$

Le déterminant de la famille dans la base $(1, X, X^2 \ldots, X^n)$ est donc :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \binom{n}{0}(-z_0)^n & \binom{n}{0}(-z_1)^n & \ldots & \binom{n}{0}(-z_n)^n \\ \binom{n}{1}(-z_0)^{n-1} & \binom{n}{1}(-z_1)^{n-1} & \ldots & \binom{n}{1}(-z_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n} & \ldots & \binom{n}{n} \end{vmatrix}$$

$$= \binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{n} \begin{vmatrix} (-z_0)^n & (-z_1)^n & \ldots & (-z_n)^n \\ (-z_0)^{n-1} & (-z_1)^{n-1} & \ldots & (-z_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

On reconnaît un déterminant de Vandermonde, déterminant qui est non nul, puisque les z_i sont supposés distincts. La famille des $n+1$ polynômes est donc une famille libre de $\mathbb{C}_n[X]$, et donc une base de cet espace de dimension $n+1$.

24.21 Rappelons que :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

et que φ est la symétrie par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

En utilisant l'exercice 18 de la page 1242, on obtient alors que :

$\det(\varphi) = (-1)^{\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K})G} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

24.22 Ajoutons à la première ligne toutes les autres :

$$\det A(a) = (n+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1+a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1+a \end{vmatrix}.$$

Puis, en soustrayant la première ligne à toutes les autres, on obtient :

$$\det A(a) = (n+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & aI_{n-1} \end{vmatrix} = (n+a)a^{n-1}.$$

On en déduit que $A(a)$ est inversible si, et seulement si, $a \neq 0$ et $a \neq -n$.

Dans ce cas, on résout le système correspondant à $AX = Y$ où $X = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ et $Y = (y_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$.

Chacune des lignes de ce système s'écrit en fait : $ax_i + \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} y_j$.

On sait que ce système admet une unique solution qu'il s'agit de trouver. En reprenant les mêmes manipulations que celles ayant permis le calcul du déterminant, on trouve alors successivement :

$$(n+a)\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} y_j$$

et

$$a x_i = y_i - \frac{1}{n+a}\sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{n+a}\left((n+a-1)y_i + \sum_{j\neq i} y_i\right).$$

On en déduit que :

$$A(a)^{-1} = \frac{1}{a(n+a)}\begin{pmatrix} n-1+a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & n-1+a \end{pmatrix}.$$

24.23 1. Retranchons à la k-ième colonne i fois la $(n+k)$-ième pour $1 \leqslant k \leqslant n$. On obtient :

$$\det M = \begin{vmatrix} A+iB & -B \\ B-iA & A \end{vmatrix}.$$

Puis ajoutons à la $(n+k)$-ième ligne i fois la k-ième pour $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\det M = \begin{vmatrix} A+iB & -B \\ 0 & A-iB \end{vmatrix} = \det(A+iB)\,\det(A-iB).$$

2. Comme les matrices A et B sont à coefficients réels, les déterminants de $A+iB$ et $A-iB$ sont conjugués puisque $\det(A+iB) = \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{k=1}^{n}(a_{\sigma(k),k} + i b_{\sigma(k),k})$.

Donc, $\det M = \det(A+iB)\overline{\det(A+iB)} = \big|\det(A+iB)\big|^2 \geqslant 0$.

3. On suppose que A et B commutent. Alors :

$$(A+iB)\,(A-iB) = A^2 + i(AB-BA) + B^2 = A^2+B^2.$$

Donc, $\det M = \det(A^2+B^2)$. D'où le résultat.

4. On peut prendre par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$, $\quad |\lambda| > \frac{1}{2}$.

24.24 On trouve que la k-ième colonne de AM est égale à la k-ième colonne de M multipliée par $(a_1 + a_2\omega^{k-1} + \dots + a_n\omega^{(k-1)(n-1)})$, d'où :

$$\det(AM) = \prod_{k=0}^{n-1}(a_1 + a_2\omega^k + \dots + a_n\omega^{k(n-1)})\,\det(M).$$

Or, $\det M$ étant non nul (déterminant de Vandermonde), on en déduit que :

$$\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1}(a_1 + a_2\omega^k + \dots + a_n\omega^{k(n-1)}).$$

24.25 $PB = AP \Longrightarrow (R+iS)B = A(R+iS) \Longrightarrow RB = AR$ et $SB = AS$, donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad (R+tS)B = A(R+tS).$$

Supposons que, pour tout t dans $\mathbb{R}$, la matrice $R+tS$ soit non inversible.
Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \det(R+tS) = 0.$$

Or, $\det(R+tS) = \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1}\, x_{\sigma(2),2} \ldots x_{\sigma(n),n}$ où $x_{i,j}$ représentant le coefficient ligne i colonne j de $R+tS$ est un polynôme en t à coefficients complexes. On en déduit que $\det(R+tS)$ est un polynôme en t en tant que somme finie de produit de polynômes.

Or, $t \mapsto \det(R+tS)$ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. Le polynôme en t $\det R+tS)$ est donc identiquement nul.
Comme $\det(R+iS) \neq 0$ l'hypothèse est fausse.
Il existe donc $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $Q = R + t_0 S$ soit inversible.
On a alors $B = Q^{-1}AQ$ avec $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

24.26 Si les droites sont concourantes, soit (x,y) les coordonnées du point d'intersection. Il vérifie le système :

$$\begin{cases} u_1x + v_1y + h_1 = 0 \\ u_2x + v_2y + h_2 = 0 \\ u_3x + v_3y + h_3 = 0 \end{cases} ;$$

donc, le triplet non nul $(x,y,1)$ est solution du système :

$$\begin{cases} u_1x + v_1y + h_1z = 0 \\ u_2x + v_2y + h_2z = 0 \\ u_3x + v_3y + h_3z = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

qui n'est donc pas de Cramer. Une condition nécessaire est donc que :

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Si parmi les trois droites sont parallèles, alors leur direction commune est dirigée par un vecteur non nul de coordonnées (x,y). Le triplet $(x,y,0)$ est donc une solution non nulle du système $(*)$ et l'on aboutit donc à la même condition, à savoir $\Delta = 0$.

Montrons que c'est une condition suffisante. Supposons que $\Delta = 0$. Il existe alors un triplet (x,y,z) non nul solution du système :

$$\begin{cases} u_1x + v_1y + h_1z = 0 \\ u_2x + v_2y + h_2z = 0 \\ u_3x + v_3y + h_3z = 0. \end{cases}$$

Si $z = 0$, le vecteur (x,y) est non nul et appartient aux directions des 3 droites, qui sont, par conséquent, parallèles.
Sinon, le point $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$ appartient aux trois droites D_1, D_2 et D_3.
En conclusion, D_1, D_2 et D_3 sont concourantes ou parallèles si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0.$$

24.27 • Si A est inversible, alors la relation $A^t(\mathrm{Com}\, A) = (\det A)I_n$ donne :

$$\det A \det\big(\mathrm{Com}\, A\big) = \big(\det A\big)^n.$$

Comme $\det A \neq 0$, on obtient :

$$\det\big(\mathrm{Com}\, A\big) = \big(\det A\big)^{n-1}.$$

• Si A n'est pas inversible, alors ${}^t(\mathrm{Com}\, A)$ ne l'est pas non plus. En effet, supposons que ${}^t(\mathrm{Com}\, A)$ est inversible. La relation $A({}^t\mathrm{Com} A) = 0$ entraînerait $A = 0$, puis ${}^t\mathrm{Com}\, A = 0$, ce qui est contradictoire. Donc :

$$\det(\mathrm{Com}\, A) = 0 = (\det A)^{n-1}.$$

24.28 Supposons que X soit solution. Alors nécessairement X est inversible, en effet :

$$\mathrm{Com}(X)^t X = \det X\ I_n$$

donc si $\det X = 0$ alors $A^t X = 0$ donc ${}^t X = 0$ et $X = 0$ ce qui est impossible car $A = \mathrm{Com}(X)$ est inversible.
Alors :

$$X^{-1} = \frac{1}{\det X}\,{}^t A$$

donc :

$$\det X^{-1} = \frac{1}{\det X} = \frac{1}{(\det X)^n} \det A$$

d'où :

$$(\det X)^{n-1} = \det A$$

donc $\det X$ est solution de l'équation $x^{n-1} = \det A$ $(*)$.

• Si n est impair et $\det A < 0$, il n'y a aucune solution au problème.
• Si n est impair et $\det A > 0$, l'équation $(*)$ a deux solutions.
• Si n est pair, l'équation $(*)$ a une seule solution.

Supposons que l'on soit dans l'un des deux cas où l'équation $(*)$ admet au moins une solution.
Alors les solutions du problème, si elle existent sont de la forme $X = x\,{}^t A^{-1}$ ou x est solution de $(*)$.
Vérifions que ce sont bien des solutions :

$$\mathrm{Com}\, X = \mathrm{Com}\ x^t A^{-1} = x^{n-1}\,\mathrm{Com}({}^t A^{-1}) = x^{n-1}\det(A^{-1})A = A.$$

En conclusion :

• si n est impair et $\det A < 0$, il n'y a aucune solution au problème,
• si n est impair et $\det A > 0$, il y a deux solutions,
• si n est pair, il y a une seule solution.

Chapitre 25 : Espaces euclidiens

I	**Produit scalaire**	**1286**
1	Formes bilinéaires	1286
2	Produit scalaire	1287
3	Norme associée à un produit scalaire	1289
4	Formules de polarisation	1291
II	**Orthogonalité**	**1293**
1	Familles orthogonales et orthonormales	1293
2	Bases orthonormales	1297
III	**Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie**	**1298**
1	Supplémentaire orthogonal	1299
2	Projection orthogonale	1300
3	Distance à un sous-espace vectoriel	1302
Démonstrations et solutions des exercices du cours		**1303**
Exercices		**1312**

Espaces euclidiens

25

Dans tout le chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$–espace vectoriel.

I Produit scalaire

1 Formes bilinéaires

Les formes n-linéaires ont été définies au chapitre précédent. On rappelle la définition des formes bilinéaires ($n = 2$).

Définition 1

On appelle **forme bilinéaire** sur E, toute application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

1. pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ soit linéaire,
2. pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ soit linéaire.

Définition 2

On appelle **forme bilinéaire symétrique** sur E toute forme bilinéaire S sur E telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad S(x, y) = S(y, x).$$

Remarque Pour montrer qu'une forme est bilinéaire symétrique, il suffit de montrer la symétrie puis la linéarité par rapport à une des deux variables.

Exemples

1. La forme bilinéaire S définie sur $\mathbb{R}^n$ par :
$$S\big((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\big) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$
est symétrique.
2. Si E est de dimension 2, le déterminant dans une base $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ de E, noté $\det_{\mathbf{e}}$, est une forme bilinéaire non symétrique car :
$$\det_{\mathbf{e}}(e_1, e_2) = 1 \quad \text{et} \quad \det_{\mathbf{e}}(e_2, e_1) = -1.$$

p.1303

Exercice 1 Montrer que φ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si, et seulement s'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2 \quad \varphi(X,Y) = {}^tXAY$$

où l'on identifie ${}^tXAY$ avec son seul coefficient.

p.1303

Exercice 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que la forme bilinéaire φ de l'exercice précédent est symétrique si, et seulement si, la matrice A est symétrique.

Définition 3

Étant donné une forme bilinéaire φ sur E, on dit que :

- φ est **positive** si :
$$\forall x \in E \quad \varphi(x,x) \geqslant 0\,.$$
- φ est **définie positive** si, elle est positive et vérifie :
$$\forall x \in E \quad \varphi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0\,.$$

Remarque Si φ est une forme bilinéaire, alors $\varphi(0,0) = 0$. Ainsi, si φ est une forme bilinéaire, alors il y a équivalence entre :

$$\forall x \in E \quad \varphi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E \quad \varphi(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

2 Produit scalaire

Définition 4

On appelle **produit scalaire** sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E toute forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.

Notation

- Si φ est un produit scalaire et si $(x,y) \in E^2$, alors le réel $\varphi(x,y)$ est appelé le produit scalaire de deux éléments x et y de E ; il est noté généralement $(\,x \mid y\,)$, $\langle x \mid y \rangle$ ou $x.y$.
- En géométrie, on utilise souvent la notation $\vec{u}.\vec{v}$ pour désigner le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exemples

1. L'application :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x_1\,y_1 + x_2\,y_2 \end{array}$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. Il est appelé produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$.

L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3 \end{array}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$. Il est appelé produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

Plus généralement, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\,y_i \end{array}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Il est appelé **produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$**.

2. Dans un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathbf{e}$, on peut définir un produit scalaire en posant $(\,x \mid y\,) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i$, où x_1, $x_2, \ldots, x_n$ (respectivement y_1, $y_2, \ldots, y_n$) sont les composantes dans la base $\mathbf{e}$ du vecteur x (respectivement y).
3. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. L'application :

$$\varphi\;:\;(f,g) \mapsto \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

est un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. En effet :

- la commutativité du produit de fonctions implique que :

$$\forall (f,g) \in E^2 \quad \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

ce qui prouve la symétrie de φ ;

- par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\forall (f_1,f_2,g) \in E^3 \quad \forall (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\,g = \lambda_1 \int_a^b f_1 g + \lambda_2 \int_a^b f_2 g$$

ce qui prouve la linéarité de φ par rapport à la première variable ; la symétrie implique alors que φ est bilinéaire ;

- la positivité de l'intégrale donne :

$$\forall f \in E \quad \varphi(f,f) = \int_a^b f^2 \geqslant 0\;;$$

- enfin, soit $f \in E$ telle que $\varphi(f,f) = 0$. La fonction f^2 est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[a,b]$ ce qui implique sa nullité puis celle de f sur $[a,b]$.

p.1303

Exercice 3 Montrer que l'application :

$$\varphi\;:\;(f,g) \longmapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

est un produit scalaire sur l'espace vectoriel E des fonctions 2π−périodiques continues et de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

p.1303

Exercice 4 Montrer que l'application :
$$\varphi : (P,Q) \mapsto \int_0^1 P(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x$$
est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.

p.1304

Exercice 5 Montrer que l'application :
$$\varphi : (A,B) \mapsto (\,A \mid B\,) = \operatorname{Tr}\left({}^t\!AB\right)$$
est un produit scalaire sur $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Il est appelé produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

p.1304

Exercice 6 Soit S l'application définie, pour tout $(x,y,z,x',y',z') \in \mathbb{R}^6$, par :
$$S\left((x,y,z)(x',y',z')\right) = x\,x' + y\,y' + z\,z' + \frac{1}{2}(x\,y' + x'\,y + x\,z' + x'\,z + y\,z' + y'\,z).$$
Montrer que S est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

On pourra remarquer que, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :
$$S\big((x,y,z),(x,y,z)\big) = \left(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y + \frac{1}{3}z\right)^2 + \frac{2}{3}z^2.$$

Définition 5

On appelle **espace préhilbertien réel** un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Lorsque l'espace vectoriel est de dimension finie, on parle d'**espace vectoriel euclidien**.

Remarque Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $(\ \mid\ )$, alors l'application induite :
$$\begin{array}{ccc} F^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (\,x \mid y\,) \end{array}$$
est un produit scalaire sur F. On peut donc considérer F comme un espace préhilbertien réel pour ce produit scalaire qui, par abus, sera encore noté $(\ \mid\ )$.

3 Norme associée à un produit scalaire

Soit E un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $(\ \mid\ )$.

Définition 6

On appelle **norme euclidienne** associée au produit scalaire $(\ \mid\ )$ l'application :
$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\| = \sqrt{(\,x \mid x\,)}. \end{array}$$

Définition 7

On appelle **distance euclidienne** associée au produit scalaire $(\ |\ )$ l'application :

$$\begin{array}{rcl} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & \|x-y\|. \end{array}$$

Proposition 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

La norme euclidienne associée au produit scalaire $(\ |\ )$ vérifie :

1. $\forall (x,y) \in E^2 \quad \big|(\, x \mid y \,)\big| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$
2. Cette inégalité est une égalité si, et seulement si, x et y sont proportionnels, c'est-à-dire si, et seulement si :
$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad y = \lambda x \quad \text{ou} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad x = \lambda y.$$

Principe de démonstration. Si $y \neq 0$, considérer le discriminant de la fonction polynomiale :

$$P\ :\ \lambda \mapsto (\, x + \lambda y \mid x + \lambda y \,).$$

Démonstration page 1304

Exemples

1. Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit :
$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2}.$$
2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire sur $\mathcal{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ défini par :
$$(f,g) \mapsto (\, f \mid g \,) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$
s'écrit :
$$\left|\int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x)\, \mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Proposition 2

La norme euclidienne $\|\ \|$ associée au produit scalaire $(\ |\ )$ vérifie :

- $\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$ **(séparation)**
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \quad \|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|$ **(homogénéité)**
- $\forall (x,y) \in E^2 \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ **(Inégalité triangulaire)**

  avec égalité si, et seulement si, x et y sont positivement proportionnels, c'est-à-dire si, et seulement si :
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad y = \lambda x \qquad \text{ou} \qquad \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad x = \lambda y.$$

Démonstration page 1305

Remarques

- Plus généralement, on appelle **norme** sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :
  - $\forall x \in E \quad N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ **(séparation)**
  - $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \quad N(\lambda\, x) = |\lambda|\, N(x)$ **(homogénéité)**
  - $\forall (x, y) \in E^2 \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ **(Inégalité triangulaire)**
- La norme euclidienne associée à un produit scalaire est donc une norme.

Proposition 3 (Inégalité triangulaire inversée)

Si N est une norme sur E, alors :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y).$$

Démonstration page 1305

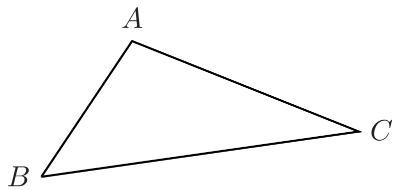
Proposition 4

Si E est muni d'un produit scalaire $(\ |\ )$, alors la distance euclidienne associée d vérifie pour tout $(x, y, z) \in E^3$:

- $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ **(séparation)**
- $d(x, y) = d(y, x)$ **(symétrie)**
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ **(inégalité triangulaire)**
- $d(x, z) \geqslant \big|d(x, y) - d(y, z)\big|$ **(inégalité triangulaire inversée)**

Démonstration page 1305

Remarque Dans un triangle ABC, les inégalités triangulaires se traduisent par exemple par $|AB - AC| \leqslant BC \leqslant AB + AC$.



Ainsi la longueur de chaque côté est comprise ente la différence et la somme des longueurs des deux autres côtés.

4 Formules de polarisation

La norme euclidienne d'un espace vectoriel préhilbertien est définie à partir du produit scalaire. Réciproquement, si l'on connaît la norme euclidienne, on peut retrouver le produit scalaire grâce aux égalités suivantes appelées **formules ou identités de polarisation**

Proposition 5 (Formules de polarisation)

Soit $(x,y) \in E^2$, on a :

- $2(\, x \mid y \,) = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$;
- $2(\, x \mid y \,) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2$;
- $4(\, x \mid y \,) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$.

Démonstration page 1305

Exemple Pour prouver que l'application :

$$\begin{array}{rccc} N : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+2xy+3y^2} \end{array}$$

définit une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$, on commence par vérifier que, pour tout $(x,y) \in E^2$, le réel :

$$x^2 + 2xy + 3y^2 = (x+y)^2 + 2y^2$$

est positif et ne peut être nul que si $(x,y) = (0,0)$.
Il faut alors exhiber le produit scalaire dont elle provient, produit scalaire qui, d'après la dernière identité de polarisation, ne peut être que l'application $S : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} \forall\,((x,y),(x',y')) \in E^2 \quad S((x,y),(x',y')) &= \frac{N(x+x',y+y')^2 - N(x-x',y-y')^2}{4} \\ &= x\,x' + x\,y' + y\,x' + 3y\,y'. \end{aligned}$$

Comme l'application S est une forme bilinéaire symétrique et que l'on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad S\big((x,y),(x,y)\big) = N(x,y)^2,$$

on en déduit que N est une norme euclidienne.

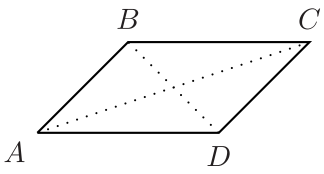
En additionnant les deux premières formules de polarisation, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 6 (Égalité du parallélogramme)

Soit $(x,y) \in E^2$, on a :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Remarque Cette égalité traduit le fait que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des deux diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés.



$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \\ &= 2\left(AB^2 + BC^2\right). \end{aligned}$$

II Orthogonalité

Soit E un espace préhilbertien réel muni de sa norme euclidienne $\| \ \|$ et de la distance d associées.

1 Familles orthogonales et orthonormales

Définition 8

On appelle vecteur **normé**, ou **unitaire**, tout vecteur de norme 1.

Définition 9

On dit que deux vecteurs x et y de E sont **orthogonaux** si $(x \mid y) = 0$. On note alors $x \perp y$.

Remarques

- Par symétrie du produit scalaire, si $(x \mid y) = 0$, alors $(y \mid x) = 0$. Ainsi, la relation d'orthogonalité est symétrique.
- Le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs.
- Si un vecteur x est orthogonal à lui même, alors :

  $$\|x\|^2 = (x \mid x) = 0$$

  ce qui prouve que x est nul.

  Ainsi, un vecteur est orthogonal à lui même si, et seulement s'il est nul.

Exemple Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, les vecteurs de la base canonique sont normés et orthogonaux deux à deux.

p.1306 **Exercice 7** Montrer que dans l'espace vectoriel des fonctions 2π–périodiques et continues sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire :

$$(f, g) \longmapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x,$$

les éléments $\sin$ et $\cos$ sont unitaires et orthogonaux.

Définition 10

On appelle **orthogonal** d'une partie A de E, l'ensemble :

$$A^{\perp} = \{x \in E \mid \forall a \in A \quad (a \mid x) = 0\}.$$

Proposition 7

L'orthogonal d'une partie de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration page 1306

Exemples

1. L'orthogonal de $\{0\}$ est E.
2. L'orthogonal de E est $\{0\}$. En effet :
   - 0 est orthogonal à tout élément de E,
   - si $x \in E^{\perp}$, alors $0 = (\, x \mid x\,) = \|x\|^2$, ce qui prouve que x est nul.
3. Soit $\vec{u} = (a, b)$ un vecteur non nul de IR^2 muni de son produit scalaire canonique et $D = \operatorname{Vect} \vec{u}$. Un vecteur (x, y) appartient à $D^{\perp}$ si, et seulement si, $ax + by = 0$. On a donc $D^{\perp} = \operatorname{Vect}(-b, a)$.
4. Soit $\vec{u} = (a, b, c)$ un vecteur non nul de IR^3 muni de son produit scalaire canonique et $D = \operatorname{Vect} \vec{u}$. Alors l'orthogonal de D est le plan d'équation $ax + by + cz = 0$.

Remarque Soit A est une partie de E.
Si, pour tout $a \in A$, on note $\varphi_a : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathrm{IR} \\ x & \longmapsto & (\, a \mid x\,) \end{array}$, alors on a :

$$A^{\perp} = \bigcap_{a \in A} \operatorname{Ker} \varphi_a;$$

ce qui permet de redémontrer rapidement que $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel.

Proposition 8

Si A et B sont deux parties de E, alors on a :

$$A \subset B \Longrightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}.$$

Démonstration page 1306

p.1306 **Exercice 8** Soit a un vecteur non nul de E. Montrer que l'orthogonal H de $\{a\}$ est un hyperplan.

Proposition 9

Étant donné une partie A de E, alors $A^{\perp} = (\operatorname{Vect} A)^{\perp}$.

Démonstration page 1306

Définition 11

- On appelle **famille orthogonale** de E toute famille de vecteurs de E deux à deux orthogonaux.
- On appelle **famille orthonormale** (ou **orthonormée**) de E toute famille de vecteurs de E normés et deux à deux orthogonaux.

Exemple Dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique est une famille orthonormale.

p.1307

Exercice 9 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π–périodiques sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire :

$$(f,g) \longmapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x,$$

Montrer que les fonctions définies par $f_0 \ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f_k \ :\ x \mapsto \cos(kx) \quad \text{et} \quad g_k \ :\ x \mapsto \sin(kx)$$

forment une famille orthonormale

Proposition 10

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.

En particulier, toute famille orthonormale de E est libre.

Démonstration page 1307

Remarque Une famille de vecteurs (orthogonaux) n'est pas libre si elle contient le vecteur nul. L'hypothèse de non nullité est donc fondamentale.

Proposition 11 (Théorème de Pythagore)

Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si, et seulement si, l'on a :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration. Conséquences de la proposition 5 de la page 1292 et de la définition de l'orthogonalité. □

Remarque On retrouve le résultat bien connu suivant : trois points A, B et C forment un triangle rectangle en A si, et seulement si :

$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2.$$

Proposition 12

Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, on a :

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Démonstration page 1307

Théorème 13 (Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt)

Soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille libre de E. Alors il existe une famille orthonormale $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ de E telle que :

$$\forall p \in [\![1, n]\!] \quad \operatorname{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_p\} = \operatorname{Vect}\{f_1, f_2, \dots, f_p\}.$$

Démonstration. Construisons la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ par récurrence.

- Le vecteur $f_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ est normé et colinéaire à e_1 donc la propriété est vraie pour $p = 1$.
- Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. Supposons construite une famille orthonormale $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ telle que :

  $$\forall k \in [\![1, p]\!] \quad \operatorname{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_k\} = \operatorname{Vect}\{f_1, f_2, \dots, f_k\}.$$

  Comme $\operatorname{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_p\} = \operatorname{Vect}\{f_1, f_2, \dots, f_p\}$, tout vecteur de $\operatorname{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_{p+1}\}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de f_1, $f_2, \dots, f_p$ et e_{p+1}.

  Cherchons donc g_{p+1} orthogonal à f_1, $f_2, \dots, f_p$ sous la forme :

  $$g_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i.$$

  Le vecteur g_{p+1} répond au problème si :

  $$\forall j \in [\![1, p]\!] \quad (f_j \mid g_{p+1}) = (f_j \mid e_{p+1}) - \lambda_j = 0.$$

  En posant :

  $$g_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} (f_i \mid e_{p+1}) f_i.$$

  on obtient un vecteur orthogonal à f_1, $f_2, \dots, f_p$ et appartenant à $\operatorname{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_{p+1}\}$.

  Le vecteur g_{p+1} est non nul puisque :

  $$e_{p+1} \notin \operatorname{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_p\} = \operatorname{Vect}\{f_1, f_2, \dots, f_p\}$$

  et l'on peut donc le normer en posant $f_{p+1} = \dfrac{g_{p+1}}{\|g_{p+1}\|}$.

  La famille $(f_1, f_2, \dots, f_{p+1})$ est alors une famille orthonormale (donc libre) de $p+1$ vecteurs de $\operatorname{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_{p+1}\}$. Elle en est donc une base et l'on a :

  $$\operatorname{Vect}\{f_1, f_2, \dots, f_{p+1}\} = \operatorname{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_{p+1}\}.$$

La propriété est donc prouvée par récurrence. □

Point méthode

Le procédé de construction de la démonstration précédente est le suivant :

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \qquad \text{et} \qquad \forall i \geqslant 2 \quad f_i = \frac{e_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} (e_i \mid f_k) f_k}{\left\| e_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} (e_i \mid f_k) f_k \right\|}.$$

On l'appelle **l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt**.

Remarques

- L'algorithme présenté est souvent privilégié car, à partir d'une famille libre $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E, il donne une famille orthonormale $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ telle que, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$:
$$(\, e_p \mid f_p \,) > 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Vect}\{e_1, e_2, \ldots, e_p\} = \operatorname{Vect}\{f_1, f_2, \ldots, f_p\}\,.$$
En effet, si pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on note $g_p = e_p - \sum\limits_{k=1}^{p-1} (\, e_p \mid f_k \,)\, f_k$, on a $f_p = \frac{g_p}{\|g_p\|}$ et donc $0 < (\, f_p \mid g_p \,) = (\, f_p \mid e_p \,)$ par orthogonalité de f_p avec $f_1, \ldots, f_{p-1}$.

  Nous verrons dans l'exercice 12 de la page 1299 que c'est la seule famille orthonormale qui vérifie ces conditions.
- Si les premiers vecteurs de la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ forment une famille orthonormale, alors il est immédiat de voir que ce procédé les conserve.
- On peut facilement généraliser le résultat au cas d'un famille infinie indexée par $\mathbb{N}$: si $\mathcal{F} = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille libre de E, alors il existe une famille orthonormale $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E telle que :
$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \operatorname{Vect}\{e_0, e_1, \ldots, e_p\} = \operatorname{Vect}\{f_0, f_1, \ldots, f_p\}\,.$$

2 Bases orthonormales

Soit E un espace euclidien de dimension n.

Définition 12

On appelle **base orthonormale** (ou **base orthonormée**) de E toute base de E qui est une famille orthonormale.

Proposition 14

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Il existe alors une base orthonormale $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ de E telle que :
$$\forall p \in [\![1, n]\!] \quad \operatorname{Vect}\{e_1, e_2, \ldots, e_p\} = \operatorname{Vect}\{f_1, f_2, \ldots, f_p\}\,.$$

Démonstration. la famille obtenue par l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt est orthonormale donc libre et possède n éléments dans un espace vectoriel E de dimension n. C'est donc une base de E. □

Corollaire 15

Tout espace euclidien possède une base orthonormale.

Démonstration. Conséquence du fait que tout espace vectoriel de dimension finie admette une base et de la proposition précédente. □

Proposition 16

Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E.

Démonstration page 1308

p.1308 **Exercice 10** Soit $\mathbf{e}$ une base d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathbf{e}'$ de E telle que la matrice de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{e}'$ soit triangulaire supérieure.

p.1308 **Exercice 11** Construire une base orthonormale (f_1, f_2, f_3) de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire de l'exercice 6 de la page 1289 :

$$\big(\,(x,y,z)\,|\,(x',y',z')\,\big) = x\,x' + y\,y' + z\,z' + \frac{1}{2}(x\,y' + x'\,y + x\,z' + x'\,z + y\,z' + y'\,z).$$

Proposition 17

Soit $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

1. Si x est un vecteur de E, alors on a $x = \sum_{i=1}^{n} (\,e_i \mid x\,)\,e_i$.
2. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\,e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i\,e_i$ sont deux vecteurs de E, alors on a :
$$(\,x \mid y\,) = \sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i = {}^t\!XY \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = {}^t\!XX,$$
où X et Y sont les matrices colonnes constituées des composantes dans la base $\mathbf{e}$ des vecteurs x et y.

Démonstration page 1308

Remarque Soit $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

- L'application qui associe, à un vecteur de E, ses composantes dans la base $\mathbf{e}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E sur $\mathbb{R}^n$.
- Si l'on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, cet isomorphisme conserve la norme et le produit scalaire.

III Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Soit E un espace vectoriel préhilbertien muni de sa norme euclidienne $\|\ \|$ et de la distance d associée.

1 Supplémentaire orthogonal

Définition 13

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **orthogonaux** si :

$$\forall (x,y) \in F \times G \quad (\, x \mid y \,) = 0,$$

c'est-à-dire si $F \subset G^{\perp}$, ce qui est équivalent à $G \subset F^{\perp}$.

Remarque Si F est un sous-espace vectoriel de E, les sous-espaces vectoriels F et $F^{\perp}$ sont orthogonaux, puisque par définition les éléments de $F^{\perp}$ sont orthogonaux à tous les éléments de F.

Proposition 18

Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires. Le sous-espace vectoriel $F^{\perp}$ est appelé **le supplémentaire orthogonal** de F.

Principe de démonstration. Raisonner par analyse-synthèse. Démonstration page 1308

Attention

Soit E de dimension finie. Un sous-espace vectoriel F de E n'admet, en général, pas un unique supplémentaire. En revanche, il admet un unique supplémentaire orthogonal. On écrit parfois $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$.

Proposition 19

Si F est un sous-espace vectoriel de E et si E est de dimension finie, alors :

1. $\dim F^{\perp} + \dim F = \dim E$,
2. $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Principe de démonstration. Pour le deuxième point, montrer l'inclusion évidente puis raisonner sur les dimensions. Démonstration page 1309

Exemple En dimension finie, le supplémentaire orthogonal d'un hyperplan est donc une droite, et le supplémentaire orthogonal d'une droite, un hyperplan.

p.1309 **Exercice 12** Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille libre de E et deux familles orthonormales $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ et $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ de E telles que :

$$\forall p \in [\![1,n]\!] \quad \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_p) = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, \dots, f_p) = \mathrm{Vect}\,(g_1, g_2, \dots, g_p)$$

et :

$$\forall p \in [\![1,n]\!] \quad (\, e_p \mid f_p \,) > 0 \quad \text{et} \quad (\, e_p \mid g_p \,) > 0.$$

Montrer que les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont égales.

Proposition 20

Soit E de dimension finie n et $p \in [\![0, n]\!]$.

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E, alors $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ sont des bases orthonormales de deux supplémentaires orthogonaux.
- Soit F un sous-epace vectoriel de E. Si F et $F^\perp$ admettent respectivement $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ comme bases orthonormales, alors la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

Démonstration. Identique à celle de la proposition 13 de la page 1098, les conditions d'orthogonalité étant évidentes. □

p.1310

Exercice 13 Soit f une forme linéaire sur un espace euclidien E. Montrer qu'il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E \quad f(x) = (\, a \mid x \,).$$

2 Projection orthogonale

Définition 14

Soit F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On appelle **projection orthogonale** sur F, la projection sur F parallèlement à son supplémentaire orthogonal $F^\perp$.

L'image d'un vecteur x par cette projection est appelée le **projeté orthogonal** de x sur F.

Proposition 21

Soit $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base orthonormale d'un sous-espace vectoriel F de E. Le projeté orthogonal sur F d'un vecteur x de E est :

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{p} (\, e_i \mid x \,)\, e_i.$$

Démonstration page 1310

Exemples

- Si a est un vecteur **normé**, la proposition précédente nous donne l'expression de la projection orthogonale π sur la droite vectorielle engendrée par a :

$$\pi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\, x \mid a \,)\, a. \end{array}$$

Si le vecteur a n'est pas normé, on utilise le vecteur $\dfrac{a}{\|a\|}$ pour obtenir :

$$\forall x \in E \quad \pi(x) = \left(x \,\middle|\, \frac{a}{\|a\|} \right) \frac{a}{\|a\|} = \frac{(\, x \mid a \,)}{\|a\|^2}\, a.$$

Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (respectivement $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$) sont les composantes de x (respectivement de a) dans une base orthonormale $\mathbf{e}$, on a :

$$\pi(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\, x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}\, a.$$

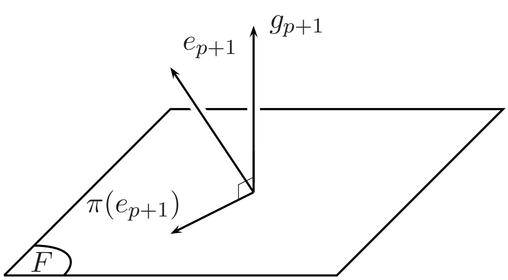
- Si H est un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors il existe un vecteur non nul a tel que $H^\perp = \mathbb{R}a$. On a donc $Id_E = p_H + p_{\mathbb{R}a}$. Pour obtenir la projection orthogonale sur H d'un vecteur, il suffit donc de lui retirer sa projection orthogonale sur $H^\perp$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E \quad p_H(x) = x - \frac{(\, a \mid x \,)}{(\, a \mid a \,)}\, a.$$

- De façon général, si F et $F^\perp$ sont supplémentaires alors $Id_E = p_F + p_{F^\perp}$. Ainsi, si on connaît p_F, alors on connaît $p_{F^\perp}$.

Remarque Dans le procédé d'orthonormalisation de Schmidt , on construit le vecteur :

$$g_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, f_i \quad \text{avec} \quad \lambda_i = (\, f_i \mid e_{p+1} \,).$$



On obtient donc le vecteur g_{p+1} en retranchant à e_{p+1} sa projection orthogonale sur $F = \operatorname{Vect}\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$. Pour normer le vecteur g_{p+1}, il suffit alors d'appliquer le théorème de Pythagore aux vecteurs orthogonaux $\pi(e_{p+1})$ et g_{p+1}. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \|g_{p+1}\|^2 &= \|e_{p+1}\|^2 - \|\pi(e_{p+1})\|^2 \\ &= \|e_{p+1}\|^2 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2. \end{aligned}$$

Proposition 22

Si F est un sous espace vectoriel de dimension finie engendrée par une famille quelconque $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ et x un vecteur de E, alors :

$$\forall y \in F \quad y = p_F(x) \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!] \quad (\, x - y \mid e_i \,) = 0$$

Point méthode

La proposition précédente permet de trouver le projeté orthogonal d'un vecteur x sur un sous-espace vectoriel F de dimension finie sans avoir à déterminer une base orthonormale de F. Il suffit de résoudre le système obtenu en traduisant les égalités $(x - y \mid e_i) = 0$ sur les coordonnées de y.

Lorsque l'on dispose d'une base orthonormale (ou plus généralement orthogonale) ce système est plus simple puisque diagonal mais il ne faut pas oublier que l'obtention d'une base orthogonale peut être longue.

p.1310 **Exercice 14** Déterminer la projection orthogonale du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire :

$$\varphi : (P,Q) \mapsto \int_0^1 P(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

3 Distance à un sous-espace vectoriel

Définition 15

Soit $\mathcal{X}$ une partie non vide de E et A un point de E. On appelle **distance** de A à $\mathcal{X}$ la quantité :

$$d(A,\mathcal{X}) = \inf_{M\in\mathcal{X}} d(A,M).$$

L'existence de cette quantité $d(A,\mathcal{X})$ vient du fait que $\{d(A,M)\,;\ M \in \mathcal{X}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par zéro.

Proposition 23

Soit F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E ainsi que p_F la projection orthogonale sur F et x un vecteur de E. La distance du vecteur x à F est atteinte en un unique point de F, à savoir $p_F(x)$. Autrement dit :

1. $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$;
2. $\forall y \in E \quad d(x,F) = \|x-y\| \iff y = p_F(x)$.

Démonstration page 1311

p.1311 **Exercice 15** Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2\,\mathrm{d}x$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$. L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_{n,1}(\mathrm{IR}))^2 & \longrightarrow & \mathrm{IR} \\ (X,Y) & \longmapsto & {}^tXAY \end{array}$ est clairement une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathrm{IR})$.

Réciproquement, soit φ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathrm{IR})$. Si l'on note $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathrm{IR})$, alors pour tout $X = \sum\limits_{i=1}^n x_iE_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathrm{IR})$ et tout $Y = \sum\limits_{j=1}^n y_jE_j \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathrm{IR})$, on a :

$$\varphi(X,Y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_iE_i, \sum_{j=1}^n y_jE_j\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_j\varphi(E_i,E_j).$$

Ainsi, en posant $A = \big(\varphi(E_i,E_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$, on obtient :

$${}^tXAY = \sum_{i=1}^n x_i(AY)_i = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n \varphi(E_i,E_j)y_j = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_j\varphi(E_i,E_j) = \varphi(X,Y).$$

Exercice 2

- Si A est symétrique, alors on a, pour tout $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathrm{IR}))^2$:

$$\begin{aligned} \varphi(Y,X) &= {}^tYAX \\ &= {}^t\big({}^tYAX\big) && \text{puisque } {}^tYAX \in \mathcal{M}_1(\mathrm{IR}) \\ &= {}^tX\,{}^tAY \\ &= \varphi(X,Y) && \text{puisque } A \text{ est symétrique} \end{aligned}$$

  et donc φ est une forme bilinéaire symétrique.

- Réciproquement, supposons que φ soit une forme bilinéaire symétrique.
  Notons $(E_1,E_2,\ldots,E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathrm{IR})$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
  On a :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \quad a_{i,j} = \varphi(E_i,E_j) = \varphi(E_j,E_i) = a_{j,i}\,.$$

  Donc la matrice A est symétrique.

Exercice 3 Le fait que φ soit une forme bilinéaire positive se montre de la même façon que dans l'exemple précédent.

Soit $f \in E$ telle que $\varphi(f,f) = 0$. La fonction f^2 est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,2\pi]$ ce qui implique sa nullité puis celle de f sur $[0,2\pi]$. Comme f est 2π-périodique, on en déduit que f est nulle.

Exercice 4 Le fait que φ soit une forme bilinéaire positive se montre de la même façon que dans l'exemple précédent.

Soit $P \in E$ tel que $\varphi(P,P) = 0$. La fonction polynomiale $x \mapsto P^2(x)$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$ ce qui implique sa nullité sur $[0,1]$. Le polynôme P a donc une infinité de racines, ce qui prouve sa nullité.

Exercice 5 La forme φ est symétrique car :

$$\forall (A,B)\in E^2 \quad \operatorname{Tr}\left({}^t\!AB\right) = \operatorname{Tr}\left({}^t\left({}^t\!AB\right)\right) = \operatorname{Tr}\left({}^t\!BA\right).$$

La linéarité de la trace et la bilinéarité du produit matriciel implique la bilinéarité de φ.

Enfin, soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}\in E$ alors :

$$\operatorname{Tr}\left({}^t\!AA\right) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} a_{i,j}^2 \geqslant 0$$

avec égalité si, et seulement si, la matrice A est nulle.

Exercice 6 Il est facile de montrer que S est une forme bilinéaire symétrique. De plus, pour tout $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} S\big((x,y,z),(x,y,z)\big) &= x^2+y^2+z^2+x\,y+x\,z+y\,z \\ &= \left(x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y^2+z^2\right) + \frac{yz}{2} \\ &= \left(x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y+\frac{1}{3}z\right)^2 + \frac{2}{3}z^2 \end{aligned}$$

qui est positif et ne peut être nul que si $z=y=x=0$.

Proposition 1

1. • Si $y=0$, l'inégalité est évidente (c'est une égalité).
   • Sinon, on considère la fonction polynomiale :

   $$\begin{array}{rccl} P: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \lambda & \longmapsto & (\,x+\lambda\,y \mid x+\lambda\,y\,) = \lambda^2\,(\,y\mid y\,) + 2\lambda\,(\,x\mid y\,) + (\,x\mid x\,). \end{array}$$

   Alors P est une fonction polynomiale de degré 2 (puisque $(\,y\mid y\,)>0$) vérifiant :

   $$\forall \lambda\in\mathbb{R}\quad P(\lambda)\geqslant 0.$$

   Son discriminant :

   $$\Delta = 4(\,x\mid y\,)^2 - 4(\,x\mid x\,)(\,y\mid y\,) = 4\left[(\,x\mid y\,)^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2\right]$$

   est donc négatif ou nul, ce qui donne l'inégalité annoncée.
2. • Si x et y sont proportionnels, il existe un réel λ tel que $y=\lambda\,x$ ou $x=\lambda\,y$. Les vecteurs x et y jouant des rôles symétriques, on peut supposer que $y=\lambda\,x$. Alors :

   $$(\,x\mid y\,)^2 = (\,x\mid \lambda\,x\,)^2 = \lambda^2\,(\,x\mid x\,)^2 = (\,x\mid x\,)(\,y\mid y\,).$$

   • Réciproquement, supposons $(\,x\mid y\,)^2 = (\,x\mid x\,)(\,y\mid y\,)$.
   * Si $y=0$, alors x et y sont proportionnels.
   * Sinon, le discriminant Δ est nul. Il existe donc un scalaire λ tel que $P(\lambda)=0$. On a alors :

     $$(\,x+\lambda\,y\mid x+\lambda\,y\,)=0.$$

     Par définition du produit scalaire, on en déduit $x+\lambda\,y=0$ et donc que x est proportionnel à y.

Proposition 2

- Soit $x \in E$. On a :
$$\|x\| = 0 \Longrightarrow (\, x \mid x \,) = 0 \Longrightarrow x = 0.$$
- Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par bilinéarité du produit scalaire, on a :
$$(\, \lambda\, x \mid \lambda\, x \,) = \lambda (\, x \mid \lambda\, x \,) = \lambda^2 (\, x \mid x \,)$$
et donc $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|$.
- Soit $(x, y) \in E^2$. On a :
$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (\, x+y \mid x+y \,)\\ &= (\, x \mid x \,) + 2(\, x \mid y \,) + (\, y \mid y \,)\\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\, |(\, x \mid y \,)|\\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\, \|y\| \quad \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.}\end{aligned}$$
D'où $\|x+y\|^2 \leqslant \big(\|x\| + \|y\|\big)^2$; et, comme il s'agit de réels positifs, $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
- L'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si :
$$(\, x \mid y \,) = |(\, x \mid y \,)| = \|x\|\, \|y\|$$
donc si, et seulement si, les vecteurs x et y sont liés et ont un produit scalaire positif c'est-à-dire si, et seulement si, les vecteurs x et y sont positivement liés.

Proposition 3 Pour $(x, y) \in E^2$, on a :
$$N(x) = N\left((x-y) + y\right) \leqslant N(x-y) + N(y)$$
donc $N(x) - N(y) \leqslant N(x-y)$. En échangeant les rôles joués par x et y, on a :
$$N(y) - N(x) \leqslant N(y-x) = N(x-y)$$
d'où le résultat.

Proposition 4 Soit $(x, y, z) \in E^3$. On a :

- $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \|x-y\| = 0 \Longleftrightarrow x - y = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
- $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = \|y-x\| = d(y,x)$,
- $d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y) + (y-z)\| \leqslant \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)$.
- $d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y) + (y-z)\| \geqslant \big|\|x-y\| - \|y-z\|\big| = \big|d(x,y) - d(y,z)\big|$.

Proposition 5 Soit $(x, y) \in E^2$.

- On a :
$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (\, x+y \mid x+y \,)\\ &= (\, x \mid x \,) + (\, x \mid y \,) + (\, y \mid x \,) + (\, y \mid y \,)\\ &= (\, x \mid x \,) + 2(\, x \mid y \,) + (\, y \mid y \,).\end{aligned}$$
- On applique l'égalité précédente à x et $-y$.
- On somme les égalités précédentes.

Exercice 7

- La formule de trigonométrie :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x),$$
donne :
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{2\pi} = 1,$$
ce qui prouve que $\sin$ est unitaire.
- La formule de trigonométrie :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
permet d'en déduire que $\cos$ est unitaire.
- La formule de trigonométrie :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2\cos x \sin x = \sin(2x),$$
donne :
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos x \sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4\pi}\left[\cos(2x)\right]_0^{2\pi} = 0.$$
Pour prouver la nullité de l'intégrale précédente, on aurait aussi pu remarquer que la fonction à intégrer est 2π-périodique donc son intégrale sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ est égale à celle sur $[-\pi, \pi]$ qui est nulle par imparité.

Proposition 7 Soit A une partie de E.

- La partie $A^\perp$ contient le vecteur nul puisqu'il est orthogonal à tout élément de A.
- Soit x et y deux éléments de $A^\perp$, ainsi que λ et μ deux scalaires. Pour tout $a \in A$, on a :
$$(\, a \mid \lambda x + \mu y\,) = \lambda(\, a \mid x\,) + \mu(\, a \mid y\,) = 0$$
et donc $\lambda x + \mu y \in A^\perp$.

Par suite, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 8 Supposons que $A \subset B$.

Soit $b \in B^\perp$. Pour tout $a \in A$, on a $a \in B$ donc $(\, a \mid b\,) = 0$. Ainsi, $b \in A^\perp$.

Par suite, $B^\perp \subset A^\perp$.

Exercice 8 Un vecteur appartient à H si, et seulement s'il est orthogonal au vecteur a. Le sous-espace vectoriel H est donc le noyau de la forme linéaire non nulle $\varphi_a : x \mapsto (\, a \mid x\,)$; par suite, il s'agit d'un hyperplan.

Proposition 9

- Comme $A \subset \operatorname{Vect} A$, on a déjà $(\operatorname{Vect} A)^\perp \subset A^\perp$.
- Soit $x \in A^\perp$. Pour tout $y \in \operatorname{Vect} A$, il existe des éléments $a_1, \ldots, a_p$ de A et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i$. Par bilinéarité du produit scalaire, on a donc :
$$(\, x \mid y\,) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (\, x \mid a_i\,) = 0,$$
ce qui prouve que $x \in (\operatorname{Vect} A)^\perp$. Ainsi, $A^\perp \subset (\operatorname{Vect} A)^\perp$ et donc $A^\perp = (\operatorname{Vect} A)^\perp$.

Exercice 9

- On a $\|f_0\|^2 = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{x}{2}\right]_0^{2\pi} = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\|f_k\|^2 = \frac{1}{2\pi}\left[x + \frac{\sin(2kx)}{2k}\right]_0^{2\pi} = 1 \qquad \text{et} \qquad \|g_k\|^2 = \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{\sin(2kx)}{2k}\right]_0^{2\pi} = 1$$

ce qui prouve que la famille est composée de vecteurs unitaires.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(\, f_0 \mid f_k \,) = \frac{1}{\sqrt{2}k\pi}[\sin(kx)]_0^{2\pi} = 0 \qquad \text{et} \qquad (\, f_0 \mid g_k \,) = -\frac{1}{\sqrt{2}k\pi}[\cos(kx)]_0^{2\pi} = 0.$$

Pour tout $(k, k') \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $k \neq k'$, on a :

$$\begin{aligned}(\, f_k \mid f_{k'} \,) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos((k+k')x) + \cos((k-k')x)) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((k+k')x)}{k+k'} + \frac{\sin((k-k')x)}{k-k'}\right]_0^{2\pi} = 0,\end{aligned}$$

et, de même :

$$(\, g_k \mid g_{k'} \,) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((k-k')x)}{k-k'} - \frac{\sin((k+k')x)}{k+k'}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Enfin, pour tout $(k, k') \in (\mathbb{N}^*)^2$, la fonction $f_k g_{k'}$ est 2π-périodique donc le produit scalaire $(\, f_k \mid g_{k'} \,)$ est égal à l'intégrale sur $[-\pi, \pi]$ de la fonction impaire $f_k g_{k'}$, ce qui implique sa nullité.

Par suite, la famille est orthogonale.

Proposition 10 Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ une famille de réels telle que $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \,\middle|\, e_k\right) = \lambda_k \|e_k\|^2 = 0.$$

Comme le vecteur e_k est non nul, on en déduit $\lambda_k = 0$. Donc la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre.

Comme une famille orthonormale est orthogonale et composée de vecteurs non nuls, elle est donc libre.

Proposition 12 Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (\, x_i \mid x_j \,) = \sum_{i=1}^{n} (\, x_i \mid x_i \,)$$

puisque si $i \neq j$, alors $(\, x_i \mid x_j \,) = 0$.

Proposition 16 Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille orthonormale de E. Cette famille est donc libre ce qui permet de la compléter en une base $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.

Soit $\mathbf{e}' = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ la base orthonormale obtenue à partir de la base $\mathbf{e}$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Alors :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad f_i = e_i$$

car les vecteurs $(e_1, \ldots, e_p)$ forment une famille orthonormale. Par conséquent, on a complété la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ en une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_p, f_{p+1}, \ldots, f_n)$.

Exercice 10 Soit $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathbf{e}' = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ la base orthonormale obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Alors :

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad e_j \in \operatorname{Vect}\{f_1, f_2, \ldots, f_j\}.$$

Si l'on note $P = (P_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{e}'$, on en déduit que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad i > j \Longrightarrow P_{i,j} = 0$$

c'est-à-dire que la matrice P est triangulaire supérieure.

Exercice 11 On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$, ce qui donne :

$$f_1 = (1, 0, 0), \qquad f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 2, 0) \qquad \text{et} \qquad f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 3).$$

Proposition 17

1. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Comme la base $\mathbf{e}$ est orthonormale, la linéarité à droite du produit scalaire donne :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad (\, e_i \mid x \,) = \left(e_i \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right) = x_i$$

   Donc $x = \sum_{i=1}^{n} (\, e_i \mid x \,)\, e_i$.

2. Soit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i\, e_i$ deux vecteurs de E. Comme la base $\mathbf{e}$ est orthonormale, la bilinéarité du produit scalaire donne :

$$(\, x \mid y \,) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\, e_i \mid e_j \,) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = {}^t X Y$$

   et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = {}^t X X$.

Proposition 18 Soit $x \in E$. Montrons qu'il existe un unique couple $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$. Pour cela, raisonnons par analyse-synthèse.

- Analyse : supposons qu'il existe $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$. Comme F est de dimension finie, il possède une base orthonormale $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$.

Comme $z \in F^{\perp}$, on a :

$$\forall i \in [\![1,p]\!] \quad (\, e_i \mid z\,) = 0 = (\, e_i \mid x-y\,) = (\, e_i \mid x\,) - (\, e_i \mid y\,).$$

Comme la base **e** est orthonormale, on a donc :

$$y = \sum_{i=1}^{p} (\, e_i \mid y\,)\, e_i = \sum_{i=1}^{p} (\, e_i \mid x\,)\, e_i \quad \text{et} \quad z = x - y = x - \sum_{i=1}^{p} (\, e_i \mid x\,)\, e_i.$$

Ainsi, si un tel couple (y,z) existe, il est unique.

- Synthèse : si l'on pose $y = \sum\limits_{i=1}^{p} (\, e_i \mid x\,)\, e_i$ et $z = x - y$, alors $x = y + z$, $y \in F$ et

$$\forall i \in [\![1,p]\!] \quad (\, e_i \mid z\,) = (\, e_i \mid x-y\,) = (\, e_i \mid x\,) - (\, e_i \mid y\,) = 0$$

  donc $z \in F^{\perp}$.

Par suite, les sous-espaces vectoriels F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.

Proposition 19

1. Conséquence du fait que F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.
2. Par définition, tout élément de F est orthogonal à tout élément de $F^{\perp}$ ce qui prouve que $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$. Comme :

$$\dim (F^{\perp})^{\perp} = \dim E - \dim F^{\perp} = \dim F,$$

   on en déduit que $F = (F^{\perp})^{\perp}$.

Exercice 12

On remarque que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$ est de dimension k.

Soit $p \in [\![1,n]\!]$. Dans l'espace euclidien :

$$F = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p) = \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_p) = \mathrm{Vect}(g_1,\dots,g_p),$$

les vecteurs f_p et g_p sont orthogonaux à l'hyperplan :

$$\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{p-1}) = \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_{p-1}) = \mathrm{Vect}(g_1,\dots,g_{p-1}).$$

Ils appartiennent donc à une même droite. Les vecteurs f_p et g_p étant normés, on en déduit que $f_p = \pm g_p$. Les conditions $(\, e_p \mid f_p\,) > 0$ et $(\, e_p \mid g_p\,) > 0$ impliquent alors que $f_p = g_p$.

Les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont donc égales.

Ainsi, on a montré qu'il existe une unique famille orthonormale $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ de E, celle donnée par le point méthode de la page 1296, telle que :

$$\forall p \in [\![1,n]\!] \quad \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_p) = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, \dots, f_p)$$

et :

$$\forall p \in [\![1,n]\!] \quad (\, e_p \mid f_p\,) > 0.$$

Exercice 13 Fixons une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de E.

On raisonne par analyse-synthèse.

- Si le vecteur $a = \sum_{i=1}^{n} a_i\, e_i$ convient, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :
$$f(e_i) = (\, a \mid e_i\,) = a_i$$
donc $a = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, e_i$. L'unicité est donc assurée sous réserve d'existence

- Si l'on pose $a = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, e_i$, alors, pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$:
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = (\, a \mid x\,).$$

Proposition 21 Soit x un vecteur de E et $\pi(x)$ son projeté orthogonal sur F. Décomposons $\pi(x)$ dans la base $\mathbf{e}$:
$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, e_i.$$
Comme $x - \pi(x) \in F^{\perp}$, on en déduit :
$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad (\, e_i \mid x\,) = (\, e_i \mid \pi(x)\,) = \lambda_i,$$
ce qui donne le résultat.

Exercice 14 On cherche le projeté orthogonal P de du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ sous la forme $P = aX^2 + bX + c$. Le polynôme P doit vérifier
$$(\, X^3 - P \mid 1\,) = (\, X^3 - P \mid X\,) = (\, X^3 - P \mid X^2\,) = 0,$$
ce qui se traduit par le système suivant :
$$\begin{cases} 4a + 6b + 12c &= 3 \\ 15a + 20b + 30c &= 12 \\ 12a + 15b + 20c &= 10 \end{cases}$$
L'opération $L_2 \leftarrow L_1 + L_3 - L_2$ donne le système équivalent suivant :
$$\begin{cases} 4a + 6b + 12c &= 3 \\ a + b + 2c &= 1 \\ 12a + 15b + 20c &= 10 \end{cases}$$
ce qui conduit au système suivant :
$$\begin{cases} a + b + 2c &= 1 \\ 2b + 4c &= -1 \\ 3b - 4c &= -2. \end{cases}$$
On obtient ainsi $b = -\dfrac{3}{5}$, $c = \dfrac{1}{20}$ et $a = \dfrac{3}{2}$; soit $P = \dfrac{30X^2 - 12X + 1}{20}$.

Proposition 23 Soit $x \in E$ et $y \in F$. On a :

$$y - x = y - p_F(x) + p_F(x) - x \qquad \text{avec} \qquad \big(\, x - p_F(x) \mid y - p_F(x) \,\big) = 0,$$

et donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|x-y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|y - p_F(x)\|^2 \geqslant \|x - p_F(x)\|^2.$$

Par conséquent, $d(x,F) \geqslant \|x - p_F(x)\|$ et, comme $p_F(x) \in F$, on a aussi :

$$d(x,F) \leqslant \|x - p_F(x)\|.$$

D'où l'égalité. De plus :

$$d(x,F) = \|x-y\| \iff \|x-y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 \iff \|y-p_F(x)\|^2 \iff y = p_F(x).$$

Exercice 15 On remarque que :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \inf_{g\in F} \|f-g\|^2$$

où $f : x \mapsto x$, $F = \operatorname{Vect}(\sin,\cos)$ et où $\|\ \|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire :

$$(f,g) \longmapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donc :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi\|f - p_F(f)\|^2$$

où $p_F(f)$ est le projeté orthogonal de f sur F.

Comme la famille $(\cos,\sin)$ est une base orthonormale de F :

$$p_F(f) = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x\right)\cos + \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x\right)\sin.$$

Comme $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x = [x\sin x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = 0$ et :

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = [-x\cos x]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos x\,\mathrm{d}x = -2\pi,$$

on obtient $p_F(f) = -2\sin$. Ainsi :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} (x + 2\sin x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Or :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (x+2\sin x)^2\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi} + 4\int_0^{2\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x + 4\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{8\pi^3}{3} - 8\pi + \big[2x + \sin(2x)\big]_0^{2\pi},\end{aligned}$$

donc

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = -4\pi + \frac{8\pi^3}{3}\cdot$$

S'entraîner et approfondir

25.1 Montrer que :

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n\,(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

25.2 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E.
Montrer que :

$$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp} \qquad \text{et} \qquad (F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}.$$

25.3 On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel.
Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

⋆ **25.4** Soit E un espace euclidien et p un endomorphisme de E.
Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si :

$$p \circ p = p \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

⋆ **25.5** Soit E un espace euclidien ainsi que f et g deux endomorphismes de E qui commutent. On suppose que les matrices de f et de g dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ sont respectivement symétrique et antisymétrique.
Montrer que :

$$\forall x \in E \quad \big(f(x) \mid g(x)\big) = 0$$

puis que :

$$\forall x \in E \quad \|(f-g)(x)\| = \|(f+g)(x)\|.$$

⋆ **25.6** Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et $\varphi : \begin{array}{rcl} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 (fg + f'g')\,. \end{array}$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid f'' = f\}$.
   Montrer que les espaces vectoriels F et G sont supplémentaires orthogonaux et exprimer la projection orthogonale sur G.
3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $E_{a,b} = \{f \in E \mid f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$.
   (a) Trouver un élément f_0 de $E_{a,b}$, prouver que $E_{a,b} = \{f_0 + h\,;\ h \in F\}$ et donner la projection orthogonale de f_0 sur F.
   (b) À l'aide de la décomposition de f_0, déterminer la valeur de :

$$\inf_{f \in E_{a,b}} \int_0^1 \left(f^2 + f'^2\right).$$

Solution des exercices

25.1 Il suffit d'écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique avec les deux vecteurs $u = (1, 1, \ldots, 1)$ et $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Il y a égalité si, et seulement si, le vecteur v appartient à la droite $\mathbb{R}u$ c'est-à-dire si, et seulement si, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

25.2 • Puisque $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$, on a $(F+G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F+G)^\perp \subset G^\perp$ donc :

$$(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp.$$

Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$ et $z \in (F+G)$. Il existe $(z_1, z_2) \in F \times G$ tel que $z = z_1 + z_2$, donc on a :

$$(\, x \mid z \,) = (\, x \mid z_1 \,) + (\, x \mid z_2 \,) = 0$$

ce qui montre que :

$$F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp.$$

• D'après la question précédente, on a, pour tout couple de sous-espaces vectoriels (F_1, G_1) :

$$F_1 + G_1 = \left(F_1^\perp \cap G_1^\perp\right)^\perp$$

Il suffit de prendre $F_1 = F^\perp$ et $G_1 = G^\perp$ pour avoir $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

25.3 Les vecteurs $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)$ et $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)$ forment une base orthonormale de F, donc on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^4 \quad p(x) = (\, x \mid e_1 \,)e_1 + (\, x \mid e_2 \,)e_2$$

où p est la projection orthogonale sur F. La matrice de p dans la base canonique est donc :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

25.4 Si p est une projection orthogonale sur F, alors on a bien $p \circ p = p$. De plus, si x est un vecteur de E, alors $x = \underbrace{p(x)}_{x \in F} + \underbrace{x - p(x)}_{x \in F^\perp}$ donc :

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2.$$

Réciproquement si p vérifie les deux conditions, alors p est une projection. Il existe donc deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G tels que p soit la projection sur F parallèlement à un sous-espace vectoriel G. Montrons que F et G sont orthogonaux, ce qui, par des arguments de dimension prouvera que $G = F^{\perp}$. Soit $(f,g) \in F \times G$ alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad p\,(f + \lambda g) = f.$$

Par conséquent :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|f\|^2 \leqslant \|f + \lambda g\|^2$$

soit :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda^2 \|g\|^2 + 2\lambda(\, f \mid g\,) \geqslant 0.$$

La fonction polynomiale $\lambda \mapsto \lambda^2\|g\|^2 + 2\lambda(\, f \mid g\,)$ est donc de signe constant sur $\mathbb{R}$ donc on en déduit que :

$$\Delta = \left(2(\, f \mid g\,)\right)^2 \leqslant 0$$

puis que $(\, f \mid g\,) = 0$. Par suite, les espaces vectoriels F et G sont orthogonaux donc p est une projection orthogonale.

25.5 Soit A et B respectivement les matrices de f et g dans $\mathcal{B}$, et x un vecteur de E dont on note X la matrice colonne des composantes dans $\mathcal{B}$. On a :

$$(\, f(x) \mid g(x)\,) = {}^t(AX)(BX) = {}^tX\,{}^tABX = {}^tXABX.$$

De même :

$$(\, g(x) \mid f(x)\,) = {}^t(BX)(AX) = -{}^tXBAX = -{}^tXABX$$

car $AB = BA$, donc :

$$(\, f(x) \mid g(x)\,) = -(\, g(x) \mid f(x)\,) = 0.$$

En écrivant le théorème de Pythagore :

$$\|(f-g)(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|g(x)\|^2 = \|(f+g)(x)\|^2.$$

25.6 1. On montre aisément que φ est une forme bilinéaire symétrique. De plus,

$$\forall f \in E \quad \int_0^1 \left(f^2 + f'^2\right) \geqslant 0.$$

Soit $f \in E$ telle que $\varphi(f,f) = 0$ alors, la fonction $f^2 + f'^2$ étant continue et positive sur $[0,1]$, on en déduit que cette fonction est nulle puis que f est nulle. Donc φ est un produit scalaire sur E.

2. Montrons que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires.
Soit $f \in E$. Il faut prouver l'existence d'un unique couple $(f_1, f_2) \in F \times G$ tel que $f = f_1 + f_2$. On procède par analyse-synthèse.
   - Supposons qu'il existe un couple $(f_1, f_2) \in F \times G$ tel que $f = f_1 + f_2$. Il existe alors deux réels α et β tels que, pour tout $x \in [0,1]$:
   $$f_1(x) = \alpha \operatorname{ch} x + \beta \operatorname{sh} x.$$
   Comme $f(0) = f_1(0)$ et $f(1) = f_1(1)$, on obtient le système suivant :
   $$\begin{cases} f(0) = \alpha \\ f(1) = \alpha \operatorname{ch} 1 + \beta \operatorname{sh} 1 \end{cases}$$
   ce qui est équivalent à $\alpha = f(0)$ et $\beta = \dfrac{f(1) - f(0)\operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh} 1}$.

- Réciproquement, si l'on pose $f_1 : x \mapsto \alpha \operatorname{ch} x + \beta \operatorname{sh} x$ avec $\alpha = f(0)$ et $\beta = \dfrac{f(1) - f(0)\operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh} 1}$ et $f_2 = f - f_1$, alors on a $(f_1, f_2) \in F \times G$ et $f = f_1 + f_2$.

Par suite, les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires.

Enfin, si $f_1 \in F$ et $f_2 \in G$, alors la fonction f_1 est de classe $\mathcal{C}^2$ et une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\varphi(f_1, f_2) &= \int_0^1 (f_1 f_2 + f_1' f_2')\\ &= \int_0^1 f_1 f_2 + [f_1' f_2]_0^1 - \int_0^1 f_2 f_1''\\ &= \int_0^1 (f_1 f_2 - f_2 f_1'') = 0\end{aligned}$$

Les espaces F et G sont donc supplémentaires orthogonaux.

La projection orthogonale sur F de f est égale à :

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh} 1}\big(f(0)\operatorname{sh}(1-x) + f(1)\operatorname{sh} x\big).$$

3. (a) La fonction $x \mapsto a + (b-a)x$ appartient à $E_{a,b}$. De plus :

$$\forall f \in E \quad f \in E_{a,b} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = a \\ f(1) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = f_0(0) \\ f(1) = f_0(1) \end{cases} \Leftrightarrow f - f_0 \in F.$$

Par conséquent, $E_{a,b} = \{f_0 + h \,;\ h \in E_{0,0}\}$.

La projection orthogonale de f_0 sur F est $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{sh} 1}\,(a\operatorname{sh}(1-x) + b\operatorname{sh} x)$.

(b) Soit $f \in E_{a,b}$, il existe $h \in F$ tel que $f = f_0 + h$ donc

$$f = f_0 + h = \underbrace{f_0 - f_1}_{\in G = F^\perp} + \underbrace{f_1}_{\in F} + \underbrace{h}_{\in F}$$

puis :

$$\int_0^1 \left(f^2 + f'^2\right) = \|f_0 + h\|^2 = \|f_0 - f_1\|^2 + \|f_1 + h\|^2.$$

Par conséquent, on a :

$$\inf_{f \in E_{a,b}} \int_0^1 \left(f^2 + f'^2\right) = \|f_0 - f_1\|^2.$$

On peut même préciser que cette borne inférieure est atteint de façon unique en $f_2 = f_0 - f_1 \in G$. Par suite :

$$\begin{aligned}\|f_2\|^2 = \int_0^1 \left(f_2^2 + f_2'^2\right) &= \int_0^1 f_2^2 + [f_2 f_2']_0^1 - \int_0^1 f_2 f_2''\\ &= [f_2 f_2']_0^1 = \frac{b(b\operatorname{ch} 1 - a) - a(b - a\operatorname{ch} 1)}{\operatorname{sh} 1}\\ &= \frac{(a^2 + b^2)\operatorname{ch} 1 - 2ab}{\operatorname{sh} 1}.\end{aligned}$$

Chapitre 26 : Isométries et matrices orthogonales

I	**Isométries vectorielles**	**1318**
II	**Matrices orthogonales**	**1320**
1	Définitions, propriétés	1320
2	Le groupe orthogonal et le groupe spécial orthogonal	1322
3	Lien avec les bases orthonormales	1322
4	Lien avec les automorphismes orthogonaux	1325
III	**Isométries vectorielles en dimension** 2	**1326**
1	Matrices orthogonales de taille 2	1326
2	Rotations vectorielles, angles	1326
3	Réflexions vectorielles	1328
Démonstrations et solutions des exercices du cours		**1330**
Exercices		**1335**

Isométries et matrices orthogonales

26

Dans ce chapitre, E désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.
On note $(\,|\,)$ le produit scalaire et $\|\ \|$ la norme euclidienne associée.

I Isométries vectorielles

Définition 1

On appelle **isométrie vectorielle** (ou **automorphisme orthogonal**) de E tout endomorphisme f de E conservant la norme, c'est-à-dire tel que :

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \|x\|.$$

Remarque Le terme d'isométrie est lié à la conservation de la norme. Le terme d'automorphisme orthogonal est lié aux deux propriétés suivantes qui assurent qu'un automorphisme orthogonal est un automorphisme qui conserve le produit scalaire et en particulier l'orthogonalité.

Proposition 1

Une isométrie vectorielle est un automorphisme de E.

Démonstration page 1330

Proposition 2

Un endomorphisme f de E est une isométrie si, et seulement s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (\,f(x) \mid f(y)\,) = (\,x \mid y\,).$$

Démonstration page 1330

Exemples

1. Les seules homothéties qui soient des isométries sont Id et $-\mathrm{Id}$.
2. Contrairement à ce que le terme pourrait laisser penser, une projection orthogonale n'est pas un automorphisme orthogonal sauf si c'est l'identité puisque, sinon, elle n'est pas bijective.

p.1330

Exercice 1 Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E laissant stable un sous-espace vectoriel F de E, c'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$.

Montrer que $f(F) = F$ et $f(F^\perp) = F^\perp$.

Définition 2

On appelle **symétrie orthogonale** toute symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel F parallèlement à son orthogonal $F^\perp$.

On appelle **réflexion** toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Proposition 3

Toute symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.

Démonstration page 1330

p.1330

Exercice 2 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Montrer que, si s est une isométrie, alors F et G sont orthogonaux.

Remarque On a donc prouvé que, si s est une symétrie, alors s est une symétrie orthogonale si, et seulement si, s est une isométrie.

Le résultat suivant permet de caractériser les automorphismes orthogonaux par l'image d'une base orthonormale. Il est à rapprocher de la caractérisation des automorphismes.

Proposition 4

Soit $\mathbf{e}$ une base orthonormale de E. Un endomorphisme f de E est orthogonal si, et seulement si, l'image de $\mathbf{e}$ par f est une base orthonormale.

Démonstration page 1330

Point méthode

Pour démontrer qu'un endomorphisme f est orthogonal, il suffit de montrer que l'image d'une base orthonormale par f est une famille orthonormale. C'est alors évidemment une famille libre, donc une base (orthonormale).

Exemples

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Les endomorphismes canoniquement associés aux matrices :
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$
sont orthogonaux pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$. En effet, ils transforment la base canonique en deux vecteurs unitaires et orthogonaux.

   Nous verrons qu'en dimension 2, la matrice d'une isométrie vectorielle dans une base orthonormale est toujours d'une des deux formes précédentes.

2. Si E est un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormale $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, l'unique endomorphisme φ de E tel que :
$$\varphi(\vec{\imath}) = \vec{\jmath}, \quad \varphi(\vec{\jmath}) = \vec{k} \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{k}) = \vec{\imath}$$
est un automorphisme orthogonal puisqu'il transforme la base orthonormale $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ en la base orthonormale $(\vec{\jmath}, \vec{k}, \vec{\imath})$.

Proposition 5

- La composée de deux isométries est une isométrie.
- La réciproque d'une isométrie est une isométrie.

Démonstration page 1331

Comme l'identité est une isométrie vectorielle, on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 6

L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E est un sous–groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$.

II Matrices orthogonales

1 Définitions, propriétés

Définition 3

On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice orthogonale** si elle vérifie :
$${}^tMM = I_n.$$

Proposition 7

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors il y a équivalence entre :

(i) M est une matrice orthogonale,

(ii) M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$,

(iii) $M\,{}^tM = I_n$,

(iv) ${}^tM$ est une matrice orthogonale.

Démonstration page 1331

Point méthode

Lorsqu'une matrice est orthogonale, il est aisé de calculer son inverse : il suffit de la transposer.

Proposition 8

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors il y a équivalence entre :

(i) M est une matrice orthogonale,

(ii) les colonnes de M forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$,

(iii) les lignes de M forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration page 1331

Remarques

- Dans la définition, il est sous-entendu que le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est le produit scalaire canonique.
- Si M est une matrice orthogonale, alors ses colonnes (respectivement ses lignes) forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Point méthode

Pour montrer qu'une matrice est orthogonale, il suffit donc de vérifier que ses colonnes (ou ces lignes) forment une famille orthonormale. Il y a donc n normes et $\frac{n(n-1)}{2}$ produits scalaires à calculer.

p.1331 **Exercice 3** Déterminer l'inverse de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

p.1332 **Exercice 4** Déterminer l'inverse de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

2 Le groupe orthogonal et le groupe spécial orthogonal

Proposition 9

- Le produit de deux matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale.
- L'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale.

Démonstration page 1332

La matrice identité étant une matrice orthogonale, on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 10

L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ noté $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}(n)$.

Proposition 11

Si P est une matrice orthogonale, alors $\det P = \pm 1$.

Démonstration. Si P est une matrice orthogonale alors $\det\left(P\,{}^tP\right) = \det I_n$ donc $(\det P)^2 = 1$, c'est-à-dire $\det P = \pm 1$. □

Définition 4

Une matrice orthogonale est dite **positive** si elle est de déterminant 1 et **négative** sinon.

Proposition 12

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonales positives forme un sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appelé **groupe spécial orthogonal** et noté $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{SO}(n)$.

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ contient la matrice identité. De plus, si A et B sont deux matrices orthogonales alors les matrices AB et A^{-1} aussi, et vérifient :

$$\det(AB) = \det A \det B = 1 \qquad \text{et} \qquad \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = 1.$$

Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit et passage à l'inverse. □

3 Lien avec les bases orthonormales

Proposition 13

Soit $\mathbf{e}$ une base orthonormale de E. Une base $\mathbf{e}'$ est orthonormale si, et seulement si, la matrice de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{e}'$ est orthogonale.

Démonstration page 1332

Point méthode

Lorsque l'on connaît la matrice de passage P d'une base orthonormale $\mathbf{e}$ à une autre $\mathbf{e}'$, alors la matrice de passage de la base $\mathbf{e}'$ à la base $\mathbf{e}$ est ${}^tP$.

On suppose désormais que l'espace E est orienté.

Corollaire 14

Soit $\mathbf{e}$ une base orthonormale directe de E. Une base $\mathbf{e}'$ est une base orthonormale directe si, et seulement si, la matrice de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{e}'$ appartient à $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

p.1332 **Exercice 5** Soit E de dimension 3, $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ une base orthonormale de E et p un projecteur orthogonal sur un plan F de E. Montrer que :

$$\|p(\vec{\imath})\|^2+\|p(\vec{\jmath})\|^2+\|p(\vec{k})\|^2=2.$$

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, les vecteurs :
$$u=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad v=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$
forment une base orthonormale directe. Il s'agit de la base mobile associée à un point de coordonnées polaires (r,θ). La matrice de changement de base correspondante :
$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$
appartient donc à $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$. La proposition 20 de la page 1326 montrera réciproquement que ce sont les seules matrices orthogonales positives de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, pour $(\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2$, les vecteurs :
$$u=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix},\qquad v=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad w=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$
forment une base orthonormale directe. Il s'agit de la base mobile associée à un point de coordonnées sphériques (r,θ,φ). La matrice de changement de base correspondante :
$$\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix}$$
appartient donc à $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$. Mais il existe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui ne sont pas de cette forme (la matrice I_3 par exemple).

3. En physique ou en sciences industrielles, on n'utilise la plupart du temps que des bases orthonormales directes ; les matrices de changement de base sont donc orthogonales, ce qui facilite leur inversion.

Corollaire 15

Soit $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ deux bases orthonormales directes. Alors, on a :

$$\forall\,(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n \quad \det_{\mathbf{e}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det_{\mathbf{e}'}(u_1, u_2, \ldots, u_n)\,.$$

Démonstration. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$ alors :

$$\det_{\mathbf{e}'}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det_{\mathbf{e}'}(\mathbf{e})\det_{\mathbf{e}}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

et $\det_{\mathbf{e}'}(\mathbf{e}) = 1$ car les bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ sont s orthonormales directes. □

Définition 5

On appelle **produit mixte** de n vecteurs u_1, u_2,..., u_n leur déterminant dans n'importe quelle base orthonormale directe. On le note :

$$[u_1, u_2, \ldots, u_n] \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{Det}(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Produit vectoriel Soit E de dimension 3.

- Soit u et v deux vecteurs de E. Il existe un unique vecteur de E, noté $u \wedge v$, tel que :

  $$\forall x \in E \quad \mathrm{Det}(u, v, x) = (\,u \wedge v \mid x\,).$$

  En effet, l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \mathrm{Det}(u, v, x) \end{array}$ est une forme linéaire sur E, et l'exercice 13 de la page 1300 nous donne alors l'existence et l'unicité du vecteur $u \wedge v$.

  En particulier, le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal aux vecteurs u et v puisque :

  $$(\,u \wedge v \mid u\,) = \mathrm{Det}(u, v, u) = 0 \quad \text{et} \quad (\,u \wedge v \mid v\,) = \mathrm{Det}(u, v, v) = 0.$$

- Si (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) sont les coordonnées respectives de u et de v dans une base orthonormale directe $\mathbf{e}$, alors, pour un vecteur x de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans $\mathbf{e}$, on a :

  $$\begin{aligned} \mathrm{Det}(u, v, x) &= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} \\ &= x_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

  Comme on travaille dans une base orthonormale, les composantes de $u \wedge v$ sont :

  $$\left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

  On retrouve ainsi les composantes du *produit vectoriel* dans toute base orthonormale directe vu en physique et en sciences industrielles.

- Si la base (u, v, w) est une base orthonormale, alors elle est directe si, et seulement si, $w = u \wedge v$, et indirecte si, et seulement si, $w = -u \wedge v$.

  En effet, les vecteurs w et $u \wedge v$ appartiennent à la droite $(\mathrm{Vect}(u, v))^{\perp}$, ils sont donc proportionnels. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u \wedge v = \lambda w$; alors $\mathrm{Det}(u, v, w) = \lambda \|w\|^2 = \lambda$. Ainsi, $\mathrm{Det}(u, v, w) = 1$ si, et seulement si, $\lambda = 1$ et $\mathrm{Det}(u, v, w) = -1$ si, et seulement si, $\lambda = -1$.

- Si u et v sont deux vecteurs non colinéaires, alors l'ensemble des vecteurs orthogonaux aux vecteurs u et v est la droite dirigée par le vecteur $u \wedge v$.

4 Lien avec les automorphismes orthogonaux

Proposition 16

Soit $\mathbf{e}$ une base orthonormale de E. Un endomorphisme f de E est orthogonal si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathbf{e}$ est orthogonale.

Démonstration page 1332

Exemple La matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. C'est donc la matrice, dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, d'un automorphisme orthogonal. Cet automorphisme est appelé **rotation** d'angle θ autour de l'axe orienté par le vecteur de coordonnés $(0, 0, 1)$.

Corollaire 17

Si f est une isométrie, alors $\det f = \pm 1$.

Définition 6

Une isométrie est dite **positive** (ou **directe**) si son déterminant vaut 1 et **négative** (ou **indirecte**) sinon.

Proposition 18

L'ensemble $\mathcal{SO}(E)$ des isométries positives de E est un sous–groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$.

Proposition 19

Les réflexions sont des isométries indirectes.

Démonstration page 1333

III Isométries vectorielles en dimension 2

On suppose dans cette section que E est de dimension 2.

1 Matrices orthogonales de taille 2

Proposition 20

- Les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

  avec $\theta \in \mathbb{R}$.

- Le groupe $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $R(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Démonstration page 1333

Avec les notations précédentes, on a le résultat suivant.

Proposition 21

- Pour $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a $R(\theta + \theta') = R(\theta)\, R(\theta')$.
- Le groupe $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ est commutatif.

Démonstration.

- Simple calcul.
- On en déduit, pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $R(\theta)\, R(\theta') = R(\theta + \theta') = R(\theta')\, R(\theta)$. $\square$

2 Rotations vectorielles, angles

Proposition 22

Si r est une isométrie positive du plan, alors il existe un réel θ, unique modulo 2π, tel que dans toute base orthonormale directe de E la matrice de r soit égale à $R(\theta)$.

On dit alors que r est la **rotation** d'angle θ, ou que θ est une **mesure de l'angle** de la rotation r.

Démonstration page 1333

Corollaire 23

Les isométries positives du plan sont les rotations.

p.1333 **Exercice 6** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de E de même norme. Montrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(\vec{u}) = \vec{v}$.

Définition 7

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, on appelle **mesure de l'angle** orienté **de vecteurs** $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$, une mesure θ de l'angle de l'unique rotation qui transforme $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ en $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, et l'on note :

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \theta\,[2\pi].$$

Proposition 24 (Relation de Chasles)

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non nuls, on a :

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{w})} \equiv \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{w})}\,[2\pi].$$

Démonstration page 1333

Remarques

- On a $\widehat{(\vec{u}, \vec{u})} \equiv 0\,[2\pi]$ et $\widehat{(\vec{u}, -\vec{u})} \equiv \pi\,[2\pi]$.
- Grâce à la relation de Chasles, on en déduit :

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv -\widehat{(\vec{v}, \vec{u})}\,[2\pi]$$

$$\widehat{(-\vec{u}, \vec{v})} \equiv \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \pi\,[2\pi]$$

$$\widehat{(-\vec{u}, -\vec{v})} \equiv \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}\,[2\pi]$$

Proposition 25

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, on a $\operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

Démonstration page 1333

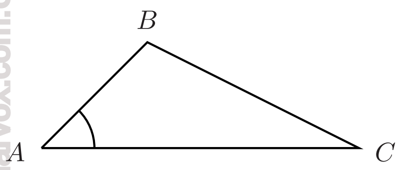
Exemples

- On a vu dans le secondaire, que l'aire d'un triangle (ABC) est donnée par :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\left|\sin \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}\right|$$

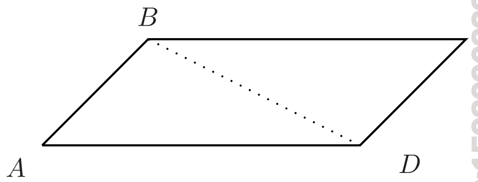
donc :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\operatorname{Det} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|.$$



Le réel $\dfrac{1}{2}\operatorname{Det}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est appelé **aire orientée** du triangle ABC. Dans le cas d'un triangle non aplati, la famille $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est une base. L'aire orientée est positive si cette base est directe et négative sinon.

- L'aire du parallélogramme $ABCD$ est donnée par :



$$\mathcal{A}_{ABCD} = \left|\operatorname{Det}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|.$$

Le réel $\operatorname{Det}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est appelé **aire orientée** du parallélogramme $ABCD$.

Dans le cas d'un parallélogramme non aplati, la famille $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est une base. L'aire orientée est positive si cette base est directe et négative sinon.

Corollaire 26

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

- Si f est une rotation, on a :
$$\left(\widehat{f(\vec{u}), f(\vec{v})}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\ [2\pi].$$
- Si f est une isométrie vectorielle indirecte du plan, on a :
$$\left(\widehat{f(\vec{u}), f(\vec{v})}\right) \equiv -\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\ [2\pi].$$

Démonstration page 1334

3 Réflexions vectorielles

Proposition 27

- Les isométries vectorielles indirectes du plan sont les réflexions.
- Plus précisément, si f est une isométrie négative du plan et si $\mathbf{e}=(e_1,e_2)$ est une base orthonormale , alors il existe un réel θ unique modulo 2π tel que la matrice de f dans $\mathbf{e}$ soit de la forme $S(\theta)$.

  L'isométrie f est alors la réflexion par rapport à la droite $D_{\theta/2}$ engendrée par le vecteur $\cos(\theta/2)\,e_1+\sin(\theta/2)\,e_2$.

Démonstration page 1334

Point méthode

Soit f est une isométrie du plan.

- Si f est directe, alors il s'agit d'une rotation. On détermine son angle soit à partir de sa matrice dans une base orthonormale directe soit avec le produit scalaire et le produit mixte d'un vecteur non nul et de son image par f.
- Si f est indirecte, alors il s'agit d'une réflexion. On détermine son axe soit à partir de sa matrice dans une base orthonormale soit en recherchant la droite des vecteurs invariants par f.

Proposition 28

1. Si D et D' sont deux droites vectorielles dirigées respectivement par $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, la composée des deux réflexions $s_{D'} \circ s_D$ est la rotation d'angle $2\widehat{(\vec{u},\vec{u}')}$.
2. Toute rotation vectorielle est la composée de deux réflexions dont l'une peut être choisie arbitrairement.

Démonstration page 1334

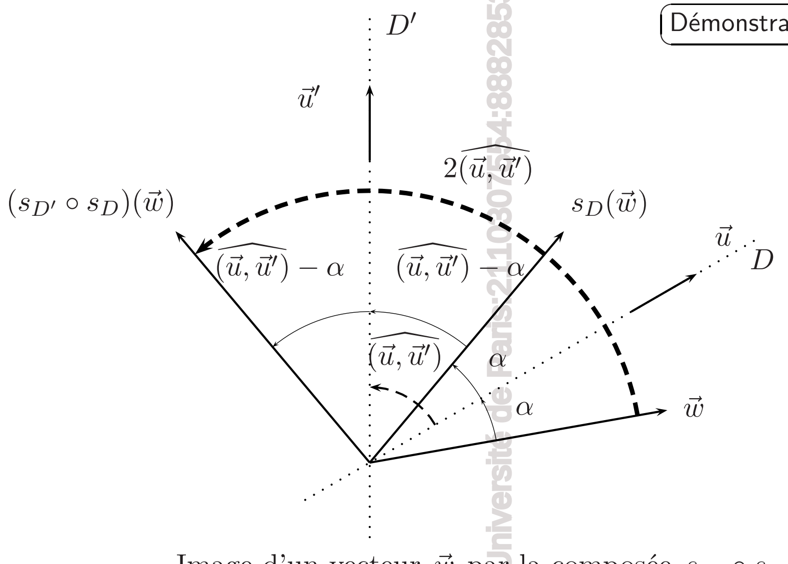


Image d'un vecteur $\vec{w}$ par la composée $s_{D'} \circ s_D$

Corollaire 29

Toute isométrie du plan est soit une réflexion, soit le produit de deux réflexions.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 1 Si l'application f est une isométrie vectorielle, alors elle est injective puisque :

$$\forall x \in E \quad f(x) = 0 \Longrightarrow \|f(x)\| = 0 \Longrightarrow \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Comme f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que c'est un automorphisme.

Proposition 2

- Si l'endomorphisme f conserve le produit scalaire, alors pour tout $x \in E$, on a :

$$\|f(x)\|^2 = \big(f(x) \mid f(x) \big) = (x \mid x) = \|x\|^2$$

ce qui prouve que f est un automorphisme orthogonal.

- Si f est un automorphisme orthogonal, alors pour tout $(x, y) \in E^2$, l'identité de polarisation donne :

$$\begin{aligned} 4\big(f(x) \mid f(y) \big) &= \big\|f(x) + f(y)\big\|^2 - \big\|f(x) - f(y)\big\|^2 \\ &= \big\|f(x+y)\big\|^2 - \big\|f(x-y)\big\|^2 \qquad \text{(linéarité de } f\text{)} \\ &= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \\ &= 4(x \mid y). \end{aligned}$$

Ce qui prouve que l'endomorphisme f conserve le produit scalaire

Exercice 1 L'endomorphisme f étant bijectif, on a $f(F) = F$ pour des raisons de dimension.

De plus, pour $x \in F^\perp$ et $y \in F$, on a :

$$(f(x) \mid y) = \big(f(x) \mid f\big(f^{-1}(y)\big) \big) = (x \mid f^{-1}(y)) = 0$$

car $f^{-1}(y) \in f^{-1}(F) = F$.

On a donc $f(F^\perp) \subset F^\perp$, puis $f(F^\perp) = F^\perp$ pour des raisons de dimension.

Proposition 3 Soit s la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace vectoriel F. Pour tout $x \in E$, il existe un couple (unique) $(y, z) \in F \times F^\perp$ tel que $x = y + z$. On a alors $s(x) = y - z$. Par le théorème de Pythagore, on a :

$$\|s(x)\|^2 = \|y - z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|y + z\|^2 = \|x\|^2.$$

Donc la symétrie s conserve la norme.

Exercice 2 Montrons que F et G sont orthogonaux. Soit $(x, y) \in F \times G$. Alors :

$$\|x + y\| = \|s(x + y)\| = \|x - y\|$$

donc :

$$4(x \mid y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 0.$$

Par conséquent, $G \subset F^\perp$, puis $G = F^\perp$ pour des raisons de dimension.

Proposition 4

- Si l'endomorphisme f est orthogonal, alors il conserve la norme et le produit scalaire, donc l'orthogonalité. L'image d'une base orthonormale est donc une famille orthonormale, et une base puisque f est un automorphisme.

- Réciproquement, supposons que l'image de $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ par f soit une base orthonormale. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ un vecteur de E. On a alors $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ puisque $\mathbf{e}$ est orthonormale. De plus, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, f(e_i)$ et, comme $f(\mathbf{e})$ est une base orthonormale, on a :

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2.$$

L'endomorphisme f conserve la norme et est donc orthogonal.

Proposition 5

1. Si les endomorphismes f et g conservent la norme, il en est de même pour $f \circ g$.
2. Si l'endomorphisme f est orthogonal, alors, pour $x \in E$, on a :

$$\|f^{-1}(x)\| = \|f\big(f^{-1}(x)\big)\| = \|x\|$$

ce qui prouve que l'endomorphisme f^{-1} conserve la norme.

Proposition 7

$(i) \Rightarrow (ii)$ Si la matrice M est orthogonale alors ${}^tMM = I_n$ donc la matrice M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Évident.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Si $M\,{}^tM = I_n$ alors ${}^t\left({}^tM\right){}^tM = I_n$ donc la matrice ${}^tM$ est orthogonale.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Si la matrice ${}^tM$ est orthogonale, alors $M{}^tM = I_n$ donc M est inversible d'inverse ${}^tM$, ce qui donne aussi ${}^tM\,M = I_n$.

Proposition 8 Si l'on note $(C_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ les colonnes de M alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad (\, C_i \mid C_j \,) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} m_{k,j} = \left({}^tMM\right)_{i,j}$$

Par conséquent, les colonnes de M forment une famille orthonormale de IR^n si, et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \left({}^tMM\right)_{i,j} = \delta_{i,j},$$

c'est-à-dire si, et seulement si, la matrice M est orthogonale.

Le résultat analogue sur les lignes découle du fait que la matrice M est orthogonale si, et seulement si, la matrice ${}^tM$ l'est.

Exercice 3 La matrice A est orthogonale, donc son inverse est :

$$A^{-1} = {}^tA = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 La matrice $B = \dfrac{1}{2}A$ est orthogonale donc :

$$A^{-1} = (2B)^{-1} = \frac{1}{2}{}^tB = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$

Proposition 9

- Si les matrices A et B sont orthogonales, alors
$$^t(AB)(AB) = {}^tB\,{}^tAAB = {}^tBB = I_n$$
donc la matrice AB est orthogonale.
- Si la matrice M est inversible, alors son inverse est égale à sa transposée qui est orthogonale d'après la proposition 7 de la page 1320.

Proposition 13
Posons $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $\mathbf{e}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ et $P = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}')$. Alors, on a :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad (\,e'_i \mid e'_j\,) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} e_k \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\, a_{k,j} = \left({}^tPP\right)_{i,j}$$

Par conséquent, la base $\mathbf{e}'$ est orthonormale si, et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad (\,e'_i \mid e'_j\,) = \delta_{i,j},$$

c'est-à-dire si, et seulement si, la matrice P est orthogonale.

Exercice 5 Soit $\left(\vec{I}, \vec{J}\right)$ une base orthonormale de F complétée en une base orthonormale $\left(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$ de E. Si $P = (P_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ est la matrice de passage de la base $\left(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$ à la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, alors P est une matrice orthogonale. On a alors $\vec{\imath} = P_{1,1}\vec{I} + P_{2,1}\vec{\jmath} + P_{3,1}\vec{k}$ puis $p(\vec{\imath}) = P_{1,1}\vec{I} + P_{2,1}\vec{J}$ et donc $\left\|p(\vec{\imath})\right\|^2 = P_{1,1}^2 + P_{2,1}^2$. En procédant de même pour les vecteurs $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left\|p(\vec{\imath})\right\|^2 + \left\|p(\vec{\jmath})\right\|^2 + \left\|p(\vec{k})\right\|^2 &= P_{1,1}^2 + P_{2,1}^2 + P_{1,2}^2 + P_{2,2}^2 + P_{1,3}^2 + P_{2,3}^2 \\ &= P_{1,1}^2 + P_{1,2}^2 + P_{1,3}^2 + P_{2,1}^2 + P_{2,2}^2 + P_{2,3}^2. \end{aligned}$$

Puisque les lignes de P sont des vecteurs unitaires, on en déduit que :

$$\left\|p(\vec{\imath})\right\|^2 + \left\|p(\vec{\jmath})\right\|^2 + \left\|p(\vec{k})\right\|^2 = 2.$$

Proposition 16 Un endomorphisme f est orthogonal si, et seulement si, l'image de la base $\mathbf{e}$ est orthonormale donc si, et seulement si, la matrice de passage de $f(\mathbf{e})$ dans $\mathbf{e}$ est orthogonale, c'est-à-dire si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathbf{e}$ est orthogonale.

Proposition 19 Soit s une réflexion par rapport à un hyperplan H. La matrice de s dans une base orthonormale adaptée à la décomposition $E = H \oplus H^{\perp}$ est :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right),$$

dont le déterminant vaut -1.

Proposition 20 Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice orthogonale. Les vecteurs (a,b) et (c,d) sont donc unitaires et orthogonaux. Par suite, en utilisant l'exemple 3 de la page 1294, on a :

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad (c,d) = \lambda(-b,a).$$

Il existe donc un réel θ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que :

$$(a,b) = (\cos\theta, \sin\theta) \qquad \text{et} \qquad (c,d) = (-\varepsilon \sin\theta, \varepsilon\cos\theta).$$

Réciproquement, pour tout réel θ, les matrices $R(\theta)$ et $S(\theta)$ sont orthogonales.

Proposition 22 Soit $\mathbf{e}$ une base orthonormale directe de E. La matrice de r dans $\mathbf{e}$ appartient à $\mathcal{SO}(2)$, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(r) = R(\theta)$.

Si $\mathbf{e}'$ est une base orthonormale directe de E, la matrice P de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{e}'$ est aussi dans $\mathcal{SO}(2)$. Comme ce groupe est commutatif, on en déduit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}'}(r) = P^{-1}\, R(\theta)\, P = R(\theta) = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(r).$$

L'unicité de θ modulo 2π vient de l'équivalence :

$$R(\theta) = R(\theta') \iff \theta \equiv \theta' [2\pi].$$

Exercice 6 Complétons $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ en une base orthonormale directe $\mathbf{e} = \left(\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{w}\right)$.

Puisque le vecteur $\vec{v}' = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ est normé, ses composantes (x,y) dans la base orthonormale $\mathbf{e}$ vérifient $x^2 + y^2 = 1$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π, tel que $(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Par conséquent, la rotation d'angle θ transforme $\vec{u}$ en $\vec{v}$.

Si r est une rotation transformant $\vec{u}$ en $\vec{v}$, alors sa matrice dans toute base orthonormale est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & * \\ \sin\theta & * \end{pmatrix}$$

il s'agit donc de la rotation d'angle θ.

Proposition 24 Quitte à diviser les trois vecteurs par leur norme, on peut supposer qu'ils sont normés.

Si r_1 est la rotation qui transforme $\vec{u}$ en $\vec{v}$ et r_2 celle qui transforme $\vec{v}$ en $\vec{w}$, la rotation $r_2 \circ r_1$ transforme $\vec{u}$ en $\vec{w}$, ce qui prouve le résultat.

Proposition 25 Soit (u_1, u_2) et (v_1, v_2) les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans une base orthonormale directe, alors, en posant $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$, on a :

$$\frac{1}{\|\vec{v}\|}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|} \det \begin{pmatrix} u_1 & \cos\theta u_1 - \sin\theta u_2 \\ u_2 & \sin\theta u_1 + \cos\theta u_2 \end{pmatrix} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta.$$

Corollaire 26 Quitte à diviser $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par leur norme, on peut les supposer normés. Le résultat est alors une conséquence de la proposition précédente, puisqu'un automorphisme orthogonal conserve le produit scalaire et que l'on a :

$$\mathrm{Det}\big(f(\vec{u}), f(\vec{v})\big) = \det f \ \mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v})$$

avec $\det f = 1$ si f est une isométrie vectorielle directe et $\det f = -1$ sinon.

Proposition 27

- Toute réflexion est une isométrie indirecte d'après la proposition 19 de la page 1325.
- Réciproquement, si s est une isométrie indirecte, sa matrice dans une base orthonormale $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ est de la forme $S(\theta)$.

  Un calcul élémentaire prouve que $S(\theta)^2 = I_2$ et donc que s est une symétrie, orthogonale puisque s est un automorphisme orthogonal.

  Comme s n'est égale ni à Id_E ni à $-\mathrm{Id}_E$, il s'agit d'une réflexion. Pour trouver son axe de réflexion, il suffit de trouver les vecteurs invariants par s, ce qui conduit au système :

$$\begin{cases} (\cos\theta - 1)\, x + \sin\theta\, y = 0 \\ \sin\theta\, x - (\cos\theta + 1)\, y = 0, \end{cases}$$

  c'est-à-dire à :

$$\begin{cases} \sin\dfrac{\theta}{2}\left(-\sin\dfrac{\theta}{2}\, x + \cos\dfrac{\theta}{2}\, y\right) = 0 \\[2ex] \cos\dfrac{\theta}{2}\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\, x - \cos\dfrac{\theta}{2}\, y\right) = 0. \end{cases}$$

  L'application s est donc la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur $\cos(\theta/2)\, e_1 + \sin(\theta/2)\, e_2$.

Proposition 28

1. On sait déjà que la composée de deux réflexions vectorielles est une isométrie vectorielle directe, donc une rotation. Pour déterminer son angle, supposons les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ unitaires et considérons une base orthonormale directe $\mathbf{e} = (\vec{u}, \vec{v})$. La matrice dans $\mathbf{e}$ de s_D est $S(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et, d'après la proposition 27 de la page 1328, la matrice dans $\mathbf{e}$ de $s_{D'}$ est $S(2\theta)$, où $\theta \equiv \widehat{(\vec{u}, \vec{u}')}\ [2\pi]$. Donc la matrice de $s_{D'} \circ s_D$ dans $\mathbf{e}$ est :

$$S(2\theta)\, S(0) = R(2\theta).$$

2. Réciproquement, si r est une rotation d'angle θ et si $\vec{u}$ est un vecteur d'une droite D fixée, il suffit de prendre les droites D'_1 et D'_2 dirigées respectivement par des vecteurs $\vec{u}'_1$ et $\vec{u}'_2$ vérifiant :

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{u}'_1)} \equiv -\frac{\theta}{2}\ [2\pi] \qquad \text{et} \qquad \widehat{(\vec{u}, \vec{u}'_2)} \equiv \frac{\theta}{2}\ [2\pi]$$

   pour avoir $r = s_D \circ s_{D'_1} = s_{D'_2} \circ s_D$.

S'entraîner et approfondir

★ **26.1** Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

1. $\left|\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$;
2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

26.2 Soit F un sous espace vectoriel de E, u et v deux endomorphismes orthogonaux respectivement de F et de $F^\perp$, et p la projection orthogonale sur F.

Montrer que l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall x \in E \quad f(x) = u\big(p(x)\big) + v\big(x - p(x)\big)$$

est orthogonal.

★ **26.3**
1. Montrer qu'un endomorphisme qui commute avec toutes les symétries orthogonales est une homothétie.
2. En déduire l'ensemble des endomorphismes commutant avec tout automorphisme orthogonal de E.

26.4 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et u un vecteur de E. On considère l'application f définie par :

$$\forall x \in E \quad f(x) = x + \lambda(\, x \mid u\,)u.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et u pour que f soit un automorphisme orthogonal. Décrire f dans ce cas.

★ **26.5** Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2 et décrire l'endomorphisme f.

26.6 Soit f un endomorphisme de E qui vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (\, f(x) \mid y\,) = \big(\, x \,\big|\, f(y)\big)\,) \qquad (*).$$

Montrer que la matrice de f dans toute base orthonormale est une matrice symétrique.

Réciproquement, montrer que si la matrice de f dans une base orthonormale est symétrique, alors elle l'est dans n'importe quelle base orthonormale et que l'endomorphisme f vérifie $(*)$.

26.7 Soit f un endomorphisme de E et $\mathbf{e}$ une base orthonormale de E. On suppose que la matrice A de f dans $\mathbf{e}$ est antisymétrique.
Montrer que, dans toute base orthonormale, la matrice de f est antisymétrique et que :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (\, x \mid f(y)\,) = -\,(\, f(x) \mid y\,)\,.$$

26.8 Soit E un espace euclidien de dimension n et $(x_1, x_2, \dots x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Montrer que :

$$\operatorname{Det}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leqslant \|x_1\| \dots \|x_n\|$$

On pourra utiliser le procédé d'orthonormalisation de Schmidt

★★ **26.9** Soit $x_1, x_2, \dots x_p$ p vecteurs d'un espace vectoriel euclidien de dimension n.
On considère la matrice carrée G d'ordre p définie par :

$$G(x_1, x_2, \dots, x_p) = ((\, x_i \mid x_j\,))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$$

et $F = \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p)$.

1. Montrer que la famille $(x_1, x_2, \dots x_p)$ est liée si, et seulement si, le déterminant de $G(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est nul.
2. On suppose que la famille $(x_1, x_2, \dots x_p)$ est libre. Montrer que :
   - $\det G = \det_{\mathbf{f}}(x_1, x_2, \dots, x_p)^2 > 0$ où $\mathbf{f}$ est une base orthonormale de F ;
   - $\forall x \in E \quad d(x,F)^2 = \dfrac{\det G(x, x_1, x_2 \dots, x_p)}{\det G(x_1, x_2 \dots, x_p)}$.

Remarque La matrice $G(x_1, x_2 \dots, x_p)$ est appelée la matrice de Gram associée aux vecteurs $x_1, x_2, \dots x_p$.

Solution des exercices

26.1 1. Notons X le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coordonnées sont égales à 1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, on a :

$$(AX \mid X) \leqslant \|AX\|\|X\| = \|X\|^2$$

car, A étant orthogonale, $\|AX\| = \|X\|$. On a donc :

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant \|X\|^2 = n.$$

2. On considère sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le produit scalaire canonique défini (*cf.* exercice 5 de la page 1289) par $(B,C) \mapsto \operatorname{Tr}({}^tBC)$. On a alors $\|A\|^2 = \operatorname{Tr}(I_n) = n$. On pose $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \quad b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{i,j} = 0 \\ \dfrac{|a_{i,j}|}{a_{i,j}} & \text{sinon} \end{cases}$$

La norme de B est égale à $\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2} \leqslant \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1} = n$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à A et à la matrice B donne alors :

$$\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|\right)^2 = (A \mid B)^2 \leqslant \|A\|^2\|B\|^2 = n^2 \times n.$$

On en déduit l'inégalité demandée.

26.2 L'application f est bien définie car :

$$\forall x \in E \quad p(x) \in F \qquad \text{et} \qquad x - p(x) \in \operatorname{Ker} p = F^\perp$$

et est linéaire comme somme et composée d'applications linéaires. De plus :

$$\forall x \in E \quad u\big(p(x)\big) \in F \qquad \text{et} \qquad v\big(x - p(x)\big) \in F^\perp.$$

Donc le théorème de Pythagore donne :

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\|^2 = \|u\big(p(x)\big)\|^2 + \|v\big(x - p(x)\big)\|^2.$$

Les endomorphismes u et v étant orthogonaux, on en déduit que :

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2.$$

Le théorème de Pythagore implique alors :

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\|^2 = \|p(x) + x - p(x)\|^2 = \|x\|^2.$$

Ce qui prouve que l'endomorphisme f est orthogonal.

26.3 1. Soit f un endomorphisme commutant avec toutes les symétries orthogonales. Nous allons montrer que, pour tout vecteur x (non nul), les vecteurs $f(x)$ et x sont colinéaires. L'exercice classique 20.10 de la page 1084 permettra alors de conclure.

Soit x un vecteur non nul et s_x la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R}x$.

On a donc $f \circ s_x = s_x \circ f$ et, en évaluant cette relation en x, $f(x) = s_x\big(f(x)\big)$, ce qui prouve que $f(x) \in \mathbb{R}x$.

Réciproquement, les homothéties commutent avec toutes les symétries orthogonales. On en déduit que les endomorphismes commutant avec toutes les symétries orthogonales sont les homothéties.

2. Les symétries orthogonales étant des automorphismes orthogonaux, les endomorphismes qui commutent avec tous les automorphismes orthogonaux commutent aussi avec toutes les symétries orthogonales. D'après la question précédente, les endomorphismes commutant avec tous les endomorphismes orthogonaux sont donc des homothéties. Réciproquement, il est immédiat que les homothéties commutent avec tous les endomorphismes orthogonaux.

Ainsi, les endomorphismes commutant avec tous les endomorphismes orthogonaux sont les homothéties.

26.4 On vérifie que f est bien linéaire.
L'endomorphisme f est orthogonal de E si, et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (\, f(x) \mid f(y)\,) = (\, x \mid y\,)$$

soit, si, et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad 2\lambda(\, y \mid u\,)(\, x \mid u\,) + \lambda^2(\, x \mid u\,)(\, y \mid u\,)\|u\|^2 = 0$$

c'est-à-dire si, et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \lambda(\, x \mid u\,)(\, y \mid u\,)\left(2 + \lambda\|u\|^2\right) = 0.$$

Donc f est une isométrie si et seulement si $\lambda = 0$ ou $2 + \lambda\|u\|^2 = 0$ ou f vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (\, x \mid u\,)(\, y \mid u\,) = 0. \qquad (*)$$

Si $\lambda = 0$, alors f est l'application identité.
Si $2 + \lambda\|u\|^2 = 0$, alors le vecteur u est non nul et l'on a :

$$\forall x \in E \quad f(x) = x - 2\,\frac{(\, x \mid u\,)}{\|u\|^2}u.$$

On reconnait l'expression de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R}u^{\perp}$.

Si f vérifie $(*)$, alors, en particulier, pour $x = y = u$, on a :

$$(\, u \mid u\,)^2 = 0$$

donc le vecteur u est nul et f est l'application identité.

26.5 On trouve $A^2 = 9I$.

La matrice A étant symétrique, on en déduit que la matrice $S = \dfrac{1}{3}A$ vérifie $S^2 = {}^tSS = I$ donc est la matrice d'une symétrie orthogonale. Pour la déterminer, on cherche l'ensemble des vecteurs invariants par S, on trouve la droite D dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'application f est donc la composée de la symétrie orthogonale par rapport à la droite D et de l'homothétie de rapport 3.

26.6 Soit $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale et $(a_{i,j})$ la matrice de f dans cette base. On a :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad a_{i,j} = (\, f(e_j) \mid e_i\,) = (\, e_j \mid f(e_i)\,) = a_{j,i}$$

ce qui prouve que la matrice de f dans la base orthonormale $\mathbf{e}$ est symétrique.

Réciproquement, supposons que la matrice de f dans la base orthonormale $\mathbf{e}$ soit symétrique. Soit $\mathbf{e}'$ une autre base orthonormale, B la matrice de f dans $\mathbf{e}'$ et P la matrice (orthogonale) de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathbf{e}'$.

Alors $B = P^{-1}AP = {}^tPAP$ donc ${}^tB = {}^tP{}^tAP = {}^tPAP = B$, ce qui prouve que B est également symétrique.

Soit x et y deux vecteurs de E. Si X et Y sont les matrices colonnes de leurs composantes dans $\mathbf{e}$, alors on a :

$$(\, f(x) \mid y\,) = {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY = {}^tXAY = (\, x \mid f(y)\,).$$

26.7 Soit $\mathbf{e}'$ une autre base orthonormale. On note B la matrice de f dans $\mathbf{e}'$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathbf{e}'$. Alors $B = P^{-1}AP = {}^tPAP$ donc ${}^tB = {}^tP{}^tAP = -B$, ce qui prouve que B est également antisymétrique.

Soit x et y deux vecteurs de E. Si X et Y sont les matrices colonnes de leurs composantes dans $\mathbf{e}$, alors on a :

$$(\, f(x) \mid y\,) = {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY = -{}^tXAY = -(\, x \mid f(y)\,).$$

26.8 Si la famille $(x_1, x_2, \dots x_n)$ est liée, alors $\operatorname{Det}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ et l'on a bien le résultat.

Si la famille est libre, alors, par le procédé de Schmidt, on obtient une base $(e_1, e_2, \dots e_n)$ orthonormale donc $\operatorname{Det}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \pm \det_{\mathbf{e}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

La matrice dans cette base de la famille $(x_1, x_2, \dots x_n)$ est triangulaire supérieure et les éléments diagonaux sont les $(\, x_i \mid e_i\,)$, $i \in [\![1,n]\!]$, puisque la base $(e_1, e_2, \dots e_n)$ est orthonormale. Donc :

$$\det_{\mathbf{e}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} (\, x_i \mid e_i\,).$$

De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left| \prod_{i=1}^{n} (\, x_i \mid e_i\,) \right| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|\, \|e_i\| = \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|,$$

ce qui montre le résultat.

26.9 1. Si la famille $(x_1, x_2, \ldots x_p)$ est liée, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$. En notant C_i la i-ème colonne de la matrice $G(x_1, x_2 \ldots, x_p)$, on obtient $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i C_i = 0$ donc $\det G(x_1, x_2 \ldots, x_p) = 0$ puisque les vecteurs colonnes de $G(x_1, x_2 \ldots, x_p)$ sont liés.

Réciproquement, si $\det G(x_1, x_2 \ldots, x_p) = 0$, alors la famille $(C_1, C_2, \ldots, C_p)$ est liée. Il existe donc des réels non tous nuls $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i C_i = 0$.

Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\forall j \in [\![1, p]\!] \quad \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \;\middle|\; x_j \right) = 0.$$

Par suite, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in F \cap F^{\perp}$ donc le vecteur $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ est nul, ce qui montre que la famille $(x_1, x_2, \ldots x_p)$ est liée.

2. • Soit $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base orthonormale de F. Alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1, p]\!]^2 \quad (\, x_i \mid x_j \,) = \sum_{k=1}^{p} (\, x_i \mid f_k \,)(\, x_j \mid f_k \,).$$

Donc, si A est la matrice de la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ dans $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$, alors $G = {}^t\!AA$, d'où $\det G = \det_{\mathbf{f}}(x_1, x_2, \ldots, x_p)^2 > 0$.

• Du fait du caractère alterné du déterminant, pour toute famille de réels $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$, on a :

$$\det G(x, x_1, x_2, \ldots, x_p) = \det G \left(x - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i, x_1, x_2, \ldots, x_p \right)$$

puisque $G \left(x - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i, x_1, x_2, \ldots, x_p \right)$ se déduit de $G\,(x, x_1, x_2, \ldots, x_p)$ par les opérations élémentaires :

$$C_0 \leftarrow C_0 - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \, C_j \qquad \text{et} \qquad L_0 \leftarrow L_0 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, L_i.$$

Donc $\det G(x, x_1, x_2, \ldots, x_p) = \det G(x - p(x), x_1, x_2, \ldots, x_p)$ où $p(x)$ est la projection orthogonale de x sur F. De plus,

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad (\, x - p(x) \mid e_i \,) = 0.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \det G(x, x_1, x_2 \ldots, x_p) &= \det \begin{pmatrix} (\, x - p(x) \mid x - p(x) \,) & 0_{1,p} \\ 0_{p,1} & G(x_1, x_2, \ldots, x_p) \end{pmatrix} \\ &= \|x - p(x)\|^2 \det G(x_1, x_2 \ldots, x_p). \end{aligned}$$

Ainsi, $d(x, F)^2 = \|x - p(x)\|^2 = \dfrac{\det G(x, x_1, x_2 \ldots, x_p)}{\det G(x_1, x_2 \ldots, x_p)}$.

Chapitre 27 : Géométrie affine et euclidienne

I Sous–espaces affines **1343**
- 1 Repères cartésiens 1343
- 2 Représentation des sous-espaces affines 1345

II Parallélisme et intersection **1351**
- 1 Parallélisme 1351
- 2 Intersection de sous espaces affines 1353

III Géométrie euclidienne **1354**
- 1 Orthogonalité 1354
- 2 Distance à un hyperplan affine 1356
- 3 Orientation d'un hyperplan affine 1358

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . **1359**

27 Géométrie affine et euclidienne

À l'école primaire, puis au collège et au lycée vous avez découvert la géométrie plane et la géométrie dans l'espace. Dans les deux cas vous disposiez d'un espace dont les éléments portaient le nom de points et étaient notés classiquement par des lettres capitales $A, B, \ldots, M, N, \ldots$ Avec ces points vous avez formé des figures (droites, triangles...) et vous avez étudié des propriétés de ces figures.
En seconde, étant donnés deux points : A (appelé origine) et B (appelé extrémité), vous avez défini la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et étudié la condition pour que deux telles translations soient les mêmes ; vous avez alors découvert l'égalité de deux tels vecteurs et introduit la notion de vecteur du plan (ou de l'espace) noté en général par $\vec{u}$, $\vec{v}\ldots$ Vous avez alors étudié l'ensemble E de ces vecteurs et défini l'addition et le produit d'un vecteur par un réel.
Maintenant vous avez découvert en algèbre la notion d'espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ et c'est dans ce contexte qu'est envisagée la géométrie de ce chapitre ; pour suivre cette démarche faire des figures planes dans le cas de $E = \mathbb{R}^2$ est très utile et quasiment incontournable.

Dans ce chapitre, nous considérons donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie dans lequel on considère :

- les points c'est-à-dire les éléments de E,
- les vecteurs obtenus comme différence de deux éléments de E.

Formellement, il n'y a pas de différence entre les points et les vecteurs car tout élément de E est la différence de deux éléments de E (lui-même et 0 par exemple) mais l'on ne s'autorisera pas les mêmes opérations sur les points et les vecteurs.
Par exemple, si l'on se place dans $\mathbb{R}^2$ et que l'on considère une droite, il parait naturel de ne pas « additionner » deux points de la droite même si l'on pourrait en les identifiant à des vecteurs, car cela risquerait de nous faire sortir de cette droite.
Il s'agit dans ce chapitre de considérer la *structure affine* de l'espace vectoriel E c'est-à-dire de mettre en œuvre des outils permettant d'exprimer entre autres :

- que des points sont alignés ou coplanaires,
- que des droites ou des plans sont parallèles.

Notation Généralement, lorsque l'on fait de la géométrie affine, les vecteurs sont représentés par des lettres minuscules, le plus souvent surmontées de flèches ($\vec{\imath}$, $\vec{u}\ldots$), et les points par des lettres majuscules (A, B, $M\ldots$). En particulier, le point O est l'élément 0 de l'espace vectoriel E. Si A et B sont deux points de E, on désigne par $\overrightarrow{AB}$ le vecteur $B-A$.
Avec ces notations, on a :

- $\forall (A,B)\in E^2 \quad A=B \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}=0$,
- $\forall (A,B)\in E^2 \quad \overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$,
- $\forall (A,B)\in E^2 \quad B=A+\vec{u} \Longleftrightarrow \vec{u}=\overrightarrow{AB}$,
- $\forall (A,B,C)\in E^3 \quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (*relation de Chasles*).

I Sous–espaces affines

1 Repères cartésiens

Définition 1

On appelle repère cartésien de E, tout couple $(\Omega,\mathbf{e})$, où Ω est un point de E et $\mathbf{e}$ une base de E.

Exemple On appelle repère cartésien canonique de $\mathbb{R}^n$ le repère $(0,\mathbf{e})$ où $\mathbf{e}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2

Soit $\mathcal{R}=(\Omega,\mathbf{e})$ un repère cartésien de E avec $\mathbf{e}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n)$.

On appelle **coordonnées** d'un point M de E dans le repère $\mathcal{R}$, l'unique n–uplet de réels $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ tel que :

$$\overrightarrow{\Omega M}=\sum_{i=1}^{n} x_i\,\vec{e}_i.$$

Remarques

- Les réels $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ dans la base $\mathbf{e}$, ce qui prouve l'existence et unicité des coordonnées du point M dans le repère $\mathcal{R}$.
- Si E est de dimension 3 et que les points A, B, C et D sont tels que la famille $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ soit libre, alors dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$, les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.

Règles de calcul

Soit $\mathcal{R} = (\Omega, \mathbf{e})$ un repère de E.

- Si A et B sont deux points de E dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont respectivement $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, alors l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Omega B} - \overrightarrow{\Omega A}$ montre que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$ dans la base $\mathbf{e}$.
- Si A est un point de E de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{R}$ et $\vec{u}$ un vecteur de E de composantes $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ dans $\mathbf{e}$, alors la relation $\overrightarrow{\Omega B} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B}$ montre que, dans $\mathcal{R}$, le point $B = A + \vec{u}$ a pour coordonnées $(x_1 + \alpha_1, x_2 + \alpha_2, \dots, x_n + \alpha_n)$.

Exemples Soit $\mathcal{R} = (\Omega, \mathbf{e})$ un repère de E.

1. Si $\vec{u}$ est un vecteur de composantes $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ dans $\mathbf{e}$, alors dans le repère $\mathcal{R}$, un point de coordonnées $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est transformé par la translation de vecteur $\vec{u}$ en le point de coordonnées $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ avec :
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \alpha_1 \\ y_2 = x_2 + \alpha_2 \\ \quad\vdots \\ y_n = x_n + \alpha_n. \end{cases}$$
Réciproquement, toute famille de relations de ce type correspond à une translation.

2. Soit A un point de E et λ un réel non nul. On appelle **homothétie** de centre A et de rapport λ l'application $h_{A,\lambda}$: $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & A + \lambda \overrightarrow{AM}. \end{array}$

   Si les coordonnées de A dans le repère $\mathcal{R}$ sont $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, alors un point de coordonnées $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est transformé par l'homothétie de centre A et de rapport λ en le point de coordonnées $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ avec :
$$\begin{cases} y_1 = a_1 + \lambda\,(x_1 - a_1) \\ y_2 = a_2 + \lambda\,(x_2 - a_2) \\ \qquad\vdots \\ y_n = a_n + \lambda\,(x_n - a_n) \end{cases}$$
Réciproquement, étant donné $\mu \neq 1$ et des scalaires b_1, b_2,..., b_n quelconques, toute famille de relations du type :
$$\begin{cases} y_1 = b_1 + \mu\, x_1 \\ y_2 = b_2 + \mu\, x_2 \\ \quad\vdots \\ y_n = b_n + \mu\, x_n \end{cases}$$
correspond à l'homothétie de rapport $1 - \mu$, dont le centre, unique point fixe de cette transformation, est le point de coordonnées $\frac{1}{1-\mu}(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

2 Représentation des sous-espaces affines

La notion de sous-espace affine a déjà été définie au chapitre 19.

Paramétrage et équation cartésienne d'un sous–espace affine

Définition 3

On appelle **famille de vecteurs directeurs** d'un sous-espace affine $\mathcal{F}$, toute base de la direction F de $\mathcal{F}$.

Définition 4

Si $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p)$ est une famille de vecteurs directeurs d'un sous-espace affine $\mathcal{F}$ et si A est un point de $\mathcal{F}$, alors l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) & \longmapsto & A + \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \, \vec{u}_i \end{array}$$

est une bijection appelée **paramétrage** de $\mathcal{F}$.

Définition 5

Étant donné une fonction F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Une équation $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ est appelée **équation cartésienne** d'un sous-espace affine $\mathcal{F}$ de E muni du repère $\mathcal{R}$ si, pour tout point M de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{R}$, on a l'équivalence :

$$M \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow F(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Remarque Sous les hypothèses de la définition précédente, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'équation $\lambda\, F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ est aussi une équation de $\mathcal{F}$. Il n'y a donc pas unicité d'une telle équation. On parle donc **d'une** équation cartésienne de $\mathcal{F}$

On rappelle qu'un sous-espace affine $\mathcal{F}$ de E de direction F est :

- un hyperplan affine si F est un hyperplan vectoriel de E ;
- une droite affine si F est une droite vectorielle ;
- un plan affine si F est un plan vectoriel.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, le plan $\mathcal{P}$ passant par $(1,0,0)$ et dirigé par $\text{Vect}\big((1,-1,0),(0,1,-1)\big)$ admet pour paramétrage :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -\mu \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

et pour équation cartésienne $x + y + z = 1$.
En effet, tout point de $\mathcal{P}$ vérifie évidemment cette équation.
Réciproquement, si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vérifie $x + y + z = 1$, il suffit de prendre $\mu = -z$ et $\lambda = x - 1$. On a alors $x = 1 + \lambda$ et $z = -\mu$, il vient :

$$y = 1 - x - z = 1 - (1 + \lambda) + \mu = -\lambda + \mu.$$

Proposition 1

Soit E de dimension n muni d'un repère $\mathcal{R} = (\Omega, \mathbf{e})$.

- Un hyperplan affine $\mathcal{H}$ de E possède au moins une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ du type :
$$\sum_{i=1}^{n} u_i\, x_i = h \qquad \text{avec} \qquad (u_1, u_2, \dots, u_n) \neq (0, 0, \dots, 0). \qquad (*)$$
- Réciproquement, la relation $(*)$ est l'équation cartésienne d'un hyperplan affine dont la direction admet pour équation cartésienne dans $\mathbf{e}$:
$$\sum_{i=1}^{n} u_i\, x_i = 0.$$
- Deux équations de la forme $(*)$ représentent le même hyperplan affine si, et seulement si, elles sont proportionnelles.

Démonstration page 1359

Remarque On abrège souvent « équation cartésienne » en « équation » quand il n'y a pas d'ambiguïté sur le repère dans lequel l'on se place.

Droites affines

Proposition 2

Une partie $\mathcal{D}$ de E est une droite affine s'il existe un point A et un vecteur $\vec{u}$ non nul tels que $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\vec{u} = \{A + \lambda\, \vec{u}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Une telle droite $\mathcal{D}$ se note aussi $\mathcal{D} = (A, \vec{u})$ et le vecteur $\vec{u}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite $\mathcal{D}$. On dit aussi que $\mathcal{D}$ est **dirigée** par $\vec{u}$.

Remarques

- Une droite affine est une droite vectorielle si, et seulement si, elle passe par l'origine.
- Si A et B sont deux points distincts de E, alors il existe une unique droite affine, notée (AB), passant par A et B : c'est la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Corollaire 3

La droite $\mathcal{D} = (A, \vec{u})$ admet pour paramétrage l'application :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \lambda & \longmapsto & A + \lambda\, \vec{u}. \end{array}$$

Exemples

- Dans un plan affine muni d'un repère, la droite affine passant par le point de coordonnées (a, b) et dirigée par le vecteur non nul de coordonnées (α, β) admet pour paramétrage :
$$\begin{cases} x = a + \lambda\, \alpha \\ y = b + \lambda\, \beta \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- En dimension 3, la droite affine passant par le point de coordonnées (a,b,c) et dirigée par le vecteur non nul de coordonnées (α,β,γ) admet pour paramétrage :

$$\begin{cases} x = a + \lambda\,\alpha \\ y = b + \lambda\,\beta \\ z = c + \lambda\,\gamma \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Soit a et b deux fonctions continues sur un intervalle I alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{E}$$

  est donné par :

$$\mathcal{S} = \{f_1 + \lambda f_0\,;\ \lambda \in R\}$$

  où f_1 est une solution de l'équation (E) et f_0 une solution non nulle de l'équation homogène associée. Il s'agit donc d'une droite affine passant par f_1 et dirigée par f_0.

- Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul, on appelle **demi-droite** d'extrémité A et dirigée par $\vec{u}$ l'ensemble des points $A+\lambda\vec{u}$ avec $\lambda \geqslant 0$. Elle admet donc pour paramétrage :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \lambda & \longmapsto & A+\lambda\vec{u}. \end{array}$$

Lorsque E est de dimension 2, la proposition 1 de la page ci-contre donne le résultat suivant.

Corollaire 4

Soit E de dimension 2 muni d'un repère $\mathcal{R}$.

- Toute droite affine $\mathcal{D}$ du plan a une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ du type :

$$a\,x + b\,y + c = 0 \quad \text{avec} \quad (a,b) \neq (0,0).$$

- Réciproquement, toute équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ de la forme :

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{avec} \qquad (a,b) \neq (0,0)$$

  représente une droite affine dirigée par le vecteur de cordonnées $(-b,a)$.

- Deux telles équations représentent la même droite affine si, et seulement si, elles sont proportionnelles.

Remarques Soit E de dimension 2 muni d'un repère $\mathcal{R} = (\Omega, \mathbf{e})$.

- Une droite affine d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ est une droite vectorielle si, et seulement si, $c = 0$.

- Toute droite non dirigée par le vecteur de composantes $(0,1)$ dans la base $\mathbf{e}$ admet une équation de la forme $y = px+q$. Le réel p est alors appelé pente de la droite et le réel q l'ordonnée à l'origine.

- Toute droite dirigée par le vecteur de composantes $(0,1)$ dans la base $\mathbf{e}$ admet une équation de la forme $x = c$.
- La direction de la droite affine d'équation $ax+by+c=0$ est la droite vectorielle d'équation $ax+by=0$.

p.1359

Exercice 1 Soit E de dimension 2 muni d'un repère $\mathcal{R}$. Soit a et b deux réels non nuls. Donner une équation cartésienne et un paramétrage de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points A et B de coordonnées respectives $(a,0)$ et $(0,b)$.

Définition 6

On dit que des points sont **alignés** si, et seulement s'ils appartiennent à une même droite affine.

Proposition 5

Trois points A, B et C de E sont alignés si, et seulement si, la famille $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est liée c'est-à-dire si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont proportionnels.

Démonstration page 1360

Corollaire 6

Si E est de dimension 2 alors trois points A, B et C sont non alignés si, et seulement si, $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de E.

Remarque Soit E est de dimension 2 muni d'un repère $\mathcal{R} = (\Omega, \mathbf{e})$ et $\mathcal{D}$ la droite passant par deux points distincts M_1 et M_2 de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans le repère $\mathcal{R}$. Un point M de coordonnées (x,y) dans le repère $\mathcal{R}$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{M_1M}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont colinéaires c'est-à-dire si, et seulement si, le déterminant $\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}$ est nul.

p.1360

Exercice 2 Soit E de dimension 2.

Montrer que trois points $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$ de coordonnées $((x_i,y_i))_{1\leqslant i\leqslant 3}$ dans un repère de E sont alignés si, et seulement si, le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ est nul.

p.1360 **Exercice 3** Soit E de dimension 2, A, B et C trois points non alignés. On note I le milieu du segment $[BC]$. Une droite variable distincte de (BC) passant par I coupe les droites (AB) et (AC) respectivement en D et E.

Quel est le lieu des points d'intersection des droites (BE) et (CD) ?

On pourra se placer dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Plans affines

Proposition 7

Une partie $\mathcal{P}$ de E est un plan affine s'il existe un point A et deux vecteurs non proportionnels $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\mathcal{P} = A + \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Dans ce cas, on note aussi $\mathcal{P} = (A, \vec{u}, \vec{v})$.

Remarques

- Un plan affine est un plan vectoriel si, et seulement s'il passe par l'origine.
- Par trois points non alignés A, B et C passe un unique plan affine : c'est le plan $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Définition 7

On dit que des points sont **coplanaires** si, et seulement s'ils appartiennent à un même plan affine.

Proposition 8

Quatre points A, B, C et D sont coplanaires si, et seulement si, la famille $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est liée.

Démonstration page 1360

Remarques Soit E de dimension 3 muni d'un repère $(\Omega, \mathbf{e})$.

- Un point M appartient au plan $\mathcal{P} = A + \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ si, et seulement si, $\det_{\mathbf{e}}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$.
- Soit M_1, M_2 et M_3 trois points non alignés. Il existe un unique plan $\mathcal{P}$ passant par ces trois points.

  Plus précisément, si on note (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) et (x_3, y_3, z_3) leurs coordonnées respectives, alors un point M de coordonnées (x, y, z) appartient au plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, la famille $(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3})$ est liée c'est-à-dire si, et seulement si, le déterminant $\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$ est nul.

p.1361 **Exercice 4** Soit E de dimension 3. Montrer que trois points $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ de coordonnées $((x_i,y_i,z_i))_{1\leqslant i\leqslant 4}$ dans un repère de E sont coplanaires si, et seulement si, le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$ est nul.

Corollaire 9

Le plan $\mathcal{P} = (A, \vec{u}, \vec{v})$ admet pour paramétrage l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ (\lambda,\mu) & \longmapsto & A + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}. \end{array}$$

Remarques

- En dimension 3, un plan admet un paramétrage du type :
$$\begin{cases} x = a + \lambda\,\alpha_1 + \mu\,\alpha_2 \\ y = b + \lambda\,\beta_1 + \mu\,\beta_2 \\ z = c + \lambda\,\gamma_1 + \mu\,\gamma_2 \end{cases} \qquad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$
où les triplets $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ et $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ sont non proportionnels.

- Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et c une fonction continue sur un intervalle I alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :
$$y'' + ay' + by = c(x) \qquad (E)$$
est un plan affine passant par une solution particulière et dirigé par tout couple de solutions non proportionnelles de l'équation homogène associée.

- Si A est un point et $\mathcal{D}$ une droite ne contenant pas A, on appelle **demi–plan** délimité par $\mathcal{D}$ et contenant A l'ensemble des points $\Omega + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\overrightarrow{\Omega A}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\mu \geqslant 0$, où $\Omega\in\mathcal{D}$ et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

  Un demi–plan $\mathcal{P}$ admet donc un paramétrage du type :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ (\lambda,\mu) & \longmapsto & \Omega + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \end{array}$$
  avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

Lorsque E est de dimension 3, la proposition 1 de la page 1346 conduit au résultat suivant.

Corollaire 10

Soit E de dimension 3 muni d'un repère $\mathcal{R} = (\Omega, \mathbf{e})$.

- Tout plan affine $\mathcal{P}$ de E a une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ du type :
$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \quad \text{avec} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$
- Réciproquement, toute équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ de la forme :
$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{avec} \qquad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$
représente un plan affine dont la direction admet $ax + by + cz = 0$ pour équation dans $\mathbf{e}$.
- Deux telles équations représentent le même plan affine si, et seulement si, elles sont proportionnelles.

Remarque Sous ces hypothèses, un plan affine d'équation cartésienne $ax+by+cz+d = 0$ est un plan vectoriel si, et seulement si, $d = 0$ c'est-à-dire si, et seulement s'il passe par l'origine.

p.1361 **Exercice 5** Soit E de dimension 3 muni du repère $\mathcal{R}$. Donner un paramétrage du plan d'équation $ax + by + cz = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathrm{IR}^2 \times \mathrm{IR}^*$.

II Parallélisme et intersection

1 Parallélisme

Définition 8

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E dirigés respectivement par F et G.

- On dit que $\mathcal{F}$ est **parallèle à** $\mathcal{G}$ si $F \subset G$.
- On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont **parallèles** si $F = G$.

Exemples

1. En particulier :
   - une droite peut être parallèle à un plan,
   - deux plans peuvent être parallèles,
   - un plan n'est jamais parallèle à une droite.
2. Deux droites sont parallèles si, et seulement si, elles admettent un vecteur directeur commun.

Remarques

- Soit A un point de E et F un sous-espace vectoriel de E. Si τ est une translation, on a $\tau(A+F) = \tau(A)+F$. Donc les sous-espaces affines $A+F$ et $\tau(A+F)$ sont parallèles car ils ont tous les deux F comme direction.
- Réciproquement, si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont deux sous-espaces affines parallèles, et si $(A_1, A_2) \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, alors $\mathcal{F}_2$ est l'image de $\mathcal{F}_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{A_1 A_2}$.

Proposition 11

Dans un repère $\mathcal{R}$, deux hyperplans d'équations :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i\, x_i = h \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} v_i\, x_i = k$$

sont parallèles si, et seulement si, $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sont proportionnels.

Démonstration. Conséquence du fait que deux hyperplans vectoriels sont égaux si, et seulement si, leurs équations sont proportionnelles. □

Exemples

- En dimension 2, deux droites d'équations $a_1\, x+b_1\, y+c_1 = 0$ et $a_2\, x+b_2\, y+c_2 = 0$ sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont colinéaires c'est-à-dire si, et seulement si, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1\, b_2 - a_2\, b_1 = 0$.
- En dimension 3, deux plans d'équations $a_1\, x + b_1\, y + c_1\, z = d_1$ et $a_2\, x + b_2\, y + c_2\, z = d_2$ sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont proportionnels.

Proposition 12

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E.

1. Si $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \varnothing$ ou $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.
2. Deux sous-espaces affines parallèles sont soit disjoints soit confondus.

Démonstration page 1361

Corollaire 13

- Deux droites parallèles sont confondues ou disjointes.
- Deux plans parallèles sont confondus ou disjoints.
- Une droite parallèle à un plan $\mathcal{P}$ est soit contenue dans $\mathcal{P}$ soit disjointe de $\mathcal{P}$.

2 Intersection de sous espaces affines

Rappelons le résultat suivant (*cf.* la proposition 22 de la page 1014) :

Proposition 14

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E, de directions respectives F et G. Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide, alors c'est un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

Proposition 15

Soit A et B deux points de E, ainsi que F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Le sous-espace affine $\mathcal{F}$ passant par A et dirigé par F et le sous-espace affine $\mathcal{G}$ passant par B et dirigé par G ont une intersection non vide si, et seulement si, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

En particulier, si F et G sont supplémentaires alors l'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est réduite à un point.

Démonstration page 1361

Corollaire 16

Si E est de dimension 2, alors deux droites affines non parallèles de E possèdent un unique point d'intersection

Démonstration page 1362

Corollaire 17

- Si E est de dimension 3, alors l'intersection de deux plans affines non parallèles de E est une droite affine.
- Réciproquement, en dimension 3, toute droite affine peut s'écrire comme l'intersection de deux plans affines non parallèles.

Démonstration page 1362

Corollaire 18

Soit E de dimension 3 muni d'un repère $\mathcal{R} = (\Omega, \mathbf{e})$.

Une partie de E est une droite si, et seulement si, elle admet dans $\mathcal{R}$ un système d'équations du type :

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z = d_1 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z = d_2 \end{cases}$$

avec (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) non proportionnels.

Sa direction est alors la droite vectorielle admettant dans $\mathbf{e}$ le système d'équations :

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z = 0 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z = 0 \end{cases}$$

Corollaire 19

Si E est de dimension 3, alors une droite $\mathcal{D}$ non parallèle à un plan $\mathcal{P}$ coupe ce dernier en un unique point.

Démonstration page 1362

III Géométrie euclidienne

Soit E un espace euclidien.

1 Orthogonalité

Définition 9

On appelle **repère orthonormal** de E, tout couple $(\Omega, \mathbf{e})$, où Ω est un point de E et $\mathbf{e}$ une base orthonormale de E.

Définition 10

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E dirigés respectivement par F et G. On dit que les sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont **orthogonaux** si les sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux.

Exemples Soit E un plan muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (\Omega, \mathbf{e})$.

- Deux droites d'équations $a_1\,x+b_1\,y+c_1 = 0$ et $a_2\,x+b_2\,y+c_2 = 0$ sont orthogonales si, et seulement si, les vecteurs directeurs $(-b_1, a_1)$ et $(-b_2, a_2)$ sont orthogonaux c'est-à-dire si, et seulement si, $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.
- Deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ orthogonales à une même troisième $\mathcal{D}_3$ sont parallèles. En effet, si la droite $\mathcal{D}_3$ est dirigée par le vecteur de coordonnées (a, b) alors les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ont pour équations $ax + by + c_1 = 0$ et $ax + by + c_2 = 0$ avec $(c_1, c_2) \in \mathrm{IR}^2$.

Définition 11

Si $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine, on appelle vecteur **normal** à $\mathcal{H}$ tout vecteur $\vec{n}$ non nul et orthogonal à tout vecteur de la direction de $\mathcal{H}$.

On dit alors aussi que $\mathcal{H}$ est **orthogonal** à $\vec{n}$.

Remarque En dimension 3, un vecteur normal au plan $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ est donné par le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (voir page 1324). Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans une base orthonormale directe $\mathbf{e}$, alors celles du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont données par :

$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Proposition 20

Soit $\mathcal{R} = (\Omega, \mathbf{e})$ un repère orthonormal de E, $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E de direction H et a un vecteur non nul de E de composantes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dans $\mathbf{e}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

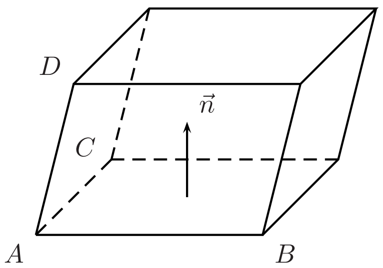
(i) l'hyperplan vectoriel H est le noyau de la forme linéaire $x \mapsto (\, a \mid x \,)$;

(ii) l'hyperplan affine $\mathcal{H}$ admet dans $\mathbf{e}$ une équation cartésienne de la forme :
$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = h;$$

(iii) le vecteur a est un vecteur normal à $\mathcal{H}$.

Démonstration page 1362

Exemple



Le volume d'un parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ est $\left|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$.
(On rappelle que si E de dimension 3 et si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3$ alors $\mathrm{Det}\,(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est égal au déterminant des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans n'importe quelle base orthonormée *cf.* définition 5 de la page 1324).

En effet, si $\mathcal{P}$ est un plan contenant les points A, B et C, alors l'aire $\mathcal{A}$ de la base du parallélépipède portée par $\mathcal{P}$ vérifie $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \mathcal{A}\vec{n}$ où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à $\mathcal{P}$ (*cf.* l'exemple de la page 1327). La hauteur étant $h = \left|\overrightarrow{AD}.\vec{n}\right|$, la définition du produit vectoriel de la page 1324, nous donne :
$$\left|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right| = \mathcal{A}\left|\vec{n}.\overrightarrow{AD}\right| = \mathcal{A}\,h = V.$$

Si E est orienté, alors le réel $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est appelé volume orienté du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Il est positif si la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est directe et négatif sinon.

Définition 12

Deux hyperplans sont **perpendiculaires** s'ils admettent des vecteurs normaux orthogonaux

Remarque

Ne pas confondre les notions d'orthogonalité et de perpendicularité :

- deux hyperplans peuvent être perpendiculaires, mais si E est de dimension supérieure ou égale à 3, ils ne peuvent pas être orthogonaux puisque leurs directions ne peuvent pas être en somme directe pour des raisons de dimension, donc *a fortiori* pas orthogonales ;

- si E est de dimension 2, les hyperplans sont des droites qui sont perpendiculaires si, et seulement si, elles sont orthogonales.

Proposition 21

Dans un repère orthonormal $\mathcal{R}$, deux hyperplans d'équations :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i = h \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i\, x_i = k$$

sont perpendiclaires si, et seulement si, $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$.

p.1362

Exercice 6 Soit E de dimension 3. Montrer que l'intersection de deux plans affines $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ non parallèles est une droite affine dirigée par le produit vectoriel de deux vecteurs normaux respectivement à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

On rappelle le résultat de la page 1325 : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires alors l'ensemble des vecteurs orthogonaux aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la droite dirigée par le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

2 Distance à un hyperplan affine

Proposition 22

Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de E alors pour tout point M, il existe un unique point H de $\mathcal{F}$ tel que

$$d(M, \mathcal{F}) = \|\overrightarrow{MH}\|.$$

Ce point est appelé projeté orthogonal de M sur $\mathcal{F}$.

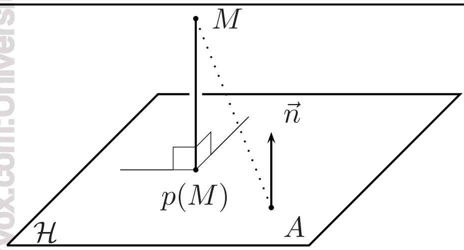
Principe de démonstration. Utiliser la proposition 23 de la page 1302.

Démonstration page 1362

Corollaire 23

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de E, A un point de $\mathcal{H}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{H}$. Si M est un point de E, alors on a :

$$d(M, \mathcal{H}) = \frac{|\vec{n}.\overrightarrow{AM}|}{\|\vec{n}\|}.$$



Démonstration page 1363

Proposition 24

Si $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine d'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + h = 0$ dans un repère orthonormal, alors la distance d'un point M de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à $\mathcal{H}$ est donnée par :

$$d(M, \mathcal{H}) = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + h\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}.$$

Démonstration page 1363

Corollaire 25

Soit E de dimension 2, muni d'un repère orthonormal. La distance d'un point de coordonnées (x, y) à une droite affine $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ est donnée par :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

On rappelle que si E de dimension 2 et si $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$ alors $\operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v})$ est égal au déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans n'importe quelle base orthonormée directe (*cf.* définition 5 de la page 1324).

Proposition 26

Soit E de dimension 2. La distance d'un point M à une droite affine $\mathcal{D} = (A, \vec{u})$ est donnée par :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\left|\operatorname{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u})\right|}{\|\vec{u}\|}.$$

Démonstration. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. On sait que $d(M, \mathcal{D}) = \|\overrightarrow{HM}\|$ et, par bilinéarité du déterminant :

$$\operatorname{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = \operatorname{Det}(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) + \operatorname{Det}(\overrightarrow{HM}, \vec{u})$$

ce qui donne, puisque les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires :

$$\operatorname{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = \operatorname{Det}(\overrightarrow{HM}, \vec{u}).$$

Comme de plus les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, on a l'égalité :

$$\left|\operatorname{Det}(\overrightarrow{HM}, \vec{u})\right| = \|\overrightarrow{HM}\| \, \|\vec{u}\|$$

ce qui donne le résultat. □

Remarque On peut retrouver ce résultat en calculant de deux façons l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$.

Corollaire 27

Soit E de dimension 3, muni d'un repère orthonormal. La distance d'un point de coordonnées (x, y, z) à un plan affine $\mathcal{P}$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax + by + cy + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

p.1363

Exercice 7 Soit E de dimension 3. En utilisant ce qui a été vu sur le produit vectoriel page 1324, montrer que la distance d'un point M à un plan affine $\mathcal{D} = (A, \vec{u}, \vec{v})$ est donnée par :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{\left|(\vec{u} \wedge \vec{v}).\overrightarrow{AM}\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{\left|\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM})\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}.$$

3 Orientation d'un hyperplan affine

Si l'espace E est orienté, **orienter un hyperplan affine** $\mathcal{H}$ de direction H consiste à choisir un vecteur u normal à H.
On dit alors qu'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ de la direction H de $\mathcal{H}$ est directe si la base $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, u)$ de E est directe, et indirecte sinon.

Exemple En dimension 3, étant donné un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$, une base $(\vec{u}, \vec{v})$ de P est directe si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{n}$ sont positivement colinéaires. Ainsi, si l'équation de $\mathcal{P}$ dans un repère orthonormal direct est $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$ et si l'on oriente $\mathcal{P}$ par le vecteur de coordonnées (a, b, c), alors une base directe de $\mathcal{P}$ est $(\vec{u}, \vec{v})$ où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(-c, 0, a)$ et $(0, -c, b)$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 1

- La direction de $\mathcal{H}$ est un hyperplan vectoriel de E et donc admet dans **e** au moins une équation du type :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i x_i = 0 \qquad \text{avec} \qquad (u_1, u_2, \ldots, u_n) \neq (0, 0, \ldots, 0).$$

  Soit A un point de $\mathcal{H}$ de coordonnées $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dans le repère $\mathcal{R}$. Si $M \in E$ a pour coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{R}$, alors on a :

$$M \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \in H \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i - a_i) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i x_i = h$$

  avec $h = \sum_{i=1}^{n} u_i a_i$.

- Réciproquement, supposons que $\mathcal{H}$ ait une équation du type $(*)$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $u_k \neq 0$. Le point A de coordonnées $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vérifiant :

$$a_k = \frac{h}{u_k} \qquad \text{et} \qquad a_i = 0 \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \setminus \{k\}$$

  appartient à $\mathcal{H}$.
  Une équation de $\mathcal{H}$ s'écrit alors :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i\, x_i = \sum_{i=1}^{n} u_i\, a_i \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \sum_{i=1}^{n} u_i\,(x_i - a_i) = 0$$

  et donc un point M appartient donc à $\mathcal{H}$ si, et seulement si, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ appartient à l'hyperplan vectoriel H d'équation $\sum_{i=1}^{n} u_i\, x_i = 0$, ce qui prouve que $\mathcal{H}$ est le sous-espace affine passant par A et dirigé par H.

- Si les hyperplans $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ d'équations respectives $\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i = h_1$ et $\sum_{i=1}^{n} b_i\, x_i = h_2$ sont confondus alors leurs directions aussi. Il existe donc $\lambda \in \mathrm{I\!R}^*$ tel que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $b_i = \lambda a_i$. On en déduit que $h_2 = \lambda h_1$.
  Réciproquement, si les équations de deux hyperplans affines sont proportionnelles, alors ces hyperplans sont confondus.

Exercice 1 La droite $\mathcal{D}$ admet pour équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, puisque cette dernière est l'équation d'une droite qui contient évidemment les points A et B.

Comme un point M de coordonnées (x, y) appartient à la droite $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $x = a - a\dfrac{y}{b}$, un paramétrage de la droite $\mathcal{D}$ est donné par :

$$\begin{cases} x = a - \lambda\, a \\ y = \lambda\, b \end{cases} \qquad \lambda \in \mathrm{I\!R}.$$

Proposition 5 Si les points A, B et C sont alignés, ils appartiennent à une même droite $\mathcal{D}$, et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ appartiennent à la direction de $\mathcal{D}$ qui est une droite vectorielle ; ils sont donc proportionnels.

Réciproquement, si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont proportionnels, alors, quitte à permuter les points B et C, il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$. Ainsi :

- soit $A = B$, et alors les points A, B et C sont confondus,
- soit $A \neq B$, et alors le point C appartient à la droite (AB) puisque $C = A + \lambda\,\overrightarrow{AB}$.

Dans les deux cas, les points A, B et C sont alignés.

Exercice 2 En soustrayant la première colonne aux deux autres, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

Or ce déterminant est nul si, et seulement si, la famille $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3})$ est liée c'est-à-dire si, et seulement si, les points M_1, M_2 et M_3 sont alignés.

Exercice 3 Plaçons nous dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Le point I a donc pour coordonnées $(1/2, 1/2)$. La droite (DE) passant par I et ne pouvant pas être parallèle à (AB) ou à (AC), admet une équation de la forme $y - \dfrac{1}{2} = k\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ avec $k \in \mathrm{IR}^*$.

Les points D et E ont alors respectivement comme coordonnées $\left(\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{k}), 0\right)$ et $\left(0, \frac{1}{2}(1 - k)\right)$. Les droites (BE) et (CD) ont pour équations respectives :

$$(1-k)x + 2y + k - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad -2x + \left(\frac{1}{k} - 1\right)y + 1 - \frac{1}{k} = 0.$$

Comme les droites (DE) et (BC) sont distinctes, ces deux droites ne sont pas parallèles, c'est-à-dire $k \neq -1$. On trouve alors les coordonnées du point d'intersection des deux droites :

$$\left(\frac{k - \frac{1}{k}}{2 + k + \frac{1}{k}}, -\frac{k - \frac{1}{k}}{2 + k + \frac{1}{k}}\right) = \frac{k-1}{k+1}\,(1, -1)$$

Le lieu cherché est donc une partie de la droite d'équation $x + y = 0$.

Plus précisément, l'application $k \mapsto \dfrac{k-1}{k+1}$ étant une bijection de IR^* sur $\mathrm{IR} \setminus \{-1, 1\}$, il s'agit de l'ensemble des points de cette droite d'abscisse différente de 1 et de -1.

Le lieu cherché est donc la droite $(A, \overrightarrow{BC})$ privée des deux points $A \pm \overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire des deux points M pour lesquels les quatre points A, B, C et M forment un parallélogramme.

Proposition 8 Si les points A, B, C et D sont coplanaires, alors ils appartiennent à un même plan affine $\mathcal{P}$, et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ appartiennent à la direction de $\mathcal{P}$

qui est un plan vectoriel. La famille $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est donc liée pour des raisons de dimension.

Réciproquement, si la famille $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est liée, alors, à une permutation près des points B, C et D, il existe un couple (λ, μ) de réels tel que $\overrightarrow{AD} = \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$. Ainsi :

- si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors les points A, B et C appartiennent à une même droite et $D = A + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$ aussi ;
- sinon, le point D appartient au plan (ABC) puisque $D = A + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$.

Dans les deux cas, les points A, B, C et D sont coplanaires (dans le premier, ils sont même alignés).

Exercice 4 En soustrayant la première colonne aux trois autres, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

Or ce déterminant est nul si, et seulement si, la famille $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_4},)$ est liée c'est-à-dire si, et seulement si, les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont coplanaires.

Exercice 5 Un point M de coordonnées (x, y, z) appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $z = -\dfrac{a}{c}x - \dfrac{b}{c}y$. Un paramétrage est donc :

$$\begin{cases} x = \lambda c \\ y = \mu c \\ z = -\lambda a - \mu b \end{cases} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Proposition 12 Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines parallèles de directions respectives F et G.

1. Supposons $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$ et prenons un point $\Omega \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Alors :
$$\mathcal{F} = \Omega + F \subset \Omega + G = \mathcal{G}.$$
2. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ne sont pas disjoints, alors, d'après le point précédent, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ puisque $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ parallèle à $\mathcal{F}$.

Proposition 15

- Si l'on peut trouver $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$, alors le point $M = B - \vec{v} = A + \vec{u}$ est alors à la fois dans $\mathcal{F}$ et dans $\mathcal{G}$, ce qui prouve que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide.
- Réciproquement, si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide, alors on peut trouver un point $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est alors dans F et le vecteur $\overrightarrow{BM}$ dans G.
  Par suite, comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
- Si $F \oplus G = E$, alors tout vecteur de E est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, et en particulier $\overrightarrow{AB}$. Donc $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide. C'est donc un sous-espace affine de E dirigé par $F \cap G = \{0\}$, ce qui prouve que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un point.

Corollaire 16 Si deux droites sont non parallèles, alors leurs directions sont deux droites vectorielles en somme directe et donc supplémentaires car E est de dimension 2. La proposition 15 permet alors de conclure.

Corollaire 17

- Si deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont non parallèles, alors leurs directions respectives P_1 et P_2 vérifient $\dim(P_1 \cap P_2) \leqslant 1$. De plus :
$$\dim(P_1 \cap P_2) = \dim P_1 + \dim P_2 - \dim(P_1 + P_2) = 4 - \dim(P_1 + P_2).$$
Comme E est de dimension 3, on en déduit que $\dim(P_1 \cap P_2) \geqslant 1$. Ainsi, $\dim(P_1 \cap P_2) = 1$ c'est-à-dire que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est une droite affine.
- Soit $\mathcal{D} = (\Omega, \vec{u})$ une droite de E. Complétons $\vec{u}$ en une base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de E. Les plans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ et $(\Omega, \vec{u}, \vec{w})$ ne sont pas parallèles, donc leur intersection est une droite. Comme elle contient $\mathcal{D}$, elle est égale à $\mathcal{D}$.

Corollaire 19 Si la droite $\mathcal{D}$, de direction D, est non parallèle au plan $\mathcal{P}$ de direction P, alors $D \cap P = \{0\}$. Comme E est de dimension 3, on en déduit que D et P sont supplémentaires dans E. La proposition 15 permet alors de conclure.

Proposition 20

$(i) \Longleftrightarrow (ii)$**.** Puisque $\mathbf{e}$ est orthonormale, pour tout vecteur x de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbf{e}$, l'égalité $(\, a \mid x\,) = 0$ se traduit par $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\, x_i = 0.$

$(iii) \Longrightarrow (i)$**.** Si a est un vecteur normal à $\mathcal{H}$, alors le noyau de $\varphi_a : x \mapsto (\, a \mid x\,)$ est un hyperplan contenant H et donc égal à H pour des raisons de dimension.

$(i) \Longrightarrow (iii)$**.** Si H est le noyau de la forme linéaire $x \mapsto (\, a \mid x\,)$, alors tous les éléments de H sont orthogonaux au vecteur a, ce qui prouve que a est un vecteur normal à H.

Exercice 6 On sait déjà que l'intersection de deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ non parallèles est une droite.

Soit $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ des vecteurs normaux à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ et $A \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. Alors un point M appartient à $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ si, et seulement si, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}_1$ et à $\vec{n}_2$, c'est-à-dire si, et seulement si, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$.

On a donc $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (A, \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2)$.

Proposition 22 Soit $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de E de direction F et passant par A et M_0 un point de E.

Notons τ la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$. Comme l'application τ réalise une bijection de $\mathcal{F}$ dans F, on a :
$$d(M_0, \mathcal{F}) = \inf_{M \in \mathcal{F}} \|\overrightarrow{M_0M}\| = \inf_{M \in \mathcal{F}} \|\overrightarrow{\tau(M_0)\tau(M)}\| = d(\tau(M_0), F)$$

De plus, d'après la proposition 23 de la page 1302, on a :
$$\begin{aligned} \forall M \in E \quad d(M_0, \mathcal{F}) = \|\overrightarrow{M_0M}\| &\Longleftrightarrow d(\tau(M_0), F) = \|\overrightarrow{\tau(M_0)\tau(M)}\| \\ &\Longleftrightarrow \tau(M) = p_{|F}(\tau(M_0)) \end{aligned}$$

Ainsi, il existe un unique $H \in \mathcal{F}$ tel que $d(M, \mathcal{F}) = \|\overrightarrow{MH}\|$, il s'agit de $\tau^{-1}\left(p_{|F}(\tau(M_0))\right)$.

Corollaire 23 La distance d'un point M à $\mathcal{H}$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{MH}$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{H}$.

On a alors $\overrightarrow{HM} = \lambda\,\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH} \perp \vec{n}$. Par suite :
$$\vec{n}.\overrightarrow{AM} = \vec{n}.\overrightarrow{AH} + \vec{n}.\overrightarrow{HM} = \lambda\,\vec{n}.\vec{n}$$
ce qui donne $\lambda = \dfrac{\vec{n}.\overrightarrow{AM}}{\|\vec{n}\|^2}$ et donc :
$$d(M,\mathcal{H}) = \|\overrightarrow{MH}\| = |\lambda|\,\|\vec{n}\| = \frac{|\vec{n}.\overrightarrow{AM}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Proposition 24 Le vecteur $\vec{n}$ de composantes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est un vecteur normal à $\mathcal{H}$.

Soit A un point de $\mathcal{H}$ de coordonnées $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. On a :
$$\|\vec{n}\|\,d(M,\mathcal{H}) = \left|(\,\vec{n}\mid\overrightarrow{AM}\,)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\,x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i\,t_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\,x_i + h\right|$$
ce qui donne le résultat.

Exercice 7 Soit H le projeté orthogonal du point M sur $\mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{HM} = \lambda\,\vec{u}\wedge\vec{v}$, et :
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$$
ce qui donne :
$$\overrightarrow{AM}.(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \overrightarrow{HM}.(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \lambda\,\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2.$$
Comme $d(M,\mathcal{P}) = \|\overrightarrow{HM}\| = |\lambda|\,\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$, on en déduit le résultat.

Partie V

Probabilités

Chapitre 28 : Dénombrement

I Ensembles finis . . . 1368
- 1 Définition . . . 1368
- 2 Sous-ensembles d'un ensemble fini . . . 1369
- 3 Réunion d'ensembles finis . . . 1370
- 4 Applications entre ensembles finis . . . 1371

II Dénombrement . . . 1374
- 1 Ensembles de p-listes . . . 1374
- 2 Applications . . . 1375
- 3 Arrangements . . . 1376
- 4 Combinaisons . . . 1378

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . . 1383

Exercices . . . 1393

Dénombrement

28

I Ensembles finis

Nous allons dans cette première partie, étudier les principales propriétés des ensembles finis. Elles sont assez intuitives.

1 Définition

Rappelons la définition donnée page 362.

Définition 1

Un ensemble E est **fini** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur E. Nous admettrons qu'un tel entier n est alors unique. Cet entier n est appelé **cardinal** de E, ou encore **nombre d'éléments** de E. On le note le plus souvent $\operatorname{card}(E)$, mais aussi $|E|$ ou encore $\#E$.

Remarques

- L'ensemble vide est fini, de cardinal 0 puisque $[\![1,n]\!] = \varnothing$ lorsque $n = 0$. Certains préfèrent néanmoins considérer cela comme une convention.
- Un ensemble est dit **infini** s'il n'est pas fini.

Les exercices suivants visent à démontrer l'unicité du cardinal, admise dans la définition.

p.1383

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k un entier de $[\![1,n]\!]$.

Alors $[\![1,n]\!]$ privé de k est en bijection avec $[\![1,n-1]\!]$.

p.1383

Exercice 2 Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer que s'il existe une injection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$, alors $n \leqslant p$.

En déduire que s'il existe une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,p]\!]$, alors $n = p$.

p.1383

Exercice 3 Montrer l'unicité du cardinal d'un ensemble fini non vide.

Remarques

1. Pour un ensemble fini, au lieu de cardinal, on parle aussi de **nombre d'éléments**.
2. Soit E est un ensemble fini, de cardinal $n \geqslant 1$.
Une bijection $i \longmapsto a_i$ de $[\![1,n]\!]$ sur E permet de numéroter les éléments de E et d'écrire $E = \{a_1, a_2 \ldots, a_n\}$.
3. L'ensemble vide est le seul ensemble de cardinal nul et la convention $\operatorname{card}(\varnothing) = 0$ est cohérente avec la définition puisque, si $n = 0$, alors $[\![1,n]\!] = \varnothing$.

Exemples

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $[\![1,n]\!]$ est de cardinal n car l'application identité est une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$.
2. Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $m \leqslant n$. Le cardinal de $[\![m,n]\!]$ est $n - m + 1$, car l'application $k \mapsto k + m - 1$ réalise une bijection de $[\![1, n-m+1]\!]$ sur $[\![m,n]\!]$.

Proposition 1

Si E est un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$ et si F est un ensemble qui peut être mis en bijection avec E, alors F est aussi fini de cardinal n.

Démonstration page 1383

Remarque Il en résulte que si E est un ensemble infini et si l'on dispose d'une bijection de E sur F, alors l'ensemble F est également infini.
En effet, si F était fini, il en serait de même de E.

2 Sous-ensembles d'un ensemble fini

Proposition 2

Si E est un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$ et a un élément de E, alors $E \setminus \{a\}$ est fini, de cardinal $n - 1$.

Principe de démonstration. On dispose d'une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur E. On en déduit, en utilisant l'exercice 1 de la page 1368, une bijection de $[\![1,n-1]\!]$ sur $E \setminus \{a\}$.

Démonstration page 1383

Proposition 3

Si E est un ensemble fini et F un sous-ensemble de E, alors F est fini et $\operatorname{card} F \leqslant \operatorname{card} E$. De plus, on a $\operatorname{card} F = \operatorname{card} E$ si, et seulement si, $F = E$.

Principe de démonstration. On peut raisonner par récurrence sur le cardinal de E et utiliser la proposition 2.

Démonstration page 1383

Remarque Pour démontrer l'égalité entre deux ensembles finis, il suffit de montrer une inclusion et l'égalité des cardinaux.

Corollaire 4

Si F est inclus dans E et si F est infini, alors E est infini.

Un exemple d'ensemble infini

Montrons que l'ensemble $\mathbb{N}$ est infini.
Supposons que $\mathbb{N}$ soit fini et notons n son cardinal. L'ensemble $[\![1, n+1]\!]$ est fini, de cardinal $n+1$, et inclus dans $\mathbb{N}$, donc d'après la proposition 3, on a $n+1 \leqslant n$. C'est absurde et $\mathbb{N}$ est donc infini.

p.1384 **Exercice 4** Montrer que les parties finies de $\mathbb{N}$ sont exactement les parties majorées.

p.1384 **Exercice 5** Montrer qu'un ensemble E est infini si, et seulement s'il contient une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments distincts deux à deux.

3 Réunion d'ensembles finis

Proposition 5

Si A et B sont deux ensembles finis et disjoints, alors $A \cup B$ est fini et on a :

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B.$$

Principe de démonstration. On dispose d'une bijection f de $[\![1, m]\!]$ sur A et d'une bijection g de $[\![1, n]\!]$ sur B. Il s'agit, à partir de f et de g, de construire une bijection de $[\![1, m+n]\!]$ sur $A \cup B$. Démonstration page 1384

Corollaire 6

Si A est un sous ensemble d'un ensemble E fini et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E, on a :

$$\operatorname{card} \overline{A} = \operatorname{card} E - \operatorname{card} A.$$

Corollaire 7

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des ensembles finis, deux à deux disjoints, alors $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ est fini et l'on a :

$$\operatorname{card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card} A_i.$$

Démonstration. Récurrence immédiate en utilisant la proposition 5. $\square$

Proposition 8

Si A et B sont des ensembles finis, alors $A \cup B$ est fini et on a :

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B).$$

Démonstration page 1385

p.1385

Exercice 6 Soit A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble fini E. Démontrer :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A \cup B \cup C) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B + \operatorname{card} C - \operatorname{card}(A \cap B) - \operatorname{card}(A \cap C) \\ - \operatorname{card}(B \cap C) + \operatorname{card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

p.1385

Exercice 7 Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties d'un ensemble fini E. Démontrer :

$$\operatorname{card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i).$$

Point méthode

Pour démontrer une formule de la forme $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, dans laquelle S, a_1, …, a_n sont des entiers naturels, autrement que par un calcul, on peut appliquer le corollaire 7 de la page 1370, c'est-à-dire exhiber un ensemble de cardinal S qui est l'union de n sous-ensembles disjoints de cardinaux respectifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

p.1386

Exercice 8 Pour n et p entiers naturels, avec n non nul, on note $u_{n,p}$ le nombre de n-listes $(x_1, \ldots, x_n)$ d'entiers naturels telles que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$.
Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$u_{n,p} = \sum_{k=0}^{p} u_{n-1,k}.$$

4 Applications entre ensembles finis

Lemme 9

Soit E et F deux ensembles, avec E fini. Si f est une injection de E dans F, alors l'ensemble $f(E)$ est fini et $\operatorname{card} f(E) = \operatorname{card}(E)$.

Démonstration. L'application $g : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & f(E) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est bijective, car si $y \in f(E)$, il existe un élément x de E tel que $y = f(x)$ et donc $y = g(x)$; de plus x est unique car f est injective. Ainsi l'ensemble $f(E)$ est fini et $\operatorname{card} f(E) = \operatorname{card} E$. □

Proposition 10

Soit E et F deux ensembles, avec E fini. Si f est une application de E dans F, alors l'ensemble $f(E)$ est fini et $\operatorname{card} f(E) \leqslant \operatorname{card} E$.

De plus, on a $\operatorname{card} f(E) = \operatorname{card} E$ si, et seulement si, f est injective.

Démonstration. On démontre par récurrence sur n la propriété H_n : « pour tout ensemble E de cardinal n et toute application f définie sur E, l'ensemble $f(E)$ est fini et $\operatorname{card} f(E) \leqslant \operatorname{card} E$; de plus, il y égalité si, et seulement si, f est injective ».

- Si $n = 0$, alors $E = \varnothing$, $f(E) = \varnothing$, donc $\operatorname{card} f(E) = 0 = \operatorname{card} E$ et f est injective.
- On suppose que la propriété est vraie pour tout ensemble de cardinal $n-1$ $(n \geqslant 1)$ et l'on considère un ensemble E de cardinal n.
  - ∗ Si f est injective, il résulte du lemme 9 que $\operatorname{card} f(E) = \operatorname{card} E$.
  - ∗ Si f n'est pas injective, il existe deux éléments x et y de E distincts tels que $f(x) = f(y)$. On a alors $f(E) = f(E \setminus \{y\})$ et $\operatorname{card}(E \setminus \{y\}) = n-1$. Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $f(E \setminus \{y\})$ est fini et $\operatorname{card} f(E \setminus \{y\}) \leqslant n-1$. Ainsi $f(E)$ est fini et $\operatorname{card} f(E) \leqslant n-1$.

  On a donc dans tous les cas $\operatorname{card} f(E) \leqslant \operatorname{card} E$, avec égalité si, et seulement si, f est injective. La propriété est vraie au rang n, ce qui termine la démonstration par récurrence.

□

Remarques De la proposition se déduisent les résultats suivants.

1. S'il existe une application surjective d'un ensemble fini E dans un ensemble fini F, on a alors $\operatorname{card} F \leqslant \operatorname{card} E$. En effet, dans ce cas, $f(E) = F$.
2. S'il existe une application injective f d'un ensemble fini E dans un ensemble fini F, on a alors $\operatorname{card} E \leqslant \operatorname{card} F$. En effet, dans ce cas,
$$\operatorname{card} E = \operatorname{card} f(E) \leqslant \operatorname{card} F.$$
   A contrario, si f est une application d'un ensemble fini E dans un ensemble fini F, avec $\operatorname{card} E < \operatorname{card} F$, alors f ne peut pas être injective : il y a deux éléments distincts de E qui ont même image.

Point méthode (Principe des tiroirs)

Si l'on place n objets dans m tiroirs, avec $n > m$, il y a un tiroir qui contient au moins deux objets. En effet, d'après la remarque qui précède, l'application qui à un objet associe le tiroir dans lequel il est rangé ne peut pas être injective.

Exemples

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Parmi $n+1$ réels de l'intervalle $[0,1]$, il y en a au moins deux dont la distance est inférieure à $\dfrac{1}{n}\cdot$

   En effet, en peut diviser le segment $[0,1]$ en n « tiroirs », les intervalles disjoints $\left[0, \dfrac{1}{n}\right[$, $\left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right[$, $\dots$, $\left[\dfrac{n-1}{n}, 1\right]$, de longueur $\dfrac{1}{n}$, dont la réunion est $[0,1]$. Chacun des $n+1$ réels appartient à l'un de ces n intervalles, donc nécessairement l'un des intervalles contient deux des $n+1$ réels, dont la distance est ainsi inférieure à $\frac{1}{n}\cdot$

2. Dans une pièce, il y a $n \geqslant 2$ personnes qui se serrent la main (pour se saluer). Alors, à chaque instant, il y a deux personnes qui ont serré la main à un nombre identique de personnes.
En effet, si à un instant donnée $k \geqslant 1$ personnes ont déjà serré des mains, le nombre de mains serrées par l'une de ces k personnes est un entier entre 1 et $k-1$. Donc nécessairement deux de ces personnes ont serré le même nombre de mains.

p.1386

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère des entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ non nécessairement distincts. En considérant les sommes $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, montrer que l'on peut trouver un sous-ensemble non vide de cet ensemble d'entiers, dont la somme est divisible par n.

Théorème 11

Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal, f une application de E dans F. Il y équivalence entre :

(i) f est injective ; (ii) f est surjective ; (iii) f est bijective.

Principe de démonstration. C'est une conséquence des propositions 3 et 10.

Démonstration page 1386

Corollaire 12

Si E est un ensemble fini et f une application de E dans E, il y a équivalence entre :

(i) f est injective ; (ii) f est surjective ; (iii) f est bijective.

p.1386

Exercice 10

Soit $(G, *)$ un groupe et H une partie *finie* non vide de G stable pour la loi $*$.

1. Soit x un élément fixé de H. Montrer que l'application $f_x : H \longrightarrow H$, définie par $f_x(y) = x * y$, réalise une bijection de E sur E.
2. En déduire que l'élément neutre e appartient à H, puis que H est un sous-groupe de G.

II Dénombrement

Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments d'un ensemble, c'est-à-dire déterminer son cardinal. Dans les démonstrations, il sera souvent fait usage de la proposition 1 de la page 1369. De manière générale, pour dénombrer un ensemble, on montre souvent qu'il a même nombre d'éléments qu'un autre ensemble plus simple dont on connaît le cardinal, même si la bijection n'est pas exhibée formellement.

1 Ensembles de p-listes

Rappel On rappelle que les éléments d'un produit cartésien de p ensembles sont appelés p-listes ou p-uplets et que les éléments de E^p sont appelés p-listes ou p-uplets d'éléments de E.

Proposition 13

Soit E et F deux ensembles. Si l'élément x peut prendre m valeurs dans l'ensemble E et si, pour chaque valeur de x, l'élément y peut prendre n valeurs dans l'ensemble F, alors le nombre total de valeurs que peut prendre le couple (x, y) est $m \times n$.

Principe de démonstration. On écrit l'ensemble des valeurs prises comme une réunion.

Démonstration page 1387

Corollaire 14

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E_1, E_2,..., E_p des ensembles quelconques. On suppose que :

- x_1 peut prendre n_1 valeurs dans E_1 ;
- pour chaque valeur de x_1, x_2 peut prendre n_2 valeurs dans E_2, ... ;
- pour chaque valeur de $(x_1, \ldots, x_{p-1})$, x_p peut prendre n_p valeurs dans E_p.

Alors, le nombre total de valeurs que peut prendre le p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ est $n_1 \times \cdots \times n_p$.

Principe de démonstration. Démonstration par récurrence.

Démonstration page 1387

p.1387

Exercice 11 Une puce se déplace sur un cube. Chaque déplacement la mène d'un sommet à un autre relié par une arête. Elle fait n déplacements en tout. Combien y a-t-il de trajets possibles ?

p.1387

Exercice 12 En utilisant l'alphabet usuel de 26 lettres, combien peut-on former de mots de cinq lettres (ayant un sens ou pas) dans lesquels figurent dans l'ordre une consonne, une voyelle, deux consonnes et enfin une voyelle.

Le dénombrement d'un produit cartésien d'ensembles finis est un cas particulier de la situation décrite dans le corollaire 14.

Corollaire 15

1. Soit E_1, $E_2, \ldots,$ E_p des ensembles finis. Alors $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ est fini et :
$$\operatorname{card}\left(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p\right)=\prod_{k=1}^{p} \operatorname{card} E_k .$$
2. Si E est un ensemble fini, alors $\operatorname{card}\left(E^p\right)=(\operatorname{card} E)^p$.

Démonstration.

1. Le premier point est un cas particulier du corollaire 14. On dénombre tous les p-uplets $(x_1, \ldots, x_p)$ de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$. Pour $2 \leqslant k \leqslant p$ et pour tout choix de $(x_1, \ldots, x_{k-1})$, x_k décrit E_k donc peut prendre $\operatorname{card} E_k$ valeurs.
2. Le second point correspond au cas $E_1=\ldots=E_p=E$. □

p.1387

Exercice 13 Le codage RGB d'une couleur consiste à indiquer, par trois entiers entre 0 et 255, la quantité des trois couleurs primaires (rouge, vert bleu) dont elle est constituée.

Combien peut-on coder de couleurs différentes en RGB ?

2 Applications

Proposition 16

Soit E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs $p \geqslant 1$ et n. Alors l'ensemble F^E des applications de E dans F est un ensemble fini et :
$$\operatorname{card}\left(F^E\right)=n^p=(\operatorname{card} F)^{\operatorname{card} E} .$$

Principe de démonstration. On note $E=\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$. Il suffit de se convaincre que l'application qui, à $f \in F^E$, associe le p-uplet $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_p)) \in F^p$, est bijective.

Démonstration page 1387

Remarque C'est le résultat de la proposition 16 qui explique la notation F^E pour l'ensemble des applications de E dans F.

p.1387

Exercice 14 Quel est le nombre de façons de ranger p objets distincts dans n tiroirs, chaque tiroir pouvant recevoir autant d'objets que l'on veut ?

p.1387

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,2]\!]$?
2. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,3]\!]$?

Parties d'un ensemble

Proposition 17

Si E un ensemble de cardinal n, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E a pour cardinal 2^n.

Démonstration. Il a été démontré dans le chapitre 7 (proposition 8 de la page 345) que l'application :

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ & A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$$

qui, à une partie de E, associe sa fonction indicatrice, est une bijection.
On a donc $\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = \operatorname{card}\left(\{0,1\}^E\right) = 2^n$. □

Remarque On peut retrouver ce résultat par le raisonnement suivant : déterminer une partie A de E, c'est déterminer pour chaque élément de E s'il appartient ou non à A. Il y a 2 possibilités pour chaque élément de E et en tout, 2^n choix.

p.1388

Exercice 16 Soit E un ensemble de cardinal n.

En s'inspirant de la méthode utilisée pour le calcul de $\operatorname{card} \mathcal{P}(E)$, démontrer que le nombre de couples (A,B) de parties de E telles que $A \subset B$ est 3^n.

3 Arrangements

Définition 2

Soit p un entier naturel non nul et E un ensemble. On appelle **p-arrangement** d'éléments de E, toute p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Remarque Si le cardinal de E est strictement inférieur à p, on ne peut pas trouver p éléments distincts dans E. Il n'y a donc pas de p-arrangement d'éléments de E.

Théorème 18

Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier naturel non nul. Le nombre de p-arrangements d'éléments de E est :

$$n(n-1)\ldots(n-p+1).$$

Ce nombre est noté A_n^p.

Démonstration page 1388

Remarque Si $n < p$, cette formule donne 0, car $n - n$ est un des p facteurs du produit, ce qui est bien le résultat attendu.

Corollaire 19

Si n est un entier naturel et p un entier naturel non nul, alors :

$$A_n^p = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$$

Remarques

1. On pose par convention $A_n^0 = 1$. La formule démontrée dans le corollaire reste valable pour $p = 0$.
2. Pour calculer un coefficient A_n^p, la formule $n(n-1)\dots(n-p+1)$, produit de p entiers consécutifs dont le plus grand est n, est plus efficace que la formule avec les factorielles.

Exemples

1. Le nombre de mots de p lettres distinctes qu'on peut former avec un alphabet de n lettres est A_n^p.
2. Une course de chevaux comporte 20 partants. Le nombre de résultats possibles de tiercés dans l'ordre est $A_{20}^3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.

Proposition 20

Le nombre d'injections d'un ensemble E de cardinal p dans un ensemble F de cardinal n est A_n^p.

Principe de démonstration. Considérer l'application Φ définie dans la démonstration de la proposition 16 de la page 1375.

Démonstration page 1388

Corollaire 21

Si $\operatorname{card} E = \operatorname{card} F = n$, le nombre de bijections de E sur F est $n!$.

Principe de démonstration. Utiliser le théorème 11 de la page 1373.

Démonstration page 1389

Rappel On rappelle qu'une permutation d'un ensemble E est une bijection de E sur lui-même.

Corollaire 22

Le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n est $n!$.

p.1389 **Exercice 17** Un groupe de $2n$ personnes comprend n hommes et n femmes.

1. Combien y a-t-il de manières de les disposer autour d'une table ronde, en ne tenant compte que de leurs positions relatives ? (deux dispositions sont identiques si chaque invité a le même voisin à sa gauche et le même voisin à sa droite).
2. Même question si l'on veut respecter l'alternance homme-femme ?
3. Même question si on veut respecter l'alternance homme-femme et que de plus Madame X soit à côté de Monsieur Y ?

4 Combinaisons

Dans le chapitre 2, ont été définis les coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$. On rappelle que, pour tous entiers naturels n et p :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}.$$

On remarque que l'on a, pour tous entiers naturels n et p : $\binom{n}{p} = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

Théorème 23

Soit n et p des entiers naturels. Le nombre de sous-ensembles de cardinal p d'un ensemble E de cardinal n est $\binom{n}{p}$.

Principe de démonstration. Soit E un ensemble de cardinal n. On considère l'application qui à un p-arrangement $(a_1, \dots, a_p)$ de E associe le sous-ensemble $\{a_1, \dots, a_p\}$ de E. On examine le nombre d'antécédents de chaque sous-ensemble $\{a_1, \dots, a_p\}$. Démonstration page 1389

Remarques

1. Si n et p sont des entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, le nombre de sous-ensembles de cardinal p d'un ensemble de cardinal n est donc $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
2. Un sous-ensemble de E de cardinal p est aussi appelé une p-combinaison d'éléments de E. Cela explique la notation C_n^p (c'est le nombre de p-combinaisons d'un ensemble de cardinal n) parfois employée à la place de $\binom{n}{p}$.
3. Si $n < p$, alors $\binom{n}{p} = 0$. En effet, dans un ensemble de cardinal n, il n'y a pas de sous-ensemble de cardinal strictement plus grand. Nous ferons la convention que $\binom{n}{p} = 0$ si $p < 0$, ce qui permet de garder leur validité à certaines formules, dans des cas particuliers (formule de Pascal par exemple).

p.1389 **Exercice 18** On tire 8 cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages contenant deux carrés (un carré est un ensemble de quatre cartes de même hauteur, par exemple quatre as) ?

p.1389 **Exercice 19** Soit n et p des entiers naturels non nuls. Combien y a-t-il de listes d'entiers $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ telles que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n$.

La différence entre arrangement et combinaison tient à ce que l'un est ordonné et l'autre pas. La démonstration du théorème 23 conduit à la remarque suivante.

Point méthode

Souvent, pour dénombrer, plusieurs méthodes sont possibles. La méthode adoptée peut mener directement à un dénombrement exact. Mais parfois elle conduit à compter tous les objets considérés plusieurs fois. Si chaque objet est compté exactement k fois pour un certain entier k, il suffit de diviser le nombre trouvé par k. Cela arrive en particulier quand le dénombrement amène à créer un ordre sur des objets qui n'étaient pas *a priori* ordonnés.

Exemple On désire organiser des matchs entre $2n$ équipes de basket, chacune disputant un match. De combien de façons u_n peut-on organiser ces matchs, c'est-à-dire apparier les équipes deux à deux ?
On choisit 2 équipes ($\binom{2n}{2}$ choix) pour former un premier match, puis 2 équipes parmi les $2n-2$ restantes ($\binom{2n-2}{2}$ choix) pour former un deuxième match,..., enfin 2 équipes parmi les 2 restantes pour faire un dernier match. On a ainsi :

$$\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n}$$

choix. Mais on a ainsi construit des listes $(M_1, M_2, \dots, M_n)$ de matchs, alors ce que l'on cherche à compter ce sont les ensembles $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ de n matchs, sans ordre. Pour obtenir le nombre cherché, il faut donc diviser par $n!$, nombre de façons de permuter $M_1, M_2, \dots, M_n$. On obtient :

$$u_n = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}.$$

p.1389 **Exercice 20** On garde les notations de l'exemple précédent.

Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a $u_n = (2n-1)u_{n-1}$ (on pourra privilégier une des équipes). Retrouver ainsi le résultat précédent.

p.1390

Exercice 21 (Anagrammes)

Étant donné un mot m, on appelle anagramme de m tout mot formé des mêmes lettres que m (un mot est simplement une liste de lettres).

1. Quel est le nombre d'anagrammes du mot orange ?
2. Quel est le nombre d'anagrammes du mot ananas ?
3. Quel est le nombre d'anagrammes d'un mot contenant n_1 fois la lettre ℓ_1, n_2 fois la lettre ℓ_2, ..., n_p fois la lettre ℓ_p ?

Propriétés des coefficients $\binom{n}{p}$

Les propriétés des coefficients binomiaux ont été démontrées par des calculs, dans le chapitre 2. Nous proposons de les redémontrer en faisant appel à des méthodes combinatoires, c'est-à-dire à des dénombrements.

Proposition 24

Si n et p sont des entiers tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Principe de démonstration. Considérer l'application qui, à une partie de $[\![1, n]\!]$, associe son complémentaire.

Démonstration page 1390

Proposition 25 (Formule de Pascal)

Si n et p sont des entiers tel que $1 \leqslant p \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

Principe de démonstration. Isoler un élément de $[\![1, n]\!]$.

Démonstration page 1390

p.1391

Exercice 22 (Formule de Pascal généralisée)

En utilisant la formule de Pascal, démontrer que, pour n et p entiers tels que $0 \leqslant n \leqslant p$, on a :

$$\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}.$$

Formule du binôme

La formule du binôme a été démontrée page 112 par récurrence. Nous en proposons une autre démonstration basée sur des arguments combinatoires.

p.1391

Exercice 23 Soit a et b deux nombres complexes, n un entier naturel.

1. On développe $(a+b)^n = (a+b)\times(a+b)\times\cdots\times(a+b)$. Quelle est la forme des termes obtenus ?
2. Pour k fixé, combien y a-t-il de termes égaux à $a^k b^{n-k}$? Conclure.

Applications de la formule du binôme

Exemple En prenant $a=b=1$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$. Cela donne une nouvelle démonstration du fait que, si $\operatorname{card} E = n$, alors $\operatorname{card}\mathcal{P}(E) = 2^n$. En effet si l'on note, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal k, alors $\mathcal{P}(E)$ est la réunion disjointe de $\mathcal{P}_0(E)$, $\mathcal{P}_1(E)$,…, $\mathcal{P}_n(E)$, donc :

$$\operatorname{card}\mathcal{P}(E) = \sum_{k=0}^{n}\operatorname{card}\mathcal{P}_k(E) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$$

p.1391

Exercice 24 Soit n un entier naturel non nul. En considérant $(1-1)^n$, montrer que tout ensemble de cardinal n possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

p.1391

Exercice 25 (Formule de Vandermonde)

Soit m, n et p trois entiers naturels. Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

On peut considérer un ensemble de cardinal $m+n$, réunion d'un ensemble de cardinal m et d'un ensemble de cardinal n et utiliser la méthode exposée page 1371.

En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Point méthode

Plus généralement, toute égalité entre deux expressions entières peut résulter du dénombrement d'un ensemble par deux méthodes distinctes.

p.1392

Exercice 26 Soit k, p et n des entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$. En dénombrant de deux manières les couples (A, B) de parties d'un ensemble de cardinal n telles que card $A = k$, card $B = p$ et $A \subset B$, montrer que :

$$\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}.$$

Remarques

1. La formule démontrée dans l'exercice peut aussi s'obtenir simplement en écrivant les deux termes de l'égalité sous forme de factorielle et en simplifiant.
2. En prenant $k = 1$, on obtient $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$, formule bien utile comme le montrent les calculs qui suivent.

p.1392

Exercice 27 Soit n un entier naturel.

1. Calculer :
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}.$$
2. Retrouvez le deux premières formules, en développant $(x+1)^n$ par la formule du binôme et en dérivant.

Point méthode

Pour résoudre un problème de dénombrement, il faut commencer par réfléchir à la nature des objets à dénombrer : sont-ils ordonnés ou non ; les éléments qui les composent sont-ils distincts ou pas..., et essayer de se ramener au comptage d'éléments simples : produits cartésiens, applications, permutations, arrangements, combinaisons.
Ensuite, reste à élaborer une stratégie qui assure que tous les objets considérés seront bien comptés une et une seule fois.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 Considérons l'application $f : [\![1,n]\!] \setminus \{k\} \to [\![1,n-1]\!]$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < k \\ x-1 & \text{si} \quad x > k \end{cases}$$

(l'un des cas pouvant être impossible). Elle envoie injectivement $[\![1,k-1]\!]$ sur $[\![1,k-1]\!]$ et $[\![k+1,n]\!]$ sur $[\![k,n-1]\!]$. Elle réalise donc une bijection de $[\![1,n]\!]\setminus\{k\}$ sur $[\![1,n-1]\!]$.

Exercice 2

- On montre par récurrence pour $n \geqslant 1$, la propriété H_n : « s'il existe un entier p et une injection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ alors $n \leqslant p$ ».
  - $*$ La propriété H_1 est évidente car pour $p=0$, $[\![1,p]\!] = \varnothing$, donc s'il existe une application (injective) de $[\![1,1]\!] = \{1\}$ dans $[\![1,p]\!]$, on a $p \geqslant 1$.
  - $*$ On suppose établie H_n et l'on montre H_{n+1}.
    Soit f une injection de $[\![1,n+1]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$. On pose $k = f(n+1)$; alors k est dans $[\![1,p]\!]$ et l'application $f' : \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,p]\!] \setminus \{k\} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est injective.
    D'après l'exercice 1, il existe une bijection g de $[\![1,p]\!] \setminus \{k\}$ sur $[\![1,p-1]\!]$ et l'application $h = g \circ f'$ est une injection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p-1]\!]$ car composée de deux injections. Par application de H_n, on obtient $n \leqslant p-1$ et donc $n+1 \leqslant p$.
- Si f est une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,p]\!]$, alors f est une injection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$, donc $n \leqslant p$ et f^{-1} une injection de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, donc $p \leqslant n$. Finalement $n = p$.

Exercice 3 Soit E un ensemble. Supposons qu'il existe des entiers naturels n et p non nuls et des bijections f (respectivement g) de $[\![1,n]\!]$ (respectivement $[\![1,p]\!]$) sur E. Alors $g^{-1} \circ f$ est une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,p]\!]$ donc $n = p$ d'après l'exercice 2.

Proposition 1 Par définition du cardinal, il existe une bijection f de $[\![1,n]\!]$ sur E. D'autre part, par hypothèse, il existe une bijection φ de E sur F. La composée $\varphi \circ f$ est alors une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur F.

Proposition 2 Soit f une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur E.

- Si $n=1$, on a $E = \{f(1)\}$ et nécessairement $a = f(1)$. Ainsi $E = \{a\}$, $E\setminus\{a\} = \varnothing$ et $\operatorname{card}(E \setminus \{a\}) = 0 = 1-1$. On suppose désormais $n \geqslant 2$.
- Soit $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $f(k) = a$. L'application $f' : \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] \setminus \{k\} & \longrightarrow & E \setminus \{a\} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$
  est une bijection de $[\![1,n]\!] \setminus \{k\}$ sur $E \setminus \{a\}$. D'après l'exercice 1, il existe une bijection g de $[\![1,n-1]\!]$ sur $[\![1,n]\!] \setminus \{k\}$. La composée $f' \circ g$ est une bijection de $[\![1,n-1]\!]$ sur $E \setminus \{a\}$. Donc $E \setminus \{a\}$ est fini et $\operatorname{card}(E \setminus \{a\}) = n-1$.

Proposition 3 On démontre par récurrence la propriété H_n : « si E est un ensemble fini de cardinal n et F un sous-ensemble de E, alors F est fini et $\operatorname{card} F \leqslant n$; de plus $\operatorname{card} F = n$ équivaut à $F = E$ ».

- Le cas $n = 0$ est évident, car on a alors $E = F = \varnothing$.

- Supposons que la propriété soit vérifiée au rang $n-1$ $(n \geqslant 1)$ et montrons-la au rang n. Considérons donc un ensemble E de cardinal n et $F \subset E$.
  * Si $F = E$, alors F est fini et $\operatorname{card} F = n$.
  * Si $F \neq E$, il existe un élément a de E qui n'est pas dans F. On a donc $F \subset E \setminus \{a\}$. D'après la proposition 2, $\operatorname{card}(E \setminus \{a\}) = n-1$. Par hypothèse de récurrence, tout sous-ensemble de $E \setminus \{a\}$ est fini, de cardinal inférieur ou égal à $n-1$. On obtient donc $\operatorname{card} F \leqslant n-1 < n$.

  On a bien démontré que tout sous-ensemble F de E est de cardinal inférieur ou égal à n, avec égalité si, et seulement si, $F = E$.

Exercice 4 Soit E une partie de $\mathbb{N}$.

- Supposons que E soit majorée. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $E \subset [\![0, n]\!]$. Comme $[\![0, n]\!]$ est fini, il en est de même de E.
- Supposons que E soit finie. Démontrons par récurrence sur $n = \operatorname{card} E$ que E est majorée.
  * Si $n = 0$, alors $E = \varnothing$. La partie vide est majorée (par exemple par 0), donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
  * Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété soit vraie au rang n et considérons une partie E de $\mathbb{N}$ de cardinal $n+1$. Soit $a \in E$ et $F = E \setminus \{a\}$.
    Alors F est finie de cardinal n. Par hypothèse de récurrence, F est majorée. Soit m un majorant de F et $M = \max(a, m)$. Alors M est un majorant de E. Donc E est majorée et la propriété est vrai au rang $n+1$.

La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une partie E de $\mathbb{N}$ est donc finie si, et seulement si, elle est majorée.

Exercice 5

- Supposons qu'il existe une $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E distincts deux à deux. Alors, l'application $n \mapsto u_n$ est injective dont induit une bijection de $\mathbb{N}$ sur son image qui est une partie F de E. Alors F est infini, car est en bijection avec $\mathbb{N}$ qui est infini, et E qui contient une partie infinie est infini.
- Supposons que E soit infini et construisons, par récurrence, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E distincts deux à deux.
  * L'ensemble E n'est pas vide, car sinon il serait fini. On prend pour u_0 un élément quelconque de E.
  * Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons construits des éléments u_0, u_1, …, u_n de E distincts deux à deux. L'ensemble $\{u_0, \ldots, u_n\}$ n'est pas égal à E car sinon E serait fini. On prend pour u_{n+1} un élément quelconque de $E \setminus \{u_0, \ldots, u_n\}$.

Proposition 5 On note m le cardinal de E et n celui de F. Soit f une bijection de $[\![1, m]\!]$ sur A et g une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur B. On définit une application h de $[\![1, m+n]\!]$ sur $A \cup B$ par :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [\![1, m]\!] \\ g(x-m) & \text{si } x \in [\![m+1, m+n]\!]. \end{cases}$$

Montrons que h est bijective. Pour cela, donnons-nous $y \in A \cup B$ et montrons qu'il possède un antécédent unique par h.

- Si $y \in A$, comme alors y n'appartient pas à B, puisque $A \cap B = \varnothing$, un antécédent de y appartient nécessairement à $[\![1, m]\!]$ et, pour $x \in [\![1, m]\!]$:
$$h(x) = y \Longleftrightarrow f(x) = y \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y).$$
- Si $y \notin A$, alors $y \in B$; un antécédent de y appartient nécessairement à $[\![m+1, m+n]\!]$ et, pour $x \in [\![m+1, m+n]\!]$:
$$h(x) = y \Longleftrightarrow g(x-m) = y \Longleftrightarrow x = m + g^{-1}(y).$$

Tout y de $A \cup B$ possède un antécédent unique, donc h est bijective. On en déduit que $A \cup B$ est fini et :
$$\operatorname{card}(A \cup B) = m + n = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B.$$

Proposition 8 L'ensemble $A \cup B$ est la réunion disjointe des ensembles finis A et $B \setminus A$, donc $A \cup B$ est fini et on a :
$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card}(B \setminus A).$$
De même B est la réunion disjointe de $B \setminus A$ et de $A \cap B$, donc :
$$\operatorname{card} B = \operatorname{card}(B \setminus A) + \operatorname{card}(A \cap B).$$
En soustrayant les deux égalités précédentes, on obtient :
$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B).$$

Exercice 6 On applique plusieurs fois la formule de la proposition 5.
De $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$, on déduit :
$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(A \cup B \cup C) &= \operatorname{card}(A \cup B) + \operatorname{card} C - \operatorname{card}\Big((A \cup B) \cap C\Big) \\
&= \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card} C \\
&\qquad - \operatorname{card}\Big((A \cap C) \cup (B \cap C)\Big) \\
&= \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card} C \\
&\qquad - \operatorname{card}(A \cap C) - \operatorname{card}(B \cap C) + \operatorname{card}\Big((A \cap C) \cap (B \cap C)\Big) \\
&= \operatorname{card} A + \operatorname{card} B + \operatorname{card} C - \operatorname{card}(A \cap B) - \operatorname{card}(A \cap C) \\
&\qquad - \operatorname{card}(B \cap C) + \operatorname{card}(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

Exercice 7 On démontre la propriété par récurrence n.
Pour $n = 1$, il n'a rien à démontrer et pour $n = 2$:
$$\operatorname{card}(A_1 \cup A_2) = \operatorname{card}(A_1) + \operatorname{card}(A_2) - \operatorname{card}(A_1 \cap A_2) \leqslant \operatorname{card}(A_1) + \operatorname{card}(A_2).$$
Si l'on suppose que la propriété est vérifiée au rang n, on obtient, pour des sous-ensembles A_1, A_2, ..., A_{n+1} de E, en utilisant le cas $n = 2$, puis l'hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}) &= \operatorname{card}\Big((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}\Big) \\
&\leqslant \operatorname{card}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \operatorname{card}(A_{n+1}) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i) + \operatorname{card}(A_{n+1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \operatorname{card}(A_i).
\end{aligned}$$

Exercice 8 Soit $n \geqslant 2$ et $p \in \mathbb{N}$. On note L l'ensemble des n-listes $(x_1, \ldots, x_n)$ d'entiers naturels tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$ et pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, on note L_k l'ensemble des éléments $(x_1, \ldots, x_n)$ de L tels que $x_n = k$. Alors L est la réunion disjointe de L_0, L_1,..., L_p, car si $(x_1, \ldots, x_n) \in L$, alors il existe un unique $k \in [\![0, p]\!]$ tel que $x_n = k$. On en déduit :

$$\operatorname{card}(L) = \operatorname{card}(L_0) + \operatorname{card}(L_1) + \cdots + \operatorname{card}(L_p).$$

On a, par définition, $\operatorname{card}(L) = u_{n,p}$. Pour $k \in [\![0, p]\!]$, $(x_1, \ldots, x_{n-1}, k) \in L_k$ si, et seulement si, $x_1 + \cdots + x_{n-1} = p - k$. Il a donc autant d'éléments dans L_k que de $(n-1)$-listes $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ d'entiers naturels telles que $x_1 + \cdots + x_{n-1} = p - k$. On a donc $\operatorname{card}(L_k) = u_{n-1,p-k}$. On obtient ainsi :

$$u_{n,p} = \sum_{k=0}^{p} u_{n-1,p-k} = \sum_{j=0}^{p} u_{n-1,j}.$$

Exercice 9 Si l'une de ces sommes est divisible par n, c'est fini. Sinon leurs restes modulo n ne peuvent être tous différents (car il y n sommes et $n-1$ restes possibles, car 0 est exclu). Il existe deux entiers $p < q$ tels que s_p et s_q aient même reste modulo n. Leur différence $s_q - s_p = a_{p+1} + \cdots + a_q$ est divisible par n.

Théorème 11 Il est clair que $(iii) \Rightarrow (i)$ et $(iii) \Rightarrow (ii)$.

- Montrons $(i) \Rightarrow (iii)$.
  Si f est injective, on a $\operatorname{card}(f(E)) = \operatorname{card}(E)$ d'après la proposition 10. On en déduit $\operatorname{card}(f(E)) = \operatorname{card}(F)$ et comme $f(E) \subset F$, on a, d'après la proposition 3 de la page 1369, $f(E) = F$. L'application f est donc surjective.
- Montrons $(ii) \Rightarrow (iii)$.
  Si f est surjective, on a $\operatorname{card}(f(E)) = \operatorname{card} F$ et donc $\operatorname{card}(f(E)) = \operatorname{card}(E)$. D'après la proposition 10, cela implique que f injective.

Exercice 10

1. Comme x appartient à H et H est stable, f_x est bien une application de H dans H.
   Soit y_1 et y_2 deux éléments de H tels que $f_x(y_1) = f_x(y_2)$.
   On a alors $x * y_1 = x * y_2$ et comme x est inversible dans G, $y_1 = y_2$. Donc f_x est injective.
   Comme H est fini, on en déduit que f_x est bijective.
2. L'application f_x est bijective. Posons $a = f_x^{-1}(x)$. On a alors $f_x(a) = x * a = x$. On en déduit $a = e$, en multipliant par x^{-1}. Or a est dans H, donc e est dans H. Comme e est dans H, on peut ensuite poser $b = f_x^{-1}(e)$. On a alors $f_x(b) = x * b = e$ donc $b = x^{-1}$. Or b est dans H, donc x^{-1} est dans H.
   Ainsi, H est une partie stable de G qui contient l'élément neutre et les symétriques de tous ses éléments. C'est donc un sous-groupe de G.

Proposition 13 On note $\{a_1, \ldots, a_m\}$ l'ensemble des valeurs prises par x. L'ensemble G de tous les couples (x, y) possibles peut s'écrire $G = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_m$, où G_i est l'ensemble des couples de la forme (a_i, y). Pour tout i, il y autant d'éléments dans G_i que de y, c'est-à-dire n, par hypothèse. Alors G est fini, car réunion d'ensembles finis, et comme la réunion est disjointe, on obtient :

$$\operatorname{card} G = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{card} G_i = \sum_{i=1}^{m} n = m \times n.$$

Corollaire 14 On démontre la propriété par récurrence sur p.

- La propriété est évidente pour $p = 1$.
- Supposons que la propriété soit vérifiée pour un entier $p-1$, où $p \geqslant 2$.
  La $(p-1)$-liste $(x_1, \ldots, x_{p-1})$ peut donc prendre $m = n_1 \times \cdots \times n_{p-1}$ valeurs dans $E_1 \times \cdots \times E_{p-1}$ et pour chaque valeur de $(x_1, \ldots, x_{p-1})$, x_p peut prendre n_p valeurs dans E_p. La proposition qui précède montre que $(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p)$ peut prendre $m \times n_p = n_1 \times \cdots \times n_p$ valeurs.

Exercice 11 Quelle que soit sa position sur le cube, la puce a, après k déplacements, le choix pour le déplacement suivant entre 3 sommets. Il y a donc au total 3^n trajets possibles.

Exercice 12 L'alphabet contient 20 consonnes et 6 voyelles. Pour la première lettre x_1, on a le choix entre 20 consonnes. Pour chaque choix de x_1, on peut choisir la seconde lettre parmi 6 voyelles, ... D'après le corollaire, le nombre total de mots de cinq lettres, c'est-à-dire de quintuplets $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ est $20 \cdot 6 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 6$, c'est-à-dire 288000.

Exercice 13 L'ensemble des couleurs possibles est en bijection avec le produit cartésien $[\![0, 255]\!] \times [\![0, 255]\!] \times [\![0, 255]\!]$, ce qui donne au total $256^3 = 16\,777\,216$ couleurs.

Proposition 16 On note $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$. Montrons que :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & F^E & \longrightarrow & F^p \\ & f & \longmapsto & (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_p) \end{array}$$

est bijective.

Étant donné un p-uplet $(y_1, \ldots, y_p)$ d'éléments de F, l'égalité $\Phi(f) = (y_1, \ldots, y_p)$, équivaut à $f(a_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Cela définit bien une application unique f de E dans F, car cela équivaut à se donner les images par f de tous les éléments de E. Ainsi tout élément de F^p a un antécédent unique par Φ. L'application Φ est bijective. On en déduit que F^E est fini de même cardinal que F^p, c'est-à-dire $(\operatorname{card} F)^p = n^p$.

Exercice 14 C'est n^p. Il s'agit en effet de compter le nombre d'applications de l'ensemble des objets dans l'ensemble des tiroirs.

Exercice 15

1. Si $n = 1$, il n'y a pas de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 2]\!]$. Pour $n \geqslant 2$, il y a 2^n applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 2]\!]$. Une telle application n'est pas surjective si, et seulement si, tous les éléments de $[\![1, n]\!]$ ont même image. Il y a donc 2 applications non surjectives et $2^n - 2$ surjections.

2. Si $n \leqslant 2$, il n'y a pas de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,3]\!]$. Pour $n \geqslant 3$, il y a 3^n applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,3]\!]$. Une telle application n'est pas surjective si, et seulement si, :
   - soit tous les éléments de $[\![1,n]\!]$ ont même image ; il y trois applications de ce type ;
   - soit il y a deux images différentes. Si par exemple, ces images sont 1 et 2, on obtient les surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,2]\!]$. Il y a en a $2^n - 2$. On a trois cas identiques et donc en tout $3(2^n-2)$ applications de ce type.

   Le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,3]\!]$ est $3^n - 3 - 3(2^n-2) = 3^n - 3\cdot 2^n + 3$.

On peut noter que dans tous les cas où il n'y a pas de surjections, les formules trouvées donnent 0 et donc restent valables.

Exercice 16 On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des couples (A,B) de parties de E telles que $A \subset B$ et l'on construit une application Φ de $\mathcal{C}$ dans $\{0,1,2\}^E$. Si $(A,B) \in \mathcal{C}$, on définit l'application $\Phi(A,B)$ de E dans $\{0,1,2\}$ par $\Phi(A,B)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in B \setminus A \\ 2 & \text{si } x \notin B \end{cases}$.

Montrons que Φ est bijective. Pour cela, considérons une application f de E dans $\{0,1,2\}$ et cherchons $(A,B) \in \mathcal{C}$ tel que $\Phi(A,B) = f$.
Cela est réalisé si, et seulement si :

$$A = \{x \in E,\ f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$$

$$B = \{x \in E,\ f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x) = 1\} = f^{-1}(\{0,1\}).$$

Les sous-ensembles A et B sont déterminés de manière unique et il est clair que, par construction, $A \subset B$, donc $(A,B) \in \mathcal{C}$. Ainsi toute application f a un antécédent unique : Φ est bijective.
On en déduit $\operatorname{card} \mathcal{C} = \operatorname{card}\left(\{0,1,2\}^E\right) = 3^n$.

Théorème 18 On se trouve dans la situation du corollaire 14 de la page 1374. Un p-arrangement de E est une p-liste $(x_1,\ldots,x_p)$. Se donner un tel arrangement, c'est :

- choisir x_1, et il y a n choix possibles,
- puis choisir x_2, différent de x_1, et il y a $n-1$ choix possibles,. . . ,
- enfin choisir x_p différent de x_1,. . . , x_{p-1}, et il y a $n-(p-1)$ choix possibles.

Au final, on trouve $n(n-1)\ldots(n-p+1)$ arrangements.

Proposition 20 On considère l'application Φ définie dans la démonstration de la proposition 16 de la page 1375. Alors, une application f de E dans F est injective si, et seulement si, $\Phi(f)$ est un arrangement. En effet, dire que f est injective signifie que les p éléments de E ont des images distinctes, c'est-à-dire que $(f(a_1),\ldots,f(a_p))$ est un p-arrangement de F.
Comme Φ est bijective, il y autant d'injections de E dans F que de p-arrangements d'éléments de F, soit A_n^p.

Corollaire 21 Si E et F ont même cardinal fini n, les bijections de E sur F sont exactement les injections de E dans F (*cf.* théorème 11 de la page 1373).

Il y en a donc $A_n^n = n!$.

Exercice 17

1. Une des personnes étant fixée, il y autant de dispositions différentes que de manières de placer les personnes restantes dans les $2n-1$ autres places, c'est-à-dire $(2n-1)!$.
2. On reprend le même raisonnement. Imaginons qu'on ait choisi la place d'une femme. Cela détermine les places où il faudra mettre les $n-1$ femmes restantes et les n hommes. On obtient $(n-1)!\,n!$ dispositions possibles.
3. Fixons la place de Madame X. Il y a deux places possibles pour Monsieur Y. Ensuite, on place les $n-1$ femmes et les $n-1$ hommes restants. On obtient $2\left((n-1)!\right)^2$ dispositions.

Théorème 23 Considérons l'application Ψ qui, au p-arrangement $(a_1,\dots,a_p)$, associe la partie $\{a_1,\dots,a_p\}$ de cardinal p de E.

L'application Ψ est surjective et tout sous-ensemble $\{a_1,\dots,a_p\}$ de E de cardinal p a autant d'antécédents par Ψ qu'il y a de façons d'ordonner ses éléments pour construire un arrangement. C'est le nombre de permutations de $\{a_1,\dots,a_p\}$, c'est-à-dire $p!$.

Ainsi, pour toute partie F de E de cardinal p, il y a exactement $p!$ arrangements dont l'image par Ψ est F. Le nombre total d'images, c'est-à-dire de parties de E de cardinal p, s'obtient donc en divisant le nombre d'arrangements par $p!$.

Il est égal à $\dfrac{A_n^p}{p!}$, c'est-à-dire $\dbinom{n}{p}$.

Exercice 18

1. Il y a autant de tirages que de parties à 8 éléments dans l'ensemble des cartes soit $\binom{32}{8} = 10518300$.
2. Il y a autant de tels tirages que de paires de carrés. Comme il y a 8 carrés possibles, on a $\binom{8}{2} = 28$ tels tirages.

Exercice 19 Il y a autant de telles p-listes que de parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal p, c'est-à-dire $\dbinom{n}{p}$. En effet :

- à une telle p-liste, on peut associer la partie $\{i_1,i_2,\dots,i_p\}$ de $[\![1,n]\!]$;
- réciproquement, une partie de $[\![1,n]\!]$ de cardinal p étant choisie, il n'y a qu'une façon de ranger ses p éléments par ordre croissant pour obtenir une p-liste $(i_1,i_2,\dots,i_p)$ telle que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n$.

Exercice 20 Choisissons une équipe e parmi les $2n$. Elle dispute un match, avec l'une des $2n-1$ autres équipes. Une fois cette équipe choisie, il reste $2n-2 = 2(n-1)$ équipes à apparier. On a donc :

$$u_n = (2n-1)u_{n-1}.$$

En procédant ainsi, on est sûr de ne pas compter certaines listes de matchs deux fois.

En premier, on compte le nombre de matchs de l'équipe e, qui n'interviendra plus après. En réitérant cette formule et sachant que $u_1 = 1$, on obtient :

$$u_n = (2n-1)(2n-3)\dots 3u_1 = (2n-1)(2n-3)\dots 3\cdot 1.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par le produit des nombres pairs de 2 à $2n$, on retrouve la formule précédente.

Exercice 21

1. Un mot résulte de la permutation des lettres du mot orange. Comme les lettres sont distinctes, ces permutations donnent des mots distincts. Il y a donc $6! = 120$ anagrammes.
2. Il y a trois a et deux n, donc les permutations ne conduisent pas à des mots différents. Il y a deux manières de compter.
   - Il y a 6! permutations possibles de l'ensemble des lettres. Mais à chaque anagramme correspond $3!\,2!$ permutations, car on peut permuter les trois a et les deux n. On obtient $\dfrac{6!}{3!\,2!} = 60$ anagrammes.
   - Pour construire un anagramme, c'est-à-dire une 6-liste, on place d'abord les a. Il y a $\binom{6}{3} = 20$ choix possibles. On place ensuite les n parmi les places restantes. Il y a $\binom{3}{2} = 3$ choix possibles. Le s est la lettre restante. Il a donc $20 \times 3 = 60$ anagrammes.
3. En appliquant la première méthode de la question précédente, on obtient $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_p!}$, où $n = n_1 + \dots + n_p$. Si l'on appliquait la deuxième méthode, on trouverait :

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\dots\binom{n-n_1\dots-n_{p-1}}{n_p}.$$

   En écrivant les coefficients binomiaux sous forme de factorielles, on voit qu'on peut simplifier $(n-n_1)!$, $(n-n_1-n_2)!,\dots,(n-n_1-\dots-n_{p-1})!$ pour obtenir le même résultat que dans le première méthode.

Proposition 24 L'application qui, à un sous-ensemble A de $[\![1,n]\!]$, associe son complémentaire est bijective, car involutive. Il y a donc autant de façons de choisir un sous-ensemble de cardinal p, soit $\binom{n}{p}$, que de façons de choisir son complémentaire, c'est-à-dire un sous-ensemble de cardinal $n-p$, soit $\binom{n}{n-p}$. D'où l'égalité.

Proposition 25 On fixe un élément a de $[\![1,n]\!]$. Parmi les parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal p, on distingue :

- celles qui contiennent a ; il y a en a $\binom{n-1}{p-1}$ car, en plus de a, il faut choisir $p-1$ éléments de $[\![1,n]\!] \setminus \{a\}$;
- celles ne qui contiennent a ; il y a en a $\binom{n-1}{p}$, car il faut choisir p éléments de $[\![1,n]\!] \setminus \{a\}$.

Comme ces ensembles de parties sont disjoints et que le nombre total de parties de E de cardinal p est $\binom{n}{p}$, on obtient la formule voulue.

On note que la formule reste vérifiée pour $p > n$.

Exercice 22

Pour $n \leqslant k \leqslant p$, on a, en utilisant la formule de Pascal, $\binom{k}{n} = \binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1}$ donc :

$$\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \sum_{k=n}^{p} \left(\binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1} \right) = \sum_{j=n+1}^{p+1} \binom{j}{n+1} - \sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n+1}$$
$$= \binom{p+1}{n+1} - \binom{n}{n+1} = \binom{p+1}{n+1}.$$

Exercice 23

1. Un terme du produit s'obtient en prenant un facteur dans chaque parenthèse, a ou b. S'il y a k facteurs a, il y a $n-k$ facteurs b. Donc chaque terme est de la forme $a^k b^{n-k}$, où $0 \leqslant k \leqslant n$.
2. Pour un k fixé, il y autant de termes de la forme $a^k b^{n-k}$ qu'il y a de façons de choisir les k parenthèses où l'on prend les facteurs a, c'est-à-dire $\binom{n}{k}$.

   Ce qui précède montre que $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Exercice 24 Pour $n \geqslant 1$, on a $(1-1)^n = 0$ et donc $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0$.

En séparant les k pairs et les k impairs, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} = 0.$$

Mais les sommes $\sum\limits_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j}$ et $\sum\limits_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1}$ sont égales au nombre de parties de cardinal pair et au nombre de parties de cardinal impair d'un ensemble de cardinal n, respectivement. D'où le résultat. Comme le nombre total de parties d'un ensemble de cardinal n est 2^n, chacune de ces sommes vaut $2^n/2 = 2^{n-1}$.

Exercice 25 Soit E et F deux ensembles disjoints de cardinal m et n, respectivement. Alors $\operatorname{card}(E \cup F) = m+n$ et il y a en tout $\binom{m+n}{p}$ parties de $E \cup F$ de cardinal p.

Une partie de $E \cup F$ de cardinal p se compose de k éléments de E et $p-k$ éléments de F, où $0 \leqslant k \leqslant p$. Pour k fixé, on obtient $\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$ telles parties de $E \cup F$ de cardinal p.

Comme les parties de $E \cup F$ ainsi obtenues sont distinctes, le nombre total de parties de $E \cup F$ de cardinal p est $\sum\limits_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$. D'où l'égalité.

En prenant $m = n$ et $p = n$, on obtient :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Exercice 26 Soit E un ensemble de cardinal n. Pour déterminer le nombre de tels couples (A,B), on peut :

- soit choisir B, et il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles, puis choisir A ; alors, B étant fixé, A est simplement une partie de B de cardinal k ; il y en a $\binom{p}{k}$, ce qui donne au total $\binom{n}{p}\binom{p}{k}$ couples (A,B) ;
- soit choisir A, et il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles, puis choisir B ; alors, A étant fixé, B s'obtient en rajoutant $p-k$ éléments à A qui doivent être choisis dans le complémentaire de A dans E ; ce dernier étant de cardinal $n-k$, il y a $\binom{n-k}{p-k}$ choix, ce qui donne au total $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ couples (A,B).

D'où l'égalité.

Exercice 27

1. - En utilisant l'identité énoncée dans la remarque qui précède, on obtient :
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n2^{n-1}.$$
   - Pour $2 \leqslant k \leqslant n$, en utilisant deux fois cette identité, on obtient :
$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}.$$
   On en déduit :
$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j} = n(n-1)2^{n-2}.$$
   - On a enfin :
$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$
2. On a, pour tout réel x :
$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$
   En dérivant par rapport à x, on en déduit :
$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1},$$
   ce qui donne $n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$, en évaluant en 1.

   De même, en dérivant de nouveau :
$$n(n-1)(x+1)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^{k-2},$$
   ce qui donne $n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$, en évaluant en 1.

S'entraîner et approfondir

28.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de listes d'entiers naturels non nuls dont la somme est n.

1. Calculer a_n pour $n \leqslant 3$.
2. Conjecturer la formule donnant a_n. La démontrer.

28.2 Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ (où $1 \leqslant p \leqslant n$) ?

28.3 On donne n points dans le plan, trois quelconques n'étant pas alignés. On considère toutes les droites joignant deux de ces points. On suppose que les droites obtenues ne sont jamais parallèles et que trois droites ne peuvent être concourantes qu'aux points initiaux.
Calculer le nombre de points d'intersection ainsi obtenus (en plus des n points initiaux).

28.4 Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Combien y a-t-il de lois de compostions internes sur E ?
2. Combien y a-t-il de lois de compostions internes commutatives sur E ?
3. Combien y a-t-il de lois de compostions internes sur E possédant un élément neutre ?

⋆ **28.5** Soit E un ensemble fini de cardinal n. Calculer :

$$\sum_{X \subset E} \operatorname{card}(X) \qquad \text{et} \qquad \sum_{X,Y \subset E} \operatorname{card}(X \cap Y).$$

28.6 Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Combien y a-t-il de couples (X,Y) de parties disjointes de E ?
2. Combien y a-t-il de couples (X,Y) de parties de E telles que $X \cap Y$ soit un singleton ?

28.7 Pour tout ensemble E fini, de cardinal $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre d'involutions de E, c'est-à-dire d'applications f de E dans E telles que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)u_n.$$

★ **28.8** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note π_n le nombre de partitions d'un ensemble de $[\![1,n]\!]$. On rappelle qu'une partition d'un ensemble E est un ensemble de parties non vides et deux à deux disjointes, dont la réunion est E. On pose, de plus, $\pi_0 = 1$.

1. Calculer π_1, π_2, π_3.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\pi_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi_k.$$

★ **28.9** On considère r drapeaux distincts et n poteaux numérotés, suffisamment grands pour accueillir les r drapeaux.

1. On suppose $r = 2$ et $n = 2$. De combien de façons peut-on disposer les drapeaux sur les poteaux (on tient compte de l'ordre des drapeaux sur chaque poteau) ?
2. Même question dans le cas général. On pourra raisonner par récurrence sur r.

28.10 1. On considère p boules identiques que l'on désire ranger dans n boîtes numérotées de 1 à n, chaque boîte pouvant recevoir un nombre quelconque de boules (n et p appartiennent à $\mathbb{N}^*$).
Montrer qu'il y a $\binom{n+p-1}{p}$ rangements distincts. Deux rangements sont identiques si le nombre de boules dans chaque boîte est le même pour les deux rangement.
On utilisera le codage suivant : à un rangement, on associe une liste de 0 et de 1, commençant et se terminant par 0, telle que le nombre de 1 entre le k-ième et le $(k+1)$-ième zéro soit égal au nombre de boules dans la k-ième boîte.

2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x_1+x_2+\cdots+x_n = p$, d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$, n et p étant deux entiers naturels non nuls.
En déduire le nombre de solutions de l'équation $x_1+x_2+\cdots+x_n = p$, d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, n et p étant deux entiers naturels non nuls.

28.11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$?
2. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1,n+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$?
3. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1,n+2]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$?

★ **28.12** (Formule d'inversion de Pascal) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} b_p$.

Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} a_p$.

⋆ **28.13** On note d_n le nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n ne laissant aucun point fixe (une telle permutation s'appelle un *dérangement*).

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.$$
2. En déduire, en utilisant l'exercice 28.12, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
3. En déduire que le nombre de permutations de E, ensemble de cardinal n, laissant exactement p points fixes ($0 \leqslant p \leqslant n$) est :
$$\frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

⋆⋆ **28.14** **(Théorème de Dirichlet)**

Soit x un nombre réel.

1. Soit N un entier quelconque, supérieur où égal à 2. Démontrer qu'il existe des entiers relatifs p et q, avec $1 \leqslant q \leqslant N$, tels que $|qx - p| < \dfrac{1}{N}\cdot$

   Pour cela, on considérera les nombres réels $x_k = kx - \lfloor kx \rfloor$, pour $k \in [\![0, N]\!]$, et on appliquera le principe des tiroirs.
2. On suppose que x est irrationnel. Montrer qu'il existe une infinité de nombres rationnels $\dfrac{p}{q}$ (avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) tels que :
$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}\cdot$$
3. Montrer que le résultat de la question 2 tombe en défaut si x est rationnel.

Solution des exercices

28.1 1. On trouve $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ (pour $n = 3$, les listes sont : (3), $(1,2)$, $(2,1)$ et $(1,1,1)$).

2. On conjecture que $a_n = 2^{n-1}$. Il suffit de démontrer $a_n = 2a_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$.
Il y a deux sortes de listes dont la somme est n :
   - celles dont le dernier élément est 1 ; il y en a a_{n-1} car se donner une telle liste $(x_1, \ldots, x_k, 1)$ revient à se donner $(x_1, \ldots, x_k)$ de somme $n-1$;
   - celles dont le dernier élément est strictement supérieur à 1 ; il y en a a_{n-1} car se donner une telle liste $(x_1, \ldots, x_k)$, avec $x_k \geqslant 2$ revient à se donner $(x_1, \ldots, x_k - 1)$ de somme $n-1$;.

   Cela montre que $a_n = 2a_{n-1}$ et donc $a_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

28.2 Autant que des listes $(i_1, \ldots, i_p)$ d'entiers tels que $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$, soit $\dbinom{n}{p}$.

28.3
- Un tel point s'obtient comme intersection des droites (AB) et (CD), où A, B, C et D sont quatre points initiaux distincts. Il y a $\dbinom{n}{4}$ choix de $\{A, B, C, D\}$, puis trois façons de les apparier (si on fixe un des points, on lui adjoint un des trois autres points). On obtient $3\dbinom{n}{4}$ points.
- Une autre méthode consiste à choisir une première droite (AB), il y $\binom{n}{2}$ choix, puis une deuxième droite (CD) ne passant ni par A, ni par B, il y a $\binom{n-2}{2}$ choix. On obtient $\dfrac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}}{2}$ points (il faut diviser par deux car on introduit un ordre entre les deux droites (AB) et (CD)). On trouve le même résultat que dans le premier cas : $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

28.4 1. Une loi de composition interne sur E est une application de E^2 dans E. Il y a en a $(\text{card } E)^{\text{card } E^2} = n^{n^2}$.

2. La loi est commutative si (x, y) et (y, x) ont même image pour $x \neq y$. Elle est alors entièrement déterminée par les images des couples (x, x) et des paires $\{x, y\}$. On choisit donc $n + \dfrac{n^2 - n}{2} = \dfrac{n^2 + n}{2}$ images. Le nombre de lois de composition internes commutatives est donc $n^{\frac{n^2+n}{2}}$.

3. Le fait que e soit élément neutre détermine les images de tous les couples (e, x) et (x, e). On est ramené ensuite à déterminer une application de $(E \setminus \{e\})^2$ dans E. Il y en a $n^{(n-1)^2}$. Comme e est un élément quelconque de E, on obtient $n \cdot n^{(n-1)^2} = n^{(n-1)^2+1}$ lois de composition internes sur E possédant un élément neutre.

28.5 1. Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, il y a $\binom{n}{p}$ parties de E de cardinal p. On en déduit :

$$\sum_{X \subset E} \text{card}\,(X) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} p = \sum_{p=1}^{n} n\binom{n-1}{p-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n2^{n-1}.$$

2. Notons S la deuxième somme. Quand Y décrit $\mathcal{P}(E)$, son complémentaire $\overline{Y}$ décrit aussi $\mathcal{P}(E)$. On en déduit $S = \sum\limits_{X,Y\subset E} \operatorname{card}(X\cap\overline{Y})$, puis :

$$S = \frac{1}{2}\left(\sum_{X,Y\subset E}\big(\operatorname{card}(X\cap Y)+\operatorname{card}(X\cap\overline{Y})\big)\right) = \frac{1}{2}\sum_{X,Y\subset E}\operatorname{card} X$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{Y\subset E}\sum_{X\subset E}\operatorname{card} X = \frac{1}{2}\sum_{Y\subset E} n2^{n-1} = \frac{1}{2}\operatorname{card}(\mathcal{P}(E))\, n2^{n-1} = n2^{2n-2}.$$

28.6 1. Si X est de cardinal p, il y a $\dbinom{n}{p}$ choix pour X. Alors Y est une partie quelconque de $\overline{X}$, ensemble de cardinal $n-p$. Il y a donc 2^{n-p} choix pour Y et $\dbinom{n}{p}2^{n-p}$ couples (X,Y). Comme p prendre n'importe quelle valeur de 0 à n, on en déduit qu'il y a :
$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^{n-p} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}1^p\,2^{n-p} = (1+2)^n = 3^n$$
couples de parties disjointes de E.

2. Soit $a\in E$. Dire que (X,Y) est un couple de parties de E telles que $X\cap Y=\{a\}$ signifie que X et Y contiennent a et que $X\setminus\{a\}$ et $Y\setminus\{a\}$ sont des parties disjointes de $E\setminus\{a\}$. D'après la première question, il y a 3^{n-1} couples de parties disjointes de $E\setminus\{a\}$ et donc 3^{n-1} couples de parties de E telles que $X\cap Y=\{a\}$. Comme a est un élément quelconque de E, il y a en tout $n3^{n-1}$ couples de parties de E telles que $X\cap Y$ soit un singleton.

28.7 1. On trouve $u_1=1$, $u_2=2$ et $u_3=4$.

2. Soit E un ensemble de cardinal $n+2$. Fixons un élément a de E. Si f est une involution de E :
   - soit $f(a)=a$ et la restriction de f à $E\setminus\{a\}$ est une involution de $E\setminus\{a\}$; il y a u_{n+1} involutions f de ce type ;
   - soit $f(a)=b\neq a$, alors $f(b)=a$ et la restriction de f à $E\setminus\{a,b\}$ est une involution de $E\setminus\{a,b\}$; il y a $n+1$ choix pour b et u_n choix pour la restriction de f à $E\setminus\{a,b\}$ donc $(n+1)u_n$ involutions f de ce type.

   Le nombre total d'involutions de E est : $u_{n+2}=u_{n+1}+(n+1)u_n$.

28.8 1. On trouve $\pi_1=1$, $\pi_2=2$ et $\pi_3=5$.

2. Considérons une partition de $[\![1,n+1]\!]$ et en particulier la partie A contenant $n+1$. Supposons qu'elle contienne k éléments en plus de $n+1$. Ces éléments peuvent être choisis de $\dbinom{n}{k}$ façons. Les $n-k$ éléments restant peuvent être partitionnés de π_{n-k} façons. Pour k fixé, il y donc $\binom{n}{k}\pi_{n-k}$ partitions de $[\![1,n+1]\!]$. Comme k peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et n, on obtient :
$$\pi_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\pi_{n-k} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\pi_j.$$

28.9 1. Soit on met un drapeau par poteau, ce qui peut se faire de 2 façons différentes, soit on met les deux drapeaux sur le même poteau, ce qui peut se faire de $2 \cdot 2$ façons (choix du poteau et de l'ordre des drapeaux). En tout 6 possibilités.

2. Notons $u_{n,r}$ le nombre cherché. Supposons que $r-1$ drapeaux soient déjà placés et qu'il y ait d_i drapeaux sur le i-ème poteau (où $1 \leqslant i \leqslant n$). Si l'on place le r-ième drapeau sur le i-ème poteau, il y a d_i+1 emplacements possibles. Donc le nombre total de choix pour le r-ième drapeau est $\sum\limits_{i=1}^{n}(d_i+1) = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i + n = r-1+n$. Ce qui donne la relation :

$$u_{n,r} = (n+r-1)u_{n,r-1}.$$

Il est clair que $u_{n,1} = n$. En appliquant la relation de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} u_{n,r} &= (n+r-1)(n+r-2)\dots(n+1)u_{n,1} \\ &= (n+r-1)(n+r-2)\dots n = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}\cdot \end{aligned}$$

28.10 1. Il est clair qu'à tout rangement on peut associer une liste de 0 et de 1 et que réciproquement une telle suite détermine le nombre de boules dans chaque boîte. Il suffit donc de compter le nombre de listes. Dans une telle liste, il y $n+1$ fois 0 (car on commence et on finit par un 0) et p fois 1. On a donc des $(n+p+1)$-listes. Il y a autant de listes possibles que de façons de placer les 1 (par exemple). Comme on commence et finit par un 0, il y a $n+p-1$ emplacements pour les 1. Le nombre de rangements possibles est $\dbinom{n+p-1}{p}$.

Remarque On peut donner du codage proposé par l'énoncé une description plus informelle : imaginons que les n tiroirs sont placés côte à côte ; les n tiroirs sont séparés par $n-1$ cloisons. Il s'agit de placer les p boules par rapport à ces $n-1$ cloisons. On a donc au total $p+n-1$ « emplacements » (les cloisons plus les boules) parmi lesquels il faut en choisir p pour placer les boules. D'où le résultat.

2. • Le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^n$ de l'équation est égal au nombre de rangements précédemment calculé. Il suffit d'appeler x_k le nombre de boules dans le k-ième tiroir.
   • Pour trouver le nombre de solutions dans $(\mathbb{N}^*)^n$, on écrit l'équation

$$(x_1-1)+(x_2-1)+\cdots+(x_n-1) = p-n,$$

où $(x_1-1,\dots,x_n-1)$ appartient à $\mathbb{N}^n$. Pour qu'il y ait des solutions, il faut évidemment $p \geqslant n$. Le nombre de solutions s'obtient en remplaçant p par $p-n$ dans le résultat précédent. Il y a donc $\dbinom{p-1}{p-n} = \dbinom{p-1}{n-1}$ solutions (pour $n > p$, ce coefficient est nul).

28.11 1. D'après le corollaire 12 de la page 1373, les surjections de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ sont les permutations de $[\![1,n]\!]$. Il y en a $n!$.

2. Une application de $[\![1,n+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est une surjection si, et seulement si, deux éléments ont la même image et les autres des images distinctes. Il y a $\binom{n+1}{2}$ façons de choisir les éléments qui ont même image et n façons de choisir cette image commune. Il reste ensuite $n-1$ éléments dans l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée qui doivent être mis en bijection, ce qui peut se faire de $(n-1)!$ manières. Le nombre de surjections cherché est donc
$$\binom{n+1}{2} n(n-1)! = \frac{n(n+1)!}{2}\cdot$$

3. De même, une application de $[\![1,n+2]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, est une surjection si, et seulement si, soit trois éléments ont la même image et les autres des images distinctes, soit deux paires d'éléments ont même image (et ces images sont distinctes) et les $n-4$ éléments restant ont des images distinctes.

   - Dans le premier cas, il y a $\binom{n+2}{3}$ façons de choisir les éléments qui ont même image, puis n façons de choisir cette image commune. Les $n-1$ éléments restants de chacun des ensembles doivent être mis en bijection. On trouve :
   $$\binom{n+2}{3} n(n-1)! = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} n! = \frac{n(n+2)!}{6}$$
   surjections de ce type.
   - Dans le second cas, on choisit les quatre éléments de $[\![1,n+2]\!]$ qui n'ont pas une image distincte de toutes les autres, les deux éléments de $[\![1,n]\!]$ qui sont leurs images. Il reste à attribuer aux quatre éléments choisis leur image parmi les deux images possibles. Pour cela on prend une des images et l'on choisit ses deux antécédents parmi quatre. Enfin, on met en bijection les $n-2$ éléments restant dans chaque ensemble. On obtient :
   $$\begin{aligned}\binom{n+2}{4}\binom{n}{2}\binom{4}{2}(n-2)! &= \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{24}\cdot\frac{n(n-1)}{2}6(n-2)!\\ &= \frac{n(n-1)(n+2)!}{8}\end{aligned}$$
   surjections de ce type.

   Le nombre de surjections cherché est donc :
   $$\frac{n(n+2)!}{6} + \frac{n(n-1)(n+2)!}{8} = \frac{n(3n+1)(n+2)!}{24}\cdot$$

28.12 Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}a_p$, en remplaçant chaque a_p par son expression en fonction des b_k. On obtient :
$$S_n = \sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}b_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=k}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\binom{p}{k}b_k,$$

en échangeant les sommes.

On regroupe ce qui dépend de p en écrivant $\dbinom{n}{p}\dbinom{p}{k} = \dbinom{n-k}{p-k}\dbinom{n}{k}$ (*cf.* exercice 26 de la page 1382 ; cela peut se montrer aussi par un simple calcul). On a donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=k}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n-k}{p-k}\right)\binom{n}{k}b_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{n-k-j}\binom{n-k}{j}\right)\binom{n}{k}b_k.$$

- Si $k<n$, alors $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{n-k-j}\binom{n-k}{j} = (1-1)^{n-k} = 0$.
- Si $k=n$, alors $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{n-k-j}\binom{n-k}{j} = 1$.

Dans l'expression de S_n seul le coefficient de b_n n'est pas nul. On obtient donc $S_n = 1\binom{n}{n}b_n = b_n$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

28.13 1. Le nombre total de permutations de E est $n!$.
Pour $0\leqslant p\leqslant n$, le nombre de permutations de E ayant exactement p points fixes est $\dbinom{n}{p}d_{n-p}$. En effet, il faut choisir les p points fixes et effectuer un dérangement des $n-p$ points restants. Comme p peut varier de 0 à n, on obtient :

$$n! = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}d_{n-p} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_k.$$

2. On applique le résultat de l'exercice 28.12, avec $a=(n!)$ et $b=(d_n)$. On obtient :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad d_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k! = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

3. Il résulte de la démonstration de la question 1 que le nombre de dérangements ayant p points fixes est :

$$\binom{n}{p}d_{n-p} = \binom{n}{p}(n-p)!\sum_{k=0}^{n-p}\frac{(-1)^k}{k!} = \frac{n!}{p!}\sum_{k=0}^{n-p}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

28.14 1. Considérons les N « tiroirs » $\left[0,\dfrac{1}{N}\right[$, $\left[\dfrac{1}{N},\dfrac{2}{N}\right[$, $\ldots$, $\left[\dfrac{N-1}{N},\dfrac{N}{N}\right[$, dont la réunion est $[0,1[$. Chacun des $N+1$ réels x_k appartient à $[0,1[$, donc à l'un de ces N tiroirs. Nécessairement deux réels appartiennent au même tiroir. Il existe donc des entiers k, ℓ et i, avec $0\leqslant k<\ell\leqslant N$ et $0\leqslant i\leqslant N-1$, tels que :

$$x_k \quad\text{et}\quad x_\ell \text{ appartiennent à } \left[\frac{i}{N},\frac{i+1}{N}\right[.$$

On en déduit $|x_\ell - x_k| < \dfrac{1}{N}\cdot$ On a :

$$x_\ell - x_k = (\ell - k)x - (\lfloor \ell x\rfloor - \lfloor kx\rfloor).$$

En posant $q = \ell - k$ et $p = \lfloor \ell x\rfloor - \lfloor kx\rfloor$, on obtient :

$$1 \leqslant q \leqslant N,\ \ p \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad |qx - p| < \frac{1}{N}\cdot$$

2. • Montrons l'existence d'un rationnel $\dfrac{p}{q}\cdot$ On choisit un entier $N \geqslant 2$ quelconque.

   En gardant les notations de la première question, on obtient $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{qN}$ et, comme $1 \leqslant q \leqslant N$, on a *a fortiori*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}\cdot$$

   • Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de tels rationnels $\dfrac{p}{q}\cdot$ Il en existe alors un $\dfrac{p_0}{q_0}$ pour lequel la distance $d = \left|x - \dfrac{p_0}{q_0}\right|$ est minimale. Comme x n'est pas rationnel, d n'est pas nul, donc on peut choisir $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{N} < d$. D'après la question 1, il existe $(p_1, q_1) \in \mathbb{Z}^2$, avec $1 \leqslant q_1 \leqslant N$, tel que $\left|x - \dfrac{p_1}{q_1}\right| < \dfrac{1}{q_1 N}\cdot$ On a alors

$$\left|x - \frac{p_1}{q_1}\right| < \frac{1}{q_1^2} \qquad \text{et} \qquad \left|x - \frac{p_1}{q_1}\right| < \frac{1}{N} < d,$$

   ce qui est contradictoire. Il existe bien une infinité de rationnels $\dfrac{p}{q}\cdot$

3. On écrit $x = \dfrac{a}{b}$ (où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$). On considère un nombre rationnel $\dfrac{p}{q}$, (où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$), différent de x, tel que $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2}\cdot$

   • On voit, en réduisant au même dénominateur que $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| \geqslant \dfrac{1}{bq}\cdot$ En effet, on obtient une fraction de dénominateur pb dont le numérateur n'est pas nul. On en déduit $\dfrac{1}{bq} < \dfrac{1}{q^2}$ et donc $q < b$, ce qui montre que q ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.

   • De plus, $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2}$ implique $|p| < |qx| + \dfrac{1}{q} \leqslant b|x| + 1$ par inégalité triangulaire, ce qui montre que p également ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.

   Il n'existe donc qu'un nombre fini de rationnels $\dfrac{p}{q}$ tels que $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2}\cdot$

Chapitre 29 : Probabilités sur un univers fini

I Univers finis **1404**
- 1 Expérience aléatoire 1404
- 2 Univers et événements 1405

II Espaces probabilisés **1407**
- 1 Probabilité 1408
- 2 Propriétés des probabilités 1408
- 3 Détermination d'une probabilité par les images des événements élémentaires 1409
- 4 Union finie d'événements 1412

III Probabilités conditionnelles **1413**
- 1 Définition 1414
- 2 Formule des probabilités composées 1415
- 3 Formule des probabilités totales 1416
- 4 Formule de Bayes 1419

IV Indépendance **1421**
- 1 Indépendance entre deux événements 1421
- 2 Indépendance d'une famille d'événements. 1423
- 3 Modélisation d'expériences aléatoires indépendantes 1425

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . **1427**

Exercices **1440**

Probabilités sur un univers fini

29

Le programme de probabilités de première année se limite aux espaces probabilisés finis. Il s'agit de présenter dans ce cadre simple les concepts fondamentaux des probabilités (univers, événements, probabilité, variables aléatoires). On formalise des résultats déjà vus en terminale en s'appuyant en particulier sur le chapitre 28.

I Univers finis

1 Expérience aléatoire

- Une expérience est dite **aléatoire** si l'on ne peut pas prédire de manière certaine son résultat, bien qu'elle soit soumise à certaines lois. On parle aussi d'épreuve aléatoire. Le calcul des probabilités est la branche des mathématiques qui modélise les phénomènes aléatoires.

  Exemples Les premiers exemples qui viennent à l'esprit sont liés aux jeux : lancer d'un dé, d'une pièce de monnaie, tirage d'une carte dans un jeu de cartes.

- On considère qu'il est possible d'associer à une expérience aléatoire un ensemble qui contient tous les résultats possibles de l'expérience. Cet ensemble est appelé univers et est noté en général Ω. La définition de l'univers résulte d'une simplification de l'expérience et d'un choix délibéré.

  Exemples

  1. Dans un lancer de dé, on note le numéro de la face supérieure. On associe à cette expérience l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]$.
  2. On lance trois dés et on s'intéresse aux trois numéros des faces supérieures des dés. On suppose que ces dés sont discernables, soit qu'ils soient de couleur différente, soit qu'on puisse au moins les distinguer mentalement : décider qu'un dé est le dé numéro 1, un autre le dé numéro 2 et un autre enfin le numéro 3. Un résultat possible est alors un triplet de nombres entre 1 et 6. On choisit donc l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]^3$.

3. On prélève trois cartes dans un jeu de 32 cartes. On peut choisir comme univers l'ensemble des parties à 3 éléments de l'ensemble des 32 cartes. On a en particulier $\operatorname{card}(\Omega) = \binom{32}{3}$.
4. On lance une pièce deux fois de suite. Pour chaque lancer, on note le résultat obtenu P (pour pile) ou F (pour face). On prend comme univers Ω l'ensemble $\{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$.

Remarque Plusieurs choix sont *a priori* possibles pour l'univers. Choisir $[\![1,6]\!]$ comme modèle du lancer d'un dé, c'est postuler que le dé s'arrête sur une face et que, dans cette expérience, on s'intéresse à la question de savoir quel est le numéro de la face supérieure.

- Les questions que l'on se pose sur le résultat d'une expérience aléatoire sont systématiquement du type suivant : « le résultat de l'expérience vérifie-t-il telle propriété ? » On associe à une telle propriété l'ensemble des résultats pour lesquels elle est vérifiée, c'est-à-dire une partie de l'univers Ω, que l'on appelle un événement. Si le résultat de l'expérience appartient à un événement, on dit que celui-ci est *réalisé*.

Exemple On lance trois dés. On cherche à obtenir 421, jeu classique. On reprend l'univers $[\![1,6]\!]^3$. Il s'agit de savoir si le résultat du lancer est constitué des trois numéros 4, 2 et 1. Comme les résultats de notre expérience sont des triplets (ordonnés), l'ensemble des résultats qui conviennent est :

$$\{(4,2,1),(4,1,2),(2,1,4),(2,4,1),(1,4,2),(1,2,4)\}.$$

On dit que cet ensemble est l'événement « on obtient 421 ».
De même l'événement « on obtient trois numéros identiques » est :

$$\{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(4,4,4),(5,5,5),(6,6,6)\}$$

et l'événement « la somme des numéros obtenus est 5 » est :

$$\{(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1),(2,2,1),(2,1,2),(1,2,2)\}.$$

2 Univers et événements

L'analyse de la notion d'expérience aléatoire conduit aux définitions suivantes.

Définition 1

Les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont modélisés par un ensemble appelé **univers** (ou univers des possibles), noté en général Ω. Nous supposerons que Ω est fini et non vide.
Un élément de cet ensemble Ω est appelé une **éventualité**, un possible, ou une issue.

Remarque À ce stade de la modélisation, l'univers Ω est simplement un ensemble fini non vide quelconque.

Notations Un élément de Ω est en général noté ω.
Si Ω est de cardinal n, on l'écrira $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, l'application $i \mapsto \omega_i$ étant injective.

Définition 2

Soit Ω un univers fini. Toute partie de Ω est appelée un événement. L'ensemble des événements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$.

- L'ensemble Ω est appelé l'**événement certain**.
- L'ensemble vide est appelé l'**événement impossible**.
- Un singleton $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$, est appelé un **événement élémentaire**.

Opérations sur les événements

Définition 3

Soit Ω un univers fini, A et B des événements.

- Le complémentaire de A dans Ω, noté $\overline{A}$, est appelé l'**événement contraire** de A.
- La réunion $A \cup B$ de A et B est un événement, appelé « A ou B ».
- L'intersection $A \cap B$ de A et B est un événement, appelé « A et B ».

Remarque Les définitions précédentes traduisent dans le vocabulaire particulier de la théorie des probabilités les opérations ensemblistes.

Exemples

1. Considérons l'expérience consistant à tirer simultanément trois cartes d'un jeu de cartes.
   L'événement contraire de l'événement « obtenir au moins un as parmi ces trois cartes » est l'événement « aucune des trois cartes n'est un as ».
   L'événement contraire de l'événement « obtenir au moins deux cartes rouges » est l'événement « obtenir au plus une carte rouge » ou « obtenir au moins deux cartes noires ».
2. Considérons l'expérience consistant à lancer deux fois une pièce, modélisée par l'univers $\{P, F\}^2$. Notons A l'événement « la première pièce montre pile » et B l'événement « la deuxième pièce montre pile », c'est-à-dire $A = \big\{(P,P),(P,F)\big\}$ et $B = \big\{(F,P),(P,P)\big\}$.
   Alors l'événement $A \cup B$ est « une des deux pièces montre pile » :
   $$A \cup B = \big\{(F,P),(P,F),(P,P)\big\} \ ;$$
   l'événement $A \cap B$ est « les deux pièces montrent pile » :
   $$A \cap B = \big\{(P,P)\big\}.$$
   L'événement contraire de A est « la première pièce montre face » :
   $$\overline{A} = \big\{(F,P),(F,F)\big\}.$$

Définition 4

Soit Ω un univers, A et B deux événements de Ω.

- Les événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.
- On dit que **l'événement $\boldsymbol{A}$ implique l'événement $\boldsymbol{B}$** si $A \subset B$.

Exemple Si A est un événement, alors A et son contraire $\overline{A}$ sont incompatibles.

Systèmes complets d'événements

Définition 5

Soit Ω un univers fini. On appelle **système complet d'événements** de Ω toute famille $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), telle que :

- pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $[\![1,n]\!]$, on ait $A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Remarque Si, de plus, on suppose que tous les A_i sont non-vides, alors le système complet d'événements est une partition de Ω. Certains auteurs incluent cette condition supplémentaire dans la définition.

Proposition 1

Soit Ω un univers fini.

1. Pour tout événement A, la famille $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements de Ω.
2. La famille $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$, formée des événements élémentaires, est un système complet d'événements de Ω.

Remarques

1. Choisir comme système complet d'événements $\{A, \overline{A}\}$ signifie que, dans l'expérience aléatoire, on s'intéresse essentiellement à la réalisation ou non de l'événement A.
2. La famille $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$ joue un grand rôle dans la définition d'une probabilité (*cf.* théorème 6 de la page 1409).

II Espaces probabilisés

Lorsque l'on s'intéresse à un phénomène aléatoire, une des questions essentielles que l'on se pose est « quelle chance a-t-on d'obtenir l'événement A ? » On cherche à mesurer le degré de vraisemblance qu'on peut lui accorder *a priori*, avant la réalisation de l'expérience. Intuitivement, cette idée de chance est associée à celle de fréquence : on répète n fois une expérience et l'on note $f_n(A)$ la fréquence de l'événement A, c'est-à-dire le nombre de fois où il est réalisé divisé par n. Quelles sont les principales propriétés des fréquences ? Être comprises entre 0 et 1 ; être additives (la fréquence de la réunion de deux événements incompatibles est la somme des fréquences des deux événements). C'est ce qui motive la définition qui suit.

1 Probabilité

Définitions

Définition 6

Soit Ω un univers fini. On appelle **probabilité** sur Ω toute application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. pour tous événements A et B incompatibles :
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Remarque La seconde propriété est appelée **additivité**.

Définition 7

Un **espace probabilisé fini** est un couple $(\Omega, \mathbb{P})$, où Ω est un univers fini et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.

Remarque Un même univers peut être muni de plusieurs probabilités.

2 Propriétés des probabilités

Théorème 2

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A et B deux événements. On a :

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$;
2. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
3. si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$: on dit que $\mathbb{P}$ **est croissante** ; de plus, $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$;
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Démonstration page 1427

Proposition 3 (Additivité finie)

Pour toute famille finie $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ d'événements deux à deux incompatibles de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, on a :

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Principe de démonstration. Récurrence sur n. Démonstration page 1427

Dans le cas général, il existe une majoration simple de la probabilité d'une union d'événements.

Proposition 4 (Inégalité de Boole)

Pour toute famille finie $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Démonstration page 1427

Propriétés des systèmes complets d'événements

Proposition 5

Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements de Ω, alors on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1$$

et pour tout événement B :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

Démonstration page 1427

3 Détermination d'une probabilité par les images des événements élémentaires

Une probabilité $\mathbb{P}$ sur un univers fini Ω est entièrement déterminée par la connaissance des probabilités des événements élémentaires.

Théorème 6

Soit Ω un ensemble fini.

1. Soit $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω. Si l'on pose $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$, pour tout $\omega \in \Omega$, on a alors :

$$(1) \quad \forall \omega \in \Omega \quad p_\omega \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad (2) \quad \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1.$$

2. Réciproquement, si $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une famille de réels vérifiant les conditions (1) et (2), il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. La probabilité $\mathbb{P}$ est définie, pour tout événement A, par :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

Démonstration page 1428

p.1428

Exercice 1 On lance un dé à six faces, truqué. On suppose que la probabilité d'obtenir $k \in [\![1,6]\!]$ est proportionnelle à k. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Théorème 7

Sur tout univers fini Ω, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires.

Pour tout élément ω de Ω, on a $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{\operatorname{card}\Omega}$.

Pour tout événement A, on a $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}$.

Cette probabilité est appelée **probabilité uniforme** sur Ω.

Démonstration page 1429

Remarques

1. Si notre perception de l'expérience aléatoire nous laisse supposer que tous les événements élémentaires ont la même chance d'être réalisés, on dit qu'il y a **équiprobabilité** et l'on munit l'univers de la probabilité uniforme. Ainsi, quand on parle de lancers d'une pièce ou d'un dé *équilibré* ou de tirages *au hasard* dans une urne contenant des boules ou des jetons *non discernables*, on signifie implicitement que l'on est dans un cas d'équiprobabilité. Parfois même, l'expression « au hasard » n'apparaît pas explicitement : le tirage de boules dans une urne est considéré comme un **modèle** d'expérience régie par l'équiprobabilité.
2. La formule $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}$ s'énonce parfois : la probabilité de A est le quotient du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles, favorable signifiant ici réalisant l'événement A.
3. Quand l'univers fini Ω est muni de la probabilité uniforme, le calcul des probabilités se ramènent en partie à des *dénombrements*.

p.1429

Exercice 2 D'un jeu de 52 cartes, 5 cartes sont distribuées à un joueur.

1. Quelle est la probabilité que ce joueur ait en main exactement trois cartes de carreau ?
2. Quelle est la probabilité que ce joueur ait en main au moins une paire, c'est-à-dire deux cartes de même valeur ?

p.1429

Exercice 3 On lance six fois un dé non truqué. Quelle est la probabilité d'obtenir les six numéros de 1 à 6 ?

p.1430

Exercice 4 On distribue les cartes au bridge (chacun des quatre joueurs reçoit treize cartes). Quelle est la probabilité que chaque joueur reçoive un as ?

Point méthode

Considérons une urne contenant des boules de différentes couleurs, dans laquelle on effectue des tirages. Selon le mode de tirages, les éléments de Ω apparaîtront comme des listes, des combinaisons, des arrangements. Supposons que l'urne contienne N boules et que nous tirions n boules.

Tirages simultanés. Toutes les boules sont tirées en même temps. On choisit pour Ω l'ensemble de toutes les parties de n éléments distincts de l'ensemble des boules. On a donc $\operatorname{card}\Omega = \binom{N}{n}$.

Tirages avec remise. Les tirages sont successifs et la boule tirée est replacée dans l'urne avant le tirage suivant. On peut tirer tirer plusieurs fois la même boule. On choisit pour Ω l'ensemble de toutes les n-listes d'éléments de l'urne. On a donc $\operatorname{card}(\Omega) = N^n$.

Tirages sans remise. Les boules sont tirées successivement de l'urne, mais sans être replacées après tirage. On choisit pour Ω l'ensemble des suites de n éléments distincts parmi N. On a donc $\operatorname{card}(\Omega) = A_N^n$.

Remarques

1. Ces « modèles d'urnes » peuvent également être vus comme des modèles de prélèvements d'échantillons dans une population au cours d'un sondage.

2. Les exemples qui suivent montrent que, pour tout événement ne faisant pas intervenir l'ordre, les modèles « tirages simultanés » et « tirages sans remise » donnent la même probabilité.

p.1430

Exercice 5 On considère une urne contenant 5 boules blanches, 4 boules noires et 3 boules bleues.

1. On tire simultanément trois boules dans l'urne.
   Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur ?
   Quelle est la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur ?
2. On tire successivement trois boules dans l'urne, en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage. Répondre aux mêmes questions que dans le premier cas.
3. On tire trois boules successivement dans l'urne sans remettre la boule tirée après chaque tirage. Répondre aux mêmes questions que dans le premier cas.
   Quelle est la probabilité que la première boule blanche tirée le soit au troisième tirage ?
   Quelle est la probabilité que la deuxième boule blanche tirée le soit au troisième tirage ?

Ces résultats peuvent se généraliser.

p.1431

Exercice 6 Une urne contient N boules de k couleurs : N_1 de couleur c_1, N_2 de couleur c_2, …, N_k de couleur c_k (on a donc $N_1 + \cdots + N_k = N$). On tire n boules et on cherche la probabilité p d'obtenir exactement n_1 boules de couleur c_1, n_2 de couleur c_2, …, n_k de couleur c_k (où $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$).
Déterminer p dans le cas d'un tirage simultané, dans le cas de tirages successifs avec remise et dans le cas de tirages successifs sans remise.

4 Union finie d'événements

p.1432

Exercice 7
Montrer que si A, B et C sont trois événements d'un espace probabilisé fini, alors :

$$\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C).$$

La formule du crible généralise ce qui précède au cas d'une union de n événements. Cette formule n'est pas explicitement au programme, mais est utile à connaître. Elle sera redémontrée à l'aide des variables aléatoires dans l'exercice 30.3 de la page 1522.

p.1432

Exercice 8 (Formule du crible ou de Poincaré)
Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On veut démontrer que :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}) \right).$$

On sait que, pour tout événement A, on a $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$. En appliquant cette relation à tous les événements qui interviennent dans le membre de droite de l'égalité, on obtient une combinaison linéaire des $\mathbb{P}(\{\omega\})$ (pour $\omega \in \Omega$).

1. Soit ω un élément de Ω qui appartient à exactement $p \geqslant 1$ des sous-ensembles A_k (pour $1 \leqslant k \leqslant n$). Montrer que le coefficient de $\mathbb{P}(\{\omega\})$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\binom{p}{k}$. Calculer cette somme.
2. Conclure.

Remarque Dans le membre de droite de l'égalité démontrée, la deuxième somme est effectuée sur toutes les listes $(i_1, \ldots, i_k)$ strictement croissantes d'entiers de $[\![1, n]\!]$. En particulier, si $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ ne dépend pas des entiers $i_1, \dots, i_k$, mais seulement de k, on a alors :

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \binom{n}{k} \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k).$$

C'est le seul cas, pour une union de n ensembles, où la formule du crible peut être utilisée efficacement.

p.1433

Exercice 9 (Le problème des rencontre)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les extrait successivement sans remise et après chaque tirage, on observe le numéro de la boule tirée. On dit qu'il y a rencontre au i-ème tirage si la boule tirée porte le numéro i. On note E l'événement « il n'y a aucune rencontre ».

1. Définir un espace probabilisé permettant de décrire l'expérience aléatoire.
2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement « il y a rencontre au i-ème tirage ». Exprimer $\overline{E}$ en fonction des A_i.

   En déduire, en appliquant la formule du crible, que $\mathbb{P}(E) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

Remarque Le problème des rencontres peut prendre des formes variées.

1. Problème des danseurs de Chicago : n couples se présentent à un concours de danse ; chaque danseur choisit une partenaire au hasard. Quelle est la probabilité que personne ne danse avec son conjoint ?
2. Un facteur possède n lettres adressées à n personnes distinctes. Il les distribue au hasard. Quelle est la probabilité qu'aucune n'arrive à destination ?

III Probabilités conditionnelles

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, où $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme.
Supposons que l'événement A soit réalisé. Sous l'information « A est réalisé », un événement B est réalisé si et seulement si $A \cap B$ est réalisé. On dira que la probabilité que B soit réalisé, sachant que A est réalisé est :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables à } A \cap B}{\text{nombre de cas possibles pour } A} = \frac{\operatorname{card}(A \cap B)}{\operatorname{card} A} = \frac{\frac{\operatorname{card}(A \cap B)}{\operatorname{card} \Omega}}{\frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega}} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Par exemple, la probabilité qu'on ait obtenu un 6 en lançant un dé équilibré sachant qu'on a obtenu un nombre pair est $\dfrac{1}{3}$, car il y a trois numéros pairs et un seul 6.
Avec les probabilités conditionnelles apparaissent les raisonnements proprement probabilistes, ce qui précède se ramenant peu ou prou à du dénombrement.

1 Définition

Définition 8

Si A et B sont des événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on appelle **probabilité de B sachant A** le réel, noté $\mathbb{P}_A(B)$ ou $\mathbb{P}(B \mid A)$, défini par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Théorème 8

Pour tout événement A de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ vérifiant $\mathbb{P}(A) \neq 0$, l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_A : & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & B & \longmapsto & \mathbb{P}_A(B) \end{array}$$

est une probabilité sur Ω, appelée la **probabilité conditionnelle à A**.

Démonstration page 1434

Remarques

1. La probabilité $\mathbb{P}_A(B)$ de B sachant A est à bien distinguer de la probabilité de l'intersection $\mathbb{P}(B \cap A)$.
   En effet, dans le calcul de la probabilité $\mathbb{P}_A(B)$, on suppose implicitement que l'événement A est réalisé et on cherche la probabilité qu'alors B le soit, tandis que dans le calcul de la probabilité $\mathbb{P}(B \cap A)$, on cherche la probabilité de l'événement « B et A », où l'événement A n'est pas *a priori* réalisé.

2. La notation $\mathbb{P}(B \mid A)$ peut se révéler dangereuse en donnant à penser qu'il existe un événement conditionnel « $B \mid A$ » dont on calculerait la probabilité. Il n'existe pas d'événements conditionnels, mais seulement des probabilités conditionnelles, c'est-à-dire d'autres probabilités que $\mathbb{P}$ sur le même univers Ω.
   Il n'en reste pas moins que la notation $\mathbb{P}(B \mid A)$ est très utilisée. En effet, elle est pratique, surtout quand l'événement B est complexe et donc malaisé à mettre en indice.
   Dans cette ouvrage, nous utiliserons indifféremment les deux notations.

3. Puisque $\mathbb{P}_A$ est une probabilité, elle en possède toutes les propriétés. En particulier, pour tout événement B, on a $\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$.

p.1434 **Exercice 10** On considère une famille de deux enfants. On suppose que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille.
Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'aîné est une fille ? Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant qu'il y a au moins une fille ?

2 Formule des probabilités composées

Le plus souvent, on ne calcule pas $\mathbb{P}_A(B)$ à partir de $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A)$. Au contraire, c'est la connaissance de $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}(A)$ qui permet le calcul de $\mathbb{P}(A \cap B)$. Réécrivons donc la définition 8 de la page 1414.

Proposition 9

Pour tous événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(B) \quad \text{si} \quad \mathbb{P}(A) \neq 0\ ;$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}_B(A) \quad \text{si} \quad \mathbb{P}(B) \neq 0.$$

p.1434 **Exercice 11** Une urne contient initialement 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire une boule. On la remet dans l'urne avec une boule de la même couleur. On procède à un deuxième tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?

La formule précédente se généralise à l'intersection de n événements.

Théorème 10 (Formule des probabilités composées)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Pour toute famille $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ d'événements de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n) =$$
$$\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Principe de démonstration. Le produit de droite est télescopique.

Démonstration page 1434

Remarque Cette formule est utilisée en particulier quand les événements A_1, A_2,…, A_n suivent un ordre chronologique.

p.1435 **Exercice 12** Une urne contient n boules dont b blanches et r rouges, indiscernables au toucher où $r \geqslant 4$. On tire quatre boules successivement et sans remise de cette urne.

1. Quelle est la probabilité que les quatre boules tirées soient rouges ?
2. Soit $k \in [\![1, r+1]\!]$. Quelle est la probabilité qu'une boule rouge apparaisse pour la première fois au k-ième tirage ?

p.1436

Exercice 13 Une puce se déplace sur les trois sommets d'un triangle ABC du plan. Au départ, elle est en A. À chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$, elle fait un saut : si elle est en A, elle va en B ; si elle en B, elle va en A avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et en C avec la probabilité $\frac{1}{2}$; si elle est en C, elle y reste.

1. Montrer que la puce ne peut arriver au point C qu'à des instants pairs.
2. Calculer la probabilité que la puce arrive en C pour la première fois à l'instant $2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

3 Formule des probabilités totales

Commençons par un cas particulier important correspondant au cas où le système complet d'événements est $(A, \overline{A})$.

Théorème 11

Pour tous événements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A}).$$

Si $0 < \mathbb{P}(A) < 1$, on obtient :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)\,\mathbb{P}(A) + P_{\overline{A}}(B)\,\mathbb{P}(\overline{A}).$$

Démonstration. La première égalité résulte de la proposition 5 de la page 1409, car $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.
Si $0 < \mathbb{P}(A) < 1$, alors A et $\overline{A}$ sont de probabilité non nulle, donc :

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}_A(B)\,\mathbb{P}(A) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B \cap \overline{A}) = \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\,\mathbb{P}(\overline{A}),$$

d'où découle la deuxième égalité. □

p.1437

Exercice 14 Une compagnie d'assurance estime que ses clients se divisent en deux catégories : les clients enclins aux accidents, représentant 20% de la population, et ceux qui ont peu d'accidents. Pour la première catégorie, la probabilité d'avoir au moins un accident par an est 0,5 ; pour la deuxième catégorie, cette probabilité est 0,1.
Quelle est la probabilité qu'un nouvel assuré soit victime d'un accident pendant l'année qui suit la signature de son contrat ?

Point méthode

Le théorème 11 est utilisé en particulier avec $A = A_{n-1}$ et $B = A_n$, dans le cas d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements pour laquelle on connaît $\mathbb{P}(A_n \mid A_{n-1})$ et $\mathbb{P}(A_n \mid \overline{A}_{n-1})$.

On détermine ainsi une relation de récurrence entre $\mathbb{P}(A_{n-1})$ et $\mathbb{P}(A_n)$.

Exemple Le fonctionnement d'un appareil au cours du temps obéit aux règles suivantes :

- s'il fonctionne à la date $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité a de fonctionner à la date n ;
- s'il est en panne à la date $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité b d'être en panne à la date n,

où (a, b) est un couple de réels de $]0,1[$.
On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note M_n l'événement « l'appareil est en état de marche à la date n » et p_n la probabilité de M_n.
On veut déterminer p_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

- Pour déterminer une relation de récurrence entre p_{n-1} et p_n, on applique la formule des probabilités totales. On a, si $0 < \mathbb{P}(M_{n-1}) < 1$:
$$\mathbb{P}(M_n) = \mathbb{P}(M_n \mid M_{n-1})\mathbb{P}(M_{n-1}) + \mathbb{P}(M_n \mid \overline{M}_{n-1})\mathbb{P}(\overline{M}_{n-1}).$$
Par hypothèse :
$$\mathbb{P}(M_n \mid M_{n-1}) = a \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(\overline{M}_n \mid \overline{M}_{n-1}) = b,$$
d'où $\mathbb{P}(M_n \mid \overline{M}_{n-1}) = 1-b$. On obtient donc :
$$p_n = ap_{n-1} + (1-b)(1-p_{n-1}) = (a+b-1)p_{n-1} + 1 - b.$$
Cette égalité reste vérifiée si $\mathbb{P}(M_{n-1}) = 0$, car dans ce cas *a fortiori* $\mathbb{P}(M_n \cap M_{n-1}) = 0 = ap_{n-1}$ et de même si $\mathbb{P}(M_{n-1}) = 1$.
- La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite arithmético-géométrique. La limite éventuelle est $\ell = \dfrac{1-b}{2-a-b}$ ($a+b \neq 2$ car a et b sont des réels de $]0,1[$). La suite $(p_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $a+b-1$.
On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n - \ell = (a+b-1)^n(p_0 - \ell)$, c'est-à-dire
$$p_n = \frac{1-b}{2-a-b} + (a+b-1)^n \frac{1-a}{2-a-b}.$$
Comme $a+b-1 \in\,]-1,1[$, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1-b}{2-a-b}$.

Théorème 12 (La formule des probabilités totales)

Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. Pour tout événement B, on a :
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$
Si, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on a $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, on obtient :
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(B)\,\mathbb{P}(A_i).$$

Démonstration. La première égalité a été démontrée dans la proposition 5 de la page 1409. Si, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on a $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors on peut écrire $\mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}_{A_i}(B)\,\mathbb{P}(A_i)$. On obtient donc :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(B)\,\mathbb{P}(A_i). \qquad \square$$

Remarque La formule peut s'appliquer s'il existe i tel que $\mathbb{P}(A_i) = 0$, en faisant la convention qu'alors $\mathbb{P}(B \mid A_i) = 0$, car le terme correspondant de la somme qui est égal à $\mathbb{P}(B \cap A_i)$ est nul *a fortiori*.

Point méthode

Cette formule, qui est d'une grande importance, doit être utilisée en particulier quand l'expérience se déroule en plusieurs étapes et que la première aboutit à plusieurs résultats incompatibles entre eux et donnant un système complet d'événements.

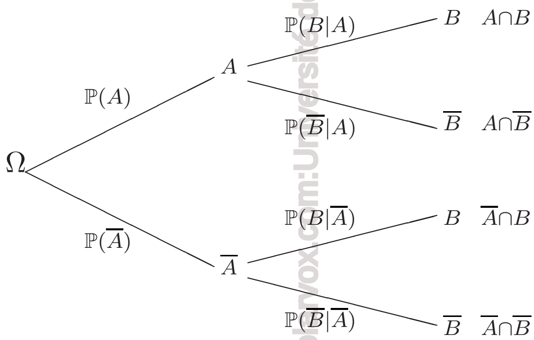
p.1437

Exercice 15 Soit n un entier naturel non nul. Une urne $\mathcal{U}$ contient des jetons numérotés : 1 jeton numéroté 1, 2 jetons numérotés $2, \ldots, n$ jetons numérotés n. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n ; l'urne i contient i boules blanches et $n-i$ boules noires. On tire un jeton dans $\mathcal{U}$; si le jeton tiré porte le numéro i, on prélève une boule dans l'urne numéro i.

Quelle est la probabilité que la boule prélevée soit blanche ?

Arbres de probabilité

En terminale, a été prise l'habitude d'illustrer les probabilités conditionnelles à l'aide d'arbres de probabilité (appelés aussi arbres pondérés).



Sur un tel arbre, les embranchements correspondent à des événements ; la racine de l'arbre correspond à l'événement certain, qu'on sous-entend en général. On parcourt un tel arbre de la racine vers l'extrémité des branches. Sur chaque branche, on note la probabilité de l'événement qui figure à son extrémité, conditionnelle à la conjonction des événements qui figurent entre la racine de l'arbre et son origine.
Chaque chemin correspond à la conjonction des événements rencontrés. Par exemple sur l'arbre de la page ci-contre, les quatre chemins possibles correspondent aux événements $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$. D'après la formule des probabilités composées, la probabilité affectée à chaque chemin est le produit des probabilités rencontrées.
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent. Sur la figure de la page précédente, on obtient :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}(\overline{A})\,\mathbb{P}(B \mid \overline{A}),$$

ce qui résulte de la formule des probabilités totales.
Si un arbre peut illustrer la situation, il ne saurait tenir lieu de démonstration. La démonstration consiste à appliquer la formule des probabilités totales.

4 Formule de Bayes

Proposition 13

Pour tous événements A et B de probabilité non nulle de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, on a :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \mid A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Démonstration. Par définition de la probabilité conditionnelle, on a

$$\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(A \mid B).$$

□

Point méthode

Cette formule, souvent appelée **formule de probabilité des causes**, permet en quelque sorte « de remonter le temps ». En effet, si l'événement B se produit après l'événement A, elle nous permet de déduire, de la probabilité $\mathbb{P}_A(B)$ qui respecte la chronologie, la probabilité $\mathbb{P}_B(A)$ qui, elle, remonte cette chronologie.

p.1437

Exercice 16 On reprend l'exemple de l'exercice 15 de la page 1418. Quelle est la probabilité que la boule soit tirée de l'urne n sachant qu'elle est blanche ?

En général, pour exprimer $\mathbb{P}(B)$, on utilise la formule des probabilités totales. On obtient le théorème suivant.

Théorème 14 (Formule de Bayes)

Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ tel que pour tout entier i de $[\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$.
Pour tout événement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a, pour tout i de $[\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}.$$

En particulier, pour tous événements A et B tels que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \mid \overline{A})\,\mathbb{P}(\overline{A})}.$$

Démonstration. Le dénominateur du membre de droite de la première égalité est $\mathbb{P}(B)$, en vertu de la formule des probabilités totales (théorème 12 de la page 1417). Il s'agit donc de démontrer que $\mathbb{P}(A_i \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(A)}$, ce qui résulte de la proposition 13 de la page précédente. La dernière égalité est un cas particulier de la première, où le système complet d'événements est $(A, \overline{A})$. □

p.1437

Exercice 17 Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille.

On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0,1% des personnes saines testées.
Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif ? Commenter.

p.1438

Exercice 18 Lors d'une interrogation, un étudiant se trouve face à une question dont m réponses possibles sont proposées et une seule est correcte. Soit l'étudiant connaît la réponse à la question, soit il choisit au hasard une réponse parmi les m proposées. La probabilité que cet étudiant connaisse la réponse à la question est $p \in]0, 1[$.
Sachant que l'étudiant a répondu correctement à la question posée, quelle est la probabilité qu'il ait répondu en connaissant la bonne réponse ?

IV Indépendance

1 Indépendance entre deux événements

Définition 9

Deux événements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ sont dits **indépendants** si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Remarques

1. Cette relation ne dépend pas de l'ordre des événements : si A et B sont indépendants, il en est de même de B et A.
2. Si A est un événement de probabilité nulle, alors A et tout autre événement B sont indépendants.

   En effet $A \cap B \subset A$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Proposition 15

Deux événements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ tels que A ait une probabilité non nulle sont indépendants si, et seulement si, $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Démonstration. Par définition de la probabilité conditionnelle, $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$, donc l'égalité $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$ équivaut à $P_A(B) = \mathbb{P}(B)$. □

Remarque Ainsi, si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si la probabilité de B et sa probabilité conditionnelle à A sont égales : la réalisation de A n'influe pas sur celle de B. La notion d'indépendance vise à modéliser cette absence d'influence de la réalisation de l'un des événements sur celle de l'autre.

Exemples

1. On lance deux dés. On considère les événements A « le premier dé donne un numéro pair » et B « le deuxième dé donne 3 ». On choisit $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, muni de la probabilité uniforme.

   On trouve $\operatorname{card} A = 3 \times 6 = 18$ et donc $\mathbb{P}(A) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{card} B = 6$ et donc $\mathbb{P}(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}\cdot$ Comme $A \cap B = \{(2,3), (4,3), (6,3)\}$, on obtient :

   $$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

   Les événements A et B sont indépendants.
2. On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. On considère les événements A « la carte est une dame » et B « la carte est un cœur ». L'ensemble Ω des 52 cartes est muni de la probabilité uniforme. On obtient $\mathbb{P}(A) = \dfrac{4}{52}$, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{13}{52}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{52}$ (la carte tirée est la dame de cœur). Ainsi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$: les événements A et B sont indépendants.

Remarques

1. On veillera à ne pas confondre l'indépendance de deux événements et le fait qu'ils soient incompatibles. Ces notions s'excluent en général . En effet, si A et B sont incompatibles, $A \cap B = \varnothing$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. Si A et B sont de probabilité non nulle, alors $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ et A et B ne sont pas indépendants.

2. Contrairement à l'incompatibilité qui est une notion ensembliste, l'indépendance est une notion probabiliste. Elle dépend de la probabilité dont est muni Ω.

Exemple Une pièce de monnaie est lancée deux fois et l'on choisit $\Omega = \{P, F\}^2$. On considère les événements A « les deux lancers ne donnent pas le même résultat » et B « le deuxième lancer donne face ».

- Si cette pièce est parfaitement équilibrée, on munit l'univers Ω de la probabilité uniforme. On obtient $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2}$ et $A \cap B = \{(P, F)\}$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$: les événements A et B sont indépendants.
- Si cette pièce est pipée et qu'elle tombe sur pile avec une probabilité de $\dfrac{3}{4}$, on obtient alors :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\big(\{(P, F)\}\big) + \mathbb{P}\big(\{(F, P)\}\big) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8},$$
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\big(\{(F, F)\}\big) + \mathbb{P}\big(\{(P, F)\}\big) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}\left(\{(P, F)\}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

  Les événements A et B ne sont pas indépendants.

Remarque Mis à part le cas où l'on construit l'espace probabilisé pour qu'ils le soient, il n'est pas toujours facile de prédire si deux événements sont indépendants.

Proposition 16

Si A et B sont deux événements indépendants de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, alors les événements A et $\overline{B}$, les événements $\overline{A}$ et B et les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration page 1438

Remarque On peut déduire de cette proposition que, si A est un événement de probabilité 1, il est indépendant de tout événement B. En effet $\overline{A}$ est de probabilité nulle donc $\overline{A}$ et B sont indépendants, comme nous l'avons déjà vu. On en déduit que A et B sont indépendants.

Si A et B d'une part, A et C d'autre part sont indépendants, on ne peut rien affirmer sur l'indépendance des événements A et $B \cap C$ ou A et $B \cup C$.

p.1438

Exercice 19 On lance deux dés équilibrés et l'on considère les événements A « le premier dé amène un nombre pair », B « le second dé amène un nombre pair » et C « les deux dés amènent des nombres de même parité ».
Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants, mais que A et $B \cap C$ ne sont pas indépendants et que A et $B \cup C$ ne sont pas indépendants.

p.1438

Exercice 20

1. Montrer que, si les événements A et B d'une part, A et C d'autre part, sont indépendants et si $B \subset C$, alors A et $C \setminus B$ sont indépendants.
2. Montrer que, si pour $1 \leqslant i \leqslant n$, A et B_i sont indépendants et si les événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sont incompatibles, alors A et $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ sont indépendants.

2 Indépendance d'une famille d'événements.

Définition 10

Des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ sont dits **deux à deux indépendants** si, pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $[\![1,n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j).$$

Comme nous pouvons le constater dans les exemples précédents, l'indépendance deux à deux des événements A, B et C ne nous permet pas de déterminer la probabilité de $A \cap B \cap C$. Nous sommes donc amenés à définir une notion d'indépendance plus forte que la précédente.

Définition 11

Des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ sont dits **mutuellement indépendants** (ou simplement, **indépendants**) si, pour tout sous-ensemble non vide I de $[\![1,n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarques

1. Pour l'indépendance mutuelle, on dit, en général, indépendants.
2. L'indépendance de n événements ne dépend pas de l'ordre de ces événements. C'est une notion très forte qui demande de vérifier $2^n - 1$ égalités

(autant que de parties non vides I de $[\![1,n]\!]$). Il est rare qu'on ait à les vérifier directement. Soit l'indépendance des événements fait partie des hypothèses ; elle modélise des expériences aléatoires aux résultats indépendants. Soit elle est la conséquence de l'indépendance, connue, d'autres événements.

3. Si les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants, comme on le voit en prenant pour I un ensemble à deux éléments.

   Mais la réciproque est fausse, comme le montre l'exercice 19 de la page 1423.
4. Si les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants, pour tout ensemble d'indices $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n$, où $p \in \mathbb{N}^*$, les événements $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_p}$ sont indépendants.
5. Il résulte de la proposition 16 de la page 1422 que, si les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux indépendants, les événements $B_1, \ldots, B_n$, où chaque B_i (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) est A_i ou $\overline{A_i}$, sont également deux à deux indépendants.

   Nous allons voir que cela est vrai également pour l'indépendance mutuelle.

Proposition 17

Si les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors les événements $B_1, \ldots, B_n$, où chaque B_i (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) est A_i ou $\overline{A_i}$, sont également mutuellement indépendants.

Principe de démonstration. Démonstration page 1439

On commence par traiter le cas où $B_i = A_i$ pour tous les i de $[\![1,n]\!]$, sauf un.

Remarque On peut démontrer que, pour tout n-uplet $(A_1, \ldots, A_n)$ d'événements mutuellement indépendants, tout événement pouvant s'écrire comme réunion ou intersection des événements $A_1, \ldots, A_{n-1}$ ou de leurs contraires est indépendant de A_n. Plus généralement, si p est un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n-1$, tout événement B pouvant s'écrire comme réunion ou intersection des événements $A_1, \ldots, A_p$ ou de leurs contraires est indépendant de tout événement C pouvant s'écrire comme réunion ou intersection des événements $A_{p+1}, \ldots, A_n$ ou de leurs contraires.
Nous nous contenterons de montrer un résultat très partiel.

Proposition 18

Pour tout n-uplet $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ d'événements indépendants et $p \in [\![1, n-1]\!]$, les événements $A_1 \cap \ldots \cap A_p$ et $A_{p+1} \cap \ldots \cap A_n$ sont indépendants. Il en est de même de $A_1 \cup \ldots \cup A_p$ et $A_{p+1} \cup \ldots \cup A_n$, de $A_1 \cap \ldots \cap A_p$ et $A_{p+1} \cup \ldots \cup A_n$, de $A_1 \cup \ldots \cup A_p$ et $A_{p+1} \cap \ldots \cap A_n$.

Démonstration page 1439

3 Modélisation d'expériences aléatoires indépendantes

L'indépendance des événements est en général une conséquence de la modélisation choisie. On construit l'espace probabilisé de sorte que deux expériences dont les résultats n'ont pas de lien de causalité entre eux (on parle d'expériences indépendantes) se traduisent par des événements indépendants (au sens mathématique).

- Supposons que l'on ait modélisé deux épreuves aléatoires $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ par les espaces probabilisés finis $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ et $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$. Alors on sait modéliser l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$ consistant en la succession des expériences indépendantes $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.

  En effet, on peut représenter un résultat des deux expériences comme un élément de $\Omega_1 \times \Omega_2$. De quelle probabilité $\mathbb{P}$ faut-il alors munir cet univers ?

  On peut remarquer que pour tout $A_1 \in \mathcal{P}(\Omega_1)$, A_1 et $A_1 \times \Omega_2$ représente le même événement, donc il paraît raisonnable de poser $\mathbb{P}(A_1 \times \Omega_2) = \mathbb{P}_1(A_1)$ et de même, pour tout $A_2 \in \mathcal{P}(\Omega_2)$, $\mathbb{P}(\Omega_1 \times A_2) = \mathbb{P}_2(A_2)$. L'indépendance des deux épreuves aléatoires se traduira par :

  $$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \times A_2) = \mathbb{P}\big((A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2)\big) &= \mathbb{P}(A_1 \times \Omega_2)\, \mathbb{P}(\Omega_1 \times A_2) \\ &= \mathbb{P}_1(A_1)\, \mathbb{P}_2(A_2).\end{aligned}$$

  On peut montrer que ces relations suffisent à définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\Omega_1 \times \Omega_2$.

- Plus généralement, une succession de n expériences aléatoires indépendantes représentées par les espaces probabilisés $(\Omega_i, \mathbb{P}_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sera modélisée par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, où $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ et $\mathbb{P}$ est l'unique probabilité qui vérifie :

  $$\forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega_1) \times \cdots \times \mathcal{P}(\Omega_n) \;\; \mathbb{P}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathbb{P}_1(A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}_n(A_n).$$

Épreuves répétées

Ce qui précède s'applique en particulier à une suite de n expériences identiques et indépendantes (on parle en général d'épreuves répétées). Si une épreuve est représentée par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, la suite des n épreuves sera représentée par l'espace probabilisé $(\Omega^n, \mathbb{Q})$, où $\mathbb{Q}$ vérifie :

$$\forall (A_1, \ldots, A_n) \in \big(\mathcal{P}(\Omega)\big)^n \quad \mathbb{Q}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_n).$$

En particulier, pour $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega^n$,

$$\mathbb{Q}(\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) \ldots \mathbb{P}(\{\omega_n\}).$$

C'est ainsi que l'on modélise le jeu de **pile ou face**. On dispose d'une pièce de monnaie qu'on lance n fois. On suppose que les résultats des différents lancers sont indépendants. Un lancer sera représenté par l'univers $\{1, 0\}$, où 1 représente par exemple le résultat « pile » et 0 le résultat « face ». Il existe $p \in [0,1]$ tel que la probabilité $\mathbb{P}$ sur $\{0,1\}$ est définie par $\mathbb{P}(\{1\}) = p$ et $\mathbb{P}(\{0\}) = 1-p$. La suite de n lancers sera représentée par l'univers $\Omega = \{0,1\}^n$, muni de la probabilité $\mathbb{Q}$.

Pour tout $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega,\ \mathbb{Q}(\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_i\})$.

Par exemple :

* la probabilité de l'événement « on obtient n piles » est p^n ;
* la probabilité de l'événement « on obtient dans cet ordre k piles puis $n-k$ faces » $(0 \leqslant k \leqslant n)$ est $p^k(1-p)^{n-k}$;
* la probabilité de l'événement « on obtient k piles et $n-k$ faces dans un ordre quelconque » $(0 \leqslant k \leqslant n)$ est $\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ car c'est la réunion de $\binom{n}{k}$ événements incompatibles de même probabilité $p^k(n-p)^k$, correspondant aux différentes répartitions des k piles parmi les n lancers.

Plus généralement, on appelle **épreuve de Bernoulli** toute épreuve à deux issues, que l'on nomme en général succès et échec. Une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes est appelée **schéma de Bernoulli**. Tout schéma de Bernoulli peut être modélisé par $(\{0,1\}^n, \mathbb{Q})$, où 1 représente un succès et 0 un échec.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Théorème 2

1. Comme $\varnothing$ est un événement incompatible avec lui-même, on a :
$$\mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing \cup \varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\varnothing)$$
et donc $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
2. On a par définition, puisque A et $\overline{A}$ sont incompatibles :
$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}\left(A \cup \overline{A}\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$
et donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
3. Si $A \subset B$, alors B est la réunion des événements incompatibles A et $B \setminus A$ et donc :
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant \mathbb{P}(A).$$
4. L'événement $A \cup B$ est la réunion des deux événements incompatibles A et $B \setminus A$; d'autre part, B est la réunion des événements incompatibles $A \cap B$ et $B \setminus A$. On a donc :
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A).$$
On en déduit que :
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Proposition 3 On le démontre par récurrence sur le nombre n d'événements.

- Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.
- On suppose que la propriété est vérifiée pour n événements deux à deux incompatibles et l'on considère une famille $(A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$ d'événements deux à deux incompatibles. Alors les événements $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ et A_{n+1} sont incompatibles. On a donc, par définition d'une probabilité :
$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}) = \mathbb{P}\big((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}\big) = \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1})$$
et en utilisant l'hypothèse de récurrence :
$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}).$$

Proposition 4 Pour $n = 2$, on a :
$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \leqslant \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2).$$
En utilisant le cas $n = 2$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}) &= \mathbb{P}\left((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}\right) \\ &\leqslant \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}),\end{aligned}$$
ce qui permet de conclure par une récurrence immédiate.

Proposition 5 Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω. Par additivité finie, comme les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, on a $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

De l'égalité $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ découle alors $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1$.

Comme les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, les événements $B \cap A_1, \ldots, B \cap A_n$ sont aussi deux à deux incompatibles.

Par additivité finie, on obtient, $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} (B \cap A_i)\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i)$.

De $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (B \cap A_i) = B \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = B \cap \Omega = B$, on déduit :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

Théorème 6

1. Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω, les propriétés (1) et (2) des p_ω résultent de la définition d'une probabilité et du fait que $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$ est un système complet d'événements.
2. Réciproquement, supposons que les propriétés (1) et (2) soient vérifiées. Raisonnons par analyse-synthèse.
   - Si la probabilité $\mathbb{P}$ existe, tout événement A peut s'écrire $A = \bigcup\limits_{\omega \in A} \{\omega\}$ et, par additivité finie :
   $$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$
   - Montrons que l'application $\mathbb{P}$ ainsi définie est une probabilité.
     * Pour tout événement A, on a $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant \sum\limits_{\omega \in \Omega} p_\omega \leqslant 1$, car les p_ω sont positifs et $\mathbb{P}(\Omega) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.
     * Si A et B sont deux événements incompatibles, on a :
     $$\mathbb{P}(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} p_\omega = \sum_{\omega \in A} p_\omega + \sum_{\omega \in B} p_\omega = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

   Donc $\mathbb{P}$ est une probabilité et, par définition de $\mathbb{P}$, on a $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$, pour tout $\omega \in \Omega$.

Exercice 1 On a $\Omega = [\![1, 6]\!]$ et il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad p_k = \mathbb{P}(\{k\}) = Ck.$$

De $\sum\limits_{k=1}^{6} p_k = C \sum\limits_{k=1}^{6} k = C \dfrac{6 \cdot 7}{2} = 21C = 1$, on déduit $C = \dfrac{1}{21}$.
La probabilité de l'événement A « on obtient un numéro pair » est :

$$\mathbb{P}(A) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{2+4+6}{21} = \frac{4}{7}.$$

Théorème 7 On pose $n = \operatorname{card}\Omega$.

- Si $\mathbb{P}$ prend la même valeur sur tous les événements élémentaires alors, pour tout $\omega \in \Omega$:
$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega' \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega'\}) = n\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$$
et donc $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{n}\cdot$

- D'après le théorème 6, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{n}$ pour tout $\omega \in \Omega$. On a alors, pour tout événement A :
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{n} = \frac{\operatorname{card}(A)}{n} = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}.$$

Exercice 2 On prend comme univers Ω l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des 52 cartes. Comme la distribution se fait au hasard, on munit Ω de la probabilité uniforme. On a $\operatorname{card}(\Omega) = \binom{52}{5}$.

1. Soit A l'événement « le joueur a en main exactement trois cartes de carreau ». Le jeu contient 13 cartes de carreau, le joueur a donc $\binom{13}{3}$ possibilités de choisir 3 cartes de carreau. Les deux autres cartes sont à choisir parmi les 39 autres cartes du jeu qui ne sont pas des carreaux. On obtient $\operatorname{card}(A) = \binom{13}{3}.\binom{39}{2}$ et, par équiprobabilité :
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{13}{3}.\binom{39}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{2717}{33320} \approx 0{,}08.$$

2. Soit B l'événement « le joueur a au moins deux cartes de même valeur ». Il est plus simple de déterminer pour commencer la probabilité de l'événement contraire $\overline{B}$ « le joueur a cinq cartes de valeurs différentes ». Un jeu comporte 13 valeurs parmi lequel le joueur doit choisir cinq valeurs différentes. Pour chacune de ces valeurs, il faut choisir une des quatre cartes ayant cette valeur. On obtient $\operatorname{card}(\overline{B}) = \binom{13}{5}.4^5$ et :
$$\mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{\binom{13}{5}.4^5}{\binom{52}{5}} = \frac{2112}{4165}\cdot$$
On en déduit $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) = \dfrac{2053}{4165} \approx 0{,}49$.

Exercice 3 Comme le dé est non truqué, à chaque lancer chaque numéro a la même chance de sortir qu'un autre. Nous munirons donc l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]^6$ de la probabilité uniforme.
L'événement A « obtenir les six numéros » est l'ensemble des 6-uplets dont les composantes sont les six numéros dans des ordres différents, donc le cardinal de cet événement est le nombre de permutations d'un ensemble à 6 éléments. On obtient :
$$\mathbb{P}(A) = \frac{6!}{6^6} \approx 0{,}015.$$

Exercice 4 On numérote les joueurs de 1 à 4. On distribue 13 cartes au premier joueur, 13 cartes au second, 13 cartes au troisième et 13 cartes au quatrième. On obtient :

$$\operatorname{card}\Omega = \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13} = \frac{52!}{(13!)^4}.$$

On munit Ω de la probabilité uniforme.
Soit A l'événement « chaque joueur a reçu un as ». Cas favorables : on donne un as et 12 autres cartes (parmi les cartes qui ne sont pas des as) à chaque joueur. Pour le premier on choisit l'as parmi 4, pour le second parmi 3, ... On obtient :

$$\operatorname{card}(A) = 4\binom{48}{12}3\binom{36}{12}2\binom{24}{12}\binom{12}{12} = \frac{4!\,48!}{(12!)^4}.$$

On obtient :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card}\Omega} = \frac{4!\,13^4}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49} \approx 0{,}105.$$

Exercice 5

1. L'univers est l'ensemble des parties à 3 éléments dans l'ensemble des boules. On a donc $\operatorname{card}\Omega = \binom{12}{3} = \dfrac{12\cdot 11\cdot 10}{6} = 220$. Comme les boules sont tirées au hasard, on considère la probabilité uniforme sur Ω.
   - Soit A l'événement « on tire trois boules de la même couleur » et B l'événement « on tire une boule de chaque couleur ».
     L'événement A est la réunion des événements A_1 : « on tire trois boules blanches », A_2 : « on tire trois boules noires » et A_3 : « on tire trois boules bleues ».
     On obtient $\operatorname{card} A_1 = \binom{5}{3} = 10$, $\operatorname{card} A_2 = \binom{4}{3} = 4$ et $\operatorname{card} A_3 = \binom{3}{3} = 1$. Comme les événements sont incompatibles, on obtient $\operatorname{card} A = 10+4+1 = 15$ et $\mathbb{P}(A) = \dfrac{15}{220} = \dfrac{3}{44}\cdot$
   - On a clairement $\operatorname{card} B = \binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1} = 60$ et donc $\mathbb{P}(B) = \dfrac{60}{220} = \dfrac{3}{11}\cdot$
2. Un possible est un triplet de boules prises dans l'ensemble des boules. En notant E l'ensemble des boules, on a donc $\Omega = E^3$ et :
   $$\operatorname{card}\Omega = (\operatorname{card} E)^3 = 12^3 = 1728.$$
   On munit Ω de la probabilité uniforme. On garde les notations du premier cas.
   - On a $A_1 = E_b^3$, où E_b est l'ensemble des boules blanches. On en déduit que $\operatorname{card} A_1 = 5^3$. En considérant l'ensemble des boules noires et l'ensemble des boules bleues, on obtient de même $\operatorname{card} A_2 = 4^3$ et $\operatorname{card} A_3 = 3^3$ et finalement :
     $$\operatorname{card} A = 5^3 + 4^3 + 3^3 = 216 \quad\text{et}\quad \mathbb{P}(A) = \frac{216}{1728} = \frac{1}{8}\cdot$$
   - Soit B_1 l'événement « on tire une boule blanche, une boule noire et une boule bleue dans cet ordre ». Alors B_1 est l'ensemble des triplets constitués d'une boule blanche, d'une noire et d'une boule bleue dans cet ordre. On a donc :
     $$\operatorname{card} B_1 = 5\times 4\times 3 = 60.$$

L'événement B est la réunion de $3! = 6$ événements de ce type, incompatibles deux à deux, correspondant aux ordres possibles dans l'ensemble des 3 couleurs. Par le même raisonnement, on trouve que chacun de ces événements a pour cardinal 60. On obtient donc $\operatorname{card} B = 6 \times 60 = 360$ et :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{360}{1728} = \frac{5}{24}\cdot$$

3. Les éléments de Ω sont des triplets d'éléments distincts de E. On a donc :

$$\operatorname{card} \Omega = 12 \times 11 \times 10 = 1320.$$

- L'événement A_1 est l'ensemble des triplets d'éléments distincts dans l'ensemble des boules blanches. On obtient $\operatorname{card} A_1 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ et par le même raisonnement $\operatorname{card} A_2 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ et $\operatorname{card} A_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$. Ainsi, on a $\operatorname{card} A = 60 + 24 + 6 = 90$ et

$$\mathbb{P}(A) = \frac{90}{1320} = \frac{3}{44}\cdot$$

- En gardant les notations précédentes, on obtient $\operatorname{card} B_1 = 5 \times 4 \times 3 = 60$. L'événement B apparaît encore comme la réunion disjointe de 6 événements de même probabilité égale à celle de B_1. On a donc $\operatorname{card} B = 6 \times 60 = 360$ et :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{360}{1320} = \frac{3}{11}\cdot$$

On remarque qu'on a obtenu le même résultat que dans le tirage simultané de 3 boules. Cela s'explique par le fait que dans les événements A et B l'ordre de tirage des boules n'importe pas. On peut donc s'intéresser seulement au résultat final des trois tirages, ce qui revient à considérer un tirage simultané de 3 boules. Il n'en est pas de même pour les deux derniers événements.

- L'événement C « la première boule blanche est tirée au troisième tirage » est l'ensemble des triplets de boules distincts, tels que les deux premières boules tirées ne soient pas blanches et la troisième boule soit blanche. On a donc :

$$\operatorname{card} C = 7 \times 6 \times 5 = 210,$$

car la première boule est prise parmi les $4+3$ boules non blanches, la deuxième est prise dans le même ensemble et est différente de la première. On obtient :

$$\mathbb{P}(C) = \frac{210}{1320} = \frac{7}{44}\cdot$$

- L'événement D « la deuxième boule blanche est tirée au troisième tirage » est la réunion de D_1 « la première et la troisième boules tirées sont blanches, la seconde n'est pas blanche » et de D_2 « la seconde et la troisième boules tirées sont blanches, la première n'est pas blanche ». On trouve $\operatorname{card} D_1 = 5 \times 7 \times 4 = 140$ et $\operatorname{card} D_2 = 7 \times 5 \times 4 = 140$. On en déduit $\operatorname{card} D = 2 \times 140 = 280$ et :

$$\mathbb{P}(D) = \frac{280}{1320} = \frac{7}{33}\cdot$$

Exercice 6

- Dans le cas d'un tirage simultané, on choisit pour Ω l'ensemble des parties de cardinal n de l'ensemble des boules. On a donc $\operatorname{card} \Omega = \binom{N}{n}$. On munit Ω de la probabilité uniforme. La probabilité cherchée est :

$$p = \frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\cdots\binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}}\cdot$$

- Dans le cas de tirages successifs avec remise, on peut prendre pour Ω un ensemble de n-listes et $\operatorname{card}\Omega = N^n$. Si on tire dans cet ordre n_1 boules de couleur c_1, n_2 de couleur c_2, $\ldots$, n_k de couleur c_k, le nombre de cas favorables est $N_1^{n_1} N_2^{n_2} \ldots N_k^{n_k}$. Il faut multiplier par le nombre de répartition possibles des tirages des différentes couleur parmi les n tirages, qui est $\dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$ (se reporter à l'exercice sur les anagrammes page 1380). La probabilité cherchée est donc :
$$p = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \frac{N_1^{n_1} N_2^{n_2} \ldots N_k^{n_k}}{N^n}.$$

- Dans le cas de tirages successifs sans remise, on peut prendre pour Ω l'ensemble des arrangements de n boules parmi N. On a donc $\operatorname{card}\Omega = A_N^n$. Il faut tirer n_1 boules de couleur c_1, n_2 de couleur c_2, $\ldots$, n_k de couleur c_k, avec ordre (on aura donc des arrangements et pas des combinaisons) et, de plus les répartir parmi les N tirages. Le nombre de répartitions possibles est comme dans la question précédente $\dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}\cdot$ On obtient :
$$p = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \frac{A_{N_1}^{n_1} A_{N_2}^{n_2} \ldots A_{N_k}^{n_k}}{A_N^n}.$$
Sachant que $\dfrac{A_N^n}{n!} = \binom{N}{n}$, on obtient :
$$p = \frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\ldots\binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}},$$
c'est-à-dire le même résultat que dans le tirage simultané, ce qui était prévisible, car la question posée ne dépendait pas de l'ordre.

Exercice 7 On obtient en appliquant plusieurs fois la propriété 4 du théorème 2 de la page 1408 :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}\big((A \cup B) \cap C\big) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}\left((A \cap C) \cup (B \cap C)\right) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) \\
&\qquad\qquad - \big(\mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap A \cap C)\big) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\
&\qquad\qquad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

Exercice 8

1. L'élément $\mathbb{P}(\{\omega\})$ apparaît une fois dans chaque terme $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$ tel que $\omega \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$. Cela est impossible si $k > p$. Si $k \leqslant p$, le nombre de termes $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$ où apparaît $\mathbb{P}(\{\omega\})$ est le nombre d'ensembles $\{i_1, \ldots, i_k\}$ tels que $\omega \in A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$. Il s'agit de choisir k indices parmi les p indices i tels

que $\omega \in A_i$. Il y en a $\binom{p}{k}$. Cela est vrai pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$. On en déduit que le coefficient de $\mathbb{P}(\{\omega\})$ est $\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\binom{p}{k}$. On peut écrire, d'après la formule du binôme :

$$\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\binom{p}{k} = -\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k}\binom{p}{k} = -\sum_{k=0}^{p}(-1)^{k}\binom{p}{k} + 1 = -(1-1)^p + 1 = 1.$$

2. • Si $\omega \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, alors il existe $p \geqslant 1$, tel que ω appartienne à exactement p des sous-ensembles A_k. Alors le coefficient de $\mathbb{P}(\{\omega\})$ est 1.
   • Si $\omega \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, alors $\mathbb{P}(\{\omega\})$ n'apparaît pas dans la somme. Son coefficient est nul.

   On obtient donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})\right) = \sum_{\omega\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i}\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right).$$

Exercice 9

1. On note le résultat de cette expérience sous forme d'une bijection de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$ qui associe, à chaque tirage, le numéro de la boule tirée. Ainsi Ω est l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$. C'est un ensemble à $n!$ éléments. Comme les tirages sont effectués au hasard, on choisit la probabilité uniforme sur Ω.

2. Par définition, on a $E = \bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$. Pour calculer la probabilité de E, on considère l'événement contraire $\overline{E} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Par la formule du crible :

$$\mathbb{P}(\overline{E}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left((-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})\right).$$

   L'événement $A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}$ est l'événement « il y a rencontre aux tirages i_1, i_2, ..., i_k », les autres tirages étant quelconques. C'est l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ fixant i_1, i_2, ...,i_k. Il y en a autant que de permutations des $n-k$ éléments. Le cardinal de $A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}$ est donc $(n-k)!$. Par équiprobabilité, on obtient :

$$\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

   D'après la remarque qui précède, on a :

$$\mathbb{P}(\overline{E}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}.$$

   Finalement on obtient $\mathbb{P}(E) = 1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.

Théorème 8 Montrons que $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur Ω.

- L'application $\mathbb{P}_A$ est bien définie car $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Pour tout événement B, on a $B \cap A \subset A$, donc $\mathbb{P}(B \cap A) \leqslant \mathbb{P}(A)$ et par suite $0 \leqslant \mathbb{P}_A(B) \leqslant 1$.
- On a $P_A(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$.
- Soit B et B' deux événements incompatibles. Les événements $B \cap A$ et $B' \cap A$ sont également incompatibles et donc :

$$\mathbb{P}\big((B \cup B') \cap A\big) = \mathbb{P}\big((B \cap A) \cup (B' \cap A)\big) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B' \cap A).$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}_A(B \cup B') = \frac{\mathbb{P}\big((B \cup B') \cap A\big)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} + \frac{\mathbb{P}(B' \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(B').$$

Exercice 10 Chaque composition de la famille peut se représenter par un couple d'éléments de l'ensemble $\{F, G\}$, le premier éléments du couple représentant le sexe de l'aîné, le second le sexe du second enfant. On a donc $\Omega = \{F, G\}^2$ que l'on munit de la probabilité uniforme.
On considère les événements A « l'aîné est une fille », B « les deux enfants sont des filles » et C « il y a au moins une fille ». On remarque que ces événements ont une probabilité non nulle.
La première probabilité demandée est :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

La seconde probabilité demandée est :

$$\mathbb{P}_C(B) = \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{1 - \mathbb{P}(\overline{C})} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3},$$

car $\overline{C}$ est l'événement « les deux enfants sont des garçons ».

Exercice 11 On note N_i, pour $i = 1, 2$, l'événement « on tire une boule noire au i-ième tirage ». On obtient :

$$\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(N_1)\,\mathbb{P}_{N_1}(N_2) = \frac{2}{6}\frac{3}{7} = \frac{1}{7},$$

car avant le second tirage, l'urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires.

Théorème 10 Pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$, on a :

$$A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap \ldots \cap A_k,$$

d'où $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_k) \geqslant \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Toutes les probabilités conditionnelles sont donc définies.

Il suffit alors d'écrire :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\ldots\mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \\
&\qquad = \mathbb{P}(A_1)\prod_{k=2}^{n}\mathbb{P}\left(A_k \mid A_1 \cap \ldots A_{k-1}\right) \\
&\qquad = \mathbb{P}(A_1)\prod_{k=2}^{n}\frac{\mathbb{P}\big(A_1 \cap \ldots A_{k-1} \cap A_k\big)}{\mathbb{P}\big(A_1 \cap \ldots A_{k-1}\big)} \\
&\qquad = \mathbb{P}\big(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n\big),
\end{aligned}$$

car tous les termes se simplifient deux à deux à part le dernier.

Exercice 12

1. Pour $1 \leqslant i \leqslant 4$, notons R_i l'événement « la i-ème boule tirée est rouge ». La probabilité recherchée est la probabilité de l'événement $R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4$. Sous réserve que ces probabilités conditionnelles soient définies, on peut écrire par la formule des probabilités composées :
$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) = \mathbb{P}(R_1)\,\mathbb{P}(R_2 \mid R_1)\,\mathbb{P}(R_3 \mid R_1 \cap R_2)\,\mathbb{P}(R_4 \mid R_1 \cap R_2 \cap R_3)$.
Calculons successivement ces probabilités. Comme les boules sont indiscernables au toucher, nous utilisons la probabilité uniforme. On a donc :
$$\mathbb{P}(R_1) = \frac{r}{n}\cdot$$
Si la première boule tirée est rouge, comme les tirages se font sans remise, il reste $n-1$ boules dans l'urne dont $r-1$ rouges, donc $\mathbb{P}(R_2 \mid R_1) = \dfrac{r-1}{n-1}$ et :
$$\mathbb{P}(R_2 \cap R_1) = \frac{r(r-1)}{n(n-1)} \neq 0.$$
Nous pouvons donc considérer la probabilité conditionnelle à $R_1 \cap R_2$. Si les deux premières boules sont rouges, il reste avant le troisième tirage $n-2$ boules dans l'urne dont $r-2$ rouges, donc :
$$\mathbb{P}(R_3 \mid R_1 \cap R_2) = \frac{r-2}{n-2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{r(r-1)(r-2)}{n(n-1)(n-2)} \neq 0.$$
La formule des probabilités composées s'applique. Comme précédemment, on trouve $\mathbb{P}(R_4 \mid R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \dfrac{r-3}{n-3}$ et finalement :
$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) = \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\cdot$$

2. Notant A_k l'événement « pour la première fois une boule rouge est tirée au k-ième tirage » et B_k « une boule blanche est obtenue lors du k-ième tirage », on peut écrire :
$$A_k = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap R_k.$$
Sous réserve que ces probabilités conditionnelles soient définies, la formule des probabilités composées donne
$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(B_2 \mid B_1)\ldots\mathbb{P}(B_{k-1} \mid B_1 \cap \ldots \cap B_{k-2})\,\mathbb{P}(R_k \mid B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1})$.
Par équiprobabilité, on a $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{b}{n}$ et $\mathbb{P}(B_1) \neq 0$.

Quand la première boule retirée est blanche, il reste dans l'urne $n-1$ boules dont $b-1$ blanches, d'où $\mathbb{P}(B_2 \mid B_1) = \dfrac{b-1}{n-1}$ et $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) \neq 0$.
On démontre de proche en proche que $\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_i) \neq 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant k-1 \leqslant b$. On obtient :

$$\mathbb{P}(B_{k-1} \mid B_1 \cap \cdots \cap B_{k-2}) = \frac{b-k+2}{n-k+2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(R_k \mid B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1}) = \frac{r}{n-k}\cdot$$

Il vient finalement $\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{b(b-1)\ldots(b-k+2)r}{n(n-1)\ldots(n-k)}\cdot$

Exercice 13

1. Par hypothèse, si la puce arrive par la première fois en C à l'instant n, la puce est en B à l'instant $n-1$ et aux instants précédents, elle se déplace entre A et B. Comme elle ne reste ni en A, ni en B, elle sera alternativement en A et B. À l'instant 1, elle saute en B, donc elle sera en B aux instants impairs. Ainsi $n-1$ est impair et n est pair.
2. Pour $k \geqslant 1$, on note A_k et B_k, les événements respectifs « la puce se trouve au point A à l'instant k » et « la puce se trouve au point B à l'instant k », ainsi que C_k l'événement « la puce se trouve au point C pour la première fois à l'instant k ». On veut calculer $\mathbb{P}(C_{2n})$. Le raisonnement précédent montre que :
$$C_{2n} = B_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{2n-2} \cap B_{2n-1} \cap C_{2n}.$$
Au départ, la puce est en A. Au premier saut, il est certain qu'elle se déplace en B. On a donc $\mathbb{P}(B_1) = 1$.
Soit $k \geqslant 1$. On remarque que $B_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{2k-2} \cap B_{2k-1} = B_{2k-1}$. En effet, si la puce est à l'instant $2k-1$ en B, pour tout $i \in [\![1, 2k-1]\!]$, elle est nécessairement, à l'instant i, en A si i est pair et en B si i est impair. On note également que $A_{2k} \subset B_{2k+1}$. On en déduit :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap B_{2k-1} \cap A_{2k} \cap B_{2k+1}) &= \mathbb{P}(B_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap B_{2k-1} \cap A_{2k})\\ &= \mathbb{P}(B_{2k-1} \cap A_{2k})\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_{2k-1})\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap B_{2k-1}).\end{aligned}$$
La suite $(\mathbb{P}(B_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap B_{2k-1}))_{k \geqslant 1}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}\cdot$ Comme $\mathbb{P}(B_1) = 1$, on en déduit que $\mathbb{P}(B_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{2n-2} \cap B_{2n-1}) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.
On a enfin :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_{2n}) &= \mathbb{P}(B_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap B_{2n-1} \cap C_{2n})\\ &= \mathbb{P}(B_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap B_{2n-1})\,\mathbb{P}(C_{2n} \mid B_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap B_{2n-1})\\ &= \mathbb{P}(B_1 \cap A_2 \cap \ldots B_{2n-1})\,\mathbb{P}(C_{2n} \mid B_{2n-1})\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}.\end{aligned}$$

Exercice 14 Notons N l'événement « le nouvel assuré est victime d'un accident dans l'année qui suit la signature de son contrat », et A l'événement « le nouvel assuré est enclin aux accidents ».

L'hypothèse s'écrit $\mathbb{P}(A) = 0{,}2$ et donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = 0{,}8$, $\mathbb{P}_A(N) = 0{,}5$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(N) = 0{,}1$. On obtient donc :

$$\mathbb{P}(N) = P_A(N)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(N)\,\mathbb{P}(\overline{A}) = 0{,}2 \cdot 0{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}18.$$

Exercice 15 Pour $i \in [\![1, n]\!]$, notons U_i l'événement « l'urne i est choisie » et B l'événement « la boule prélevée est blanche ». La famille $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ est un système complet d'événements de probabilité non nulle.

On obtient, d'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(U_i)\mathbb{P}(B \mid U_i)$.

Avec les données de l'énoncé, $\mathbb{P}(U_i) = \dfrac{i}{1 + \cdots + n} = \dfrac{2i}{n(n+1)}$ et $\mathbb{P}(B \mid U_i) = \dfrac{i}{n}$, d'où :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i^2}{n^2(n+1)} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)} = \frac{2n+1}{3n}\cdot$$

Exercice 16 D'après la formule de Bayes, $\mathbb{P}(U_1 \mid B)) = \dfrac{\mathbb{P}(B \mid U_1)\,\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(B)}\cdot$ Or nous avons vu précédemment que $\mathbb{P}(B) = \dfrac{2n+1}{3n}$, $\mathbb{P}(U_1) = \dfrac{2}{n(n+1)}$ et $\mathbb{P}(B \mid U_1) = \dfrac{1}{n}\cdot$ Par suite

$$\mathbb{P}(U_1 \mid B) = \frac{\frac{2}{n^2(n+1)}}{\frac{2n+1}{3n}} = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Exercice 17 Notons M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ». La probabilité demandée est la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(M \mid T)$. Par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(M \mid T) = \frac{\mathbb{P}(T \mid M)\,\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T \mid M)\,\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T \mid \overline{M})\,\mathbb{P}(\overline{M})}\cdot$$

D'après les données de l'énoncé :

$$\mathbb{P}(M) = 0{,}0001, \quad \mathbb{P}(T \mid M) = 0{,}99 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T \mid \overline{M}) = 0{,}0001.$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(M \mid T) = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}0001}{0{,}99 \cdot 0{,}0001 + 0{,}001 \cdot 0{,}9999} \approx 0{,}09.$$

Dès qu'une maladie est rare, les personnes détectées par un test général même fiable sont en grande majorité bien portantes. Il est donc inefficace, dans ce cas de soumettre toute la population au test.

Exercice 18 Notons C l'événement « l'étudiant connaît la réponse » et V « l'étudiant a répondu correctement à la question ». Nous cherchons ici $\mathbb{P}(C \mid V)$.

D'après la formule de Bayes, $\mathbb{P}(C \mid V) = \dfrac{\mathbb{P}(V \mid C)\,\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(V \mid C)\,\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(V \mid \overline{C})\,\mathbb{P}(\overline{C})}$ d'où, avec les données de l'énoncé :

$$\mathbb{P}(C \mid V) = \frac{1.p}{1.p + \dfrac{1}{m}(1-p)} = \frac{pm}{(m-1)p+1}.$$

Proposition 16 Comme A et B sont indépendants, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.
De l'égalité $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$, on déduit :

$$\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\big(1 - \mathbb{P}(B)\big) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(\overline{B}),$$

ce qui montre que A et $\overline{B}$ sont indépendants.
Comme B et A sont indépendants, le raisonnement précédent montre que B et $\overline{A}$ sont indépendants. Enfin, l'indépendance de $\overline{A}$ et B entraîne celle de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice 19 On a :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}, \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4}.$$

Les événements A et B, A et C, B et C d'autre part sont indépendants. Mais :

$$\mathbb{P}\big(A \cap (B \cap C)\big) = \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \cap C),$$

donc A et $B \cap C$ ne sont pas indépendants.

On obtient par ailleurs $\mathbb{P}\big(A \cap (B \cup C)\big) = \mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$, car $A \cap B = A \cap C$ est l'événement « les deux numéros sont pairs », et :

$$\mathbb{P}(B \cup C) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{3}{4}.$$

Cela montre que $\mathbb{P}\big(A \cap (B \cup C)\big) \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \cup C)$: les événements A et $B \cup C$ ne sont pas indépendants.

Exercice 20

1. De $B \subset C$, on déduit $A \cap B \subset A \cap C$ et donc :
$$\mathbb{P}\Big(A \cap (C \setminus B)\Big) = \mathbb{P}\Big((A \cap C) \setminus (A \cap B)\Big) = \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
et par indépendance des événements :
$$\mathbb{P}\Big(A \cap (C \setminus B)\Big) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\,(\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C \setminus B),$$
donc les événements A et $C \setminus B$ sont indépendants.
2. Les événements B_1, $B_2, \ldots,$ B_n sont incompatibles, donc il en est de même des événements $A \cap B_1$, $A \cap B_2, \ldots,$ $A \cap B_n$. On a donc :
$$\mathbb{P}\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_i)$$
et par indépendance des événements
$$\mathbb{P}\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}(A) \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right).$$

Proposition 17

- On étudie d'abord le cas où il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $B_k = \overline{A_k}$ et $B_i = A_i$ si $i \neq k$. Soit I une partie de $[\![1, n]\!]$.
  - Si $k \notin I$, alors $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{i \in I} B_i) = \mathbb{P}(\bigcap\limits_{i \in I} A_i) = \prod\limits_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = \prod\limits_{i \in I} \mathbb{P}(B_i)$.
  - Si $k \in I$, on note que :
  $$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \left(\bigcap_{i \in I \setminus \{k\}} A_i\right) \cap (A_k \cup B_k) = \bigcap_{i \in I \setminus \{k\}} A_i$$
  et comme cette union est disjointe
  $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I \setminus \{k\}} A_i\right) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).$$
  Par la mutuelle indépendance des événements $A_1, \ldots, A_n$, on obtient :
  $$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) &= \prod_{i \in I \setminus \{k\}} \mathbb{P}(A_i) - \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)\\ &= \big(1 - \mathbb{P}(A_k)\big) \prod_{i \in I \setminus \{k\}} \mathbb{P}(A_i)\\ &= \mathbb{P}(\overline{A_k}) \prod_{i \in I \setminus \{k\}} \mathbb{P}(A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(B_i).\end{aligned}$$

  Ainsi les événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sont mutuellement indépendants.
- On passe au cas général. On utilise le résultat précédent et on raisonne par récurrence finie sur le nombre d'indices k entre 1 et n tels que $B_k = \overline{A_k}$.

Proposition 18 On a en effet, par définition de l'indépendance :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big((A_1 \cap \ldots \cap A_p) \cap (A_{p+1} \cap \ldots \cap A_n)\big) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\\ &= \prod_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i) \prod_{i=p+1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_p)\, \mathbb{P}(A_{p+1} \cap \ldots \cap A_n)\end{aligned}$$

donc $(A_1 \cap \ldots \cap A_p)$ et $(A_{p+1} \cap \ldots \cap A_n)$ sont indépendants.

D'après la proposition 17 de la page 1424, les événements $(\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n})$ sont indépendants donc, d'après ce qui précède, $\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_p}$ et $\overline{A_{p+1}} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$ sont indépendants, c'est-à-dire $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_p}$ et $\overline{A_{p+1} \cup \ldots \cup A_n}$ sont indépendants. Toujours d'après la proposition 17, on en déduit que $A_1 \cup \ldots \cup A_p$ et $A_{p+1} \cup \ldots \cup A_n$ sont indépendants.

D'après la proposition 17, les événements $(\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_p}, A_{p+1}, \ldots, A_n)$ sont indépendants donc, d'après ce qui précède, $\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_p} = \overline{A_1 \cup \ldots \cup A_p}$ et $A_{p+1} \cap \ldots \cap A_n$ sont indépendants. On en déduit, par la proposition 17, que $A_1 \cup \ldots \cup A_p$ et $A_{p+1} \cap \ldots \cap A_n$ sont indépendants. On montre de la même façon que $A_1 \cap \ldots \cap A_p$ et $A_{p+1} \cup \ldots \cup A_n$ sont indépendants.

S'entraîner et approfondir

29.1 Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.

1. On pose $\alpha = \mathbb{P}(A \cap B)$, $\beta = \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$, $\gamma = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$ et $\delta = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$. Montrer que :
$$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \alpha\delta - \beta\gamma.$$
2. En déduire que $\left|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\right| \leqslant \dfrac{1}{4}\cdot$

29.2 On tire au hasard, sans remise, deux dominos d'un jeu de dominos. Quelle est la probabilité qu'ils soient juxtaposables ?

29.3 Un tiroir contient 12 paires de chaussettes toutes différentes. On prend 4 chaussettes. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. deux paires complètes ?
2. au moins une paire ?
3. une paire et une seule ?

29.4 Soit $n \geqslant 2$ et $r \geqslant n-2$. On considère n personnes dont A et B.

1. Elles s'alignent au hasard dans une file. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement r personnes entre A et B.
2. Même question si elles se placent sur un cercle et que l'on compte les personnes entre A et B en tournant dans le sens direct.

29.5 En négligeant les années bissextiles, quelle est la probabilité que r personnes aient leur anniversaire à des dates deux à deux distinctes.

29.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance $2n$ fois une pièce de monnaie bien équilibrée.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir n faces avant n piles ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir n faces avant $n+1$ piles ?

29.7 On lance n fois une pièce de monnaie, la probabilité d'obtenir pile à chaque lancer étant $p \in]0,1[$.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir le premier pile au n-ième lancer ?
2. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, quelle est la probabilité d'obtenir le k-ième pile au n-ième lancer ?

29.8 On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n $(n \geqslant 2)$. On prélève ces jetons au hasard, un par un et sans remise. On note $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ la liste des numéros tirés.
Pour $2 \leqslant i \leqslant n$, on dit qu'il y a record à l'instant i si $u_i > \max(u_1, \ldots, u_{i-1})$. On convient qu'il y a systématiquement record à l'instant 1.

1. Calculer, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, la probabilité r_i qu'il y ait record à l'instant i.
2. Calculer les probabilités que, durant la totalité des tirages, on assiste exactement à :
   (a) un seul record ; (b) n records ; (c) deux records.

29.9 On s'intéresse à une paire de gènes pouvant présenter chacun deux types (ou allèles) A et a. Il y a alors trois génotypes AA, Aa et aa, l'ordre n'intervenant pas. Un enfant reçoit un gène de chacun de ses parents. On note u_0, $2v_0$ et w_0 les probabilités que le génotype soit AA, Aa et aa dans la population initiale.

1. On pose $p_0 = u_0 + v_0$ et $q_0 = v_0 + w_0$. Que représentent p_0 et q_0 ?
2. Déterminer les probabilités que le génotype soit AA, Aa et aa à la première génération (celle des enfants), en fonction de p_0 et q_0. On les note u_1, $2v_1$ et w_1. Calculer $p_1 = u_1 + v_1$ et $q_1 = v_1 + w_1$.
3. Même question à la n-ième génération.

29.10 Un laboratoire fabrique un alcootest et les essais montrent que

- 2% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété ;
- 95 fois sur 100 l'alcootest a donné un résultat positif alors que la personne était en état d'ébriété ;
- 98 fois sur 100 l'alcootest a donné un résultat négatif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété.

1. On essaie l'appareil sur une personne et l'on constate que le résultat est positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?
2. On essaie l'appareil sur une personne et l'on constate que le résultat est négatif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en fait en état d'ébriété ?
3. Déterminer la probabilité que le résultat donné par l'appareil soit faux.

29.11 Un bit est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1. Un canal de transmission transmet des bits selon le modèle suivant : il transmet fidèlement un bit avec probabilité p et de façon erronée avec probabilité $(1-p)$ où $0 < p < 1$. Un bit traverse n canaux de ce type successivement, et l'on suppose que chaque canal fonctionne indépendamment des autres. On note x_0 le bit initial. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note x_n le bit après la traversée de n canaux et p_n la probabilité que $x_n = x_0$.

1. Déterminer une relation entre p_{n-1} et p_n, pour $n \geqslant 1$.
2. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et p.
3. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⋆ **29.12** **(Urne de Pólya)**
Un urne contient initialement $r \geqslant 1$ boules rouges et $b \geqslant 1$ boules blanches. On effectue des tirages successifs d'une boule, en remettant après chaque tirage la boule tirée dans l'urne avec en plus $c > 0$ boules de la même couleur. Pour tout $n \geqslant 1$, on note R_n (resp. B_n) l'événement « la n-ième boule tirée est rouge (resp. blanche) ».

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge sachant que la seconde boule tirée est rouge ?
2. (a) On note $p_n(r,b)$ la probabilité d'obtenir une boule rouge au n-ième tirage, quand l'urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 2 \quad p_n(r,b) = \frac{r}{r+b} p_{n-1}(r+c,b) + \frac{b}{r+b} p_{n-1}(r,b+c).$$

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de R_n est égale à $\dfrac{r}{r+b}$.

3. Démontrer en utilisant la même méthode que, pour $1 \leqslant m < n$, la probabilité de $R_m \cap R_n$ est $\dfrac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}$.
   On pourra noter $p_{m,n}(r,b)$ la probabilité d'obtenir des boules rouges aux m-ième et n-ième tirages, quand l'urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches, et raisonner par récurrence sur m.
   En déduire la probabilité de $R_m \cap B_n$.
4. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, calculer la probabilité que les n premiers tirages aient donné exactement k boules rouges.

29.13 Soit $n \geqslant 2$. On choisit au hasard un entier compris entre 1 et n. Pour $p \in [\![1,n]\!]$ diviseur de n, on note A_p l'événement : « le nombre choisi est divisible par p ».

1. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$ pour tout $p \in [\![1,n]\!]$.
2. Montrer que si p_1, p_2,…, p_r sont les diviseurs premiers distincts de n, alors les événements A_{p_1}, A_{p_2},…, A_{p_r} sont mutuellement indépendants.
3. On désigne par φ la fonction indicatrice d'Euler :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi(n) = \operatorname{card}\{k \in [\![1,n]\!] \mid k \wedge n = 1\}.$$
   En déduire que $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

⋆⋆ **29.14** Soit $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux probabilités sur un ensemble fini Ω telles que $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ et $\mathbb{Q}(\{\omega\}) > 0$, pour tout $\omega \in \Omega$. On appelle divergence de Kullback-Leibler de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ le réel :
$$K(\mathbb{Q},\mathbb{P}) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{Q}(\{\omega\}) \ln\left(\frac{\mathbb{Q}(\{\omega\})}{\mathbb{P}(\{\omega\})}\right).$$

1. Prouver que pour tout réel $t > 0$, on a :
   $$\max_{\lambda\in\mathbb{R}} \{\lambda t - \exp(\lambda) + 1\} = t\ln(t) - t + 1.$$
2. Soit U une application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui vérifie $\displaystyle\sum_{\omega\in\Omega} \exp(U(\omega))\,\mathbb{P}(\{\omega\}) \leqslant 1$.
   Montrer que :
   $$K(\mathbb{Q},\mathbb{P}) \geqslant \sum_{\omega\in\Omega} Q(\{\omega\})\,U(\omega).$$
3. On pose pour tout $\omega \in \Omega$:
   $$V(\omega) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\mathbb{Q}(\{\omega\})}{\mathbb{P}(\{\omega\})}\right) \quad \text{et} \quad U(\omega) = V(\omega) - \ln\left(\sum_{\omega'\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega'\})\exp(V(\omega'))\right).$$
   Montrer que :
   $$K(\mathbb{Q},\mathbb{P}) \geqslant -2\ln\left(\sum_{\omega\in\Omega}\sqrt{\mathbb{P}(\{\omega\})\,\mathbb{Q}(\{\omega\})}\right),$$
   puis que :
   $$K(\mathbb{Q},\mathbb{P}) \geqslant \sum_{\omega\in\Omega}\left(\sqrt{Q(\{\omega\})} - \sqrt{\mathbb{P}(\{\omega\})}\right)^2.$$
4. En déduire que $K(\mathbb{Q},\mathbb{P}) \geqslant 0$ et que $K(\mathbb{Q},\mathbb{P}) = 0$ si, et seulement si, $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.

⋆ 29.15 Scrutin

Soit p et q deux entiers naturels non nuls tels que $p > q$.

1. On considère des *chemins* joignant des points de $\mathbb{N}^2$ et formés de déplacements successifs. Les seuls déplacements autorisés à partir du point (n, m) sont : le passage de (n, m) à $(n+1, m)$ ou de (n, m) à $(n, m+1)$.

   On note Δ la droite d'équation $y = x$.

   (a) Pour $(a, b, m, n) \in \mathbb{N}^4$, combien y a-t-il de chemins différents allant de (a, b) à $(a+m, b+n)$?

   (b) Montrer, en utilisant une symétrie par rapport à la droite Δ, que le nombre de chemins allant de $(1, 0)$ à (p, q) et qui rencontrent la droite Δ est égal au nombre de chemins allant de $(0, 1)$ à (p, q).

   (c) En déduire que le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (p, q) qui ne rencontrent Δ qu'en $(0, 0)$ est $\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}$.

2. Dans un scrutin, il y a p bulletins pour le candidat P et q pour le candidat Q. Calculer la probabilité que le candidat P soit toujours en tête dans le dépouillement.

Solution des exercices

29.1 1. On a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \alpha + \beta$ et, de même $\mathbb{P}(B) = \alpha + \gamma$. On en déduit :

$$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \alpha - (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma) = \alpha(1 - \alpha - \beta - \gamma) - \beta\gamma = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

En effet, l'univers Ω est la réunion disjointe des événements $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ et $\bar{A} \cap \overline{B}$ donc $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$.

2. Supposons $\alpha\delta \geqslant \beta\gamma$. On a alors :

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| = \alpha\delta - \beta\gamma \leqslant \alpha\delta \leqslant \alpha(1 - \alpha),$$

car $\beta + \gamma \geqslant 0$. Le maximum de la fonction $\alpha \mapsto \alpha(1 - \alpha)$ est obtenu pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et vaut $\dfrac{1}{4}$, donc $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leqslant \dfrac{1}{4}\cdot$

Le cas $\alpha\delta \leqslant \beta\gamma$ se traite de la même façon.

29.2 Il y a dans une boîte de dominos, 7 doubles et $\binom{7}{2} = 21$ dominos portant des numéros distincts, ce qui fait 28 dominos en tout. Le résultat d'un tirage est une paire de dominos. On a donc $\operatorname{card}(\Omega) = \binom{28}{2} = 378$. Le tirage se faisant au hasard, on munit Ω de la probabilité uniforme.
Soit J l'événement : « les dominos sont juxtaposables ». Deux dominos sont juxtaposables s'ils ont un numéro en commun. Il y a 7 choix pour ce numéro commun. Ensuite, ils faut choisir deux numéros pour compléter les dominos, ce qui fait $\binom{7}{2} = 21$ choix. On a donc $\operatorname{card}(J) = 7 \cdot 21 = 147$ et $\mathbb{P}(J) = \dfrac{147}{378} = \dfrac{7}{18}\cdot$

29.3 Il y 24 chaussettes ; on en tire 4. Un résultat possible est une partie de cardinal 4 de l'ensemble des chaussettes. On a donc $\operatorname{card}(\Omega) = \dbinom{24}{4} = 10626$. On munit Ω de la probabilité uniforme.

1. Soit A l'événement « on tire deux paires ». Il s'agit de tirer deux paires parmi 12. On a donc $\operatorname{card}(A) = \dbinom{12}{2} = 66$ et $\mathbb{P}(A) = \dfrac{66}{10626} = \dfrac{1}{161}\cdot$
2. Soit B l'événement « on tire au moins une paire ». On considère l'événement contraire « on ne tire aucune paire ». Il s'agit de tirer 4 chaussettes dans 12 paires différentes. On choisit les 4 paires dans lesquelles sont prises les chaussettes, puis dans chaque paire on a le choix entre 2 chaussettes.
On obtient $\operatorname{card}(\overline{B}) = \dbinom{12}{4} \cdot 2^4 = 7920$ et $\mathbb{P}(\overline{B}) = \dfrac{7920}{10626} = \dfrac{120}{161}\cdot$
On en déduit $\mathbb{P}(B) = 1 - \dfrac{120}{161} = \dfrac{41}{161}\cdot$
3. Soit C l'événement « on tire une paire ». On remarque que $(A, \overline{B}, C)$ est un système complet d'événements. On en déduit :

$$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{40}{161}\cdot$$

29.4 1. On numérote de 1 à n les places dans la file. Comme on ne s'intéresse qu'aux places occupées par A et B, on prend pour Ω l'ensemble des répartitions possibles de deux éléments parmi n. On a donc $\operatorname{card}(\Omega) = \binom{n}{2}$. On suppose que toutes les répartitions sont équiprobables. L'événement C_r : « il y a r personnes entre A et B » est réalisé si A et B (sans ordre) sont aux places $(k, k+r+1)$, avec $1 \leqslant k \leqslant n-r-1$. On obtient $\mathbb{P}(C_r) = \dfrac{n-r-1}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2(n-r-1)}{n(n-1)}\cdot$

2. On numérote de 1 à n les places dans le sens direct sur le cercle, la place numéro 1 étant quelconque. On prend encore pour Ω l'ensemble des répartitions possibles de deux éléments parmi n. On a encore $\operatorname{card}(\Omega) = \binom{n}{2}$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on appelle $(k+n)$-ième place, la k-ième. Alors il y a exactement r éléments entre A et B en tournant dans le sens direct si A et B sont aux places $(k, k+r+1)$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$. On obtient $\mathbb{P}(C_r) = \dfrac{n}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2}{n-1}\cdot$

29.5 On fait l'hypothèse que la date de naissance de chaque personne est uniformément répartie sur les 365 jours de l'année et que les « choix » des dates anniversaires des différentes personnes sont indépendants. Le nombre total de choix pour les r personnes est 365^r. Le nombre de cas favorables est A_{365}^r et la probabilité cherché est $\dfrac{A_{365}^r}{365^r}$. Cette probabilité est nulle si $r > 365$ et sinon, est égale à $\dfrac{365!}{(365-r)!365^r}\cdot$

Par exemple, pour $n = 40$, cette probabilité est égale à 0,11.

29.6 Un résultat peut être décrit par une $(2n)$-liste d'éléments de $\{P, F\}$. On a donc $\operatorname{card}(\Omega) = 2^n$. La pièce étant bien équilibrée, on munit Ω de la probabilité uniforme.

1. Sur $2n$ lancers, on obtient au moins n faces ou au moins n piles, ce qui donne du sens à la question posée. On note A l'événement « on obtient n faces avant n piles ». L'application $\varphi : \Omega \to \Omega$ qui à $\omega = (x_1, \ldots, x_{2n})$ associe $\omega' = (y_1, \ldots, y_{2n})$, où $y_i = F$ si $x_i = P$ et $y_i = P$ si $x_i = F$, est une permutation de Ω (elle est involutive) et $\varphi(A) = \overline{A}$, car si dans ω le n-ième face est placé avant le n-ième pile, alors dans ω', c'est le contraire, puisque tout pile est transformé en un face et réciproquement. On a donc $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(\overline{A})$ et $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\overline{A})$. On en déduit $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}\cdot$

2. Là aussi, sur $2n$ lancers, on obtient au moins n faces ou au moins $n+1$ piles. On note B l'événement « on obtient n piles avant $n+1$ faces ». On remarque que $A \subset B$. On en déduit $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$. L'événement $B \setminus A$ est réalisé si l'on a obtenu n piles avant n faces, mais $n+1$ piles après n faces. Au moment où on obtient le n-ième pile, on donc a déjà obtenu $n-1$ faces (et évidemment $n-1$ faces). Après avoir obtenu ce n-ième pile, on a, au tirage suivant, un face. On peut donc dire que $B \setminus A$ consiste à tirer lors des $2n-2$ premiers tirages, $n-1$ piles et $n-1$ faces, puis à tirer un pile suivi d'un face. On a donc $\operatorname{card}(B \setminus A) = \binom{2n-2}{n-1}$. En effet, il s'agit de placer les $n-1$ piles parmi les $2n-2$ premiers tirages ; pour les deux derniers, il n'y a pas de choix. On en déduit :

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{2^n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} + \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{2^n}\cdot$$

29.7 On suppose que les résultats des différents lancers sont indépendants. On est dans un schéma de Bernoulli.

1. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note π_i l'événement « le i-ème tirage donne pile ». L'événement A_1 « le premier pile est obtenu au n-ième lancer » s'écrit $\overline{\pi}_1 \cap \ldots \cap \overline{\pi}_{n-1} \cap \pi_n$. On a donc, par indépendance des événements π_i :
$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(\overline{\pi}_1) \ldots \mathbb{P}(\overline{\pi}_{n-1}) \mathbb{P}(\pi_n) = p^{n-1}(1-p).$$

2. L'événement A_k « le k-ième pile est obtenu au n-ième lancer » est réalisé si le n-ième lancer est un pile et si dans les $n-1$ premiers lancers on a obtenu $k-1$ piles et donc $n-k$ faces.
La probabilité d'obtenir dans cet ordre $n-k$ faces puis k faces est $(1-p)^{n-k}p^k$, toujours par indépendance des événements π_i. L'événement A_k est la réunion de $\binom{n-1}{k-1}$ événements de même probabilité, correspondant aux différentes répartitions possibles des $k-1$ faces parmi les $n-1$ premiers lancers. On obtient donc :
$$\mathbb{P}(A_k) = \binom{n-1}{k-1}(1-p)^{n-k}p^k.$$

29.8 On peut représenter un résultat de l'expérience par un n-uplet $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ qui s'identifie à la permutation de $[\![1, n]\!]$ qui à i associe u_i. On a donc $\operatorname{card}(\Omega) = n!$. On fait l'hypothèse que tous les tirages sont équiprobables.

1. Il y a record à l'instant i si $u_i > \max(u_1, \ldots, u_{i-1})$. L'ensemble $\{u_1, \ldots, u_i\}$ étant choisi, il faut que le plus grand élément soit placé au i-ème tirage, l'ordre des $i-1$ autre éléments étant indifférent ; par ailleurs, l'ordre dans lequel sont tirés les $n-i$ jetons restant est également indifférent. On obtient :
$$r_i = \frac{\binom{n}{i}(i-1)!(n-i)!}{n!} = \frac{1}{i}.$$
Au voit que le résultat est valable pour $i = 1$ car, au premier tirage, il y toujours record.

2. (a)
   - S'il y a un seul record, il est obtenu au premier tirage. On peut remarquer que lorsqu'on tire la boule numéro n, il y a record. Elle doit donc être tirée en premier.
   - Réciproquement, si l'on tire la boule n en premier, il n'y a qu'un record car, pour $i \geqslant 2$, on a $\max(u_1, \ldots, u_{i-1}) = n \geqslant u_i$.

   Il faut donc tirer la boule n en premier et les autres dans un ordre quelconque.

   La probabilité d'avoir un seul record est $p_1 = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}\cdot$

   (b) S'il y a deux records, l'un est obtenu au rang 1. Déterminons la probabilité q_i d'obtenir deux records, aux rangs 1 et i, où $i \geqslant 2$.
   - Une condition nécessaire est $u_i = n$.
   - Réciproquement, si cette condition est réalisée, il ne peut pas y avoir de record aux rangs $i+1, \ldots, n$. Pour qu'il n'y ait pas de record entre les rangs 2 et $i-1$, il faut et il suffit que $u_1 = \max(u_2, \ldots, u_{i-1})$.

On raisonne comme dans la question 1. On choisit $\{u_1, \ldots, u_{i-1}\}$, sous-ensemble de $[\![1, n-1]\!]$; le plus grand élément de cet ensemble est placé en premier, les autres dans un ordre quelconque. Pour u_i, il n'y a pas de choix et les $n-i$ éléments restant sont tirés dans un ordre quelconque. On obtient :

$$q_i = \frac{\binom{n-1}{i-1}(i-2)!(n-i)!}{n!} = \frac{1}{n(i-1)}.$$

La probabilité qu'il y ait exactement deux records est :

$$p_2 = \sum_{i=2}^{n} q_i = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{n(i-1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

(c) S'il y a n records, on a pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $u_i > \max(u_1, \ldots, u_{i-1}) \geqslant u_{i-1}$. La suite $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est strictement croissante et $u_i = i$ pour tout i. Il est clair, réciproquement que si cette condition est réalisée, il y a n records. Une seule permutation convient, donc la probabilité d'obtenir n records est $p_n = \dfrac{1}{n!}$.

29.9 1. Montrons que p_0 est la probabilité que, dans la population initiale, un gène soit du type A. Notons A_0 (resp. B_0, C_0) l'événement « le gène appartient à une paire AA (resp. Aa, aa) », et E_0 l'événement « le gène est A dans la population initiale. On a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_0) &= \mathbb{P}(E_0 \mid A_0)\mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(E_0 \mid B_0)\mathbb{P}(B_0) + \mathbb{P}(E_0 \mid C_0)\mathbb{P}(C_0) \\ &= 1 \cdot u_0 + \frac{1}{2} \cdot 2v_0 + 0 = u_0 + v_0 = p_0.\end{aligned}$$

De même, q_0 est la probabilité que, dans la population initiale, un gène soit du type a. On a naturellement $p_0 + q_0 = 1$.

2. On fait l'hypothèse que les parents transmettent leurs gènes de manière indépendante.
La probabilité qu'un génotype soit AA parmi les enfants est la probabilité qu'un enfant ait reçu deux gènes A de ses parents. On a donc $u_1 = p_0^2$. On obtient de même $w_1 = q_0^2$. La probabilité que le génotype soit aA est la probabilité qu'il ait reçu un gène A de son père et un gène a de sa mère ou le contraire. On a donc $2v_1 = 2p_0 q_0$ et $v_1 = p_0 q_0$.
On en déduit $p_1 = u_1 + v_1 = p_0(p_0 + q_0) = p_0$ et $q_1 = q_0$. Comme à la génération des parents, p_1 (resp. q_1) représente la probabilité qu'un gène soit A (resp. a).

3. On note de la même façon u_n, v_n et w_n les probabilités que le génotype soit AA, Aa et aa à la n-ième génération, puis $p_n = u_n + v_n$ et $q_n = v_n + w_n$. En raisonnant comme dans la deuxième question, on obtient $u_n = p_n^2$, $v_n = p_n q_n$ et $w_n = q_n^2$, puis $p_{n+1} = p_n$ et $q_{n+1} = q_n$.
Les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc constantes. Pour $n \geqslant 1$, on a $u_n = u_1$, $v_n = v_1$ et $w_n = w_1$. La proportion de chaque allène dans la population ne varie plus à partir de la première génération.

29.10 On note T l'événement « l'alcootest donne un résultat positif » et E l'événement « la personne testée est en état d'ébriété ». Les hypothèses se traduisent par :

$$\mathbb{P}(E) = 0{,}02, \quad \mathbb{P}(T \mid E) = 0{,}95 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\overline{T} \mid \overline{E}) = 0{,}98.$$

1. On applique la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(E \mid T) = \frac{\mathbb{P}(E)\,\mathbb{P}(T \mid E)}{\mathbb{P}(E)\,\mathbb{P}(T \mid E) + \mathbb{P}(\overline{E})\,\mathbb{P}(T \mid \overline{E})} = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}95}{0{,}02 \cdot 0{,}95 + 0{,}98 \cdot 0{,}02} \approx 0{,}492.$$

2. On obtient de même :

$$\mathbb{P}(E \mid \overline{T}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{E})\,\mathbb{P}(\overline{T} \mid E)}{\mathbb{P}(E)\,\mathbb{P}(\overline{T} \mid E) + \mathbb{P}(\overline{E})\,\mathbb{P}(\overline{T} \mid \overline{E})} = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}05}{0{,}02 \cdot 0{,}05 + 0{,}98 \cdot 0{,}98} \approx 10^{-5}.$$

3. L'événement F « le résultat du test est faux » est la réunion des événements incompatibles $T \cap \overline{E}$ et $\overline{E} \cap T$, donc :

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(\overline{E})\,\mathbb{P}(T \mid \overline{E}) + \mathbb{P}(E)\,\mathbb{P}(\overline{T} \mid E) = 0{,}98 \cdot 0{,}02 + 0{,}02 \cdot 0{,}05 \approx 0{,}021.$$

29.11 On note A_n l'événement « $x_n = x_0$ ».

1. Pour $n \geqslant 1$, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} p_n = \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(A_n \mid A_{n-1})\mathbb{P}(A_{n-1}) + \mathbb{P}(A_n \mid \overline{A}_{n-1})\mathbb{P}(\overline{A}_{n-1}) \\ &= pp_{n-1} + (1-p)(1-p_{n-1}) = (2p-1)p_{n-1} + 1 - p. \end{aligned}$$

2. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

   Le point fixe de l'application $x \mapsto (2p-1)x + 1 - p$ est $\frac{1}{2}$, donc la suite $\left(p_n - \frac{1}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $2p-1$, de premier terme $p_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot$

   On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n.$$

3. On a, par hypothèse $-1 < 2p - 1 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}\cdot$

29.12 1. On calcule $\mathbb{P}(R_1 \mid R_2)$ en appliquant la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_1 \mid R_2) &= \frac{\mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2 \mid R_1)}{\mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2 \mid R_1) + \mathbb{P}(\overline{R}_1)\mathbb{P}(R_2 \mid \overline{R}_1)} \\ &= \frac{\dfrac{r}{r+n}\,\dfrac{r+c}{r+c+b}}{\dfrac{r}{r+b}\,\dfrac{r+c}{r+c+b} + \dfrac{n}{r+b}\,\dfrac{r}{r+c+b}} = \frac{r+c}{r+c+b}. \end{aligned}$$

On remarque que cette probabilité est égale à $\mathbb{P}(R_2 \mid R_1)$.

2. (a) On applique la formule des probabilités totales avec $(R_1, \bar{R}_1)$ comme système complet d'événements.
On obtient $\mathbb{P}(R_n) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_n \mid R_1) + \mathbb{P}(\bar{R}_1)\mathbb{P}(R_n \mid \overline{R}_1)$. On a $\mathbb{P}(R_1) = \dfrac{r}{r+b}, \mathbb{P}(\bar{R}_1) = \dfrac{b}{r+b}$ et, par définition, $\mathbb{P}(R_n) = p_n(r,b)$. Déterminons les probabilités conditionnelles.
Si l'événement R_1 est réalisé, l'urne contient après le premier tirage $r+c$ boules rouges et b boules blanches et il s'agit de tirer une boule rouge $n-1$ tirages plus tard. Autrement dit :
$$\mathbb{P}(R_n \mid R_1) = p_{n-1}(r+c, b).$$
On montre de la même façon : $\mathbb{P}(R_n \mid \overline{R}_1) = p_{n-1}(r, b+c)$.
On obtient donc :
$$p_n(r,b) = \frac{r}{r+b}p_{n-1}(r+c,b) + \frac{b}{r+b}p_{n-1}(r,b+c).$$

(b) On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété :
$$H_n : \forall (r,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad p_n(r,b) = \frac{r}{r+b}\cdot$$
La propriété H_1 est évidente. Supposons que H_{n-1} (avec $n \geqslant 2$) soit vérifiée. On a alors, pour tout $(r,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$:
$$\begin{aligned} p_n(r,b) &= \frac{r}{r+b}p_{n-1}(r+c,b) + \frac{b}{r+b}p_{n-1}(r,b+c) \\ &= \frac{r}{r+b}\frac{r+c}{r+c+b} + \frac{b}{r+b}\frac{r}{r+b+c} = \frac{r(r+c)+br}{(r+b)(r+b+c)} = \frac{r}{r+b}\cdot \end{aligned}$$
La propriété H_n est vérifiée, ce qui termine la récurrence.
On a, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(R_n) = p_n(r,b) = \dfrac{r}{r+b}\cdot$

3. En appliquant la formule des probabilités totales, on obtient :
$$\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_m \cap R_n \mid R_1) + \mathbb{P}(\overline{R_1})\mathbb{P}(R_m \cap R_n \mid \overline{R_1}).$$
On a $\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = p_{m,n}(r,b)$, $\mathbb{P}(R_1) = \dfrac{r}{r+b}$, $\mathbb{P}(\overline{R_1}) = \dfrac{b}{r+b}$ et on montre comme dans la question précédente que, pour $m \geqslant 2$:
$$\mathbb{P}(R_m \cap R_n \mid R_1) = p_{m-1,n-1}(r+c,b) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(R_m \cap R_n \mid \overline{R_1}) = p_{m-1,n-1}(r,b+c).$$
On obtient, pour $2 \leqslant m < n$,
$$p_{m,n}(r,b) = \frac{r}{r+b}p_{m-1,n-1}(r+c,b) + \frac{b}{r+b}p_{m-1,n-1}(r,b+c).$$
On fixe $n \geqslant 2$ et l'on démontre par récurrence finie sur $m \in [\![1, n-1]\!]$, la propriété :
$$H'_m : \forall (r,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad p_{m,n}(r,b) = \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}\cdot$$

- Montrons H'_1. On a, avec les notations de la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_1 \cap R_n) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_n \mid R_1) &= \frac{r}{r+b} p_{n-1}(r+c, b)\\ &= \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}.\end{aligned}$$

- Supposons que H'_{m-1} (avec $2 \leqslant m < n$) soit vérifiée. On a alors :

$$\begin{aligned}p_{m,n}(r,b) &= \frac{r}{r+b} p_{m-1,n-1}(r+c, b) + \frac{b}{r+b} p_{m-1,n-1}(r, b+c)\\ &= \frac{r}{r+b}\,\frac{(r+c)(r+2c)}{(r+b+c)(r+b+2c)} + \frac{b}{r+b}\,\frac{r(r+c)}{(r+b+c)(r+b+2c)}\\ &= \frac{r(r+c)(r+2c)+br(r+c)}{(r+b)(r+b+c)(r+b+2c)} = \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}.\end{aligned}$$

La propriété H'_m est vérifiée, ce qui termine la récurrence.
Comme n est quelconque, on a donc, pour tous entiers m et n tels que $1 \leqslant m < n$:

$$\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}.$$

En échangeant les rôles des boules rouges et blanches, on obtient, pour $1 \leqslant m < n$:

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{b}{b+r} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B_m \cap B_n) = \frac{b(b+c)}{(r+b)(r+b+c)}.$$

Comme R_m est l'événement contraire de B_m, on en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_m \cap B_n) = \mathbb{P}(B_n) - \mathbb{P}(B_m \cap B_n) &= \frac{b}{b+r} - \frac{b(b+c)}{(r+b)(r+b+c)}\\ &= \frac{b(r+b+c)-b(b+c)}{(r+b)(r+b+c)} = \frac{br}{(r+b)(r+b+c)}.\end{aligned}$$

4. On fixe k indices distincts $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ entre 1 et n et on calcule la probabilité d'obtenir exactement k boules rouges aux tirages $i_1, \ldots, i_k$, c'est-à-dire la probabilité de l'événement :

$$U = N_1 \cap \ldots \cap N_{i_1-1} \cap R_{i_1} \cap N_{i_1+1} \cap \ldots \cap N_{i_k-1} \cap R_{i_k} \cap N_{i_k+1} \cap \ldots \cap N_n.$$

On applique la formule des probabilités composées. Le dénominateur obtenu est :

$$(r+b)(r+b+c)\ldots(r+b+(n-1)c) = \prod_{i=0}^{n-1}(r+b+ic),$$

car, à chaque tirage, le nombre total de boules parmi lesquelles on tire augmente de c. Le numérateur est :

$$\begin{aligned}&b(b+c)\ldots(b+(i_1-2)c)r(b+(i_1-1)c)\ldots(b+(i_k-k-1)c)\\ &\qquad (r+(k-1)c)(b+(i_k-k)c)\ldots(b+(n-k-1)),\end{aligned}$$

car à chaque tirage, on rajoute c boules de la couleur de la boule tirée : la première boule blanche est tirée parmi b boules blanches, la seconde parmi $b+r, \ldots$;

la dernière boule blanche est tiré parmi $b+(n-k-1)c$ boules blanches, car auparavant, on a déjà tiré k boules rouges et donc $n-k-1$ boules blanches. Le résultat est le même pour les boules rouges. En réordonnant les termes, on trouve :

$$b(b+c)\dots(b+(n-k-1)c)\,r(r+c)\dots(r+(k-1)c) = \prod_{i=0}^{n-k-1}(b+ic)\prod_{i=0}^{k-1}(r+ic)$$

On obtient donc :

$$\mathbb{P}(U) = \frac{\prod\limits_{i=0}^{n-k-1}(b+ic)\prod\limits_{i=0}^{k-1}(r+ic)}{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(r+b+ic)}.$$

On remarque que ce résultat ne dépend pas des indices $i_1,\dots,i_k$, mais seulement de k. L'événement « les n premiers tirages ont donné k boules rouges » est la réunion de $\binom{n}{k}$ événements de même probabilité que U, correspondant aux différentes répartitions des k boules rouges parmi les n tirages. La probabilité que les n premiers tirages aient donné exactement k boules rouges est donc :

$$p_k = \binom{n}{k}\frac{\prod\limits_{i=0}^{n-k-1}(b+ic)\prod\limits_{i=0}^{k-1}(r+ic)}{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(r+b+ic)}.$$

29.13 1. Les éléments de A_p sont les entiers de la forme kp, avec $k\in\mathbb{N}^*$ et $kp\leqslant n$, soit $1\leqslant k\leqslant \dfrac{n}{p}\cdot$ Par hypothèse $\dfrac{n}{p}$ est entier donc $\operatorname{card}(A_p)=\dfrac{n}{p}$ et $\mathbb{P}(A_p)=\dfrac{1}{p}\cdot$

2. Si I est une partie non vide de $[\![1,r]\!]$, alors $\bigcap\limits_{i\in I}A_{p_i}$ est l'ensemble des entiers de $[\![1,n]\!]$ divisibles par tous les p_i, pour $i\in I$. Les p_i sont des entiers premiers distincts, donc premiers entre eux : un entier est divisible par chaque p_i si, et seulement s'il est divisible par $\prod\limits_{i\in I}p_i$. On a donc $\bigcap\limits_{i\in I}A_{p_i}=A_{\prod\limits_{i\in I}p_i}$. On en déduit, d'après la première question :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_{p_i}\right)=\mathbb{P}\left(A_{\prod\limits_{i\in I}p_i}\right)=\frac{1}{\prod\limits_{i\in I}p_i}=\prod_{i\in I}\frac{1}{p_i}=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_{p_i}).$$

Les événements $A_{p_1}, A_{p_2},\dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

3. Les éléments de $[\![1,n]\!]$, qui sont premiers avec n, sont ceux qui ne sont divisibles ni par $p_1,\dots$, ni par p_r, c'est-à-dire qui appartiennent à $\bigcap\limits_{i=1}^{r}\overline{A_{p_i}}$. Les événements $\overline{A_{p_1}},\dots,\overline{A_{p_r}}$ sont indépendants car les événements $A_{p_1},\dots,A_{p_r}$ le sont. On en déduit :

$$\frac{\varphi(n)}{n}=\frac{\operatorname{card}\left(\bigcap\limits_{i\in I}\overline{A_{p_i}}\right)}{n}=\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r}\overline{A_{p_i}}\right)=\prod_{i=1}^{r}\mathbb{P}\left(\overline{A_{p_i}}\right)=\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right).$$

29.14 1. Une simple étude de fonction montre que, pour tout réel $t > 0$, le maximum de $\varphi_t \mapsto \lambda t - (\exp(\lambda) - 1)$ est atteint en $\lambda = \ln(t)$ et vaut $t\ln(t) - t + 1$.

2. D'après la première question, pour $t > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$t\ln(t) - t + 1 \geqslant \lambda t - \exp(\lambda) + 1.$$
Pour $\omega \in \Omega$, on applique cette inégalité avec $t = \dfrac{\mathbb{Q}(\{\omega\})}{\mathbb{P}(\{\omega\})}$ et $\lambda = U(\omega)$ et on multiplie ensuite par $\mathbb{P}(\{\omega\})$. On obtient :
$$\mathbb{Q}(\{\omega\})\ln\left(\frac{\mathbb{Q}(\{\omega\})}{\mathbb{P}(\{\omega\})}\right) - \mathbb{Q}(\{\omega\}) + \mathbb{P}(\{\omega\}) \geqslant U(\omega)\mathbb{Q}(\{\omega\}) - \exp(U(\omega))\,\mathbb{P}(\{\omega\}) + \mathbb{P}(\{\omega\}).$$
En sommant ces inégalités pour $\omega \in \Omega$, il vient :
$$K(\mathbb{Q},\mathbb{P}) - \sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{Q}(\{\omega\}) + \sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\}) \geqslant \sum_{\omega\in\Omega}U(\omega)\mathbb{Q}(\{\omega\}) - \sum_{\omega\in\Omega}\exp\big(U(\omega)\big)\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\}).$$
Comme $-\sum\limits_{\omega\in\Omega}\mathbb{Q}(\{\omega\}) + \sum\limits_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\}) = -1 + 1 = 0$, on obtient :
$$K(\mathbb{Q},\mathbb{P}) \geqslant \sum_{\omega\in\Omega}U(\omega)\mathbb{Q}(\{\omega\}),$$
car $-\sum\limits_{\omega\in\Omega}\exp\big(U(\omega)\big)\mathbb{P}(\{\omega\}) + 1 \geqslant 0$, par hypothèse.

3. La fonction U vérifie les conditions de la question précédente. En effet, pour tout $\omega \in \Omega$:
$$\exp\big(U(\omega)\big)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{\exp\big(V(\omega)\big)\mathbb{P}(\{\omega\})}{\sum\limits_{\omega'\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega'\})\exp\big(V(\omega')\big)}$$
et donc :
$$\sum_{\omega\in\Omega}\exp\big(U(\omega)\big)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{\sum\limits_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\})\exp\big(V(\omega)\big)}{\sum\limits_{\omega'\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega'\})\exp(V(\omega'))} = 1.$$
On en déduit :
$$K(\mathbb{Q},\mathbb{P}) \geqslant \sum_{\omega\in\Omega}U(\omega)\mathbb{Q}(\{\omega\}),$$
c'est-à-dire :
$$K(\mathbb{Q},\mathbb{P}) \geqslant \sum_{\omega\in\Omega}V(\omega)\mathbb{Q}(\{\omega\}) - \ln\left(\sum_{\omega'\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega'\})\exp(V(\omega'))\right)\underbrace{\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{Q}(\{\omega\})}_{=1}.\ (*)$$
On remarque que :
$$\sum_{\omega\in\Omega}V(\omega)\mathbb{Q}(\{\omega\}) = \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{Q}(\{\omega\})\ln\left(\frac{\mathbb{Q}(\{\omega\})}{\mathbb{P}(\{\omega\})}\right) = \frac{1}{2}K(\mathbb{Q},\mathbb{P}).$$

D'autre part, en changeant le nom de la variable et en remplaçant V par sa valeur, on obtient :

$$\sum_{\omega'\in\Omega} \mathbb{P}\left(\{\omega'\}\right) \exp\left(V\left(\omega'\right)\right) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) \sqrt{\frac{\mathbb{Q}\left(\{\omega\}\right)}{\mathbb{P}\left(\{\omega\}\right)}} = \sum_{\in\Omega} \sqrt{\mathbb{Q}\left(\{\omega\}\right)\mathbb{P}\left(\{\omega\}\right)}.$$

L'inégalité $(*)$ devient $K\left(\mathbb{Q},\mathbb{P}\right) \geqslant \dfrac{1}{2} K\left(\mathbb{Q},\mathbb{P}\right) - \ln\left(\sum\limits_{\in\Omega} \sqrt{\mathbb{Q}\left(\{\omega\}\right)\mathbb{P}\left(\{\omega\}\right)}\right)$, ce qui en simplifiant donne l'inégalité voulue.

4. En utilisant l'inégalité $\ln(x) \leqslant x-1$ pour tout $x>0$, on obtient :

$$K\left(\mathbb{Q},\mathbb{P}\right) \geqslant -2\sum_{\omega\in\Omega} \sqrt{\mathbb{Q}\big(\{\omega\}\big)\mathbb{P}\left(\{\omega\}\right)} + 2.$$

Mais on a :

$$\sum_{\omega\in\Omega} \left(\sqrt{\mathbb{Q}\left(\{\omega\}\right)} - \sqrt{\mathbb{P}\left(\{\omega\}\right)}\right)^2 = \underbrace{\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{Q}\left(\{\omega\}\right)}_{=1} + \underbrace{\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}\left(\{\omega\}\right)}_{=1} - 2\sum_{\in\Omega} \sqrt{\mathbb{Q}\left(\{\omega\}\right)\mathbb{P}\left(\{\omega\}\right)}$$

donc on obtient :

$$K\left(\mathbb{Q},\mathbb{P}\right) \geqslant \sum_{\omega\in\Omega} \left(\sqrt{Q\left(\{\omega\}\right)} - \sqrt{\mathbb{P}\left(\{\omega\}\right)}\right)^2.$$

Le membre de droite de l'inégalité est une somme de carrés donc est positif et *a fortiori* $K\left(\mathbb{Q},\mathbb{P}\right) \geqslant 0$. De plus si $K\left(\mathbb{Q},\mathbb{P}\right) = 0$, la somme est nulle et on a pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) = \mathbb{Q}\left(\{\omega\}\right)$, c'est-à-dire $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.

29.15 1. (a) Pour aller de (a,b) à $(a+m, b+n)$, il faut faire en tout m déplacements vers la droite et n vers le haut. Les différents chemins correspondent aux différentes manières d'ordonner ces $m+n$ déplacements. Il y a autant de chemins que de manières de choisir les m déplacements vers la droite (ou les n déplacements vers le haut) parmi les $m+n$ déplacements. Il y en a donc $\binom{m+n}{m}$.

(b) Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des chemins allant de $(1,0)$ à (p,q) qui rencontrent la droite Δ et $\mathcal{C}'$ l'ensemble des chemins allant de $(0,1)$ à (p,q). Un chemin de $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{C}'$ est représenté par une liste de $p+q$ couples de $\mathbb{N}^2$.

- Soit $C \in \mathcal{C}$, qu'on écrit $C = (c_1, \ldots, c_N)$ où $c_1 = (1,0), c_N = (p,q)$ et $N = p+q$. On note $c_i = (x_i, y_i)$. Par définition, il existe des indices $i > 0$ tels que $x_i = y_i$. On note k le plus petit tel indice.
- Au chemin C, on associe le chemin $C' = (c'_1, \ldots, c'_N)$, obtenu en transformant la partie de C qui joint les points c_0 à c_k par la symétrie par rapport à Δ et en laissant le reste invariant. On a donc :

$$c'_i = (y_i, x_i) \quad \text{si} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1 \quad \text{et} \quad c'_i = c_i \quad \text{si} \quad i \geqslant k.$$

Alors C' appartient à $\mathcal{C}'$.
- Montrons que l'application $f : C \mapsto C'$ est une bijection de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$. On remarque que c'_k est le premier point où C' rencontre Δ.

Soit $C' = (c'_1, \ldots, c'_N)$ un chemin quelconque de $\mathcal{C}'$, où $c'_i = (u_i, v_i)$. Le chemin C' rencontre Δ. En effet, $u_1 - v_1 < 0$, $u_N - v_N > 0$ et $u_i - v_i$ varie de ± 1 à chaque étape, donc il existe i tel que $u_i = v_i$. On appelle k le plus petit tel entier i. Si on considère le chemin C obtenu en faisant la symétrie par rapport à Δ de la partie du chemin entre c'_1 et c'_k et en laissant le reste invariant, on démontre comme précédemment que C est dans $\mathcal{C}$. Il est clair que C est l'unique antécédent de C' par f.

(c) Un chemin qui va de $(0,0)$ à (p,q) sans rencontrer Δ passe nécessairement par $(1,0)$, c'est-à-dire commence par un déplacement vers la droite (car on a montré qu'un chemin de $(0,1)$ à (p,q) rencontre Δ). Il y en tout $\binom{p+q-1}{p-1}$ chemins de $(1,0)$ à (p,q). Il faut enlever ceux qui rencontrent Δ.
Le nombre de chemins de $(1,0)$ à (p,q) qui rencontrent Δ est égal, d'après la question précédente au nombre de chemins de $(0,1)$ à (p,q), soit $\binom{p+q-1}{p}$.
Le nombre de chemins de $(0,0)$ à (p,q) qui ne rencontrent pas Δ est donc :

$$\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}.$$

2. • Après le dépouillement de i bulletins (avec $0 \leqslant i \leqslant p+q$), on note x_i le nombre de voix pour P et y_i le nombre de voix pour Q et on pose $c_i = (x_i, y_i)$. Le résultat d'un dépouillement est donc un chemin de $(0,0)$ à (p,q). Il y a $\binom{p+q}{p}$ dépouillements possibles que l'on suppose équiprobables.
   • Les dépouillements pour lesquels P reste toujours en tête correspondent aux chemins qui restent en-dessous de Δ, c'est-à-dire aux chemins qui ne rencontrent pas Δ. Il y en a $\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}$.
   • La probabilité que P reste toujours en tête est donc :

$$\frac{\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}}{\binom{p+q}{p}} = \frac{p}{p+q} - \frac{q}{p+q} = \frac{p-q}{p+q}.$$

Chapitre 30 : Variables aléatoires sur un univers fini

I Une application liée à une expérience aléatoire : la variable aléatoire . . . 1456
- 1 Variable aléatoire . . . 1456
- 2 Loi d'une variable aléatoire . . . 1459
- 3 Lois usuelles . . . 1464

II Couples de variables aléatoires . . . 1467
- 1 Définitions . . . 1467
- 2 Loi conjointe . . . 1468
- 3 Lois marginales . . . 1469
- 4 Lois conditionnelles . . . 1471
- 5 Généralisation aux n-uplets de variables aléatoires 1472

III Indépendance de variables aléatoires . . . 1474
- 1 Indépendance de deux variables aléatoires . . . 1474
- 2 Indépendance de n variables aléatoires . . . 1477
- 3 Somme de variables indépendantes suivant une loi binomiale . . . 1480

IV Espérance d'une variable aléatoire . . . 1480
- 1 Définition . . . 1480
- 2 Espérance des lois usuelles . . . 1481
- 3 Propriétés de l'espérance . . . 1482
- 4 Théorème de transfert . . . 1484
- 5 Espérance du produit de deux variables indépendantes . . . 1485

V Variance . . . 1486
- 1 Définition . . . 1486
- 2 Variance des lois usuelles . . . 1488
- 3 Propriétés de la variance . . . 1489
- 4 Écart-type . . . 1490
- 5 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev . . . 1490

VI Covariance . . . 1491
- 1 Définition, calcul . . . 1491
- 2 Propriétés de la covariance . . . 1492
- 3 Cas de variables indépendantes . . . 1494

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 1496

Exercices . . . 1522

Variables aléatoires sur un univers fini

30

I Une application liée à une expérience aléatoire : la variable aléatoire

1 Variable aléatoire

Souvent, on ne s'intéresse pas, dans un expérience aléatoire, à la description de l'ensemble des résultats possibles et de leur probabilité, c'est-à-dire à l'espace probabilisé, mais à un aspect particulier : on lance deux dés et on regarde la somme des résultats obtenus sur les deux dés ; on effectue n tirages dans une urne contenant des boules de plusieurs couleurs et on regarde le nombre de boules d'une couleur donnée. L'objet de l'étude est donc ici un entier que l'on peut associer à chaque résultat de l'expérience. L'application qui, au résultat de l'expérience, associe cet entier est appelée une variable aléatoire.

Définition 1

Soit Ω un univers fini. Une **variable aléatoire** sur Ω est une application X définie sur Ω à valeurs dans un ensemble E. Si $E = \mathbb{R}$, alors X est appelée **variable aléatoire réelle**.

Remarques

1. Notons qu'une variable aléatoire est une *application* définie sur Ω et non une variable et qu'elle n'est *pas aléatoire*.
2. Comme Ω est fini, il en est de même de son image par l'application X. En notant n le cardinal de $X(\Omega)$, on écrira si besoin est $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. On verra que, dans la plupart des exemples concrets, on a $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ ou, plus rarement, $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$.

Exemple Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément trois cartes. On peut prendre comme univers Ω l'ensemble des sous-ensembles à 3 éléments de l'ensemble des cartes. L'application X qui, à tout tirage, associe le nombre de cartes de couleur cœur, est une variable aléatoire réelle sur Ω et $X(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.

p.1496

Exercice 1 Dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, un joueur prélève simultanément n boules ($1 \leqslant n \leqslant N$). On note X (respectivement Y) la variable aléatoire qui, à tout élément de Ω, associe le plus grand (respectivement le plus petit) des numéros des boules tirées.

1. Que prendre comme univers Ω ?
2. Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

Définition 2

Soit Ω un univers fini. Si a est un élément d'un ensemble E quelconque, alors l'application $X: \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ \omega & \longmapsto & a \end{array}$ est une variable aléatoire appelée **variable aléatoire constante** ou **certaine**.

Définition 3

Si A est un événement de l'univers fini Ω, alors l'application :

$$X: \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \in A \\ 0 & \text{si} \quad \omega \notin A \end{cases} \end{array}$$

est une variable aléatoire réelle appelée **variable indicatrice de A** et notée $\mathbb{1}_A$.

Exemple Un dé est lancé une fois. On pose $\Omega = [\![1, 6]\!]$. Soit X l'application qui à tout nombre pair de Ω associe 0, et à tout nombre impair de Ω associe 1 :

$$X: \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } \omega \text{ est impair.} \end{cases} \end{array}$$

Alors X est une variable aléatoire sur Ω ; c'est la variable aléatoire indicatrice de l'événement $A = \{1, 3, 5\}$ « le numéro tiré est impair ».

Remarque

Une variable aléatoire réelle sur un univers Ω est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des variables aléatoires réelles définies sur Ω est donc $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$, ensemble sur lequel ont été définies une structure d'espace vectoriel et une multiplication interne. Si X et Y sont des variables aléatoires réelles sur Ω et λ un réel, alors $X + Y$, λX et XY sont des variables aléatoires réelles.

Définition 4

Soit X une variable aléatoire sur un univers Ω et u une application définie sur $X(\Omega)$. L'application $u \circ X$ est une variable aléatoire, notée $u(X)$.

Remarque
La notation $u(X)$, *a priori* incorrecte pour nommer la composée de X et u, s'accorde avec la terminologie qui nomme variable l'application X.

Événements liés à une variable aléatoire

Notations La théorie des probabilités utilise, pour décrire certains événements liés aux variables aléatoires, des notations spéciales dont il importe de bien comprendre la signification.
Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω, à valeurs dans E.

- Soit A une partie de E. L'ensemble $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$, image réciproque de A par l'application X, est noté, en probabilités :

  $$\{X \in A\} \quad \text{ou} \quad (X \in A).$$

  C'est une partie de Ω, c'est-à-dire un événement.
- Plus généralement, si P est une propriété quelconque pouvant être vérifiée ou non par un élément de E, l'ensemble des éléments ω de Ω tels que $X(\omega)$ vérifie la propriété P est noté $\{X \text{ vérifie } P\}$.
  * En particulier, pour tout $x \in E$, on note :

    $$\{X = x\}$$

    l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$.
    On remarque que, pour tout $x \in E$, on a $\{X = x\} = \varnothing$ si $x \notin X(\Omega)$; ainsi $\{X = x\} = \varnothing$ sauf pour un nombre fini de valeurs de x.
  * Si X est une variable aléatoire réelle, on écrit, pour tout réel x :

    $$\begin{aligned} \{X \leqslant x\} &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\} \ ; \\ \{X \geqslant x\} &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant x\} \ ; \\ \{X < x\} &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\} \ ; \\ \{X > x\} &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}. \end{aligned}$$

    On a alors, pour tout réel x :

    $$\{X \leqslant x\} = \{X < x\} \cup \{X = x\}.$$

Exemple Si $\mathbb{1}_A$ est la fonction indicatrice de l'événement A, on a, par définition :

$$\{\mathbb{1}_A = 1\} = A \quad \text{et} \quad \{\mathbb{1}_A = 0\} = \overline{A},$$

où $\overline{A}$ est l'événement contraire de A.

p.1496 **Exercice 2** Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans E, ainsi que A et B deux parties de E. Exprimer les événements $\{X \in A \cup B\}$, $\{X \in A \cap B\}$ et $\{X \in E \setminus A\}$ en fonction de $\{X \in A\}$ et $\{X \in B\}$.

La proposition suivante montre que tout événement de la forme $\{X \in A\}$ peut s'écrire comme réunion finie d'événements de la forme $\{X = x\}$.

Proposition 1

Soit X une variable aléatoire sur l'univers Ω à valeurs dans E. Alors, pour tout $A \subset E$:

$$\{X \in A\} = \{X \in A \cap X(\Omega)\} = \bigcup_{x \in A \cap X(\Omega)} \{X = x\}.$$

Démonstration page 1496

p.1496

Exercice 3 Un joueur lance deux dés discernables. On considère l'application X qui, à chaque issue, associe la somme des chiffres apparus.

1. Quel univers Ω peut-on choisir ? Que vaut $X(\Omega)$?
2. Déterminer les événements $\{X = 7\}$, $\{X \leqslant 4\}$ et $\{8{,}5 \leqslant X \leqslant 10{,}1\}$.

Proposition 2

Si X est une variable aléatoire sur l'univers Ω, la famille $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, appelé **système complet d'événements associé à X**. On a, en particulier, si Ω est muni d'une probabilité $\mathbb{P}$:

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\}) = 1.$$

Démonstration page 1496

Exemple Le système complet d'événements associé à la variable $\mathbb{1}_A$ est $(A, \bar{A})$.

2 Loi d'une variable aléatoire

Notations En vue d'alléger les notations, on écrit $\mathbb{P}(X \in A)$ pour désigner la probabilité de l'événement $\{X \in A\}$, au lieu de $\mathbb{P}(\{X \in A\})$; de même, on écrit $\mathbb{P}(X = x)$ au lieu de $\mathbb{P}(\{X = x\})$.

Théorème 3

Si X est une variable aléatoire sur l'univers Ω de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$, alors l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$, appelée **loi de X** et notée $\mathbb{P}_X$.

Démonstration page 1497

Remarques

1. Considérer la loi de X, c'est s'intéresser à $X(\Omega)$ et à cette probabilité $\mathbb{P}_X$. On oublie l'ensemble Ω et X en tant qu'application. C'est le sens des notations $\{X \in A\}$ et $\{X = x\}$.
2. Il résulte de la définition de la loi de X que celle-ci dépend de la probabilité choisie sur Ω, alors que la variable aléatoire X peut être définie indépendamment de la probabilité.

Proposition 4

Si X est une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$, la loi de X est déterminée de manière unique par la donnée, pour tout $x \in X(\Omega)$, de :

$$\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x).$$

Plus précisément, on a pour tout $A \subset X(\Omega)$:

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration. Compte tenu du théorème précédent, il s'agit d'un cas particulier de définition d'une probabilité sur un univers fini par la probabilité des événements élémentaires (théorème 6 de la page 1409). □

Point méthode

Déterminer la loi de X revient donc à déterminer $X(\Omega)$ et à calculer, pour tout $x \in X(\Omega)$, la probabilité $\mathbb{P}(X = x)$. Si on note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, il faut calculer, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}(X = x_i)$.

Remarque Parfois, on ne connaît *a priori* qu'un ensemble E tel que $X(\Omega) \subset E$. On calcule $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in E$. Si $x \notin X(\Omega)$, on trouve $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Exemple Un dé est lancé deux fois successivement. On note X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres apparus. Déterminons la loi de X.

On considère l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, muni de la probabilité uniforme. On a $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et, pour tout $k \in [\![2, 12]\!]$:

$$\{X = k\} = \{(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2 \mid i + j = k\} = \{(i, k - i) \in [\![1, 6]\!]^2\}.$$

On obtient :

$$\operatorname{card}\{X = k\} = \operatorname{card}\{i \in [\![1, 6]\!] \mid k - i \in [\![1, 6]\!]\}.$$

- Si $2 \leqslant k \leqslant 7$, alors i peut prendre toutes les valeurs entre 1 et $k - 1$, car si $1 \leqslant i \leqslant k - 1$, alors $k - i \geqslant 1$ et $k - i \leqslant k - 1 \leqslant 6$.
  On obtient $\operatorname{card}\{X = k\} = k - 1$ et :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{k - 1}{36}.$$

- Si $8 \leqslant k \leqslant 12$, alors i ne peut pas prendre de valeur supérieure à 6, donc la condition $k-i \geqslant 1$ est réalisée. On doit avoir de plus $k-i \leqslant 6$ et donc $i \geqslant k-6 \geqslant 1$. Finalement i peut prendre toutes les valeurs entre $k-6$ et 6.
  On obtient $\operatorname{card}\{X=k\} = 13-k$ et :
  $$\mathbb{P}(X=k) = \frac{13-k}{36}\cdot$$

p.1497 **Exercice 4** Un joueur prélève n boules simultanément dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On considère les variables aléatoires réelles X et Y égales respectivement au plus grand et au plus petit numéro des n boules prélevées. Déterminer les lois de X et de Y.

Remarque
Que deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé aient même loi ne signifie nullement qu'elles sont égales.

- Les variables X et Y ont même loi équivaut à :
  $$X(\Omega) = Y(\Omega) \quad \text{et} \quad \forall x \in X(\Omega) \quad \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(Y=x).$$
- L'égalité $X = Y$ équivaut à : $X(\omega) = Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, i.e. à :
  $$\forall x \in X(\Omega) \quad \{X=x\} = \{Y=x\}.$$

Que les ensembles $\{X=x\}$ et $\{Y=x\}$ aient même probabilité ne signifie pas qu'ils sont égaux.

Exemple On lance une fois une pièce équilibrée ; on note X le nombre de piles et Y le nombre de faces. Les variables X et Y sont à valeurs dans $\{0,1\}$ et :
$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{2}\cdot$$
Les variables X et Y ont même loi, mais X n'est pas égal à Y car, pour tout $\omega \in \Omega$:
$$X(\omega) = 1 \Longleftrightarrow Y(\omega) = 0,$$
car si on obtient pile, on n'obtient pas face.

La condition énoncée dans la proposition 2 de la page 1459 est suffisante pour qu'une famille de réels positifs définisse une loi de probabilité. Plus précisément, nous avons le théorème suivant :

Théorème 5

Soit m un entier naturel non nul, $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ un m-uplet d'éléments distincts d'un ensemble E et $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ un m-uplet de réels positifs ou nuls tel que $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Si Ω est un ensemble fini tel que $\operatorname{card}(\Omega) \geqslant m$, il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω et une variable aléatoire X sur Ω telle que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, m]\!] \quad \mathbb{P}(X = x_i) = p_i.$$

Démonstration page 1497

Remarques

1. L'hypothèse $\operatorname{card}(\Omega) \geqslant m$ est nécessaire, car si X est une application de Ω dans E, on a $\operatorname{card}\big(X(\Omega)\big) \leqslant \operatorname{card}(\Omega)$ (*cf.* proposition 18 de la page 364).
2. Pour définir sur l'univers Ω une probabilité et une variable aléatoire X ayant les propriétés voulues, le théorème exige seulement que $\operatorname{card}(\Omega) \geqslant m$, ce qui permet évidemment de trouver un tel Ω.

Point méthode

On peut parler d'une variable aléatoire X à valeurs dans un ensemble fini E dont la loi est définie par $\mathbb{P}(X = x) = p_x$ pour tout $x \in E$ si, et seulement si, $(p_x)_{x \in E}$ est une famille de réels positifs telle que $\sum\limits_{x \in E} p_x = 1$.

p.1498 **Exercice 5** Pour quelles valeurs de $p_2 \in \mathbb{R}$, existe-t-il une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0, 5]\!]$ telle que la suite $\big(\mathbb{P}(X = k)\big)_{0 \leqslant k \leqslant 5}$ soit arithmétique et que $\mathbb{P}(X = 2) = p_2$?

Point méthode

Parfois, il est plus simple de déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant x)$ (resp. $\mathbb{P}(X \geqslant x)$) que directement $\mathbb{P}(X = x)$. C'est le cas en particulier dans des problèmes de maximum (resp. minimum). On peut alors utiliser la proposition suivante. Nous nous limitons au cas où $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$.

Proposition 6

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$. On a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k - 1)$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k + 1).$$

Démonstration page 1498

Remarque Ces formules sont valables, même si k n'appartient pas à $X(\Omega)$. On trouve alors $\mathbb{P}(X = k) = 0$.

p.1498

Exercice 6 Un joueur prélève n boules successivement avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N ; on considère la variable X (resp. Y) égale au plus grand numéro (resp. plus petit) des n boules tirées.

1. Donner un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ rendant compte de l'expérience. Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ pour $k \in [\![1, N]\!]$. En déduire la loi de X.
3. Déterminer $\mathbb{P}(Y \geqslant k)$ pour $k \in [\![1, N]\!]$. En déduire la loi de Y.
4. Pouvait-on utiliser la même méthode que dans l'exercice 4 de la page 1461 ?

Lois de $u(X)$, de $X + Y$ et de XY

Proposition 7

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et u une application définie sur $X(\Omega)$. La loi de la variable aléatoire $u(X)$ est donnée par :

$$\forall y \in u(X)(\Omega) \quad \mathbb{P}(u(X) = y) = \sum_{x \in u^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration page 1499

Exemples On garde les notations de la proposition 7. On pose $Y = u(X)$.

1. Soit u l'application $x \longmapsto ax + b$, où $a \neq 0$. Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, alors $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, où $y_i = ax_i + b$, pour $i \in [\![1, n]\!]$. La loi de Y est définie par :
$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \mathbb{P}(Y = y_i) = \mathbb{P}(aX + b = ax_i + b) = \mathbb{P}\left(X = x_i\right).$$
2. Soit u l'application $x \longmapsto x^2$. Si $X(\omega) = [\![-n, n]\!]$, alors $Y(\Omega) = \{k^2,\ k \in [\![0, n]\!]\}$. La loi de Y est définie par :
$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, n]\!] \quad \mathbb{P}(Y = k^2) = \mathbb{P}(X = -k) + \mathbb{P}(X = k).$$

p.1499

Exercice 7 Un joueur lance successivement deux fois un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire égale à la différence entre les résultats du premier et du deuxième lancer. Déterminer les lois de X, $|X|$ et $(X - 1)^2$.

Remarque On peut donner une expression des lois de $X + Y$ et XY.

1. On a :
$$(X + Y)(\Omega) = \Big\{X(\omega) + Y(\omega)\,;\ \omega \in \Omega\Big\} \subset \Big\{x + y\,;\ (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\Big\}.$$
L'inclusion peut être stricte, car si x et y sont dans $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, il n'existe pas nécessairement un même $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = x$

et $Y(\omega)=y$. On en déduit :

$$\forall z \in (X+Y)(\Omega) \quad \{X+Y=z\} = \bigcup_{(x,y)\in I_z} \{X=x\}\cap\{Y=y\},$$

où I_z est l'ensemble des couples $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$ tels que $x+y=z$, certaines de ces intersections pouvant être vides. On obtient :

$$\forall z \in (X+Y)(\Omega) \quad \mathbb{P}(X+Y=z) = \sum_{(x,y)\in I_z} \mathbb{P}\Big(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\Big).$$

2. On a de même :

$$(XY)(\Omega) = \Big\{X(\omega)\,Y(\omega)\,;\ \omega\in\Omega\Big\} \subset \Big\{xy\,;\ (x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\Big\}.$$

On en déduit :

$$\forall z \in (XY)(\Omega) \quad \{XY=z\} = \bigcup_{(x,y)\in J_z} \{X=x\}\cap\{Y=y\},$$

où J_z est l'ensemble des couples $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$ tels que $xy=z$. On obtient :

$$\forall z \in (XY)(\Omega) \quad \mathbb{P}(XY=z) = \sum_{(x,y)\in J_z} \mathbb{P}\Big(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\Big).$$

3 Lois usuelles

Loi uniforme

Situation type Une variable aléatoire qui peut prendre n valeurs distinctes équiprobables suit une loi uniforme. Cette loi traduit le fait de choisir « au hasard » parmi un nombre fini d'éléments.

Définition 5

On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi uniforme sur** $[\![1,n]\!]$, où n est un entier non nul, si $X(\Omega)=[\![1,n]\!]$ et

$$\forall k\in[\![1,n]\!] \quad \mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{n}\cdot$$

Plus généralement, on dit que la variable aléatoire X suit **la loi uniforme sur** $[\![a,b]\!]$, où a et b sont deux entiers tels que $a\leqslant b$, si $X(\Omega)=[\![a,b]\!]$ et :

$$\forall k\in[\![a,b]\!] \quad \mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{b-a+1}\cdot$$

Notations On note $X\sim\mathcal{U}([\![a,b]\!])$ ou $X\hookrightarrow\mathcal{U}([\![a,b]\!])$ l'assertion « X suit la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$ ».

Exemples

1. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en prend une au hasard et l'on note X le numéro de la boule tirée. Alors X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
2. Un dé parfaitement équilibré est lancé. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la face supérieure : elle suit la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.

Remarque Si la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$ avec $a < b$, la variable aléatoire $Y = X - a + 1$ suit la loi uniforme sur $[\![1, b - a + 1]\!]$.

Loi de Bernoulli

Situation type La loi de Bernoulli apparaît quand, dans une expérience aléatoire, on ne s'intéresse qu'à la réalisation ou non d'un événement A (appelé succès). On parle d'épreuve de Bernoulli. En codant 1 et 0 le succès et l'échec, on obtient une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Définition 6

Soit $p \in [0, 1]$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli de paramètre $\boldsymbol{p}$** si $X(\Omega) \subset \{0, 1\}$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$.

Notations On note $X \sim \mathcal{B}(p)$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ l'assertion « X suit la loi de Bernoulli de paramètre p ».
Au lieu de : X est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli, on dit aussi que X est une variable de Bernoulli.

Remarque Si $p \in]0, 1[$, alors $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

Exemples

1. Toute épreuve à deux issues peut être représentée par une variable de Bernoulli, en notant 1 et 0 les deux résultats possibles.
   Par exemple, si on lance une pièce, la variable aléatoire réelle qui vaut 1 si la pièce tombe sur pile et 0 si la pièce tombe sur face, suit une loi de Bernoulli.
2. La variable indicatrice d'un événement A est une variable de Bernoulli, de paramètre $\mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$.

   Réciproquement, toute variable de Bernoulli est la variable indicatrice de l'événement $\{X = 1\}$.
3. Si X et Y sont deux variables de Bernoulli définies sur le même univers, alors leur produit XY est une variable de Bernoulli, car il est clair qu'elle est à valeurs dans $\{0, 1\}$.
4. En particulier, si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, il en est de même de X^2 car $X^2 = X$.

Loi binomiale

Situation type La loi binomiale apparaît quand on considère le nombre X de succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p (schéma de Bernoulli). Puisque l'on a montré qu'il existe un espace probabilisé pour modéliser un schéma de Bernoulli (page 1425), on définit bien ainsi une variable aléatoire. On a $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

En effet, l'événement $\{X = k\}$ est la réunion disjointe des événements $A_{i_1,i_2,\dots,i_k}$: « on a eu des succès aux épreuves numéros $i_1,\dots,\ i_k$ et des échecs aux $n-k$ autres épreuves », pour $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$. On a $\mathbb{P}(A_{i_1,i_2,\dots,i_k}) = p^k(1-p)^{n-k}$, car les épreuves sont indépendantes, et comme $\{X = k\}$ est la réunion disjointe de $\binom{n}{k}$ événements de ce type (qui correspondent au nombre de façons de choisir $i_1,\dots,\ i_k$ dans $[\![1,n]\!]$), on obtient $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

On remarque que X est aussi la somme des n variables aléatoires $X_1,\dots,\ X_n$, où X_i est la variable indicatrice de l'événement « le résultat de la i-ème épreuve est un succès ».

Définition 7

Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que la variable aléatoire X suit **la loi binomiale de paramètre (n,p)** si $X(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$ et :

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Notations On note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ l'assertion « X suit la loi binomiale de paramètre (n,p) ».

Remarques

1. La formule du binôme permet de retrouver dans ce cas l'égalité :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) = 1.$$

2. Si $p \in]0,1[$, alors $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
3. Une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre $(1,p)$ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p. Les notations $\mathcal{B}(p)$ et $\mathcal{B}(1,p)$ ont la même signification.

Exemples

1. On lance indépendamment n pièces équilibrées et l'on considère la variable aléatoire X égale au nombre de piles obtenues. La variable X suit la loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{1}{2}\right)$. On obtient le même résultat si on lance n fois la même pièce.
2. On fait une suite de n tirages avec remise dans une urne contenant une proportion p de boules blanches. Le nombre X de boules blanches tirées suit la loi de Bernoulli de paramètre (n, p).

p.1500

Exercice 8 Montrer que, si la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre (n, p), la variable aléatoire $n - X$ suit la loi binomiale de paramètre $(n, 1-p)$. Interpréter.

II Couples de variables aléatoires

1 Définitions

Définition 8

Si Ω est un univers fini, et X et Y deux variables aléatoires sur Ω, à valeurs dans E et E' respectivement, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times E' \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

est appelée **couple de variables aléatoires** sur Ω. On note (X, Y) ce couple de variables aléatoires. Si $E = E' = \mathbb{R}$, alors (X, Y) est appelé un couple de variables aléatoires réelles.

Remarques

1. Un couple de variables aléatoires est tout simplement une application de Ω dans $E \times E'$, c'est-à-dire une variable aléatoire à valeurs dans $E \times E'$. Un couple de variables aléatoires réelles est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
2. L'image $(X, Y)(\Omega)$ est la partie du produit cartésien $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ formée des couples $(X(\omega), Y(\omega))$ où ω décrit Ω. En général $(X, Y)(\Omega)$ est inclus strictement dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Exemples

1. On lance deux dés parfaitement équilibrés. Soit X la variable aléatoire réelle égale au plus petit des nombres apparus lors du lancer et Y la variable aléatoire réelle égale au plus grand des nombres apparus.

   Alors (X, Y) est un couple de variables aléatoires réelles. Les variables aléatoires X et Y sont à valeurs dans $[\![1, 6]\!]$ et, par définition de X et Y, l'ensemble des valeurs prises par (X, Y) est :

$$\{(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2 \mid i \leqslant j\}.$$

2. Un urne contient 2 boules blanches, 3 boules rouges et 4 boules bleues. On extrait 3 boules de l'urne. On note X le nombre de boules blanches et Y le nombre de boules rouges. Alors (X, Y) est un couple de variables aléatoires réelles. La variable aléatoire X est à valeurs dans $[\![0,2]\!]$ et Y est à valeurs dans $[\![0,3]\!]$. L'ensemble des valeurs prises par (X, Y) est :
$$\{(i,j) \in [\![0,2]\!] \times [\![0,3]\!] \mid i+j \leqslant 3\},$$
car on ne tire que 3 boules en tout.

Proposition 8

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles sur l'univers fini Ω. Alors la famille d'événements $\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements de Ω appelé **système complet d'événements associé au couple (X, Y)**.

Démonstration page 1500

Remarques

1. Il découle de cette proposition que que si l'univers Ω est muni d'une probabilité $\mathbb{P}$, on a l'égalité :
$$\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) = 1.$$
2. Pour l'événement $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$, on trouve aussi les notations $\{X = x, Y = y\}$ ou $\{(X, Y) = (x, y)\}$, ainsi que $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ pour sa probabilité.

2 Loi conjointe

Définition 9

Soit X et Y deux variables aléatoires sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans E et E' respectivement. La **loi conjointe** de X et Y est la loi du couple (X, Y), qui est une variable aléatoire sur Ω, à valeurs dans $E \times E'$.

Remarques

1. Par définition de la loi d'une variable aléatoire (*cf.* théorème 3 de la page 1459), la loi du couple (X, Y) est l'application :
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}\left((X,Y)(\Omega)\right) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}((X,Y) \in A) \end{array}.$$
C'est une probabilité sur $(X, Y)(\Omega)$.
2. La loi de (X, Y) est déterminée par la famille :
$$\big(\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}.$$
Cela résulte de la proposition 4 de la page 1460 appliquée à la variable aléatoire (X, Y) à valeurs dans $E \times E'$.
Comme il a été déjà remarqué, certaines de ces probabilité peuvent être nulles.

3. La loi peut être représentée par un tableau à double entrée, les lignes correspondant aux valeurs de $X(\Omega)$ et les colonnes à celles de $Y(\Omega)$: si l'on écrit $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_m\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_n\}$, on place $\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$ sur la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Point méthode

Quand on demande la loi conjointe des variables aléatoires X et Y sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, on attend le calcul, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ de $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$.
Si on note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_m\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_n\}$, on calcule $\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$ pour tout $(i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$.

Exemple On lance deux dés : X est la variable aléatoire réelle égale au plus petit des nombres apparus et Y est la variable aléatoire égale au plus grand des nombres apparus. On munit l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ de la probabilité uniforme. On obtient, pour $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2$:

- si $i > j$, $\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$;
- si $i = j$, $\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \mathbb{P}(\{(i, i)\}) = \dfrac{1}{36}$;
- si $i < j$, $\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \mathbb{P}(\{(i, j), (j, i)\}) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$.

3 Lois marginales

Définition 10

Pour tout couple (X, Y) de variables aléatoires, la loi de X est appelée **première loi marginale du couple** et celle de Y est appelée **deuxième loi marginale du couple**.

Le théorème suivant exprime le fait que l'on peut déduire les lois marginales de la loi du couple. Pour obtenir une loi marginale, on somme par rapport à l'autre variable.

Théorème 9

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. On dispose des égalités suivantes :

$$\forall x \in X(\Omega) \quad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\});$$

$$\forall y \in Y(\Omega) \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}).$$

Démonstration. Ces égalités résultent de ce que $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$ et $\big(\{X = x\}\big)_{x \in X(\Omega)}$ sont des systèmes complets d'événements (on applique la proposition 5. $\square$

Exemple Déterminons les lois marginales du couple dont on a déterminé la loi conjointe dans l'exemple de la page 1469. On obtient que, pour tout $i \in [\![1,6]\!]$,

$$\mathbb{P}(X=i)=\sum_{j=1}^{6}\mathbb{P}\big(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\big)=\frac{1}{36}+\sum_{j=i+1}^{6}\frac{1}{18}=\frac{1+2(6-i)}{36}=\frac{13-2i}{36}.$$

De même, pour tout entier j de $[\![1,6]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(Y=j)=\sum_{i=1}^{6}\mathbb{P}\big(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\big)=\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{2(j-1)+1}{36}=\frac{2j-1}{36}.$$

Remarque Si la loi conjointe est représentée sous la forme d'un tableau, pour obtenir les lois de X et Y, il faut sommer sur les lignes ou les colonnes.

Exemple Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires. On tire successivement deux boules de l'urne, sans remise. Soit X (resp. Y) la variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 si le premier (resp. le second) tirage est blanc.
On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0,Y=0)&=\mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0\mid X=0)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5}{14}\\
\mathbb{P}(X=0,Y=1)&=\mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=1\mid X=0)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{15}{56}\\
\mathbb{P}(X=1,Y=0)&=\mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=0\mid X=1)=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{56}\\
\mathbb{P}(X=1,Y=1)&=\mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=1\mid X=1)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3}{28}.
\end{aligned}$$

La loi conjointe de (X,Y) est donnée dans le tableau suivant, grâce auquel on calcule les lois marginales.

X \ Y	0	1	loi de X
0	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{8}$
1	$\frac{15}{56}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{8}$
loi de Y	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	1

On vérifie que $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\{0,1\}^2}\mathbb{P}\left(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\right)=1$.

Remarque La connaissance des lois marginales ne suffit pas, en général, à reconstituer la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires, sauf pour des variables aléatoires indépendantes, ce que nous verrons page 1474.

p.1500

Exercice 9 Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. On en tire deux et l'on note X le premier numéro tiré, Y le second.
Déterminer les lois conjointe et marginales en examinant les deux cas : tirage avec remise et tirage sans remise. Que peut-on en conclure ?

4 Lois conditionnelles

Définition 11

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.
Pour tout y de $Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$, la **loi de X sachant $\{Y = y\}$** est la loi de X dans l'espace probabilisé $\big(\Omega, \mathbb{P}_{\{Y=y\}}\big)$. Elle est donc déterminée, par la donnée, pour tout $x \in X(\Omega)$ de :

$$\mathbb{P}_{\{Y=y\}}(X = x) = \mathbb{P}(X = x \mid Y = y)\,.$$

De même, pour tout x de $X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$, la **loi de Y sachant $\{X = x\}$** est la loi de Y dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P}_{\{X=x\}})$.

Remarques

1. On rappelle que $\mathbb{P}_{\{Y=y\}}$ est la probabilité conditionnelle à l'événement $\{Y = y\}$.
2. Au lieu de loi sachant $\{Y = y\}$, on dit aussi **loi conditionnelle à $\{Y = y\}$**.
3. Les lois conditionnelles sont des lois de variables aléatoires ; elles en ont les propriétés.

Exemple Reprenons l'exemple du lancer de deux dés équilibrés, X étant la variable aléatoire réelle égale au plus petit des deux nombres obtenus et Y la variable aléatoire réelle égale au plus grand des deux nombres, dont la loi conjointe et les lois marginales ont été déterminées pages 1469 et 1470.

- Soit $j \in [\![1, 6]\!]$. On obtient, pour $i \in [\![1, 6]\!]$:

$$\mathbb{P}(X = i \mid Y = j) = \frac{\mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big)}{\mathbb{P}(Y = j)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i > j \\ \dfrac{\frac{1}{36}}{\frac{2j-1}{36}} = \dfrac{1}{2j-1} & \text{si} \quad i = j \\ \dfrac{\frac{1}{18}}{\frac{2j-1}{36}} = \dfrac{2}{2j-1} & \text{si} \quad i < j. \end{cases}$$

- De même, si $i \in [\![1, 6]\!]$, on obtient, pour tout $j \in [\![1, 6]\!]$:

$$\mathbb{P}(Y = j \mid X = i) = \frac{\mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big)}{\mathbb{P}(X = i)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i > j \\ \dfrac{\frac{1}{36}}{\frac{13-2i}{36}} = \dfrac{1}{13-2i} & \text{si} \quad i = j \\ \dfrac{\frac{1}{18}}{\frac{13-2i}{36}} = \dfrac{2}{13-2i} & \text{si} \quad i < j. \end{cases}$$

p.1500

Exercice 10 Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules rouges et 4 boules bleues. On extrait 4 boules de l'urne, successivement avec remise. On note X le nombre de boules blanches et Y le nombre de boules rouges obtenues.

1. Déterminer la loi conjointe de X et Y.
2. En déduire les lois marginales.
3. Déterminer les lois conditionnelles. Commenter.

Proposition 10

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$.
On suppose que, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$. Alors, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) &= \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) \\ &= \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y \mid X = x),\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}(X = x \mid Y = y),$$

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y \mid X = x).$$

Démonstration. Les premières égalités résultent de la définition des probabilités conditionnelles, les deux dernières de la formule des probabilités totales appliquée aux systèmes complets d'événements $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$ et $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ associés aux variables aléatoires Y et X. □

Remarque Ainsi, connaissant une des lois marginales et la probabilité conditionnelle de l'autre variable par rapport à celle-ci, on obtient la loi conjointe et la loi marginale de la deuxième variable.

p.1502 **Exercice 11** Soit n un entier naturel non nul, p et p' des réels appartenant à $]0, 1[$. On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. On suppose que X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ et que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la loi de Y conditionnelle à $\{X = k\}$ est $\mathcal{B}(k, p')$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer la loi de Y.

5 Généralisation aux n-uplets de variables aléatoires

Définition 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si X_1, X_2, …, X_n sont des variables aléatoires sur l'univers Ω, à valeurs dans E_1, E_2, …, E_n respectivement, alors l'application :

$$\begin{array}{ccc}\Omega & \longrightarrow & E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \\ \omega & \longmapsto & (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))\end{array}$$

est appelé **n-uplet de variables aléatoires** sur Ω. On le note $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Si $E_1 = \cdots = E_n = \mathbb{R}$, alors $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est appelé un **n-uplet de variables aléatoires réelles**.

Remarque
Un n-uplet de variables aléatoires est simplement une application de Ω dans $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$, *i.e.* une variable aléatoire à valeurs dans $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

Définition 13

Soit X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.

La loi conjointe de X_1, X_2,..., X_n est la loi du n-uplet $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Les lois marginales du n-uplet $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sont les lois des variables aléatoires X_1, X_2,..., X_n.

Remarque

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires sur l'univers Ω, leur loi conjointe est déterminée par la donnée, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, de :

$$\mathbb{P}(\{X_1 = x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n = x_n\}).$$

L'événement $\{X_1 = x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n = x_n\}$ est noté $\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$, en général, et sa probabilité est notée $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$.
Comme dans le cas des couples de variables aléatoires, les lois marginales des n-uplets s'obtiennent à partir de la loi conjointe. Pour obtenir une loi marginale, il faut sommer par rapport aux autres variables.

Théorème 11

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et tout $a_k \in X_k(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}(X_k = a_k) = \sum_{\substack{x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_{k-1} \in X_{k-1}(\Omega), \\ x_{k+1} \in X_{k+1}(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)}} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_k = a_k, \dots, X_n = x_n).$$

Principe de démonstration. Considérer le n-uplet $Z = (X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_n)$ et utiliser la formule des probabilités totales. Démonstration page 1502

Exemple Soit n et N des entiers tels que $1 \leqslant n < N$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire n simultanément. Les numéros obtenus sont notés $Y_1 < Y_2 < \cdots < Y_n$. On veut déterminer la loi du n-uplet $(Y_1, \dots, Y_n)$, puis les lois marginales.

- On fait l'hypothèse que les $\binom{N}{n}$ tirages sont équiprobables. Les valeurs prises par $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont les n-uplets d'entiers $(y_1, \dots, y_n)$ tels que $1 \leqslant y_1 < \cdots < y_n \leqslant N$. On note E l'ensemble de ces valeurs. On a donc :

$$\forall (y_1, \dots, y_n) \in E \quad \mathbb{P}\big((Y_1, \dots, Y_n) = (y_1, \dots, y_n)\big) = \frac{1}{\binom{N}{n}},$$

  car c'est la probabilité que les boules tirées portent les numéros y_1,..., y_n.
- Soit $k \in [\![1, n]\!]$. L'ensemble des valeurs prises par Y_k est $[\![k, N-n+k]\!]$, car :
  - la plus petite valeur de Y_k est obtenue pour $(Y_1, \dots, Y_k) = (1, \dots, k)$;
  - la plus grande de Y_k est obtenue pour $(Y_k, \dots, Y_n) = (N-n+k, \dots, N)$.

  Pour $y_k \in [\![k, N-n+k]\!]$ fixé, les valeurs prises par le n-uplet $(y_1, \dots, y_n)$ doivent vérifier :

$$1 \leqslant y_1 < \cdots < y_{k-1} < y_k < y_{k+1} < \cdots < y_n.$$

Il y a $\binom{y_k-1}{k-1}$ choix possibles pour $(y_1,\dots,y_{k-1})$ et $\binom{N-y_k}{n-k}$ choix possibles pour $(y_{k+1},\dots,y_n)$, donc $\binom{y_k-1}{k-1}\binom{N-y_k}{n-k}$ choix possibles pour $(y_1,\dots,y_n)$.
Comme le n-uplet $(Y_1,\dots,Y_n)$ suit une loi uniforme sur E, on en déduit :

$$\mathbb{P}(Y_k=y_k)=\frac{\binom{y_k-1}{k-1}\binom{N-y_k}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

III Indépendance de variables aléatoires

1 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 14

Deux variables aléatoires X et Y sur l'espace probabilisé fini $(\Omega,\mathbb{P})$, à valeurs dans E et F respectivement sont dites **indépendantes** si, pour toute partie A de E et toute partie B de F, les événements $\{X\in A\}$ et $\{Y\in B\}$ sont indépendants, c'est-à-dire vérifient :

$$\mathbb{P}(\{X\in A\}\cap\{Y\in B\})=\mathbb{P}(X\in A)\,\mathbb{P}(Y\in B).$$

Proposition 12

Deux variables aléatoires X et Y sur l'espace probabilisé fini $(\Omega,\mathbb{P})$ à valeurs dans E et F respectivement sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, les événements $\{X=x\}$ et $\{Y=y\}$ sont indépendants, c'est-à-dire vérifient :

$$\mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{Y=y\})=\mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y).$$

Principe de démonstration. Une des implications est évidente. Pour la réciproque, on écrit par exemple $\{X\in A\}$, où $A\subset E$, comme réunion d'événements de la forme $\{X=x\}$.

Démonstration page 1503

Remarque Dans le cas de variables aléatoires indépendantes, la donnée des lois marginales permet donc de connaître la loi conjointe. Réciproquement :

Proposition 13

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de l'espace probabilisé $(\Omega,\mathbb{P})$. Il y a équivalence entre :

(i) les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ;

(ii) pour tout $y\in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y=y)\neq 0$, la loi de X sachant $\{Y=y\}$ est égale à la loi de X ;

(iii) pour tout $x\in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X=x)\neq 0$, la loi de Y sachant $\{X=x\}$ est égale à la loi de Y.

Démonstration page 1503

p.1504

Exercice 12

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_p\}$.
Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, la matrice $A = \big(\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ donnant la loi conjointe de (X, Y) est de rang 1.

Remarques

- Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes. Si :
$$\forall x \in X(\Omega) \quad \mathbb{P}(X = x) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall y \in Y(\Omega) \quad \mathbb{P}(Y = y) \neq 0$$
alors, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:
$$\mathbb{P}\left((X, Y) = (x, y)\right) = \mathbb{P}(X = x)\, \mathbb{P}(Y = y) \neq 0$$
et donc $\big\{(X, Y) = (x, y)\big\} \neq \varnothing$.
Dans ce cas $(X, Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
- La notion d'indépendance n'est pas une notion ensembliste. Elle dépend de la probabilité choisie. L'exemple suivant le montre.

Exemple On considère l'univers $\Omega = [\![1, 2]\!]^2$. On note X et Y les variables aléatoires égales au premier et au second élément du couple, respectivement.

1. On suppose que Ω est muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On a :
$$\forall (i, j) \in [\![1, 2]\!]^2 \quad \mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big) = \mathbb{P}\big(\{(i, j)\}\big) = \frac{1}{4}\cdot$$
Pour tout $i \in [\![1, 2]\!]$, $\mathbb{P}\big(X = i\big) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}\cdot$
La loi de Y est la même que celle de X. On a donc :
$$\forall (i, j) \in [\![1, 2]\!]^2 \quad \mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big) = \mathbb{P}\big(X = i\big)\, \mathbb{P}\big(Y = j\big).$$
Les variables X et Y sont indépendantes.
2. On suppose que Ω est muni de la probabilité $\mathbb{Q}$ définie par :
$$\forall (i, j) \in [\![1, 2]\!]^2 \quad \mathbb{Q}\big(\{(i, j)\}\big) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si} \quad i = j \\ \frac{1}{6} & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$
Cette définition est licite car la somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1. On a :
$$\forall i \in [\![1, 2]\!] \quad \mathbb{Q}\big(\{X = i\}\big) = \mathbb{Q}\big(\{(i, 1)\}\big) + \mathbb{Q}\big(\{(i, 2)\}\big) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\cdot$$
La loi de Y est la même que celle de X. On en déduit :
$$\mathbb{Q}\big(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}\big) = \mathbb{Q}\big(\{(1, 1)\}\big) = \frac{1}{3} \neq \mathbb{Q}\big(X = 1\big)\, \mathbb{Q}\big(Y = 1\big).$$
Les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

On ne peut que répéter ce qui a été dit dans le chapitre 29. L'indépendance des variables aléatoires est une conséquence du modèle choisi.

p.1504

Exercice 13 Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé. On suppose que X est constante. Étudier l'indépendance de X et Y.

Comme le montre l'exercice suivant, l'indépendance de deux variables de Bernoulli est simple à vérifier.

p.1504

Exercice 14 Deux variables aléatoires X et Y, définies sur le même espace probabilisé, suivant des lois de Bernoulli, sont indépendantes si, et seulement si, les événements $\{X=1\}$ et $\{Y=1\}$ sont indépendants.

Proposition 14

Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathbb{P})$ alors, pour toute fonction f définie sur $X(\Omega)$ et toute fonction g définie sur $Y(\Omega)$, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration page 1505

Exemple Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, pour tous entiers naturels non nuls m et n, les variables X^m et Y^n sont indépendantes.

Fonctions de variables indépendantes

Point méthode

Connaissant la loi de deux variables aléatoires indépendantes X et Y, on peut en déduire la loi de toute variable aléatoire Z fonction de X et Y. Pour tout $z \in Z(\Omega)$, on écrit $\{Z=z\}$ comme réunion d'événements de la forme $\{X=x\} \cap \{Y=y\}$.

p.1505

Exercice 15 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, sur $(\Omega, \mathbb{P})$, telles que $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont inclus dans $\mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall k \in (X+Y)(\Omega) \quad \mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=k-i).$$

p.1505

Exercice 16 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, sur $(\Omega, \mathbb{P})$, suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Déterminer les lois de $X+Y$ et $X-Y$.

2 Indépendance de n variables aléatoires

Définition 15

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ sont dites **indépendantes deux à deux** si, pour tous entiers i et j distincts de $[\![1, n]\!]$, les variables aléatoires X_i et X_j sont indépendantes.

Définition 16

Les variables aléatoires $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$ sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$, à valeurs dans $E_1,\ E_2, \ldots,\ E_n$ respectivement, sont dites **mutuellement indépendantes** si, pour toutes parties A_1 de $E_1, \ \ldots,\ A_n$ de E_n, on a :

$$\mathbb{P}\left(\{X_1 \in A_1\} \cap \ldots \cap \{X_n \in A_n\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

Remarques

1. On dit souvent indépendantes au lieu de mutuellement indépendantes s'il n'y a pas de risque de confusion avec l'indépendance deux à deux.
2. L'indépendance d'un n-uplet de variables aléatoires ne dépend pas de l'ordre de ces variables.

Proposition 15

Les variables aléatoires $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$ sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\{X_1 = x_1\} \cap \ldots \cap \{X_n = x_n\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

Principe de démonstration. Généraliser la démonstration faite pour deux variables (proposition 13 de la page 1474). Démonstration page 1506

Proposition 16

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$, alors toute sous-famille est formée de variables mutuellement indépendantes.

Principe de démonstration. On applique la définition de l'indépendance de $X_1, \ \ldots,\ X_n$, en prenant $A_i = E_i$ si X_i n'appartient pas à la sous-famille. Démonstration page 1507

Corollaire 17

Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont indépendantes deux à deux.

Remarque La réciproque est fausse.

p.1507

Exercice 17 Soit X et Y deux variables indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et $Z = |X - Y|$. Étudier l'indépendance deux à deux et l'indépendance mutuelle des variables X, Y et Z.

Corollaire 18

Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$, à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$ respectivement, sont mutuellement indépendantes, alors, pour toutes parties A_1 de $E_1, \dots,$ A_n de E_n, les événements $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$ sont indépendants.

Démonstration. Si I est une partie non vide de $[\![1, n]\!]$, alors d'après la proposition 16, $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes et par définition :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

Cela montre l'indépendance des événements $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$. □

Remarque Il faut noter que dans la définition de l'indépendance mutuelle des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$, on ne suppose pas l'indépendance mutuelle des événements $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$, car on se limite au cas où $I = [\![1, n]\!]$.

Les propriétés démontrées pour deux variables aléatoires se généralisent à n variables aléatoires.

Proposition 19

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la fonction f_i est définie sur $X_i(\Omega)$, les variables aléatoires $f_1(X_1)$, $f_2(X_2)$, $\dots$, $f_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Démonstration page 1508

Remarque La proposition précédente peut se généraliser à des variables aléatoires fonctions de plusieurs variables aléatoires X_k (pour $1 \leqslant k \leqslant n$). Commençons par traiter un exemple.

Exemple
Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires, mutuellement indépendantes et $1 \leqslant p < n$.

- Les variables aléatoires $(X_1, \dots, X_p)$ et $(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes. En effet, on a, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$:
$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\{(X_1, \dots, X_p) = (x_1, \dots, x_p)\} \cap \{(X_{p+1} \dots, X_n) = (x_{p+1}, \dots, x_n)\}\Big) \\
&\quad = \mathbb{P}\big(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\big) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(X_k = x_k\big) \\
&\quad = \prod_{k=1}^{p} \mathbb{P}(X_k = x_k) \prod_{k=p+1}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k) \\
&\quad = \mathbb{P}\big((X_1, \dots, X_p) = (x_1, \dots, x_p)\big)\mathbb{P}\big((X_{p+1}, \dots, X_n) = (x_{p+1}, \dots, x_n)\big),
\end{aligned}$$
car $X_1, \dots, X_p$ d'une part, $X_{p+1}, \dots, X_n$ d'autre part, sont indépendantes.
- Si f et g sont des fonctions de p variables et $n-p$ variables respectivement telles que $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ soient définies, alors $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes, d'après la proposition 14 de la page 1476. On peut dire, par exemple, que $X_1 + \cdots + X_p$ et $X_{p+1} + \cdots + X_n$ sont indépendantes.

Ce qui précède peut se généraliser à plus de deux fonctions.

Proposition 20 (Lemme des coalitions)

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, $k \in \mathbb{N}^*$, ainsi que I_1, $I_2, \dots$, I_k des sous-ensembles non vides et disjoints de $[\![1, n]\!]$.
Pour tout j entre 1 et k, on considère une variable aléatoire Y_j qui est une fonction des variables X_i pour $i \in I_j$. Alors les variables $Y_1, \dots$, Y_k sont mutuellement indépendantes.

Démonstration. On montre que les k variables $(X_i)_{i \in I_1}, (X_i)_{i \in I_2}, \dots, (X_i)_{i \in I_k}$ sont mutuellement indépendantes, comme dans l'exemple précédent. On en déduit que Y_1, $Y_2, \dots$, Y_n sont mutuellement indépendantes, d'après la proposition 19 de la page 1478. □

Exemple Si X, Y, Z et T sont des variables indépendantes, les variables XY et ZT sont indépendantes, les variables X, $Y+Z$ et T^2 sont indépendantes.

Remarque On peut répéter ce qui a été dit pour les événements indépendants. Un n-uplet de variables indépendantes est un **modèle** pour décrire une succession de n épreuves dont les résultats sont indépendants, en particulier la répétition d'une même épreuve. On obtient alors une n-uplet de variables indépendantes de même loi (on dit aussi **équidistribuée**).
Une suite de n lancers de pile ou face aux résultats indépendants sera décrite par une n-uplet $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variables de Bernoulli indépendantes où X_k représente le résultat de la k-ième épreuve.

3 Somme de variables indépendantes suivant une loi binomiale

La propriété démontrée dans le théorème suivant est appelée **stabilité** de la loi binomiale pour la somme.

Théorème 21

1. Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathbb{P})$, suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (m, p) et (n, p), alors la somme $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(m + n, p)$.
2. Plus généralement, si X_1, X_2, …, X_k (où $k \in \mathbb{N}^*$) sont des variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathbb{P})$ telles que X_i suive une loi binomiale de paramètre (n_i, p), pour tout i de $[\![1, k]\!]$, alors la variable $X_1 + \cdots + X_k$ suit une loi binomiale de paramètre $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\right)$.

Principe de démonstration. Pour le premier point, utiliser le résultat de l'exercice 15 de la page 1476. Ensuite, raisonner par récurrence. Démonstration page 1508

Corollaire 22

Si X_1, …, X_k sont des variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathbb{P})$ qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $X_1 + \cdots + X_k$ suit la loi binomiale de paramètre (k, p).

Démonstration. On applique le théorème précédent, en remarquant que la loi de Bernoulli de paramètre p est la loi binomiale de paramètre $(1, p)$. □

p.1509 **Exercice 18** Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans E et x un élément de E. On note N_x la variable aléatoire égale à $\operatorname{card}\{k \in [\![1, n]\!] \mid X_k = x\}$, c'est-à-dire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega \quad N_x(\omega) = \operatorname{card}\,\{k \in [\![1, n]\!] \mid X_k(\omega) = x\}.$$

Déterminer la loi de N_x.

IV Espérance d'une variable aléatoire

1 Définition

Définition 17

L'**espérance** d'une variable aléatoire réelle X définie sur Ω est le réel :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x).$$

Remarques

1. L'espérance est la moyenne des valeurs prises par X pondérées par la probabilité que X prenne cette valeur. Certains auteurs parlent d'ailleurs de moyenne au lieu d'espérance.
   On peut aussi dire que c'est la valeur que l'on attend en moyenne quand on réalise l'expérience aléatoire. Si l'expérience consiste par exemple à tirer des boules dans une urne, on pourra se voir demander : quel est le nombre moyen de boules rouges tirées ? La réponse attendue est l'espérance de la variable aléatoire qui représente le nombre de boules rouges tirées. Pour un jeu, l'espérance est le gain moyen.
2. Il résulte de la définition que l'espérance d'une variable aléatoire ne dépend que de sa loi : deux variables aléatoires réelles de même loi ont même espérance.

Exemple Deux dés sont lancés. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres apparus. La loi de X a été déterminée page 1460. On obtient

$$\mathbb{E}(X) = 2\frac{1}{36} + 3\frac{1}{18} + 4\frac{1}{12} + 5\frac{1}{9} + 6\frac{5}{36} + 7\frac{1}{6} + 8\frac{5}{36} + 9\frac{1}{9} + 10\frac{1}{12} + 11\frac{1}{18} + 12\frac{1}{36} = 7.$$

p.1509 **Exercice 19** Un joueur prélève n boules simultanément dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. La loi de la variable aléatoire X égale au plus grand numéro tiré a été déterminée dans l'exercice 4 de la page 1461. Calculer l'espérance de X.
On utilisera l'égalité $k\binom{k-1}{n-1} = n\binom{k}{n}$ et la formule de Pascal généralisée (*cf.* exercice 22 de la page 1380).

2 Espérance des lois usuelles

Proposition 23

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Pour tout réel a, l'espérance de la variable aléatoire réelle certaine égale à a est a.

Démonstration page 1509

Proposition 24

Si la variable aléatoire X suit la uniforme sur $[\![1, n]\!]$, alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}\cdot$

Démonstration page 1509

p.1509 **Exercice 20** Soit a et b des entiers tels que $a \leqslant b$.

Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.

Proposition 25

Si la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\mathbb{E}(X) = p$.

En particulier, pour tout événement A, l'espérance de la variable indicatrice de A est égale à $\mathbb{P}(A)$.

Démonstration page 1509

Proposition 26

Si la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre (n,p), alors $\mathbb{E}(X) = np$.

Démonstration page 1509

3 Propriétés de l'espérance

La formule suivante, peu utilisée dans la pratique, permet des démonstrations très simples des propriétés de l'espérance.

Lemme 27

Si X une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, son espérance est donnée par la formule suivante :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega).$$

Principe de démonstration. On regroupe les termes de la somme selon la valeur de $X(\omega)$.

Démonstration page 1510

Linéarité

Théorème 28 (Linéarité de l'espérance)

L'application qui, à une variable aléatoire réelle, associe son espérance est une forme linéaire. Autrement dit, si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$, et λ un réel, on a :

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X).$$

Démonstration page 1510

Corollaire 29

Si X est une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini et (a,b) un couple de réels, on a $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Démonstration page 1510

Point méthode

Le théorème 28 est très utile pour calculer l'espérance d'une variable dont on ne connaît pas la loi ou dont la loi a une expression compliquée, mais qu'on peut décomposer en somme de variables aléatoires dont on sait calculer l'espérance, qui sont le plus souvent des variables indicatrices.

Exemple
Une urne contient N boules dont b blanches. On tire simultanément n boules dans l'urne ($1 \leqslant n \leqslant N$) et l'on considère la variable aléatoire X égale au nombre de boules blanches obtenues. On veut déterminer l'espérance de X.

On choisit comme espace probabilisé l'ensemble des parties à n éléments de l'ensemble des boules, muni de la probabilité uniforme. On numérote (mentalement) les boules blanches et, pour $1 \leqslant i \leqslant b$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i-ème boule blanche fait partie des n boules tirées et 0 sinon. Son espérance est :

$$\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N}\cdot$$

En effet, le nombre total de tirages est $\displaystyle\binom{N}{n}$ et le nombre de cas favorables est $\displaystyle\binom{N-1}{n-1}$, car on tire la i-ème boule blanche accompagnée de $n-1$ autres boules (prises parmi les $N-1$ autres boules). Il est clair que $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{b} X_i$. On en déduit :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{b} \mathbb{E}(X_i) = \frac{nb}{N}\cdot$$

p.1510

Exercice 21 (Problème des rencontres)
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les extrait successivement sans remise. On dit qu'il y a rencontre au i-ème tirage si la boule tirée porte le numéro i. Déterminer le nombre moyen de rencontres.

p.1510

Exercice 22 Soit n et r deux entiers naturels non nuls. On considère r boules et n tiroirs. On place au hasard chacune des r boules dans l'un des n tiroirs. On note V la variable aléatoire égale au nombre de tiroirs restés vides ; on fixe un tiroir et on note T la variable aléatoire égale au nombre de boules placées dans ce tiroir. Déterminer l'espérance des variables T et V.

Définition 18

Toute variable aléatoire réelle d'espérance nulle est dite **centrée**.

Proposition 30

Pour toute variable aléatoire réelle X, la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est une variable aléatoire centrée appelée **variable aléatoire centrée associée à $\boldsymbol{X}$**.

Démonstration. Notons que $\mathbb{E}(X)$ est un réel que l'on considère comme la variable aléatoire constante $\omega \mapsto \mathbb{E}(X)$; celle-ci a pour espérance $\mathbb{E}(X)$. D'après le corollaire 29 de la page 1482 :

$$\mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X)\big) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0. \qquad \square$$

Positivité de l'espérance

Proposition 31 (Positivité)

Soit X une variable aléatoire réelle positive ou nulle sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors on a :

1. $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$;
2. de plus, $\mathbb{E}(X) = 0$ si, et seulement si, $\mathbb{P}(X = 0) = 1$; on dit, dans ce cas, que la variable X est **presque sûrement nulle**.

Démonstration page 1511

Remarque Si $\mathbb{E}(X) = 0$, on ne peut pas assurer que $X = 0$, car un événement peut être différent de $\varnothing$ et avoir une probabilité nulle (une probabilité est une application de Ω dans $[0,1]$). Cependant, dans un univers fini, une variable aléatoire presque sûrement nulle sera souvent nulle.

Proposition 32 (Croissance de l'espérance)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Si $X \leqslant Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Démonstration. Par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}(Y - X) = \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)$. La variable aléatoire $Y - X$ est positive donc, d'après la proposition 31, $\mathbb{E}(Y - X) \geqslant 0$, d'où $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$. □

Théorème 33 (Inégalité de Markov)

Toute variable aléatoire réelle positive X sur un espace probabilisé fini vérifie l'inégalité :

$$\forall a > 0 \quad \mathbb{P}(\{X \geqslant a\}) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Principe de démonstration. Comparer les variables aléatoires $\mathbb{1}_{\{X \geqslant a\}}$ et $\dfrac{X}{a}$.

Démonstration page 1511

4 Théorème de transfert

Théorème 34

Si X est une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ et u une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, l'espérance de $u(X)$ est donnée par :

$$\mathbb{E}\big(u(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} u(x)\, \mathbb{P}(X = x).$$

Principe de démonstration. Utiliser l'expression de la loi de $u(X)$ déterminée dans la proposition 7 de la page 1463.

Démonstration page 1511

p.1512

Exercice 23 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Déterminer l'espérance de $(X-1)^2$ et de $\exp(X)$.

Remarque L'intérêt de la formule de transfert est qu'elle permet le calcul de l'espérance de $u(X)$ sans qu'il y ait besoin de déterminer sa loi. Il suffit de connaître celle de X.

L'expression de l'espérance d'un produit de variables aléatoires est une conséquence de la formule de transfert.

Proposition 35

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur le même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. On a alors :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\,\mathbb{P}(X=x, Y=y).$$

Principe de démonstration. Écrire $XY = u(Z)$, où $Z = (X,Y)$ et u est l'application $(x,y) \mapsto xy$, et utiliser la formule de transfert. Démonstration page 1512

Exemple Si X et Y sont deux variables de Bernoulli, XY est encore une variable de Bernoulli et :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{P}(XY=1) = \mathbb{P}(\{X=1\} \cap \{Y=1\}).$$

5 Espérance du produit de deux variables indépendantes

Théorème 36

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles, indépendantes, sur le même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. On a alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.

Principe de démonstration. Utiliser la proposition 35. Démonstration page 1512

Cette propriété peut se généraliser à n variables aléatoires indépendantes.

p.1513

Exercice 24 Démontrer que si X_1, $X_2, \ldots,$ X_n sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes sur le même espace probabilisé, alors :

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k).$$

V Variance

1 Définition

Définition 19

Soit X une variable aléatoire réelle et r un entier naturel.
Le **moment d'ordre r** de X est le réel $m_r(X) = \mathbb{E}(X^r)$.

Remarque Le moment d'ordre 0 est égal à 1, celui d'ordre 1 est l'espérance.

Proposition 37

Si X est une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et r un entier naturel, on a $m_r(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r \mathbb{P}(X = x)$.

Démonstration. Cela résulte du théorème de transfert. □

Définition 20

On appelle **variance** d'une variable aléatoire X le réel :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big).$$

Remarque L'expression $(X - \mathbb{E}(X))^2$ est bien une variable aléatoire, car $\mathbb{E}(X)$ désigne ici la variable aléatoire constante égale à $\mathbb{E}(X)$.

Proposition 38

Si X est une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, on a :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2\, \mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration. Cela résulte du théorème de transfert. □

Exemple Notons X la variable aléatoire égale à la somme des nombres apparus lors du lancer de deux dés. La loi de X a été déterminée page 1460. On a $\mathbb{E}(X) = 7$ d'après l'exemple de la page 1481. Alors :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big) = \sum_{k=2}^{12} (k-7)^2 \mathbb{P}\big(X = k\big) = \frac{35}{6}\cdot$$

Remarques

1. La variance est l'espérance du carré de la distance entre les valeurs de X et l'espérance de X. La variance est donc une **mesure de la dispersion** de X par rapport à $\mathbb{E}(X)$.
2. On aurait pu songer à prendre $\mathbb{E}\big(|X - \mathbb{E}(X)|\big)$ comme paramètre de dispersion, mais la valeur absolue donne des calculs beaucoup moins agréables que le carré.

Exemple La variance d'une variable constante est nulle. En effet, si la variable X est constante égale à a, on a $\mathbb{E}(X) = a$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X-a)^2\right) = \mathbb{E}(0) = 0$. Les valeurs prises par X ne sont pas du tout dispersées !

p.1513 **Exercice 25** Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

1. On tire 3 boules de l'urne successivement, avec remise. On note X le nombre de boules blanches obtenues. Déterminer l'espérance et la variance de X.
2. On tire 3 boules dans l'urne simultanément. On note Y le nombre de boules blanches obtenues. Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Comparer les résultats obtenues. Commenter.

Proposition 39 (Formule de Kœnig-Huygens)

Soit X une variable aléatoire réelle X sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. La variance de X est donnée par la formule :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Démonstration page 1513

Point méthode

Dans la quasi-totalité des cas, on utilise la formule de Kœnig-Huygens pour calculer une variance et non la définition qui entraîne des calculs compliqués.

p.1514 **Exercice 26** Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \lambda k$.
Déterminer λ, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

p.1514 **Exercice 27** Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini. Déterminer le minimum de la fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ m & \longmapsto & \mathbb{E}((X-m)^2). \end{array}$

Remarque La formule de Kœnig-Huygens peut être aussi utilisée pour calculer $\mathbb{E}(X^2)$ quand on connaît l'espérance et la variance de X.

p.1514 **Exercice 28** Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes définies sur le même espace probabilisé, toutes d'espérance m et de variance 1.

Déterminer l'espérance et la variance de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$.

2 Variance des lois usuelles

Proposition 40

Si la variable X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, alors $\mathbb{V}(X)=\dfrac{n^2-1}{2}\cdot$

Démonstration page 1514

Proposition 41

Si la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\mathbb{V}(X)=p\,(1-p)$.

Démonstration page 1515

p.1515

Exercice 29

Quelle est la valeur maximale de la variance d'une variable de Bernoulli ?

Proposition 42

Si la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre (n,p), alors $\mathbb{V}(X)=np(1-p)$.

Principe de démonstration. Commencer par calculer $\mathbb{E}\big(X(X-1)\big)$.

Démonstration page 1515

Point méthode

Comme on l'a vu dans le calcul de la variance de la loi binomiale, il est parfois nécessaire, plutôt que de calculer directement $\mathbb{E}(X^2)$, de calculer d'abord $\mathbb{E}(X(X+1))$ ou $\mathbb{E}(X(X-1))$ et d'en tirer $\mathbb{E}(X^2)$ par linéarité.

Exemple On tire simultanément n boules dans une urne en contenant N numérotées de 1 à N. On considère la variable aléatoire réelle finie X égale au plus grand des numéro tirés. La loi de X, déterminée page 1461 est :

$$\forall k\in[\![n,N]\!]\quad \mathbb{P}\big(X=k\big)=\frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}\cdot$$

Nous avons déjà montré page 1481 que $\mathbb{E}(X)=\dfrac{n(N+1)}{n+1}\cdot$

Pour calculer $\mathbb{E}(X)$, nous avons écrit $k\dbinom{k-1}{n-1}=n\dbinom{k}{n}$ et sorti n de la somme. Pour calculer $\mathbb{E}(X^2)$, il faut sommer $k^2\dbinom{k-1}{n-1}=nk\dbinom{k}{n}$. On calcule d'abord $\mathbb{E}\big(X(X+1)\big)$ car on peut écrire :

$$k(k+1)\binom{k-1}{n-1} = n(k+1)\binom{k}{n} = n(n+1)\binom{k+1}{n+1}.$$

La formule de transfert donne :

$$\begin{aligned} E\big(X(X+1)\big) &= \sum_{k=n}^{N} \frac{k(k+1)\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \sum_{k=n}^{N} \frac{n(n+1)\binom{k+1}{n+1}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{n(n+1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} \binom{k+1}{n+1} = \frac{n(n+1)}{\binom{N}{n}} \sum_{j=n+1}^{N+1} \binom{j}{n+1}. \end{aligned}$$

De la formule de Pascal généralisée (*cf.* exercice 22 de la page 1380) on déduit :

$$E\big(X(X+1)\big) = n(n+1)\frac{\binom{N+2}{n+2}}{\binom{N}{n}} = \frac{n(n+1)(N+1)(N+2)}{(n+1)(n+2)}.$$

On obtient alors :

$$\mathbb{E}(X^2) = E\big(X(X+1)\big) - \mathbb{E}(X) = \frac{n(n+1)(N+1)(N+2)}{(n+1)(n+2)} - \frac{n(N+1)}{n+1},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \frac{n(n+1)(N+1)(N+2)}{(n+1)(n+2)} - \frac{n(N+1)}{n+1} - \frac{n^2(N+1)^2}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n(N+1)(N-n)}{(n+1)^2(n+2)}. \end{aligned}$$

3 Propriétés de la variance

Proposition 43

- Pour toute variable aléatoire réelle X, on a $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$.
- On a $\mathbb{V}(X) = 0$ si, et seulement s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = m) = 1$, c'est-à-dire si, et seulement si, X est presque sûrement constante.

Démonstration page 1515

Proposition 44

Si (a, b) est un couple de réels et X une variable aléatoire réelle, on a :

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\, \mathbb{V}(X).$$

Démonstration page 1515

p.1516 **Exercice 30** Soit a et b des entiers tels que $a \leqslant b$. Déterminer la variance d'une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$, en utilisant la variance de la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

4 Écart-type

Définition 21

L'**écart-type** d'une variable aléatoire réelle X est le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Remarque On prend la racine carrée de la variance pour des raisons d'homogénéité ; ainsi, l'écart-type s'exprime dans les mêmes unités que les valeurs prises par la variable aléatoire.

Définition 22

Une variable aléatoire réelle X telle que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$ est dite **centrée réduite**.

Proposition 45

Si X est une variable aléatoire réelle dont la variance n'est pas nulle, la variable aléatoire $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite, appelée **variable aléatoire centrée réduite associée à $\boldsymbol{X}$**.

Démonstration page 1516

5 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 46 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Toute variable aléatoire réelle X vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}\cdot$$

Principe de démonstration. Utiliser l'inégalité de Markov (théorème 33 de la page 1484).

Démonstration page 1516

Remarques

1. Comme $\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}$ est l'événement contraire de $\{|X - \mathbb{E}(X)| < \varepsilon\}$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev peut encore s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| < \varepsilon\big) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}\cdot$$

2. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev tend à montrer que la variable aléatoire X prend des valeurs proches de $\mathbb{E}(X)$ avec une grande probabilité, mais elle donne, en général, une majoration assez grossière. Son intérêt est surtout théorique. On remarque en particulier que si ε est trop petit, on a $\dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} > 1$, ce qui enlève tout intérêt à l'inégalité.

VI Covariance

1 Définition, calcul

Définition 23

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur le même espace probabilisé fini. On appelle **covariance** de X et Y, ou du couple (X,Y), le réel noté $\operatorname{Cov}(X,Y)$ défini par :

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big).$$

Remarques

1. Cette définition a un sens car $\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)$ est une variable aléatoire réelle.
   C'est la variable $u(X,Y)$, où $u : (x,y) \longmapsto \big(x - \mathbb{E}(X)\big)\big(y - \mathbb{E}(Y)\big)$.
2. La covariance de X et Y est l'espérance du produit des variables centrées associées à X et Y.

Proposition 47 (Formule de Kœnig-Huygens)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles X et Y sur le même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. La covariance du couple (X,Y) est donnée par la formule :

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).$$

Démonstration page 1516

p.1516 **Exercice 31** Que vaut $\operatorname{Cov}(X,Y)$ si la variable X est constante ?

Remarque La proposition 35 de la page 1485 indique comment calculer $\mathbb{E}(XY)$ à partir de la loi conjointe de X et Y.

p.1516 **Exercice 32** Soit un entier $n \geqslant 2$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne k, il y a k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et dans celle-ci, on pioche une boule au hasard. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Déterminer la covariance du couple (X,Y).

2 Propriétés de la covariance

Théorème 48

Soit X, X', Y et Y' des variables aléatoires réelles sur le même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ et λ un réel. On a :

1. $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathbb{V}(X) \geqslant 0$;
2. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$;
3. $\mathrm{Cov}(X+X',Y) = \mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(X',Y)$, $\mathrm{Cov}(\lambda X,Y) = \lambda\mathrm{Cov}(X,Y)$;
4. $\mathrm{Cov}(X,Y+Y') = \mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(X,Y')$, $\mathrm{Cov}(X,\lambda Y) = \lambda\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Autrement dit, l'application $(X,Y) \longmapsto \mathrm{Cov}(X,Y)$ est une forme bilinéaire, symétrique et positive sur l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

Démonstration page 1517

Remarques

1. L'application $(X,Y) \mapsto \mathrm{Cov}(X,Y)$ n'est pas un produit scalaire, car $\mathbb{V}(X) = 0$ n'implique pas $X = 0$. En effet, $V(X) = 0$ équivaut à X est presque sûrement constante (*cf.* proposition 43 page 1489).
2. L'utilisation de la bilinéarité peut éviter des calculs de covariance souvent pénibles.

Exemple Si X et Y sont deux variables aléatoires sur le même espace probabilité, a et b deux réels, on a :

$$\mathrm{Cov}(X+a,Y+b) = \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(a,Y) + \mathrm{Cov}(X,b) + \mathrm{Cov}(a,b) = \mathrm{Cov}(X,Y),$$

car la covariance est nulle si l'une des variables aléatoires est constante (*cf.* exercice 31 de la page précédente).

p.1518 **Exercice 33** On reprend le problème des tiroirs abordé dans l'exercice 22 de la page 1483. Déterminer la covariance de V et T.

Théorème 49

Soit (X,Y) est un couple de variables aléatoires réelles. On a :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Plus généralement, on a, pour tout couple de réels (a,b) :

$$\mathbb{V}(aX+bY) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Démonstration page 1518

Remarque

Cette formule permet aussi de calculer la covariance du couple (X,Y) connaissant $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\mathbb{V}(X+Y)$.

p.1518

Exercice 34 Une urne contient des boules blanches, noires et rouges, la proportion de boules blanches (resp. noires, resp. rouges) étant p_1 (resp. p_2, resp. p_3). On extrait n boules de l'urne, avec remise. On note X (resp. Y, resp. Z) le nombre de boules blanches (resp. noires, resp. rouges) obtenues. Déterminer la covariance du couple (X,Y).

Le théorème précédent se généralise au cas de n variables aléatoires et se démontre par une récurrence immédiate.

Théorème 50

Pour toute famille $(X_1,\dots,X_n)$ de n variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini, la variance de $X_1+\cdots+X_n$ est donnée par

$$\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\operatorname{Cov}(X_i,X_j).$$

p.1519

Exercice 35 On reprend le problème des rencontres traité, dans l'exercice 21 de la page 1483. On note toujours X le nombre de rencontres. On a calculé $\mathbb{E}(X)$. Déterminer $\mathbb{V}(X)$.

Théorème 51

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathbb{P})$, on a :

$$|\operatorname{Cov}(X,Y)|\leqslant\sigma(X)\sigma(Y).$$

Si $\sigma(X)\neq 0$, l'égalité $|\operatorname{Cov}(X,Y)|=\sigma(X)\sigma(Y)$ est obtenue si, et seulement s'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\mathbb{P}(Y=aX+b)=1$, c'est-à-dire $Y=aX+b$ presque sûrement.

Principe de démonstration. Démonstration page 1519

Si $\sigma(X)\neq 0$, considérer la fonction polynomiale $\lambda\mapsto\mathbb{V}(\lambda X+Y)$.

Remarques

1. La démonstration est quasiment identique à celle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour un produit scalaire (*cf.* proposition 1 de la page 1290).

2. Si $\sigma(X)\neq 0$ et s'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $Y=aX+b$, presque sûrement, alors on a $\operatorname{Cov}(X,Y)=\operatorname{Cov}(X,aX+b)=a\mathbb{V}(X)$. Le signe de $\operatorname{Cov}(X,Y)$ est le signe de a et indique si Y est une fonction croissante ou décroissante de X.

3. Lorsque $\mathbb{V}(X) \neq 0$ et $\mathbb{V}(Y) \neq 0$, le réel $\dfrac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$, qui appartient à $[-1,1]$, s'appelle le coefficient de corrélation de X et Y. Les valeurs extrêmes ± 1 du coefficient de corrélation correspondent au cas où l'une des variable est une fonction affine de l'autre.

3 Cas de variables indépendantes

Théorème 52

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles, indépendantes, sur le même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. On a alors :

1. $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$;
2. $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Démonstration. Cela découle immédiatement du théorème 36 de la page 1485.
De $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$, on déduit en effet $\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$ puis :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y). \qquad \square$$

Remarque Dans le cas où les variables sont indépendantes, $|\operatorname{Cov}(X,Y)|$ est minimale, c'est-à-dire nulle. On a vu précédemment que si X et Y sont liés par une relation affine, $|\operatorname{Cov}(X,Y)|$ est maximale et vaut $\sigma(X)\sigma(Y)$. La covariance mesure, en quelque sorte, le « degré d'indépendance » des variables aléatoires X et Y.
On peut calculer la covariance de variables aléatoires s'exprimant en fonctions de variables aléatoires indépendantes, en utilisant la bilinéarité de la covariance.

p.1520 **Exercice 36** On considère trois variables aléatoires mutuellement indépendantes X, Y, Z, suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. Déterminer la covariance du couple $(X+Y, Y+Z)$ et celle du couple (XY, YZ).

p.1520 **Exercice 37** On considère une suite de N lancers de pile ou face indépendants, la probabilité d'obtenir pile étant $p \in\,]0,1[$. Pour $n \in [\![1,N]\!]$, on note S_n le nombre de piles obtenus lors des n premiers lancers. Calculer la covariance de (S_m, S_n) pour m et n dans $[\![1,N]\!]$.

Définition 24

Si deux variables aléatoires réelles vérifient $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$, on dit qu'elles sont **non corrélées**.

Proposition 53

Deux variables aléatoires réelles sur le même espace probabilisé fini, indépendantes, sont non corrélées.

Démonstration. Cela résulte de la définition et du théorème 52. $\square$

La réciproque est fausse. Deux variables non corrélées ne sont pas nécessairement indépendantes.

Exemple Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{-1,0,1\}$ et Y la variable aléatoire indicatrice de l'événement $\{X=0\}$:

- les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes, car :
$$\mathbb{P}\big(\{X=1\}\cap\{Y=1\}\big)=\mathbb{P}\big(\{X=1\}\cap\{X=0\}\big)=0$$
alors que $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(Y=1)=\dfrac{1}{3}$ et donc $\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)\neq 0$;
- les variables X et Y sont non corrélées, car $XY=0$, donc $\mathbb{E}(XY)=0$; de plus, $\mathbb{E}(X)=0$, donc $\operatorname{Cov}(X,Y)=0$.

Comme le montre l'exercice suivant, les variables de Bernoulli constituent une exception agréable.

p.1521 **Exercice 38** En utilisant le résultat de l'exercice 14 de la page 1476, démontrer que deux variables de Bernoulli sont indépendantes si, et seulement si, elles sont non corrélées.

Les propriétés énoncées dans le théorème 36 de la page 1485 se généralisent à plusieurs variables.

Théorème 54

Pour toute famille $(X_1,\dots,X_n)$ de n variables aléatoires réelles sur le même espace probabilisé fini, deux à deux indépendantes, on a :
$$\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k).$$

Démonstration page 1521

Remarques

1. La propriété est vérifiée en particulier si les variables sont mutuellement indépendantes.
2. Cette formule montre de nouveau l'intérêt de décomposer une variable aléatoire en somme de variables aléatoires indépendantes plus simples.
3. Sous les mêmes hypothèses, on a, pour tous réels a_1, a_2, …, a_n :
$$\mathbb{V}(a_1X_1+\cdots+a_nX_n)=\sum_{k=1}^{n}a_k^2\,\mathbb{V}(X_k),$$
d'après la proposition 44 de la page 1489.

Variance d'une loi binomiale

On sait (par le théorème 21 de la page 1480) que, si X_1, …, X_n sont des variables indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, alors $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$ suit la loi binomiale de paramètre (n,p). Pour $i\in[\![1,n]\!]$, la variance de X_i est $p(1-p)$. On en déduit que $\mathbb{V}(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i)=np(1-p)$.

On retrouve le résultat déjà établi par des calculs directs pénibles.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

1. On peut prendre pour Ω l'ensemble des parties à n éléments de l'ensemble des N boules. On a donc $\operatorname{card}(\Omega) = \binom{N}{n}$.
2. On a $X(\Omega) = [\![n, N]\!]$, car la plus petite valeur prise par X est obtenue quand les n boules tirées portent les numéros $1, \ldots, n$ et la plus grande, quand la boule numérotée N fait partie des boules tirées.
   On a de même $Y(\Omega) = [\![1, N-n+1]\!]$, car la plus petite valeur prise par Y est obtenue quand la boule numérotée 1 fait partie des boules tirées et la plus grande, quand les n boules tirées portent les numéros N, $N-1$, …, $N-n+1$.

Exercice 2 On a :

$$\{X \in A \cup B\} = X^{-1}(A \cup B) = X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B) = \{X \in A\} \cup \{X \in B\}$$

$$\{X \in A \cap B\} = X^{-1}(A \cap B) = X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B) = \{X \in A\} \cap \{X \in B\}$$

$$\{X \in E \setminus A\} = X^{-1}(E \setminus A) = \Omega \setminus X^{-1}(A) = \overline{\{X \in A\}}.$$

Proposition 1 En effet, on a :

$$\{X \in A\} = X^{-1}(A) = X^{-1}\big(A \cap X(\Omega)\big) = \bigcup_{x \in A \cap X(\Omega)} X^{-1}(\{x\}) = \bigcup_{x \in A \cap X(\Omega)} \{X = x\}.$$

Exercice 3

1. On peut représenter chaque issue par un couple d'éléments de $[\![1,6]\!]$, et ainsi $\Omega = [\![1,6]\!]^2$. Alors X est une variable aléatoire sur Ω et $X(\Omega) = [\![2,12]\!]$.
2. On obtient :

$$\begin{aligned}
\{X = 7\} &= \{(i,j) \in \Omega \mid i+j = 7\} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\},\\
\{X \leqslant 4\} &= \{(i,j) \in \Omega \mid i+j \leqslant 4\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\},\\
\{8{,}5 \leqslant X \leqslant 10{,}1\} &= \{X = 9\} \cup \{X = 10\}\\
&= \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),(4,6),(5,5),(6,4)\}.
\end{aligned}$$

Proposition 2

- Par définition, $\{X = x\}$ est un événement pour tout $x \in X(\Omega)$.
- Si x et x' sont deux éléments de $X(\Omega)$, distincts, les événements $\{X = x\}$ et $\{X = x'\}$ sont incompatibles, car pour tout $\omega \in \Omega$, la relation $\omega \in \{X = x\}$ équivaut à $X(\omega) = x$.
- On a enfin :

$$\bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\} = \Omega$$

car, pour tout $\omega \in \Omega$, si $X(\omega) = x$, alors ω appartient à $\{X = x\}$.

Théorème 3

- L'application $\mathbb{P}_X$ est définie sur $\mathcal{P}\big(X(\Omega)\big)$ et à valeurs dans $[0,1]$.
- On a, par définition, $\{X \in X(\Omega)\} = \Omega$ donc $\mathbb{P}_X\left(X(\Omega)\right) = 1$.
- Si A et B sont deux parties disjointes de $X(\Omega)$, alors :

$$\{X \in A\} \cap \{X \in B\} = \varnothing \quad \text{et} \quad \{X \in A\} \cup \{X \in B\} = \{X \in A \cup B\}.$$

Les événements $\{X \in A\}$ et $\{X \in B\}$ étant incompatibles,

$$\mathbb{P}_X(A \cup B) = \mathbb{P}\left(X \in A \cup B\right) = \mathbb{P}\left(X \in A\right) + \mathbb{P}\left(X \in B\right) = \mathbb{P}_X(A) + \mathbb{P}_X(B).$$

Exercice 4 On a $X(\Omega) = [\![n, N]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1, N-n+1]\!]$.

1. L'événement $\{X = k\}$ est « la boule numérotée k est tirée et les $n-1$ autres boules portent des numéros compris entre 1 et $k-1$ ». Pour les boules ne portant pas le numéro k, on a $\dbinom{k-1}{n-1}$ possibilités. On obtient $\operatorname{card}\left(\{X = k\}\right) = \dbinom{k-1}{n-1}\cdot$

   Comme $\operatorname{card}(\Omega) = \dbinom{N}{n}$, on en déduit, pour tout $k \in [\![n, N]\!]$:

$$\mathbb{P}\left(X = k\right) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}\cdot$$

2. De même, $\{Y = k\}$ est l'événement « la boule portant le numéro k est tirée et les $n-1$ autres boules portent des numéros compris entre $k+1$ et N ». Comme il y a $N-k$ numéros de $k+1$ à N, on obtient $\operatorname{card}\left(\{Y = k\}\right) = \dbinom{N-k}{n-1}\cdot$

   On en déduit, pour tout $k \in [\![1, N-n+1]\!]$:

$$\mathbb{P}\left(Y = k\right) = \frac{\binom{N-k}{n-1}}{\binom{N}{n}}\cdot$$

Théorème 5 On note n le cardinal de Ω et ω_1, ω_2, ..., ω_n les éléments de Ω.

- D'après le théorème 6 de la page 1409, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur l'univers Ω telle que :

$$\forall i \in [\![1, m]\!] \quad \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![m+1, n]\!] \quad \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 0.$$

En effet, les p_i sont positifs ou nuls et de somme égale à 1.

- Soit X l'application de Ω dans IR définie par :

$$\forall i \in [\![1, m]\!] \quad X(\omega_i) = x_i \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![m+1, n]\!] \quad X(\omega_i) = x_m.$$

Alors X est une variable aléatoire réelle sur Ω telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Pour tout $i \in [\![1, m-1]\!]$, on a $\{X = x_i\} = \{\omega_i\}$ donc $\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$, et :

$$\mathbb{P}(X = x_m) = \mathbb{P}\left(\{\omega_n, \omega_{n+1}, \ldots, \omega_m\}\right) = \sum_{i=m}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_m.$$

La variable aléatoire X a les propriétés voulues.

Exercice 5 Il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0,5]\!]$ telle que l'on ait $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in [\![0,5]\!]$ si, et seulement si, les p_k sont positifs de somme 1. Si la suite $(p_k)_{0 \leqslant k \leqslant 5}$ est arithmétique de raison r, alors :

$$\sum_{k=0}^{5} p_k = \frac{6(p_0+p_5)}{2} = 3(p_0+p_5) = 6p_0 + 15r.$$

On doit avoir $6p_0 + 15r = 1$ et $p_0 + 2r = p_2$. On obtient $r = \dfrac{1-6p_2}{3}$ et $p_0 = \dfrac{15p_2 - 2}{3}\cdot$

Comme (p_k) est monotone, les p_k sont tous positifs si, et seulement si, $p_0 \geqslant 0$ et $p_5 = p_0 + 5r = 1 - 5p_2 \geqslant 0$. Il faut donc prendre p_2 dans $\left[\dfrac{2}{15}, \dfrac{1}{5}\right]$.

Proposition 6 Pour tout entier relatif k, on a $\{X \leqslant k-1\} \subset \{X \leqslant k\}$ et :

$$\{X = k\} = \{X \leqslant k\} \setminus \{X \leqslant k-1\}.$$

On en déduit que $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1)$.

La deuxième égalité s'obtient de même, à partir de :

$$\{X \geqslant k+1\} \subset \{X \geqslant k\} \quad \text{et} \quad \{X = k\} = \{X \geqslant k\} \setminus \{X \geqslant k+1\}.$$

Exercice 6

1. Un résultat possible est un n-uplet $(k_1, \ldots, k_n)$ d'entiers entre 1 et N, où k_i est le numéro de la boule obtenue au i-ième tirage : on choisit donc $\Omega = [\![1,N]\!]^n$, que l'on munit de la probabilité uniforme. On tire avec remise, donc X et Y peuvent prendre toutes les valeurs entre 1 et N, donc $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1,N]\!]$.

2. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, l'événement $\{X \leqslant k\}$ est l'événement « les n boules sont tirées parmi les boules numérotées de 1 à k », qui s'identifie à $[\![1,k]\!]^n$ et est de cardinal k^n. On obtient $\mathbb{P}(X \leqslant k) = \dfrac{k^n}{N^n}\cdot$

   Cela reste vrai pour $k = 0$, car $\{X \leqslant 0\} = \varnothing$.

   On en déduit, pour tout $k \in [\![1,N]\!]$:

   $$\mathbb{P}\big(X = k\big) = \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1) = \frac{k^n}{N^n} - \frac{(k-1)^n}{N^n}\cdot$$

3. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, l'événement $\{Y \geqslant k\}$ est l'événement « les n boules sont tirées parmi les boules numérotées de k à N », qui s'identifie à $[\![k,N]\!]^n$ et est de cardinal $(N-k+1)^n$. On obtient $\mathbb{P}(Y \geqslant k) = \dfrac{(N-k+1)^n}{N^n}\cdot$

   Cela reste vrai pour $k = N+1$, car $\{Y \geqslant N+1\} = \varnothing$.

   On en déduit que, pour tout $k \in [\![1,N]\!]$:

   $$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y \geqslant k) - \mathbb{P}(Y \geqslant k+1) = \frac{(N-k+1)^n}{N^n} - \frac{(N-k)^n}{N^n}\cdot$$

4. La méthode directe utilisée dans l'exercice 4 est difficile à mettre en œuvre ici, car les événements $\{X = k\}$ et $\{Y = k\}$ ne sont pas simples à décrire. Par exemple, l'événement $\{X = k\}$ est réalisé si au moins un des numéros tirés est k, les autres étant inférieurs ou égaux à k. Il faudrait le décomposer en une union d'événements A_i (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) : « on a tiré i fois le numéro k, les $n-i$ autres numéros étant inférieurs ou égaux à $k-1$ ». Le lecteur pourra néanmoins constater que cette méthode conduit (heureusement) au même résultat.

Proposition 7 L'image de la variable aléatoire $u(X)$ est $u(X)(\Omega) = u(X(\Omega))$. Pour tout $y \in u(X)(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}\{u(X) = y\} &= \{\omega \in \Omega \mid u(X(\omega)) = y\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in u^{-1}(\{y\})\}\\ &= \big\{X \in u^{-1}(\{y\})\big\} = \bigcup_{x \in u^{-1}(\{y\})} \{X = x\}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(u(X) = y) = \sum_{x \in u^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x).$$

Exercice 7 On choisit comme univers $\Omega = [\![1,6]\!]^2$, muni de la probabilité uniforme.

1. On a $X(\Omega) = [\![-5,5]\!]$ et, pour $k \in [\![-5,5]\!]$:
$$\{X = k\} = \{(i,j) \in [\![1,6]\!]^2 \mid i - j = k\}.$$
On peut remarquer que :
$$\begin{aligned}\operatorname{card}\big(\{X = -k\}\big) &= \operatorname{card}\big\{(i,j) \in [\![1,6]\!]^2 \mid i - j = -k\big\}\\ &= \operatorname{card}\big\{(j,i) \in [\![1,6]\!]^2 \mid j - i = k\big\}\\ &= \operatorname{card}\big(\{X = k\}\big)\end{aligned}$$
et donc $\mathbb{P}(X = -k) = \mathbb{P}(X = k)$. On suppose désormais $k \geqslant 0$. On a alors :
$$\{X = k\} = \big\{(j+k, j)\,;\ j \in [\![1,6]\!] \quad \text{et} \quad j + k \in [\![1,6]\!]\big\}.$$
Pour $j \in [\![1,6]\!]$, on a $j \leqslant j+k$. Alors j doit vérifier les inégalités $1 \leqslant j \leqslant j+k \leqslant 6$, c'est-à-dire $1 \leqslant j \leqslant 6 - k$. On obtient :
$$\{X = k\} = \big\{(j+k, j)\,;\ 1 \leqslant j \leqslant 6 - k\big\}.$$
On en déduit que $\operatorname{card}\big(\{X = k\}\big) = 6 - k$ et $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{6-k}{36}\cdot$ Par symétrie, on obtient :
$$\forall k \in [\![-5,5]\!] \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{6 - |k|}{36}\cdot$$
2. Posons $Y = |X|$. Alors $Y(\Omega) = [\![0,5]\!]$ et :
$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{6},$$
$$\forall k \in [\![1,5]\!] \quad \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = -k) + \mathbb{P}(X = k) = \frac{6-k}{18}\cdot$$
3. Posons $Z = (X-1)^2$. Alors $Z(\Omega) = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}$ et :
$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{5}{36}$$
$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1,5]\!] \quad \mathbb{P}(Z = k^2) &= \mathbb{P}(X - 1 = k) + \mathbb{P}(X - 1 = -k)\\ &= \mathbb{P}(X = k+1) + \mathbb{P}(X = -k+1)\\ &= \frac{6-(k+1)}{36} + \frac{6-(k-1)}{36} = \frac{6-k}{18}\end{aligned}$$
(cela reste vrai pour $k = 5$: pour $j = 6$, la formule $\mathbb{P}(X = j) = \dfrac{6-j}{36}$ donne 0),
$$\mathbb{P}(Z = 36) = \mathbb{P}(X = -5) = \frac{1}{36}, \quad \text{car } \mathbb{P}(X = 7) = 0.$$

Exercice 8 Si on pose $Y = n - X$, on a alors $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et :

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = n - k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k}(1-p)^k = \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k},$$

car $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

La variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètre $(n, 1-p)$.

Si X représente un nombre de succès parmi n expériences, alors $Y = n - X$ mesure le nombre d'échecs, ce qui rend ce résultat évident.

Proposition 8

- Pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$ est un événement.
- Si (x, y) et (x', y') sont des éléments distincts de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a soit $x \neq x'$ et $\{X = x\} \cap \{X = x'\} = \varnothing$, soit $y \neq y'$ et $\{Y = y\} \cap \{Y = y'\} = \varnothing$. On en déduit :
$$\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) \cap \big(\{X = x'\} \cap \{Y = y'\}\big) = \varnothing.$$
- On a enfin $\displaystyle\bigcup_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \{X = x\} \cap \{Y = y\} = \Omega$ car, pour tout $\omega \in \Omega$, si $X(\omega) = x$ et $Y(\omega) = y$, alors ω appartient à $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$.

Exercice 9

1. Tirage avec remise

   On a $\Omega = [\![1, 3]\!]^2$, que l'on munit de la probabilité uniforme. Pour tout $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$:
$$\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \frac{1}{9}.$$
   Pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $\mathbb{P}(X = i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \frac{1}{3}$.

   On obtient le même résultat pour Y.
2. Tirage sans remise

   Les deux boules tirées sont distinctes. On a $\Omega = \{(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2,\ i \neq j\}$ que l'on munit encore de la probabilité uniforme. Dans ce cas, $\operatorname{card}(\Omega) = 6$. On en déduit, pour tout $(i, j) \in \Omega$:
$$\mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big) = \frac{1}{6}.$$
   Pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $\mathbb{P}(X = i) = \displaystyle\sum_{j \neq i} \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

   On obtient le même résultat pour Y .

Dans les deux cas, les variables X et Y suivent la loi uniforme sur $[\![1, 3]\!]$, mais le couple (X, Y) n'a pas même loi. Ainsi les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.

Exercice 10

1. On choisit comme univers $\Omega = B^4$, où B est l'ensemble des 9 boules, puisque les tirages se font avec remise. Ainsi $\operatorname{card} \Omega = 9^4$. On munit Ω de la probabilité uniforme. On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0, 4]\!]$ et $(X, Y)(\Omega) = \{(i, j) \in [\![0, 4]\!]^2 \mid i + j \leqslant 4\}$.

Soit $(i,j) \in [\![0,4]\!]^2$. On obtient :

- si $i+j \leqslant 4$:

$$\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = \frac{\binom{4}{i}\binom{4-i}{j}2^i 3^j 4^{4-i-j}}{9^4}$$
$$= \frac{4!}{i!j!(4-i-j)!}\left(\frac{2}{9}\right)^i\left(\frac{3}{9}\right)^j\left(\frac{4}{9}\right)^{4-i-j},$$

  où $\binom{4}{i}$ représente le choix des tirages de boules blanches parmi les 4 tirages et $\binom{4-i}{j}$ le choix des tirages de boules rouges ;
- si $i+j>4$, $\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\})=0$.

2. On obtient, pour tout $i \in [\![0,4]\!]$, en sortant de la somme ce qui ne dépend pas de i :

$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j=0}^{4-i}\frac{4!}{i!j!(4-i-j)!}\left(\frac{2}{9}\right)^i\left(\frac{3}{9}\right)^j\left(\frac{4}{9}\right)^{4-i-j}$$
$$= \frac{4!}{i!(4-i)!}\left(\frac{2}{9}\right)^i\sum_{j=0}^{4-i}\frac{(4-i)!}{j!(4-i-j)!}\left(\frac{3}{9}\right)^j\left(\frac{4}{9}\right)^{4-i-j}$$
$$= \binom{4}{i}\left(\frac{2}{9}\right)^i\sum_{j=0}^{4-i}\binom{4-i}{j}\left(\frac{3}{9}\right)^j\left(\frac{4}{9}\right)^{4-i-j} = \binom{4}{i}\left(\frac{2}{9}\right)^i\left(\frac{7}{9}\right)^{4-i},$$

d'après la formule du binôme.

La variable X suit la loi binomiale de paramètre $\left(4,\frac{2}{9}\right)$, ce qui était prévisible, car l'urne contient 2 boules blanches et 7 boules non blanches.

On trouve de même que Y suit la loi binomiale de paramètre $\left(4,\frac{1}{3}\right)$.

3. Soit $j \in [\![0,4]\!]$. On obtient, pour $i > j-4$, $\mathbb{P}(X=i \mid Y=j)=0$ et :

$$\forall i \in [\![0,4-j]\!] \quad \mathbb{P}(X=i \mid Y=j) = \frac{\dfrac{4!}{i!j!(4-i-j)!}\left(\dfrac{2}{9}\right)^i\left(\dfrac{3}{9}\right)^j\left(\dfrac{4}{9}\right)^{4-j-i}}{\dbinom{4}{j}\left(\dfrac{1}{3}\right)^j\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4-j}}$$
$$= \binom{4-j}{i}\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{4-j-i}.$$

La loi de X sachant $\{Y=j\}$ est la loi binomiale de paramètre $\left(4-j,\frac{1}{3}\right)$.

Cela peut s'interpréter ainsi : si l'on sait que l'on obtient j boules rouges, il reste à tirer $4-j$ boules pas rouges, la proportion de boules blanches dans l'urne étant $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, car il y a 6 boules pas rouges dans l'urne dont 2 boules blanches.

On trouve de même que, pour $j \in [\![0,4]\!]$, la loi de Y sachant $\{X=i\}$ est la loi binomiale de paramètre $\left(4-i,\frac{3}{7}\right)$

Exercice 11

1. Par définition, on a, pour $(j,k) \in [\![0,n]\!]^2$:

$$\mathbb{P}(X=k, Y=j) = \mathbb{P}(Y=j \mid X=k)\mathbb{P}(X=k)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j > k \\ \binom{k}{j} p'^j (1-p')^{k-j} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si} \quad j \leqslant k. \end{cases}$$

On simplifie. Pour $0 \leqslant j \leqslant k$:

$$\mathbb{P}(X=k, Y=j) = \binom{n}{k}\binom{k}{j}(pp')^j \big((1-p')p\big)^{k-j}(1-p)^{n-k}.$$

2. On obtient, pour $j \in [\![0,n]\!]$:

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k, Y=j) = \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{j}(pp')^j \big((1-p')p\big)^{k-j}(1-p)^{n-k}.$$

Un calcul classique donne $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$ si $j \leqslant k$, et donc :

$$\mathbb{P}(Y=j) = \binom{n}{j}(pp')^j \sum_{k=j}^{n} \binom{n-j}{k-j}\big((1-p')p\big)^{k-j}(1-p)^{n-k}$$

$$= \binom{n}{j}(pp')^j \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i}\big((1-p')p\big)^{i}(1-p)^{n-j-i}$$

$$= \binom{n}{j}(pp')^j \big((1-p')p + 1 - p\big)^{n-j} = \binom{n}{j}(pp')^j(1-pp')^{n-j}.$$

Ainsi Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, pp')$.

Théorème 11 Le $(n-1)$-uplet $Z = (X_1, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots, X_n)$, où figurent toutes les variables aléatoires sauf X_k, est une variable aléatoire dont le système complet d'événements associé est :

$$\big(Z = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)\big)_{(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n) \in E_k}$$

où $E_k = X_1(\Omega) \times \ldots X_{k-1}(\Omega) \times X_{k+1}(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$.

On a donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_k = a_k) = \sum_{(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n)\in E_k} \mathbb{P}\left(Z = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n), X_k = a_k\right)$$

$$= \sum_{(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n)\in E_k} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_k = a_k, \ldots, X_n = x_n)$$

$$= \sum_{\substack{x_1 \in X_1(\Omega), \ldots, x_{k-1} \in X_{k-1}(\Omega), \\ x_{k+1} \in X_{k+1}(\Omega), \ldots, x_n \in X_n(\Omega)}} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_k = a_k, \ldots, X_n = x_n).$$

Proposition 12

- Si les variables X et Y sont indépendantes, on obtient l'égalité :
$$\mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{Y=y\})=\mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y),$$
en prenant $A=\{x\}$ et $B=\{y\}$ dans la définition de l'indépendance.
- Démontrons la réciproque. Soit $A\subset E$ et $B\subset F$. Les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis donc il en est de même de leurs sous-ensembles $A'=A\cap X(\Omega)$ et $B'=B\cap Y(\Omega)$. On a :
$$\{X\in A\}=\{X\in A'\}=\bigcup_{x\in A'}\{X=x\}\text{ et }\{Y\in B\}=\{Y\in B'\}=\bigcup_{y\in B'}\{Y=y\}.$$
On en déduit :
$$\{X\in A\}\cap\{Y\in B\}=\bigcup_{x\in A'}\bigcup_{y\in B'}\{X=x\}\cap\{Y=y\}.$$
Par incompatibilité des événements, puis utilisation de l'hypothèse, on en déduit :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\{X\in A\}\cap\{Y\in B\}\big)&=\sum_{x\in A'}\sum_{y\in B'}\mathbb{P}\big(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\big)\\&=\sum_{x\in A'}\sum_{y\in B'}\mathbb{P}\big(X=x\big)\,\mathbb{P}\big(Y=y\big)\\&=\left(\sum_{x\in A'}\mathbb{P}\big(X=x\big)\right)\left(\sum_{y\in B'}\mathbb{P}\big(Y=y\big)\right).\end{aligned}$$
Comme $\mathbb{P}(X\in A)=\sum\limits_{x\in A'}\mathbb{P}\big(X=x\big)$ et $\mathbb{P}(Y\in B)=\sum\limits_{y\in B'}\mathbb{P}\big(Y=y\big)$, on a donc :
$$\mathbb{P}\big(\{X\in A\}\cap\{Y\in B\}\big)=\mathbb{P}(X\in A)\mathbb{P}(Y\in B).$$
Les variables X et Y sont donc indépendantes.

Proposition 13 Montrons l'équivalence entre (i) et (ii).

- Supposons que (i) soit vérifié.
Soit $y\in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}\big(Y=y\big)\neq 0$. On a, pour tout $x\in X(\Omega)$:
$$\mathbb{P}\big(X=x\mid Y=y\big)=\frac{\mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{Y=y\})}{\mathbb{P}(Y=y)}=\frac{\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}=\mathbb{P}(X=x).$$
La loi de X sachant $\{Y=y\}$ est égale à la loi de X, donc (ii) est vérifié.
- Supposons que (ii) soit vérifié. Soit $y\in Y(\Omega)$.
  - Si $\mathbb{P}(Y=y)=0$, alors $\{Y=y\}$ est indépendant de $\{X=x\}$ pour tout $x\in X(\Omega)$.
  - Sinon on a, pour tout $x\in X(\Omega)$:
$$\mathbb{P}\big(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\big)=\mathbb{P}\big(X=x\mid Y=y\big)\mathbb{P}\left(Y=y\right)=\mathbb{P}\left(X=x\right)\mathbb{P}\left(Y=y\right).$$

  Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

L'équivalence de (i) et (iii) s'obtient en échangeant les rôles de X et Y.

Exercice 12

- Supposons les variables X et Y indépendantes.
  Alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on a :
  $$\mathbb{P}\big(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\big) = \mathbb{P}(X = x_i)\, \mathbb{P}(Y = y_j)$$
  et donc, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la i-ème ligne de A est :
  $$\mathbb{P}(\{X = x_i\})\big(\mathbb{P}(\{Y = y_1\}), \ldots, \mathbb{P}(\{Y = y_p\})\big).$$
  Toutes les lignes sont donc proportionnelles à $\big(\mathbb{P}(\{Y = y_1\}), \ldots, \mathbb{P}(\{Y = y_p\})\big)$, ce qui prouve que A est de rang inférieur ou égal à 1. D'autre part, A est non nulle puisque, par définition d'une probabilité, la somme de ses coefficients est égale à 1. Donc $\operatorname{rg}(A) = 1$.
- Réciproquement, supposons A de rang 1. Alors les lignes de A sont toutes proportionnelles à une certaine ligne $L = (l_1, \ldots, l_p)$. Comme la somme des coefficients de A vaut 1, la somme des éléments de L est également non nulle. On peut donc, quitte à diviser L par cette somme, supposer $\sum\limits_{j=1}^{p} l_j = 1$. Les lignes de A sont donc $c_1\, L, \ldots,\ c_n\, L$, avec $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.
  Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. On a alors $\mathbb{P}\big(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\big) = c_i\, l_j$ et :
  $$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}\big(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\big) = \sum_{j=1}^{p} c_i\, l_j = c_i.$$
  Par suite, la la somme des c_i vaut 1 et pour tout $j \in [\![1,p]\!]$:
  $$\mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\big) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, l_j = l_j.$$
  On a finalement :
  $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \quad \mathbb{P}\big(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\big) = \mathbb{P}(X = x_i)\, \mathbb{P}(Y = y_j)$$
  ce qui prouve que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 13 Les variables X et Y sont définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Il existe a tel $X(\Omega) = \{a\}$. On a alors pour tout $y \in Y(\Omega)$:
$$\mathbb{P}\left(\{X = a\} \cap \{Y = y\}\right) = \mathbb{P}\left(\Omega \cap \{Y = y\}\right) = \mathbb{P}\left(\{Y = y\}\right) = \mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = y).$$
Les variables X et Y sont indépendantes.

Exercice 14 On a par définition $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0,1\}$.

- Si les variables X et Y sont indépendantes, il résulte de la définition qu'en particulier les événements $\{X = 1\}$ et $\{Y = 1\}$ sont indépendants.
- Supposons réciproquement que les événements $\{X = 1\}$ et $\{Y = 1\}$ soient indépendants. D'après la proposition 16 de la page 1422, les événements :
  $$\overline{\{X = 1\}} \text{ et } \{Y = 1\}, \quad \{X = 1\} \text{ et } \overline{\{Y = 1\}}, \quad \overline{\{X = 1\}} \text{ et } \overline{\{Y = 1\}}$$

sont indépendants. Mais $\overline{\{X=1\}} = \{X=0\}$ ainsi que $\overline{\{Y=1\}} = \{Y=0\}$, donc les événements :

$$\{X=0\} \text{ et } \{Y=1\}, \quad \{X=1\} \text{ et } \{Y=0\}, \quad \{X=0\} \text{ et } \{Y=0\}$$

sont indépendants.

Pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $\{X=x\}$ et $\{Y=y\}$ sont indépendants, donc les variables X et Y sont indépendantes.

Proposition 14 Si f et g sont à valeurs dans E et F respectivement, alors, pour toute partie A de E et toute partie B de F :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\{f(X) \in A\} \cap \{g(Y) \in B\}\big) &= \mathbb{P}\big(\{X \in f^{-1}(A)\} \cap \{Y \in g^{-1}(B)\}\big)\\ &= \mathbb{P}\big(X \in f^{-1}(A)\big)\,\mathbb{P}\big(Y \in g^{-1}(B)\big)\\ &= \mathbb{P}\big(f(X) \in A\big)\,\mathbb{P}\big(g(Y) \in B\big).\end{aligned}$$

Ainsi $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Exercice 15 On a aussi $(X+Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in (X+Y)(\Omega)$, comme X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, l'événement $\{X+Y=k\}$ est réalisé s'il existe $i \in [\![0,k]\!]$ tel que $X=i$ et $Y=k-i$. On a donc

$$\{X+Y=k\} = \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant k} \{X=i\} \cap \{Y=k-i\},$$

d'où l'on déduit :

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}\left(\{X=i\} \cap \{Y=k-i\}\right) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}\left(X=i\right)\mathbb{P}\left(Y=k-i\right),$$

par indépendance de X et Y. Certaines de ces probabilité peuvent être nulles.

Exercice 16

1. On a $(X+Y)(\Omega) = [\![2,2n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![2,2n]\!]$:

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=k-i) = \frac{1}{n^2}\operatorname{card}\left\{i \in [\![1,n]\!] \mid k-i \in [\![1,n]\!]\right\},$$

car si $k-i \notin [\![1,n]\!]$, alors $\mathbb{P}(Y=k-i)=0$. On cherche donc les couples $(i,k-i)$ tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant k-i \leqslant n$, c'est-à-dire tel que $k-n \leqslant i \leqslant k-1$.

- Si $k \leqslant n+1$, cela équivaut à $1 \leqslant i \leqslant k-1$ et $\mathbb{P}(X+Y=k) = \dfrac{k-1}{n^2}\cdot$
- Si $k \geqslant n+2$, cela équivaut à $k-n \leqslant i \leqslant n$ et $\mathbb{P}(X+Y=k) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}\cdot$

2. On a $(X-Y)(\Omega) = [\![-(n-1),(n-1)]\!]$ et, pour tout $k \in [\![-(n-1),(n-1)]\!]$:

$$\{X-Y=k\} = \bigcup_{j=1}^{n}\{X-Y=k\} \cap \{Y=j\} = \bigcup_{j=1}^{n}\{X=j+k\} \cap \{Y=j\}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X-Y=k) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(\{X=j+k\}\cap\{Y=j\}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X=j+k)\,\mathbb{P}(Y=j) \\
&= \frac{1}{n^2}\operatorname{card}\{j\in [\![1,n]\!] \mid j+k\in [\![1,n]\!]\}.
\end{aligned}$$

On cherche j tel que $1 \leqslant j \leqslant n$ et $1-k \leqslant j \leqslant n-k$.

- Si $k \geqslant 0$, alors $1 \leqslant j \leqslant n-k$ et $\mathbb{P}(X-Y=k) = \dfrac{n-k}{n^2}\cdot$
- Si $k < 0$, alors $1-k \leqslant j \leqslant n$ et $\mathbb{P}(X-Y=k) = \dfrac{n+k}{n^2}\cdot$

On a donc :

$$\forall k \in [\![-(n-1),(n-1)]\!] \quad \mathbb{P}(X-Y=k) = \frac{n-|k|}{n^2}\cdot$$

Proposition 15 On suppose que les variables aléatoires X_1, ..., X_n sont à valeurs dans E_1, ..., E_n, respectivement.

- Si les variables X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes, alors pour toutes parties A_1 de E_1, ..., A_n de E_n, on a :

$$\mathbb{P}\left(\{X_1\in A_1\}\cap\ldots\cap\{X_n\in A_n\}\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i\in A_i).$$

  C'est vrai en particulier si, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, l'on prend $A_i=\{X_i=x_i\}$, avec $x_i\in X_i(\Omega)$.

- Réciproquement, supposons que l'on ait :

$$\mathbb{P}\left(\{X_1=x_1\}\cap\ldots\cap\{X_n=x_n\}\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i=x_i)$$

  pour tout $(x_1,\ldots,x_n)\in X_1(\Omega)\ldots\times X_n(\Omega)$. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on considère $A_i\subset E_i$; on pose $A'_i = A_i\cap X_i(\omega)$ et on écrit :

$$\{X_i\in A_i\} = \{X_i\in A'_i\} = \bigcup_{x_i\in A'_i}\{X_i=x_i\}.$$

  On obtient :

$$\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\in A_i\} = \bigcup_{(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} A'_i}\left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i=x_i\}\right).$$

On a une réunion finie d'événements incompatibles. On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\in A_i\}\right) &= \sum_{(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} A_i'} \mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i=x_i\}\right)\\ &= \sum_{(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} A_i'} \left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n}\mathbb{P}\left(X_i=x_i\right)\right)\\ &= \prod_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{x_i\in A_i'}\mathbb{P}\left(X_i=x_i\right)\right) = \prod_{1\leqslant i\leqslant n}\mathbb{P}\left(X_i\in A_i\right).\end{aligned}$$

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont donc mutuellement indépendantes.

Proposition 16 On suppose que, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, X_i est à valeurs dans E_i. Soit I une partie non vide de $[\![1,n]\!]$ et pour $i\in I$, une partie A_i de E_i.

Pour tout $i\notin I$, l'événement $\{X_i\in E_i\}$ est égal à Ω. On a donc :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}\{X_i\in A_i\}\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}\{X_i\in A_i\}\cap\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]\setminus I}\{X_i\in E_i\}\right).$$

Par indépendance mutuelle de $X_1, \ldots, X_n$, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}\{X_i\in A_i\}\right)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}\left(X_i\in A_i\right)\times\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus I}\mathbb{P}\left(X_i\in E_i\right)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}\left(X_i\in A_i\right),$$

car $\mathbb{P}\left(X_i\in E_i\right)=1$ pour tout i.

Ainsi $(X_i)_{i\in I}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Exercice 17 La variable Z est encore de Bernoulli et :

$$\mathbb{P}\big(Z=1\big)=\mathbb{P}\big(\{X=1\}\cap\{Y=0\}\big)+\mathbb{P}\big(\{X=0\}\cap\{Y=1\}\big)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

par indépendance de X et Y. On a d'autre part :

$$\mathbb{P}\big(\{X=1\}\cap\{Z=1\}\big)=\mathbb{P}\big(\{X=1\}\cap\{Y=0\}\big)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}\big(X=1\big)\mathbb{P}\big(Z=1\big),$$

ce qui suffit à montrer que les variables de Bernoulli X et Z sont indépendantes (*cf.* exercice 14 de la page 1476). Il en est de même de Y et Z.

Comme $\mathbb{P}(\{X=1\}\cap\{Y=1\}\cap\{Z=1\})=0\neq\dfrac{1}{8}$, les variables X, Y, Z ne sont pas mutuellement indépendantes, bien qu'elles soient deux à deux indépendantes.

Proposition 19 Soit $(y_1,\dots,y_n) \in f(X_1)(\Omega)\times\cdots\times f(X_n)(\Omega)$. On a, par définition :

$$\mathbb{P}\big(\{f_1(X_1)=y_1\}\cap\ldots\cap\{f_n(X_n)=y_n\}\big)=\mathbb{P}\Big(\big\{X_1\in f_1^{-1}(\{y_1\})\big\}\cap\ldots\cap\big\{X_n\in f_n^{-1}(\{y_n\})\big\}\Big)$$

et, par indépendance des variables X_1, ..., X_n, on obtient :

$$\mathbb{P}\big(\{f_1(X_1)=y_1\}\cap\ldots\cap\{f_n(X_n)=y_n\}\big)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\big(X_i\in f_i^{-1}(\{y_i\})\big)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\big(f_i(X_i)=y_i\big).$$

Les variables aléatoires $f_1(X_1)$, , ..., $f_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Théorème 21

1. Posons $S=X+Y$. On a $S(\Omega)=[\![0,m+n]\!]$ et, pour tout entier k de $[\![0,m+n]\!]$,

$$\mathbb{P}(S=k)=\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i).$$

Or on a $\mathbb{P}(X=i)=\binom{m}{i}p^i(1-p)^{m-i}$ et $\mathbb{P}(Y=k-i)=\binom{n}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{n-(k-i)}$ avec la convention $\binom{m}{i}=0$ si $i>m$ et $\binom{n}{k-i}=0$ si $k-i>n$. On obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S=k)&=\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}p^i(1-p)^{m-i}p^{k-i}(1-p)^{n-(k-i)}\\&=p^k(1-p)^{m+n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}\\&=p^k(1-p)^{m+n-k}\binom{m+n}{k},\end{aligned}$$

d'après la formule de Vandermonde (*cf.* exercice 25 de la page 1381). Donc S suit la loi binomiale de paramètre $(m+n,p)$.

2. Raisonnons par récurrence sur k. La propriété est évidente pour $k=1$ et ce qui précède la démontre pour $k=2$.
Supposons qu'elle soit vraie au rang k et considérons $k+1$ variables aléatoires indépendantes X_1, ..., X_k, X_{k+1}, la variable X_i suivant une loi binomiale de paramètre (n_i,p). Les variables X_1, ..., X_k sont également indépendantes, d'après la proposition 16 de la page 1477, donc, par hypothèse de récurrence, la variable $X_1+\cdots+X_k$ suit la loi binomiale de paramètre $\left(\sum_{i=1}^{k}n_i,p\right)$. Les variables X_1, ..., X_k, X_{k+1} étant mutuellement indépendantes, les variables $X_1+\cdots+X_k$ et X_{k+1} sont indépendantes d'après le lemme des coalitions. Du cas de deux variables, on déduit que $X_1+\cdots+X_k+X_{k+1}$ suit une loi binomiale de paramètre $\left(\sum_{i=1}^{k}n_i+n_{k+1},p\right)=\left(\sum_{i=1}^{k+1}n_i,p\right)$. Cela termine la démonstration par récurrence.

Exercice 18 On remarque que $N_x = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k = x\}}$.

Les variables $X_1, \dots, X_n$ étant indépendantes, les variables $\mathbb{1}_{\{X_1=x\}}, \dots, \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}$ sont également indépendantes, d'après la proposition 19 de la page 1478.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{1}_{\{X_k=x\}}$ est une variable de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X_k = x)$, ce qui est égal à $p = \mathbb{P}(X_1 = x)$ car les variables aléatoires X_1, $X_2, \dots, X_n$ suivent la même loi.

On a donc une somme de variables de Bernoulli indépendantes et de même loi, donc N_x suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

Exercice 19 On a montré que, pour tout $k \in [\![n, N]\!]$, on a $\mathbb{P}\big(X = k\big) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}\cdot$

L'espérance de la variable X est donnée par $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=n}^{N} \frac{k\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}\cdot$

L'égalité $k\binom{k-1}{n-1} = n\binom{k}{n}$ fait disparaître k au profit de la constante n que l'on peut sortir de la somme. On obtient $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n}\cdot$ D'après la formule de Pascal généralisée :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n\binom{N+1}{n+1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n(N+1)}{n+1}\cdot$$

Proposition 23 Soit X la variable aléatoire réelle certaine égale à a. On a $X(\Omega) = \{a\}$ et $\mathbb{P}\big(X = a\big) = 1$ et donc $\mathbb{E}(X) = a\,\mathbb{P}\big(X = a\big) = a$.

Proposition 24 On obtient :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}\cdot$$

Exercice 20 On obtient, en utilisant la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=a}^{b} k\,\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b-a+1}\sum_{k=a}^{b} k = \frac{(b-a+1)(a+b)}{2(b-a+1)} = \frac{a+b}{2}\cdot$$

Proposition 25 On obtient $\mathbb{E}(X) = 0\,\mathbb{P}(X = 0) + 1\,\mathbb{P}(X = 1) = p$.

La variable indicatrice de l'événement A est une variable de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$, d'où le résultat.

Proposition 26 Pour calculer $\mathbb{E}(X)$, on utilise l'égalité $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, valable pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}p^{j+1}(1-p)^{n-1-j} = np\big(p+1-p\big)^{n-1} = np.\end{aligned}$$

Lemme 27 Soit $x \in X(\Omega)$. On considère tous les termes de la somme vérifiant $X(\omega) = x$, c'est-à-dire $\omega \in \{X = x\}$. En les sommant, on obtient :

$$\sum_{\omega \in \{X=x\}} x\,\mathbb{P}(\{\omega\}) = x \sum_{\omega \in \{X=x\}} \mathbb{P}(\{\omega\}) = x\,\mathbb{P}(X = x),$$

car on peut écrire $\{X = x\} = \bigcup_{\omega \in \{X=x\}} \{\omega\}$. Comme Ω est la réunion disjointe des ensembles $\{X = x\}$, pour x variant dans $X(\Omega)$), on en déduit :

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) X(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \{X=x\}} \mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{E}(X).$$

Théorème 28 En appliquant le lemme 27, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (X+Y)(\omega)\mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in \Omega} \left(X(\omega) + Y(\omega)\right) \mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)\mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

et de même :

$$\mathbb{E}(\lambda X) = \sum_{\omega \in \Omega} (\lambda X)(\omega)\mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in \Omega} \lambda\, X(\omega)\mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) = \lambda \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) = \lambda\mathbb{E}(X).$$

Corollaire 29 La variable X admet un espérance égale à $\mathbb{E}(X)$. La variable constante b admet une espérance b. On a donc

$$\mathbb{E}(aX + b) = \mathbb{E}(aX) + b = a\mathbb{E}(X) + b.$$

Exercice 21 Il s'agit de calculer l'espérance de la variable X égale au nombre de rencontres. Pour tout i, on note X_i la variable qui prend la valeur 1 s'il y a rencontre au i-ème tirage, et 0 sinon. On obtient $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$, car il y a $n!$ tirages possibles et $(n-1)!$ tirages pour lesquels la boule i est tirée au i-ème tirage ; en effet, les $n-1$ autre boules sont tirés dans un ordre quelconque. Il est clair que $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, donc $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n\,\dfrac{1}{n} = 1$.

Exercice 22 On numérote les boules de 1 à r et les tiroirs de 1 à n, en attribuant le numéro 1 au tiroir fixé. Les résultats possibles sont les applications de l'ensemble des boules dans l'ensemble des tiroirs. On a donc $\operatorname{card}(\Omega) = n^r$. On munit Ω de la probabilité uniforme.
On définit :

- pour $i \in [\![1, n]\!]$, la variable V_i indicatrice de l'événement « le i-ème tiroir est vide » ;
- pour $j \in [\![1, r]\!]$, la variable B_j indicatrice de l'événement « la j-ème boule atterrit dans le tiroir numéro 1 ».

On obtient alors :

$$V = V_1 + \cdots + V_n \qquad \text{et} \qquad T = B_1 + \cdots + B_r.$$

- Pour $i \in [\![1,n]\!]$, l'événement $\{V_i = 1\}$ est réalisé si les boules atterrissent dans un autre tiroir que le i-ème. On a donc $\operatorname{card}(\{V_i = 1\}) = (n-1)^r$ (nombre d'applications de l'ensemble des boules dans un ensemble de $n-1$ tiroirs) et $\mathbb{P}(V_i = 1) = \dfrac{(n-1)^r}{n^r}\cdot$ On en déduit que $\mathbb{E}(V_i) = \mathbb{P}(V_i = 1) = \dfrac{(n-1)^r}{n^r}$ et :
$$\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(V_1) + \cdots + \mathbb{E}(V_n) = n\mathbb{E}(V_1) = \frac{(n-1)^r}{n^{r-1}}\cdot$$
- Pour $j \in [\![1,r]\!]$, l'événement $\{B_j = 1\}$ est réalisé si la boule j atterrit dans le premier tiroir et les autres boules dans un tiroir quelconque. On a donc $\operatorname{card}(\{B_j = 1\}) = n^{r-1}$ (nombre d'applications d'un ensemble de $r-1$ boules dans l'ensemble des n tiroirs) et $\mathbb{P}(B_j = 1) = \dfrac{n^{r-1}}{n^r} = \dfrac{1}{n}\cdot$

  On en déduit que $\mathbb{E}(B_j) = \mathbb{P}(B_j = 1) = \dfrac{1}{n}$ et :
$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(B_1) + \cdots + \mathbb{E}(B_r) = r\mathbb{E}(B_1) = \frac{r}{n}\cdot$$

Proposition 31

1. Comme X est une variable aléatoire positive, on a $x \geqslant 0$ pour tout $x \in X(\Omega)$. On en déduit :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) \geqslant 0.$$
2. Si, de plus, $\mathbb{E}(X) = 0$ alors, pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $x\mathbb{P}(X = x) = 0$ et donc $\mathbb{P}(X = x) = 0$ si $x \neq 0$. Ainsi $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \sum\limits_{x \in X(\Omega)\setminus\{0\}} \mathbb{P}(X = x) = 1$.

   Réciproquement, si $\mathbb{P}(X = 0) = 1$, alors $\mathbb{P}(X = x) = 0$ pour tout $x \in X(\Omega) \setminus \{0\}$ et $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Théorème 33 Montrons que $\mathbb{1}_{\{X \geqslant a\}} \leqslant \dfrac{X}{a}\cdot$ Soit $\omega \in \Omega$.

- Si l'événement $\{X \geqslant a\}$ est réalisé, on a $\mathbb{1}_{\{X \geqslant a\}}(\omega) = 1 \leqslant \dfrac{X(\omega)}{a}$, car $X(\omega) \geqslant a$.
- Dans le cas contraire, on a $\mathbb{1}_{\{X \geqslant a\}}(\omega) = 0 \leqslant \dfrac{X(\omega)}{a}$, car X est une variable positive.

Ainsi, $\mathbb{1}_{\{X \geqslant a\}} \leqslant \dfrac{X}{a}$, et par croissance de l'espérance :
$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X \geqslant a\}}) = \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \mathbb{E}\left(\frac{X}{a}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}\cdot$$

Théorème 34 On sait, d'après la proposition 7 de la page 1463, que :
$$\forall y \in u(X)(\Omega) \quad \mathbb{P}(u(X) = y) = \sum_{x \in u^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x).$$

On obtient, par définition de l'espérance :

$$\mathbb{E}\big(u(X)\big) = \sum_{y\in u(X)(\Omega)} y\,\mathbb{P}(u(X)=y) = \sum_{y\in u(X)(\Omega)} \left(y \sum_{x\in u^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X=x)\right)$$

$$= \sum_{y\in u(X)(\Omega)} \left(\sum_{x\in u^{-1}(\{y\})} u(x)\mathbb{P}(X=x)\right).$$

On remarque que $X(\Omega) = \bigcup_{y\in u(X)(\Omega)} u^{-1}(\{y\})$ et que cette union est disjointe, car chaque élément de $x \in X(\Omega)$ a une image unique y par u. On en déduit :

$$\mathbb{E}\big(u(X)\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} u(x)\,\mathbb{P}\big(X=x\big).$$

Exercice 23 On obtient :

$$\mathbb{E}\left((X-1)^2\right) = \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)(2n-1)}{6}\ ;$$

$$\mathbb{E}(\exp(X)) = \sum_{k=1}^{n} e^k\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^k = \frac{e(e^n-1)}{n(e-1)}.$$

Proposition 35 On pose $Z=(X,Y)$. On sait que $Z(\Omega)\subset X(\Omega)\times Y(\Omega)$. On peut écrire $XY = u(Z)$, où u est la fonction $(x,y)\longmapsto xy$. En appliquant la formule de transfert à $u(Z)$, on obtient :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{z\in Z(\omega)} u(z)\mathbb{P}(Z=z) = \sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)} u(x,y)\,\mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)$$

$$= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} u(x,y)\,\mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big).$$

En effet, $\mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big)=0$ si (x,y) est dans $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ et pas dans $(X,Y)(\Omega)$. On en déduit :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\,\mathbb{P}\big(X=x, Y=y\big).$$

Théorème 36

Comme X et Y sont des variables indépendantes, on a, pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}\big(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\big) = \mathbb{P}\big(X=x\big)\,\mathbb{P}\big(Y=y\big).$$

On obtient, en appliquant la proposition 35 :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} xy\,\mathbb{P}\big(X=x\big)\mathbb{P}\big(Y=y\big)$$

$$= \left(\sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}\big(X=x\big)\right)\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} y\,\mathbb{P}\big(Y=y\big)\right)$$

$$= \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).$$

Exercice 24 On fait une démonstration par récurrence sur n. La propriété est évidente pour $n=1$ et a déjà été démontrée pour $n=2$ dans le théorème 36.

Supposons que la propriété soit vraie au rang n et considérons des variables indépendantes $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$. Alors, les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont également indépendantes donc $\mathbb{E}\left(\prod\limits_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$, par hypothèse de récurrence. D'autre part, d'après le lemme des coalitions, X_{n+1} est indépendante de $X_1X_2\ldots X_n$; en utilisant la propriété pour deux variables, on trouve :

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n+1} X_k\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)\mathbb{E}(X_{n+1}) = \left(\prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)\right)\mathbb{E}(X_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(X_k).$$

Exercice 25

1. On a une suite de trois tirages indépendants. Pour un tirage, la probabilité d'obtenir une boule blanche est $\frac{1}{3}\cdot$ La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètre $\left(3, \frac{1}{3}\right)$. Ainsi $\mathbb{E}(X) = 1$ et
$$\mathbb{V}(X) = \sum_{k=0}^{3}(k-1)^2\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{3}(k-1)^2\binom{3}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k} = \frac{2}{3}\cdot$$

2. Un résultat possible est un ensemble de 3 boules prises parmi les 6 boules . Il y en a $\binom{6}{3} = 20$, équiprobables. La variable Y est à valeurs dans $[\![0,2]\!]$ et :
$$\forall k \in [\![0,2]\!] \quad \mathbb{P}(Y=k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{4}{3-k}}{20},$$
car on doit obtenir k boules blanches, prises parmi 2, et $3-k$ boules noires, prises parmi 4. On obtient :
$$\mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{5},\quad \mathbb{P}(Y=1) = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y=2) = \frac{1}{5}\cdot$$
On en déduit : $\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$
$$\mathbb{V}(Y) = \frac{1}{5}(0-1)^2 + \frac{3}{5}(1-1)^2 + \frac{1}{5}(2-1)^2 = \frac{2}{5}\cdot$$

3. Les variables X et Y ont même espérance, mais $\mathbb{V}(X) > \mathbb{V}(Y)$. Le fait que la boule tirée soit remise autorise une plus grande dispersion autour de la moyenne.

Proposition 39 Comme :
$$\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2 = X^2 - 2\mathbb{E}(X)\,X + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2,$$
on obtient, par linéarité de l'espérance :
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X)\,X\right) + \mathbb{E}\big((\mathbb{E}(X))^2\big)\\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\big(\mathbb{E}(X)\big)^2 + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \quad \text{car } \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \text{ est une variable aléatoire constante}\\ &= \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2.\end{aligned}$$

Exercice 26 De $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} k = \lambda \frac{n(n+1)}{2} = 1$, on tire $\lambda = \frac{2}{n(n+1)}\cdot$

On obtient :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} k^2 = \lambda\, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}\cdot$$

On calcule ensuite :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X=k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} k^3 = \lambda\, \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)}{2}\cdot$$

On en déduit :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2 = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(2n+1)^2}{9} = \frac{n^2+n-2}{18} = \frac{(n-1)(n+2)}{18}\cdot$$

Exercice 27 Par linéarité de l'espérance, on a, pour tout réel m :

$$\begin{aligned}\varphi(m) = \mathbb{E}((X-m)^2) &= \mathbb{E}(X^2 - 2mX + m^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2m\mathbb{E}(X) + m^2\\ &= (m-\mathbb{E}(X))^2 + \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = (m-\mathbb{E}(X))^2 + \mathbb{V}(X).\end{aligned}$$

Le minimum est obtenu pour $m = \mathbb{E}(X)$ et vaut $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 28 Posons $Y = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

- Les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, donc $\mathbb{E}(Y) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = m^n$.
- D'autre part, $Y^2 = \prod_{k=1}^{n} X_k^2$ et les variables $X_1^2, \ldots, X_n^2$ sont indépendantes car fonctions de variables indépendantes, donc $\mathbb{E}(Y^2) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2)$. Pour calculer $\mathbb{E}(X_k^2)$, on utilise la variance :

  $$\mathbb{E}(X_k^2) = \mathbb{V}(X_k) + \left(\mathbb{E}(X_k)\right)^2 = 1 + m^2.$$

  On en déduit $\mathbb{E}(Y^2) = (1+m^2)^n$ et :

  $$\mathbb{V}(Y) = (1+m^2)^n - m^{2n}.$$

Proposition 40 On obtient :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}\big(X=k\big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$

et, par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(n+1)^2}{4} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^2-1}{12}\cdot$$

Proposition 41 On obtient, par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

Exercice 29 Le maximum est obtenu en $\dfrac{1}{2}$ et vaut $\dfrac{1}{4}$.

Proposition 42 Pour calculer $\mathbb{V}(X)$, il est plus simple de calculer $\mathbb{E}\big(X(X-1)\big)$, plutôt que directement $\mathbb{E}\big(X^2\big)$. On utilise la formule de transfert et l'égalité :

$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2},$$

valable pour $k \in [\![2, n]\!]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k}\\ &= n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2} p^{j+2}(1-p)^{n-2-j}\\ &= n(n-1)p^2\big(p+1-p\big)^{n-2} = n(n-1)p^2.\end{aligned}$$

Comme $X^2 = X(X-1) + X$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(X^2)\big) &= \mathbb{E}\big(X(X-1)\big) + \mathbb{E}(X) = n(n-1)p^2 + np, \text{ puis}\\ \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\big(X^2)\big) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2\\ &= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p).\end{aligned}$$

Proposition 43

La variance est positive, car c'est l'espérance de la variable positive $\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2$.

- Si $\mathbb{V}(X) = 0$, alors $\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2$ est une variable aléatoire réelle positive qui admet une espérance nulle. D'après la proposition 31 de la page 1484, on en déduit $\mathbb{P}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2 = 0\Big) = 1$. Comme :
$$\{\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2 = 0\} = \{X - \mathbb{E}(X) = 0\} = \{X = \mathbb{E}(X)\},$$
on obtient $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$. Donc X est égale à $\mathbb{E}(X)$ presque sûrement.
- Réciproquement s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = m) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) = m$ et $\mathbb{P}\big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2 = 0\big) = 1$, donc $\mathbb{V}(X) = E\big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\big) = 0$.

Proposition 44 On sait déjà que $\mathbb{E}(aX+b) = a\,\mathbb{E}(X) + b$. On obtient :

$$(aX + b - \mathbb{E}(aX+b))^2 = a^2\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2.$$

Par linéarité de l'espérance, on en déduit :

$$\mathbb{V}(aX+b) = \mathbb{E}\big(a^2(X - \mathbb{E}(X))^2\big) = a^2\,\mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big) = a^2\,\mathbb{V}(X).$$

Exercice 30 On pose $Y = X - (a-1)$. Alors Y suit la loi uniforme sur $[\![1, b-a+1]\!]$ et on a, en utilisant la proposition 44 et la proposition 40 de la page 1489 :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12} = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}.$$

Proposition 45 On écrit $X^* = \dfrac{1}{\sigma(X)} X - \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$, fonction affine de X.

D'après le corollaire 29 de la page 1482, on a :

$$\mathbb{E}(X^*) = \frac{\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} - \frac{\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} = 0.$$

D'après la proposition 44 de la page 1489, on a :

$$\mathbb{V}(X^*) = \frac{1}{\sigma(X)^2} \mathbb{V}(X) = 1.$$

Par suite X^* est une variable aléatoire centrée réduite.

Théorème 46 La variable $\Big(X - \mathbb{E}(X)\Big)^2$ est positive et possède une espérance égale à $\mathbb{V}(X)$. D'après l'inégalité de Markov, on a pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2 \geqslant \varepsilon^2\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Comme les événements $\big\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big\}$ et $\big\{(X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\big\}$ sont égaux, on en déduit l'inégalité voulue.

Proposition 47 On écrit :

$$\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big) = XY - X\mathbb{E}(Y) - Y\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

et l'on obtient, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big)\\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X).\end{aligned}$$

Exercice 31 Si la variable X est constante, égale à a, on a :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(aY) = a\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

et donc $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Exercice 32

- La variable X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ donc $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}\cdot$

- La variable Y est à valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, la loi de Y sachant $\{X = k\}$ est la loi uniforme sur $[\![1, k]\!]$. Pour $(k, i) \in [\![1, n]\!]^2$, on a donc :

$$\mathbb{P}\big(\{X = k\} \cap \{Y = i\}\big) = \mathbb{P}\big(X = k\big)\mathbb{P}\big(Y = i \mid X = k\big) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i > k \\ \dfrac{1}{nk} & \text{si} \quad i \leqslant k. \end{cases}$$

On en déduit que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\mathbb{P}\big(Y=i\big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\cap\{Y=i\}\big) = \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{nk}\cdot$$

On obtient alors :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n} i\mathbb{P}(Y=i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} \frac{i}{nk}$$

et en échangeant les sommations :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{nk} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{k} i\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{nk}\cdot\frac{k(k+1)}{2}\\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(k+1) = \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) = \frac{n+3}{4}\cdot\end{aligned}$$

- On calcule ensuite l'espérance de XY :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} ki\mathbb{P}\big(\{X=k\}\cap\{Y=i\}\big) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} ki\frac{1}{nk}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} i\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}\\ &= \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{6}\cdot\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{6}-\frac{(n+1)(n+3)}{8}\\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{24}\cdot\end{aligned}$$

Théorème 48

1. On a $\mathrm{Cov}(X,X)=\mathbb{V}(X)\geqslant 0$, par définition.
2. La symétrie est évidente.
3. Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X+X',Y) &= \mathbb{E}\big((X+X')Y\big)-\mathbb{E}(X+X')\mathbb{E}(Y)\\ &= \mathbb{E}(XY)+\mathbb{E}(X'Y)-\big(\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(X')\big)\mathbb{E}(Y)\\ &= \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)+\mathbb{E}(X'Y)-\mathbb{E}(X')\mathbb{E}(Y)\\ &= \mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(X',Y),\end{aligned}$$

et de même :

$$\mathrm{Cov}(\lambda X,Y) = \mathbb{E}(\lambda XY)-\mathbb{E}(\lambda X)\mathbb{E}(Y) = \lambda\mathbb{E}(XY)-\lambda\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \lambda\mathrm{Cov}(X,Y).$$

4. C'est une conséquence immédiate des deux points précédents.

Exercice 33 Des égalités $V = V_1 + \cdots + V_n$ et $T = B_1 + \cdots + B_r$, on déduit :

$$\operatorname{Cov}(V,T) = \operatorname{Cov}\left(\sum_{i=1}^n V_i, \sum_{j=1}^r B_j\right) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Cov}\left(V_i, \sum_{j=1}^r B_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \operatorname{Cov}(V_i, B_j).$$

- On a montré :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \mathbb{E}(V_i) = \frac{(n-1)^r}{n^r} \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1,r]\!] \quad \mathbb{E}(B_j) = \frac{1}{n}.$$

- Pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,r]\!]$, l'événement $\{V_i = 1\} \cap \{B_j = 1\}$ est réalisé si le i-ème tiroir est vide et la j-ème boule est dans le premier tiroir. C'est impossible si $i = 1$. Si $i \neq 1$, il faut que la j-ème boule soit dans le premier tiroir et les autres dans un tiroir quelconque différent du i-ème. On trouve donc :

$$\mathbb{P}\big(\{V_i = 1\} \cap \{B_j = 1\}\big) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = 1 \\ \dfrac{(n-1)^{r-1}}{n^r} & \text{si} \quad i \geqslant 2. \end{cases}$$

- Compte tenu des valeurs de $\mathbb{E}(V_i)$ et $\mathbb{E}(B_j)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(V_i, B_j) &= \mathbb{E}(V_i B_j) - \mathbb{E}(V_i)\,\mathbb{E}(B_j) \\ &= \begin{cases} -\dfrac{(n-1)^r}{n^{r+1}} & \text{si} \quad i = 1 \\ \dfrac{(n-1)^{r-1}}{n^r} - \dfrac{(n-1)^r}{n^{r+1}} = \dfrac{(n-1)^{r-1}}{n^{r+1}} & \text{si} \quad i \geqslant 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Dans l'expression $\operatorname{Cov}(V,T)$, il y a r termes de la forme $\operatorname{Cov}(V_1, B_j)$ et $(n-1)r$ termes de la forme $\operatorname{Cov}(V_i, B_j)$ avec $i \geqslant 2$. On en déduit :

$$\operatorname{Cov}(V,T) = -r\frac{(n-1)^r}{n^{r+1}} + (n-1)r\frac{(n-1)^{r-1}}{n^{r+1}} = 0.$$

Théorème 49

1. On obtient, par bilinéarité et symétrie :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X+Y) &= \operatorname{Cov}(X+Y, X+Y) \\ &= \operatorname{Cov}(X,X) + \operatorname{Cov}(X,Y) + \operatorname{Cov}(Y,X) + \operatorname{Cov}(Y,Y) \\ &= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y). \end{aligned}$$

2. On a, en utilisant le premier point, puis le théorème 48 de la page 1492 :

$$\mathbb{V}(aX+bY) = \mathbb{V}(aX) + \mathbb{V}(bY) + 2\operatorname{Cov}(aX, bY) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y) + 2ab\operatorname{Cov}(X,Y).$$

Exercice 34 On remarque que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ et $X + Y + Z = n$.
Les variables X, Y, Z suivent chacune une loi binomiale de paramètre (n, p_1), (n, p_2), (n, p_3) respectivement. On obtient ainsi :

$$\mathbb{V}(X) = np_1(1-p_1), \ \mathbb{V}(Y) = np_2(1-p_2),$$

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(n-Z) = \mathbb{V}(Z) = np_3(1-p_3).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{2}\big(\mathbb{V}(X+Y)-\mathbb{V}(X)-\mathbb{V}(Y)\big)\\ &= \frac{n}{2}\big(p_3(1-p_3)-p_1(1-p_1)-p_2(1-p_2)\big).\end{aligned}$$

En remplaçant p_3 par $1-p_1-p_2$ et en simplifiant, on obtient :

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = -np_1p_2.$$

Exercice 35 On reprend la décomposition $X = X_1+\cdots+X_n$, où X_i est la variable indicatrice de l'événement « il y a une rencontre au i-ème tirage ».

Chaque X_i est une variable de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$ et donc de variance :

$$\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2}\cdot$$

Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $i\neq j$. L'événement $\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\}$ est réalisé s'il y a rencontre aux i-ème et j-ème tirages. Les résultats des autres tirages sont quelconques. On obtient donc :

$$\mathbb{P}\big(\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\}\big) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}\cdot$$

Mais X_iX_j est aussi une variable de Bernoulli donc :

$$\mathbb{E}(X_iX_j) = \mathbb{P}\big(X_iX_j=1\big) = \mathbb{P}\big(\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\}\big) = \frac{1}{n(n-1)}\cdot$$

On en déduit :

$$\operatorname{Cov}(X_i,X_j) = \mathbb{E}(X_iX_j)-\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = \frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}\cdot$$

On applique le théorème 50, en remarquant que toutes les variances qui interviennent sont égales ainsi que toutes les covariances et qu'il y a $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ termes dans la seconde somme. On obtient :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\operatorname{Cov}(X_i,X_j) = n\mathbb{V}(X_1) + 2\frac{n(n-1)}{2}\operatorname{Cov}(X_1,X_2)$$

et après calcul $\mathbb{V}(X)=1$.

Théorème 51

- Supposons $\mathbb{V}(X)=0$. On sait (*cf.* proposition 43 de la page 1489) qu'alors X est presque sûrement constante. On a donc $\mathbb{P}\big(X=\mathbb{E}(X)\big)=1$.
  Comme $\{X=\mathbb{E}(X)\}\subset\{XY=\mathbb{E}(X)\,Y\}$, on en déduit :
  $$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X)Y\big) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$
  et donc $\operatorname{Cov}(X,Y)=0$.
  Ainsi, quelle que soit la variable aléatoire Y, on a $\operatorname{Cov}(X,Y)=\sigma(X)\sigma(Y)=0$.

- Supposons $\mathbb{V}(X) > 0$. Soit f la fonction définie sur IR par $\lambda \longmapsto \mathbb{V}(\lambda X + Y)$. D'après le théorème 49 de la page 1492, pour tout réel λ :

  $$f(\lambda) = \lambda^2 \mathbb{V}(X) + 2\,\lambda\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y).$$

  Pour tout réel λ, on a $f(\lambda) \geqslant 0$, car une variance est toujours positive. La fonction trinôme f garde un signe constant donc son discriminant est négatif. On obtient $\Delta = 4\Big((\mathrm{Cov}(X,Y))^2 - \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)\Big) \leqslant 0$ et donc :

  $$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)} = \sigma(X)\sigma(Y).$$

  L'égalité $|\mathrm{Cov}(X,Y)| = \sigma(X)\sigma(Y)$ équivaut à $\Delta = 0$ et donc à l'existence de $\lambda_0 \in$ IR tel que :

  $$f(\lambda_0) = \mathbb{V}(\lambda_0 X + Y) = 0.$$

  On sait qu'une variable aléatoire réelle finie admet une variance nulle si, et seulement si, elle est presque sûrement constante. Ainsi $\mathbb{V}(\lambda_0 X + Y) = 0$ équivaut à $\lambda_0 X + Y$ est presque sûrement constante, c'est-à-dire à l'existence de $b \in$ IR tel que $\mathbb{P}\big(\lambda_0 X + Y = b\big) = 1$, c'est-à-dire tel que $\mathbb{P}\big(Y = -\lambda_0 X + b\big) = 1$, ce qui est le résultat voulu avec $a = -\lambda_0$.

Exercice 36

- Par bilinéarité de la covariance, on obtient :

  $$\mathrm{Cov}(X+Y, Y+Z) = \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(Y,Y) + \mathrm{Cov}(Y,Z).$$

  On a $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Z) = \mathrm{Cov}(Y,Z) = 0$ par indépendance deux à deux des variables aléatoires et $\mathrm{Cov}(Y,Y) = \mathbb{V}(Y) = p(1-p)$. On a donc :

  $$\mathrm{Cov}(X+Y, Y+Z) = p(1-p).$$

- Par indépendance des variables, on a $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = p^2$ et $\mathbb{E}(YZ) = p^2$. On remarque que $E\big((XY)(YZ)\big) = \mathbb{E}(XYZ)$ car $Y^2 = Y$. Les variables X, Y et Z sont indépendantes donc $\mathbb{E}(XYZ) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)\,\mathbb{E}(Z) = p^3$. On obtient finalement :

  $$\mathrm{Cov}(XY, YZ) = \mathbb{E}\big((XY)(YZ)\big) - \mathbb{E}(XY)\,\mathbb{E}(YZ) = p^3 - p^4 = p^3(1-p).$$

Exercice 37 Pour tout $i \in [\![1,N]\!]$, on considère la variable X_i qui vaut 1 si le i-ième lancer donne pile et 0 sinon. On obtient une suite de variables indépendantes.

Pour m et n dans $[\![1,N]\!]$, on a $S_m = \sum\limits_{i=1}^{m} X_i$ et $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$.

En utilisant la bilinéarité de la covariance, on obtient :

$$\mathrm{Cov}(S_m, S_n) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Si $i \neq j$, la covariance de X_i et X_j est nulle car ces variables sont indépendantes. Les termes non nuls de la somme sont les $\mathrm{Cov}(X_i, X_i)$ avec $i \leqslant m$ et $i \leqslant n$, c'est-à-dire $i \leqslant \min(m,n)$.

D'autre part, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$ $\mathrm{Cov}(X_i, X_i) = \mathbb{V}(X_i) = p(1-p)$. Finalement, on obtient :

$$\mathrm{Cov}(S_m, S_n) = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \mathbb{V}(X_i) = \min(m,n)\, p(1-p).$$

Exercice 38 Soit X et Y deux variables de Bernoulli non corrélées. Montrons qu'elles sont indépendantes.
La variable XY est encore de Bernoulli et $\{XY = 1\} = \{X = 1\} \cap \{Y = 1\}$, donc :

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}\big(XY = 1\big) - \mathbb{P}\big(X = 1\big)\mathbb{P}\big(Y = 1\big) \\ &= \mathbb{P}\big(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}\big) - \mathbb{P}\big(X = 1\big)\,\mathbb{P}\big(Y = 1\big). \end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{P}\big(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}\big) = \mathbb{P}\big(X = 1\big)\mathbb{P}\big(Y = 1\big)$ et, d'après l'exercice 14 de la page 1476, cela entraîne l'indépendance de X et de Y.

Théorème 54 On sait (*cf.* théorème 50 de la page 1493) que :

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Pour $i \neq j$, les variables X_i et X_j sont indépendantes donc $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ et :

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k).$$

S'entraîner et approfondir

30.1 Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire toutes les boules successivement sans remise.
Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le rang de la dernière boule noire tirée.
Déterminer la loi de X et son espérance.

30.2 Une urne contient n boules indiscernables numérotées de 1 à n, que l'on tire successivement, sans remise. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note u_i le numéro de la i-ième boule tirée. On considère la variable aléatoire X qui à tout tirage fait correspondre le plus grand entier k tel que $u_1 < u_2 < \ldots < u_k$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
2. Montrer que $\mathbb{E}\,[X] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\,(X \geqslant k)$. Déterminer $\mathbb{E}[X]$

30.3 (Formule du crible)
Soit A_1, $A_2, \ldots,$ A_n des événements d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

1. Montrer que $1 - \mathbb{1}_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \prod\limits_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i})$.
2. En déduire que $\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}}$.
3. En déduire la *formule du crible* :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\,(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

30.4 Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. Pour tout événement A de probabilité non nulle, on pose :
$$\mathbb{E}(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x \mid A).$$
Il s'agit de l'espérance de X dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P}_A)$.

1. Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements, de probabilité non nulle. Démontrer la *formule de l'espérance totale* :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X|A_k)\,\mathbb{P}(A_k).$$
2. Soit n et r dans $\mathbb{N}^*$. On considère n urnes U_1, $U_2, \ldots,$ U_n. Dans l'urne j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, il y a j boules blanches et $n - j$ boules noires. On effectue r tirages avec remise dans une urne choisie au hasard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées au bout des r tirages.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

30.5 (Urne de Pólya)

Soit r, b et c trois entiers naturels non nuls. L'urne $\mathcal{U}$ contient initialement r boules rouges et b boules blanches. On pose $N = r + b$. On tire les boules de $\mathcal{U}$ une à une ; à l'issue de chaque tirage, la boule prélevée dans l'urne est remise, avec c boules de la même couleur.

Pour $n \geqslant 1$, on note X_n le nombre de boules rouges tirées lors des n premiers tirages, Y_n la variable indicatrice de l'événement « le n-ième tirage donne une boule rouge ».

1. Déterminer la loi de Y_1.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \frac{r + c\,\mathbb{E}(X_n)}{N + nc}.$$
3. Exprimer X_n à l'aide des variables $Y_1, \ldots, Y_n$ et en déduire que toutes les variables Y_n ont même loi.
4. Déterminer l'espérance de X_n.

30.6 Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une ou de deux unités suivant la procédure suivante :

- au départ la puce est en O ;
- si, à un instant, la puce est au point d'abscisse k, à l'instant d'après elle sera soit au point d'abscisse $k+1$, avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit au point d'abscisse $k+2$, avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
- les sauts sont indépendants.

1. Pour $n \geqslant 1$, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts de deux unités effectués par la puce au cours des n premiers sauts.
Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.
2. Pour $n \geqslant 1$, on note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de la puce après n sauts.
Exprimer X_n en fonction de S_n. En déduire l' espérance et la variance de X_n.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, note Y_n la variable aléatoire égale au nombre minimum de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser (au cas où on ne s'y arrêterait pas) la case d'abscisse n. On a donc $Y_0 = 0$.
   (a) Déterminer les valeurs prises par Y_n.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout entier $k \geqslant 1$:
   $$\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1).$$
   (c) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$:
   $$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1.$$
   (d) Déterminer un réel a tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \mathbb{E}(Y_n) - na$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
   Déterminer alors u_n, puis $\mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de n.

⋆ **30.7 (Inégalité de Bernstein)**

Soit S_n une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, qui suit la loi binomiale de paramètre (n, p) et $x > 0$. On pose $q = 1 - p$.

1. Soit $\lambda > 0$. Montrer, en utilisant l'inégalité de Markov :
$$\mathbb{P}\Big(S_n - np \geqslant nx\Big) \leqslant \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda(S_n - np)})}{e^{n\lambda x}}.$$
2. Montrer que $\mathbb{E}(e^{\lambda(S_n - np)}) = (pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})^n$.
3. Montrer que, pour tout réel t, $e^t \leqslant e^{t^2} + t$. En déduire que :
$$\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant e^{n(\lambda^2 - \lambda x)},$$
puis que :
$$\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant e^{-\frac{nx^2}{4}}.$$
4. Expliquer comment on démontrerait de la même façon que :
$$\mathbb{P}(S_n - np \leqslant -nx) \leqslant e^{-\frac{nx^2}{4}}.$$
En déduire l'inégalité de Bernstein :
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant x\right) \leqslant 2e^{-\frac{nx^2}{4}}.$$
Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

30.8 Soit X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p \in \,]0,1[$ sur le même espace probabilisé. Soit $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Déterminer :

1. la loi du couple (U, V) ;
2. la covariance de U et V ;
3. U et V sont-elles indépendantes ? Conclusion ?

30.9 Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes distinctes ($n \geqslant 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in \,]0,1[$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Quelle est la loi de X ? Donner $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.
2. Après ses n recherches, le secrétaire demande une deuxième fois, et dans les mêmes conditions, chacun des $n - k$ correspondants qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels et $Z = X + Y$, le nombre total de correspondants obtenus.
   (a) Déterminer la loi de Y sachant $\{X = k\}$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. En déduire la loi conjointe de X et Y.
   (b) Montrer que Z suit une loi binomiale que l'on précisera.

30.10 Une urne contient n jetons ($n \geqslant 2$), numérotés de 1 à n. On tire une poignée de jetons (*i.e.* une partie, éventuellement vide, de l'ensemble des jetons). On note N le nombre de jetons tirés, et S la somme des numéros des jetons tirés. Enfin, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si le i-ème jeton est dans la poignée et 0 sinon. On suppose que toutes les poignées sont équiprobables.

1. Déterminer la loi de N, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de X_i. Montrer que les variables X_i sont 2 à 2 indépendantes.
3. Exprimer S en fonction des X_i. Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{V}(S)$.

30.11 Soit n un entier naturel et N un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant $n+1$ boules numérotées de 0 à n. On y effectue une suite de N tirages d'une boule à la fois avec remise. On définit la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in[\![1,N]\!]}$ de la manière suivante :

- X_1 est la variable aléatoire certaine égale à 1 ;
- pour $p \geqslant 2$, la variable aléatoire X_p vaut 1 si le numéro obtenu au p-ième tirage n'a pas déjà été obtenu au cours des tirages précédents et 0 dans le cas contraire.

1. Déterminer la loi de X_2.
2. Montrer que, pour $1 \leqslant p \leqslant N$, la variable X_p suit la loi de Bernoulli de paramètre $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{p-1}$.
   On pourra considérer la variable aléatoire Y_p égale au numéro de la boule tirée lors du p-ième tirage.
3. (a) Montrer que, si $i<j$, on a $\mathbb{P}(\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\}) = \dfrac{(n-1)^{i-1}n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$.
   (b) Calculer la covariance de (X_i,X_j). Conclusion ?
4. On note Z_N la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des N tirages. Déterminer son espérance.

$\star\star$ **30.12 (Fonction génératrice)**

Si X est une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on pose :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad g_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{k\in X(\omega)} t^k\,\mathbb{P}(X=k).$$

La fonction g_X est appelée fonction génératrice de X.

1. Montrer que la loi de X est entièrement déterminée par fonction g_X.
2. Montrer que, si X_1 et X_2 sont des variables indépendantes telles que $X_1(\Omega)\subset\mathbb{N}$ et $X_1(\Omega)\subset\mathbb{N}$, alors :
   $$g_{X_1+X_2} = g_{X_1}g_{X_2}.$$
3. Déterminer la fonction génératrice d'une variable suivant une loi binomiale. Retrouver ainsi le fait si X_1 et X_2 sont de variables indépendantes suivant les lois binomiales de paramètre (n_1,p) et (n_2,p), X_1+X_2 suit une loi binomiale.

4. On lance deux dés classiques à six faces. Le résultat affiché par le i-ème dé, pour $i = 1$ et $i = 2$, est une variable aléatoire X_i à valeurs dans $[\![1, 6]\!]$. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont supposées indépendantes. On pose $Y = X_1 + X_2$.
   (a) On veut montrer que, même si les dés sont pipés, il est impossible que Y suive la loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$. On raisonne par l'absurde.
      i. Déterminer alors la fonction génératrice de Y. Quelles sont ses racines ?
      ii. Montrer que g_{X_1} et g_{X_2} sont deux polynômes de degré 6 ayant 0 comme racine tels que $g_{X_1} g_{X_2} = g_Y$.
      Conclure que c'est impossible.
   (b) On veut montrer que si les dés sont pipés, il est impossible que la loi de Y soit la même que quand les dés ne sont pas pipés.
      i. Déterminer la fonction génératrice de Y quand les dés sont équilibrés. On la note P. Déterminer les racines de P.
      ii. On suppose que $X_1 + X_2$ suive la même loi que dans le cas où les dés sont équilibrés. En écrivant que $g_{X_1} g_{X_2} = P$, montrer que les dés sont équilibrés.

30.13 (Entropie)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) = -x \ln x \quad \text{si} \quad x > 0.$$

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans un ensemble fini E. On note N le nombre d'éléments de E. On appelle entropie de X le réel noté $H(X)$ défini par

$$H(X) = \sum_{x \in E} f\big(\mathbb{P}(X = x)\big).$$

1. (a) Calculer $H(X)$ lorsque X est presque sûrement constante.
   (b) Calculer $H(X)$ lorsque X suit une loi uniforme sur E.
2. (a) Montrer que, pour $x \geqslant 0$, on a $f(x) \leqslant 1 - x$. Dans quel cas a-t-on égalité ?
   (b) En déduire $\displaystyle\sum_{x \in E} f\big(N\mathbb{P}(X = x)\big) \leqslant 0$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{x \in E} f\big(N\mathbb{P}(X = x)\big) = -N \ln N + N H(X)$.
   En déduire une majoration de $H(X)$.
3. (a) Pour quelles variables aléatoires X l'entropie $H(X)$ est-elle minimale ?
   (b) Pour quelles variables aléatoires X l'entropie $H(X)$ est-elle maximale ?
4. Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω à valeurs respectivement dans les ensembles finis E et F. On note Z le couple (X, Y). Démontrer que si les variables X et Y sont indépendantes, alors $H(Z) = H(X) + H(Y)$.

30.14 Soient p et q deux nombres réels tels que $0 < p < q < 1$, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre p et $Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre q. On pose :

$$d(q,p) = q \ln\left(\frac{q}{p}\right) + (1-q)\ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right).$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \{0,1\}$, on a :
$$\frac{\mathbb{P}(X_1 = x)}{\mathbb{P}(Y_1 = x)} = \exp\left(-x \ln\left(\frac{q}{p}\right) - (1-x)\ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right)\right).$$
2. Pour $x \in \{0,1\}^n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n > qn$, montrer que :
$$\frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)}{\mathbb{P}(Y_1 = x_1, \ldots, Y_n = x_n)} \leqslant \exp\left(-nd(q,p)\right).$$
3. En déduire que :
$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n > nq) \leqslant \exp\left(-nd(q,p)\right).$$

30.15 On dispose de deux boîtes A et B, deux boules noires et deux boules rouges. Au départ, chaque urne contient deux des quatre boules. À chaque essai, on tire une boule de chacune des boîtes et on la replace dans l'autre boîte.
Soit X_0 le nombre de boules noires placées initialement dans A et X_n le nombre de boules noires dans A après n essais. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = \mathbb{P}(X_n = 0), \quad q_n = \mathbb{P}(X_n = 1) \quad \text{et} \quad r_n = \mathbb{P}(X_n = 2).$$

1. Déterminer la loi de X_0 si, au départ, les boules sont placées au hasard dans les deux boîtes.

   Dans la suite, X_0 est quelconque.
2. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}.$$
3. Montrer que la matrice M est semblable à $D = \mathrm{Diag}\left(1, 0, -\frac{1}{2}\right)$. On note P une matrice inversible telle que $M = PDP^{-1}$ (il est inutile de calculer P^{-1}).
4. On pose $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$. Exprimer p_n, q_n et r_n en fonction de a, b, c et n.

   En déduire que les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Déterminer leurs limites respectives p, q et r (on pourra remarquer que $p+q+r=1$). Commenter.

30.16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de variables aléatoires centrées, réduites et mutuellement indépendantes sur le même espace probabilisé fini. On considère la matrice M aléatoire d'ordre n dont les coefficients sont les $X_{i,j}$ et on pose $D = \det(M)$. Calculer l'espérance et la variance de D.

Solution des exercices

30.1 On choisit pour Ω l'ensemble des répartitions possibles des boules blanches et noires dans les $2n$ tirages, donc $\operatorname{card}(\Omega) = \binom{2n}{n}$. On munit Ω de la probabilité uniforme. On a $X(\Omega) = [\![n, 2n]\!]$. Pour tout entier k de $[\![n, 2n]\!]$, $\{X = k\}$ est l'événement « les n boules noires sont tirées lors des k premiers tirages et la dernière boule noire est tirée au k-ième tirage ». Cela montre que :

$$\operatorname{card}\big(\{X = k\}\big) = \binom{k-1}{n-1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}.$$

En utilisant, pour $k \geqslant n-1$ la relation $k\binom{k-1}{n-1} = n\binom{k}{n}$, il vient

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=n}^{2n} k \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n}.$$

La relation de Pascal généralisée (*cf.* exercice 22 de la page 1380) donne :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n}{\binom{2n}{n}} \binom{2n+1}{n+1} = \frac{n(2n+1)}{n+1}.$$

30.2 1. Une éventualité est une permutation $(u_1, \ldots, u_n)$ de $[\![1, n]\!]$ et $\operatorname{card} \Omega = n!$. On munit Ω de la probabilité uniforme. On a $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

La deuxième question incite à calculer $\mathbb{P}(X \geqslant k)$. L'événement $\{X \geqslant k\}$ est réalisé si, et seulement si, $u_1 < u_2 < \cdots < u_k$. Le nombre de suites strictement croissantes de k réels que l'on peut obtenir dans $[\![1, n]\!]$ est $\binom{n}{k}$. Les $(n-k)$ éléments restants pouvant être tirées dans un ordre quelconque, on obtient :

$$\operatorname{card}\big(\{X \geqslant k\}\big) = \binom{n}{k}(n-k)! \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X \geqslant k) = \frac{1}{k!}.$$

On en déduit, pour $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k+1) = \begin{cases} \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!} & \text{si } \ k < n \\ \dfrac{1}{n!} & \text{si } \ k = n, \end{cases}$$

car $\mathbb{P}(X \geqslant n+1) = 0$.

2. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X \geqslant k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)\,\mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant k), \end{aligned}$$

car $\mathbb{P}(X \geqslant n+1) = 0$. On obtient :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

30.3 1. Pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\prod_{i=1}^{n}(1-\mathbb{1}_{A_i}(\omega)) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\bar{A}_i}(\omega) = \mathbb{1}_{\bigcap\limits_{i=1}^{n}\bar{A}_i}(\omega) = 1-\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}(\omega),$$

d'où l'égalité des applications.

2. En développant, on obtient :

$$1-\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i} = 1+\sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ I\neq\varnothing}}(-1)^{\operatorname{card} I}\prod_{i\in I}\mathbb{1}_{A_i} = 1+\sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ I\neq\varnothing}}(-1)^{\operatorname{card} I}\mathbb{1}_{\bigcap\limits_{i\in I}A_i}.$$

On regroupe les termes selon le cardinal k de I :

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i} &= \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ I\neq\varnothing}}(-1)^{\operatorname{card} I-1}\prod_{i\in I}\mathbb{1}_{\bigcap\limits_{i\in I}A_i}\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\mathbb{1}_{A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}}.\end{aligned}$$

3. Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\mathbb{P}\left(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right).\end{aligned}$$

30.4 1. On obtient en échangeant l'ordre des sommations et en appliquant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X\mid A_k)\mathbb{P}(A_k) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{x\in X(\Omega)}x\mathbb{P}(X=x\mid A_k)\mathbb{P}(A_k)\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)}x\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=x\mid A_k)\mathbb{P}(A_k)\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)}x\,\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{E}(X).\end{aligned}$$

2. (a) Pour $1\leqslant j\leqslant n$, on considère l'événement A_j « on tire dans l'urne j ».

Alors $(A_1,\ldots,A_n)$ est un système complet d'événements. On a $\mathbb{P}(A_j)=\dfrac{1}{n}$, car on choisit l'urne au hasard.

La variable X est à valeurs dans $[\![0,r]\!]$. Pour $j \in [\![1,n]\!]$, la loi de X sachant A_j est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(r, \dfrac{j}{n}\right)$, car on effectue alors r tirages avec remise dans une urne où la proportion de boules blanches est $\dfrac{j}{n}\cdot$

On en déduit, pour tout $k \in [\![0,r]\!]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)\,\mathbb{P}(X=k \mid A_j)\\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\binom{r}{k}\left(\frac{j}{n}\right)^{k}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{r-k}\\ &= \frac{1}{n^{r+1}}\binom{r}{k}\sum_{j=1}^{n} j^k (n-j)^{r-k}.\end{aligned}$$

(b) On applique la formule de l'espérance totale. On a $\mathbb{E}(X \mid A_j) = \dfrac{rj}{n}$ (espérance de la loi binomiale) et donc :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{rj}{n} = \frac{rn(n+1)}{2n^2} = \frac{r(n+1)}{2n}\cdot$$

30.5 1. La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage est $\dfrac{r}{N}$, donc Y_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{r}{N}\cdot$

2. L'ensemble des valeurs prises par X_n est $[\![0,n]\!]$. On prend comme système complet d'événements $\big(\{X_n = k\}\big)_{k\in[\![0,n]\!]}$. La variable aléatoire Y_{n+1} étant une variable indicatrice, on a :

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \mathbb{P}(Y_{n+1}=1) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n=k)\,\mathbb{P}(Y_{n+1}=1 \mid X_n=k).$$

Si $X_n = k$, on a rajouté ck boules rouges dans l'urne et cn boules en tout. On a donc $\mathbb{P}(Y_{n+1}=1 \mid X_n=k) = \dfrac{r+ck}{N+cn}\cdot$ On obtient :

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n=k)\frac{r+ck}{N+cn} = \mathbb{E}\left(\frac{r+cX_n}{N+cn}\right),$$

d'après le théorème de transfert et donc, par linéarité :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{r+c\,\mathbb{E}(X_n)}{N+cn}\cdot$$

3. On a clairement $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et donc $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k)$.

Démontrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_1)$.

La propriété est évidente pour $n=1$ et si elle est vraie jusqu'au rang n, alors on a $\mathbb{E}(X_n) = n\mathbb{E}(Y_1) = \dfrac{nr}{N}$ et :

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \frac{r+c\,\mathbb{E}(X_n)}{N+cn} = \frac{r+\dfrac{nrc}{N}}{N+cn} = \frac{r}{N} = \mathbb{E}(Y_1).$$

On a donc, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{P}(Y_1 = 1)$. Toutes les variables Y_n ont même loi.

4. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\mathbb{E}(X_n) = n\mathbb{E}(Y_1) = \dfrac{nr}{N}\cdot$

30.6 À chaque saut, on a le choix entre deux déplacements. Le nombre total de trajets possibles pour les n premiers sauts est donc 2^n. Pour décrire l'expérience aléatoire correspondant aux n premiers sauts, on peut donc prendre comme univers l'ensemble de ces 2^n trajets, que l'on munit de la probabilité uniforme, car à chaque saut les deux possibilités sont équiprobables. Même si la question du choix de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ choisi n'est pas posée, les raisonnements sur les variables aléatoires suppose la présence sous-jacente d'un espace probabilisé.

1. Chaque saut est d'une unité ou de deux unités avec une probabilité $\dfrac{1}{2}\cdot$ Les sauts étant indépendants, le nombre S_n de saut de deux unités suit une loi binomiale de paramètre $\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$. On a donc $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(S_n) = \dfrac{n}{4}\cdot$

2. On remarque que $X_n = 2S_n + (n - S_n) = n + S_n$. On en déduit :
$$\mathbb{E}(X_n) = n + \mathbb{E}(S_n) = n + \frac{n}{2} = \frac{3n}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(S_n) = \frac{n}{4}\cdot$$

3. (a) En au plus n sauts, on aura atteint la case n (cas où on ne fait que des sauts d'une unité). Il faut au moins $\frac{n}{2}$ sauts avant d'atteindre la case n (cas où on ne fait que des sauts de deux unités). Le plus petit entier supérieur à $\frac{n}{2}$ est $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. L'ensemble des valeurs prises par Y_n est donc $[\![\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, n]\!]$.

   (b) On applique la formule des probabilités totales avec $\big(\{X_k = 1\}, \{X_k = 2\}\big)$ comme système complet d'événements. On a :
$$\mathbb{P}\left(Y_n = k \mid X_k = 1\right) = \mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1),$$
$$\mathbb{P}\left(Y_n = k \mid X_k = 2\right) = \mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1).$$
   En effet pour atteindre ou dépasser la case n au bout de k sauts, sachant que le dernier saut est d'une unité (resp. de deux unités), il faut atteindre ou dépasser la case $n-1$ (resp. $n-2$) au bout de $k-1$ sauts. On en déduit :
$$\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1).$$

   (c) Pour la simplicité, on écrit $\mathbb{E}(Y_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y_n = k)$, en ajoutant des termes nuls. En utilisant la question précédente, on obtient :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\left(\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + \mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1)\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\left(\mathbb{P}(Y_{n-1} = j) + \mathbb{P}(Y_{n-2} = j)\right).\end{aligned}$$
   En supprimant des termes nuls et en séparant en deux sommes, on en déduit :
$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}(j+1)\,\mathbb{P}(Y_{n-1} = j) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-2}(j+1)\,\mathbb{P}(Y_{n-2} = j),$$

ce qui, par la formule de transfert et la linéarité de l'espérance, donne :
$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(Y_{n-1}+1\right) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(Y_{n-2}+1\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1.$$

4. On a, pour $n \geqslant 2$:
$$\begin{aligned} u_n &= \mathbb{E}(Y_n) - na \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-2}) - na + 1 \\ &= \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n-2} + \frac{(n-1)a}{2} + \frac{(n-2)a}{2} - na + 1 \\ &= \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n-2} + \frac{2-3a}{2}. \end{aligned}$$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux si, et seulement si, $2-3a=0$ c'est-à-dire $a=\dfrac{2}{3}$, ce que nous supposons désormais. L'équation caractéristique est alors $x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} = 0$, de racines 1 et $-\dfrac{1}{2}\cdot$

Il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda + \mu\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\cdot$

La variable aléatoire Y_0 est égale à 0 donc $\mathbb{E}(Y_0)=0$ et $u_0=0$. La variable Y_1 est égale à 1, donc $\mathbb{E}(Y_1)=1$ et $u_1 = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}\cdot$

Des valeurs de u_0 et u_1, on tire $\lambda = \dfrac{2}{9}$ et $\mu = -\dfrac{2}{9}\cdot$

Ainsi pour tout entier naturel n :
$$u_n = \frac{2}{9} - \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}(Y_n) = \frac{2n}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

30.7 1. Comme $\lambda > 0$ et exp croît, on a :
$$\{S_n - np \geqslant nx\} = \{\lambda(S_n-np) \geqslant n\lambda x\} = \{e^{\lambda(S_n-np)} \geqslant e^{n\lambda x}\}.$$
Comme la variable $e^{\lambda(S_n-np)}$ est positive, on peut lui appliquer l'inégalité de Markov. On obtient :
$$\mathbb{P}\Big(S_n - np \geqslant nx\Big) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda(S_n-np)} \geqslant e^{n\lambda x}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda(S_n-np)})}{e^{n\lambda x}}\cdot$$

2. En appliquant la formule de transfert, on obtient :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\lambda(S_n-np)}) &= \sum_{k=0}^{n} e^{\lambda(k-np)}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = e^{-n\lambda p}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{\lambda}p\right)^k q^{n-k} \\ &= e^{-n\lambda p}\left(e^{\lambda}p+q\right)^n = \left(e^{-\lambda p}e^{\lambda}p + qe^{-\lambda p}\right)^n \\ &= (pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})^n. \end{aligned}$$

3. • Posons pour tout réel t, $f(t) = e^{t^2} + t - e^t$. On a, pour tout t,
$$f'(t) = 2te^{t^2} + 1 - e^t \qquad \text{et} \qquad f''(t) = (4t^2+2)e^{t^2} - e^t.$$

Si $t \notin [0,1]$, on a $f''(t) > 0$ car $t^2 \geqslant t$ et donc $(2t^2+2)e^{t^2} \geqslant 2e^t$.
Si $t \in [0,1]$, on écrit $f''(t) = e^{t^2}\left(4t^2+2-e^{t-t^2}\right)$. Comme $t - t^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$, on a $e^{t-t^2} \leqslant e^{\frac{1}{4}} < 2$ et donc $f''(t) > 0$.
La fonction f' croît sur $\mathbb{R}$. Comme $f'(0) = 0$, elle est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$. Le minimum de f est obtenu en 0 et vaut $f(0) = 0$. Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e^t \leqslant e^{t^2} + t.$$

- En appliquant cette inégalité à λq et $-\lambda p$, puis en majorant $\lambda^2 q^2$ et $\lambda^2 p^2$ par λ^2, on obtient :

$$\mathbb{E}(e^{\lambda(S_n-np)}) \leqslant \left(p(e^{\lambda^2q^2}+\lambda q)+q(e^{\lambda^2p^2}-\lambda p)\right)^n \leqslant \left((p+q)e^{\lambda^2}\right)^n \leqslant e^{n\lambda^2},$$

puis $\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(e^{\lambda(S_n-np)})}{e^{n\lambda x}} \leqslant e^{n(\lambda^2-\lambda x)}$.
Cette inégalité est vraie pour tout $\lambda > 0$. On choisit le λ qui minimise le membre de droite de l'inégalité, c'est-à-dire $\dfrac{x}{2}\cdot$

On obtient $\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant e^{-\frac{nx^2}{4}}$.

4. On montre de même que, pour $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}(S_n - np \leqslant -nx) = \mathbb{P}(\lambda(np - S_n) \geqslant n\lambda x) \leqslant \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda(np-S_n)})}{e^{n\lambda x}}\cdot$$

On calcule ensuite l'espérance ; par rapport au calcul précédent, cela revient simplement à changer λ en $-\lambda$. On obtient le même majorant $e^{-\frac{nx^2}{4}}$. On a finalement :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right| \geqslant x\right) &= \mathbb{P}\left(|S_n - np| \geqslant nx\right)\\ &= \mathbb{P}\left(S_n - np \geqslant nx\right) + \mathbb{P}\left(S_n - np \leqslant -nx\right)\\ &\leqslant 2e^{-\frac{nx^2}{4}}.\end{aligned}$$

On a $\mathbb{E}\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = p$ et $\mathbb{V}\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{p(1-p)}{n}$, donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}-p\right| \geqslant x\right) \leqslant \dfrac{p(1-p)}{nx^2}\cdot$ On voit, pour les grandes valeurs de n, l'écrasante supériorité de l'inégalité de Bernstein.

30.8 1. On a $U(\Omega) = \{0,1,2\}$, $V(\Omega) = \{-1,0,1\}$.
Pour tout $(k,\ell) \in \{0,1,2\} \times \{-1,0,1\}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U = k, V = \ell) &= \mathbb{P}\left(X = \frac{k+\ell}{2}, Y = \frac{k-\ell}{2}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(X = \frac{k+\ell}{2}\right)\mathbb{P}\left(Y = \frac{k-\ell}{2}\right).\end{aligned}$$

Cette probabilité est nulle si k et ℓ n'ont pas la même parité. On représente la loi conjointe et les lois marginales dans un tableau. Pour simplifier, on pose $q = 1-p$.

$U \backslash V$	-1	0	1	loi de U
0	0	q^2	0	q^2
1	pq	0	pq	$2pq$
2	0	p^2	0	p^2
loi de V	pq	p^2+q^2	pq	

2. On obtient $\mathbb{E}(U) = 2p$, $\mathbb{E}(V) = 0$ et $\mathbb{E}(UV) = -pq + pq = 0$ (tous les autres termes sont nuls). On en déduit $\operatorname{Cov}(U,V) = 0$.
3. Manifestement, les variables U et V ne sont pas indépendantes. On a, par exemple :
$$\mathbb{P}(U=0)\,\mathbb{P}(V=1) = pq^3 \neq 0 = \mathbb{P}(U=0, V=1).$$
Mais, d'après la question 2, elles ne sont pas corrélées. On retrouve ce qui a été signalé page 1495 : ce n'est pas une condition suffisante d'indépendance.

30.9 1. On est dans un schéma de Bernoulli (on fait l'hypothèse que les résultats des différents appels sont indépendants), donc X suit la loi binomiale de paramètre (n,p). On en déduit $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

2. (a) La variable aléatoire Y est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. La loi de Y sachant $\{X=k\}$ est la loi binomiale de paramètre $(n-k,p)$. En effet, il reste $n-k$ correspondants à joindre dans les mêmes conditions que dans la première série d'appels. On en déduit que, pour tout $(k,\ell) \in [\![0,n]\!]^2$:
$$\mathbb{P}(X=k, Y=\ell) = \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=\ell \mid X=k)$$
$$= \begin{cases} \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\binom{n-k}{\ell}p^\ell(1-p)^{n-k-\ell} & \text{si} \quad \ell \leqslant n-k \\ 0 & \text{si} \quad \ell > n-k. \end{cases}$$
Dans le premier cas, on simplifie pour obtenir :
$$\mathbb{P}(X=k, Y=\ell) = \frac{n!}{k!\ell!(n-k-\ell)!}p^{k+\ell}(1-p)^{2(n-k)-\ell}.$$

(b) La variable Z est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:
$$\mathbb{P}(Z=i) = \sum_{k=0}^{i}\mathbb{P}(X=k, Y=i-k) = \sum_{k=0}^{i}\frac{n!}{k!(i-k)!(n-i)!}p^i(1-p)^{2(n-k)-i+k}$$
$$= \binom{n}{i}p^i(1-p)^{2(n-i)}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}(1-p)^{i-k}$$
$$= \binom{n}{i}p^i(1-p)^{2(n-i)}(2-p)^i = \binom{n}{i}(p(2-p))^i\left((1-p)^2\right)^{n-i}.$$
En remarquant que $1-p(2-p) = (1-p)^2$, on peut conclure que Z suit la loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$.

30.10 Un élément de Ω est une partie de l'ensemble des jetons. On a donc $\operatorname{card}\Omega = 2^n$. On munit Ω de la probabilité uniforme.

1. On a $N(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(N=k) = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}\cdot$ Ainsi N suit la loi binomiale de paramètre $\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$. On en déduit $\mathbb{E}(N) = \dfrac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(N) = \dfrac{n}{4}\cdot$

2. On a $\mathbb{P}(X_i = 1) = \dfrac{2^{n-1}}{2^n} = \dfrac{1}{2}$, car il y a 2^{n-1} poignées contenant le jeton i (en effet, une telle poignée est constituée du jeton i et d'une partie quelconque de l'ensemble des $n-1$ jetons restants). La variable aléatoire X_i suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$; on a donc $\mathbb{E}(X_i) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{V}(X_i) = \dfrac{1}{4}\cdot$

   On a $\mathbb{P}(\{X_i = 1\} \cap \{X_j = 1\}) = \dfrac{2^{n-2}}{2^n} = \dfrac{1}{4}$, car il y a 2^{n-2} poignées contenant les jetons i et j (il s'agit de choisir une partie quelconque de l'ensemble des jetons différents des jetons i et j). On en déduit :
$$\mathbb{P}(\{X_i = 1\} \cap \{X_j = 1\}) = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \mathbb{P}(X_i = 1)\,\mathbb{P}(X_j = 1).$$
   Cela montre l'indépendance de ces deux variables de Bernoulli.

3. On a clairement $S = \sum\limits_{i=1}^{n} iX_i$. On en déduit :
$$\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{n} i\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{4}\cdot$$
   Comme les variables X_i sont indépendantes, on a :
$$\mathbb{V}(S) = \sum_{i=1}^{n} i^2\mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}\cdot$$

30.11 1. La variable aléatoire X_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{n}{n+1}\cdot$

2. La variable Y_p suit la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$. On applique la formule des probabilités totales :
$$\mathbb{P}(X_p = 1) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_p = 1 \mid Y_p = k)\mathbb{P}(Y_p = k) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_p = 1 \mid Y_p = k).$$
   Or si $\{Y_p = k\}$ est réalisé, alors $\{X_p = 1\}$ est réalisé si les $(p-1)$ premiers tirages sont tous effectués parmi les n boules différentes de la boule numéro k.

   On obtient $\mathbb{P}(X_p = 1 \mid Y_p = k) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{p-1}$, puis :
$$\mathbb{P}(X_p = 1) = \frac{1}{n+1}(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{p-1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{p-1}.$$
   Ainsi X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{p-1}$.

3. Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, tel que $i < j$.

   (a) La famille $(\{Y_i = k, Y_j = \ell\})_{(k,\ell)\in[\![0,n]\!]^2}$ est un système complet d'événements et, pour tout couple (k,ℓ), $\mathbb{P}\left(Y_i = k, Y_j = \ell\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}\cdot$ On en déduit :

$$\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} P\big(\{X_i = 1, X_j = 1\} \mid \{Y_i = k, Y_j = \ell\}\big)\frac{1}{(n+1)^2}\cdot$$

   $*$ Si $k = \ell$, on a $\mathbb{P}\big(\{X_i = 1, X_j = 1\} \mid \{Y_i = k, Y_j = \ell\}\big) = 0$.
   $*$ Si $k \neq \ell$ et si $\{Y_i = k, Y_j = \ell\}$ est réalisé, alors $\{X_i = 1, X_j = 1\}$ est réalisé si les $i-1$ premiers tirages ne font apparaître ni la boule numéro k, ni la boule numéro ℓ et si la boule numéro ℓ n'apparaît pas lors des $j-i-1$ tirages du rang $i+1$ au rang $j-1$. On a donc :

$$\mathbb{P}\big(\{X_i = 1, X_j = 1\} \mid \{Y_i = k, Y_j = \ell\}\big) = \frac{(n-1)^{i-1}n^{j-i-1}}{(n+1)^{j-2}}\cdot$$

   On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) &= \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{\substack{k=0\\k\neq\ell}}^{n} \frac{(n-1)^{i-1}n^{j-i-1}}{(n+1)^{j-2}}\,\frac{1}{(n+1)^2}\\ &= \frac{(n-1)^{i-1}n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}},\end{aligned}$$

   car il y en tout $(n+1)n$ termes.

   (b) La variable aléatoire X_iX_j suit une loi de Bernoulli; le produit X_iX_j prend la valeur 1 si, et seulement si, X_i et X_j prennent la valeur 1. On a donc :

$$\mathbb{E}(X_iX_j) = \mathbb{P}(X_iX_j = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{(n-1)^{i-1}n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}\cdot$$

   On en déduit :

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_iX_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = \frac{(n-1)^{i-1}n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{i+j-2}.$$

   On peut écrire :

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{j-1}\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{i-1}\right).$$

   On en déduit que si $i \geqslant 2$, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) \neq 0$, donc les variables aléatoires X_i et X_j ne sont pas indépendantes. Par contre, la variable X_1 qui est constante est indépendante de toute autre variable.

4. On a $Z_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$. Par linéarité de l'espérance :

$$E(Z_N) = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k-1} = (n+1)\left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{N}\right).$$

30.12 1. La fonction g_X est une fonction polynomiale dont les coefficients sont les $\mathbb{P}(X = k)$. La donnée de g_X détermine donc les $\mathbb{P}(X = k)$, c'est-à-dire la loi de X.

2. Pour tout réel t :
$$g_{X_1+X_2}(t) = \mathbb{E}\left(t^{X_1+X_2}\right) = \mathbb{E}\left(t^{X_1}t^{X_2}\right) = \mathbb{E}\left(t^{X_1}\right)\mathbb{E}\left(t^{X_2}\right) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t),$$
car les variables t^{X_1} et t^{X_2} sont indépendantes (fonctions de variables indépendantes).

3. Si X suit la loi binomiale de paramètres (n,p), on a, pour tout t, d'après la formule de transfert :
$$g_X(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pt)^k(1-p)^{n-k} = (pt+1-p)^n.$$
Si X_1 et X_2 sont des variables indépendantes suivant les lois binomiales de paramètre (n_1,p) et (n_2,p), on a, pour tout réel t :
$$g_{X_1+X_2}(t) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t) = (pt+1-p)^{n_1}(pt+1-p)^{n_2} = (pt+1-p)^{n_1+n_2}.$$
On reconnaît la fonction génératrice de paramètre (n_1+n_2,p). D'après la question 1, la variable X_1+X_2 suit la loi binomiale de paramètre (n_1+n_2,p).

4. (a) Supposons que la variable aléatoire Y suive la loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$. Pour tout réel t :
$$g_Y(t) = \sum_{k=2}^{12} t^k\mathbb{P}(Y = k) = \frac{t^2}{11}\sum_{j=0}^{10} t^k.$$
Pour $t \neq 1$, on a $g_Y(t) = \dfrac{t^2}{11}\cdot\dfrac{t^{11}-1}{t-1}$.
Les racines de g_Y sont 0 (qui est racine double) et les racines onzièmes de l'unité, différentes de 1, au nombre de 10, et toutes simples. Comme 11 est impair, g_Y n'a pas de racine réelle à part 0.

(b) On a $g_Y = g_{X_1}g_{X_2}$. Comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = [\![1,6]\!]$, les polynômes g_{X_1} et g_{X_2} sont de degré inférieurs ou égal à 6 et ont 0 comme racine. Comme g_Y est de degré 12, g_{X_1} et g_{X_2} sont de degré 6. Ils ont chacun à part 0 cinq racines non réelles (car ce sont des racines de g_Y). C'est impossible car les racines non réelles d'un polynôme à coefficients réels sont deux à deux conjuguées.
La somme $Y = X_1+X_2$ ne peut pas suivre la loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$.

5. (a) La fonction génératrice correspondant au résultat d'un dé équilibré est :
$$\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} t^k = \frac{t}{6}\sum_{k=0}^{5} t^k.$$
On a donc $P(t) = \dfrac{t^2}{36}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{5} t^k\right)^2$ et, pour $t \neq 1$, $P(t) = \dfrac{t^2}{36}\left(\dfrac{t^6-1}{t-1}\right)^2$.
Les racines de P sont 0 et les racines sixièmes de l'unité différentes de 1 (qui sont -1, $e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{2\pi}{3}}$), toutes doubles. Il y a deux racines réelles 0 et -1.

(b) On a $P = g_{X_1} g_{X_2}$. Comme précédemment, g_{X_1} et g_{X_2} sont des polynômes de degré 6 ayant 0 pour racine, simple (car 0 est racine double de P). Nécessairement, ils ont donc chacun -1 comme racine simple, leurs autres racines étant deux à deux conjuguées. Deux cas sont possibles.

- Soit chacun des polynômes a pour racines (simples) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, alors g_{X_1} et g_{X_2} sont à une constante près égaux à $\sum_{k=1}^{6} t^k$. Comme la somme des coefficients doit être égale à 1, on trouve
$$g_{X_1}(t) = g_{X_2}(t) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} t^k.$$
Les dés sont équilibrés.
- Soit l'un des polynômes a pour racines doubles $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$, l'autre $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Il existe $C \in \mathbb{R}^*$ tel que, par exemple, pour tout réel t :
$$\begin{aligned} g_{X_1}(t) &= Ct(t+1)\left(t - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2\left(t - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 \\ &= Ct(t+1)(t^2-t+1)^2 = C(t^6 - t^5 + t^4 + t^3 - t^2 + t). \end{aligned}$$
C'est impossible car il y a des coefficients négatifs, alors que ce sont les $\mathbb{P}(X_1 = k)$.

Les dés sont donc équilibrés.

30.13 1. (a) Si X est presque sûrement constante, il existe $a \in E$ tel que $\mathbb{P}(X = a) = 1$ et $\mathbb{P}(X = x) = 0$ si $x \neq a$. On trouve $H(X) = 0$, puisque $f(0) = f(1) = 0$.

(b) On a, pour tout $x \in E$, $\mathbb{P}(X = x) = \dfrac{1}{N}$ et donc $H(X) = Nf\left(\dfrac{1}{N}\right) = \ln N$.

2. (a) Un simple étude de fonction montre le résultat. Il y égalité si, et seulement si, $x = 1$.

(b) L'inégalité démontrée donne $\displaystyle\sum_{x\in E} f\big(N\mathbb{P}(X = x)\big) \leqslant \sum_{x\in E}(1 - N\mathbb{P}(X = x))$. On remarque que $\displaystyle\sum_{x\in E}(1 - N\mathbb{P}(X = x)) = N - N\sum_{x\in E}\mathbb{P}(X = x)) = 0$.

On a donc $\sum_{x\in E} f\big(N\mathbb{P}(X = x)\big) \leqslant 0$.

(c) Si $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$, on a :
$$\begin{aligned} f\big(N\mathbb{P}(X = x)\big) &= -N\mathbb{P}(X = x)\left(\ln N + \ln \mathbb{P}(X = x)\right) \\ &= -N\ln N\mathbb{P}(X = x) + Nf(\mathbb{P}(X = x)). \end{aligned}$$
On en déduit, puisque l'égalité reste vérifiée si $\mathbb{P}(X = x) = 0$:
$$\begin{aligned} \sum_{x\in E} f\big(N\mathbb{P}(X = x)\big) &= -N\ln N\sum_{x\in E}\mathbb{P}(X = x) + N\sum_{x\in E} f(\mathbb{P}(X = x)) \\ &= -N\ln N + NH(X). \end{aligned}$$
De $\sum_{x\in E} f\big(N\mathbb{P}(X = x)\big) \leqslant 0$, on déduit $H(X) \leqslant \ln N$.

3. (a)
   - Pour tout $x \in E$, on a $f(\mathbb{P}(X = x)) \geqslant 0$, car $\mathbb{P}(X = x) \in [0,1]$. On en déduit que $H(X) \geqslant 0$. D'autre part, l'entropie d'une variable presque sûrement constante est nulle. La valeur minimale de l'entropie est donc 0.
   - Cette valeur minimale est atteinte pour une variable presque sûrement constante.

     Montrons réciproquement que, si $H(X) = 0$, la variable X est presque sûrement constante. Comme $H(X)$ est une somme de termes positifs, on $f(\mathbb{P}(X = x)) = 0$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = x) = 0$ ou 1, pour tout $x \in E$. Ces probabilités ne peuvent pas être toutes nulles. Il existe $a \in E$ tel que $\mathbb{P}(X = a) = 1$. La variable aléatoire X est presque sûrement constante, égale à a.

   Conclusion : l'entropie est minimale si, et seulement si, la variable est presque sûrement constante.

   (b)
   - On a vu que $H(X) \leqslant \ln N$ et que $H(X) = \ln N$ si la variable suit une loi uniforme. La valeur maximale de $H(X)$ est donc $\ln N$.
   - Montrons que ce maximum n'est atteint que pour une loi uniforme.

     Si $H(X) = \ln N$, les calculs de la question 2 montrent que :

     $$0 = \sum_{x \in E} f\big(N\mathbb{P}(X = x)\big) = \sum_{x \in E} \left(N\mathbb{P}(X = x) - 1\right).$$

     Comme on a, pour tout $x \in E$, $f\big(N\mathbb{P}(X = x)\big) \leqslant N\mathbb{P}(X = x) - 1$, l'égalité nécessite d'avoir $f\big(N\mathbb{P}(X = x)\big) = N\mathbb{P}(X = x) - 1$, c'est-à-dire $N\mathbb{P}(X = x) = 1$, pour tout $x \in E$. La variable X suit une loi uniforme.

   Conclusion : l'entropie $H(X)$ est maximale si, et seulement si, X suit une loi uniforme.

4. On a, par définition $H(Z) = \sum\limits_{(x,y) \in E \times F} f(\mathbb{P}((X,Y) = (x,y))$.

   Par indépendance des variables X et Y, on a :

   $$\begin{aligned} f\Big(\mathbb{P}\big((X,Y) = (x,y)\big)\Big) &= f\big(\mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y)\big) \\ &= -\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)\ln\big(\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)\big) \\ &= \mathbb{P}(X = x)f\left(\mathbb{P}(Y = y)\right) + \mathbb{P}(Y = y)f\left(\mathbb{P}(X = x)\right). \end{aligned}$$

   On en déduit :

   $$\begin{aligned} H(Z) &= \sum_{(x,y) \in E \times F} \Big(\mathbb{P}(X = x)f\left(\mathbb{P}(Y = y)\right) + \mathbb{P}(Y = y)f\left(\mathbb{P}(X = x)\right)\Big) \\ &= \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x) \sum_{y \in F} f\left(\mathbb{P}(Y = y)\right) + \sum_{y \in F} \mathbb{P}(Y = y) \sum_{x \in E} f\left(\mathbb{P}(X = x)\right) \\ &= H(Y) + H(X). \end{aligned}$$

30.14 1. Vérification immédiate pour $x = 0$ et $x = 1$.

2. Les variables $X_1, \dots, X_n$ d'une part, $Y_1, \dots, Y_n$ d'autre part, étant indépendantes, on a, d'après la question 1 :

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{\mathbb{P}(Y_1 = x_1, \dots, Y_n = x_n)} &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{P}(X_i = x_i)}{\mathbb{P}(Y_i = x_i)}\\ &= \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-x_i \ln\left(\frac{q}{p}\right) - (1 - x_i)\ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right)\right)\\ &= \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left(\frac{q}{p}\right) - \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right)\right).\end{aligned}$$

Comme $q > p$, la fonction $x \mapsto -x\ln\left(\dfrac{q}{p}\right) - (n-x)\ln\left(\dfrac{1-q}{1-p}\right)$ est décroissante sur $\mathbb{R}$; de plus, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i > nq$, donc :

$$\frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{\mathbb{P}(Y_1 = x_1, \dots, Y_n = x_n)} \leqslant \exp\left(-nq\ln\left(\frac{q}{p}\right) - (n-nq)\ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right)\right).$$

Ce dernier terme étant égal à $\exp\left(-nd(q,p)\right)$, on a l'inégalité voulue.

3. Notons $K = \{(x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n \mid x_1 + \dots + x_n > nq\}$. On a alors :

$$\{X_1 + \dots + X_n > nq\} = \bigcup_{(x_1,\dots,x_n)\in K} \{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} \quad \text{et}$$

$$\{Y_1 + \dots + Y_n > nq\} = \bigcup_{(x_1,\dots,x_n)\in K} \{Y_1 = x_1, \dots, Y_n = x_n\}.$$

On en déduit, en utilisant l'inégalité de la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > nq) &= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in K} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)\\ &\leqslant \exp\left(-nd(q,p)\right) \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in K} \mathbb{P}(Y_1 = x_1, \dots, Y_n = x_n),\\ &= \exp\left(-nd(q,p)\right)\mathbb{P}(Y_1 + \dots + Y_n > nq).\end{aligned}$$

On a, *a fortiori*, $\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > nq) \leqslant \exp\left(-nd(q,p)\right)$.

Remarque En posant $S_n = X_1 + \dots + X_n$, l'inégalité démontrée s'écrit

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > q\right) \leqslant \exp\left(-nd(q,p)\right),$$

où $p = \mathbb{E}\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$ et q est réel quelconque de $]p,1[$. On obtient une majoration de la probabilité que $\dfrac{S_n}{n}$ s'écarte de son espérance.

30.15 1. On choisit deux boules parmi 4 qu'on place dans la boîte A, les deux autres boules étant placées dans la boîte B. Il y a $\binom{4}{2} = 6$ choix possibles.

On obtient $p_0 = \frac{1}{6}$ (il faut placer les deux boules rouges dans A : il y a un cas favorable) et de même $r_0 = \frac{1}{6}\cdot$ On en déduit $q_0 = 1 - p_0 - r_0 = \frac{2}{3}\cdot$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(\{X_n = 0\}, \{X_n = 1\}, \{X_n = 2\})$. On obtient :

$$\begin{aligned} p_{n+1} = p_n \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) &+ q_n \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1) \\ &+ r_n \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1). \end{aligned}$$

On a :

- $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 2) = 0$, car si la boîte A contient 0 ou 2 boules noires, elle en contiendra une après échange;
- $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1) = \frac{1}{4}$, car si la boîte A contient une boule noire, il faut échanger cette boule noire avec la boule blanche de l'autre boîte.

Ainsi $p_{n+1} = \frac{1}{4} q_n$. En raisonnant de la même façon, on obtient :

$$q_{n+1} = p_n + \frac{1}{2} q_n + r_n \quad \text{et} \quad r_{n+1} = \frac{1}{4} q_n.$$

La matrice M cherchée est donc $\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à M. On cherche une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$, dans laquelle la matrice de u est D, c'est-à-dire vérifiant :

$$u(e_1) = e_1, \quad u(e_2) = 0 \quad \text{et} \quad u(e_3) = -\frac{1}{2} e_3.$$

En résolvant $MX = X$, où $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on voit que $e_1 = (1, 4, 1)$ convient. On trouve de même $e_2 = (1, 0, -1)$ et $e_3 = (1, -2, 1)$. On montre facilement que (e_1, e_2, e_3) est libre donc est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de u dans cette base est D.

On a donc $M = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. En notant Y_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$, on a $Y_{n+1} = MY_n$.

On en déduit que, pour tout entier naturel n, on a $Y_n = M^n Y_0 = PD^n P^{-1} Y_0$.

On a $P^{-1}Y_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On obtient, après calcul :

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = Y_n = P\,\mathrm{Diag}\left(1, 0, \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \left(-\frac{1}{2}\right)^n c \\ 4a - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n c \\ a + \left(-\frac{1}{2}\right)^n c \end{pmatrix}.$$

Les suites (p_n), (q_n) et (r_n) convergent respectivement vers a, $4a$ et a. De plus, $(\{X_n = 0\}, \{X_n = 1\}, \{X_n = 2\})$ est un système complet d'événements, donc on a $p_n + q_n + r_n = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite, on obtient $a + 4a + a = 1$ et donc $a = \frac{1}{6}\cdot$ On a donc $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{2}{3}$ et $r = \frac{1}{6}\cdot$
On voit que, lorsque n tend vers $+\infty$, la loi de X_n tend vers la loi obtenue quand on place les boules au hasard dans l'urne.

30.16 • On écrit $D = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} X_{i,\sigma(i)}$. Par linéarité de l'espérance et indépendance des variables $X_{i,j}$, on obtient :

$$\mathbb{E}(D) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_{i,\sigma(i)}\right) = 0,$$

car les variables $X_{i,j}$ sont centrées.

• On obtient $D^2 = \displaystyle\sum_{(\sigma,\sigma') \in {\mathfrak{S}_n}^2} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') \prod_{i=1}^{n} X_{i,\sigma(i)} X_{i,\sigma'(i)}$. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{V}(D) = \mathbb{E}(D^2) = \displaystyle\sum_{(\sigma,\sigma') \in {\mathfrak{S}_n}^2} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{i,\sigma(i)} X_{i,\sigma'(i)}\right)$.

Les permutations σ et σ' étant fixées, on considère l'ensemble I des indices tels que $\sigma(i) \neq \sigma'(i)$.

Si $I \neq \varnothing$, on écrit $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_{i,\sigma(i)} X_{i,\sigma'(i)} = \prod_{i \in I}\left(X_{i,\sigma(i)} X_{i,\sigma'(i)}\right) \prod_{i \notin I} X_{i,\sigma(i)}^2$ et par indépendance des variables $X_{i,j}$:

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{i,\sigma(i)} X_{i,\sigma'(i)}\right) = \prod_{i \in I}\left(\mathbb{E}(X_{i,\sigma(i)})\mathbb{E}(X_{i,\sigma'(i)})\right) \prod_{i \notin I} \mathbb{E}(X_{i,\sigma(i)}^2) = 0.$$

Les seuls termes non nuls dans $\mathbb{V}(D)$ correspondent à $\sigma = \sigma'$ et :

$$\mathbb{V}(D) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{E}\left(X_{i,\sigma(i)}^2\right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{V}(X_{i,\sigma(i)}) = n!.$$

Index

A

absolue
- convergence — d'une série 790
- valeur — 27

absorbant (élément —) 873
absurde (raisonnement par l'— 322
accroissements finis
- inégalité (cas complexe) 582, 650
- inégalité (cas réel) 567
- théorème des — 563

adaptée
- base — 1098, 1101

adhérent
- point — 419

adjacentes
- suites — 415
- théorème des suites — 415

affine
- droite — 1014
- plan — 1049
- sous-espace — 1013
- structure — 1342

aire orientée d'un parallélogramme 1241
aléatoire (variable —) 1456
Alembert (théorème de d'—) 910, 922
algorithme
- d'Euclide 828, 914
- d'orthonormalisation de Schmidt 1296, 1301
- de la division euclidienne des polynômes 896

alignement 170
alignés (points —) 170
alternée(s)
- critère spécial des séries — 809
- forme n-linéaire — 1235

angle
- d'une rotation 1326
- de vecteurs 1327

anneau 871
- commutatif 871

antécédent 29, 335
antisymétrie 22
antisymétrique
- forme n-linéaire — 1236
- matrice — 1136

application 334
- égalité d'—s 335
- involutive 342
- linéaire 1007
  - canoniquement associée à une matrice 1149
  - de rang fini 1102
  - image d'une base par une — 1050
  - injective 1009
- réciproque 341

approximation décimale 399
arbres de probabilité 1418
Arc cosinus 215
Arc sinus 214
Arc tangente 212
Archimède (propriété d'—) 397

argument d'un complexe 162
arrangement 1376
assertion 4
associativité 865
    de la composition
        d'applications 340
associés
    entiers — 825
    polynômes — 894
asymptote 735
asymptotique
    caractère — de la notion de
        limite 409
    développement — 736
au voisinage 484
automorphisme(s) 1007
axiome 321

B

base 1047
    adaptée à un sous-espace
        vectoriel 1098
    adaptée à une
        décomposition 1098, 1101
    canonique
        de $\mathbb{K}^n$ 1048
        de $\mathbb{K}_n[X]$ 1048
        de $\mathbb{K}[X]$ 1049
        de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ 1137
    extraite (théorème de
        la —) 1091
    incomplète (théorème de
        la —) 1091
Bayes (formule de —) 1420
Bernoulli (loi de —) 1465
Bézout
    coefficients de — 829, 915
    identité de — pour n entiers 834
    identité de — pour n
        polynômes 917
    identité de — 829, 832, 834

Bienaymé-Tchebychev
    inégalité de — 1490
bijection 338
    théorème de la — 515
bijective 338
bijectivité 338
bilinéaire
    application — 1011
binôme de Newton 112, 873
binomial(e)
    coefficient — 109
    loi — 1466
blocs
    matrices diagonale par — 1158
    matrices par — 1156
Bolzano-Weierstrass
    théorème de — 416
Boole (inégalité de —) 1409
borne inférieure 393
borne supérieure 393
    caractérisation de la — 395, 418
    propriété de la — 394
bornée
    fonction — 38
    suite — 401

C

canonique
    base — de $\mathbb{K}^n$ 1048
    base — de $\mathbb{K}_n[X]$ 1048
    base — de $\mathbb{K}[X]$ 1049
    base — de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ 1137
    forme — 166
    produit scalaire — 1287, 1288
caractère local 497
caractérisation (séquentielle de la
        limite) 492
caractéristique (équation —) 269
Cardan 150
cardinal 362, 1368
carrée (matrice —) 1134

cartésien(nes)
coordonnées — 1343
repère — 1343
Cauchy
problème de — 265, 271
Cauchy-Schwarz
inégalité de — 1290
pour les intégrales 624
centrée
variable aléatoire — 1483
centrée réduite
variable aléatoire — 1490
cercle(s)
trigonométrique 54
paramétrage du — 157
utilisation du — 59
certain
événement — 1406
Cesàro
théorème de — 470
changement de base
formules de — 1152
matrice de — 1152
changement de variable 256, 653
Chasles
relation de — 617, 622, 646, 1327, 1343
classe
d'un produit de fonctions 574
d'une composée de fonctions 575
d'une fonction 572
d'une fonction réciproque 576
d'une somme de fonctions 574
de congruence 842
de l'inverse d'une fonction 575
d'équivalence 348
des fonctions usuelles 573, 575–577
coalitions (lemme des —) 1479
coefficient(s)
binomial 109
d'un polynôme 888
de Bézout 829, 915
dominant 890
cofacteur 1248
matrice des —s 1251
colinéaires (vecteurs —) 170, 1042
colonne (matrice —) 1135
comatrice 1251
combinaison 1378
linéaire 1006, 1018
commutatif
anneau — 871
groupe — 869
commutativité 865
comparable 353
comparées
croissances 211, 212
compatibilité 24
compatible (système —) 118, 1201
complémentaire 318
complexe
argument d'un nombre — 162
conjugué d'un — 152
de module 1 156
exponentielle — 157, 163
forme trigonométrique d'un — 161, 162
module d'un nombre — 154
nombre — 151
racines carrées d'un — 164
calcul algébrique 165
composantes 1047, 1049
composée
d'applications 339
composition
d'applications 339
des fonctions 35
des limites 491
des polynômes 892

condition
    nécessaire 311
    nécessaire et suffisante 313
    suffisante 311
conditionnelle
    loi — 1471
    probabilité — 1414
congruence 55, 398, 842
    calcul avec des —s 56
    classe de — 842
    modulo α 347
    modulo n 347
conjecture 2
conjointe (loi —) 1468
conjugué 152
connecteur 5
    et 6
    non 6
    ou 6
constante
    caractérisation d'une fonction — 564
    d'Euler 789
    fonction — 45
    suite — 400
continue
    fonction — 486
    par morceaux 617, 644
continuité
    à droite, à gauche 503
    d'une fonction 486, 519
    prolongement par — 506
    uniforme 518
contractante
    fonction 568
contraire (événement —) 1406
contraposée 314, 322
convergence
    absolue d'une série 790
    d'une série 778
    d'une suite 403, 405, 421
coordonnées 1047, 1049
    d'un point 1343
corollaire 2, 321
corps 875
    des fractions 956
corrélées
    variables aléatoires non — 1494
cosinus
    fonction — 51
    hyperbolique 218
couple 319
    de variables aléatoires 1467
covariance 1491
Cramer
    formules de — 115
    système de — 115, 1205
crible
    d'Eratosthène 838
    formule du — 1412, 1522
critique
    point — 561
croissances comparées 211, 212, 434
croissante
    fonction — 36, 44
    suite — 401
cycle 1227

D

décimal (nombre —) 21
décomposition
    dans une base 1047
    en éléments simples 966
    en produit de facteurs premiers 839
décroissante
    fonction — 36, 44
    suite — 401
définie
    fonction — au voisinage de 692
degré
    d'un polynôme 889
    d'une fraction rationnelle 958

demi-droite 23
demi-plan 1350
densité 399, 418
dépendants
 vecteurs linéairement — 1040
déphasage 61
dérivabilité
 d'une fonction réciproque 50
 des fonctions complexes 221, 578
 des fonctions réelles 552
dérivable 555
 fonction — 40, 578
dérivée 552
 caractère local de la — 553
 d'ordre supérieur 51
 d'un polynôme 906
 d'une composée 556
 d'une fonction complexe 221
 d'une fonction réciproque 50, 558
 d'une inverse de fonction 557
 d'une somme, d'un produit 555
 des fonctions usuelles 558, 573
 fonction — 40, 555
déterminant
 d'un endomorphisme 1241
 d'une famille de vecteurs 1238
 d'une matrice carrée 1242
développement
 asymptotique 736
 décimal d'un réel 793
développement(s) limité(s)
 au voisinage de 0 707
 en un réel x_0 717
 forme normalisée d'un — 715, 723, 726
 primitivation d'un — 713
 usuels 710
diagonale (matrice —) 1135
diagramme sagittal 336
différence ensembliste 318
dimension 1090
 d'un espace vectoriel 1092
 finie 1090
 infinie 1090
directe (somme —) 1053, 1062
directeur (vecteur) 1346
disjonction des cas 322
distance 27
 à un hyperplan affine 1356
 de deux réels 27
 euclidienne 1290
distributivité 865, 871
divergence
 d'une série 778
 d'une suite 405
 grossière d'une série 780
diviseur 824
 d'un polynôme 894
divisibilité
 dans $\mathbb{K}[X]$ 894
 dans $\mathbb{Z}$ 824
division euclidienne 825, 895
 algorithme de la — 896
domaine
 de définition 29
 d'étude 30
dominant
 coefficient — d'un polynôme 890
dominée
 fonction — 692
 suite — 433
droite(s)
 affine 1014
 limite à — 504
 numérique 20
 numérique achevée 396
 vectorielle 1005, 1019

E

e 205
échelonné(e)
famille — en degré 1044
système linéaire — 1208
égalité
d'ensembles 316
de deux applications 335
élément(s) 4
neutre 866
simples (décomposition en —) 963, 966, 967
élémentaire
événement — 1406
opération — 120, 1196
encadrement
théorème d'— 413
endomorphisme 1007
nilpotent 1127
engendre 1037
ensemble 4
d'arrivée 335
de définition 335
de départ 335
défini par un prédicat 316
égalité d'— 316
fini 362, 1368
image 335
inclusion d'—s 315
infini 362, 1368
parties d'un — 318
vide 315
entier(s)
intervalle d'— 24
naturel 21
nombre — 356
relatif 21
équation
caractéristique 269
cartésienne 1345
différentielle linéaire du premier ordre 259
différentielle linéaire du second ordre 268
discussion graphique d'une — 47
du second degré 166
homogène associée 260, 268
résolution graphique d'une — 46
résoudre une — 316
sans second membre 260, 268
solutions d'une — 316
équiprobabilité 1409
équivalence 313
classe d'— 348
relation d'— 347
équivalent(e)s
fonctions — 696
matrices 1154
recherche d'—s) 732
suites — 429
systèmes — 120
Eratosthène
crible d'— 838
escalier (fonction en —) 614
espace probabilisé fini 1408
espace vectoriel 876, 999
de dimension finie 1090
dimension d'un — 1092
euclidien 1289
préhilbertien 1289
espérance 1480
et (connecteur —) 6
Euclide
algorithme d'— 828, 914
euclidien (espace vectoriel) 1289
Euler 150
constante d'— 789
formule d'— 159
événement(s) 1406
élémentaire 1406
certain 1406
contraire 1406

deux à deux indépendants 1423
impossible 1406
incompatibles 1407
indépendants 1421
mutuellement
indépendants 1423
système complet d'— 1407
éventualité 1405
existentiel
quantificateur 7
exponentielle
complexe 157, 163
de base a 207
réelle 206
expression
d'une forme linéaire dans une base 1107
externe (loi —) 876
extraite (suite —) 402
extrémité d'un intervalle 23
extremum 39
local, relatif, global 560

F

factorielle 94
factorisation
dans $\mathbb{C}[X]$ 910
dans $\mathbb{R}[X]$ 911
de $e^{i\theta_1} \pm e^{i\theta_2}$ 162
famille
échelonnée en degré 1044
finie 345
génératrice 1037
indexée 345
libre 1040, 1045
liée 1040
presque nulle 1017
rang d'une — (de vecteurs) 1096
sous- — 346
fermé (intervalle —) 23
fini(e)
ensemble — 362, 1368
espace vectoriel de dimension — 1090
fonction(s) 334
approximation d'une — 42
bornée 38
caractéristique 344
classe d' — 572
composition des — 35
constantes
caractérisation des — 45
continue 486
continue par morceaux 617, 644
contractante 568
cosinus 51
croissante 36, 44
décroissante 36, 44
dérivée d'une — 40, 555
dominée 692
en escalier 614
équivalentes 696
étude d'une — 46
hyperbolique 218
impaire 31
indicatrice 344
limite d'une — 486, 489
lipschitzienne 509
majorée 38
minorée 38
monotones 36
caractérisation des — 44
négligeable 692
opérations sur les — 35
paire 31
périodique 33
polynomiale 896
primitive d'une — 647
puissance 208
rationnelle 29
primitives d'une — 971
réciproque 48

sinus 51
strictement monotones
caractérisation des — 45
symétriques élémentaires des racines 906
tangente 57
trigonométriques 51
unicité de la limite 488, 490, 519
uniformément continue 518
usuelles
classe 573, 575–577
dérivée 558, 573
forme
2–linéaire 1232
3-linéaire 1233
bilinéaire 1232, 1233
bilinéaire 1286
bilinéaire symétrique 1286
canonique 166
irréductible
d'une fraction rationnelle 957
unitaire d'une fraction rationnelle 957
linéaire 1064
linéaire coordonnée 1064
n-linéaire alternée 1235
n-linéaire antisymétrique 1236
normalisée d'un développement limité 715, 723, 726
p-linéaire 1234
trigonométrique
d'un complexe 161, 162
trilinéaire 1233
formule(s)
d'Euler 159
de Bayes 1420
de Cramer 115
de Kœnig-Huygens 1487, 1491
de Leibniz 574, 908
de Moivre 158
de Pascal 110, 1380
de Poincaré 1412
de Stirling 792
de Taylor
pour les polynômes 908
de Taylor avec reste intégral 657
de Taylor-Lagrange 658
de Taylor-Laplace 657
de Taylor-Young 659, 711
de Vandermonde 1381
des probabilités composées 1415
des probabilités totales 1417
du binôme 112
du crible 1412, 1522
du rang 1103
fraction rationnelle
corps des — 956
forme irréductible unitaire d'une — 957
impaire 961
paire 961
représentant irréductible d'une — 957
représentant irréductible unitaire d'une — 957

G

gauche
limite à — 504
Gauss
méthode du pivot de — 121, 1199
théorème de — 836, 919
génératrice
famille — 1037
partie — 1037
global
maximum, minimum, extremum 560
graphe 29
d'une fonction 334
groupe 869, 871
des unités d'un anneau 874
linéaire 1012
symétrique 870, 1226

H

harmonique (série —) 779
Heine (théorème de —) 518
homogène
  équation différentielle — 260, 268
  système — 118, 1201
homothétie 172, 1008
hyperbolique
  cosinus — 218
  fonction — 218
  sinus — 218
  tangente — 219
hyperplan
  affine 1066
  vectoriel 1065

I

i 151
identité 335
  de Bézout 916
  du parallélogramme 1292
image 335, 1009
  d'un élément 29
  d'une application linéaire 1009
  d'une base par une application linéaire 1050
  d'une matrice 1150
  directe 343
  ensemble — 335
  réciproque 343
imaginaire
  partie — 151
  pur 151
impair(e)
  fonction — 31
  fraction rationnelle — 961
  polynôme — 893
implication 310
  contraposée 314
  définition de l'— 311
  négation d'une — 312, 314
impossible (événement —) 1406
inclusion 315
incompatibles (événements —) 1407
indépendance
  d'une famille d'événements 1423
  de n variables aléatoires 1477
  de deux événements 1421
  de deux variables aléatoires 1474
  de n variables aléatoires 1477
  linéaire 1040, 1045
indépendants
  vecteurs linéairement — 1040
indexée (famille —) 345
indicatrice
  fonction — 344
  variable aléatoire 1457
induite (loi —) 869
inégalité 22
  de Bienaymé-Tchebychev 1490
  de Boole 1409
  de Cauchy-Schwarz
    pour les intégrales 624
  de la moyenne 621
  de Markov 1484
  des accroissements finis (cas réel) 567
  des accroissements finis (cas complexe) 582, 650
  passage à la limite dans les — 499
  triangulaire 28, 155, 156, 1290, 1291
infini(e)
  ensemble — 362, 1368
  espace vectoriel de dimension — 1090
injective 337
  application linéaire — 1009
injectivité 337
  d'une application linéaire 1010

intégrale(s)
d'une fonction continue par morceaux 620
d'une fonction en escalier 615
entre deux bornes 645
méthode des rectangles 660
intégration par parties 255, 650
intègre (anneau —) 891
interne (loi —) 864
intersection 317, 346
intervalle 23, 396
d'entiers 24
fermé 23
image d'un — par une fonction continue 513
ouvert 23
semi-fermé 23
semi-ouvert 23
inverse 867
d'une matrice 1143
inversible 867, 868
matrice — 1143, 1151
involution 342, 1227
involutive (application —) 342
irrationnels 21
irréductible
forme — d'un nombre rationnel 836
polynôme — 920
représentant — d'une fraction rationnelle 957
isométrie 1318
isomorphisme 1007
itéré 868

K

Kœnig-Huygens
formule de — 1487, 1491
Ker 1009
Kronecker (symbole de —) 1139

L

Lagrange
inégalité de Taylor — 658
Laplace
formule de Taylor — 657
Leibniz 574
formule de — 908
lemme 2, 321
des coalitions 1479
libre
famille — 1040, 1045
partie — 1046
liée
famille — 1040
partie — 1046
ligne (matrice —) 1135
limite
à droite, à gauche 504
caractère local de la — 497
composition des —s 491, 496
d'une fonction complexe 519
d'une fonction réelle 486, 489
d'une somme, d'un produit de fonctions 494, 520
d'une suite complexe 421
d'une suite réelle 403
épointée 504, 506
passage à l'inverse 496, 520
passage à l'inverse d'une — 495
unicité de la — 488, 490, 519
linéaire
combinaison — 1006, 1018
forme — 1064
système — 1201
linéarisation 160
linéariser 160
lipschitzienne (fonction —) 509
local
caractère — de la dérivée 553
maximum, minimum, extremum 560

logarithme
    décimal 207
    de base a 207
    népérien 204, 648
loi
    binomiale 1466
    conditionnelle 1471
    conjointe 1468
    d'une variable aléatoire 1459
    de Bernoulli 1465
    de composition interne 864
    externe 876, 999
    induite 869
    interne 864
    marginale 1469
    uniforme 1464

M

majorant 26, 355
majoré(e)
    fonction — 38
    partie — 26
    suite — 401
marginale
    loi — 1469
Markov
    inégalité de— 1484
matrice 1134
    d'un système linéaire 1201
    d'une application linéaire 1145
    d'une famille de vecteurs 1145
    de changement de base 1152
    de passage 1152
    diagonale par blocs 1158
    image d'une — 1197
    inversible 1151
    noyau d'une — 1197
    rang d'une — 1197, 1198
maximum 39
    d'un ensemble 26
    d'une fonction 39
    local, relatif, global 560
Mersenne
    nombres de — 855
méthode
    de Newton 663
    des rectangles 660
    du pivot de Gauss 121, 1206
mineur 1248
minimum 39
    d'un ensemble 26
    d'une fonction 39
    local, relatif, global 560
minorant 26, 355
minoré(e)
    fonction — 38
    partie — 26
    suite — 401
mixte (produit —) 1324
module
    complexe de — 1 156
    d'un complexe 154
    produit, quotient 155
modulo 55, 398
Moivre (formule de —) 158
monotone
    caractérisation des fonctions — 564
    fonction — 36
    suite — 401
    théorème de la limite — 507
morphisme
    d'espaces vectoriels 1007
moyenne
    inégalité de la — 621
multiple 824
    d'un polynôme 894

N

$\mathbb{N}$ 356
naturel (entier —) 356
négatif 22

négation 6
d'un et 7
d'un ou 7
d'un quantificateur 10
règles de — 6
négligeable
fonction — 692
suite — 433
népérien (logarithme —) 204
neutre (élément) 866, 869, 871
Newton
binôme de — 873
méthode de — 663
nilpotent(e)
endomorphisme — 1127
matrice — 1141
nombre
complexe 151
de Mersenne 855
décimal 21
entier naturel 21
entier relatif 21
premier 837
rationnel 21, 351
non (connecteur —) 6
normalisée
forme — d'un developpement limité 715
norme 1291
euclidienne 1289
normé (vecteur —) 1293
noyau 1009
d'une application linéaire 1009
d'une matrice 1150
numérique (droite —) 20

O

O (grand) 433, 692
o (petit) 433, 692
opération
élémentaire 120, 1196
opposé 867
orbite d'une permutation 1229
ordre
d'un développement limité 707
de multiplicité d'une racine 902
partiel 353
relation d'— 352
total 353
orientation 1358
orthogonal(e)(s)(aux)
d'une partie 1293
famille — 1294
matrice — 1320
sous–espaces affines — 1354
sous-espaces vectoriels — 1299
supplémentaire — 1299
vecteurs — 170, 1293
orthogonalité 170
orthonormale
base — 1297
famille — 1294
orthonormalisation
algorithme d'— de Schmidt 1296, 1301
orthonormée
base — 1297
famille — 1294
ou (connecteur —) 6
ouvert (intervalle —) 23

P

p-liste 345
p-uplet 345
pair(e)
fonction — 31
fraction rationnelle — 961
polynôme — 893
parallélépipède
volume orienté d'un — 1241
parallèles
sous-espaces affines — 1351

parallélisme 1351
paramétrage
  d'un sous–espace affine 1345
partie(s)
  d'un ensemble 318
    règles de calcul sur les — 320
  entière 397
  entière d'une fraction rationnelle 962
  génératrice 1037
  imaginaire 151
  intégration par — 255
  libre 1046
  liée 1046
  majorée 26
  minorée 26
  polaire d'une fraction rationnelle 963, 966
  réelle 151
  régulière d'un développement limité 708
  stable par une loi 869
partiel (ordre —) 353
pas d'une subdivision 613
Pascal
  formule de — 110, 1380
  relation de — 110
  triangle de — 110
passage (matrice de —) 1152
période 33
périodique (fonction —) 33
permutation(s) 1377
PGCD
  de 2 entiers 826
  de n entiers 833
  de n polynômes 917
  de polynômes 912, 913
pivot de Gauss (méthode du —) 121, 1199, 1206
plan
  affine 1049
  vectoriel 1048, 1095
plus grand élément 26, 354
plus grand commun diviseur 826
plus petit élément 26, 354
plus petit commun multiple 826
Poincaré
  formule de — 1412
point
  adhérent 419
  critique 561
  fixe 492
polarisation (identités de —) 1291
pôle d'une fraction rationnelle 959
polynôme(s)
  à une indéterminée 887
  associés 894
  coefficient dominant d'un — 890
  coefficients d'un — 888
  composition des — 892
  constant 889
  de Taylor 657
  degré d'un — 889
  dérivé 906
  dérivé d'ordre r 907
  diviseur d'un — 894
  division euclidienne des — 895
  fonction polynomiale associée à un — 896
  impair 893
  irréductible 920
  multiple d'un — 894
  nul 886
  pair 893
  PGCD de — 913
  PPCM de — 918, 919
  premiers entre eux 916
  premiers entre eux dans leur ensemble 917
  racine(s) d'un — 897
  scindé 904, 910
  unitaire 890
positif 22

postulat 321
PPCM 835
de deux entiers 835
de polynômes 918, 919
prédicat 5
préhilbertien (espace vectoriel) 1289
premier(s)
entre eux
entiers — 832
entiers — dans leur ensemble 834
polynômes — 916
polynômes — dans leur ensemble 917
nombre — 837
preuve par 9 853
primitive 246, 647
existence d'une — 647
principe de superposition 262, 271
probabilité(s) 1408
composées
formule des — 1415
conditionnelle 1414
totales
formule des — 1417
uniforme 1410
problème de Cauchy 265, 271
produit
cartésien 319
d'espaces vectoriels 1001
de deux matrices 1138
mixte 1324
module d'un — 155
scalaire 1287
canonique de $\mathbb{R}^2$ 1287
canonique de $\mathbb{R}^3$ 1288
canonique de $\mathbb{R}^n$ 1288
projecteur 1058
projection 1058, 1060
orthogonale 1300
projeté orthogonal sur un sous-espace affine 1356
prolongement 336
des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ 577
par continuité 506
proportionnels (vecteurs —) 1042
proposition 2, 321
puissance 868
fonction — 208
Pythagore (théorème de) 1295

Q

quantificateur 7
existentiel 7
négation d'un — 10
universel 7
quotient
de la division euclidienne 825
de polynômes 895
module d'un — 155

R

racine(s)
carrée(s) d'un complexe 164
calcul algébrique 165
d'ordre p 902
d'un polynôme 897
d'une fraction rationnelle 959
double 903
multiple 903, 909
n-ième d'un complexe 169
n-ième de l'unité 168
ordre de multiplicité d'une — 902, 909
relations entre coefficients et — 167
simple 903
triple 903
radian 56

rang
  application linéaire de —
    fini 1102
  d'un système 1202
  d'une application linéaire 1102, 1159
  d'une famille de vecteurs 1096, 1159
  d'une matrice 1159
  formule du — 1103
  théorème du — 1103
rationnel(le)
  fonction — 960
  nombre — 21, 351
réciproque
  application — 341
  image — 343
récurrence
  forte 361
  linéaire d'ordre 2 427, 1102
  principe de — 358
réelle (partie —) 151
réflexivité 22, 347
régulier 868
  élément — 866
relatif
  maximum, minimum,
    extremum 560
relation
  binaire 347
  d'équivalence 347
  d'ordre 352
  d'ordre total 22
  de Chasles 617, 622, 646
  de comparaison 22
  de Pascal 110
  entre coefficients et racines 167
repère
  cartésien 1343
  orthonormal 1354
représenté
  application linéaire—e par une
    matrice 1147
représentant
  d'une fraction rationnelle 957
  irréductible d'une fraction
    rationnelle 957
  irréductible unitaire d'une
    fraction rationnelle 957
représentation
  graphique 29
reste
  de la division euclidienne
    de polynômes 895
  d'une série 780
  de la division euclidienne 825
restriction 336
réunion 317, 346
Riemann
  série de — 788
  somme de — 625
Rolle (théorème de —) 562
rotation 172, 1325, 1326

S

Sarrus (méthode de —) 1243
scalaire 117, 876, 999
  matrice — 1135
  produit — 1287
Schmidt
  algorithme d'orthonormalisation
    de — 1296, 1301
second degré
  équation du — 166
second membre 260, 268
segment(s) 23
  emboîtés
    théorème des — 416
  image d'un — par une fonction
    continue 514
semblables (matrices —) 1154

semi-fermé (intervalle —) 23
semi-ouvert (intervalle —) 23
série
 absolument convergente 790
 convergence d'une — 778
 critère spécial des — alternées 809
 de Riemann 788
 de Riemann alternée 809
 divergence d'une — 778
 divergence grossière d'une — 780
 géométrique 780
 harmonique 779
 reste d'une — 780
 somme d'une — 778
 somme partielle d'une — 778
 télécospique 781
 terme général d'une — 778
signe(s) (règle des —) 873
similitude directe 173
simplifiable
 élément — 866
sinus
 fonction — 51
 hyperbolique 218
somme
 d'une série 778
 de deux sous-espaces vectoriels 1052
 de plusieurs sous-espaces vectoriels 1061
 de Riemann 625
 des n premiers entiers 99
 des carrés des n premiers entiers 104
 des termes d'une suite arithmétique 100
 directe 1053, 1062
 partielle d'une série 778
sous-anneau 872
sous-espace affine 1013
sous-espace vectoriel 1001, 1002
 de dimension finie 1090
 engendré par une partie 1004
sous-famille 346
sous-groupe 870
sous-matrice 1135
sous-suite 402
stable
 partie — par une loi 869
stationnaire (suite —) 400
Stirling
 formule de — 792
strictement
 croissante, décroissante 36
 monotone 36
subdivision 613
 adaptée 614, 617
 pas d'une — 613
 régulière 613
 support d'une — 613
suite(s)
 adjacentes 415
 arithmético-géométrique 424
 arithmétique 424
 bornée 401
 complexe 420
 constante 400
 convergente 405
 croissante 401, 414
 décroissante 401, 415
 divergente 405
 dominée 433
 équivalentes 429
 extraite 402
 géométrique 424
 majorée 401
 minorée 401
 monotone 401, 414
 négligeable 433
 récurrente d'ordre 1 425, 492, 568
 récurrente linéaire d'ordre 2 427
 réelle 400
 stationnaire 400

superposition
 principe de — 262, 271
supplémentaire
 orthogonal 1299
 sous-espaces vectoriels —s 1054
support
 d'un cycle 1227
 d'une subdivision 613
surjective 338
surjectivité 338
symétrie 347, 1060
symétrique 867, 869
 groupe 1226
 groupe — 870
 matrice — 1136
système(s)
 complet d'événements 1407
  associé à un couple 1468
  associé à une variable aléatoire 1459
 de Cramer 115
 équivalents 120
 linéaire 118, 1201
  échelonné 1208
  interprétation matricielle d'un — 1202

T

tableau de variations 37
tangente
 à une courbe 41, 554
 étude de — 734
 fonction — 57
 hyperbolique 219
Taylor
 formule de — avec reste intégral 657
 formule de — pour les polynômes 908
 formule de —Laplace 657
 formule de —Young 659, 711, 718
 inégalité de —Lagrange 658
 polynôme de — 657
théorème 2, 321
 d'approximation 619
 d'encadrement 413
 de d'Alembert 910, 922
 de Heine 518
 de la bijection 515
 de la limite monotone 414, 507
 de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ 577
 de Rolle 562
 de transfert 1484
 des accroissements finis 563
 des segments emboîtés 416
 des suites adjacentes 415
 des valeurs intermédiaires 511
 du rang 1103
tiers exclu 4, 6
tiroirs
 principe des — 1372
total (ordre —) 353
trace
 d'un endomorphisme 1155
 d'une matrice 1155
transfert (théorème de —) 1484
transitivité 22, 347
translation 171, 1012
transposée
 d'une matrice 1135
transposition 1137, 1227
triangle
 de Pascal 110
triangulaire
 inégalité — 28, 155, 156, 1290, 1291
 matrice — 1135
trigonométrie
 formule(s)
  avec l'arc moitié 61
  d'addition 52, 59, 60
  d'Euler 160
  de duplication 59
  de Moivre 158

trigonométrique
cercle — 54
équation — 62
fonction — 51
forme — d'un complexe 161, 162
inéquation — 63
trivial
anneau — 872
sous-espace vectoriel — 1002
sous-groupe — 870

U

unicité de la limite 405, 421, 488, 490, 519
uniforme
continuité — 518
loi — 1464
probabilité — 1410
unitaire
polynôme — 890
vecteur — 1293
unité 874
univers 1405
universel (quantificateur —) 7

V

valeur absolue 27
valeurs intermédiaires
théorème des — 511
valuation
p-adique 840
Vandermonde
déterminant de — 1250
formule de — 1381
variable(s) aléatoire(s) 1456
centrée 1483
centrée réduite 1490
certaine 1457
indicatrice d'un événement 1457
loi d'une — 1459
non corrélées 1494
réelle 1456
variance 1486
variation(s)
d'une fonction 44
de la constante 262, 263
tableau de — 37
vecteur(s) 349, 876, 999
colinéaires 1042
proportionnels 1042
vectoriel(le)
droite — 1005, 1019
espace — 876, 999
plan — 1048
sous-espace — 1002
vide (ensemble —) 315
voisinage 484
fonction définie au — de 692
propriété vraie au — de 485
volume
orienté d'un
parallélépipède 1241, 1355

Y

Young
formule de Taylor— 659