TP2 : Débruitage de signaux aléatoires par filtrage de Wiener

Filière RT4, INSAT
Chargée de cours/TP : R. Amara Boujemâa

Dans ce TP, on s'intéresse au débruitage de signaux aléatoires en utilisant un filtre de Wiener de type RIF.

Partie préliminaire

Rappelons qu'un filtre de Wiener à RIF de FT $W(z) = \sum_{k=0}^{P-1} w(k) z^{-k}$ a pour but la poursuite d'un certain signal de référence inconnu $d(n)$ en filtrant un signal observable $x(n)$, lié statistiquement à $d(n)$. Les coefficients du filtre de Wiener optimal sont choisis de façon à minimiser l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM)

$$\xi = E\{(d(n) - \hat{d}(n))^2\}$$

Ainsi, a-t-on montré, dans le cours, que le vecteur des coefficients de la RI du filtre de Wiener noté $\mathbf{w}_{opt} = [w_{opt}(0), \ldots, w_{opt}(P-1)]^T$ obéit aux équations de Wiener-Hopf comme suit

$$R_x \mathbf{w}_{opt} = \mathbf{r}_{dx}$$

où R_x est la matrice d'autocorrélation de $x(n)$ et $\mathbf{r}_{dx}$ est le vecteur d'intercorrélation du couple $(d(n), x(n))$.

1. Rappeler la forme de R_x et $\mathbf{r}_{dx}$.
2. Ecrire la sortie du filtre de Wiener optimal $\hat{d}(n)$ en fonction de $\mathbf{w}_{opt}$ et $\mathbf{x}(n) = [x(n), \ldots, x(n-P+1)]^T$.
3. Pour l'application du filtrage de Wiener en débruitage, il est clair que le signal à traiter n'est que $x(n) = d(n) + v(n)$ avec $v(n)$ un bruit blanc, centré, décorrélé de $d(n)$ et de variance σ_v^2.
Expliciter dans ce cas R_x en fonction de R_d et R_v, les matrices d'autocorrélation respectives de $d(n)$ et $v(n)$, ainsi que le vecteur d'intercorrélation $\mathbf{r}_{dx}$. on notera $r_d(k)$ l'autocorrélation du signal de référence et on précisera la valeur de R_v.
4. On appelle Rapport Signal à Bruit (RSB) avant débruitage le rapport de puissance du signal utile

(de référence donc) et de celle du bruit qui l'a entaché ($v(n)$) en dB calculé comme suit

$$RSB|_{dB} = 10.log_{10}(\frac{E\{d^2(n)\}}{E\{v^2(n)\}})$$

Après débruitage, $d(n)$ et $v(n)$ auront subi le filtrage de Wiener pour se transformer en respectivement $d'(n) = w_{opt}(n) * d(n)$ et $v'(n) = w_{opt}(n) * v(n)$. Ainsi, le RSB après débruitage devient donné par

$$RSB'|_{dB} = 10.log_{10}(\frac{E\{d'^2(n)\}}{E\{v'^2(n)\}})$$

Exprimer RSB' en fonction de $\mathbf{w}_{opt}$, R_d et R_v.
5. Montrer que la valeur de l'EQM minimale atteinte par le filtre de Wiener est

$$\xi_{min} = r_d(0) - \mathbf{w}_{opt}^T.\mathbf{r}_{dx}$$

Implémentation

(1). Générer $N = 10^3$ échantillons d'un signal de référence

$$d(n) = sin(w_0 n + \phi(n)), \quad n = 1, \ldots, N, \quad , w_0 = 0.05\pi \text{ où } \phi(n) \sim U([0, 2\pi])$$

(2). Générer le signal bruité $x(n)$ en utilisant un bruit blanc du type gaussien centré de puissance $\sigma_v^2 = 0.1$. Stocker le dans un vecteur $\mathbf{x}$
(3). Déterminer le vecteur des coefficients de la RI du filtre de Wiener d'ordre $P = 3$, $\mathbf{w}_{opt}$.
(4). Générer la sortie du filtre de Wiener $\hat{d}(n)$ qu'on stockera dans un vecteur $\mathbf{dhat}$.
(5). Afficher le signal de référence, celui bruité et le signal ainsi débruité sur le même graphe. Qu'est-ce que vous remarquez ?
(6). Déterminer ainsi les valeurs des RSB avant et après débruitage ainsi que la valeur de ξ_{min}.
(7). Afin d'étudier l'effet de l'ordre P du filtre de Wiener sur la performance de l'opération de débruitage ainsi menée, visualiser les variations de RSB' et ξ_{min} en fonction de P. Interpréter.

(8). Maintenant, nous allons considérer un signal de référence de type audio.
Ouvrir un fichier audio ***.wav** sous MATLAB avec la commande **wavread** et reprendre les mêmes étapes (2)-(7).
(9). Afin de tenir compte de la non stationnarité du signal audio, faites un découpage de ce signal en fenêtres d'analyses de durée $3ms$ et refaire le débruitage par fenêtre.
(10). Comparer ainsi les deux procédés de débruitage.